



## THESE

présentée

pour obtenir

**LE TITRE DE DOCTEUR DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE TOULOUSE**

École doctorale : **Transferts, Dynamique des Fluides, Energétique & Procédés**

Spécialité : **Dynamique des Fluides**

Par : **Marine SIMOES**

### **Modélisation eulérienne de la phase dispersée dans les moteurs à propergol solide, avec prise en compte de la pression particulaire**

Soutenue le 17 février 2006 devant le jury composé de :

M.	Gérard LAVERGNE	Professeur des Universités, SUPAERO, ONERA	Président
MM.	Olivier SIMONIN	Professeur des Universités, INPT ENSEEIHT	Directeur de thèse
	Jean-Marc HERARD	Ingénieur chercheur EDF R&D	Rapporteur
	Frédéric PLOURDE	Chargé de Recherche CNRS, LET ENSMA	Rapporteur
	Richard SAUREL	Professeur des Universités, Aix Marseille I	Examineur
	Patrick DELLA PIETA	Ingénieur de recherche SME CRB	Examineur
Mme	Nathalie CESCO	Ingénieur CNES Direction des Lanceurs	Membre invitée



# Remerciements

Cette thèse CIFRE a été soutenue en février 2006, à l'IMFT. Et me voilà à présent devant la difficile tâche de rédaction de la page de remerciements, page qui sera sûrement la plus lue de tout le manuscrit (tout en étant la moins relue, paradoxe des pages de remerciement...).

Mes premiers mots seront pour Gérard Lavergne, pour le remercier de l'honneur qu'il m'a fait en présidant mon jury de thèse. Je suis également très reconnaissante envers Richard Saurel, pour sa participation dans ce jury et pour l'intérêt qu'il a porté à mes travaux.

Je tiens à remercier vivement Jean-Marc Hérard et Frédéric Plourde qui ont accepté d'évaluer ce travail et d'en être les rapporteurs. Merci pour vos relectures minutieuses. J'adresse un remerciement particulier à Jean-Marc, que j'ai eu la chance de rencontrer lors d'un congrès à Toronto et qui a manifesté dès ce moment un vif intérêt pour ce travail de thèse. Merci pour ton implication et tes remarques constructives. Merci aussi pour tes conseils avisés concernant l'attrait touristique de certaines régions du Québec !

Que le CNES et plus particulièrement Nathalie Cesco et Eric Robert, du Département des Lanceurs, trouvent ici l'expression de ma reconnaissance pour les trois années de financement qu'ils ont accordé à ce thème de recherche.

Parmi celles et ceux qui ont contribué à l'aboutissement de ce travail, je tiens à remercier sincèrement et très chaleureusement trois personnes en particulier. Je pense bien sûr à mon directeur de thèse, Olivier Simonin : malgré l'éloignement et un emploi du temps surchargé, il a su diriger efficacement mes recherches et adapter ses exigences aux contraintes imposées par l'application industrielle spatiale de cette thèse. Il m'a appris que la persévérance paie mais que rien ne remplace la confiance en soi et l'autonomie.

Je pense aussi à Patrick Della Pieta, ingénieur de recherche à TCA et responsable industriel de cette thèse. Il a suivi mes travaux jour après jour et m'a accordé beaucoup de son temps. Merci de m'avoir initiée à la simulation des écoulements diphasiques avec le code CPS et d'avoir toujours relu attentivement mes écrits.

Et je ne peux pas oublier Franck Godfroy, responsable du laboratoire TCA et père de CPS. Merci pour l'intérêt enthousiaste que tu as porté à mes travaux et pour les différentes leçons que tu m'as données concernant l'usure du soleil, la rédaction d'un rapport ou l'art de l'investigation efficiente en cas de plante d'un calcul. Merci aussi pour les livres optimistes et pas du tout déprimants que tu m'as prêtés pour me divertir aux pires moments de ma thèse... Et sache que je reste traumatisée par deux choses : les petits mots que tu laissais sur mon bureau, rédigés en vert et annonciateurs de bonnes nouvelles (parfois) ou de catastrophes (souvent), et l'oryctérope...

Un grand merci aussi à Stany Gallier, ingénieur de recherche à TCA, pour les longues discussions que nous avons eues, entre autre à propos de la turbulence et de sa modélisation. Merci d'avoir répondu à chacune (ou presque !) de mes « question du jour ».

Merci aussi à Christine, thésarde embarquée dans la même galère, pour sa bonne humeur permanente et pour le soutien que nous nous sommes mutuellement apporté. Bon courage pour la fin de ta rédaction !

Merci à mes collègues du CRB, qui ont rendu mes journées plus agréables, malgré leurs blagues répétées sur les blondes... Merci en particulier à Marie-Jo pour sa gentillesse inégalable. Bon vent à tous !

Merci aux étudiants de l'IMFT, et surtout à Caro, pour leur accueil chaleureux lors de mes visites à Toulouse et leur témoignage de sympathie le jour de ma soutenance.

Merci aussi aux membres des services de reprographie du CRB et de l'IMFT pour leur disponibilité, leur efficacité et surtout leur rapidité d'exécution.

Merci aux copains qui ont suivi ça de loin mais qui étaient là pour me changer les idées, avec une spéciale dédicace à la mailing liste du matin...

Enfin, merci à ma famille pour son soutien sans faille (cela fait cliché mais c'est tellement vrai !) et à mon père, grand spécialiste de CorelDraw.

Et merci à celui qui est maintenant mon mari, pour avoir tout supporté et pour avoir cru en moi plus que moi-même...

# Table des matières

<b>Liste des sigles et acronymes</b>	<b>vii</b>
<b>Nomenclature</b>	<b>ix</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>Partie 1 Contexte et motivations</b>	<b>7</b>
<b>Chapitre 1 Les écoulements diphasiques dans les moteurs à propergol solide</b>	<b>11</b>
1. Généralités	11
1.1 Fonctionnement d'un moteur à propergol solide	11
1.2 Balistique interne	13
1.3 Le moteur à propergol solide d'Ariane 5 : le P230	17
1.3.1 Description	17
1.3.2 Instabilité du P230	19
1.3.3 Instabilités de combustion et instabilités hydrodynamiques	20
2. Instabilités de fonctionnement des MPS	21
2.1 L'écoulement de Taylor	21
2.2 Les instabilités hydrodynamiques	23
2.2.1 Le Vortex Shedding d'Angle (VSA)	23
2.2.2 Le Vortex Shedding d'Obstacle (VSO)	24
2.2.3 Le Vortex Shedding Pariétal (VSP)	25
2.3 Le couplage aéro-acoustique	27
2.3.1 Travaux pionniers, basés sur le VSO	27
2.3.2 Mise en évidence expérimentale	28
2.3.3 Scénario global	28
2.4 Autres phénomènes influents	29
3. La phase dispersée	30
3.1 L'aluminium dans le MPS P230	30
3.1.1 La combustion de l'aluminium	31
3.1.2 Interactions avec l'écoulement gazeux	32
3.2 Rôle des particules par rapport aux ODP	33
3.3 Pourquoi des propergols aluminisés?	34
4. Vers une maîtrise des instabilités du P230	35
4.1 Le P230 : une situation complexe	35
4.2 Prédiction des instabilités	36
4.3 Intérêt de la simulation numérique	37
4.4 Comment atténuer l'effet des ODP	37
4.4.1 Forme du chargement	37
4.4.2 Protection thermique de face	38
4.4.3 Modification de la phase dispersée	38
4.5 Objectifs de la thèse	39
5. Conclusion	39
<b>Chapitre 2 La modélisation diphasique eulérienne et ses limites</b>	<b>41</b>
1. Hypothèses de base de la modélisation diphasique	41
1.1 Simulation d'un MPS	42
1.2 Un peu de turbulence	43
1.3 Les différents régimes d'écoulements diphasiques	45

1.3.1	Echelles caractéristiques d'un écoulement diphasique.....	45
1.3.2	L'écoulement diphasique considéré dans nos travaux.....	46
1.4	Hypothèses de modélisation de la phase dispersée.....	47
1.4.1	Sur la combustion des particules.....	47
1.4.2	Sur les particules dans l'écoulement.....	49
1.4.3	Sur la nature de l'écoulement diphasique.....	49
1.4.4	Sur les échanges entre phases gazeuse et solide.....	49
2.	Le modèle diphasique eulérien dilué de CPS.....	50
2.1	La phase gazeuse.....	50
2.2	La phase dispersée.....	52
2.3	Les termes de couplage.....	52
2.4	Défaut de ce type de modèle.....	53
3.	Simulations lagrangiennes.....	53
3.1	Calcul des trajectoires de particules.....	54
3.1.1	Intégration des équations pour une particule.....	54
3.1.2	Calcul d'un gradient de vitesse de l'écoulement gazeux.....	56
3.1.3	Traitement de l'axe de symétrie.....	56
3.2	Opération de moyenne.....	56
3.2.1	Définition du débit massique par trajectoire.....	57
3.2.2	Fraction volumique moyenne.....	57
3.2.3	Vitesse moyenne.....	58
4.	Comparaison des résultats des simulations Euler/Lagrange.....	59
4.1	Principe des comparaisons.....	59
4.2	Présentation du cas de calcul : le TEP.....	60
4.3	Résultats des comparaisons.....	61
4.3.1	Petites particules (5 $\mu$ m de diamètre).....	61
4.3.2	Particules moyennes (30 $\mu$ m de diamètre).....	62
4.3.3	Grosses particules (100 $\mu$ m de diamètre).....	63
4.4	Distribution de vitesse.....	65
4.5	Analyse des résultats.....	66
5.	Conclusion.....	67

## **Partie 2 Modélisation numérique diphasique avec pression particulaire** **69**

### **Chapitre 3 Formalisme théorique de la modélisation diphasique eulérienne** **71**

1.	La modélisation diphasique.....	71
2.	Formalisme théorique.....	72
2.1	Modélisation de base.....	72
2.2	Approche à deux fluides.....	73
2.3	Approche cinétique.....	74
3.	Equations d'évolution d'une particule.....	76
3.1	Equation d'évolution de la masse d'une particule.....	76
3.2	Equation d'évolution de la quantité de mouvement d'une particule.....	76
3.3	Equation d'évolution de la température d'une particule.....	77
4.	Le Formalisme Eulérien Mésoscopique (MEF).....	78
4.1	Théorie.....	78
4.2	Equations continues moyennées pour la phase dispersée.....	81
4.2.1	Bilan de masse.....	81
4.2.2	Bilan de quantité de mouvement.....	81
4.2.3	Bilan d'énergie totale.....	82

4.3	Approche LES.....	83
4.3.1	Principe.....	83
4.3.2	Modélisation retenue pour notre étude.....	84
5.	Conclusion.....	86

**Chapitre 4 Modèles diphasiques avec pression particulaire pour l'application aux moteurs à propergol solide 89**

1.	Clôture du système d'équations.....	89
1.1	Relation de fermeture pour le tenseur des corrélations triples.....	90
1.2	Modélisation du tenseur des contraintes cinétiques mésoscopiques.....	91
2.	Les modèles diphasiques à pression particulaire.....	94
2.1	Le modèle complet (CPPM).....	94
2.1.1	Système d'équations.....	94
2.1.2	Problème de réalisabilité.....	96
2.2	Le modèle simplifié (SPPM).....	97
2.3	Principe du maximum.....	98
3.	Pertinence du tenseur cinétique.....	99
4.	Validation des hypothèses effectuées.....	101
4.1	Méthode de calcul du tenseur cinétique.....	101
4.2	Hypothèse du modèle à pression particulaire complet.....	103
4.3	Hypothèses du modèle à pression particulaire simplifié.....	105
5.	Conclusion.....	107

**Chapitre 5 Analyse mathématique du système convectif à pression particulaire 109**

1.	Le problème de Riemann.....	109
2.	Résolution exacte du problème de Riemann pour les modèles diphasiques à pression particulaire.....	112
2.1	Système convectif du CPPM.....	112
2.2	Entropie du système.....	112
2.3	Hyperbolicité du système convectif du CPPM.....	114
2.4	Ecriture d'un solveur de Godunov.....	114
2.4.1	Ondes de choc.....	115
2.4.2	Ondes de détente.....	117
2.4.3	Onde de discontinuité.....	118
2.4.4	Structure de la solution et résolution.....	118
2.5	Résolution pour le système convectif du SPPM.....	121
2.5.1	Entropie du système.....	122
2.5.2	Hyperbolicité du système convectif du SPPM.....	122
2.5.3	Ecriture d'un solveur de Godunov.....	122
3.	Résolution approchée du problème de Riemann pour les modèles diphasiques à pression particulaire.....	124
3.1	Principe.....	124
3.2	Ecriture d'un solveur de Roe (SPPM).....	125
3.2.1	Etude théorique.....	125
3.2.2	Le cas test du tube à choc.....	127
3.3	Ecriture d'un solveur de Roe-Toumi (CPPM).....	128
3.3.1	Etude théorique.....	129
3.3.2	Cas test du tube à choc.....	132
4.	Traitement des zones de vide.....	135
4.1	Etat initial vide de particules.....	135

4.2	Apparition du vide .....	136
4.3	Modification du solveur de Roe.....	137
5.	Traitement de la condition limite débitante .....	137
5.1	Le problème de Riemann partiel à la condition limite .....	138
5.2	Validation.....	140
5.3	Application au modèle simple (SPPM) .....	142
6.	Conclusion .....	143

## **Chapitre 6 Implantation numérique dans CPS et validation des modèles à pression particulière 145**

1.	Le code CPS .....	145
1.1	Présentation des modèles physiques .....	145
1.2	Présentation des méthodes numériques .....	146
1.3	Prise en compte de la phase dispersée .....	146
1.4	Implantation des modèles diphasiques à pression particulière .....	147
2.	Les flux convectifs .....	148
2.1	Traitement numérique .....	148
2.2	Application à un cas test de compression .....	149
2.2.1	Description du cas de calcul.....	149
2.2.2	Résultats SPPM .....	149
2.2.3	Résultats CPPM.....	151
3.	Les flux diffusifs (CPPM) .....	153
3.1	Traitement numérique.....	153
3.2	Cas test d'accumulation de particules en paroi.....	153
3.3	Cas test d'une couche de cisaillement .....	154
4.	Les termes sources .....	155
4.1	Intégration analytique .....	156
4.1.1	La fraction volumique .....	157
4.1.2	La variable $\lambda$ (CPPM) .....	157
4.1.3	Les vitesses.....	159
4.1.4	Les températures .....	159
4.2	Second membre en axisymétrique.....	161
4.3	Cas test d'une boîte fermée .....	162
5.	Comparaisons de calculs réalisés avec les trois modèles diphasiques eulériens .....	164
5.1	Calcul d'une couche de cisaillement .....	164
5.2	Calcul d'une couche de mélange diphasique instationnaire.....	167
5.3	Vers un modèle de glissement algébrique .....	170
6.	Conclusion .....	172

## **Partie 3 Résultats et interprétations 173**

### **Chapitre 7 Application des modèles diphasiques à deux configurations de propulseur 175**

1.	Résultats de simulations SPPM .....	175
1.1	Simulation du TEP : estimation de la constante du modèle .....	175
1.1.1	Principe.....	175
1.1.2	Résultats.....	176
1.2	Simulations du LP6.....	178
1.2.1	Description du cas de calcul, le LP6 .....	178
1.2.2	Interprétation des résultats .....	178
1.3	Limites du SPPM.....	181



1.3.1	Indépendance de $\lambda$ par rapport à l'écoulement.....	181
1.3.2	Indépendance de $\lambda$ par rapport au cas de calcul.....	181
1.3.3	Estimation de la valeur de $\lambda$ .....	183
2.	Résultats CPPM	185
2.1	Simulations du TEP .....	185
2.2	Simulations du LP6.....	186
2.3	Limites du CPPM.....	187
2.4	Analyse de la validité de la modélisation diphasique avec pression particulaire .....	188
3.	Conclusion	189
	<b>Chapitre 8 Rôle de la phase dispersée sur les oscillations de pression</b>	<b>191</b>
1.	La théorie linéaire	191
1.1	Principe .....	191
1.2	Application à un propulseur .....	192
2.	Scénario explicatif du rôle d'une phase dispersée inerte sur les ODP	193
3.	Simulations du LP6 (SPPM)	194
3.1	Etude paramétrique.....	194
3.1.1	Principe.....	194
3.1.2	Méthode de comparaison des résultats.....	195
3.2	Résultats des simulations.....	196
3.3	Influence du paramètre $\lambda$ .....	199
3.4	Analyse critique.....	200
4.	Conclusion	201
	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>203</b>
	<b>Annexe A Résultats des comparaisons Euler/Lagrange</b>	<b>207</b>
	<b>Annexe B Equations du formalisme mésoscopique eulérien</b>	<b>212</b>
	<b>Annexe C Equations autour du tenseur des contraintes cinétiques particulaire</b>	<b>218</b>
	<b>Annexe D Résultats des simulations SPPM sur les TEP et LP6</b>	<b>223</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>229</b>



# Liste des sigles et acronymes

ASSM	Aerodynamics of Segmented Solid Motors
CIFRE	Convention Industrielle pour la Formation par la REcherche
CNES	Centre National d'Etudes Spatiales
CPPM	Complete Particulate Pressure Model
CPS	Code de Propulsion Spatiale
DNS	Direct Numerical Simulation
EAP	Etage d'Accélération à Poudre
EPC	Etage Principal Cryotechnique
ESA	European Space Agency
FAV	Fond Avant
FAR	Fond ARrière
IMFT	Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse
IUSTI	Institut Universitaire des Systèmes Thermiques Industriels
LES	Large Eddy Simulation
LP6	... maquette à l'échelle 1/15 <sup>ème</sup> du MPS P230
LP9	... maquette à l'échelle 1/35 <sup>ème</sup> du MPS P230, démonstrateur du VSP
LP10	... maquette à l'échelle 1/35 <sup>ème</sup> du MPS P230
MEF	Mesoscopic Eulerian Formalism
MICAT1	... montage d'investigation ENSMA
MPS	Moteur à Propergol Solide
ODP	Oscillations De Pression
ONERA	Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales
P230	... MPS d'Ariane 5, contenant 230 tonnes de propergol
PDF	Probability Density Function
PLIF	Planar Laser Induced Fluorescence
POP	Programme Oscillations de Poussée
PT	Protection Thermique
PTF	Protection Thermique de Face
SGE	Simulation des Grandes Echelles
SIERRA	Simulation Instationnaire d'Ecoulements et de Régimes Réputés Acoustiques (code ONERA)
SME	SNPE Matériaux Energétiques
SPPM	Simplified Particulate Pressure Model
TEP	... moteur cylindrique fictif (ONERA)
VALDO	Veine Axisymétrique pour Limiter le Développement des Oscillations
VECLA	Veine d'Essai de la Couche Limite Acoustique
VIOLETTE	Vortex Internal Organization Leading to Experimental Turbulent Trajectory Evaluation
VSA	Vortex Shedding d'Angle
VSO	Vortex Shedding d'Obstacle
VSP	Vortex Shedding Pariétal



# Nomenclature

Les numéros entre crochets donnent le numéro du chapitre dans lequel le lecteur pourra trouver, si besoin, une définition du terme correspondant.

## Lettres latines majuscules

$\tilde{\mathbf{A}}$	matrice de Roe	[5]
$\tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{C}}$	matrices permettant de déterminer l'état moyen de Roe	[5]
$C_D$	coefficient de débit	[1]
$C_D$	coefficient de traînée	$C_D = \max \left\{ \frac{24}{\text{Re}_p} \left( 1 + 0,15 \text{Re}_p^{0,687} \right); 0,445 \right\}$
$\mathbf{C}_p$	vitesse particulaire, espace des phases ( $m.s^{-1}$ )	
$C_p$	capacité calorifique à pression constante ( $J.kg^{-1}.K^{-1}$ )	
$C_\mu$	constante (modèle de turbulence monophasique)	$C_\mu = 0,09$
$E_{gaz}$	énergie totale gaz ( $J.kg^{-1}$ )	$E_{gaz} = e + E_c$
$E_p$	énergie totale particulaire ( $J.kg^{-1}$ )	$E_p = e_p + E_{c,p} + \delta\theta_p$
$E_c$	énergie cinétique moyenne ( $J.kg^{-1}$ )	
$\mathbf{F}$	force de traînée	$F_i = -\rho_{gaz} \frac{\pi d_p^2}{8} C_D \ \mathbf{v}_r\  (\tilde{\mathbf{u}}_{p,i} - \mathbf{u}_{g@p,i})$
$\mathbf{F}(\mathbf{W})$	flux convectifs	
$H$	enthalpie	$J.kg^{-1}$
$H_p$	enthalpie particulaire ( $J.kg^{-1}$ )	$H_p = E_p + P_p / \rho$
$H$	terme source sur $\lambda$ [6]	$H = -\frac{2}{\tau_{gp}^F} + \frac{\gamma-1}{2} \tau_{gp}^F S^2$
$H_f$	réalisation du fluide (MEF)	[3]
$I_s$	impulsion spécifique ( $s$ )	
$\mathbf{J}$	matrice jacobienne	[5]
$M_i$	nombre de Mach, condition limite d'injection [5]	$M_i =  \mathbf{u}_i  / c_i$
$M$	terme source sur $\lambda$ [6]	$M = H + 2 / \tau_{gp}^F$
$Nu$	nombre de Nusselt	$Nu = 2 + 0,55 \text{Re}_p^{1/2} \text{Pr}^{1/3}$
$P_p$	pression particulaire (Pa)	$P_p = (\gamma - 1) \rho \delta\theta_p = (\gamma - 1) \lambda \rho^\gamma$
$\text{Pr}$	nombre de Prandtl	$\text{Pr} = \rho_{gaz} \nu_{gaz} C_p / \lambda_{gaz}$
$\mathbf{Q}, \mathbf{R}$	matrices utilisées dans la méthode de Roe-Toumi	[5]
$\text{Re}_p$	nombre de Reynolds particulaire	$\text{Re}_p = d_p \ \mathbf{v}_r\  / \nu_{gaz}$
$\tilde{\mathbf{S}}$	tenseur des taux de déformation particulaire	$S_{ij} = \frac{\partial \tilde{u}_{p,i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_{p,j}}{\partial x_i} - (\gamma_p - 1) \frac{\partial \tilde{u}_{p,m}}{\partial x_m} \delta_{ij}$
$S^2$	produit contracté	$S^2 = S_{ij} S_{ij} / 2$
$St$	nombre de Stokes	$St = \omega \tau_u^s$
$T$	température ( $K$ )	
$\mathbf{W}$	vecteur des variables conservatives	[5]

## Lettres latines minuscules

$b_{pij}$	partie anisotrope du tenseur des contraintes cinétiques particulaire	[4]
$c$	vitesse du son diphasique [5]	$c = \sqrt{\gamma(\gamma - 1)\lambda\rho^{\gamma-1}}$
$d_p$	diamètre des particules ( $m$ )	
$e$	énergie interne ( $J.kg^{-1}$ )	
$f$	fréquence ( $s^{-1}$ )	
$f_m$	fraction massique	$f_m = M_p / (M_p + M_g)$
$\tilde{f}_p^{(1)}$	fonction de densité de probabilité conditionnelle (MEF)	[3]
$\dot{m}$	débit massique ( $kg.s^{-1}$ )	
$m_p$	masse d'une particule ( $kg$ )	
$\tilde{n}_p^{(1)}$	densité particulaire mésoscopique (MEF)	[3]
$\dot{q}_j$	débit massique de particules associé à une trajectoire ( $kg.s^{-1}$ )	[2]
$\mathbf{r}_i$	vecteur propre, solveur numérique	[5]
$\tilde{u}_j(t)$	vitesse instantanée de la trajectoire $j$ ( $m.s^{-1}$ )	[2]
$\overline{\tilde{u}}_{j,i}(\Omega)$	vitesse moyenne sur le pas de temps $\delta t_{ij}$ de la trajectoire $j$ dans l'élément $\Omega$ ( $m.s^{-1}$ )	[2]
$\overline{\tilde{u}}_j(\Omega)$	vitesse moyenne de la trajectoire $j$ dans l'élément $\Omega$ ( $m.s^{-1}$ )	[2]
$\overline{\tilde{u}}(\Omega)$	vitesse moyenne de l'ensemble des trajectoires de l'élément $\Omega$ ( $m.s^{-1}$ )	[2]
$\tilde{\mathbf{u}}_p$	vitesse mésoscopique eulérienne (MEF) ( $m.s^{-1}$ )	[3]
$\mathbf{u}_p^{(m)}(t)$	vitesse instantanée d'une particule ( $m.s^{-1}$ )	[3]
$\hat{\mathbf{u}}_{g@p}$	vitesse du fluide "vu" par la particule ( $m.s^{-1}$ )	[3]
$\mathbf{v}_r$	vitesse de glissement	$\mathbf{v}_r = \mathbf{u}_p - \hat{\mathbf{u}}_{g@p}$
$x, y, \theta$	coordonnées axisymétriques	

## Lettres grecques majuscules

$\Delta T_j$	temps de séjour dans la chambre pour la trajectoire $j$ [2]	$\Delta T_j = \sum_{\Omega} \Delta T_{j\Omega}$
$\Delta T_{j\Omega}$	temps de traversée de la cellule $\Omega$ pour la trajectoire $j$	[2]
$\Pi$	rapport des niveaux d'ODP en diphasique et en monophasique	[8]

## Lettres grecques minuscules

$\alpha_p$	fraction volumique de la phase dispersée	$\alpha_p = V_p / (V_p + V_{gaz})$
$\alpha^*$	coefficient d'amortissement (théorie de Temkin et Dobbins)	[8]
$\delta_{ij}$	symbole de Kronecker	
$\delta t_{ij}$	pas de temps de calcul $i$ de la trajectoire $j$ ( $s$ )	[2]
$\overline{\delta\sigma}_p$	tenseur des contraintes cinétiques mésoscopiques particulaire	$\overline{\delta\sigma}_{p,ij} = \langle \delta u_{p,i} \delta u_{p,j} \rangle_p$
$\overline{\delta\tau}_p$	partie anisotrope du tenseur des contraintes cinétiques particulaire	$\overline{\delta\tau}_{p,ij} = -\nu_p S_{ij}$
$\delta \mathbf{u}_p^{(m)}(t)$	contribution aléatoire décorrélée (MEF) [3]	$\delta \mathbf{u}_p^{(m)}(t) = \mathbf{u}_p^{(m)}(t) - \tilde{\mathbf{u}}_p(\mathbf{x}_p^{(m)}(t), t)$
$\delta\theta_p$	énergie cinétique fluctuante des particules	$\delta\theta_p = \frac{1}{2} \langle \delta u_{p,k} \delta u_{p,k} \rangle_p$
$\gamma = \gamma_p$	coefficient géométrique (loi de pression particulaire), vaut 2 en 2D plan, 5/3 sinon	

$\gamma_{gaz}$	indice isentropique du gaz	
$\lambda$	variable des modèles à pression particulaire	$\lambda = \rho^{1-\gamma} \delta\theta_p$
$\lambda_{gaz}$	conductivité thermique du gaz ( $J.s^{-1}.m^{-1}.K^{-1}$ )	
$\lambda_i$	valeur propre	[5]
$\mu_{gaz}$	viscosité dynamique du gaz	
$\mu_p$	viscosité dynamique de la phase dispersée	$\mu_p = P_p \tau_{gp}^F / 2$
$\nu_{gaz}$	viscosité cinématique du gaz ( $m^2.s^{-1}$ )	
$\nu_p$	pseudo-viscosité de la phase dispersée	$\nu_p = (\gamma - 1) \tau_{gp}^F \delta\theta_p / 2$
$\rho$	masse apparente de la phase dispersée	$\rho = \alpha_p \rho_p$
$\rho_{gaz}$	masse volumique du gaz ( $kg.m^{-3}$ )	
$\rho_p$	masse volumique des particules ( $kg.m^{-3}$ )	
$\sigma$	vitesse de propagation d'un choc ( $m.s^{-1}$ )	
$\underline{\underline{\sigma}}$	tenseur des contraintes visqueuses du gaz	
$\tau_H$	temps de relaxation thermique	$\tau_H = \frac{\rho_p C_{p,p} d_p^2}{6 \lambda_{gaz} Nu}$
$\tau_H^s$	temps de relaxation thermique dans l'hypothèse de Stokes	$\tau_H^s = \frac{3}{2} \frac{C_{p,p}}{C_p} Pr \tau_u^s$
$\tau_u$	temps de relaxation dynamique d'une particule	$\frac{1}{\tau_u} = \frac{\rho_{gaz}}{\rho_p} \frac{3}{4} \frac{C_D}{d_p} \ \mathbf{v}_r\ $
$\tau_u^s$	temps de relaxation dynamique dans l'hypothèse de Stokes	$\tau_u^s = \frac{\rho_p d_p^2}{18 \mu_{gaz}}$
$\tau_{gp}^F$	temps de relaxation dynamique MEF [3]	$1 / \tau_{gp}^F = \langle 1 / \tau_u \rangle_p$
$\omega$	pulsation	$\omega = 2\pi f$
$\omega_p$	vitesse particulaire dans le cadre des modèles de glissement	[6]

## Symboles

$\sim$	formalisme mésoscopique eulérien	[3]
$\hat{\cdot}$	moyenne de Favre	[3]

## Indices

$(\cdot)_{euler}$	relatif à un résultat de calcul Euler
$(\cdot)_{lag}$	relatif à un résultat de calcul Lagrange
$(\cdot)_g, (\cdot)_{gaz}$	relatif à la phase fluide (gaz)
$(\cdot)_i$	relatif à la cellule d'injection
$(\cdot)_F$	relatif à l'état à l'interface du problème de Riemann
$(\cdot)_G, (\cdot)_D$	relatif aux états gauche et droit du problème de Riemann
$(\cdot)_p$	relatif à la phase dispersée ou à une particule
$(\cdot)_{SGS}$	relatif à la modélisation SGE

## Exposants

$(\cdot)^*$	relatif à l'état intermédiaire du problème de Riemann	[5]
$(\cdot)^*$	variable à l'issue de l'intégration des flux convectifs et diffusifs (méthode des pas fractionnaires)	





# Introduction générale

*"L'humanité serait renfermée dans un cercle de Popilius qu'elle ne saurait franchir, et condamnée à végéter sur ce globe sans jamais pouvoir s'élancer dans les espaces planétaires! Il n'en est rien!"*

Jules Verne<sup>1</sup> avait raison... L'Homme a effectivement réussi à réaliser un vieux rêve : s'arracher à l'attraction terrestre pour traverser l'océan atmosphérique et conquérir l'Espace.

A la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle, Konstantin Tsiolkovski, professeur de mathématique et de physique russe, comprend que dans le vide spatial la propulsion par réaction est possible. En 1957 apparaît, en ex-URSS, la fusée moderne capable de créer sa propre force motrice aussi bien dans l'atmosphère que dans le vide spatial. Le premier lanceur américain décollera un an plus tard, suivi en 1965 du lanceur français Diamant qui mettra sur orbite le satellite Astérix.

Depuis, pour des raisons économiques, les programmes français de développement de lanceurs sont devenus européens. En 1973, les ministres européens des affaires spatiales décident de produire un lanceur de satellite baptisé Ariane, du nom du personnage mythologique grec éponyme. Le premier lancement aura lieu le 24 décembre 1979. Il sera suivi de plusieurs dizaines d'autres tirs, effectués successivement par les lanceurs Ariane 2, Ariane 3 et Ariane 4.

L'enjeu stratégique et politique initial (en plus de l'indéniable intérêt scientifique de l'exploration spatiale) se transforme en enjeu économique lorsqu'émerge dans les années 1980 un véritable marché dans le domaine du transport spatial. Il ne s'agit plus seulement d'assurer le maintien de l'indépendance européenne dans le domaine de l'accès à l'espace, il est également indispensable d'assurer la position des lanceurs européens sur le marché des vols commerciaux. C'est la mission du programme Ariane 5, décidé dès 1987. Ce programme est dirigé par l'ESA, maître d'ouvrage, et la réalisation est assurée par le CNES, maître d'œuvre. La société Arianespace se charge de la commercialisation du lanceur et de la conduite des opérations de lancement sur le site de Kourou. Ce lanceur, plus puissant que ses prédécesseurs, doit être capable d'emmener des charges particulièrement lourdes en orbite (jusqu'à 10 tonnes<sup>2</sup>). Il répond ainsi à un besoin du marché : lancer des satellites de plus en plus lourds dans un contexte de plus en plus concurrentiel.

S'appuyant sur l'acquis technologique des précédents lanceurs, le lanceur Ariane 5 est conçu dans un souci de simplicité et de fiabilité élevée. Ce dernier critère est en effet indispensable à la réalisation de vols habités pour lesquels le lanceur est initialement prévu. Ce projet de navette européenne Hermes, trop coûteux, a été abandonné en 1992, mais il a largement influé sur la conception du lanceur.

Ariane 5 marque en effet un changement profond dans l'architecture et les technologies mises en œuvre pour sa construction (cf. Figure 0- 1). L'étage principal cryotechnique (EPC) est équipé d'un moteur VULCAIN, vingt fois plus puissant que le moteur qui équipait Ariane 4. A cet étage principal, sont accolés deux propulseurs à poudre (cf. Figure 0- 2) qui fournissent l'essentiel de la poussée (92%) pendant la traversée de l'atmosphère. Ces derniers sont largués environ 130 secondes après décollage, à une altitude de 66 km. Le premier étage continue à fonctionner et fait sortir le lanceur de l'atmosphère. Il est largué environ 9 minutes après décollage, juste avant l'allumage du deuxième étage. Le lanceur adopte alors progressivement une trajectoire horizontale,

---

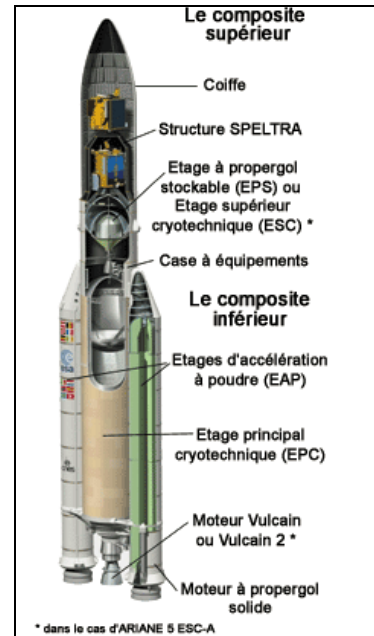
<sup>1</sup> *De la Terre à la Lune. Trajet direct en 97 heures 20 minutes.* Jules Verne, 1865.

<sup>2</sup> Contre 4,8 tonnes pour le modèle le plus puissant d'Ariane 4.

et sa vitesse augmente jusqu'à atteindre la vitesse souhaitée (plus de 8500 m/s). Le moteur du deuxième étage est alors éteint. Le lanceur poursuit sa mission et libère la charge utile en lui communiquant sa vitesse.



**Figure 0-1 : Les différentes versions d'Ariane (source CNES)**



**Figure 0-2 : Les différents étages d'Ariane 5**

Les débuts d'Ariane 5 sont difficiles. Le premier tir a lieu le 4 juin 1996, à Kourou, mais c'est un échec : le lanceur doit être détruit après approximativement 40 secondes de vol, pour cause d'erreur informatique. Le second tir se déroule le 30 octobre 1997, la mission est achevée, mais l'altitude atteinte n'est pas celle désirée<sup>3</sup>. Il faut donc attendre le 21 octobre 1998, et le vol 112, pour qualifier le lanceur Ariane 5. Le premier vol commercial a lieu le 10 décembre 1999.

Pour s'adapter aux besoins du marché, le lanceur européen est également doté d'une architecture évolutive qui lui permet de lancer aussi bien des "petits" satellites que des "gros". Ainsi, Ariane 5 ECA est conçue pour placer en orbite géostationnaire des charges utiles de 10 tonnes. Pour cela, les accélérateurs peuvent emporter environ 2,5 tonnes de propergol supplémentaires, soit un incrément de poussée de 50 tonnes dans les 20 secondes suivant le décollage. Les étages cryotechniques, dotés des moteurs HM-7B d'Ariane 4 et VULCAIN 2 sont également plus puissants. Le premier vol de cette version "10 tonnes" d'Ariane 5, le 11 décembre 2002, est un échec à cause d'une fuite dans le circuit de refroidissement de la tuyère du moteur VULCAIN 2. Mais le 12 février 2005 voit la qualification en vol du lanceur Ariane 5 ECA (cf. Figure 0- 3) et la mise en orbite de deux charges utiles d'un poids total de 8,3 tonnes. Depuis, une Ariane 5 "générique" a mis sur orbite de transfert géostationnaire le plus gros satellite de communication jamais construit : Thaïcom 4-Ipstar, de près de 6,5 tonnes.

Pour atteindre les objectifs fixés à Ariane 5, le lanceur a été doté de deux Moteurs à Propergol Solide (MPS). Les ergols solides ont l'avantage d'être facilement stockables et de manipulation relativement aisée. De plus, ils délivrent une forte poussée, en un temps minime, à partir d'une masse et

<sup>3</sup> Le lanceur a subi un mouvement de rotation sur lui-même dont l'intensité avait été sous-estimée.

d'un volume réduits. Utilisée au décollage, la propulsion solide présente toutefois un inconvénient majeur : une fois initiée la combustion du propergol ne peut plus être stoppée, le lancement est alors inévitable.



**Figure 0- 3 : Vol 164, Ariane ECA (source ESA)**

Les boosters<sup>4</sup> d'Ariane 5 sont les plus grands moteurs à propergol solide jamais produits en Europe : 30 m de haut, 3 m de diamètre et 35t chacun quand ils sont vides. Chacun d'eux contient environ 230 tonnes de propergol<sup>5</sup> solide, élastomère chargé énergétique qui ressemble à une gomme dure caoutchouteuse où combustibles et comburants sont mélangés.

Des particules d'aluminium sont également contenues dans ce propergol car cela permet d'augmenter de façon sensible les performances du moteur. Lorsque le propergol brûle, ces particules d'aluminium émergent à sa surface de réaction et sont entraînées dans la chambre de combustion. L'aluminium s'oxyde alors au contact des gaz issus de la combustion du propergol, et produit de l'alumine liquide  $Al_2O_{3(l)}$ . L'écoulement à l'intérieur de la chambre est donc composé de deux phases : l'une est gazeuse et constituée par les gaz de combustion du propergol (phase continue), l'autre est liquide<sup>6</sup> sous forme de particules d'alumine (phase dispersée). La présence de cette phase dispersée dans l'écoulement peut avoir des conséquences non négligeables sur le fonctionnement du moteur, et notamment par rapport à sa stabilité.

En effet, le P230 est sujet à des instabilités de fonctionnement qui se traduisent par des oscillations de pression (ODP) de basses fréquences, autour des fréquences de ses premiers modes longitudinaux. Même si ces instabilités, plus ou moins prononcées, n'ont jamais menacé l'intégrité du moteur, elles n'en constituent pas moins une source de vibrations gênantes pour la charge utile et les équipements. La réduction des instabilités et/ou de leurs conséquences s'impose donc comme un objectif majeur pour la conception des prochains MPS mais également dans l'optique du développement des futurs lanceurs européens. Des recherches actives ont été menées sur ce sujet,

---

<sup>4</sup> Ce terme, largement employé, a le mérite d'éclaircir les idées du quidam non versé dans les techniques aérospatiales ; néanmoins il est inapproprié pour Ariane 5 car ses moteurs à propergol solide ne servent pas de propulseurs d'appoint mais fournissent l'essentiel de la poussée.

<sup>5</sup> D'où leur nom de MPS P230 ou P230.

<sup>6</sup> Cette phase liquide sera abusivement appelée phase solide dans ce document (comme dans de nombreux papiers...).

---

particulièrement ces quinze dernières années au niveau européen. Elles ont permis d'acquérir une meilleure compréhension du fonctionnement d'un moteur à propergol solide type P230 et des divers phénomènes influents dans le scénario du développement des instabilités.

Ainsi, il a été mis en évidence le rôle important de la phase dispersée sur les amplitudes des ODP atteintes. Néanmoins, l'effet précis de cette phase dispersée reste mal compris. En effet, selon les configurations, la présence de particules dans l'écoulement entraîne soit une atténuation, soit une amplification des oscillations. Le caractère diphasique des écoulements internes au P230 est donc un paramètre important vis-à-vis de la compréhension et de la prévision des ODP du MPS. Une simulation fiable et correcte du comportement d'un propulseur passe donc nécessairement par une modélisation précise de la phase dispersée.

Le code de mécanique des fluides CPS<sup>7</sup>, développé par SNPE Matériaux Energétiques (SME) avec le soutien financier du CNES, est utilisé pour simuler des écoulements présentant une phase condensée. Le modèle eulérien diphasique disponible dans ce code, bien que relativement simple, a permis d'effectuer de nombreuses simulations de fonctionnement de MPS (maquette ou échelle 1). Les résultats obtenus sont globalement satisfaisants mais un défaut persiste : le taux de présence des particules peut être très nettement sur-estimé dans certaines zones de l'écoulement.

L'objectif de cette thèse CIFRE, qui s'inscrit dans le cadre des programmes de R&T co-financés par SME et le CNES, est donc double : améliorer, avec l'aide de l'IMFT, le modèle diphasique eulérien de CPS et étudier le rôle de la phase dispersée sur les instabilités des MPS.

Ce rapport présente les travaux effectués durant les trois ans qu'aura duré cette thèse. A l'ordre chronologique, nous avons évidemment préféré la logique et la clarté dans l'enchaînement des chapitres. Ce document est donc divisé en trois parties, décrivant chacune un aspect différent des travaux réalisés.

La **première partie** contient l'indispensable présentation du contexte de l'étude et des motivations qui ont poussé SME et le CNES à financer ce travail de thèse. Le **chapitre 1** est plus particulièrement dédié au fonctionnement d'un MPS et à l'intérêt que revêt la simulation numérique de la phase dispersée dans une recherche de maîtrise des instabilités du P230. Le **chapitre 2** présente une analyse du domaine de validité du modèle eulérien diphasique de CPS. Les résultats de simulations Euler et Lagrange d'écoulement dans un propulseur axisymétrique simple y sont comparés. Des limitations du modèle eulérien actuel de CPS sont ainsi mises en évidence. Cette première étape a motivé l'étude théorique qui a suivi et qui a permis de formuler une modélisation plus précise de la phase dispersée.

La **deuxième partie** du document présente cette modélisation améliorée, ainsi que son implantation numérique dans le code CPS. Le **chapitre 3**, d'un caractère assez général, développe les différentes méthodes de modélisation d'un écoulement diphasique. Parmi celles-ci, le Formalisme Eulérien Mésoscopique a été utilisé pour bâtir deux modèles diphasiques eulériens. Ces modèles, présentés au **chapitre 4**, prennent en compte un terme de pression particulaire lié à l'agitation des particules dans l'écoulement gazeux. Une phase de validation des hypothèses faites pour mettre en place ces modèles vient clore ces chapitres théoriques. Suivent alors deux chapitres à caractère très fortement numérique, qui décrivent la phase d'implantation des modèles dans le code CPS. Le **chapitre 5** aborde notamment le calcul des flux convectifs liés à la phase dispersée. Quelques cas test permettent à la fois de valider cette implantation numérique et de faciliter la lecture de ce chapitre. Ensuite, les étapes d'implantation numérique sont détaillées au **chapitre 6** et agrémentées de cas test (calcul de flux diffusif, intégration des termes sources,...). Des calculs de couche de cisaillement et de mélange diphasique instationnaire, réalisés avec les trois modèles eulériens à notre disposition, permettent notamment d'appréhender les apports du terme de pression particulaire.

---

<sup>7</sup> Plus exactement il s'agit de CPS\_P, module de CPS dédié à la propulsion solide et utilisé pour l'étude des instabilités de fonctionnement des moteurs à propergol solide.

L'objectif de la thèse étant aussi d'étudier le rôle de la phase dispersée dans un moteur, les modèles intégrés dans le code CPS ont ensuite été utilisés pour effectuer des simulations de propulseurs. Nous sommes dans la **troisième partie** qui débute par les résultats obtenus avec les deux modèles diphasiques. Dans un premier temps, une étude a été menée sur le fonctionnement stationnaire d'un propulseur simple. Des simulations d'une maquette du P230, le LP6, ont ensuite été réalisées, pour différents diamètres de particules. Les résultats sont présentés dans le **chapitre 7**. Enfin, le **chapitre 8** a pour objet la mise en évidence du rôle de la phase dispersée sur les oscillations de pression. Pour cela, les résultats de simulation du LP6 en monophasique, ou gaz équivalent<sup>8</sup>, sont comparés aux résultats obtenus pour des simulations diphasiques inertes.

Pour alléger la présentation, la majorité des développements théoriques liés à la mise au point des modèles et la plupart des résultats de calculs sont présentées en annexe. Le lecteur soucieux d'en savoir d'avantage pourra sûrement y trouver les réponses à ses questions. Précisons enfin que, sauf mention express du contraire, la convention d'Einstein s'applique lorsque des indices sont répétés.

---

<sup>8</sup> Le mélange constitué des gaz de combustion et des particules est assimilé à un gaz unique, équivalent.

---

**PARTIE 1**

**CONTEXTE  
ET  
MOTIVATIONS**

---

Le lancement d'une fusée est un spectacle devenu presque banal, grâce aux médias télévisés qui retransmettent les premiers instants de chaque tir. Pourtant, chaque lancement d'Ariane 5 est une prouesse technologique admirable, dont la réussite est basée sur de vastes programmes d'études et de recherches. L'enjeu scientifique, stratégique et financier de chaque tir est en effet tel que de nombreuses études théoriques, numériques et expérimentales ont été menées, et le sont toujours aujourd'hui, afin de prédire le comportement du lanceur européen et d'améliorer sa fiabilité.

Une partie de ces travaux porte sur les écoulements qui se développent lors du fonctionnement des moteurs à propergol solide dont est flanquée Ariane 5. Ces écoulements complexes font intervenir de nombreux phénomènes physico-chimiques : combustion du propergol, instationnarité de l'écoulement, turbulence, phase dispersée réactive,...

Comme le titre de cette thèse l'indique, nous nous sommes plus particulièrement intéressés à l'aspect diphasique de l'écoulement. En effet, la combustion d'un propergol aluminisé tel que celui utilisé pour le P230 d'Ariane 5 engendre un écoulement constitué d'une phase gazeuse et de particules liquides en suspension dans ce gaz.

Pour permettre au lecteur de comprendre l'enjeu de cette étude, nous présentons au début du chapitre 1 une description succincte d'un MPS et de son fonctionnement. Le lecteur pourra ainsi, si besoin est, se familiariser avec les notions de poussée et d'impulsion spécifique du moteur, qui sont des paramètres essentiels pour expliquer la présence de particules d'aluminium dans le propergol. Ces généralités sur les propulseurs sont ensuite étendues au cas du P230, qui est au cœur de nos préoccupations.

La notion d'instabilité de fonctionnement d'un propulseur est ensuite introduite. Dans le cas des gros moteurs comme le P230, ce phénomène d'instabilité se traduit par des oscillations de pression autour de la valeur moyenne et donc des oscillations de poussée. Si l'occurrence de ces oscillations varie relativement peu suivant les tirs, il n'en est pas de même pour leur amplitude. Or, si ces oscillations sont trop importantes, elles peuvent avoir des conséquences néfastes pour la charge embarquée ou être préjudiciable au bon fonctionnement des équipements du lanceur. Nous verrons que les divers travaux réalisés sur le sujet ont permis de mettre en évidence un couplage entre les instabilités hydrodynamiques de l'écoulement (détachement tourbillonnaire) et l'acoustique de la chambre. Ce phénomène est à présent relativement bien compris dans le cas d'écoulements monophasiques, *ie* sans présence de particules.

En revanche, les études portant sur les écoulements diphasiques tels que ceux rencontrés dans le P230 ont mené à des résultats moins probants. La présence d'une phase dispersée modifie nettement l'écoulement global interne d'un propulseur. Et cette modification peut induire, selon les configurations, une atténuation ou une amplification du niveau des oscillations. Le rôle de la phase dispersée dans les instabilités du P230 est donc à l'origine de nombreux travaux, parmi lesquels cette étude théorique et numérique.

Les oscillations de pression du P230 étant indésirables, il devient crucial de pouvoir prédire le comportement de ce moteur. Or, compte tenu de la taille et du coût d'un lanceur, et de la difficulté à réaliser des mesures fines dans un environnement hostile, la maîtrise du fonctionnement du lanceur passe aujourd'hui indéniablement (mais pas uniquement...) par la modélisation et la simulation numérique. Grâce à la précision des modèles théoriques et à la capacité des machines de calcul actuelles, la simulation numérique est en effet devenue un outil puissant et efficace, couramment utilisé dès la phase de conception.

Néanmoins la simulation numérique, souvent considérée par les néophytes comme une boîte noire ayant réponse à tout<sup>1</sup>, est toujours un compromis entre précision et faisabilité. Elle repose en effet sur une modélisation censée représenter la réalité, ou tout du moins une certaine réalité. Cette modélisation doit prendre en compte les effets essentiels, nécessaires à la compréhension de la physique que l'on cherche à représenter. Par exemple, l'effet de la rotation d'une particule dans un

---

<sup>1</sup> La qualité de la réponse en question étant souvent mise en doute...



---

écoulement diphasique réactif turbulent au sein d'un moteur à propergol solide de 30m de long sera la plupart du temps négligé, sûrement à raison.

Une fois le modèle physique choisi, il faut le traduire en équations mathématiques, qui à leur tour doivent être résolues grâce à des techniques algorithmiques. Ces techniques nécessitent une discrétisation spatiale de la configuration géométrique étudiée : un maillage fin permettra, au prix d'une augmentation du nombre d'éléments et donc du temps de calcul, de capter une physique plus précise. Finalement, les approximations liées à la simulation numérique sont variées : discrétisation spatiale et temporelle, schémas numériques, phénomènes pris en compte, etc.

Parmi ces diverses sources d'imprécisions, la modélisation physique choisie pour représenter la phase dispersée est celle que nous avons l'ambition d'améliorer. Cet aspect de l'écoulement n'a pas toujours été pris en compte dans le passé car les modèles physiques étaient limités par les capacités des machines de calcul. Or, la présence d'une phase dispersée dans l'écoulement s'est révélée, au fur et à mesure de l'enrichissement des modèles, comme un paramètre non négligeable.

Cependant, les modèles permettant de modéliser cette phase dispersée restent souvent simplistes et ne permettent pas de représenter correctement les effets des particules sur l'écoulement global et plus particulièrement sur le niveau des ODP créées. Pire, certains modèles se révèlent faux dans certaines conditions de calcul (cf. chapitre 2). On cherche alors à enrichir physiquement ces modèles, via de nouvelles équations, voire de nouvelles théories. C'est exactement dans ce contexte que se situent les travaux réalisés durant cette thèse : améliorer un modèle existant présentant un défaut dans des configurations précises.

---

# Chapitre 1

## Les écoulements diphasiques dans les moteurs à propergol solide

Ce chapitre précise le contexte de l'étude, à savoir les écoulements diphasiques rencontrés dans les chambres de combustion des moteurs à propergol solide. Il débute donc logiquement par une présentation sommaire d'un MPS et de son fonctionnement. Il ne s'agit pas de donner un cours sur la propulsion solide, pour cela on pourra se référer à Davenas (1993), référence en la matière, mais de fournir les principaux éléments nécessaires à la bonne compréhension du problème.

Ensuite, le comportement instable de certains MPS est abordé. Différents mécanismes à l'origine des oscillations sont présentés, ainsi que le couplage entre l'acoustique du canal et les instabilités hydrodynamiques de l'écoulement. Une fois ce comportement clairement présenté dans le cas des écoulements monophasiques, nous nous intéressons à l'influence de la phase dispersée et à son rôle sur l'amplitude des oscillations créées. L'objectif poursuivi dans ce chapitre est de présenter une synthèse des connaissances acquises ces quinze dernières années d'une part sur les oscillations de pression dans les MPS, et notamment dans le P230, et d'autre part sur le rôle de l'aluminium sur l'amplitude de ces oscillations. Cela permettra au lecteur d'envisager le problème dans sa globalité : de l'intérêt d'ajouter de l'aluminium au propergol à son influence sur les instabilités du moteur, en passant par la description de l'écoulement diphasique dans le propulseur.

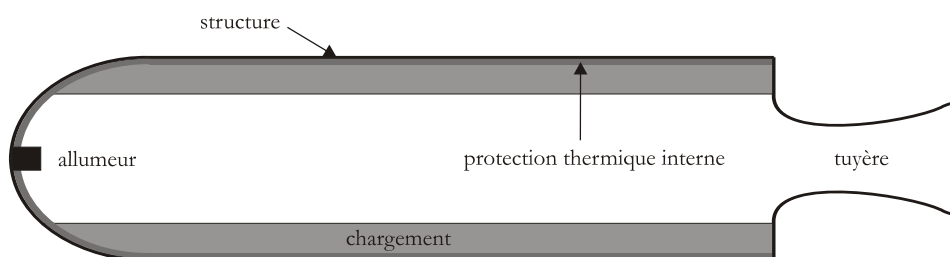
### 1. Généralités

Nous allons d'abord nous intéresser au fonctionnement d'un propulseur à propergol solide. Une rapide description de l'objet permettra d'introduire ensuite quelques principes de la balistique interne. Il faut savoir que les lois données dans ce chapitre de présentation sont des lois classiques, qui permettent de fixer les idées. D'autres modèles, plus précis, peuvent exister. Cependant, leur présentation alourdirait inutilement le contenu de ce paragraphe introductif.

#### 1.1 Fonctionnement d'un moteur à propergol solide

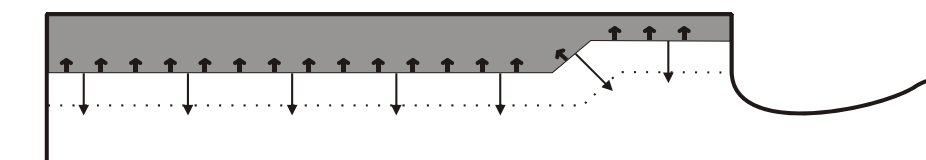
La propulsion par moteur fusée est fondée sur la troisième loi de Newton : le principe de l'action et de la réaction. Ce principe, valable dans le vide absolu, est la clé des voyages dans l'espace puisqu'il assure que l'air ambiant n'est pas indispensable au fonctionnement d'un propulseur. En effet, la force de réaction propulsive d'un moteur résulte de l'éjection à une vitesse élevée d'une partie de sa masse propre. La masse éjectée correspond aux gaz issus de la combustion sous pression du propergol contenu dans le moteur. Ces gaz sont ensuite détendus à travers une tuyère (convergent-divergent) dont le rôle est de transformer l'énergie thermique dégagée par la combustion du propergol en énergie cinétique.

Concrètement, un propulseur est schématiquement constitué d'une structure (métallique ou en matériaux composites), d'un chargement de propergol (qui constitue la réserve d'énergie du propulseur), d'une tuyère, de protections thermiques internes et d'un système d'allumage (cf. Figure 1-1). Une protection thermique (PT) est un matériau préservant les parties structurales du moteur des flux de chaleur dégagés par la combustion du propergol. Le système d'allumage est souvent constitué d'un petit chargement, lui-même allumé par un système électrique, qui apporte à la surface du propergol l'énergie nécessaire pour amorcer la combustion du chargement principal.



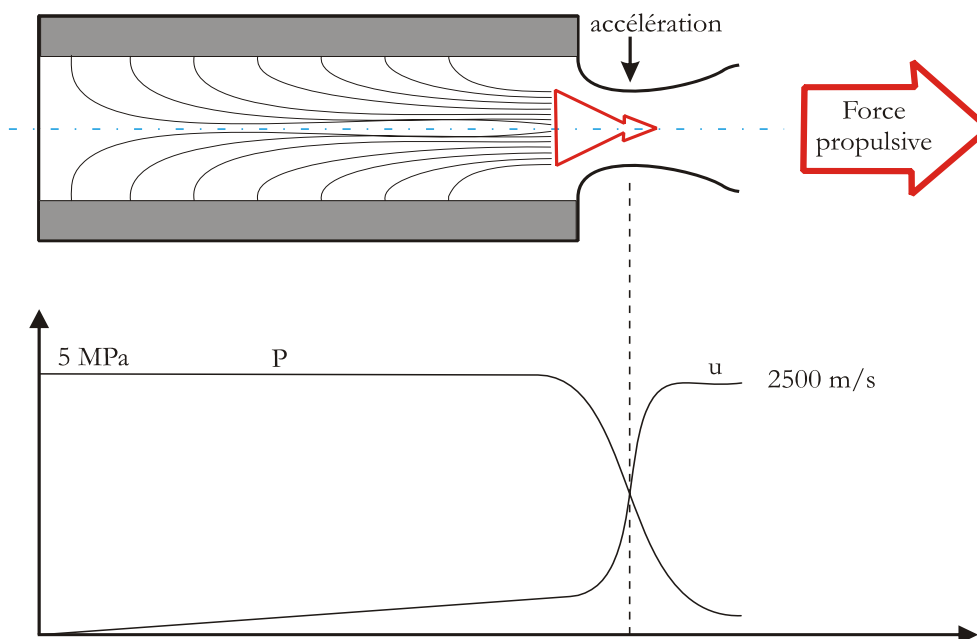
**Figure 1-1 : Structure générale d'un propulseur**

Le propergol est constitué d'un prémélange de substances solides oxydantes et réductrices. La réaction chimique de décomposition de ces substances donne naissance à la libération d'une grande quantité d'énergie et à un fort volume de gaz chauds. Cela explique les températures de fonctionnement très élevées ( $\sim 3500\text{K}$ ) et les pressions importantes (5 à  $10\text{MPa}$ ) qui règnent dans les moteurs, et ce pendant des durées de combustion allant de quelques secondes à quelques minutes. Le propergol ne nécessite pas d'apport d'oxygène externe pour son fonctionnement, toutes les molécules nécessaires étant présentes et stockées dans le matériau. Sa combustion s'effectue en fonctionnement normal par couches parallèles dont la vitesse de propagation est de l'ordre de quelques millimètres par seconde. Les produits de décomposition du matériau sont introduits dans la chambre de combustion avec une vitesse opposée au front de combustion (cf. Figure 1- 2).



**Figure 1-2 : Front de combustion et vitesse d'injection**

Les gaz issus de la combustion du propergol sont canalisés par le convergent de la tuyère, puis soumis à une détente : le divergent de la tuyère permet ainsi d'augmenter la vitesse d'éjection des gaz et donc de créer leur effet propulsif (cf. Figure 1- 3).



**Figure 1-3 : Schéma de principe d'un propulseur. Profil des vitesse axiale (U) et pression (P) dans le moteur.**

Ce système convergent-divergent pour la tuyère permet d'accroître de manière continue la vitesse des gaz depuis la chambre de combustion jusqu'au plan de sortie, en passant d'un régime subsonique dans le convergent puis sonique au col à un régime supersonique dans le divergent.

## 1.2 Balistique interne

Les notions de balistique interne d'un propulseur développées dans ce paragraphe sont largement inspirées de Lucas (1993) et Gossant (1993). Nous insistons sur le fait que celles-ci sont des notions très générales, qui permettent de fixer les idées. La réalité est évidemment bien plus complexe.

Le choix du propergol (composition, quantité, géométrie) et de la géométrie du propulseur dépend de la mission que ce dernier aura à accomplir. Les objectifs de cette mission (mise en orbite géostationnaire, sortie de l'atmosphère, correction de trajectoire etc.) imposent au propulseur d'assurer un niveau de poussée  $F$  pendant un temps  $t$  donnés. Cette poussée peut varier en fonction du temps, selon le type de mission envisagée.

La poussée d'un moteur est la résultante des forces de pression exercées sur les surfaces intérieures et extérieures du propulseur, par les gaz de combustion et la pression ambiante. Cette poussée augmente donc quand la pression extérieure diminue, et est maximale dans le vide. Notons également qu'à une altitude donnée, la poussée maximale est obtenue lorsque la tuyère est adaptée, *ie* lorsque les pressions extérieure et en sortie de tuyère sont égales<sup>1</sup>. La poussée est proportionnelle<sup>2</sup> à la pression dans la chambre  $P_c$  et à l'aire du col de la tuyère  $A_t$  :

$$F = C_F P_c A_t \quad (1.1)$$

$C_F$  est un paramètre sans dimension, appelé coefficient de poussée, qui dépend en première approche des propriétés des gaz de combustion (indice isentropique  $\gamma_{gaz}$ ), du rapport des sections  $A_s / A_t$  (avec  $A_s$  l'aire de la tuyère en sortie) et du rapport des pressions  $P_c / P_a$  (avec  $P_a$  la pression extérieure). Pour un propergol donné ( $\gamma_{gaz}$  connu) et une géométrie de tuyère donnée ( $A_s / A_t$  connu),  $C_F$  caractérise donc l'efficacité de cette tuyère.

Définissons à présent la vitesse de combustion d'un propergol. Ce dernier se consume de façon surfacique. Ainsi, durant la combustion, sa surface macroscopiquement plane régresse parallèlement à elle-même (cf. Figure 1- 2). L'épaisseur brûlée,  $e_b$ , au bout d'un temps  $t$  définit donc la vitesse de régression :

$$V_c = \frac{d(e_b)}{dt} \quad (1.2)$$

En fonctionnement normal, la vitesse de combustion d'un propergol classique ne dépend que de sa température initiale et de la pression. Elle est souvent représentée par la loi dite de Paul Vieille ou de Saint-Robert :

$$V_c = a P_c^n \quad (1.3)$$

avec  $a$  coefficient indépendant de la pression qui varie avec la température initiale du propergol et  $n$  l'exposant de pression.

<sup>1</sup> La pression en sortie de tuyère dépendant de la pression dans la chambre et de la géométrie de la tuyère, elle ne peut être constamment égale à la pression extérieure qui varie au cours du vol.

<sup>2</sup> Attention, cette formule ne peut s'appliquer lors des phases de fonctionnement fortement instationnaires comme par exemple une phase d'allumage ou de vidange, ou encore lorsque l'écoulement présente une instabilité aérodynamique (oscillations de pression dues à des tourbillons).

A un instant donné, le débit gazeux créé par la combustion du propergol, noté  $\dot{m}_g$ , est tel que :

$$\dot{m}_g = \rho_{prop} S_b V_c \quad (1.4)$$

avec  $\rho_{prop}$  la masse volumique du propergol et  $S_b$  la surface de combustion du propergol à l'instant considéré. Le débit du bloc de propergol dépend donc à la fois de la vitesse de combustion  $V_c$  et de la géométrie du chargement.

Le débit gazeux évacué par la tuyère ( $\dot{m}$ ) peut s'exprimer par :

$$\dot{m} = C_D P_c A_t \quad (1.5)$$

$C_D$  est le coefficient de débit qui, pour un gaz parfait et dans une approche théorique simplifiée, ne dépend que de la nature et de la température des gaz qui passent par la tuyère :

$$C_D = f(\gamma_{gaz}) \times \sqrt{\frac{M}{RT_c}} \quad (1.6)$$

avec  $T_c$  la température de combustion des gaz (2000 à 3700K),  $R$  la constante des gaz parfaits ( $R = 8134 J.K^{-1}.mol^{-1}$ ) et  $M$  la masse molaire des gaz de combustion. Si on introduit la vitesse caractéristique<sup>3</sup>  $C^*$ , qui est l'inverse du coefficient de débit, les équations (1. 1) et (1. 5) permettent d'écrire la relation suivante :

$$F = \dot{m} C_F C^* \quad (1.7)$$

Cette relation est très importante dans les applications propulsives. Elle permet d'identifier la part de poussée due respectivement au débit gazeux ( $\dot{m}$ ), aux conditions de détente de la tuyère ( $C_F$ ) et au potentiel énergétique du propergol ( $C^*$ ).

Avant de continuer ce paragraphe consacré à la balistique interne d'un propulseur, il nous faut préciser que les relations que nous venons de donner sont des relations établies sur la base d'hypothèses simplificatrices : hypothèse des gaz parfaits, détente isentropique dans la tuyère, écoulement monodimensionnel quasi-stationnaire,... La combustion de toute la surface du propergol est également supposée réalisée à iso-pression, ce qui implique une pression uniforme dans la chambre de combustion.

En réalité, l'écoulement du mélange gazeux est beaucoup plus complexe. Les hypothèses effectuées conduisent donc à négliger un certain nombre de phénomènes qui vont introduire des pertes et une modification des coefficients de débit ( $C_D$ ) et de poussée ( $C_F$ ) pour tenir compte respectivement des pertes dans la chambre de combustion (rendement de combustion) et des pertes dues à la tuyère (rendement propulsif). En particulier, les relations données dans ce paragraphe ne permettent pas de prédire ou de modéliser des phénomènes instationnaires. De plus, la prise en compte des particules présentes dans l'écoulement modifie ces équations. Dans la réalité d'un écoulement diphasique, les phases gazeuse et solide ne sont pas en équilibre dans la tuyère. Cela entraîne une baisse du rendement propulsif (cf. chapitre 7) qu'il faut savoir évaluer.

La relation (1. 7) peut également s'écrire :

<sup>3</sup> Cette vitesse caractéristique s'exprime en m/s. Pour un propergol, elle est classiquement autour de 1500m/s.

$$F = \dot{m} g \frac{C_F C^*}{g} = \dot{m} g I_s \quad (1. 8)$$

Nous avons ainsi introduit une grandeur homogène à un temps, très classiquement utilisée pour caractériser les propergols : l'impulsion spécifique notée  $I_s$ . En synthétisant à la fois les caractéristiques liées à la tuyère ( $C_F$ ) et au propergol ( $C^*$ ), elle permet de comparer facilement les performances de moteurs à géométries identiques mais chargements différents. Une autre façon d'appréhender cette notion est de considérer l'impulsion spécifique comme le temps, en seconde, pendant lequel un kilogramme de propergol délivre une poussée de 1 kilogramme (ou 9,81N).

Il devient alors évident que la mise au point de propergols plus performants nécessite une vitesse caractéristique  $C^*$  élevée et donc (cf. (1. 6)) des compositions présentant des températures de combustion élevées. L'utilisation de poudre d'aluminium dans la composition des propergols permet de répondre à cette recherche de performance maximale du propulseur (Tavernier *et al*, 1970). En effet, en brûlant, l'aluminium augmente de manière significative la température de combustion : 600 à 700K de plus. Malgré cela, l'impulsion spécifique d'un MPS est relativement limitée ( $I_s \leq 300 s$ ), elle est par contre très reproductible (Faure *et al*, 1996).

Nous allons à présent aborder une notion fondamentale en balistique des propulseurs à propergol solide : la pression de fonctionnement du moteur. Il s'agit de la pression qui permet d'évacuer par la tuyère le débit produit par la combustion. D'après les équations (1. 4) et (1. 5), cette pression vérifie la relation suivante :

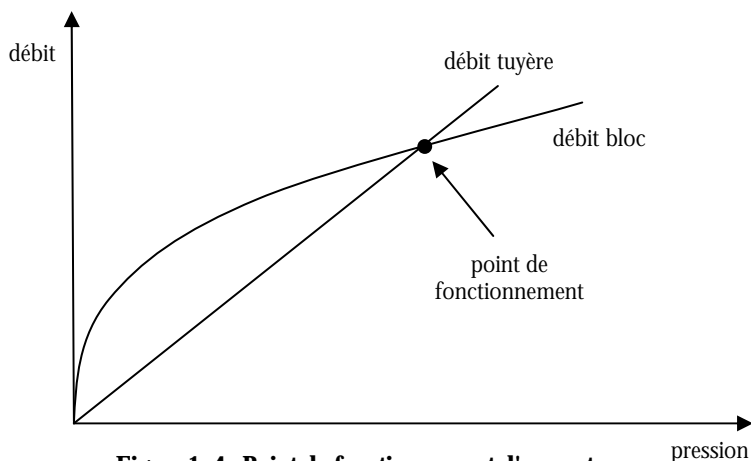
$$\rho_{prop} S_b V_c = C_D P_c A_t \quad (1. 9)$$

Nous pouvons remarquer qu'une surface en combustion plus importante améliore le débit gazeux et donc, toutes choses égales par ailleurs, augmente la pression dans la chambre. En tenant compte de la définition de la vitesse de combustion (1. 3), cette pression peut s'exprimer de la façon suivante :

$$P_c = \left( \rho_{prop} a C^* \frac{S_b}{A_t} \right)^{\frac{1}{1-n}} \quad (1. 10)$$

Il apparaît alors à ce stade qu'un exposant 1 pour la loi de vitesse de combustion ne permet pas d'obtenir une pression de fonctionnement. En fait, pour un exposant supérieur à 1, il ne peut y avoir de fonctionnement stable. Suivant les conditions initiales, deux processus irréversibles peuvent avoir lieu : soit une extinction du moteur (pression nulle dans la chambre) soit un emballement (augmentation « infinie » de la pression). Pour assurer le fonctionnement d'un moteur, un exposant inférieur à 1 est donc nécessaire. En pratique, et pour une grande majorité des applications, on recherche des exposants inférieurs à 0,5.

Un diagramme débit-pression est représenté Figure 1- 4 pour une vitesse de combustion dont la loi exponentielle présente un exposant inférieur à 1. Le débit admissible par la tuyère lorsque celle-ci est amorcée (débit sonique au col) correspond à la droite de pente  $C_D A_t$  (cf. (1. 5)). On définit ainsi le point de fonctionnement du moteur.

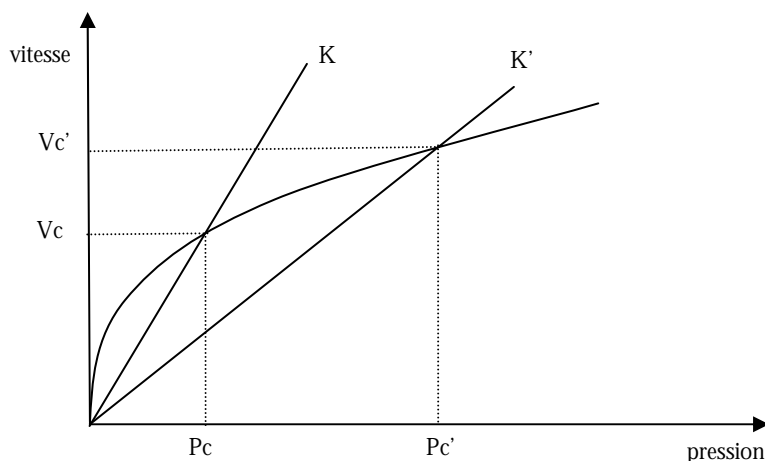


**Figure 1- 4 : Point de fonctionnement d'un moteur**

Introduisons à présent le coefficient de serrage  $K$ , défini comme le rapport de la surface de propergol en combustion à l'aire au col de la tuyère :

$$K = \frac{S_b}{A_t} \tag{1. 11}$$

Pour un propergol donné, le serrage fixe la pression de fonctionnement du moteur. Ainsi, une variation de la valeur de  $K$ , soit volontaire pour respecter une loi de poussée, soit involontaire suite à un incident de fonctionnement (modification brutale de la surface en combustion, bouchage de la tuyère etc.) se traduit par un déplacement du point de fonctionnement du moteur (cf. Figure 1- 5), correspondant à une nouvelle pression ( $P_c'$ ) et une nouvelle vitesse de combustion ( $V_c'$ ).

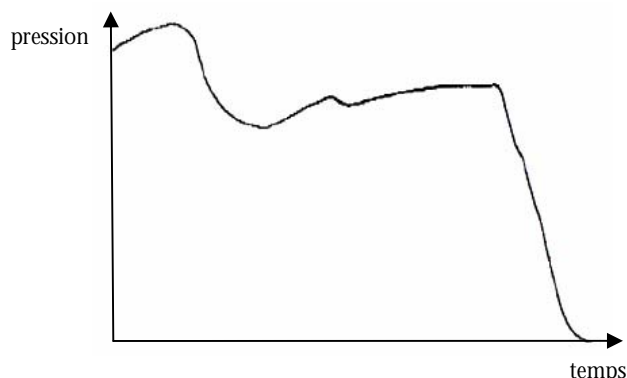


**Figure 1- 5 : Influence du coefficient de serrage K**

Finalement, pour accomplir la mission qui lui est dévolue, un propulseur doit fournir une certaine poussée. Or, la poussée délivrée au cours du temps n'est fonction que de paramètres définis avant le décollage (géométrie du chargement, composition du propergol...). Elle ne peut donc pas être pilotée durant le vol. Tout est contrôlé par l'évolution de la pression dans la chambre. La mise en combustion du propergol dans la chambre doit, par conséquent, créer une pression suivant une loi fixée (cf. Figure 1- 6). Pour cela il faut définir la composition du propergol (nature des gaz produits et énergie, traduite par  $C^*$ ), la géométrie du chargement (surface de combustion), la géométrie de la



tuyère et le diamètre de son col (serrage) et tenir compte des conditions d'utilisation (pression extérieure).



**Figure 1- 6 : Allure de la courbe de pression en fonction du temps pour le P230**

Nous allons à présent nous intéresser au moteur à propergol solide d'Ariane 5.

### **1.3 Le moteur à propergol solide d'Ariane 5 : le P230**

Comme présenté dans l'introduction générale de ce document, le moteur à propergol solide en fonction sur le lanceur Ariane 5 contient 230 tonnes de propergol, d'où son nom de MPS P230 ou P230 (Scippa *et al*, 1996). Le fonctionnement de ce moteur est évidemment régi, en première approximation, par les lois génériques présentées aux paragraphes précédents. Néanmoins son architecture est légèrement plus complexe que le cas théorique étudié jusqu'à présent...

#### **1.3.1 Description**

Le P230 est composé comme tout MPS d'une structure protégée par une protection thermique interne, d'une tuyère, d'un chargement de propergol et d'un mécanisme d'allumage (cf. Figure 1- 7).

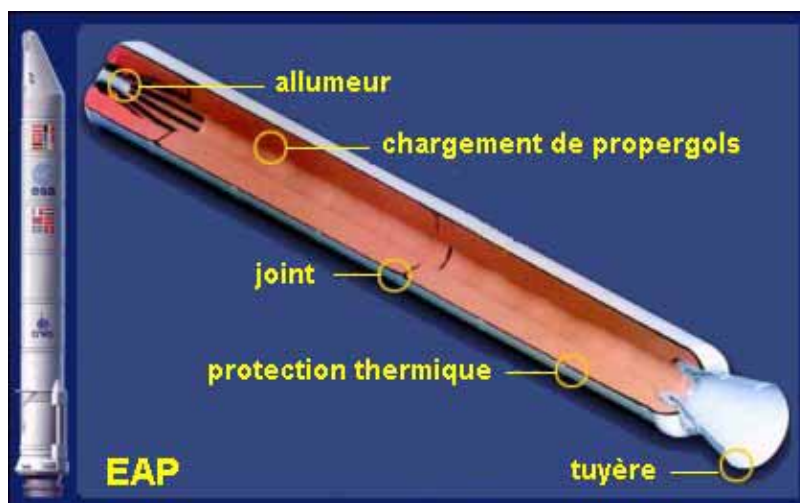
Le propergol utilisé dans les P230 d'Ariane 5 se nomme Butalane® 68/18 (Biagioni & Austruy, 1996). Elle est composée à 68% d'une charge oxydante, le perchlorate d'ammonium (PA) et à 14% d'un liant réducteur polymérisé, le polybutadiène (PBHT) qui assure la cohésion du mélange. Les 18% (en masse) restant sont ajoutés sous forme de poudre d'aluminium micrométrique (réducteur) dont l'intérêt énergétique a été décrit au paragraphe précédent. Précisons que le choix de l'aluminium répond à des contraintes énergétiques et financières. Son efficacité énergétique, sa faible toxicité<sup>4</sup> et son coût limité en font le métal le plus employé en propulsion solide.

Ce propergol vient des applications stratégiques et utilise des formulations de propergol relativement anciennes qui ont fait leurs preuves en termes de sécurité, de propriétés mécaniques, de taux de combustion et d'énergie produite (Doriath & d'Andrea, 1996).

La Butalane® est malaxée dans des cuves, puis coulée sous vide dans la structure et moulée autour des noyaux. Cependant, pour des raisons technologiques, les dimensions du P230 interdisent la coulée du propergol en un seul bloc. Le P230 est donc un moteur segmenté, qui présente trois blocs de propergol (cf. Figure 1- 7). De plus, pour répondre aux spécificités demandées par la mission, des géométries particulières sont choisies pour ces trois blocs. Le premier segment a une

<sup>4</sup> Le béryllium est plus énergétique mais très toxique (Tavernier *et al*, 1970).

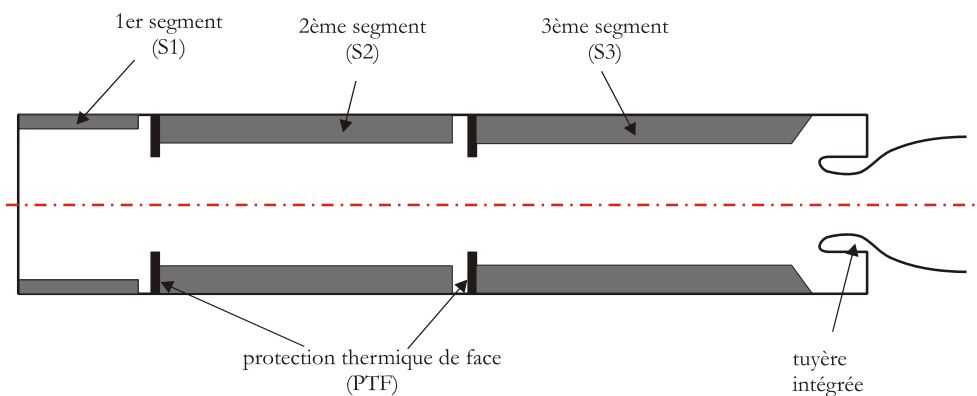
forme étoilée<sup>5</sup> à 15 branches pour assurer la poussée initiale nécessaire. Les autres segments ont une forme cylindro-conique qui assure une queue de combustion suffisamment longue.



**Figure 1- 7 : Coupe d'un EAP, source SNPE**

De plus, entre deux blocs de propergol une protection thermique de face (PTF) est employée pour éviter une combustion des blocs par la face amont (cf. Figure 1- 8).

L'architecture du P230 présente une autre spécificité : sa tuyère intégrée (cf. Figure 1- 8) qui est un héritage des technologies utilisées en propulsion stratégique (M45) (Faure *et al*, 1996). Cela permet en effet un gain de place, point non négligeable lorsque le propulseur est dédié à une utilisation depuis un sous-marin, et présente aussi des avantages technologiques liés aux angles de braquage.



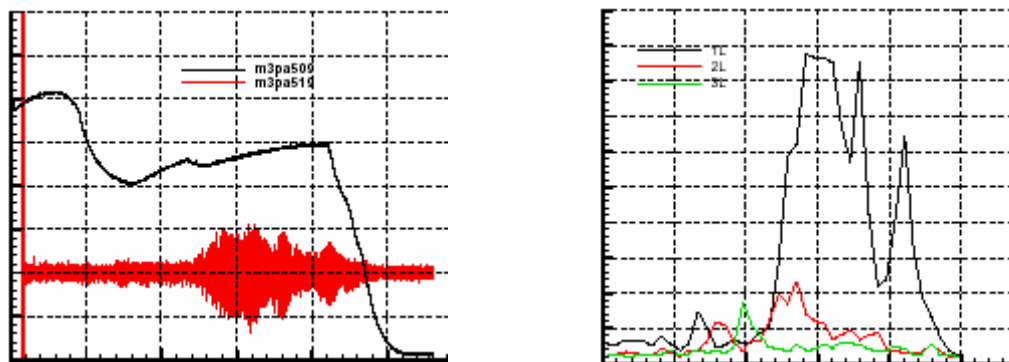
**Figure 1- 8 : Schéma représentatif du P230**

Le MPS P230 est utilisé sur Ariane 5 depuis son premier vol qualitatif en 1996. Depuis, plus d'une vingtaine de tirs a été effectuée, attestant de la fiabilité de ce moteur. Néanmoins, lors des tirs des vibrations sont régulièrement enregistrées au cours du fonctionnement du P230. Cette instabilité fait l'objet du paragraphe suivant.

<sup>5</sup> Forme offrant une grande surface de combustion.

### 1.3.2 Instabilité du P230

Les MPS P230 sont équipés de capteurs de pression qui permettent d'accéder à la pression instantanée régnant dans le moteur<sup>6</sup>. Ces observations expérimentales sur tir réel permettent de mettre en évidence un comportement instable du P230 à différents moments de son fonctionnement (Join-Lambert *et al*, 1996 ; Ballereau *et al*, 2003). Ce comportement instable se traduit par l'apparition d'oscillations de pression, d'une amplitude pouvant atteindre 200 millibars (cf. Figure 1- 9).



**Figure 1- 9 : Résultats typiques du P230, d'après Prévost *et al*(2001);**  
à gauche : évolutions temporelles des pressions complète (---) et instationnaire (---);  
à droite : évolutions temporelles des amplitudes sur les trois premiers modes propres longitudinaux.

Ces oscillations sont indésirables car elles entraînent des oscillations de poussée et par suite des vibrations du moteur, qui sont transmises à tout le lanceur et peuvent donc être néfastes pour la charge utile embarquée par celui-ci.

Les ODP du P230 sont visibles sur les trois premiers modes longitudinaux, avec une nette prédominance du premier mode (dont la fréquence est d'environ 20Hz). L'étude de la courbe de pression sur les 120s du tir met en évidence 4 bouffées d'instabilités sur le mode 1L (Ballereau *et al*, 2003). Elles se présentent assez régulièrement aux mêmes instants de tir : à environ 66s, 95s, 107s et 117s. Leurs amplitudes sont en revanche très variables. De nombreuses études ont été réalisées afin d'expliquer, puis de prédire, les variations d'amplitude de ces ODP.

En réalité, la stabilité de fonctionnement du P230 est devenue un thème de recherche prioritaire bien avant le premier tir de qualification. L'origine de cette préoccupation est liée à l'expérience américaine. En effet, les moteurs américains du lanceur Titan et de la navette étaient sujets à des oscillations de pression de basses fréquences, autour des fréquences de leurs premiers modes longitudinaux. Ces oscillations avaient un caractère et une signature fréquentielle systématiques, qui ont intrigué les chercheurs américains.

Leur analyse a attribué l'origine de ces oscillations à un couplage entre une émission tourbillonnaire au sein de l'écoulement et les modes acoustiques longitudinaux de la chambre de combustion (Brown *et al*, 1981 ; Dunlap & Brown, 1981). L'existence de couches cisailées, créatrices de tourbillons dans l'écoulement, devenait donc un facteur à risque. Or, le P230 est, comme ces moteurs américains, un moteur de grande taille segmenté. Aussi crée-t-il naturellement de telles couches cisailées, au niveau des inter-segments. En effet, les inter-segments impliquent soit la présence de cavité, soit l'émergence des protections thermiques dans l'écoulement car ces dernières régressent plus lentement que la surface du propergol (cf. Figure 1- 8). Le P230 pouvait donc être supposé instable, par analogie avec les moteurs américains.

<sup>6</sup> Ces capteurs sont situés au niveau des fonds avant et arrière du moteur.

Cette analyse a motivé la mise en place d'un vaste programme de recherche financé par le CNES et coordonné par l'ONERA : le programme ASSM. Lancé en 1990, soit 3 ans avant le premier essai au banc (M1) et 6 ans avant le premier lancement d'Ariane 5 (Vol 501), ce programme avait pour objectifs principaux la compréhension et la simulation des phénomènes liés au fonctionnement d'un MPS. Un axe de recherche plus particulièrement dédié aux oscillations de poussée a également été initié (programme POP), dans le but de comprendre les mécanismes physiques à l'origine du comportement oscillant potentiel du P230. Le lecteur aura compris que les tirs réels ont par la suite confirmé l'exactitude de cette analyse initiale : l'écoulement dans le MPS P230 est bien instable (Scippa *et al.*, 1994).

### **1.3.3 Instabilités de combustion et instabilités hydrodynamiques**

Le terme d'instabilité est souvent associé à une notion d'instabilité de combustion, liée à la réponse du propergol en combustion aux fluctuations de pression. Il existe en effet un couplage entre l'acoustique de la chambre du moteur et la possibilité qu'a la combustion d'amplifier préférentiellement certaines fréquences (voir par exemple Kuentzmann, 1991 ; Gossant, 1993 ; Vuillot & Lupoglazoff, 1996).

La modélisation des instabilités de combustion passe par la définition de la fonction de transfert, la « réponse » du propergol, fonction qui dépend de la fréquence d'excitation. Pour des fréquences basses, comme celles du MPS P230, de l'ordre de quelques dizaines de Hz, la réponse s'identifie à l'exposant de pression de la loi Paul Vieille (1. 3).

Il est possible d'appréhender les instabilités de combustion par des méthodes relativement simples, fondées sur la technique du bilan acoustique linéaire (Hart & Mc Clure, 1965 ; Culick, 1966-a). Après avoir déterminé l'acoustique de la chambre, différentes contributions (amortissement dû à la tuyère ou aux particules, amplification due à la combustion) sont sommées pour déterminer le caractère stable ou instable d'un moteur (Gossant, 1993 ; Vuillot *et al.*, 1996). Cette méthode ne donne cependant pas d'information sur les amplitudes des instabilités potentielles.

Dans le MPS P230, la problématique est différente. Les instabilités de combustion sont improbables, du fait de la très faible valeur de la réponse du propergol. En revanche, il se développe un autre type d'instabilités, liées au caractère instable de l'écoulement aérodynamique. Ces instabilités sont préférentiellement des instabilités de pression sur des modes acoustiques longitudinaux, à des fréquences modérées. Il s'agit donc plutôt d'instabilités dites de fonctionnement, liées à des paramètres géométriques du moteur et plus généralement à son mode de fonctionnement (Gallier *et al.*, 2002).

Il faut savoir que le fonctionnement d'un moteur à propergol solide n'est jamais strictement stationnaire. Tout d'abord, la géométrie est en constante évolution. D'autre part, l'écoulement qui règne dans la chambre présente constamment de petites perturbations autour des valeurs moyennes. Ces perturbations peuvent provenir de la combustion du propergol composite, hétérogène par nature, mais pas seulement. Dans les années 80, un autre facteur déstabilisant a été mis en évidence (Brown *et al.*, 1981) : le détachement tourbillonnaire. Ce phénomène est d'origine purement hydrodynamique, c'est-à-dire indépendant des caractéristiques thermiques, chimiques ou multiphasiques de l'écoulement<sup>7</sup>. Il a fait l'objet de nombreuses recherches aux Etats-Unis (Flandro & Jacobs, 1973 ; Culick & Magiawala, 1979) puis en France (Lupoglazoff & Vuillot, 1996-a ; Vuillot & Casalis, 2000 ; Ribéreau *et al.*, 2000) sous l'égide du CNES dans le programme ASSM.

Au début du programme ASSM/POP, il n'existait aucune expérience européenne sur les moteurs segmentés pour lanceurs spatiaux, et aucun outil numérique capable de prendre en compte tous les phénomènes dimensionnants des mécanismes liés aux oscillations de pression et de poussée.

---

<sup>7</sup> Mais attention, cela ne signifie pas que l'étude quantitative des instabilités en question soit indépendante de ces paramètres. Seule l'étude qualitative peut être menée en les négligeant.

Depuis, la situation a largement évolué. Les études réalisées successivement dans le cadre du programme ASSM/POP, qui a duré 10 ans, puis en R&T CNES, ont permis d'accroître les connaissances de la communauté scientifique européenne dans le domaine des mécanismes liés à la stabilité d'un MPS.

Un certain nombre de phénomènes physiques mis en évidence au cours de ces travaux sont purement hydrodynamiques. Ils sont présentés au paragraphe 2, dans un cadre très général : les écoulements considérés sont monophasiques (phase gazeuse seule) et non réactifs (l'aspect combustion n'est pas prépondérant).

## 2. Instabilités de fonctionnement des MPS

Avant toute chose, il est important de retenir que dans ce paragraphe seul l'aspect **aérodynamique** de l'écoulement créé par un propulseur quelconque est étudié. En effet, l'instabilité de fonctionnement des MPS est largement liée à l'instabilité de l'écoulement dans la chambre de combustion du moteur.

Cette instabilité provient de la présence d'une ou plusieurs source(s) d'émission tourbillonnaire. A ce jour, trois mécanismes conduisant à des instabilités par détachement tourbillonnaire ont pu être identifiés. Ils sont présentés au paragraphe 2.2. Le phénomène aérodynamique de détachement tourbillonnaire peut également, sous certaines conditions, se coupler à l'acoustique de la chambre, provoquant ainsi des niveaux d'instabilité maximum. Ce couplage aéro-acoustique est abordé au paragraphe 2.3. Mais au préalable, nous allons brièvement décrire l'écoulement gazeux qui se développe dans un propulseur : l'écoulement de Taylor.

### 2.1 L'écoulement de Taylor

Dans un propulseur, l'écoulement de gaz brûlés est injecté dans la chambre de façon radiale, depuis la surface du propergol en combustion. Il se développe ensuite longitudinalement, avant d'atteindre la tuyère (cf. Figure 1- 3). Cette injection radiale de gaz dans un cylindre crée un écoulement caractéristique dit de Taylor (Taylor, 1956 ; Griffond, 2001).

Considérons un cylindre, où l'écoulement est injecté de façon pariétale, par une paroi débitante, à une vitesse  $V_{inj}$  (cf. Figure 1- 10). Le nombre de Reynolds à l'injection est défini par :

$$Re = \frac{h V_{inj}}{\nu_{gaz}} \quad (1. 12)$$

où  $h$  est le rayon du cylindre et  $\nu_{gaz}$  la viscosité cinématique du gaz.

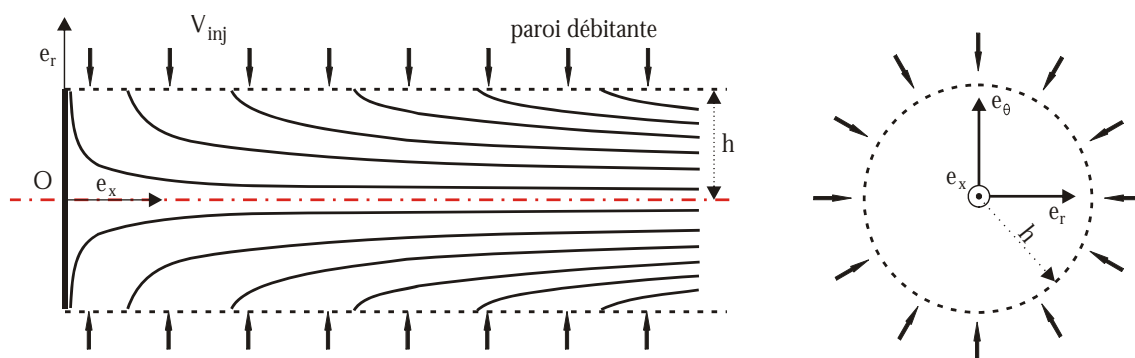


Figure 1- 10 : Représentation schématique de l'écoulement de Taylor en canal axisymétrique

La solution analytique de l'équation liée à cet écoulement a été établie par Taylor en 1955 (Taylor, 1956), d'où l'appellation d'écoulement de Taylor. Elle sera appliquée aux écoulements internes non visqueux des MPS par Culick une dizaine d'années plus tard (Culick, 1966-b).

Cette solution s'écrit :

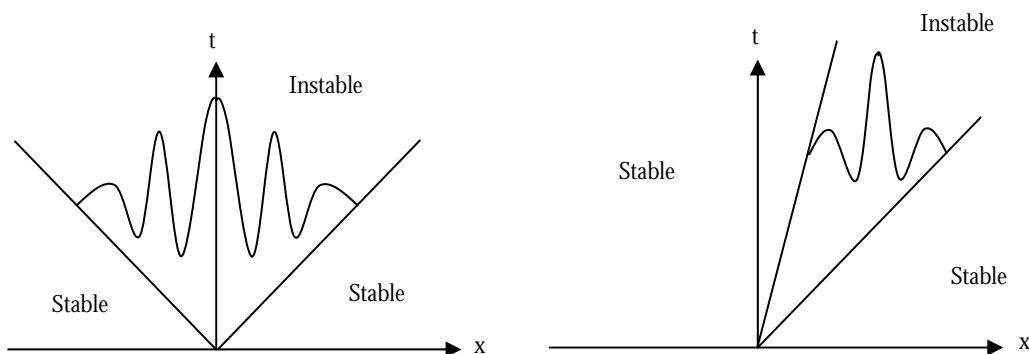
$$\begin{cases} U_r = -\frac{V_{inj}}{r} \sin\left(\frac{\pi}{2} r^2\right) \\ U_x = V_{inj} \pi x \cos\left(\frac{\pi}{2} r^2\right) \\ U_\theta = 0 \\ P = -\frac{\pi^2 x^2}{2} - \frac{1}{2r^2} \left( \sin\left(\frac{\pi}{2} r^2\right) \right)^2 + P_0 \end{cases} \quad (1.13)$$

où  $U_x$ ,  $U_r$  et  $U_\theta$  sont respectivement les vitesses axiale, radiale et azimutale. Cette méthode analytique de Culick permet de décrire les profils de vitesse (et de pression) à l'intérieur d'un cylindre aux parois débitantes.

En première approximation, il est possible de simuler l'écoulement dans un propulseur avec ces formules de Taylor. La vitesse d'injection  $V_{inj}$  est alors caractérisée par le débit gazeux résultant de la combustion du propergol. Des études théoriques peuvent être réalisées sur cet écoulement fondamental. Afin de parvenir à des solutions simples et aisément calculables, elles sont basées sur des hypothèses simplificatrices : écoulement monophasique, incompressible, non réactif, dans un canal de géométrie régulière, écoulement bidimensionnel, pas d'effet de la sortie sur l'écoulement de base, injection normale uniforme et constante, écoulement stationnaire,... Au prix d'un nombre certain de complications, il est possible de lever l'hypothèse d'incompressibilité (Clavin, 1996) mais cet aspect est loin d'être fondamental.

L'étude de la stabilité d'un écoulement engendré dans un canal par injection pariétale est cruciale pour la compréhension du phénomène de couplage entre les ondes d'instabilité et les modes acoustiques du canal. Une étude de la stabilité linéaire de l'écoulement de Taylor peut être trouvée dans les thèses suivantes : Griffond (2001), Ugurtas (2000) et Anthoine (2000). Nous nous contentons dans ce document de rappeler quelques caractéristiques de cet écoulement particulier.

L'écoulement de Taylor présente un caractère instable convectif (Favray, 1999 ; Ugurtas, 2000). Cela signifie que toute perturbation apportée à l'écoulement est évacuée par celui-ci, et que sans nouvelle perturbation, l'écoulement retrouve son état stationnaire (cf. Figure 1- 11).



**Figure 1- 11 : Instabilité absolue (à gauche) et convective (à droite), d'après Ugurtas (2000)**

Ces études d'instabilité linéaire ont également permis d'identifier une propriété de l'instabilité hydrodynamique de l'écoulement de Taylor : il existe une abscisse critique au-delà de laquelle toute perturbation infinitésimale est amplifiée par mécanisme d'instabilité, cf. Figure 1- 12.

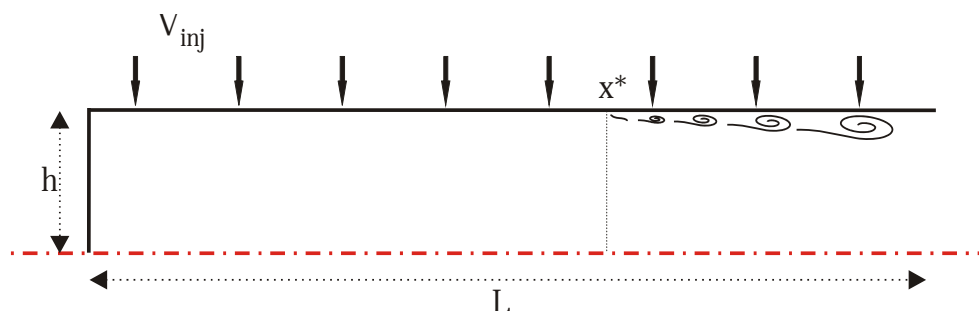


Figure 1- 12 : Instabilité de l'écoulement de Taylor

Cette instabilité intrinsèque de l'écoulement de Taylor est à l'origine d'un mécanisme de détachement tourbillonnaire particulier, présenté au paragraphe 2.2.3.

## 2.2 Les instabilités hydrodynamiques

Différents mécanismes générateurs d'instabilités ont été mis en évidence lors des travaux ASSM/POP (Vuillot, 1998 ; Kuentzmann, 2001). Ces mécanismes, au nombre de trois, sont d'origine purement hydrodynamique :

- Un détachement tourbillonnaire d'angle ou Vortex<sup>8</sup> Shedding d'Angle (VSA)
- Un détachement tourbillonnaire d'obstacle ou Vortex Shedding d'Obstacle (VSO)
- Un détachement tourbillonnaire pariétal ou Vortex Shedding Pariétal (VSP)

Notons que le caractère hydrodynamique de ces mécanismes permet, contrairement aux instabilités de combustion (cf. paragraphe 1.3.3), de négliger l'aspect réactif de l'écoulement et donc de conduire des expérimentations sur des montages en gaz froid. Ces montages permettent une étude vaste et peu onéreuse des différents mécanismes générateurs d'instabilité. Leur fonctionnement à température ambiante (pour les maquettes spécifiques) permet en plus une instrumentalisation conséquente du moteur, donnant ainsi accès à des mesures plus précises du champ aérodynamique (par rapport aux tirs en gaz chaud qui ne fournissent que quelques mesures de pression<sup>9</sup>).

Ces trois modes de détachement tourbillonnaire ont été mis en évidence par des simulations numériques, des expériences en gaz froid et des essais au banc. Ils sont successivement présentés aux paragraphes suivants.

### 2.2.1 Le Vortex Shedding d'Angle (VSA)

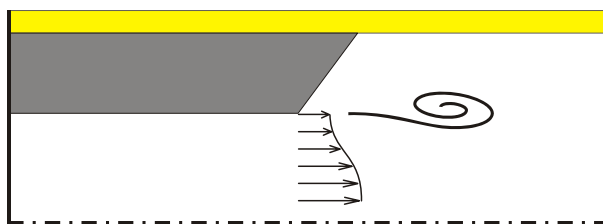
Ce type de détachement se rencontre lorsque la géométrie du propergol présente un angle ou un élargissement brusque de la section de passage. C'est le cas par exemple dans un bloc cylindrique non inhibé aux bords : le propergol régressant sur ses côtés, on obtient une variation brutale de section en fin de bloc. L'angle du propergol crée une couche cisailée avec un profil inflexionnel de vitesse axiale (cf. Figure 1- 13). Les structures tourbillonnaires se déplacent ensuite à vitesse constante depuis le point anguleux. Cette configuration est la plus simple à simuler.

En outre, l'expérience montre que ce type de profil inflexionnel est couramment instable, aussi l'instabilité d'angle a-t-elle été étudiée très tôt. Grâce à de vastes investigations, cette instabilité a pu

<sup>8</sup> Les instabilités hydrodynamiques de l'écoulement sont organisées en structures cohérentes, appelées vortex.

<sup>9</sup> Les défauts essentiels de ces montages en gaz froids sont d'avoir des amplitudes d'ODP très faibles, d'une part, et d'avoir des parois débitantes non représentatives d'un propergol, d'autre part.

être très largement démontrée, par de nombreux essais. On peut citer les tirs instrumentés de moteurs C1x (Dupays, 1996), les expériences réalisées sur la maquette 2D plan de l'ESPCI (Favray, 1999) ainsi que sur le montage en gaz froid VIOLETTE (Goncalves de Miranda, 2000).



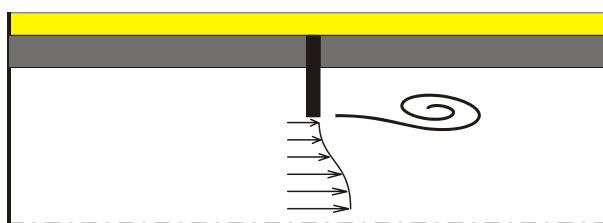
**Figure 1- 13 : Représentation schématique du détachement tourbillonnaire d'angle (VSA)**

Le VSA a également été mis en évidence par la simulation numérique (Dupays, 1996 ; Lupoglazoff & Vuillot, 1998-a). C'est ce phénomène qui a permis d'expliquer le fonctionnement instable d'un étage de moteur stratégique (Ribéreau & Le Breton, 1995) de la défense française, alors que l'on cherchait vainement à l'imputer à une instabilité de combustion.

### 2.2.2 Le Vortex Shedding d'Obstacle (VSO)

Dans ce cas, il s'agit d'un obstacle présent dans l'écoulement et qui entraîne la formation d'une couche de cisaillement associée à un profil de vitesse inflexionnel. Ce profil de vitesse peut alors donner lieu à une instabilité hydrodynamique (cf. Figure 1- 14) : des tourbillons se forment à une fréquence fixée qui peut être obtenue par les théories de stabilité.

L'existence du VSO a également été démontrée sans ambiguïté par des essais et des simulations numériques. Un grand nombre de travaux expérimentaux a en effet été consacré au problème (Brown *et al*, 1981 ; Shu *et al*, 1986). On peut citer les résultats obtenus sur le montage MICAT1 de l'ENSMA (Couton *et al*, 1996 ; Vetel, 2001), le montage du VKI (Anthoine, 2000), et les séries de tirs LP3 et LP6, réalisées avec des protections thermiques (PT) dont le matériau, la forme et l'emplacement peuvent varier (Prévoist *et al*, 2000-a ; Traineau *et al*, 1997).



**Figure 1- 14 : Représentation schématique du détachement tourbillonnaire d'obstacle (VSO)**

En fait, cette instabilité a été largement étudiée car elle était considérée au début du programme ASSM comme le mode d'instabilité jugé prépondérant pour expliquer les oscillations observées dans les MPS de grande taille américains et européens. En effet, les chargements de propergol de ces gros moteurs sont divisés en plusieurs blocs ou segments (jusqu'à 7). Les protections thermiques situées sur la face amont des blocs de propergol au niveau des inter-segments se retrouvent donc à jouer le rôle de diaphragmes dans l'écoulement. Et c'est pourquoi la présence des PTF a rapidement été incriminée et considérée comme une source majeure d'instabilité du moteur.

Ce scénario a cependant été mis à mal par des essais à échelle réduite qui montrent que les PT ne sont pas une condition nécessaire à l'instabilité du moteur (Traineau *et al*, 1997). Ainsi, le montage



LP6 tir N° 7 a montré des niveaux d'oscillations maximum alors qu'il ne possède pas de protection thermique<sup>10</sup> (Fabignon *et al*, 2003). Ce résultat *a priori* déconcertant a été confirmé par la simulation numérique (Lupoglazoff & Vuillot, 1996-a), impliquant une remise en cause du scénario initial et l'investigation d'un nouveau mécanisme. Cette "nouvelle" instabilité est intrinsèque à l'écoulement de Taylor, précédemment introduit. Nous allons la détailler au paragraphe suivant.

### 2.2.3 Le Vortex Shedding Pariétal (VSP)

L'instabilité pariétale n'a pas pour origine une couche fortement cisillée, mais seulement la courbure des lignes de courant. Elle a souvent été intuitée et considérée comme un mécanisme faible, à tort. Sa découverte remonte à 1969 (Varapaev & Yagodkin, 1969), mais elle provoque à l'époque assez peu de remous. Les premières simulations numériques faites dans le programme ASSM indiquent la présence d'un phénomène particulier aux parois débitantes. Ce phénomène récurrent peut être observé sur les résultats des simulations, effectuées par l'ONERA et SME, du MPS P230, du SSM1<sup>11</sup> et des maquettes à l'échelle 1/15<sup>ème</sup> du P230 (Godfroy & Tissier, 1993 et 1994 ; Lupoglazoff & Vuillot, 1993 ; Cagnon *et al*, 1997). Et en 1996, Lupoglazoff et Vuillot précisent ce phénomène de détachement tourbillonnaire pariétal, par simulation numérique (Lupoglazoff & Vuillot, 1996-a).

On comprend bien en voyant la Figure 1- 15 l'origine de l'appellation du VSP : la vorticité instationnaire s'organise en structures qui semblent émerger de la paroi lors des simulations.

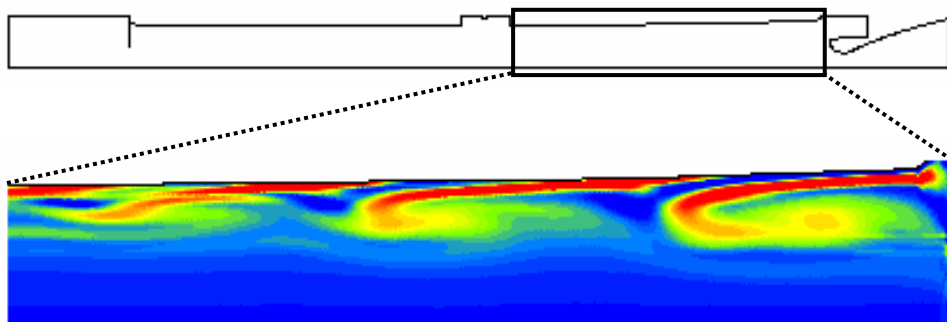


Figure 1- 15 : Rotationnel du gaz, calcul CPS, LP6, particules de 20µm

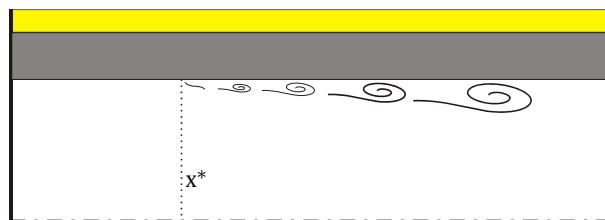
Cette instabilité naturelle de l'écoulement de Taylor, (re)découverte au cours du programme ASSM, a fait l'objet de recherches théoriques actives. Des études fondamentales de stabilité linéaire ont permis de confirmer la présence d'une instabilité intrinsèque, de type hydrodynamique, de l'écoulement présent dans le conduit. Dans certaines configurations, la confluence de l'écoulement global, axial, et de l'écoulement radial à la surface du propergol, issu des gaz de combustion, peut amener à une instabilité hydrodynamique de l'écoulement (Lupoglazoff & Vuillot, 1996-a). Cette instabilité crée du rotationnel à proximité de la paroi débitante et donne lieu pour certaines fréquences à de fortes amplifications. Ajoutons qu'elle concerne l'ensemble de l'écoulement : ce qui se passe à une abscisse donnée dépend des abscisses précédentes.

Sous l'impulsion de Grégoire Casalis, Griffond *et al* (2000) ont développé une théorie locale spatiale linéaire pour étudier la stabilité d'écoulement incompressible en canal avec injection radiale. Ils ont montré que, près du fond avant du canal, l'écoulement est linéairement stable. Ensuite, au-delà d'une position axiale critique  $x^*$ , l'écoulement devient naturellement instable, pour une gamme de

<sup>10</sup> Ce tir a été réalisé avec une Butalite (sans particules) car les essais diphasiques ne permettaient pas d'obtenir des niveaux d'oscillations significatifs.

<sup>11</sup> MPS bi-segmenté, échelle 1/2 en diamètre et 1/4 en longueur.

fréquences qui augmente avec la distance par rapport au fond avant. Cette instabilité résulte de la formation de structures cohérentes au-delà de l'abscisse critique (cf. Figure 1- 16).



**Figure 1- 16 : Représentation schématique du détachement tourbillonnaire pariétal (VSP)**

Des études théoriques (Casalis *et al*, 1998 ; Griffond & Casalis, 2001) et numériques (Casalis *et al*, 2000) ont permis de mettre en lumière les conditions géométriques et d'écoulement nécessaires au développement du VSP. Ainsi, l'allongement<sup>12</sup> du moteur (ratio  $\ell/h$ ) est un paramètre essentiel. On montre en effet qu'un détachement tourbillonnaire pariétal peut se produire si les configurations géométriques du moteur sont telles que :

$$\frac{\ell}{h} \geq x^*, \quad x^* \approx 8 \quad (1.14)$$

Ainsi, le VSP a été mis en évidence par la simulation numérique et par la théorie. La validation expérimentale du phénomène a également été réalisée, sur différents montages (Guéry *et al*, 2000). Parmi ceux utilisés pour mettre en évidence le phénomène d'instabilité pariétale, on peut mentionner :

- Le montage VECLA de l'ONERA, présentant un canal à section rectangulaire (Avalon *et al*, 1998).
- Le montage VALDO axisymétrique (Avalon & Lambert, 2000).
- Le montage VKI sans diaphragme, maquette à l'échelle 1/30<sup>ème</sup> du P230 (Anthoine, 2000).

Le montage en gaz froids VECLA, spécialement conçu pour étudier l'écoulement de Taylor, est le montage qui a permis la validation la plus poussée de la théorie de stabilité linéaire liée à l'instabilité pariétale. Il a fait l'objet d'une exploitation très complète, fournissant de nombreux résultats grâce aux multiples configurations de veine utilisables (Avalon *et al*, 1998 et 2000 ; Ugurtas *et al*, 2000 ; Griffond *et al*, 2000 ; Ugurtas, 2000). Ces résultats ont confirmé l'existence d'oscillations de l'écoulement, induites par une instabilité naturelle de l'écoulement.

Une visualisation par méthode PLIF a été réalisée sur ce montage (Avalon *et al*, 2000). Ces visualisations montrent que les tourbillons, formés à l'aval du canal, sont convectés vers la sortie (cf. Figure 1- 17). L'allure globale de l'écoulement a été retrouvée par la simulation numérique (Avalon *et al*, 2000). De plus, pour certaines dimensions particulières de la veine, il a été observé que l'amplification intrinsèque des perturbations de l'écoulement pouvait être à l'origine d'un mécanisme de couplage entre le VSP et l'acoustique du canal (Avalon *et al*, 1998 ; Lupoglazoff & Vuillot, 1996-a et 1998-b).



**Figure 1- 17 : Visualisation par PLIF dans VECLA, d'après Avalon *et al*(2000)**

<sup>12</sup> Attention, il ne s'agit pas du rapport d'aspect impliquant la longueur totale du moteur, mais celui utilisant la longueur de propergol en combustion, ou longueur sur poudre (Griffond, 2001).

Les résultats obtenus pour l'ensemble de ces montages sont probants. Ces installations d'essai, qui ont l'avantage d'être moins coûteuses et plus simples à concevoir qu'un système à haute température, ne remplacent toutefois pas les études en gaz chauds, pour des raisons déjà évoquées.

C'est pourquoi d'autres essais, couplés à des simulations numériques, ont été réalisés, permettant à leur tour de mettre en évidence le VSP. Ainsi, le LP9, maquette à l'échelle 1/35<sup>ème</sup> du P230, a été spécialement conçu pour exhiber un phénomène de VSP (Prévoist & Vuillot, 1998). Les résultats obtenus lors de ces essais en gaz chauds sont tout à fait concluants (Prévoist *et al*, 2000-b). D'autres essais réalisés sur maquettes LP6 ont également permis de montrer que le VSP est un mécanisme très puissant de déstabilisation de l'écoulement.

Enfin, il faut noter qu'en pratique le VSP nécessite pour se développer une source génératrice d'instabilité. Le bruit de combustion du propergol pourrait être ce mécanisme déclencheur. De même une petite cavité à l'avant du moteur est tout à fait idoine pour cela. En effet, lorsque la géométrie de l'écoulement présente un obstacle ou une cavité, des tourbillons s'échappent de la couche de cisaillement (VSO ou VSA) et perturbent l'écoulement. Il est alors facile de mesurer tout l'impact qu'a la géométrie sur le développement du VSP : une petite particularité géométrique, ou une anomalie, est susceptible d'engendrer un VSP, qui est absent des géométries trop régulières. Sur le plan pratique il manque aujourd'hui la connaissance de tous les facteurs capables d'engendrer le VSP. Si l'on pressent bien l'influence essentielle de la géométrie, il est encore aujourd'hui difficile de savoir si le VSP va se déclencher ou non.

## 2.3 Le couplage aéro-acoustique

Des études ont montré que les trois instabilités hydrodynamiques précédemment présentées peuvent effectivement déstabiliser le moteur. Mais elles ne suffisent pas à expliquer les amplitudes des oscillations qui s'établissent. En effet, ces amplitudes dépendent du couplage qui peut exister entre l'instabilité hydrodynamique et l'acoustique de la chambre (Vuillot & Casalis, 2000).

### 2.3.1 Travaux pionniers, basés sur le VSO

La première interprétation du phénomène d'excitation des modes acoustiques par le phénomène de détachement tourbillonnaire (Vortex Shedding) dans les MPS est due à Flandro & Jacobs (1973). Leurs travaux ont permis de relier les oscillations de l'instabilité hydrodynamique des régions cisillées de l'écoulement à une réponse couplée du moteur. Ils ont débouché sur un premier modèle, proposé par Flandro (1986), reliant une solution d'origine hydrodynamique (des tourbillons) et une solution acoustique.

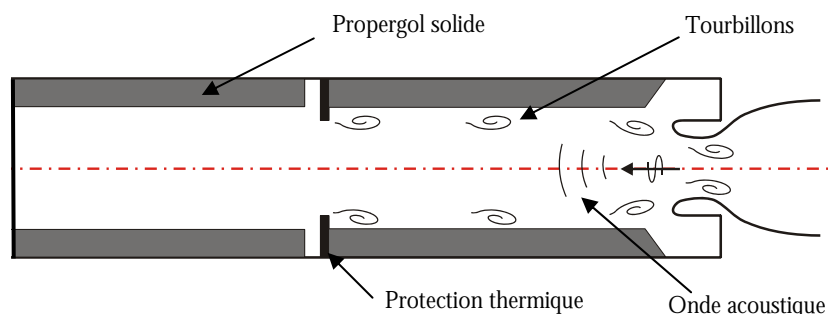


Figure 1- 18 : Onde acoustique de retour dans un MPS

Dans ces travaux, l'instabilité hydrodynamique est créée dans l'écoulement par la présence de protections thermiques (VSO) et le retour acoustique résulte de l'impact des tourbillons sur le nez de la tuyère, ou sur une autre PT (cf. Figure 1- 18). Ce retour d'onde est possible car l'écoulement dans le moteur est subsonique (cf. paragraphe 1.1). En outre, Culick & Magiawala (1979) ont montré qu'il

était impossible de maintenir des modes acoustiques en présence d'une seule protection thermique. Seul un deuxième obstacle situé après le point d'émission tourbillonnaire peut déclencher le retour acoustique lorsque les tourbillons interagissent avec lui.

### **2.3.2 Mise en évidence expérimentale**

Les premières expériences en laboratoire sur ce couplage aéro-acoustique ont été réalisées sur des maquettes en gaz froid. Des essais en canal avec une ou deux protection(s) thermique(s) ont ainsi été effectués par Culick & Magiawala (1979), puis plus récemment par Anthoine (Anthoine *et al.*, 2000 ; Anthoine, 2000). Dans ces expériences, le détachement tourbillonnaire est produit par les protections thermiques, et l'espace confiné du canal joue le rôle de résonateur avec ses fréquences naturelles. Les ODP se révèlent maximales lorsque la fréquence du Vortex Shedding est proche de la fréquence de l'un des modes acoustiques résonants du système.

Ce phénomène est à présent relativement bien compris (Vuillot, 1995 ; Lupoglazoff & Vuillot, 1996-a). Les conditions d'occurrence du couplage aéro-acoustique en présence d'une PT ont été étudiées expérimentalement et théoriquement (Anthoine, 2000). La condition de résonance résulte d'une interaction entre les structures tourbillonnaires et la tuyère. Des travaux ont été menés, au VKI notamment, pour étudier l'impact de ces tourbillons sur la tuyère. En fait, les tourbillons peuvent être avalés par la tuyère et provoquer la perturbation de l'écoulement responsable de la rétroaction acoustique, ou bien venir frapper le nez de la tuyère, ou encore pénétrer dans la zone de recirculation (après disparition du chambrage arrière). Un modèle analytique a été dérivé pour prédire les interactions entre le tourbillon et la tuyère. En particulier, les fluctuations acoustiques induites par le volume de la cavité au fond arrière (FAR) ont été regardées, permettant de mettre en lumière la forte influence qu'a la tuyère (forme et volume) sur le couplage écoulement/acoustique.

Un couplage aéro-acoustique a également été mis en évidence pour des instabilités hydrodynamiques de type VSA (Favray, 1999) et VSP (montage VECLA, Ugurtas, 2000). Le mécanisme est toutefois légèrement différent dans le cas du VSP. En effet, ce système se comporte comme un amplificateur de bruit, contrairement aux phénomènes de VSA et VSO qui possèdent une dynamique intrinsèque. Ainsi, les perturbations induites à l'entrée du système sont convectées et amplifiées par l'écoulement jusqu'à ce qu'elles atteignent un obstacle placé dans l'écoulement. L'interaction de la perturbation avec l'obstacle crée alors un retour à contre-courant qui permet de boucler le système et de former un cycle périodique. Pour ces systèmes, l'existence d'une dynamique propre se traduit par le développement d'oscillations auto-entretenues, c'est-à-dire dont les caractéristiques spatiale (longueur d'onde) et temporelle (fréquence) sont très bien définies.

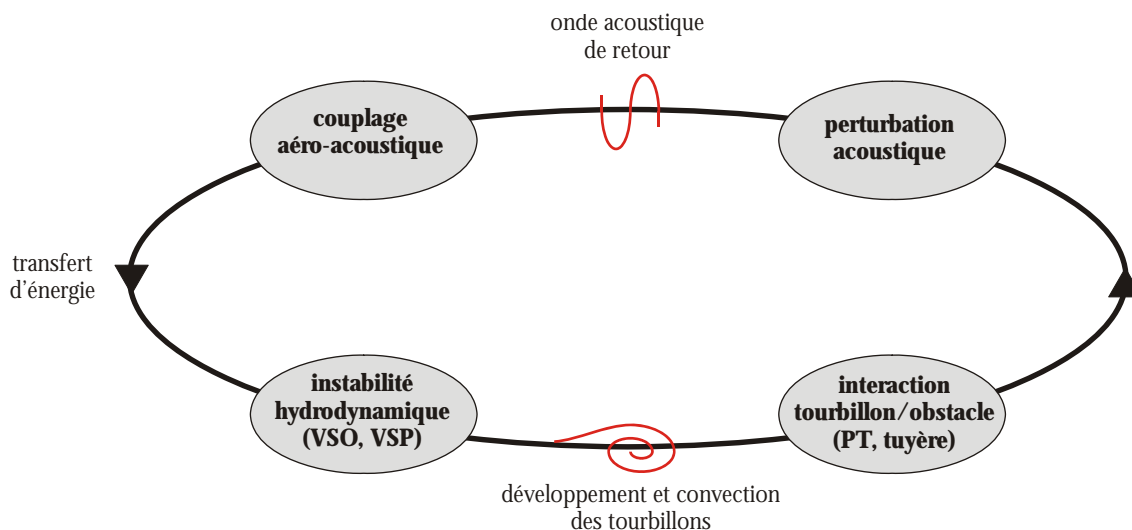
### **2.3.3 Scénario global**

Nous avons vu aux paragraphes précédents que des tourbillons pouvaient apparaître dans la chambre de combustion. Ces tourbillons, qui proviennent de la présence d'une ou plusieurs source(s) d'émission tourbillonnaire (VSA, VSO, VSP) sont ensuite convectés par l'écoulement moyen. Lorsqu'ils rencontrent un obstacle situé en aval du point d'émission tourbillonnaire (comme le nez de la tuyère ou une protection thermique), une onde acoustique est créée. Cette onde remonte dans l'écoulement et peut par la suite favoriser le détachement tourbillonnaire. Une boucle de rétroaction est ainsi induite, entre les instabilités hydrodynamiques de l'écoulement et l'acoustique de la chambre (cf. Figure 1- 19).

Les effets de cette onde acoustique sur le champ hydrodynamique vont dépendre de la réceptivité de ce dernier, *ie* son aptitude à être stimulé par l'acoustique (et inversement). De plus, les interactions entre les structures de l'écoulement et les propriétés acoustiques de la chambre de combustion peuvent engendrer différents niveaux d'oscillations.

Si les fréquences respectives du mode acoustique longitudinal de la chambre et du mode hydrodynamique de l'écoulement ne sont pas accordées, les fluctuations de pression seront limitées. Au contraire, si la fréquence associée au détachement tourbillonnaire coïncide avec celle d'un des

modes acoustiques résonants de la chambre du moteur, les fluctuations de pression créées seront d'ampleur maximale. C'est le phénomène d'accrochage aéro-acoustique : une source d'instabilité dont la fréquence évolue dans le temps (VS) entre en interaction avec l'acoustique de cavité de fréquence "constante" au cours du temps. Comme ces fréquences sont amenées à varier lors de la durée du tir (conditions d'écoulement, géométrie), les instabilités peuvent apparaître, disparaître, voire réapparaître, d'où les bouffées d'instabilités observées sur le P230.



**Figure 1- 19 : Boucle de rétroaction du couplage aéro-acoustique**

Le comportement aéro-acoustique du moteur est entièrement subordonné aux modes d'instabilité hydrodynamique et à leur couplage avec les modes propres acoustiques de la cavité. Toutefois, les conditions sous lesquelles ce "mariage" s'effectue restent à déterminer. D'autre part, la fréquence d'émission tourbillonnaire peut, dans une certaine mesure, être imposée par les propriétés acoustiques de la chambre. La fréquence du Vortex Shedding peut ainsi sauter d'un mode acoustique à l'autre (Anthoine, 2000).

De plus, un couplage entre les détachements tourbillonnaires dus à un obstacle (VSO) et à l'instabilité naturelle de l'écoulement de Taylor (VSP) a été mis en évidence numériquement (Godfroy & Briand, 2005) et expérimentalement grâce au montage spécifique MICAT1 (Vetel, 2001). Ces travaux ont montré que l'instabilité du moteur était principalement due au VSP ; le VSO ayant plutôt un rôle déclencheur. Un calage en fréquence du VSP sur le VSO est également observé. Ce couplage peut contrecarrer le phénomène de couplage aéro-acoustique, ou au contraire l'amplifier.

## 2.4 Autres phénomènes influents

Comme nous l'avons vu au cours de ce chapitre, les études fondamentales menées sur les propulseurs sont nombreuses et variées (théorie, simulation, essais en gaz froids ou maquette en gaz chauds). Néanmoins, elles ne suffisent pas à expliquer tous les phénomènes présents dans les propulseurs à échelle 1.

Par exemple, les essais en gaz froids exhibent des oscillations d'une amplitude relativement faible comparée à celle observée en réalité. Les essais à petite échelle, qui représentent une partie de la réalité d'un MPS, ont permis de retrouver par la simulation les niveaux d'oscillations observées en réalité, au moins pour certaines configurations. En revanche, le passage de la simulation à l'échelle 1 n'a pas rencontré le même succès. C'est pourquoi des phénomènes présents dans un MPS réel et pas dans les maquettes ont été recherchés. Parmi les phénomènes essentiels qui ont été retenus par les spécialistes se trouvent la combustion des particules d'aluminium et l'influence des protections thermiques de face.

Les protections thermiques de face peuvent fléchir, voire battre dans l'écoulement, sous l'influence des gaz de combustion (Godfroy & Briand, 2005). La position moyenne et la forme de la PT peuvent donc évoluer au cours du tir. En conséquence, le VSO issu de cet obstacle est modifié, de même que le couplage de ce phénomène avec l'instabilité pariétale. L'influence d'une PT émergeant dans l'écoulement est donc non négligeable.

La présence d'une phase dispersée dans le moteur peut également influencer fortement les instabilités. Des simulations numériques (Lupoglazoff *et al*, 2000 ; Ballereau *et al*, 2003) ont en effet montré que la combustion distribuée des particules d'aluminium contenues dans le propergol joue un rôle crucial sur les amplitudes des oscillations. Or, dans le cas des maquettes, un problème de mise à l'échelle des particules est rencontré. Cela explique en partie pourquoi des simulations monophasiques du LP6 permettent de retrouver les amplitudes mesurées lors des essais, alors que les simulations monophasiques du P230 sous-estiment systématiquement les amplitudes d'ODP obtenues en réalité. Cependant, les interactions entre phases condensée et gazeuse sont extrêmement complexes et certains effets de seuil ont pu être identifiés.

La turbulence de l'écoulement gazeux est un autre phénomène physique intervenant dans le fonctionnement d'un propulseur réel. Il a fait l'objet de plusieurs études (voir par exemple Kourta & Ha-Minh, 1995 ; Silvestrini *et al* ; 1995, Chaouat & Schiestel, 2000 ; Gallier *et al*, 2004) et continue à inspirer des travaux de recherche. Toutefois, cet aspect de l'écoulement n'est pas jugé prépondérant dans les configurations étudiées dans cette thèse (cf. chapitre 2).

En conclusion, les instabilités hydrodynamiques et leur couplage avec l'acoustique sont essentiels pour expliquer le comportement instable d'un moteur, mais ils ne suffisent pas à prédire les amplitudes des ODP observées en réalité. Le niveau final de l'instabilité est fortement influencé par d'autres mécanismes physiques tels que la combustion distribuée de l'aluminium, la vibration des PTF ou la turbulence de l'écoulement.

Durant nos travaux, nous avons concentré nos efforts sur l'un de ces mécanismes : la présence d'une phase dispersée dans l'écoulement gazeux. Nous consacrons le paragraphe 3 suivant à ce point essentiel.

### **3. La phase dispersée**

Le propergol utilisé dans les P230 est un propergol aluminisé : la Butalane® contient de la poudre d'aluminium pour des raisons énergétiques déjà mentionnées. Cependant, ces particules métalliques incorporées au propergol composite ne sont pas sans influence sur l'écoulement gazeux en général, et sur les ODP en particulier. C'est ce que nous allons voir dans ce paragraphe.

#### **3.1 L'aluminium dans le MPS P230**

Nous avons vu au paragraphe 1 que l'intérêt d'utiliser de l'aluminium en propulsion solide résidait dans l'augmentation de l'impulsion spécifique du moteur, via l'élévation de la température moyenne des produits de combustion<sup>13</sup>. L'aluminium permet aussi de diminuer la masse molaire de ces derniers. En effet, les gaz issus de la décomposition sont essentiellement H<sub>2</sub>O, CO<sub>2</sub> et CO. La présence d'aluminium va permettre de réduire ces gaz et, par exemple, de transformer les molécules d'H<sub>2</sub>O en H<sub>2</sub>, plus léger. L'impulsion spécifique du moteur s'en trouve donc encore augmentée. Néanmoins, la masse de gaz éjectée est diminuée par la présence d'aluminium dans le propergol. Comme seul le gaz a une capacité à transformer de l'énergie thermique en énergie mécanique, l'ajout d'aluminium doit rester limité afin de permettre un compromis intéressant entre augmentation de l'impulsion spécifique et diminution du débit gazeux éjecté (1. 8). En outre, ces particules métalliques ont d'autres conséquences non négligeables sur l'écoulement gazeux global.

---

<sup>13</sup> D'autres composés métalliques peuvent être utilisés dans ce but, voir par exemple Tavernier *et al* (1970).

### 3.1.1 La combustion de l'aluminium

La Butalane® est composée d'un liant (PBHT), de grains de perchlorate d'ammonium (PA) et de particules d'aluminium (Al), cf. Figure 1- 20. Notons que la version non aluminisée de la Butalane® s'appelle la Butalite<sup>14</sup>.

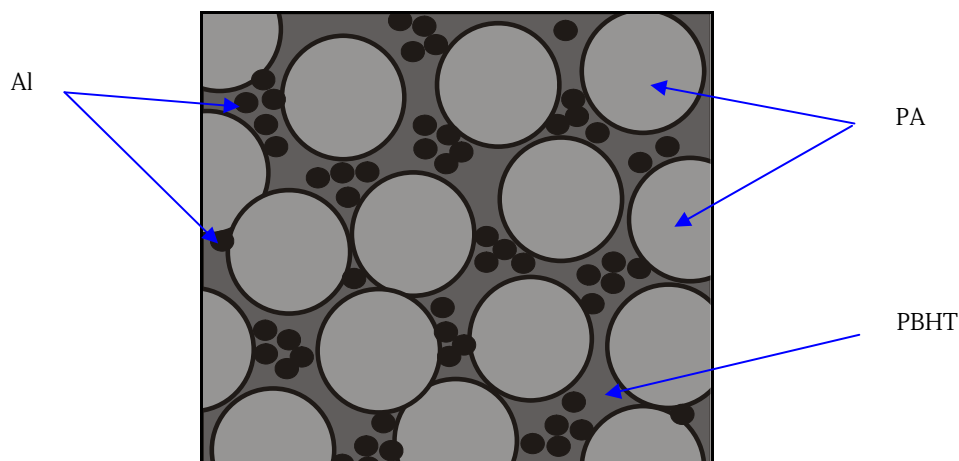


Figure 1- 20 : Composition de la Butalane®

Lorsque le propergol brûle, sa surface en combustion régresse, en couches supposées planes<sup>15</sup> (Price & Sigman, 2000). Les particules d'aluminium, contenues dans le propergol, émergent donc à la surface. Leur combustion en ambiance gaz de propergol est un phénomène extrêmement complexe, étudié depuis plusieurs dizaines d'années, et encore source de nombreux travaux (Kuo, 1986 ; Cohen, 1983 ; Widener & Beckstead, 1998). La difficulté pour connaître précisément le mode de combustion des particules est due aux conditions particulièrement difficiles qui règnent dans la chambre d'un propulseur (température élevée, pression forte, milieu oxydant) et qui empêchent observations et mesures précises. Néanmoins, les recherches effectuées dans ce domaine ont permis de mettre en place un scénario décrivant le mécanisme global de combustion des gouttes d'aluminium dans un propulseur (Marion *et al*, 1996 ; Cesco, 1997 ; Legrand *et al*, 2000 ; Orlandi, 2002). Nous en donnons ici uniquement les grandes lignes, pour permettre au lecteur de comprendre ce que deviennent les particules d'aluminium, notamment du point de vue de leurs formes et tailles.

Les particules d'aluminium qui apparaissent à la surface du propergol peuvent soit se détacher de la surface et être éjectées dans l'écoulement, soit s'agglomérer en surface avec d'autres particules pour former des globules qui sont à leur tour éjectés dans la chambre (Trubert, 2000) (cf. Figure 1- 21). Pour fixer les idées, les particules issues directement de la surface du propergol ont un diamètre représentatif de 30µm environ. Celui des agglomérats d'aluminium formés à la surface du bloc est d'environ 100µm. Dans les deux cas, particules isolées et agglomérats d'aluminium sont recouverts d'alumine solide  $Al_2O_3$ , qui forme une barrière protectrice empêchant toute oxydation de la surface par les gaz réactifs ambiants. Lorsque la température du milieu devient suffisante<sup>16</sup>, la croûte d'alumine se rompt, permettant ainsi l'allumage et la combustion de la particule. Le produit final est l'alumine, sous forme de gouttelettes liquides dont le diamètre peut varier du micron (fumées) à quelques dizaines de microns (résidus de combustion des globules).

<sup>14</sup> Le suffixe -ite traduit l'absence de particules métalliques dans la composition du propergol, alors que -ane indique des particules d'aluminium.

<sup>15</sup> La Butalane® des MPS d'Ariane 5 brûle radialement à des vitesses de l'ordre de 7,4 mm/s pendant la majeure partie du fonctionnement.

<sup>16</sup> De l'ordre de 2300K, soit la température de fusion de l'alumine.



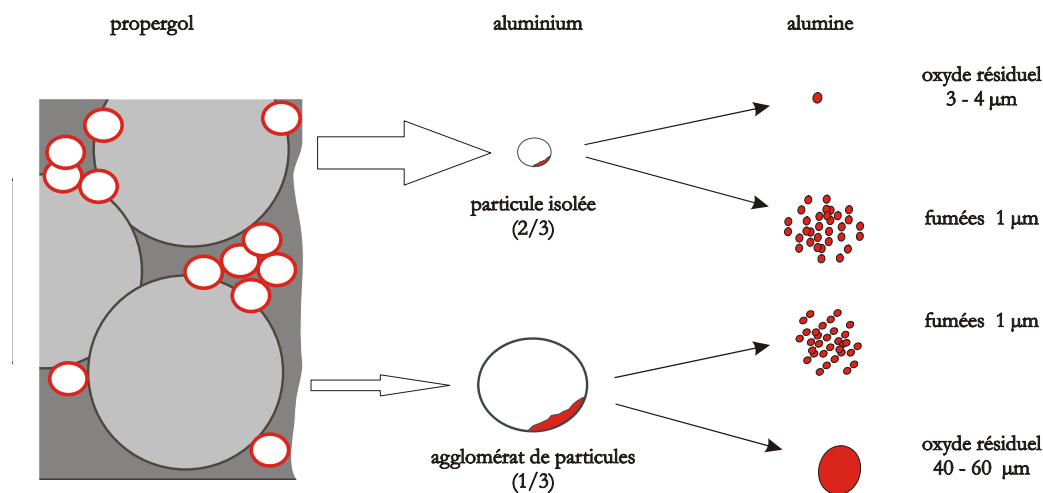


Figure 1- 21 : Combustion de l'aluminium, d'après Duterque & Lambert (1998)

Le temps de combustion des particules d'aluminium de 30μm de diamètre est d'environ 5ms (Gailliege, 1998) et leur temps de parcours moyen dans le MPS P230 est d'environ 200ms (Fabignon, 1997). Pour les particules de 100μm de diamètre, le délai de combustion est de l'ordre de 40ms. Les particules isolées sont donc rapidement brûlées, contrairement aux agglomérats qui sont réactifs durant une partie de leur séjour. Néanmoins ces derniers sont moins nombreux, puisqu'ils ne représentent qu'un tiers de la masse totale des particules d'aluminium initiale.

L'écoulement obtenu est donc composé d'une phase gazeuse, issue de la combustion du propergol, de particules d'aluminium en combustion et de gouttelettes d'alumine. Cet écoulement diphasique est source de phénomènes physico-chimiques complexes (combustion, convection, échanges entre phases etc.) dont il est malheureusement impossible d'avoir une connaissance détaillée par l'observation expérimentale. Encore une fois, les conditions difficiles qui règnent dans une chambre de combustion de MPS interdisent toute visualisation ou prise de mesure liée à l'écoulement diphasique.

### 3.1.2 Interactions avec l'écoulement gazeux

La combustion des particules d'aluminium induit des échanges de masse et d'énergie avec la phase gazeuse. L'écoulement gazeux s'en trouve évidemment modifié. Cependant, les résidus de combustion présents dans l'écoulement sous forme de gouttelettes d'alumine liquide de diamètre variable jouent aussi un rôle important dans les interactions gaz/particules. En effet, la présence de cette phase condensée « inerte » dans l'écoulement induit des modifications sensibles de ce dernier. Le déphasage cinétique et thermique entre les phases gazeuse et condensée crée inévitablement des transferts de quantité de mouvement et d'énergie qui peuvent perturber l'écoulement gazeux<sup>17</sup>. De plus, la géométrie du P230 présente une tuyère intégrée, insérée dans le troisième segment (cf. Figure 1- 8). Le fond arrière du propulseur correspond donc à une zone de recirculation de l'écoulement (ou zone d'eau morte). Une partie des particules d'alumine va se trouver piégée dans cette zone et se déposer dans le FAR du moteur (Cesco *et al*, 1996 ; Godfroy & Guéry, 1997-a ; Le Helley *et al*, 2000). L'ensemble de ces phénomènes est schématisé Figure 1- 22.

Il est également possible que leur inertie les empêche d'atteindre le col de la tuyère intégrée et qu'elles se déposent sur le nez de la tuyère, créant ainsi un film liquide. Ces deux phénomènes sont à l'origine de la formation d'une flaque d'alumine liquide à l'arrière du moteur (Villedieu *et al*, 2000).

<sup>17</sup> Par rapport à l'écoulement gazeux obtenu par combustion du même propergol, mais non aluminisé, dans le même propulseur.



Ce phénomène a été confirmé par des essais au banc qui ont mis en évidence des dépôts d'alumine très importants dans cette zone, de l'ordre de 2 tonnes<sup>18</sup> dans chaque moteur (Fabignon, 1997).

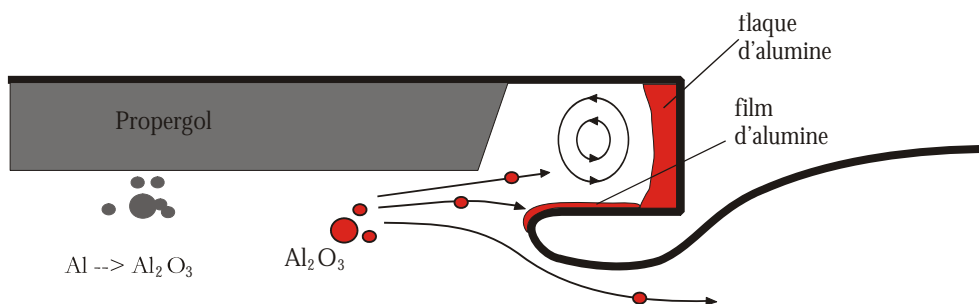


Figure 1- 22 : L'alumine dans le P230

Ces dépôts sont évidemment gênants car ils peuvent entraîner une surcharge et/ou un déséquilibre du lanceur si l'accumulation se fait de façon différente dans les deux MPS.

En outre, bien que ces phénomènes ne semblent pas présents dans le P230, le film liquide sur le nez de la tuyère peut d'une part alimenter la flaque liquide et donc aggraver les travers cités auparavant, mais il peut également causer des éjections intempestives de particules, entraînant une érosion de la tuyère et une baisse de pression dans la chambre de combustion (Martin, 1995).

Précisons que ce phénomène de dépôt, cité ici, ne rentre pas dans le cadre de nos travaux. En effet, ceux-ci sont plus ciblés sur la dispersion des particules dans l'écoulement, qui peut s'effectuer dans une grande partie de la chambre.

## 3.2 Rôle des particules par rapport aux ODP

De façon générale, il est possible de linéariser les équations de la mécanique des fluides, en écrivant les différentes grandeurs des équations comme la somme d'une partie moyenne et d'une partie fluctuante (Culick, 1975). Cette théorie linéaire a été appliquée à la propagation d'une onde acoustique dans un écoulement diphasique homogène (Temkin & Dobbins, 1966). Ainsi, la présence d'une phase dispersée **inerte** conduit théoriquement à un amortissement systématique des instabilités. Toutes choses étant égales par ailleurs, cet amortissement dépend du diamètre des particules et de la fréquence des instabilités. De plus, un amortissement maximal peut être déterminé (cf. chapitre 8). Toutefois, nous allons voir que la situation n'est pas si limpide dans le cas des moteurs à propergol solide.

Tout d'abord dans un MPS, la phase dispersée est **réactive**, ensuite l'écoulement peut être très complexe, notamment à cause des phénomènes de détachement tourbillonnaire (VSP et VSO en particulier). En outre, l'influence de la phase dispersée sur les amplitudes des ODP est difficile à appréhender expérimentalement. En effet, durant le tir d'un MPS, certaines mesures expérimentales peuvent être effectuées, mais elles sont peu nombreuses et représentatives du fonctionnement global du moteur : aucun phénomène détaillé n'est accessible par ces acquisitions. Une investigation à d'autres niveaux est donc nécessaire, soit par la simulation numérique, soit par des expérimentations en maquette (de façon à simplifier le problème).

Or, si la phase dispersée n'est pas prise en compte dans les simulations, celles-ci ne reproduisent pas correctement les résultats des tirs expérimentaux (Kuentzmann, 1998 ; Godfroy & Briand, 2004). La présence de particules réactives dans l'écoulement apparaît donc comme un phénomène important, dont la modélisation et la compréhension sont cruciales pour la prédiction du

<sup>18</sup> A comparer à la masse totale d'alumine produite, qui est d'environ 72 tonnes (Laverge *et al*, 1996).

comportement d'un MPS. Une étude paramétrique menée sur le moteur LP6 (maquette à l'échelle 1/15<sup>ème</sup> du P230) a ainsi montré que la phase dispersée pouvait, selon le diamètre des particules, aboutir soit à un amortissement, soit à une augmentation des niveaux d'ODP (Godfroy *et al*, 2004). La situation en réactif est donc complexe et tous les mécanismes de couplage entre ODP et phase dispersée réactive ne sont pas élucidés.

Face à ces difficultés, l'influence de particules inertes a été explorée dans des écoulements complexes, afin d'éclaircir la situation en découplant artificiellement les phénomènes. Des études, réalisées sur deux maquettes du P230 (LP6 et LP10), ont montré qu'une phase dispersée inerte conduit à une augmentation systématique des ODP dans les moteurs type P230 présentant un VSP pur (Ballereau *et al*, 2003 ; Godfroy et Briand, 2004). Ces résultats vont à l'encontre de l'expérience des balisticiens et de ce que suggère la théorie linéarisée. Un scénario explicatif de ce comportement étonnant de la phase dispersée inerte a toutefois pu être établi. Il repose sur la formation de paquets de particules qui, en passant par la tuyère, créent une onde de pression (cf. chapitre 8). Un grand nombre de simulations a permis de confirmer sur un MPS à l'échelle 1 fictif, au moins dans les grandes lignes, ce comportement amplificateur d'ODP d'une phase dispersée inerte observé sur maquette (Godfroy & Briand, 2004).

Ces études sont évidemment à caractère purement numérique : aucun propulseur LP6 ou LP10 ne comporte de particules inertes dans sa chambre de combustion<sup>19</sup>. Elles ont cependant permis de progresser dans la compréhension du couplage entre écoulements tourbillonnaires et phase dispersée réactive. Précisons enfin que les particules ne modifient pas globalement le champ aérodynamique : elles ne font qu'amplifier l'instabilité existante.

En conclusion, l'ensemble des résultats obtenus montre qu'un couplage ODP/phase dispersée existe dans la réalité (Lupoglazoff *et al*, 2000). Le rôle de la phase dispersée dans les phénomènes liés aux ODP est donc admis par la communauté scientifique française<sup>20</sup>. Cependant, les causes de ce couplage particules/ODP restent mal comprises et ses effets mal maîtrisés. En effet, si l'aluminium a un effet positif sur les instabilités de combustion, il est en revanche possible qu'il ait un rôle amplificateur vis-à-vis des ODP. Par conséquent, le diamètre des particules d'aluminium est un paramètre sensible, capable d'agir sur le niveau des oscillations et sur le mode d'instabilité sélectionné.

L'utilisation d'aluminium dans le P230 semble donc avoir quelques inconvénients par rapport à la stabilité du moteur. Ce qui peut amener le profane à remettre en question l'intérêt global d'un propergol aluminisé...

### **3.3 Pourquoi des propergols aluminisés?**

L'utilisation d'aluminium dans les MPS d'Ariane 5 est essentiellement motivée par la recherche d'une  $I_s$  élevée. Or cet additif, longtemps considéré et utilisé comme additif stabilisateur du fonctionnement d'un moteur (Gossant, 1993), est aujourd'hui fortement soupçonné de pouvoir amplifier les oscillations engendrées lors du fonctionnement du moteur. Il est clair que la suppression de l'aluminium permettrait de s'affranchir du problème critique de son rôle sur les ODP : pas de risque d'amplification du phénomène en absence de phase dispersée (mais pas de possibilité non plus d'atténuation...) et, par la même occasion, disparition des problèmes connexes des ODP liés à l'utilisation d'aluminium, telle que la formation d'une flaque d'alumine au FAR du moteur ou le dégagement dans l'atmosphère de résidus d'alumine.

---

<sup>19</sup> En 2006, il est justement prévu de tirer en R&T CNES un LP10 avec des particules "inertes", afin de corroborer par l'expérience les résultats obtenus en simulation numérique (amplification systématique des amplitudes par une phase dispersée inerte dans un écoulement tourbillonnaire d'une chambre de propulseur).

<sup>20</sup> Mais est contesté par les spécialistes transalpins... (Stella *et al*, 2005)

Il est alors légitime de se demander pourquoi la Butalane® reste le propergol de prédilection de la plupart des MPS, dont celui d'Ariane 5. N'existe-t-il aucune composition non aluminisée capable de la remplacer ? La réponse à cette question n'est pas si simple, notamment parce que le choix d'un propergol ne repose pas que sur des critères énergétiques. D'autres aspects fondamentaux sont à prendre en compte comme la sécurité, le respect de l'environnement<sup>21</sup> et le coût de revient.

En ce qui concerne la recherche de performances, des études semblent montrer qu'il est possible de fabriquer des propergols non aluminisés dont l'impulsion spécifique, bien qu'inférieure à celle de la Butalane®, s'approche des performances de cette dernière. Différentes voies sont explorées dans ce sens, telles que l'utilisation de liants énergétiques (azidés) ou de charges plus performantes que le perchlorate d'ammonium.

Cette solution "miracle" n'est pourtant évidemment pas appliquée, pour différentes raisons. Premièrement, la maîtrise de ces produits en matière de connaissance des mécanismes de combustion et de sécurité n'est pas aussi assurée que celle de la Butalane®, qui a subi de nombreuses qualifications. De plus, l'utilisation de ces nouveaux chargements est aujourd'hui limitée en termes de faisabilité à grande échelle et de coût : la Butalane® présente un rapport qualité/prix imbattable, pour le moment... Enfin, les problèmes de développement et de re-qualification du lanceur, inévitables en cas de modifications du moteur, ajoutent également à la difficulté d'utilisation de ces nouveaux propergols. En conclusion, il s'agit ici des futurs propergols qui équiperont peut être les lanceurs de demain.

Finalement, la Butalane® est une solution technologique connue, économique et maîtrisée, qui a la faveur des responsables de conception d'Ariane 5, pour encore quelques années sûrement... La suppression de l'aluminium n'est donc pas à l'ordre du jour. Cependant, d'autres voies technologiques, plus plausibles, peuvent être envisagées afin de diminuer les conséquences des ODP du P230. C'est ce que nous allons voir au paragraphe suivant.

## **4. Vers une maîtrise des instabilités du P230**

Les tirs du P230 et les vols Ariane 5 montrent de façon avérée que ce moteur peut présenter un comportement instable. Or, les vibrations qui découlent des fluctuations de pression engendrées par cette instabilité affectent tout le moteur. Ces vibrations, d'amplitude plus ou moins importante, sont toujours indésirables car elles sont transmises à toute la structure et *a fortiori* à la charge utile (satellite, système de guidage etc.) qui risquerait de s'en trouver endommagée s'il n'y avait pas le dispositif amortissant.

Actuellement, les MPS P230 sont en limite des seuils de tolérance de la charge utile. Pour réduire les effets de ces instabilités, des solutions palliatives sont utilisées. Par exemple, pour le P230, un dispositif amortissant est installé entre le corps de la fusée et le propulseur. Mais ce dispositif diminue les performances du lanceur et a un coût car il entraîne une surcharge donc une charge utile moins importante. D'autre part, les instabilités sont très sensibles à certains facteurs mal maîtrisés, qui dépendent d'aspects technologiques. La connaissance des mécanismes qui régissent les ODP est donc un objectif primordial, afin de pouvoir les diminuer et les contrôler, voire les éliminer.

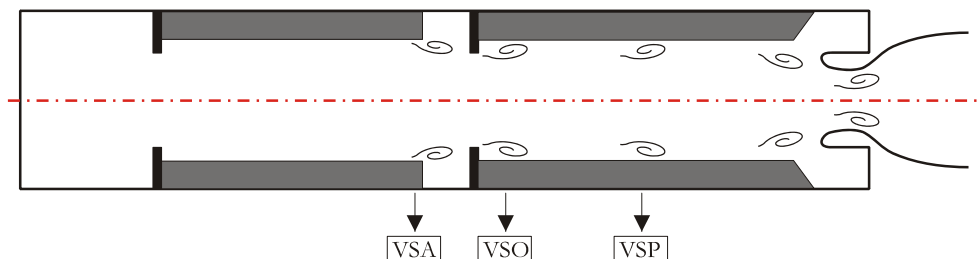
### **4.1 Le P230 : une situation complexe**

De nombreux travaux, réalisés entre autre dans le cadre du programme ASSM (Fabignon *et al*, 2000), ont permis d'améliorer le niveau des connaissances théoriques et expérimentales sur la stabilité des MPS et plus spécifiquement du P230. Ainsi, il est avéré que ce moteur contient les

---

<sup>21</sup> Des recherches ont ainsi été menées pour développer des propergols peu ou non polluants, afin d'éviter le rejet de gaz de combustion contenant de l'acide chlorhydrique dans l'atmosphère (Finck & Pérut, 1991 ; Davenas, 1995).

différents mécanismes de détachement tourbillonnaire identifiés : VSA, VSO et VSP (cf. paragraphe 2.2). Toutefois, le VSA n'est pas le phénomène prépondérant dans le P230. Bien que présente, cette source d'instationnarité n'a pas le poids des deux autres (VSO et VSP). La source du VSO dans le P230 est la protection thermique du troisième segment qui émerge dans l'écoulement au fur et à mesure que le propergol se consume (cf. Figure 1- 23). Précisons également que l'analyse de ce type de détachement tourbillonnaire est complexe car la PT est suivie dans le moteur d'un segment de propergol présentant une injection radiale de masse. L'écoulement moyen en aval de l'obstacle ne peut donc pas être considéré comme parallèle : la surface débitante accélère l'écoulement.



**Figure 1- 23 : Différents types de détachements tourbillonnaires dans le P230**

Expérimentalement, les trois instabilités suspectées ont prouvé leur capacité à entraîner l'accrochage acoustique avec un ou plusieurs des premiers modes acoustiques longitudinaux tant lors de simulations à froid (Favray, 1999 ; Anthoine, 2000 ; Avalon *et al.*, 2000) que lors de tirs en gaz chauds à échelle réduite (Brown *et al.*, 1981 ; Dupays, 1996 ; Prévost *et al.*, 2000-a). Cependant, il n'est pas nécessaire d'avoir simultanément ces trois sources de détachement pour donner lieu à une instabilité globale. Une seule suffit si les conditions nécessaires au couplage entre ce détachement et l'acoustique de la chambre sont réunies. Cependant, il n'y a manifestement pas qu'une source d'instabilité à l'œuvre dans le P230. La compréhension du couplage aéro-acoustique entre les diverses instabilités hydrodynamiques de l'écoulement et les modes acoustiques longitudinaux de la chambre de combustion est donc rendue plus ardue. De plus, d'autres couplages peuvent avoir lieu dans le P230 (cf. paragraphe 2.4) et doivent être pris en compte pour espérer prédire les amplitudes des ODP créées par ce moteur.

## 4.2 Prédiction des instabilités

Le comportement instable d'un moteur doit pouvoir être prédit dès la phase d'avant projet, de façon à limiter les conséquences d'une éventuelle instabilité (Gallier *et al.*, 2002). Cela nécessite une démarche intellectuelle qui doit inclure la compréhension des phénomènes physiques mis en jeu et permettre la prédiction quantifiée de la stabilité du moteur.

Le but des études numériques réalisées actuellement dans la R&T spatiale française, dont cette thèse fait partie, est donc de rechercher les paramètres influents qui exercent un rôle prépondérant sur les amplitudes des ODP. L'objectif final est de comprendre le phénomène et d'être capable de le simuler précisément. Ainsi, les scientifiques pourront proposer des moyens technologiques pour diminuer les ODP sur Ariane 5. Mais pas seulement : la maîtrise des mécanismes intervenant dans la stabilité du moteur permettra également de prévenir toute augmentation des instabilités liée à une modification quelconque du P230. Enfin, les connaissances acquises sur les mécanismes influents sur les ODP pourront aider aux études d'avant-projet pour les moteurs des futurs lanceurs. En effet, les nouveaux projets de lanceur, de la taille d'Ariane 5 ou autres, s'appuient sur des chargements de configurations géométriques différentes du MPS P230. Bien que la physique globale des instabilités de l'écoulement qui sont à l'origine des ODP soit la même que pour le MPS P230, des phénomènes particuliers spécifiques à ces géométries peuvent apparaître.

Cela suppose pour un avant-projet de disposer de méthodes et d'outils suffisamment efficaces pour pouvoir prédire de façon fiable les ODP qui pourraient être présentes. Il s'agit donc de profiter de

l'acquis du MPS pour développer une méthodologie pour étudier et maîtriser les ODP sur un lanceur quelconque. Parmi ces outils, la simulation numérique figure en bonne place.

### 4.3 Intérêt de la simulation numérique

Les approches simplifiées, telles que le bilan acoustique, se sont rapidement révélées insuffisantes pour traiter la stabilité d'un moteur aussi complexe que le P230 (Vuillot *et al.*, 1996). Malgré les améliorations apportées à ces méthodes pour traiter notamment les phénomènes de VSP (Flandro 1986 ; Flandro & Majdalani, 2003), une démarche plus amont, évitant de recourir aux mêmes hypothèses simplificatrices sur la physique, est indispensable pour accéder à une prédiction quantitative de l'amplitude des ODP.

Toutefois, la complexité des phénomènes mis en jeu oblige un niveau de modélisation physique toujours plus élevé. En effet, un grand nombre de phénomènes et de paramètres physiques responsables de l'existence des ODP du MPS, de leurs amplitudes et de leurs fréquences a été mis au jour. Les ODP sont donc très complexes et il est illusoire de chercher à les résumer à un modèle simple. De plus, il est très difficile de réaliser des mesures pointues lors du fonctionnement d'un MPS. Seules quelques grandeurs globales sont exploitables, ce qui est insuffisant pour permettre une compréhension fine des mécanismes liés aux ODP, étape indissociable de la démarche prédictive.

L'outil numérique permet, lui, de modéliser un grand nombre de phénomènes et de les coupler entre eux. En le validant sur la base d'expérience simple (phénomène élémentaire) et sur des grandeurs globales de tir (essai en maquette ou tir réel), on peut espérer obtenir un outil qui soit prédictif.

Actuellement, plusieurs aspects de l'écoulement peuvent être couplés : aérodynamique, couplage fluide/structure, combustion de l'aluminium, turbulence, géométrie 3D, etc. Cependant, les interactions sont complexes et loin d'être toutes maîtrisées. En outre, malgré les progrès récents en capacité de calcul et de mémoire, la modélisation reste encore limitée par la dimension des problèmes. Tout n'est pas pris en compte. Actuellement, bien que cela soit un objectif pour les années à venir, l'ensemble des phénomènes physiques présents dans un MPS (évolution géométrique, turbulence, diphasique, combustion, ...) ne peut être pris en compte simultanément.

La prévision des niveaux oscillatoires est donc loin d'être une simple formalité : de nombreux phénomènes, qui peuvent être complexes, sont étroitement couplés, ce qui rend leur étude délicate (Vuillot, 1998). La mise au point d'outils numériques capables de prédire, à coup sûr, l'occurrence et le niveau des oscillations de pression d'un MPS, passe donc obligatoirement par une modélisation précise de l'écoulement instationnaire dans le moteur.

### 4.4 Comment atténuer l'effet des ODP

Si l'on parvient à maîtriser les ODP, il devient possible de les prendre en considération lors de la conception des nouveaux moteurs. Aujourd'hui, trois voies peuvent être considérées prépondérantes en matière d'atténuation des instabilités : la géométrie du bloc de propergol, la protection thermique de face (PTF) et la granulométrie de l'aluminium dans la Butalane®. Pour SNPE spécifiquement, les actions envisageables afin de réduire voire d'éliminer les ODP se situent au niveau du chargement (forme, présence de cavité,...) et du propergol (granulométrie de l'aluminium, composition,...).

#### 4.4.1 Forme du chargement

En ce qui concerne l'influence de la géométrie du bloc de propergol, rappelons que nous avons vu au paragraphe 2.2 que deux mécanismes générateurs d'instabilité étaient directement liés à ce paramètre. Le VSP d'abord, qui dépend du ratio  $\ell/h$  du moteur (longueur du propergol en combustion par rapport à la dimension du canal central), et le VSA qui se développe si le

chargement présente des arêtes saillantes dans l'écoulement. Les instabilités étant très sensibles à la forme du chargement, puisque liées aux sources d'émission tourbillonnaire, ces deux critères doivent donc être pris en compte lors de la définition du bloc<sup>22</sup>.

#### 4.4.2 Protection thermique de face

Une autre voie possible dans la recherche de stabilité du moteur est d'éviter la présence d'obstacles dans l'écoulement. Pour le MPS P230, la modification de la protection thermique de face (PTF) au niveau de l'inter-segment S2-S3, est une possibilité intéressante. En effet, des simulations numériques (Ballereau *et al*, 2005 ; Godfroy & Briand, 2005) et des tirs (Telara *et al*, 2005) ont clairement montré l'influence de la PTF sur le niveau des ODP. Le matériau, la forme et la position moyenne de la PTF dans l'écoulement sont des paramètres qui peuvent jouer sur les amplitudes des oscillations. Ainsi, le changement de technologie de fabrication de la PTF, initié après une dizaine de tirs du lanceur Ariane 5, a augmenté les amplitudes d'ODP des tirs suivants de 25% à 50%. On peut donc envisager de modifier la forme et/ou la structure de la PTF de façon à obtenir l'effet inverse, en diminuant par exemple l'influence du VSO créé par cet obstacle. Puisqu'un couplage existe entre le VSO et le VSP (créé par l'écoulement de Taylor), on peut également envisager de développer une PTF idoine qui désaccorderait l'écoulement, évitant ainsi une amplification maximale des oscillations (Godfroy & Briand, 2005).

#### 4.4.3 Modification de la phase dispersée

Nous avons vu que la présence d'une phase dispersée dans l'écoulement d'un MPS avait une forte influence sur les amplitudes des ODP observées. Néanmoins les mécanismes exacts permettant cette modification des ODP par la phase dispersée ne sont pas clairement identifiés. Rappelons également que l'instabilité trouve son origine principale dans une mécanique des fluides monophasique et que les effets diphasiques contrôlent surtout les **amplitudes** des instabilités.

Le point important à retenir, à l'heure actuelle, est donc que les particules interagissent avec les grosses structures cohérentes de l'écoulement, issues du VSO, du VSA ou du VSP, ou encore d'un couplage entre ces mécanismes. Le phénomène influent de l'aspect diphasique de l'écoulement n'est pas tant la combustion des particules que la présence de ces particules dans l'écoulement qui, lui, est tourbillonnaire. La caractéristique principale de cette phase dispersée devient donc la taille des particules.

En conséquence, une voie à explorer est celle de la modification de la granulométrie de l'aluminium contenu dans la Butalane®, modification moins contraignante qu'un changement complet de composition du propergol. En effet, la taille initiale des particules d'aluminium dans le propergol influe fortement sur la dimension des résidus de combustion dans la chambre, via des phénomènes de coalescence et de fragmentation des particules. Les amplitudes des ODP étant *a priori* dépendantes de la taille de ces résidus (Briand, 2003) il serait évidemment profitable de choisir la dimension initiale la moins pénalisante en terme d'ODP.

La première solution qui vienne à l'esprit consiste à utiliser un propergol chargé de petites particules d'aluminium (typiquement de diamètre 5µm pour l'exemple du P230). Ainsi, d'après les connaissances actuelles, le couplage entre phase dispersée réactive<sup>23</sup> et ODP serait très faible, ce qui éviterait un effet amplificateur aux particules, à condition qu'aucun phénomène d'agglomération ne se produise.

---

<sup>22</sup> Sachant que la géométrie de celui-ci est définie prioritairement en fonction de la mission que le moteur doit accomplir.

<sup>23</sup> Pour des particules de cette taille, la combustion s'effectue en proche paroi, les particules peuvent donc être considérées inertes dans l'écoulement, et la taille des résidus de combustion étant également très faible, l'influence des particules sur l'écoulement gazeux est très limité.

Or, des études réalisées pour une phase inerte ont montré que des particules de diamètre élevé pouvaient avoir un effet proche de celui généré par de petites particules (Godfroy *et al*, 2004 ; Simoes *et al*, 2005). On peut donc envisager qu'il existe un diamètre de particules qui soit à la fois de fabrication aisée et peu onéreuse, et capable d'atténuer les ODP, ou en tout cas de ne pas les amplifier. Reste à déterminer cette dimension optimale.

## 4.5 Objectifs de la thèse

Dans le cadre de cette thèse, nous nous sommes intéressés spécifiquement à l'un des phénomènes physiques responsables des amplitudes des ODP : la présence d'une phase dispersée inerte dans un écoulement présentant un VSP pur. Puisqu'il a été démontré l'influence du diamètre des particules d'aluminium sur les ODP, nous cherchons à définir le diamètre permettant d'amplifier au minimum les amplitudes des oscillations. Cette information pourrait, à terme, être utilisée en formulation pour développer un propergol avec une granulométrie d'aluminium adaptée.

Il s'agit donc de parvenir à un outil numérique prédictif, précis et fiable qui permettrait à terme de définir ce diamètre de particules idoine. Le développement d'un tel outil nécessite une amélioration de la connaissance et de la modélisation des écoulements diphasiques des propulseurs à propergol aluminisé. Comme précisé dans l'introduction générale de ce document, un code de mécanique des fluides développé par SME en partenariat avec le CNES, CPS, permet de réaliser des simulations d'écoulements diphasiques en propulsion solide. Néanmoins, la précision de la modélisation diphasique utilisée dans ce code n'est pas toujours suffisante.

Les objectifs de cette thèse sont donc :

- de bâtir une modélisation diphasique eulérienne plus performante que celle existant dans les outils numériques tels que le code CPS, afin de permettre une simulation précise du comportement des particules dans la chambre de combustion,
- d'étudier le rôle de particules inertes sur les ODP, dans un écoulement présentant un VSP pur.

Les travaux réalisés durant cette thèse ne sont qu'une brique de l'édifice visant à comprendre le couplage ODP/diphasique. Ils ont pour but d'améliorer la modélisation de la dispersion des particules dans l'écoulement, via un terme de pression particulaire (cf. chapitre 4). D'autres travaux, menés en parallèle, cherchent à modéliser plus précisément le phénomène de combustion<sup>24</sup> des particules ou à prendre en compte les phénomènes de coalescence et de fragmentation<sup>25</sup> des gouttelettes. La connaissance de la granulométrie d'aluminium et/ou d'alumine, est effectivement sans conteste un point clé pour la simulation de la combustion distribuée de l'aluminium et de ses interactions avec les instabilités. Il convient également d'améliorer le niveau de connaissances d'autres phénomènes physiques importants, liés à l'influence de la PTFS3 (cf. paragraphe 4.4), à la forme géométrique du chargement et son évolution pendant le tir, à la présence de cavités pendant le tir,...

Le temps imparti pour cette thèse étant limité, notre contribution à une meilleure compréhension des écoulements dans les MPS type P230 s'est restreinte à la présence d'une phase dispersée inerte.

## 5. Conclusion

Un moteur à propergol solide est conçu pour remplir une mission spécifique. Le choix du chargement (géométrie du bloc, composition du propergol), de l'architecture structurelle du propulseur et des équipements internes (protection thermique) doit permettre de fournir une poussée selon une loi d'évolution précise.

<sup>24</sup> J. Dupays, à l'ONERA, travaille notamment sur ce sujet (communication personnelle).

<sup>25</sup> Une thèse est menée à l'ONERA sur ce sujet, par T. Fontfreyde (communication personnelle).

Le lanceur européen Ariane 5 dispose de deux MPS, très fiables, mais qui présentent indéniablement un comportement instable lors de leur fonctionnement. Ces instabilités, d'amplitude plus ou moins prononcée, se manifestent par des oscillations de pression qui induisent des fluctuations de poussée et donc des vibrations du moteur. Ces vibrations sont ensuite transmises à l'ensemble du lanceur, y compris à la charge utile embarquée. Les conséquences fâcheuses de ces oscillations sont actuellement limitées à l'aide de dispositifs amortisseurs, mais ceux-ci diminuent par la même occasion la capacité d'emport du lanceur.

Des solutions moins coûteuses sont donc activement recherchées à travers des études théoriques, expérimentales et numériques. De vastes programmes de recherche, lancés dès 1990, ont permis de faire nettement progresser les connaissances dans le domaine des instabilités des MPS. Un couplage entre les instabilités hydrodynamiques créées par l'écoulement (détachement tourbillonnaire) et l'acoustique de la chambre a ainsi pu être établi.

Ce phénomène d'accrochage aéro-acoustique est dorénavant bien appréhendé. Il s'avère toutefois qu'il ne suffit pas à expliquer les niveaux d'oscillations élevés obtenus lors de tirs réels. D'autres phénomènes sont à considérer pour espérer représenter fidèlement le comportement instable d'un MPS, dont la combustion distribuée des particules d'aluminium initialement contenues dans le propergol. En effet, expériences et simulations numériques montrent clairement une influence de la présence de particules sur l'amplitude des oscillations. Cette influence est bien comprise dans le cas de particules inertes, où le diamètre des particules est un paramètre essentiel, mais la situation est plus complexe lorsque les particules sont réactives.

Les essais étant coûteux et technologiquement ardu, la maîtrise du niveau des oscillations passe obligatoirement par la simulation numérique. De la précision des modèles utilisés dépend donc notre capacité à diminuer l'amplitude des oscillations. Au cours de cette thèse, nous nous sommes intéressés à la modélisation théorique et numérique des écoulements diphasiques dans les MPS. Notre but est de tendre vers un niveau de modélisation précis et fiable. Ainsi, la simulation numérique du P230 permettra de déterminer un diamètre de particules le moins pénalisant en termes d'instabilités.



# Chapitre 2

## La modélisation diphasique eulérienne et ses limites

Les écoulements dans les MPS d'Ariane 5 sont diphasiques : l'aluminium initialement contenu dans le propergol se transforme dans les écoulements gazeux réactifs en particules d'alumine. Or, nous avons vu que ces particules peuvent modifier sensiblement l'écoulement gazeux à l'intérieur de la chambre de combustion, notamment dans le cas d'écoulements tourbillonnaires instationnaires. Elles jouent en effet un rôle essentiel sur la stabilité des écoulements et en particulier sur les potentielles oscillations de pression que l'on rencontre parfois dans les MPS. La simulation numérique étant devenue indispensable à la prédiction du comportement d'un MPS, la modélisation de ces interactions gaz/particules est un point très important.

Deux approches sont possibles : soit les particules sont suivies explicitement dans l'écoulement, on parle alors de méthode lagrangienne, soit la phase solide est assimilée à un milieu continu au travers d'une densité volumique de présence, il s'agit alors d'une méthode eulérienne. Parce que bien adaptée à l'étude des ODP (cf. chapitre 1), en raison des coûts de calcul généralement plus faibles et d'une méthode plus souple, la description eulérienne de la phase dispersée est utilisée dans différents codes d'aérodynamique interne pour simuler le fonctionnement d'un MPS. C'est notamment le cas du code de mécanique des fluides CPS (Code de Propulsion Spatiale) développé à SME avec le soutien du CNES.

Dans ce chapitre, nous présentons dans un premier temps les hypothèses simplificatrices couramment effectuées lors des simulations d'écoulements en propulseur. Précisons que ces approximations sont subordonnées aux caractéristiques de l'écoulement gazeux seul (produits de combustion, régression de la surface du propergol, turbulence etc.) autant qu'à l'aspect diphasique. Ensuite, les hypothèses de base de la modélisation d'une phase dispersée sont abordées, notamment par rapport aux différents régimes d'écoulements possibles. Le mécanisme de combustion des particules d'aluminium fait également l'objet de quelques précisions.

Le paragraphe 2 présente le modèle diphasique implanté dans CPS et met en évidence un défaut de cette modélisation eulérienne, qui se traduit notamment par une accumulation non physique de particules sur l'axe de symétrie. La validité du modèle diphasique de CPS est ensuite analysée. Pour cela, un module de calcul de trajectoires de particules en lagrangien est utilisé (cf. paragraphe 3). Les résultats obtenus avec ce module lagrangien sont comparés avec les résultats d'un calcul diphasique eulérien réalisé avec CPS (cf. paragraphe 4). Cette étude qualitative et comparative soulève le problème de la modélisation moyennée des vitesses particulières dans les zones de croisement de particules. Ce qui constitue le point de départ des travaux théoriques de cette thèse.

### 1. Hypothèses de base de la modélisation diphasique

Notre étude porte sur la modélisation de la phase dispersée. Or ce n'est pas chose aisée, à cause des fortes interactions entre les particules et l'écoulement porteur, et la grande variation des échelles caractéristiques de l'écoulement diphasique. De plus, la simulation du fonctionnement d'un moteur à propergol solide couple divers mécanismes physiques complexes qui, pour des raisons de temps de calcul, sont rarement pris en compte simultanément.

## 1.1 Simulation d'un MPS

La simulation des écoulements dans les moteurs à propergol solide s'appuie sur un certain nombre d'hypothèses simplificatrices.

Tout d'abord, lors du fonctionnement d'un chargement, la combustion du propergol (phénomène extrêmement complexe) se situe en proche paroi, sur une distance très faible devant les dimensions du moteur<sup>1</sup>. Une modélisation simple de ce phénomène consiste donc à déterminer les propriétés des produits de combustion avec un logiciel de thermochimie<sup>2</sup> puis à injecter ces produits en surface. Ils contiennent ainsi les gaz issus de la réaction des différents éléments du propergol, qui sont regroupés dans un gaz unique équivalent, de propriétés thermodynamiques constantes<sup>3</sup>. La combustion des gaz est donc traitée comme une condition à la limite dans les simulations de fonctionnement de MPS.

D'autre part, la régression de surface du propergol s'effectue en un temps bien supérieur à celui nécessaire à l'établissement de l'aérodynamique des gaz brûlés, ce qui lui confère un état quasi-stationnaire. En effet, la vitesse de régression du propergol est de l'ordre de quelques mm/s, par rapport à une vitesse du son dans l'écoulement d'environ 1000m/s et une vitesse axiale des gaz proche de 100m/s dans la seconde moitié du moteur. La géométrie du chargement est donc considérée fixe et correspondant à un instant de tir particulier. La vitesse de combustion du propergol est ainsi supposée identique en chaque point de la surface en combustion, ce qui empêche de prendre en compte le comportement anisotrope du propergol dû, par exemple, aux écarts liés au procédé de fabrication.

Finalement, seuls les gaz brûlés sont pris en considération, par un raisonnement macroscopique global. Ceci dit, l'évolution de la géométrie du bloc de propergol pendant toute la durée de fonctionnement d'un chargement reste une donnée accessible, au moins dans une approche quasi-stationnaire, à condition de coupler un logiciel de mécanique des fluides, un remailleur automatique et un logiciel d'évolution de surface en combustion (Le Breton *et al*, 1998).

La solution analytique de l'écoulement de Taylor (cf. chapitre 1) ne peut pas être utilisée directement pour définir précisément l'écoulement interne d'un propulseur réel. En effet, la géométrie réelle d'un propulseur peut rarement être ramenée à un cylindre : la présence d'une protection thermique qui dépasse dans l'écoulement, d'une tuyère intégrée ou de cavités créées par la combustion des segments de propergol rend l'écoulement beaucoup plus complexe que celui obtenu dans un cylindre. De plus la compressibilité de l'écoulement et son caractère visqueux doivent être pris en compte afin d'aboutir à une connaissance détaillée des caractéristiques de l'écoulement gazeux. Ce savoir est indispensable à la simulation du transport et de la dispersion des particules d'alumine.

Les écoulements gazeux dans les moteurs suivent les lois de la dynamique des gaz, *ie* les équations d'Euler ou de Navier Stokes lorsque les effets visqueux sont non négligeables. Un logiciel de mécanique des fluides permet donc de simuler l'aérodynamique interne du moteur, pour une géométrie du chargement fixée. A SME le code d'aérodynamique interne utilisé à ces fins est CPS, dont une description est donnée au chapitre 6.

Une grande majorité des simulations considère une configuration 2D axisymétrique, à des fins de simplification évidentes. Pour le MPS P230, c'est physiquement admissible pour les instants de tirs considérés après combustion du segment S1 (segment étoilé tridimensionnel présentant une surface de combustion très grande). Néanmoins, certaines études peuvent nécessiter des simulations 3D lorsque des effets tridimensionnels sont recherchés, par exemple lors d'investigation sur la turbulence de l'écoulement (Gallier *et al*, 2004). Les travaux présentés dans ce document sont

---

<sup>1</sup> Quelques dizaines à quelques centaines de microns de la surface par rapport aux 3m de diamètre du P230 d'Ariane 5.

<sup>2</sup> A SME, le code utilisé dans ce but est OPHELIE (Jacquemin, 1982).

<sup>3</sup> Notons que la prise en compte des particules dans la définition du gaz équivalent entraîne une modification de ses spécificités thermodynamiques et débitantes.

applicables à toutes les configurations géométriques (étude théorique cf. chapitres 3 et 4). Par contre, les applications numériques (cf. chapitres 6 et 7) ont été volontairement restreintes à des configurations bidimensionnelles planes ou axisymétriques.

## 1.2 Un peu de turbulence

Jusqu'à présent, nous avons peu évoqué la turbulence de l'écoulement gazeux, ce qui peut sembler un peu surprenant pour qui n'est pas versé dans le domaine de la simulation des MPS... Les écoulements dans les propulseurs seraient-ils laminaires ? Certainement pas. Mais la turbulence des écoulements dans les propulseurs est très particulière, d'une part, et mal connue, d'autre part.

D'abord, l'environnement très défavorable des écoulements en chambre de combustion ne permet pas de disposer de données expérimentales précises et en nombre suffisant pour pouvoir appréhender le comportement turbulent du gaz. En effet, l'environnement à l'intérieur du propulseur est particulièrement agressif : température et pression élevées (respectivement de l'ordre de 3400K et 5MPa), produits très réactifs et particules en combustion. De ce fait, les seules mesures disponibles sont des mesures globales de pression qui, il faut l'avouer, représentent très mal les fluctuations de vitesse d'un écoulement turbulent, d'autant que cette grandeur résulte de l'interaction de plusieurs phénomènes distincts mais couplés.

Malgré cette difficulté, plusieurs éléments sur la turbulence sont connus.

Les essais en gaz froids réalisés pour étudier la transition vers l'instabilité de l'écoulement de Taylor (cf. chapitre 1) ont par exemple permis de mettre en évidence une transition laminaire/turbulent de l'écoulement (Anthoine, 2000) à partir d'une abscisse particulière, variable selon les dimensions du montage. Il faut toutefois être prudent car le matériau poreux qui permet d'injecter le gaz ne représente pas du tout le comportement du propergol vis-à-vis de la turbulence.

Cette transition d'un état laminaire vers un état turbulent de l'écoulement semble logique. Le bon sens nous dit en effet que l'écoulement à l'avant du propulseur doit être plutôt "laminaire". Les profils de vitesse y sont certainement correctement prédits par les équations de Navier-Stokes, et principalement dépendants des conditions limites (combustion du chargement). Au contraire, à l'arrière du moteur, il semble plus plausible que l'écoulement soit turbulent et qu'il interagisse avec la géométrie du chargement (obstacle, PT, tuyère etc.).

Des essais en gaz chaud ont confirmé l'existence de cette abscisse critique de transition vers la turbulence (Griffond, 2001). Elle est basée sur le rapport d'aspect  $\ell/h$  du moteur et est telle que :

$$x_T = \frac{\ell}{h} \approx 15$$

On remarquera que cette valeur de  $x_T$  est inférieure à  $2x^*$  ( $x^* \approx 8$ , cf. chapitre 1). C'est pourquoi les maquettes utilisées pour l'étude de l'instabilité de Taylor<sup>4</sup>, de rapport  $2x^*$ , permettent de visualiser une transition vers la turbulence en fin de propulseur (cf. Figure 2- 1).

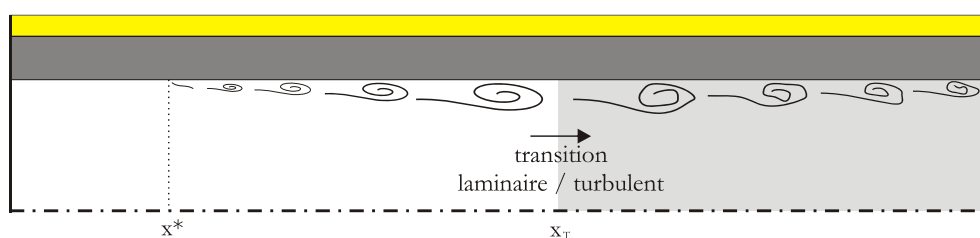


Figure 2- 1 : Transition laminaire/turbulente d'un écoulement de Taylor

<sup>4</sup> Pour assurer un couplage maximal avec l'acoustique de la chambre et donc des ODP importantes, l'abscisse critique  $x^*$  a été positionnée à mi-longueur du propulseur, où se situe un ventre du premier mode acoustique longitudinal.

Rappelons que pour un propulseur réel, la longueur  $\ell$  considérée correspond à la longueur débitante sur une méridienne (longueur sur poudre) et le rayon  $h$  est défini comme la distance minimale de l'axe à la paroi débitante (Griffond, 2001).

Or, durant le fonctionnement d'un moteur à propergol solide, le chargement brûle au fur et à mesure. Le rapport d'aspect est donc variable. En supposant que la longueur sur poudre reste relativement constante<sup>5</sup>, ce rapport est entièrement défini par la hauteur du canal (partie laissée libre par le propergol).

Ainsi, dans le cas du MPS P230, le rapport d'aspect  $\ell/h$  en début de tir est élevé (typiquement supérieur à 30) car le propulseur est long et le canal d'écoulement des gaz encore réduit. L'écoulement dans la chambre a donc tendance à être très turbulent au-delà de l'abscisse de transition.

En fin de tir, le ratio  $\ell/h$  du moteur est faible, et la transition vers la turbulence est alors moins probable. En l'absence d'effets turbulents, l'instabilité naturelle de l'écoulement de Taylor se développe pleinement, conduisant ainsi au phénomène de VSP. Globalement, l'écoulement n'est alors plus dépendant de la turbulence, à cause de la couche limite soufflée latéralement, qui vient empêcher son développement.

Puisque les expériences ne permettent pas de visualiser l'écoulement en propulseur, il semble naturel de se tourner vers la simulation numérique. Or, d'un point de vue numérique, la simulation de la turbulence dans les propulseurs à propergol solide est une tâche difficile. L'expérience montre en effet qu'il s'agit d'une turbulence bien spécifique, fortement influencée par l'injection pariétale du gaz issu de la combustion du propergol. L'écoulement dans un propulseur est différent de celui en canal, essentiellement conditionné par les frottements visqueux aux parois.

Cette spécificité de l'écoulement en propulseur limite fortement l'utilisation de techniques rodées pour les écoulements turbulents en canal standard. Les modèles de turbulence classiques doivent être adaptés au cas particulier d'une forte injection pariétale de débit massique (Chaouat, 1994). Les lois d'amortissement de la turbulence près des parois débitantes, ainsi développées, ont été validées en partie à l'aide de la DNS (Nicoud, 1995 ; Gaillieue, 1998) et des expériences menées sur des maquettes en gaz froid ont permis de tester ces modèles. Néanmoins, il faut garder à l'esprit que ce type de montage ne représente que moyennement l'écoulement dans un propulseur. D'abord le gaz utilisé est non réactif et froid ( $T \sim 300K$ ), ensuite il est injecté radialement à la chambre axi-symétrique à travers un matériau poreux (le poral). Or il se trouve que l'injection produite par ce matériau n'est pas représentative de celle créée par un propergol, ni d'un point de vue turbulence, ni d'un point de vue acoustique<sup>6</sup>.

De plus, ces études expérimentales ont aussi montré que l'injection de turbulence en paroi a un effet très important sur les champs aérodynamiques obtenus (Gaillieue, 1998). Puisqu'il n'existe pas de données expérimentales disponibles spécifiquement pour la turbulence dans les propulseurs réels (LP6, LP9, P230) les simulations numériques restent hasardeuses si on ne les recale pas au moins sur des grandeurs globales. La définition *a priori* des conditions limites d'injection "réelle" de la turbulence ne peut se baser sur aucune mesure expérimentale. Elle suppose des paramétrages et les résultats sont donc relativement peu fiables.

Enfin, la turbulence dans un propulseur peut être significativement affectée par la géométrie du chargement et notamment par la présence de cavités (Gallier *et al*, 2004). La protection thermique de face (située entre les segments S2 et S3) qui émerge dans l'écoulement après une certaine durée de combustion du propergol peut également interagir avec la turbulence en créant une couche limite d'une part, en battant dans l'écoulement et en pulsant cette couche limite d'autre part. L'effet

---

<sup>5</sup> Ce n'est pas tout à fait le cas pour le P230 car la disparition du premier segment, au fond avant, modifie d'environ 15% cette dimension ; la conicité des blocs S2 et S3 joue également.

<sup>6</sup> Le poral, en injectant du gaz par petits jets, crée une turbulence de grille fortement différente de celle créée dans un propulseur par la combustion du propergol. D'un point de vue acoustique, le propergol a tendance à répondre à une onde de pression, en l'amplifiant, alors que le poral amortit tout.

de la turbulence et de son couplage possible avec les ODP reste largement méconnu, bien que l'on suppose qu'elle ait plutôt un rôle atténuateur. Ainsi, Avalon *et al* (1998) montre que l'écoulement dans la maquette VECLA pour une hauteur de veine minimale (et donc une longueur relative  $\ell/h$  maximale) transite vers la turbulence dans la seconde moitié de la veine, ce qui empêche toute possibilité de couplage aéro-acoustique. En effet, pour qu'un tel couplage puisse avoir lieu, on peut penser que les ondes hydrodynamiques doivent garder une certaine cohérence fréquentielle, avec des amplitudes suffisantes, jusqu'au point d'émission de l'onde de retour.

Dans le cadre de cette thèse, nous avons concentré nos efforts sur l'influence de la phase dispersée sur les ODP. Or, ces ODP ont tendance à être très faibles en début de tir lorsque l'écoulement est le plus sujet à la turbulence (ratio  $\ell/h > 15$ ) et maximales à des instants de tir où l'écoulement est principalement piloté par le VSP. Les instants de tir étudiés dans la thèse sont donc tels que l'écoulement gazeux peut être estimé peu turbulent.

En conclusion, il est justifié de ne pas tenir explicitement compte de la turbulence du fluide dans nos travaux. Néanmoins, cette approximation n'est valable qu'en première approche. En effet, un outil prédictif efficient des instabilités d'un moteur devra pouvoir prédire sous quels critères les effets turbulents deviennent suffisamment faibles pour laisser les ODP se développer.

## 1.3 Les différents régimes d'écoulements diphasiques

Abordons à présent l'aspect diphasique de l'écoulement dans un moteur à propergol solide aluminisé.

### 1.3.1 Echelles caractéristiques d'un écoulement diphasique

Un écoulement diphasique présente, par définition, deux phases distinctes mais en interaction constante l'une avec l'autre. Ces échanges entre phases dispersée et continue sont complexes et différents selon le type de régime diphasique considéré. Il est possible de caractériser les écoulements diphasiques en terme d'échelle de temps :

- $\tau_{gp}^F$ , le temps de relaxation dynamique ou temps caractéristique d'entraînement des particules par le fluide, lié aux effets inertiels agissant sur les particules (cf. chapitre 3),
- $\tau_{gp}^t$ , le temps caractéristique de la turbulence du fluide "vue" par la phase dispersée (Simonin, 1996),
- $\tau_p^c$ , le temps caractéristique des collisions ou temps séparant deux collisions successives d'une même particule (Simonin, 1991).

Ou bien en terme d'échelle de longueur :

- le diamètre des particules  $d_p$ ,
- l'espacement entre les particules  $d_p \alpha_p^{-1/3}$ ,
- le libre parcours moyen, *ie* la distance parcourue par une particule entre deux collisions,
- les échelles caractéristiques de la turbulence : échelle énergétique  $k^{3/2} / \varepsilon$ , échelle de Kolmogorov  $\eta = (v_{gaz}^3 / \varepsilon)^{1/4}$ .

Un écoulement diphasique est aussi défini à l'aide des fractions volumique et massique. La fraction volumique des particules, notée  $\alpha_p$ , est le rapport entre le volume occupé par la phase dispersée ( $V_p$ ) et celui occupé par le gaz ( $V_{gaz}$ ) et les particules, soit :

$$\alpha_p = \frac{V_p}{V_p + V_{gaz}} \approx \frac{V_p}{V_{gaz}} \quad (2.1)$$

La fraction massique est alors définie par le rapport suivant :

$$f_m = \frac{\alpha_p \rho_p}{\alpha_{gaz} \rho_{gaz}}$$

Un écoulement est dilué du point de vue des interactions particule-particule si le temps de collision est grand devant le temps de relaxation :

$$\tau_p^c \gg \tau_{gp}^F$$

ou si le libre parcours moyen est grand devant la taille des tourbillons, ou si l'espacement entre les particules est très grand devant le diamètre des particules. Cette dernière condition revient à :

$$\alpha_p \ll 1$$

Dans ce cas, les interactions particules-particules, à la fois directes (collisions) et hydrodynamiques, peuvent être négligées. Pour des concentrations volumiques plus importantes, les collisions entre particules deviennent l'effet majeur et la dynamique de l'écoulement fluide est totalement contrôlée par l'interaction particulaire.

Un écoulement est dilué du point de vue des interactions fluide-particule si la fraction massique est suffisamment petite devant 1. L'effet de rétroaction de la phase dispersée sur la phase continue est alors négligeable (couplage faible ou « one-way coupling », cf. Crowe, 1991). Les trajectoires des particules sont par exemple calculées à partir d'un champ monophasique non perturbé par la présence de ces dernières (cette approche est celle utilisée lors des simulations lagrangiennes présentées au paragraphe 3).

Au contraire, si le taux de chargement est relativement élevé, à cause d'une forte densité particulaire par exemple, l'écoulement porteur est modifié<sup>7</sup> par l'échange de quantité de mouvement avec les particules. La prise en compte des interactions réciproques des deux phases est alors appelée couplage fort ou « two-way coupling ».

Enfin, le transport des particules par la turbulence est gouverné par des interactions complexes : concentration préférentielle, collisions inter particules et particule-paroi, modulation de la turbulence par la présence des particules,... L'inertie des particules joue un rôle important car c'est elle qui dicte les interactions entre la particule et les échelles turbulentes de l'écoulement gazeux (Sommerfeld, 2000). Si le temps de relaxation des particules est beaucoup plus petit que les échelles de la turbulence (ou des instationnarités de l'écoulement), les particules se comportent comme un scalaire transporté. La turbulence du fluide est alors prépondérante. Par contre, lorsque le temps de relaxation est comparable ou plus grand que les temps caractéristiques des grandes échelles (énergétiques) de la turbulence ou des instationnarités de l'écoulement, il existe des effets inertiels importants.

### 1.3.2 L'écoulement diphasique considéré dans nos travaux

Dans un moteur à propergol solide, le taux de chargement de la phase dispersée est significatif : les particules sont lourdes par rapport à la phase porteuse. En effet, la masse volumique de l'aluminium est égale à  $1800 \text{ kg.m}^{-3}$  et celle de l'alumine liquide est d'environ  $2700 \text{ kg.m}^{-3}$ , contrairement à celle du gaz qui est typiquement de  $5 \text{ kg.m}^{-3}$ . En outre, la fraction volumique solide est très petite devant 1. C'est généralement le cas dans les MPS car la quantité de poudre d'aluminium ajoutée au propergol est optimisée pour augmenter l'impulsion spécifique du moteur tout en limitant les pertes diphasiques liées à des concentrations particulières importantes. Par exemple, les résultats de

<sup>7</sup> Conventionnellement, les interactions particule/particule sont négligées dans ce type de régime alors que la turbulence du fluide se trouve significativement modifiée par la présence des particules. Néanmoins, de nouveaux résultats, obtenus par exemple pour des suspensions de particules dans des écoulements en canal vertical, suggèrent que les interactions particules/particules directes peuvent jouer un rôle important (Simonin *et al.*, 2002).

simulation présentés au paragraphe 4.3 montreront des fractions volumiques de l'ordre de  $10^{-4}$  pour un propulseur axisymétrique simple.

Cette hypothèse n'est cependant pas toujours vérifiée dans certaines régions de propulseurs, typiquement dans le fond arrière du P230 où une flaque d'alumine se forme. A cet endroit, les particules sont piégées par la recirculation du gaz et sont captées par la flaque d'alumine liquide. Dans les simulations réalisées au cours de cette thèse, ce phénomène d'accumulation de particules dans les FAR n'est pas abordé<sup>8</sup> et l'écoulement est toujours supposé dilué.

Cette hypothèse d'écoulement dilué permet de négliger les effets des collisions inter particules. Elle n'est cependant pas strictement valable dans le cas du P230 dans la mesure où il peut exister une forte probabilité de collision entre gouttes (Achim & Berlemont, 1998 ; Hylkema, 1999). Néanmoins, la prise en compte des interactions entre particules nécessite une modélisation complexe qui dépasse largement le domaine d'étude de cette thèse. Pour cette raison, nous restreindrons nos travaux à des écoulements diphasiques considérés suffisamment dilués pour négliger les effets des collisions particulaires.

Enfin, on suppose que les particules sont très petites devant les échelles énergétiques de la turbulence ou de l'écoulement instationnaire. Ainsi, il n'y a pas d'interaction directe du sillage des particules avec la turbulence, le couplage fort est donc piloté uniquement par la fraction massique des particules et le temps de relaxation dynamique. D'autre part, cette hypothèse est aussi théoriquement nécessaire pour pouvoir écrire la loi de traînée classique. Il n'y a pas d'effet des tourbillons de tailles comparables à celle des particules.

Dans les régimes où le MPS exhibe des bouffées d'instabilité, les caractéristiques spatiales de la distribution de particules sont donc un facteur très important. Or, la répartition de particules dans un écoulement dilué est directement dépendante des effets inertiels qu'exerce le fluide porteur sur chaque particule. L'**inertie** des particules est donc l'un des paramètres les plus importants dans les écoulements gaz-solide des MPS. Elle influence fortement les caractéristiques de la phase dispersée, comme par exemple le phénomène de concentration préférentielle. L'aspect particulièrement étudié dans ces travaux est donc la structure spatiale du champ de vitesse particulaire (point récemment abordé dans la modélisation des écoulements turbulents chargés en particules).

Dans notre cas, l'écoulement sera donc considéré tel que :

- la turbulence de la phase gazeuse est négligeable, une simulation LES sans prise en compte explicite des termes de sous maille est jugée suffisante (la dissipation numérique joue le rôle de filtre),
- le couplage entre les phases est fort, les particules modifient les caractéristiques de l'écoulement gazeux,
- la modulation de la turbulence du fluide par la phase dispersée n'est cependant pas prise en compte.

Les interactions entre les particules et l'écoulement fluide sont supposées gouvernées par l'inertie des particules qui est le phénomène majeur considéré lors de ces travaux.

## 1.4 Hypothèses de modélisation de la phase dispersée

### 1.4.1 Sur la combustion des particules

Selon la nature des propergols, on peut être amené à prendre en compte soit des gaz brûlés uniquement, soit des gaz brûlés et des particules. Différentes approches sont alors possibles pour simuler cette phase dispersée.

---

<sup>8</sup> Il faut savoir qu'une simulation plus précise serait envisageable, à condition d'ajouter au modèle diphasique dilué une modélisation physique du phénomène de captation des particules par la flaque d'alumine (modèle de film liquide). L'estimation du dépôt d'alumine serait ainsi possible.

Nous avons vu que le phénomène de combustion du propergol était un phénomène surfacique. Ce n'est pas toujours le cas de la combustion de l'aluminium. Selon le propergol (et donc la nature des gaz issus de sa combustion) et selon le diamètre des particules d'aluminium incorporées à ce propergol, le traitement de la phase dispersée sera différent.

Si les particules d'aluminium brûlent sur une très faible épaisseur et si les résidus de combustion sont petits, on peut supposer que les particules auront un effet négligeable sur l'écoulement gazeux. Les simulations sont alors effectuées avec une approche monophasique : seule la phase gazeuse est simulée mais les propriétés thermodynamiques ( $\gamma_{gaz}$ ,  $C_{p,gaz}$ , etc.) du gaz équivalent sont calculées en tenant compte des particules.

Pour des applications particulières où l'influence de la phase dispersée doit être spécifiquement prise en considération, la simulation est diphasique : la phase gazeuse<sup>9</sup> est traitée par résolution des équations d'Euler ou de Navier-Stokes et le transport des particules est calculé en fonction de l'écoulement gazeux. Or, dans un propulseur, les particules transportées par l'écoulement gazeux sont des particules d'aluminium liquide en combustion (évaporation et production d'énergie) ou des résidus de combustion qui se présentent sous forme d'alumine liquide<sup>10</sup>. Selon les applications, on peut considérer deux possibilités.

Soit l'évolution chimique des particules au cours de leur séjour dans la chambre de combustion est non négligeable, alors la modélisation de ces particules en combustion impose de prendre en compte la variation de leur diamètre due à l'évaporation<sup>11</sup>, la réaction chimique de transformation de l'aluminium en alumine et les échanges de masse, quantité de mouvement et énergie qui en résultent (Mombelli & Cesco, 1999).

Soit la zone de combustion des particules est très proche de la paroi injectante et les particules sont assimilées dès l'injection à des résidus de combustion considérés inertes. En effet, les particules d'aluminium, si elles sont suffisamment petites, vont brûler quasi instantanément une fois éjectées dans l'écoulement. Seuls les résidus d'alumine vont alors modifier (éventuellement) l'écoulement gazeux. Leur combustion étant achevée, on peut les considérer comme des particules inertes : elles sont simplement transportées par le gaz, en étant figées dans leur état initial<sup>12</sup>. Les échanges de masse avec la phase gazeuse sont donc nuls et le diamètre des particules reste constant. Cette modélisation, plus simple que celle de particules évaporantes, permet de simuler des écoulements diphasiques où les particules d'aluminium sont quasiment instantanément transformées en alumine. Concrètement, les simulations sont effectuées en injectant des particules dont le diamètre est directement celui des résidus de combustion obtenus pour la granulométrie physique étudiée. Ces particules ont donc les caractéristiques de l'alumine (densité, température, chaleur spécifique).

Cette modélisation diphasique inerte est également employée lors d'investigation sur le rôle des particules dans certains mécanismes. Dans ce cas, les particules d'aluminium sont supposées inertes : elles ne vont pas réagir avec le milieu gazeux ambiant, ni s'évaporer. Ce type de simulations ne représente évidemment pas correctement la physique de l'écoulement mais permet, en découplant artificiellement les phénomènes, d'accéder à une meilleure compréhension des mécanismes liés aux écoulements diphasiques dans les propulseurs. Par exemple, nous pouvons ainsi estimer l'influence des particules sur l'écoulement gazeux en fonction de leur diamètre. Bien qu'imparfaite au niveau de la physique, cette méthode a permis d'aboutir à une description plausible du mécanisme d'amplification des ODP par une phase dispersée inerte (cf. Chapitre 8).

---

<sup>9</sup> Dans ce cas, le gaz équivalent est calculé sans tenir compte des particules d'aluminium initialement présentes dans le propergol.

<sup>10</sup> On néglige le phénomène de solidification de l'alumine au niveau de la tuyère où il existe une détente des gaz et donc une diminution de la température.

<sup>11</sup> Par exemple avec une loi de base standard dite en  $d^2$ , où le diamètre au carré de la particule décroît linéairement au cours du temps.

<sup>12</sup> Cet état initial fait référence à l'état des particules à l'initialisation du calcul et non pas à leur état initial dans le propergol.



Convaincus de l'importance des effets liés à des particules inertes et voulant simplifier des phénomènes physiques trop complexes lorsque pris dans leur globalité, nous avons momentanément écarté l'aspect combustion des particules. Les modèles diphasiques présentés dans ce document sont donc appliqués à une phase dispersée **inerte**. Néanmoins, la prise en compte d'une phase dispersée réactive dans une plus grande partie de la chambre reste un objectif primordial. Les modèles développés durant cette thèse doivent donc pouvoir être étendus à moindre frais à des écoulements diphasiques réactifs et c'est dans cette optique que nous avons pensé nos modèles.

### 1.4.2 Sur les particules dans l'écoulement

L'évolution des particules, même inertes, dans un environnement gazeux inclut de nombreux phénomènes physiques. Les modèles diphasiques utilisés pour simuler des applications industrielles sont donc établis sur la base de plusieurs hypothèses concernant les caractéristiques de la phase dispersée.

Les particules sont considérées comme des **sphères rigides**. Cela permet d'écrire les termes de traînée de la particule en se basant sur des corrélations expérimentales obtenues pour une sphère isolée dans un écoulement. La phase constituée des particules d'alumine ou d'aluminium sera donc abusivement appelée phase solide ou condensée (ou phase dispersée) par opposition à la phase gazeuse (ou phase continue).

Le mouvement erratique (de rotation par exemple) des particules est négligeable, comme cela est souvent fait. Les modèles diphasiques utilisés au cours de cette thèse ne comportent qu'une seule classe de particules (diamètre unique) par souci de simplicité. La température de la particule est également supposée homogène : il n'existe aucun gradient de température entre la surface et le centre.

Dans la tuyère la vitesse relative entre le gaz et les plus grosses gouttes peut atteindre des valeurs très importantes (de l'ordre de 100 à 1000m/s) et conduit nécessairement à leur éclatement en un très grand nombre de gouttelettes de taille inférieure (Hylkema & Villedieu, 1998). Néanmoins, les phénomènes de fragmentation (Achim, 1999 ; Dufour, 2002) et de coalescence dans la chambre (Hylkema, 1999 ; Laurent *et al*, 2004) ne sont pas considérés. Une modélisation détaillée des écoulements diphasiques dans un MPS devra toutefois tenir compte à la fois d'une granulométrie dispersée et d'une description plus précise de la dispersion des particules (cf. modèles diphasiques à pression particulaire présentés dans ce document).

### 1.4.3 Sur la nature de l'écoulement diphasique

Nous avons vu que la modélisation des particules dans un écoulement diphasique peut être effectuée selon une méthode lagrangienne ou eulérienne. La première est physiquement bien fondée, mais pénalisante en temps calcul et espace mémoire lorsque l'on veut avoir une description fine de tout le champ. Inversement, l'approche dite eulérienne résout des équations moyennées pour la phase condensée et donne des temps de calcul plus acceptables. Néanmoins, les opérations de "moyenne" réalisées pour aboutir aux équations eulériennes font perdre un certain nombre de caractéristiques associées à la phase solide dispersée : les particules sont par exemple animées d'une "vitesse moyenne" et les caractéristiques des champs de vitesse de chaque catégorie de particules sont perdues. Dans nos travaux, l'approche eulérienne a été retenue : la phase dispersée est traitée comme un milieu continu.

### 1.4.4 Sur les échanges entre phases gazeuse et solide

Les écoulements diphasiques sont constitués de deux milieux qui interagissent entre eux. Ce couplage est réalisé à travers des termes d'échanges interfaciaux, caractéristiques des écoulements diphasiques, qui traduisent l'influence d'une phase sur l'autre.

Les particules des écoulements considérés dans nos travaux sont supposées inertes, il n'existe donc aucun échange de masse ou d'énergie par évaporation ou réaction chimique. Néanmoins, des échanges se produisent dès lors qu'un déséquilibre entre ces phases existe.

Ce déséquilibre peut être thermique : une différence de température entre la particule et son environnement gazeux entraînera un échange d'énergie d'une phase vers l'autre, caractérisé par un temps de relaxation thermique du mélange.

Il peut également être cinétique. Le gaz exerce alors sur les particules des efforts qu'il faut caractériser. Pour cela, nous nous appuyons sur des études réalisées dans le cas d'une particule isolée dans un champ fluide et nous négligeons les interactions hydrodynamiques entre les particules. Cela reste raisonnable au vu des concentrations particulaires mises en jeu dans nos simulations. Avec les hypothèses du paragraphe 1.4.2, seule la force subie par une particule sphérique dans un écoulement laminaire est prise en compte pour simuler le couplage entre les phases. Elle peut s'exprimer (Gatignol, 1983 ; Maxey & Riley, 1983) comme la somme de diverses contributions : la gravité, la traînée (liée à la viscosité du fluide), le terme de masse ajoutée (induite par la différence d'accélération entre le fluide et la particule), le terme de pression (lié à l'accélération du gaz), la force de lift (Magnus et Saffman) et le terme de Basset (qui traduit l'histoire des effets du milieu visqueux sur la particule). Dans les écoulements gaz/solide rencontrés dans les MPS, le rapport des masses volumiques particule/gaz est grand. Dans ce cas, la force volumique induite par l'écoulement fluide environnant se réduit à la contribution de la force de traînée visqueuse (Maxey, 1987). L'échange cinétique entre les deux phases est donc caractérisé par un temps de relaxation dynamique des particules.

## 2. Le modèle diphasique eulérien dilué de CPS

Dans ce paragraphe, nous présentons brièvement le système d'équations du modèle diphasique eulérien implanté dans CPS. Ces équations sont écrites pour un fluide visqueux et la phase dispersée est supposée diluée et inerte. Pour une application réactive, le lecteur pourra se référer à Ballereau *et al* (2003) ou Mombelli & Cesco (1999).

### 2.1 La phase gazeuse

Les équations de Navier-Stokes, pour un fluide compressible et instationnaire, peuvent s'écrire de la façon suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{W}_{gaz} + \nabla \cdot (\mathbf{F}_{gaz} - \mathbf{R}_{gaz}) = -\mathbf{S}_{2\phi} + \mathbf{K}_{gaz} \quad (2.2)$$

où  $\mathbf{W}_{gaz}$  représente le vecteur des variables conservatives,  $\mathbf{F}_{gaz}$  les flux eulériens associés à ces variables et  $\mathbf{R}_{gaz}$  les flux de diffusion. Ils s'expriment ainsi :

$$\mathbf{W}_{gaz} = y^n \begin{pmatrix} \rho_{gaz} \\ \rho_{gaz} \mathbf{u}_{gaz} \\ \rho_{gaz} E_{gaz} \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

$$\mathbf{F}_{gaz} = y^n \begin{pmatrix} \rho_{gaz} \mathbf{u}_{gaz} \\ \rho_{gaz} \mathbf{u}_{gaz} \otimes \mathbf{u}_{gaz} + \overline{\overline{P_{gaz}}} \\ \mathbf{u}_{gaz} (\rho_{gaz} E_{gaz} + P_{gaz}) \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

$$\mathbf{R}_{gaz} = y^n \begin{pmatrix} 0 \\ \overline{\sigma} \\ \mathbf{u}_{gaz} \cdot \overline{\sigma} + \lambda_{gaz} \nabla T_{gaz} \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

$y$  est la composante radiale du système de coordonnées  $(x, y, z)$  pour une configuration tridimensionnelle ou  $(x, y, \theta)$  en 2D axisymétrique.  $n$  est un paramètre qui vaut 0 en configuration plane ou tridimensionnelle, et 1 en 2D axisymétrique.

Les variables conservatives sont la masse volumique  $\rho_{gaz}$ , le vecteur quantité de mouvement  $\rho_{gaz} \mathbf{u}_{gaz}$  et l'énergie totale  $\rho_{gaz} E_{gaz}$ . Celle-ci s'exprime comme la somme de l'énergie interne et de l'énergie cinétique :

$$E_{gaz} = C_{p,gaz} T_{gaz} + \frac{1}{2} u_{gaz,i} u_{gaz,i} \quad (2.6)$$

La loi d'état du gaz est celle des gaz parfaits :

$$P_{gaz} = \rho_{gaz} r T_{gaz} \quad (2.7)$$

Le tenseur des contraintes visqueuses est donné par :

$$\overline{\sigma} = -\frac{2}{3} \mu_{gaz} \operatorname{div}(\mathbf{u}_{gaz}) \overline{\mathbf{I}} + \mu_{gaz} \left( \overline{\operatorname{grad}}(\mathbf{u}_{gaz}) + \overline{\operatorname{grad}}^t(\mathbf{u}_{gaz}) \right) \quad (2.8)$$

Soit, en 2D axisymétrique :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \mu_{gaz} \left( 2 \frac{\partial u_{gaz}}{\partial x} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \vec{V} \right), & \sigma_{xy} &= \mu_{gaz} \left( \frac{\partial u_{gaz}}{\partial y} + \frac{\partial v_{gaz}}{\partial x} \right), & \sigma_{yy} &= \mu_{gaz} \left( 2 \frac{\partial v_{gaz}}{\partial y} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \vec{V} \right) \\ \sigma_{\theta} &= \mu_{gaz} \left( 2 \frac{v_{gaz}}{y} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \vec{V} \right), & \operatorname{div} \vec{V} &= \frac{v_{gaz}}{y} + \left( \frac{\partial u_{gaz}}{\partial x} + \frac{\partial v_{gaz}}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (2.9)$$

La conductivité thermique du gaz est définie par  $\lambda_{gaz} = \mu_{gaz} C_{p,gaz} / \operatorname{Pr}$ .

Le terme source  $\mathbf{S}_{2\phi}$  traduit les échanges entre les deux phases, il sera décrit au paragraphe 2.3. Le terme  $\mathbf{K}_{gaz}$  contient les termes sources spécifiques aux problèmes axisymétriques (Carpentier, 1999). Il est défini par :

$$\mathbf{K}_{gaz} = n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ P_{gaz} - \sigma_{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

Ce modèle peut être complété par des équations idoines pour traiter la présence de plusieurs espèces chimiques (Godfroy, 1998). La turbulence de la phase gazeuse peut également être prise en compte, à l'aide de différents modèles (Gallier *et al*, 2004). Une modélisation "classique" à deux équations de transport  $q - \omega$  (Coakley, 1983) est disponible, ainsi qu'une modélisation semi-déterministe basée sur les travaux de Ha Minh et Kourta (Kourta, 1995 et 1999). Enfin, plus récemment, un modèle de simulation des grandes échelles a été introduit dans le code CPS (Plourde *et al*, 2001).

## 2.2 La phase dispersée

Le modèle diphasique eulérien actuellement implanté dans le code CPS est un modèle relativement rustique : une seule classe de particules (diamètre unique), force de gravité non prise en compte, pas plus que les phénomènes de collision particule/paroi ou particule/particule, de coalescence ou de fragmentation. De plus, les particules sont supposées incompressibles.

On reprend les notations utilisées pour les équations de la phase gazeuse, ce qui permet d'écrire celles pour la phase dispersée de la façon suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{W}_p + \nabla \cdot (\mathbf{F}_p) = \mathbf{S}_{2\phi} \quad (2.11)$$

Il n'existe pas de flux diffusifs, ni de second membre spécifique à la configuration axisymétrique. Le vecteur des variables conservatives s'écrit :

$$\mathbf{W}_p = y^n \begin{pmatrix} \alpha_p \rho_p \\ \alpha_p \rho_p \mathbf{u}_p \\ \alpha_p \rho_p E_p \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

L'énergie totale pour la phase dispersée est définie par :

$$E_p = C_{p,p} T_p + \frac{1}{2} u_{p,i} u_{p,i} \quad (2.13)$$

Les flux associés à ces variables conservatives sont tels que :

$$\mathbf{F}_p = y^n \begin{pmatrix} \alpha_p \rho_p \mathbf{u}_p \\ \alpha_p \rho_p \mathbf{u}_p \otimes \mathbf{u}_p \\ \alpha_p \rho_p \mathbf{u}_p E_p \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

Précisons à toutes fins utiles que ces flux convectifs ne présentent aucun terme de pression.

## 2.3 Les termes de couplage

Le couplage gaz/particules, décrit par une approche eulérienne, est réalisé par des échanges de masse, de quantité de mouvement et d'énergie entre phases. Cependant, comme nous supposons que les particules sont inertes, aucun terme dû à des réactions chimiques n'est considéré. Le terme source s'écrit donc :

$$\mathbf{S}_{2\phi} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{S}_{qdm} \\ S_e \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

Les termes sources de quantité de mouvement sont liés à la force de traînée, ils s'expriment de la façon suivante :

$$\mathbf{S}_{qdm} = -\frac{\alpha_p \rho_p}{\tau_u} (\mathbf{u}_p - \mathbf{u}_{gaz}) \quad (2.16)$$

$\tau_u$  représente le temps de relaxation cinétique des particules, sa définition sera donnée au chapitre 3.

Le terme source d'énergie traduit les échanges d'énergie par le travail de la force de traînée et par échange de chaleur. Il s'écrit :

$$S_e = \mathbf{S}_{qdm} \cdot \mathbf{u}_p + Q \quad (2.17)$$

où  $Q$  représente les échanges thermiques entre les phases et sera défini au chapitre 3.

Le modèle diphasique eulérien que nous venons de présenter a été utilisé pour réaliser de nombreux calculs (Dupays *et al*, 2000 ; Gallier & Guéry, 2001 ; Guéry *et al*, 2001 ; Lupoglazoff *et al*, 2002 ; Ballereau *et al*, 2003), néanmoins il est possible d'obtenir pour certaines configurations de calcul des résultats aberrants.

## 2.4 Défaut de ce type de modèle

Précisons tout d'abord que le modèle diphasique dilué eulérien implanté dans CPS est un modèle classique, dérivé du modèle de Marble (1963). D'autres codes industriels ou de recherche sont dotés de modèles équivalents : le code SIERRA de l'ONERA (Lupoglazoff & Vuillot, 1992 ; Dupays *et al*, 1996) ou encore le code PEGASE de l'IUSTI. Le défaut que nous allons à présent mettre en évidence avec le code CPS est tributaire du modèle utilisé et pas des schémas numériques annexes ou des méthodes de post-traitement. Il peut donc être constaté en utilisant tout autre code apparenté.

Lorsque l'on effectue des simulations d'écoulements diphasiques dilués en propulseur avec CPS, il est facile de constater des accumulations non physiques de particules au centre du canal, comme le présente la Figure 2- 2. Ce propulseur, décrit au paragraphe 4.2, est axisymétrique. L'écoulement diphasique est injecté par la paroi débitante, sur toute la surface de la chambre de combustion.

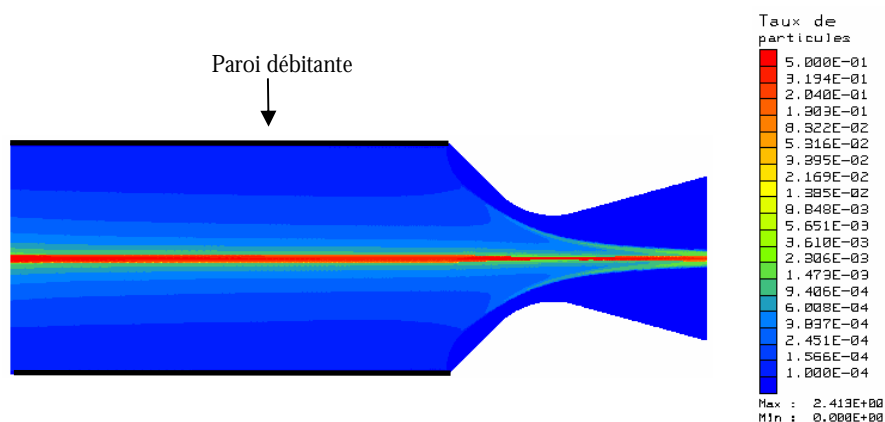


Figure 2- 2 : Cas test TEP – accumulation de particules au centre du moteur

L'accumulation de particules observée au centre du moteur n'est pas réaliste. Elle est localisée dans une région très précise, or à cet endroit aucun scénario ne peut expliquer une telle agrégation de particules. Il s'agit donc d'un défaut dû à la modélisation eulérienne employée. Pour nous en assurer, et pour analyser le domaine de validité du modèle eulérien de CPS, nous avons comparé les résultats obtenus avec ce modèle eulérien et ceux obtenus avec une simulation lagrangienne.

## 3. Simulations lagrangiennes

Le code de mécanique des fluides CPS ne permet pas d'effectuer des simulations avec un formalisme lagrangien, seul un modèle eulérien est disponible. Nous avons donc développé un module indépendant qui calcule la trajectoire des particules sur un champ gazeux fixé. A partir de ces

trajectoires, des opérations de moyenne sont effectuées pour permettre la comparaison avec les résultats du calcul diphasique eulérien. Cette méthode impose de réaliser les simulations sur des champs gazeux stationnaires. Les variables comparées peuvent être la fraction volumique de la phase solide ou sa vitesse moyenne.

### 3.1 Calcul des trajectoires de particules

L'objectif de cette partie de nos travaux n'est évidemment pas de développer un module de calcul diphasique lagrangien intégré dans CPS. Nous cherchons simplement à obtenir une vision plus précise du comportement des particules dans un propulseur, notamment dans les configurations que l'on sait mal traitées par le modèle eulérien de CPS.

Le défaut majeur de ce dernier est de nature cinématique, les aspects thermiques peuvent être négligés. Nous avons donc considéré des particules à température constante et uniforme dans la chambre. Seules leurs trajectoires sont calculées en fonction du champ de vitesse du gaz environnant. Nous avons considéré des particules inertes, sphériques, à diamètre constant et uniquement soumises à la force de traînée visqueuse dans un champ gazeux stationnaire. Aucun effet retour des particules sur ce champ gazeux n'est pris en compte (couplage faible). Les particules sont injectées dans la chambre de combustion au niveau de la paroi débitante avec une vitesse radiale fixée.

#### 3.1.1 Intégration des équations pour une particule

Le module de calcul lagrangien a pour vocation de calculer, pour chaque particule injectée dans la chambre, sa trajectoire à travers chaque élément successif du maillage jusqu'à sa sortie du moteur (cf. Figure 2- 3). Chaque particule numérique est un point représentant le centre de gravité de la particule physique et auquel on attribue un poids représentatif d'une population de particules physiques. Elle est repérée par sa position et sa vitesse à chaque instant de calcul. Son emplacement permet d'identifier la cellule dans laquelle elle se trouve et de la faire évoluer en fonction de la vitesse gazeuse qui y règne.

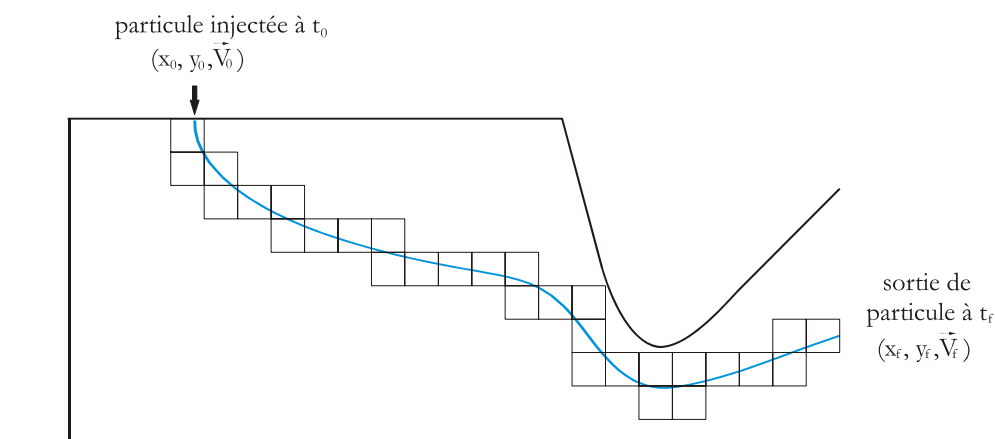


Figure 2- 3 : Calcul de trajectoires de particules

La trajectoire d'une particule numérique quelconque est calculée, à l'intérieur de chaque cellule traversée, par une méthode d'intégration incrémentale. A partir des position et vitesse initiales de la particule, la face de sortie est déterminée *a priori*, ce qui permet d'estimer un ordre de grandeur du temps de traversée de la cellule  $DT$ . Ce temps de traversée est ensuite divisé en pas de temps  $\delta t = DT / N_{incr}$  suffisamment petits pour tenir compte de la variation de la vitesse du gaz dans la cellule et réactualiser ainsi la force de traînée. Puis la vitesse et la position de la particule sont intégrées.

L'équation d'évolution de la vitesse d'une particule est :

$$\frac{d}{dt} \mathbf{u}_p(x, y, t) = -\frac{1}{\tau_u} (\mathbf{u}_p(x, y, t) - \mathbf{U}_{gaz}(x, y)) \quad (2.18)$$

avec  $\mathbf{u}_p(x, y, t)$  le vecteur vitesse de la particule,  $\mathbf{U}_{gaz}(x, y)$  le vecteur vitesse de l'écoulement gazeux et  $\tau_u$  le temps de relaxation dynamique (cf. chapitre 3).

Sur un pas de temps  $\delta t$ ,  $\tau_u$  est considéré constant. La vitesse de la particule  $\mathbf{V}_p(t)$  s'intègre donc à chaque pas de temps en :

$$\mathbf{V}_p(t + \delta t) = \mathbf{V}_p(t) + (\mathbf{V}_p(t) - \mathbf{U}_{gaz}(x_p(t), y_p(t))) (e^{-\delta t / \tau_u} - 1) \quad (2.19)$$

Et la position de la particule  $\mathbf{X}_p(t)$  est définie par :

$$\mathbf{X}_p(t + \delta t) = \mathbf{X}_p(t) + \mathbf{U}_{gaz}(x_p(t), y_p(t)) \times dt + (\mathbf{V}_p(t) - \mathbf{U}_{gaz}(x_p(t), y_p(t))) \left( \frac{1 - e^{-\delta t / \tau_u}}{1 / \tau_u} \right) \quad (2.20)$$

Le calcul est réitéré jusqu'à ce que la particule soit sortie de la cellule, puis on revient au pas de temps précédent la sortie et on calcule par prolongement le point d'intersection entre la trajectoire et la face de sortie (éventuellement différente de celle déterminée initialement si la trajectoire est très courbée dans la cellule d'intégration).

Cette intégration est précise à condition que les variations de la force de traînée soient faibles sur un pas de temps  $\delta t$ . Nous avons effectué une validation de cette méthode d'intégration incrémentale en réalisant une comparaison avec la solution analytique sur un maillage cartésien pour une vitesse linéaire de l'écoulement gazeux définie par :  $\vec{U}_{gaz}(x, y) = Ax + By + \vec{U}_{gaz,0}$ . Nous avons choisi un champ linéaire car il est représentatif de la description du champ gazeux utilisée (la valeur moyenne et les gradients sont connus). La trajectoire d'une particule injectée à la paroi débitante est tracée Figure 2- 4 pour différentes valeurs du pas de temps  $\delta t$ . Les solutions numérique et analytique concordent pour une découpe par 100 du temps de traversée de la cellule.

Le module de calcul ainsi développé permet d'obtenir la position de chaque particule injectée, de sa position initiale à sa sortie de la chambre, ainsi que les vitesses correspondantes. Ajoutons enfin qu'une répartition spatiale d'injection de plusieurs particules numériques par face débitante est disponible, améliorant ainsi la description des particules dans la chambre de combustion.

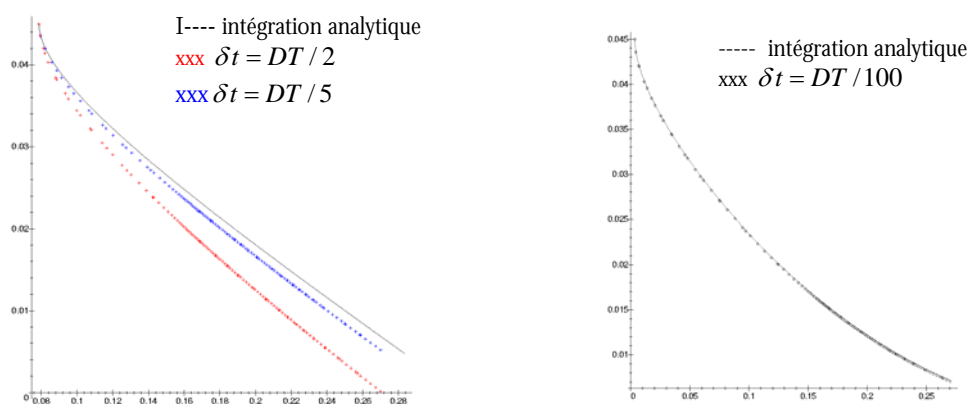


Figure 2- 4 : Comparaison des pas de temps d'intégration

### 3.1.2 Calcul d'un gradient de vitesse de l'écoulement gazeux

Le champ gazeux stationnaire utilisé dans l'intégration des position et vitesse de chaque particule est donné par le vecteur vitesse de l'écoulement au centre de chaque élément du maillage. Pour augmenter la précision de notre mode de calcul, nous avons déterminé le gradient de vitesse de l'écoulement gazeux afin d'avoir une description linéaire de ce dernier :

$$\mathbf{U}_{gaz}(x, y) = \mathbf{U}_{gaz}(x_0, y_0) + \frac{\partial \mathbf{U}_{gaz}}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial \mathbf{U}_{gaz}}{\partial y}(y - y_0) \quad (2.21)$$

La méthode de calcul de ce gradient est celle déjà implantée dans le code CPS, basée sur la formule de Green (Godfroy, 1998). Cette méthode n'est pas extrêmement précise mais elle est jugée suffisante pour notre analyse.

De façon générale, le calcul du gradient moyen de la vitesse gazeuse  $\bar{\nabla} U_{\Omega}$  est réalisé comme suit :

$$\bar{\nabla} \mathbf{U}_{gaz, \Omega} = \frac{1}{Vol(\Omega)} \int_{\Omega} \bar{\nabla} \mathbf{U}_{gaz} d\Omega = \frac{1}{Vol(\Omega)} \int_{\partial\Omega} \mathbf{U}_{gaz} \cdot \bar{\mathbf{n}} d\gamma \quad (2.22)$$

où  $\Omega$  est un élément du maillage de volume  $Vol(\Omega)$ . Sous forme discrétisée, cette équation s'écrit :

$$\bar{\nabla} \mathbf{U}_{gaz, \Omega} \approx \frac{1}{Vol(\Omega)} \sum_{f \in faces(\Omega)} \mathbf{U}_{gaz, f} \cdot Aire(f) \cdot \bar{\mathbf{n}} \quad (2.23)$$

où  $U_{gaz, f}$  est la valeur moyenne sur la face de l'élément  $\Omega$ . L'approximation provient du fait que cette valeur moyenne est calculée par pondération des valeurs que prend la fonction  $U_{gaz}$  sur les deux éléments adjacents à la face.

Ce calcul du gradient est modifié dans le cas des cellules limites afin de garantir une vitesse normale nulle sur l'axe de symétrie ou sur les parois (condition de glissement). Pour cela, le gradient est calculé de façon linéaire dans la moitié de la cellule.

### 3.1.3 Traitement de l'axe de symétrie

Dans le cas d'une configuration axisymétrique, à chaque particule injectée (A) correspond une particule identique (même diamètre et même vitesse) injectée depuis la face opposée. Ainsi, une particule qui atteint l'axe de symétrie rencontre sa « jumelle » qui provient de la face opposée. Or l'écoulement diphasique est supposé dilué : les particules n'occupent qu'un très faible volume par rapport au gaz et elles ont donc une probabilité très faible d'entrer en collision. Lorsqu'elles atteignent le centre du moteur, les particules traversent l'axe de symétrie. On assiste alors à un croisement des trajectoires, qui se traduit par un rebond sur la représentation 2D axisymétrique choisie. Tout se passe comme si la particule (A) repartait en sens inverse avec une vitesse radiale opposée. En pratique, ce rebond a lieu lorsque le centre de gravité de la particule est à une distance de l'axe égale à la moitié du diamètre de la particule physique.

## 3.2 Opération de moyenne

La détermination des trajectoires de particules permet d'analyser le comportement des particules dans le moteur et nous fait comprendre pourquoi les particules s'accumulent dans les simulations faites avec le modèle diphasique de CPS. Cependant, les trajectoires ne peuvent être comparées puisque cette notion de trajectoire est inaccessible avec un calcul eulérien. Par contre, le modèle eulérien fournit la fraction volumique et la vitesse moyenne de la phase solide pour chaque cellule du maillage. Nous pouvons déterminer ces mêmes valeurs moyennes à partir des données du calcul



lagrangien et ainsi faire une comparaison précise des résultats obtenus par les deux méthodes de calcul.

### 3.2.1 Définition du débit massique par trajectoire

La première étape consiste à associer à chaque trajectoire ( $j$ ) un débit massique  $\dot{q}_j$  afin de tenir compte du poids de présence des particules. Dans les simulations eulériennes, l'injection de la phase dispersée est quantifiée par un débit massique surfacique  $\dot{m}_{inj\ 2\phi}$  qui peut être calculé à partir du débit surfacique du gaz  $\dot{m}_{inj\ gaz}$  et de la fraction massique de particules  $f_m$  contenues dans le propergol :

$$\dot{m}_{inj\ 2\phi} = \frac{f_m}{1-f_m} \dot{m}_{inj\ gaz} \quad (2.24)$$

Dans nos simulations, ce débit massique de particules injectées dans la chambre de combustion est supposé constant. Considérons une particule  $j$  émise d'une cellule de la paroi débitante repérée  $\Omega$ . Le débit  $\dot{q}_j$  associé à cette trajectoire correspond au débit massique surfacique de particules  $\dot{m}_{inj\ 2\phi}$  multiplié par la surface débitante du propergol  $S(\Omega)$  de la cellule  $\Omega$  et divisé par le nombre de trajectoires numériques  $N$  issues de cette cellule. L'expression de ce débit est donc :

$$\dot{q}_j = \dot{m}_{inj\ 2\phi} \times S(\Omega) / N \quad (2.25)$$

### 3.2.2 Fraction volumique moyenne

La fraction volumique de la phase dispersée dans un élément du maillage  $\Omega$  de volume  $Vol(\Omega)$  est le rapport du volume occupé par les particules dans l'élément  $\Omega$  par le volume de la cellule. Si nous notons  $m_p$  la masse des particules dans la cellule  $\Omega$ , nous avons :

$$\alpha_{lag}(\Omega) = \frac{m_p / \rho_p}{Vol(\Omega)} \quad (2.26)$$

La masse de particules situées dans l'élément  $\Omega$  est la somme des masses apportées par chaque trajectoire  $j$  traversant cet élément. La masse apportée par une trajectoire  $j$  est le produit du débit massique  $\dot{q}_j$  associé à cette trajectoire par le temps de traversée de la cellule, noté  $\Delta T_{j\Omega}$  (cf. Figure 2- 5).

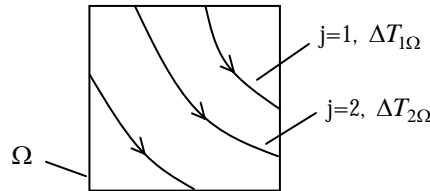


Figure 2- 5 : Temps de traversée d'une cellule pour une trajectoire

Soit :

$$\alpha_{lag}(\Omega) = \frac{\left( \sum_j \dot{q}_j \Delta T_{j\Omega} \right) / \rho_p}{Vol(\Omega)} \quad (2.27)$$

Cette variable peut être comparée à la valeur donnée directement par un calcul Euler. Nous pouvons aussi faire un bilan de masse. Dans un calcul Euler, nous utilisons la fraction volumique par élément  $\alpha_{euler}(\Omega)$ , soit :

$$M_{euler} = \sum_{\Omega} \alpha_{euler}(\Omega) \times \rho_p \times Vol(\Omega) \quad (2.28)$$

A partir des résultats du module lagrangien, nous exploitons le fait que chaque trajectoire stationnaire de particules représente une masse égale au produit du débit massique correspondant et du temps de séjour dans la chambre  $\Delta T_j$ . Ainsi la masse totale de particules est :

$$M_{lag} = \sum_{j \in N_{traj}} \dot{q}_j \Delta T_j \quad (2.29)$$

où  $N_{traj}$  représente le nombre total de trajectoires simulées.

### 3.2.3 Vitesse moyenne

Sur un pas de temps  $\delta t_{ij}$  on suppose que la vitesse moyenne d'une particule est définie par la moyenne arithmétique des vitesses instantanées de début et de fin de pas de temps (cf. Figure 2- 6) :

$$\bar{u}_{j,i}(\Omega) = \frac{1}{2}(\bar{u}_j(t) + \bar{u}_j(t + \delta t_{ij})) \quad (2.30)$$

En sommant ces vitesses moyennes, pondérées par les masses associées, sur l'ensemble des pas de temps  $i$  nécessaires à la traversée de la cellule considérée, nous obtenons la vitesse moyenne de la trajectoire  $j$  dans l'élément  $\Omega$  :

$$\bar{\bar{u}}_j(\Omega) = \frac{\sum_i \dot{q}_j \delta t_{ij} \bar{u}_{j,i}(\Omega)}{\sum_i \dot{q}_j \delta t_{ij}} = \frac{\sum_i \delta t_{ij} \bar{u}_{j,i}(\Omega)}{\Delta T_{j\Omega}} \quad (2.31)$$

La vitesse ainsi définie peut être interprétée comme la moyenne définie à partir de la quantité de mouvement. Si plusieurs trajectoires sont à prendre en compte dans cette cellule, la moyenne des vitesses obtenues sur l'ensemble des trajectoires  $j$  de la cellule est effectuée, pondérée par le poids respectif de chaque trajectoire (cf. Figure 2- 7).

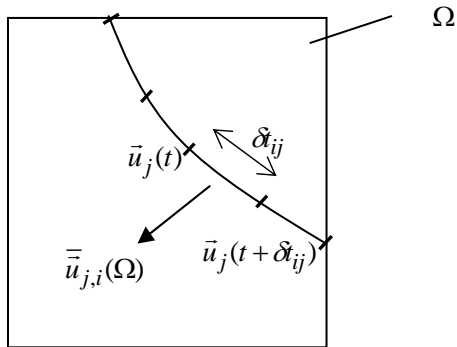


Figure 2- 6 : Vitesse moyenne d'une particule sur un pas de temps

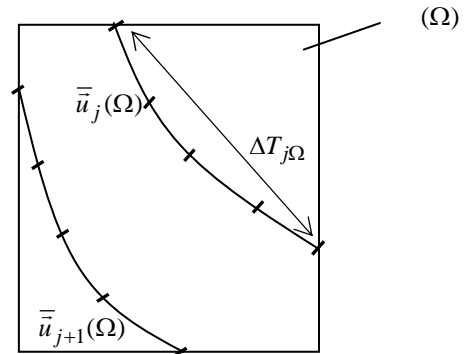


Figure 2- 7 : Vitesse moyenne d'une particule dans une cellule

La vitesse moyenne des particules sur la cellule  $\Omega$  est donc :

$$\bar{\vec{u}}(\Omega) = \frac{\sum_j \dot{q}_j \Delta T_{j\Omega} \bar{\vec{u}}_j(\Omega)}{\sum_j \dot{q}_j \Delta T_{j\Omega}} = \frac{\sum_j \dot{q}_j \sum_i \delta t_{ij} \bar{\vec{u}}_{j,i}(\Omega)}{\sum_j \dot{q}_j \Delta T_{j\Omega}} = \frac{\sum_j \sum_i \dot{q}_j \delta t_{ij} \bar{\vec{u}}_{j,i}(\Omega)}{\sum_j \sum_i \dot{q}_j \delta t_{ij}} \quad (2.32)$$

La vitesse moyenne de la phase dispersée et la fraction volumique étant définies pour chaque cellule du maillage, la comparaison des résultats lagrangiens avec ceux obtenus par la simulation eulérienne est dorénavant accessible. Cette phase de comparaison fait l'objet du paragraphe suivant.

## 4. Comparaison des résultats des simulations Euler/Lagrange

### 4.1 Principe des comparaisons

Un premier calcul est effectué avec CPS, en diphasique eulérien inerte jusqu'à convergence *ie* jusqu'à observation de l'écoulement stationnaire. Ensuite un calcul de trajectoires de particules est réalisé en lagrangien à partir du champ convergé aérodynamique gaz/particules. Enfin, les opérateurs de moyenne sont appliqués et fournissent la fraction volumique et la vitesse moyenne des particules. La comparaison des valeurs obtenues par les deux approches est alors possible (cf. Figure 2- 8). Ce travail doit permettre de définir les phénomènes influents dans les interactions gaz/particules, de façon à les modéliser plus précisément.

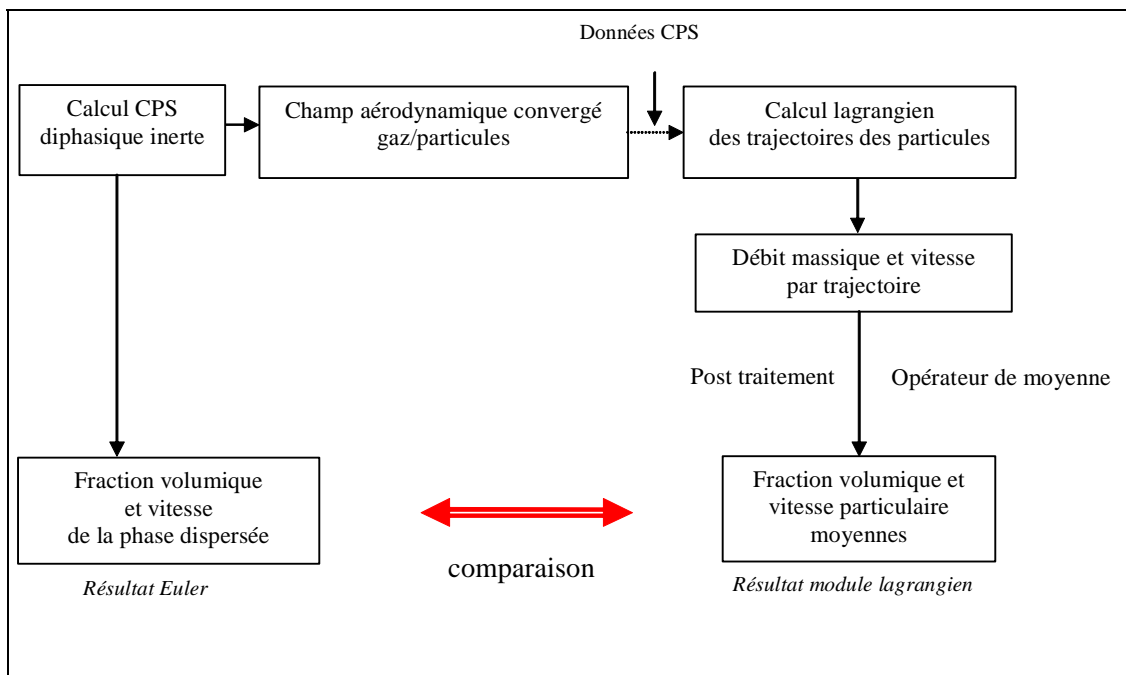


Figure 2- 8 : Méthode de comparaison des calculs lagrangien et eulérien.

Cette analyse est complétée par le tracé des lignes de courant de la vitesse de la phase dispersée donnée par CPS à l'aide du logiciel TECPLOT. Nous pouvons ainsi effectuer une comparaison qualitative sur les trajectoires suivies par les particules.

## 4.2 Présentation du cas de calcul : le TEP

Les comparaisons ont été effectuées en stationnaire sur un cas test simple : le TEP. Il s'agit d'un petit propulseur qui a servi en 1999 à la validation de trois codes diphasiques inertes ou réactifs (PEGASE pour l'IUSTI, CPS\_P version 1.2 pour SNPE et MSD version 2.2 pour l'ONERA) dans le cadre du programme ASSM (Dupays & Fabignon, 2000).

Ce cas test TEP figure un petit moteur axisymétrique fictif à chargement cylindrique. Le maillage contient 1470 mailles pour une longueur totale du moteur de 270mm et un rayon maximal de 45mm. La Figure 2- 9 présente le maillage et les conditions aux limites appliquées. Les particules sont injectées à la paroi débitante (limite référencée 1) et elles sortent de la chambre de combustion par la limite référencée 3.

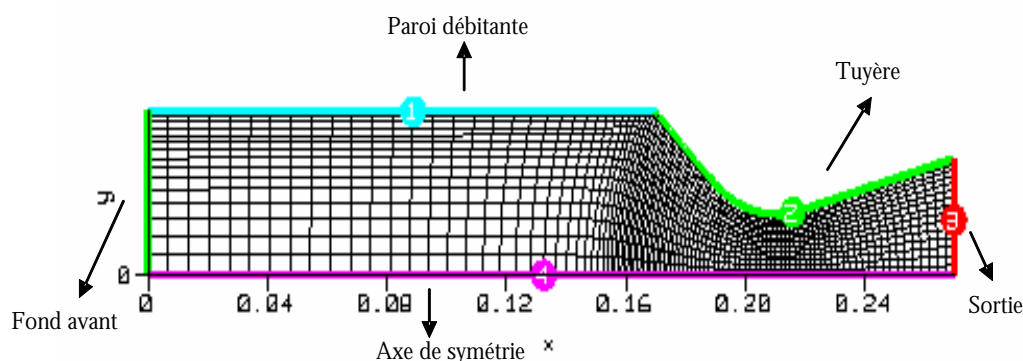


Figure 2- 9 : Le TEP, maillage ONERA (1470 mailles)

Ce maillage est grossier, particulièrement au niveau de l'axe de symétrie. Ce type de raffinement, plus important à l'injection qu'au centre du moteur est couramment rencontré en propulsion solide. En effet les phénomènes importants se situent habituellement en proche paroi : injection des gaz, combustion des particules d'aluminium, interaction de l'écoulement avec la face débitante ou avec une protection thermique, etc. Or, dans notre cas, la région proche de l'axe de symétrie semble avoir un rôle important puisque les particules ont tendance à s'y accumuler. Un raffinement du maillage de cette zone s'est donc avéré nécessaire.

Par conséquent, un second maillage a été réalisé avec le mailleur SIMAIL. Il s'agit d'un maillage à topologie structurée, qui comporte 10000 mailles. Le maillage est régulier sur toute la hauteur du moteur (taille de maille constante). Le raffinement longitudinal du maillage ONERA initial a été respecté, notamment au niveau de la tuyère car la section du col joue un rôle important (cf. Figure 2- 10). Les conditions aux limites appliquées sont identiques<sup>13</sup> aux précédentes.

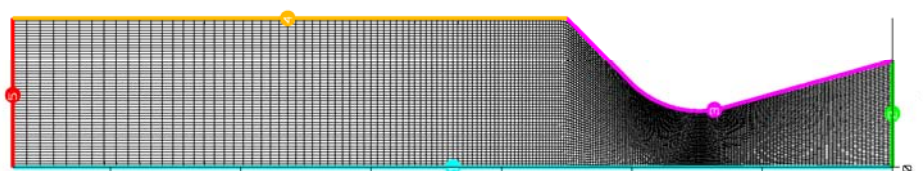


Figure 2- 10 : Le TEP, maillage SME (10000 mailles)

<sup>13</sup> Les numéros des limites ne sont toutefois pas conservés.

### 4.3 Résultats des comparaisons

Les simulations ont été réalisées sur les deux maillages. Pour des raisons évidentes de clarté et de lisibilité des graphes, les résultats des comparaisons de trajectoires sont présentés sur le maillage ONERA pour un nombre réduit de trajectoires (une particule injectée par cellule). En revanche, les simulations ayant pour but les comparaisons de valeurs moyennes (vitesse ou fraction volumique) sont réalisées sur le maillage SME avec un grand nombre de particules injectées par face limite.

Cette étude comparative est également paramétrée par la taille des particules injectées. En effet, selon leur diamètre, les particules solides réagissent différemment : les petites particules ont tendance à se comporter comme des traceurs c'est-à-dire à suivre précisément l'écoulement, alors que l'inertie des particules de diamètre élevé les rend moins sensibles à l'écoulement. Nous présentons dans les paragraphes suivants les résultats obtenus pour des particules de trois diamètres différents : 5, 30 et 100 $\mu\text{m}$ .

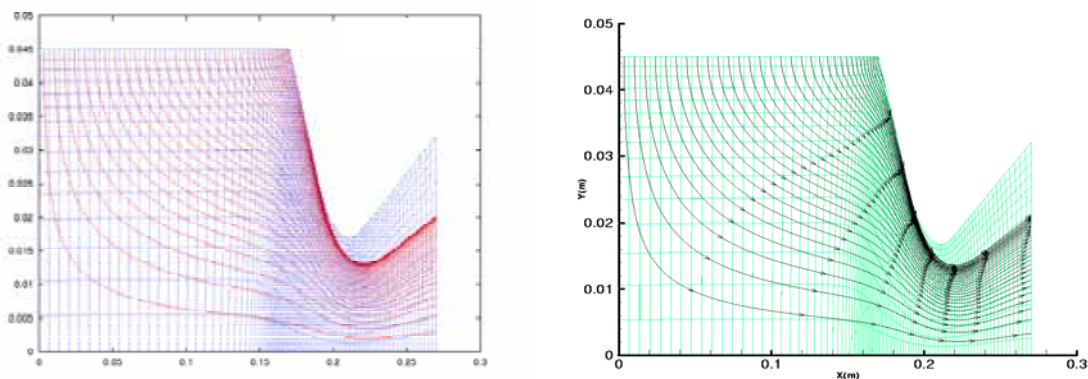
#### 4.3.1 Petites particules (5 $\mu\text{m}$ de diamètre)

Le tracé des trajectoires lagrangiennes pour des particules de faible diamètre (cf. Figure 2- 11) a permis de mettre en évidence les points suivants :

- au niveau de l'axe de symétrie : les particules restent relativement loin de l'axe, sans le traverser et une zone de vide se forme au fond avant,
- au niveau de la tuyère : aucune particule ne vient heurter la paroi de la tuyère et aucun croisement de trajectoires n'a lieu,
- en sortie de tuyère : la section du jet de particules est large et occupe une grande partie de la tuyère.

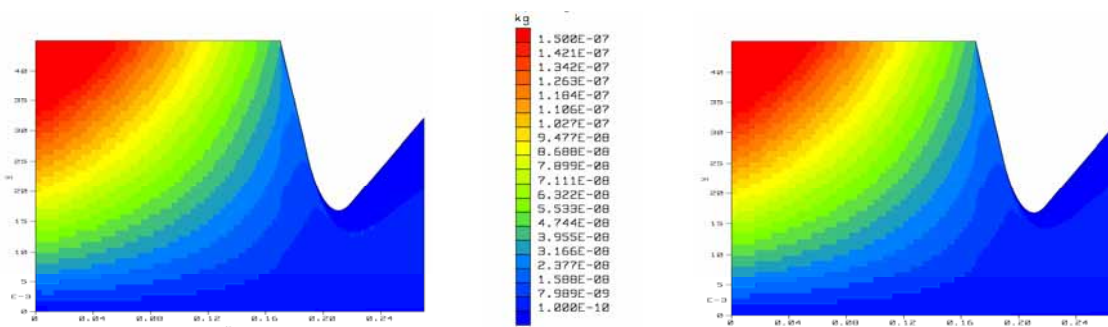
Les particules de faible diamètre se comportent comme des traceurs. Toutes les trajectoires sont colinéaires : aucune collision, aucun rebond.

Les trajectoires des particules obtenues par le calcul lagrangien et les lignes de courant de la vitesse particulaire tracées à partir des résultats du modèle eulérien de CPS sont présentées Figure 2- 11 (les figures sont dilatées en hauteur pour permettre une meilleure visibilité des trajectoires de particules). Il existe une très bonne corrélation entre les résultats de ces deux calculs.



**Figure 2- 11 : Trajectoires des particules de 5 $\mu\text{m}$  de diamètre. à gauche : trajectoires obtenues par le calcul lagrangien ; à droite : lignes de courant obtenues pour le calcul eulérien (CPS)**

Les fractions volumiques et les vitesses moyennes obtenues sont comparées sur le maillage SME. Les résultats sont donnés en annexe (A). Seule la cartographie de la masse des particules est présentée ici (cf. Figure 2- 12). Précisons que l'écart entre les masses dans le propulseur est faible : 0,1% en moyenne, selon le nombre de trajectoires calculées en lagrangien.

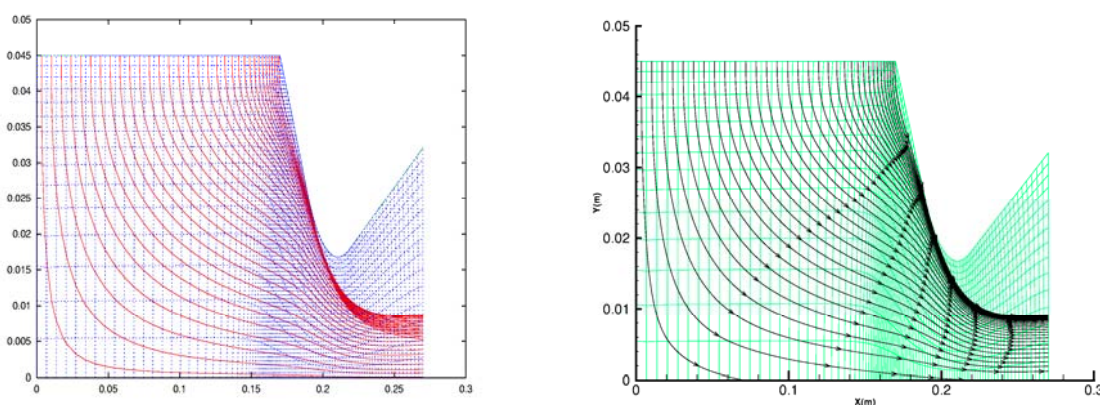


**Figure 2- 12 : Masse solide pour des particules de 5µm de diamètre, maillage TEP SME, iso-échelle. à gauche : calcul lagrangien, 40000 trajectoires calculées ; à droite : calcul eulérien (CPS)**

L'ensemble de ces résultats montre une très bonne corrélation entre les modélisations eulérienne et lagrangienne. La comparaison valide le modèle eulérien dans le cas des particules de faible diamètre.

### 4.3.2 Particules moyennes (30µm de diamètre)

Les mêmes comparaisons sont faites et les trajectoires obtenues sont données Figure 2- 13.



**Figure 2- 13 : Trajectoires des particules de 30µm de diamètre. à gauche : trajectoires obtenues par le calcul lagrangien ; à droite : lignes de courant obtenues pour le calcul eulérien (CPS)**

Dans ce cas, aucun rebond n'a lieu sur la tuyère mais au niveau du divergent de la tuyère, deux types de trajectoires se côtoient. Une majorité de ces trajectoires sont colinéaires entre elles et issues du fond avant (trajectoires de couleur bleue sur la Figure 2- 14, gauche). L'autre partie du jet est constituée de trajectoires issues du fond arrière et qui se croisent (trajectoires de couleur rouge). Ce résultat est confirmé par le tracé des vitesses moyennes radiales estimées à partir des résultats de la simulation lagrangienne (cf. Figure 2- 14, droite).

La répartition des particules dans le moteur est également étudiée. Les résultats des simulations Euler et Lagrange sont présentés Figure 2- 15. De très fortes similitudes peuvent être observées et le calcul de la masse des particules dans le moteur montre un écart inférieur à 0,5% entre les deux méthodes. Quelques différences sont toutefois à noter au niveau de la tuyère, par exemple pour le jet de particules qui se forme au niveau du convergent et qui se maintient jusqu'à la sortie. Cet écart est dû à l'interaction des particules avec la tuyère, mieux traitée par l'approche lagrangienne.



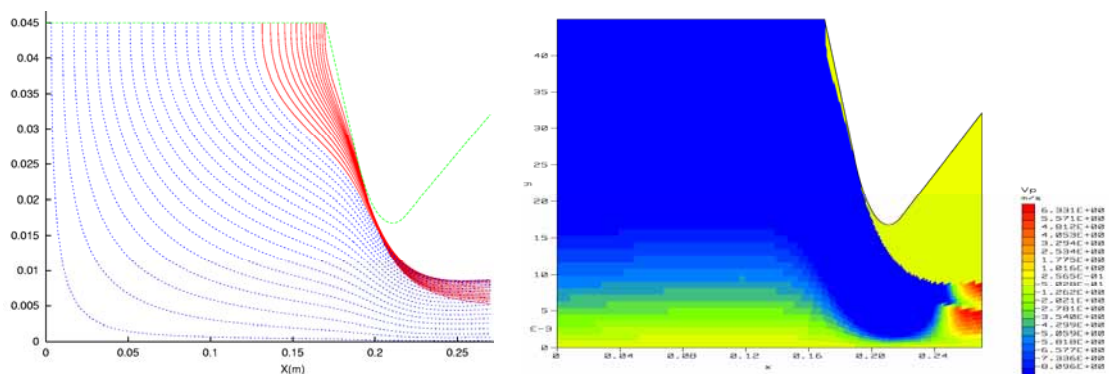


Figure 2- 14 : Intersection des trajectoires. à gauche : tracé lagrangien ; à droite : vitesse moyenne radiale

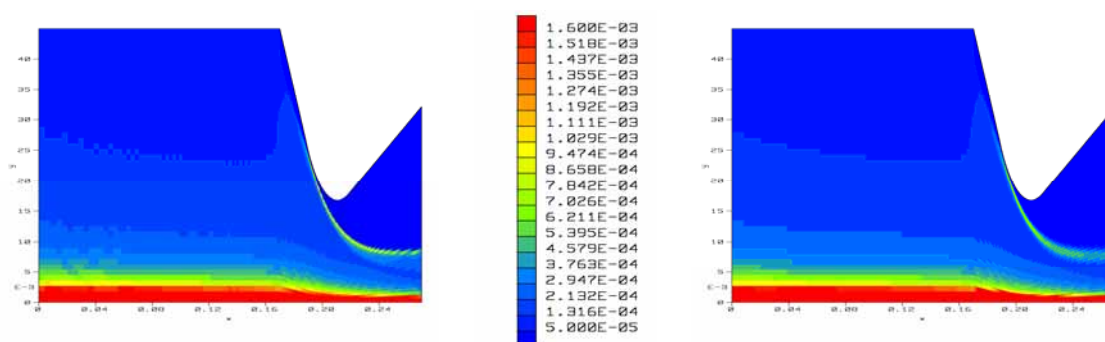


Figure 2- 15 : Fraction volumique solide, maillage TEP SME,  $dp=30\mu\text{m}$ , iso-échelle.  
à gauche : calcul lagrangien (3200 trajectoires calculées) ; à droite : calcul eulérien (CPS)

Les représentations des vitesses moyennes axiale et radiale sont données en annexe (A). Les valeurs obtenues sont très proches dans l'enceinte de la chambre de combustion (écart inférieur à 1%). Néanmoins, des différences apparaissent dans le divergent de la tuyère ; elles peuvent s'expliquer par un comportement différent près de la paroi. Notons que les comparaisons effectuées sur le maillage ONERA (1470 éléments) ont mis en évidence des écarts bien plus importants au niveau de certaines cellules de l'axe de symétrie, notamment pour la vitesse radiale. Ces différences se sont estompées avec le maillage raffiné car les résultats lagrangiens sont d'autant plus proches des résultats eulériens que le maillage est fin.

Les résultats établis pour ce diamètre de particules sont légèrement moins bons que ceux obtenus pour les petites particules, mais ils restent cohérents dans la majeure partie du moteur.

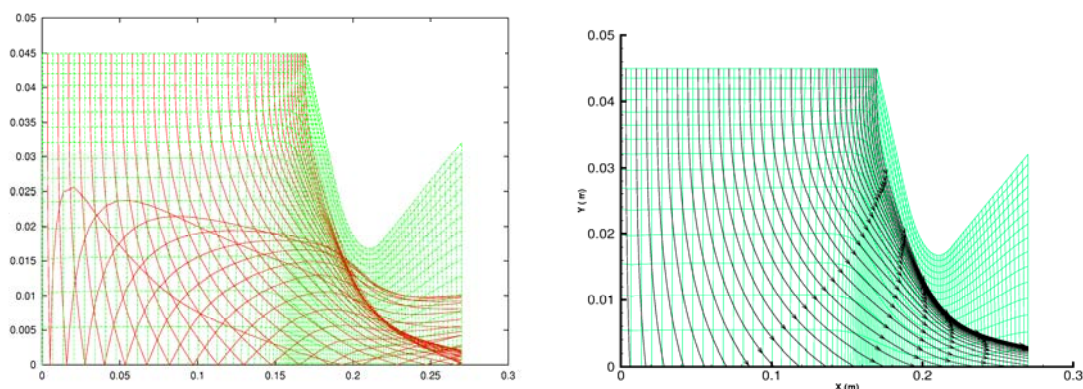
### 4.3.3 Grosses particules (100 $\mu\text{m}$ de diamètre)

Les particules injectées ont un diamètre de 100 $\mu\text{m}$  pour une chambre de combustion dont le diamètre est, rappelons-le, de 90mm. Les trajectoires obtenues sont présentées Figure 2- 16.

Le résultat du calcul lagrangien montre de nombreux « rebonds » sur l'axe de symétrie qui correspondent physiquement à des traversées de ce dernier. En effet, les particules injectées dans ce cas de calcul sont fortement inertielles d'où une mise à l'équilibre plus lente des particules avec la phase gazeuse. Les particules atteignent donc l'axe de symétrie avec une vitesse radiale importante. Après rebond, leurs trajectoires s'incurvent en direction de la tuyère, certaines particules subissant même plusieurs rebonds avant de sortir du propulseur.

Toutefois, aucune particule ne vient heurter la paroi de la tuyère où une zone de vide se forme. Le croisement des trajectoires, que nous avons constaté pour les particules de 30 $\mu\text{m}$  de diamètre, a également lieu. A la sortie, le jet de particules est donc constitué de deux parties : la partie supérieure est formée de particules issues du fond avant, ayant rebondi sur l'axe, alors que la partie

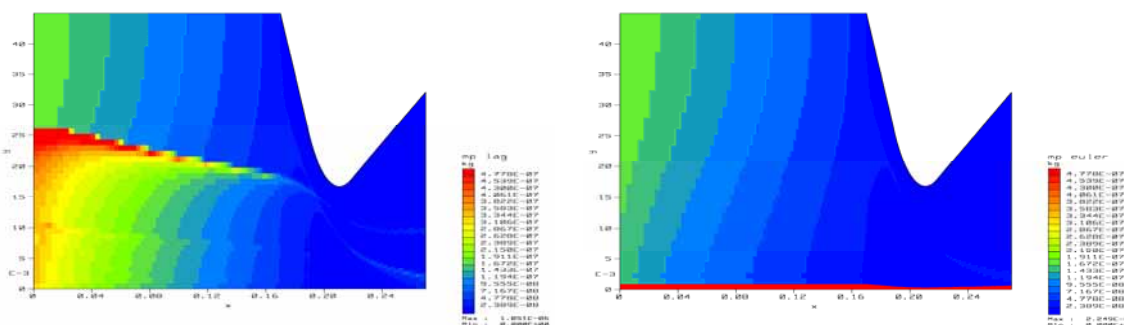
inférieure est majoritairement constituée de particules issues du fond arrière et n'ayant pas rebondi mais dont les trajectoires se coupent.



**Figure 2- 16 : Trajectoires des particules de 100µm de diamètre. à gauche : trajectoires obtenues par le calcul lagrangien ; à droite : lignes de courant obtenues pour le calcul eulérien (CPS)**

Les « trajectoires » obtenues pour le calcul eulérien sont ici très nettement différentes de celles obtenues par la simulation lagrangienne. En effet, toute la partie "rebond" n'est pas traitée par le tracé eulérien. Les particules atteignent l'axe de symétrie mais ne le traversent pas : leurs trajectoires semblent stoppées par l'axe de symétrie.

L'étude de la répartition des particules dans le moteur, présentée Figure 2- 17, confirme ces résultats préliminaires. Dans le cas de la simulation lagrangienne, les particules "rebondissent" sur l'axe de symétrie et se répartissent ensuite dans toute la chambre. Le calcul eulérien présente au contraire une accumulation des particules près de l'axe de symétrie. Ce phénomène d'accumulation donne une valeur maximale de la fraction volumique 100 fois supérieure à celle estimée par le calcul lagrangien ( $\alpha_{\max euler} > 1$  et  $\alpha_{\max lag} = 1,88.10^{-2}$ , cf. annexe A).



**Figure 2- 17 : Masse solide, pour des particules de 100µm de diamètre, maillage TEP SME. à gauche : calcul lagrangien (40000 trajectoires calculées) ; à droite : calcul eulérien (CPS)**

En conclusion de cette étude comparative sur la fraction volumique, le calcul lagrangien présente un meilleur étalement des particules. Le calcul eulérien est en effet incapable de simuler la traversée de l'axe de symétrie. Dans les cellules adjacentes à ce dernier, deux séries de trajectoires de vitesses radiales opposées se rencontrent, d'où une vitesse moyenne quasi-nulle. Les particules stagnent donc au niveau de l'axe de symétrie, ce qui explique l'accumulation très importante de particules dans la rangée de cellules limitrophes à l'axe central du moteur. Précisons que pour des particules plus légères, *ie* avec un temps de relaxation dynamique petit, ce problème s'avère inexistant.

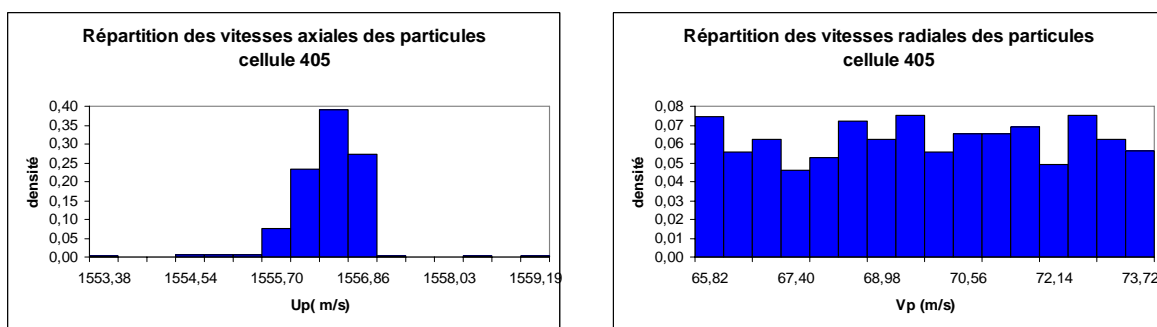


## 4.4 Distribution de vitesse

Nous avons étudié la répartition des vitesses des particules pour certaines cellules du maillage. La vitesse particulaire considérée est la vitesse moyenne d'une particule de trajectoire  $j$  le long de la traversée de la cellule étudiée :  $\bar{u}_j(\Omega)$  (cf. 2.32). Cette variable est ensuite exploitée sous forme d'histogramme<sup>14</sup>, ce qui permet de visualiser l'importance de la variance de la vitesse particulaire dans les zones de croisement de trajectoires.

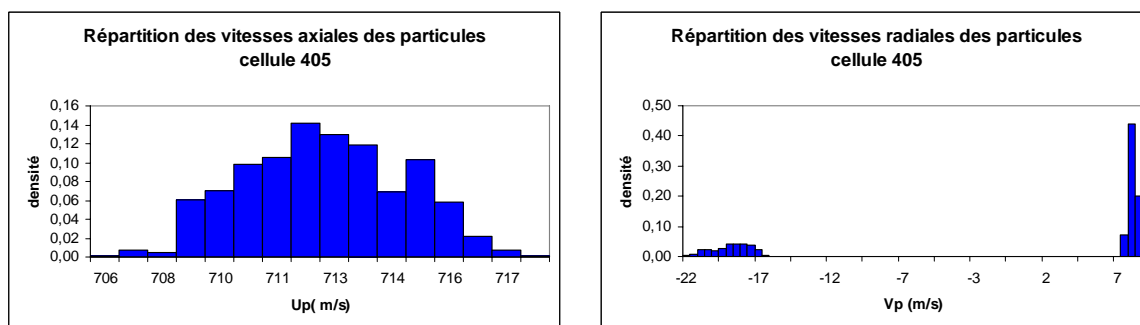
Les résultats présentés dans ce document correspondent à trois diamètres de particules et sont donnés pour deux cellules. La cellule repérée 405 est une cellule limite dans le plan de la sortie de tuyère, la seconde (numérotée 6050) est adjacente à l'axe de symétrie (cf. annexe A).

Nous avons vu que pour des particules de  $5\mu\text{m}$  de diamètre les trajectoires sont colinéaires (cf. Figure 2- 11). Dans la cellule 405, l'histogramme montre (cf. Figure 2- 18) que les vitesses axiales varient peu : 95% d'entre elles sont comprises entre 1555,5 et 1556,7m/s pour une vitesse moyenne dans la cellule de 1556,4m/s. Les vitesses radiales présentent une plage de variation plus importante avec un étalement uniforme.



**Figure 2- 18 : Distribution des vitesses,  $d_p=5\mu\text{m}$  (306 trajectoires).**  
à gauche : vitesses axiales ( $U_{pmoy}=1556,4\text{m/s}$ ) ; à droite : vitesses radiales ( $V_{pmoy}=69,8\text{m/s}$ )

La même analyse a été faite pour des particules de  $30\mu\text{m}$  de diamètre. Les résultats sont présentés Figure 2- 19. Les particules étant plus inertielles que les précédentes, les trajectoires sont différentes et leur répartition à cet endroit du moteur également.

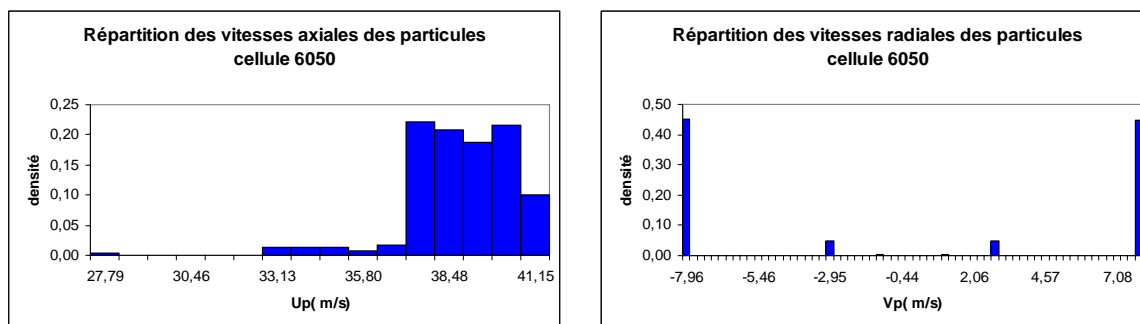


**Figure 2- 19 : Distribution des vitesses,  $d_p=30\mu\text{m}$  (273 trajectoires).**  
à gauche : vitesses axiales ( $U_{pmoy}=712,5\text{m/s}$ ) ; à droite : vitesses radiales ( $V_{pmoy}=0,3\text{m/s}$ )

<sup>14</sup> Un histogramme est associé à l'ensemble des trajectoires qui traversent une cellule donnée.

Deux séries de trajectoires (au nombre total de 273) se croisent (cf. Figure 2- 13) : l'une provient de la réflexion sur la tuyère<sup>15</sup> et l'autre n'a rencontré aucun obstacle. La distribution des vitesses axiales présente un profil gaussien (cf. Figure 2- 19). En ce qui concerne les vitesses radiales, nous observons une distribution antisymétrique. Les valeurs positives correspondent à la seconde série de trajectoires : les particules s'éloignent de l'axe de symétrie pour se déployer dans le divergent. Remarquons que la variance de vitesse qui résulte de cette asymétrie est importante et qu'elle n'est pas prise en compte dans la modélisation actuellement proposée dans le code CPS.

Pour des particules de 100 $\mu\text{m}$  de diamètre, les résultats sont présentés Figure 2- 20 pour la cellule située au niveau de l'axe de symétrie, à la moitié du moteur (cellule 4050). Le profil des vitesses radiales est particulièrement éloquent : la moitié des particules se déplace vers l'axe de symétrie (vitesse radiale négative) et l'autre moitié s'en éloigne (vitesse radiale positive). Parmi les particules possédant une vitesse normale de même signe, on distingue une majorité de particules avec une vitesse absolue de l'ordre de 8m/s, puis des valeurs plus faibles pour le restant des particules. Cela s'explique par la présence de particules dont les trajectoires rebondissent pour la première fois sur l'axe, avec des vitesses normales élevées (en valeur absolue), et de particules (moins nombreuses) qui ont déjà rebondi sur l'axe et qui possèdent donc une vitesse plus faible. On notera également que la vitesse moyenne radiale dans cette cellule est quasi-nulle.



**Figure 2- 20 : Distribution des vitesses,  $d_p=100\mu\text{m}$ , cellule limite axe de symétrie (827 trajectoires) ; à gauche : vitesses axiales ( $U_{pmoy}=38,8\text{m/s}$ ) ; à droite : vitesses radiales ( $V_{pmoy}=-0,13\text{m/s}$ )**

## 4.5 Analyse des résultats

Nous avons comparé les trajectoires globales des particules, la répartition de la fraction volumique solide moyenne et les vitesses moyennes pour trois diamètres de particules. Les analyses de ces résultats ont mis en évidence diverses situations :

- Pour des particules faiblement inertielles (typiquement de diamètre égal à 5 $\mu\text{m}$  dans le cas du TEP) la comparaison des résultats est bonne dans tout le champ.
- Dans le cas de particules plus grosses (30 $\mu\text{m}$  de diamètre), quelques écarts apparaissent près de la tuyère et dans le divergent. Cependant, cette comparaison démontre la capacité globale du modèle eulérien à représenter la répartition des particules dans le propulseur, à condition que le maillage soit suffisamment fin.
- Si les particules sont fortement inertielles (diamètre de 100 $\mu\text{m}$ ), des traversées d'axe de symétrie sont observées en lagrangien alors qu'une accumulation non physique des particules au niveau de l'axe de symétrie se produit dans le calcul Euler.

Ce comportement erroné des grosses particules traduit un défaut du modèle diphasique eulérien de CPS, qui est facile à appréhender : la prise en compte d'une vitesse moyennée sur la cellule ne permet plus de représenter le croisement.

<sup>15</sup> Les résultats présentés auparavant pour la même taille de particules ne mettaient pas en évidence de rebond des particules sur la tuyère car elles étaient peu nombreuses et donc injectées relativement loin de la paroi du convergent.

Si les particules arrivent au centre du moteur avec une vitesse radiale importante, elles doivent en principe se croiser et donc traverser le centre du moteur. Le module de calcul lagrangien traite ce problème de façon adéquate. En revanche, le calcul eulérien considère que la vitesse moyenne radiale des particules au niveau de l'axe de symétrie est nulle<sup>16</sup>. Les particules se comportent donc comme si elles voyaient une paroi. Les flux sont alors nuls et les particules stagnent à cet endroit. Une meilleure description des zones de croisement des particules est donc à réaliser.

Ce problème d'accumulation non physique de particules dans certaines zones de l'écoulement n'est pas nouveau. Il a déjà fait l'objet d'investigations lors de la construction des algorithmes diphasiques de CPS. A l'époque, l'introduction d'un terme de pression particulaire dans les équations avait été envisagée (Sainsaulieu & Raviart, 1992 ; Sainsaulieu, 1993 ; Morfouace & Tissier, 1995). Néanmoins, comme dans d'autres approches, où un terme de masse ajoutée idoine est pris en compte dans les équations (Toumi & Kumbaro, 1996), l'objectif était d'avoir un système d'équations hyperboliques pour la phase dispersée, afin de pouvoir appliquer à ce système des méthodes numériques classiques. La justification théorique de cette pression diphasique était donc plus mathématique que physique, contrairement à la formulation théorique développée durant cette thèse.

## 5. Conclusion

La complexité des écoulements diphasiques dans les MPS et de leurs interactions avec les ODP est telle que différentes hypothèses sont effectuées pour permettre une modélisation simplifiée mais suffisamment réaliste :

- H1 : Particules identiques, sphériques, même diamètre, même masse volumique
- H2 : Particules inertes
- H3 : Effets des collisions inter particules négligés
- H4 : Particules soumises à la seule force de traînée du gaz

Rappelons que l'hypothèse de particules inertes, si elle est justifiée dans le cas de petites particules brûlant rapidement en surface, n'est pas pertinente pour le P230. L'aspect combustion est primordial mais la complexité du problème dans sa globalité impose de travailler par étapes. L'hypothèse de particules inertes est une hypothèse de travail qui permet d'étudier plus précisément un aspect particulier, ici l'influence de la répartition spatiale des particules sur le niveau des ODP.

Le domaine de validité du modèle eulérien implanté dans CPS a été exploré grâce à une analyse des résultats de simulations obtenus par une approche eulérienne d'une part et par une approche lagrangienne d'autre part. Ces comparaisons ont mis en évidence l'imprécision du modèle eulérien. Cela ne porte pas à conséquence dans le cas de particules faiblement inertielles similaires à des traceurs. En revanche, pour des particules plus grosses, une accumulation non physique de particules peut être observée dans les zones de l'écoulement présentant une importante variance dans les vitesses particulières.

Le problème vient du fait que le modèle eulérien calcule, dans chaque élément du maillage, une moyenne des vitesses<sup>17</sup> des particules. De nombreuses caractéristiques de l'écoulement réel sont donc perdues.

L'objectif principal dévolu à ces travaux de thèse est donc de trouver une modélisation, puis une formulation mathématique et une résolution numérique idoines, qui améliore la représentation physique des écoulements contenant des particules dans les moteurs à propergol solide. Pour cela, nous

<sup>16</sup> Ce traitement n'est pas spécifique à une configuration bidimensionnelle, mais à la représentation eulérienne de la phase dispersée : la symétrie des équations impose une stagnation des particules au centre du moteur.

<sup>17</sup> Et des températures.

allons inclure dans les équations moyennées la variance de vitesse autour de la vitesse moyenne du nuage de particules.

La modélisation eulérienne théorique ainsi développée est présentée dans la partie 2 suivante ainsi que son implantation dans le code CPS.

## **PARTIE 2**

# **MODELISATION NUMERIQUE DIPHASIQUE AVEC PRESSION PARTICULAIRE**

---

La propulsion solide n'est pas le seul domaine où les écoulements diphasiques s'appliquent. Loin s'en faut. De tels écoulements se retrouvent dans notre environnement naturel (formation de gouttes de pluie, tempête de sable, diffusion de polluants dans l'atmosphère,...) et dans des procédés industriels variés : des centrales nucléaires aux systèmes d'injection dans les moteurs de voiture, en passant par l'extraction de produits pétroliers.

L'activité de recherche sur les écoulements diphasiques et leur modélisation n'est donc pas neuve et est largement développée. Plusieurs méthodes de modélisation ont ainsi été écrites, selon les applications et les types d'écoulement (denses ou dilués, gaz/liquide, liquide/solide etc.). Les écoulements diphasiques gaz/solide dilués qui nous intéressent (cf. chapitre 2) peuvent être représentés par différents modèles. Nous avons évoqué celui de Marble (1963) au chapitre précédent. Il en existe d'autres, plus complexes, qui se basent également sur une approche statistique de la modélisation diphasique. Nous tentons au chapitre 3 de donner un panorama des méthodes eulériennes employées pour la modélisation des écoulements diphasiques. L'une d'elles a servi de base à la formulation de deux nouveaux modèles, censés pallier les travers du modèle eulérien de base implanté dans CPS.

En effet, nous avons vu au chapitre précédent que le code CPS présentait, dans certains cas, un défaut directement lié au modèle eulérien utilisé. Ce dernier est trop simple, dans le sens où il ne décrit pas suffisamment la physique de l'écoulement, en particulier la notion de variance de vitesse particulaire qui a été évoquée au chapitre 2 et qui apparaît comme un axe d'amélioration du modèle diphasique eulérien classique de CPS.

Les deux nouvelles modélisations font apparaître un terme de pression particulaire, qui traduit l'agitation des particules. Plus exactement, la vitesse de la phase dispersée est définie par la somme d'une vitesse moyenne et d'une partie décorrélée spécifique à chaque particule. Les modèles diphasiques à pression particulaire ainsi obtenus sont présentés au chapitre 4. La validité des hypothèses effectuées lors de leur formulation est également analysée.

Ensuite, nous décrivons les différentes étapes d'implantation de ces modèles dans le code de mécanique des fluides CPS. Nous insistons dans un premier temps (cf. chapitre 5) sur l'analyse mathématique du système convectif à pression particulaire. Un problème de Riemann spécifique est résolu pour la phase dispersée, ce qui induit des développements non triviaux. La phase d'intégration des modèles dans CPS est abordée au chapitre 6 d'un point de vue théorique (traitement numérique) et pratique (validation sur des cas tests).

L'objet de cette partie est donc de présenter les deux modèles diphasiques à pression particulaire mis au point durant la thèse, ainsi que leur implantation dans le code CPS.

# Chapitre 3

## Formalisme théorique de la modélisation diphasique eulérienne

Nous allons tout d'abord présenter de façon relativement générale le formalisme théorique du traitement d'un nuage de particules solides en suspension dans un mélange gazeux. Les différentes approches de modélisation continue développées pour la prédiction numérique d'écoulements diphasiques turbulents réactifs dispersés sont brièvement présentées, des méthodes à deux fluides au formalisme mésoscopique eulérien (MEF). Ensuite les équations mathématiques du mouvement d'une particule dans un champ fluide sont établies. Elles permettront d'obtenir une modélisation eulérienne de la phase dispersée basée sur les équations d'évolution des grandeurs moyennées du nuage de particules obtenues par le MEF.

### 1. La modélisation diphasique

Nous avons mentionné au chapitre précédent les deux méthodes classiquement utilisées pour traiter les écoulements gaz/particules. Nous les rappelons ici, en insistant sur les techniques de modélisation de la phase gazeuse.

L'approche Euler/Lagrange (ou approche lagrangienne) résout l'équation de mouvement des particules présentes dans l'écoulement. Elle permet un suivi explicite des trajectoires d'un grand nombre de particules dans un champ fluide donné. Ce champ fluide est déterminé soit par résolution des équations de Navier-Stokes moyennées (modèle monophasique classique), soit par une méthode plus précise telle que la Simulation Numérique Directe (DNS). Dans ce dernier cas, les équations de Navier-Stokes instantanées sont résolues exactement, sur un maillage très fin, donnant ainsi accès directement au champ fluide local instantané. Très précise, cette méthode nécessite toutefois une taille de maille inférieure à la plus petite échelle de longueur de la turbulence du fluide. Elle est donc fortement limitée en terme de nombre de Reynolds (Squires & Eaton, 1991 ; Boivin *et al.*, 1998). Une méthode intermédiaire consiste à utiliser la Simulation des Grandes Echelles (LES) (Sagaut, 1998) initialement développée par Smagorinsky (1963). Cette méthode permet de résoudre directement les grandes échelles du champ fluide turbulent, alors que l'effet des plus petites échelles est modélisé. Ceci permet de traiter des écoulements à nombre de Reynolds beaucoup plus grand que dans le cas de la DNS. Notons que cette méthode est particulièrement adaptée aux écoulements gaz/particules car ceux-ci présentent naturellement une échelle de coupure. En effet, on peut montrer qu'en dessous d'une certaine échelle de longueur, les perturbations du champ fluide n'ont pas d'influence directe sur le mouvement des particules (Wang *et al.*, 1998).

L'approche lagrangienne est surtout utilisée pour des écoulements très dilués. Elle permet de prendre en compte facilement des phénomènes complexes liés à une particule seule : rotation, collision, rebond inélastique, combustion ou évaporation. Néanmoins, elle est très difficile à appliquer dans le cas de configurations de simulations industrielles (comme un MPS) qui nécessitent un très grand nombre de particules suivies (de l'ordre du milliard) dans une géométrie complexe. Malgré l'amélioration sensible des capacités des ordinateurs ces dernières années, cette approche reste toujours très pénalisante en temps calcul et en espace mémoire.

Dans l'approche Euler/Euler (ou approche eulérienne) la phase solide est assimilée à un milieu continu, au travers d'une densité volumique de présence. Les deux phases sont donc considérées comme des milieux continus qui s'interpénètrent. Le couplage entre les deux phases de l'écoulement est réalisé de façon implicite à travers des termes de transfert entre le fluide et les particules. Les équations résolues pour la phase dispersée sont relatives à des grandeurs moyennées, d'où un temps de calcul plus raisonnable. La rapidité de cette approche eulérienne se fait toutefois au détriment de la précision obtenue sur les caractéristiques de la phase solide (cf. chapitre 2).

L'approche eulérienne, plus aisée à mettre en place, est celle retenue dans notre étude. Elle est aussi la mieux adaptée aux configurations de calcul intervenant dans nos travaux. De plus, elle permet de limiter les développements nécessaires à l'intégration d'une nouvelle modélisation diphasique dans CPS, qui possède déjà un modèle eulérien. Cette méthode nécessite au préalable d'écrire les équations d'évolution de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie d'une particule. Ces équations sont issues d'une analyse lagrangienne du comportement des particules. Elles seront ensuite utilisées pour établir les équations de transport des grandeurs moyennées utilisées dans l'approche eulérienne, via une méthode statistique détaillée au paragraphe suivant.

## **2. Formalisme théorique**

Les équations permettant de décrire de façon générale les écoulements diphasiques gaz/particules sont difficiles à obtenir. Etant donnée l'extrême complexité de la structure locale d'un milieu diphasique et des interactions entre les phases, la connaissance détaillée des caractéristiques locales et instantanées de l'écoulement est inaccessible. La simulation de ce type d'écoulement passe par le développement de modèles macroscopiques qui s'appuient sur un ensemble d'hypothèses simplificatrices. L'approche eulérienne consiste à traiter le nuage de particules comme un milieu continu, via différentes opérations de traitement statistique. La spécificité de ce traitement est une perte d'information qui nécessite à terme la mise en œuvre de modèles de fermeture et de lois de comportement. Différents formalismes ont été développés dans ce cadre, ils sont présentés dans les paragraphes suivants et une vision schématique globale en est donnée Figure 3- 1.

### **2.1 Modélisation de base**

Divers modèles ont été développés, sur la base d'hypothèses simplificatrices adaptées aux domaines d'ingénierie concernés. Par exemple, l'étude de la formation de gouttes de pluie dans un nuage a inspiré un formalisme statistique rustique traitant principalement des mécanismes de collision et de coalescence des gouttelettes liquides (Saffman & Turner, 1956). Ces travaux ont également été étendus aux sprays dilués en combustion dans un propulseur monodimensionnel (Williams, 1958).

Les modèles diphasiques à "particules raréfiées" mis au point dans les années 1960 (Saffman, 1962) ont été largement utilisés dans l'industrie aéronautique (Marble, 1969 et 1970). Ces modèles s'appliquent à des écoulements diphasiques dont la phase dispersée est constituée de gouttelettes sphériques, petites, incompressibles et indéformables : modèles de "dusty gas<sup>1</sup>". Le nuage de particules est décrit par un ensemble de variables continues (vitesse, température et densité particulaire). Les particules sont supposées avoir la même température et la même vitesse dans un même volume local. Les caractéristiques de la phase dispersée varient sur une échelle de longueur du même ordre de grandeur que celle du gaz. Des relations de continuité conventionnelles sont écrites, avec pression et termes visqueux pour le gaz. Des termes d'échange de quantité de mouvement et de chaleur sont pris en compte, avec des signes opposés pour les deux phases. Aucun terme de pression n'apparaît dans l'équation liée au nuage de particules car le mouvement des particules est considéré comme parfaitement déterministe. Les effets des interactions entre le gaz et les particules jouent donc un rôle très important dans ce type de modélisation. Rappelons que

---

<sup>1</sup> Gaz avec suies.



ce modèle a inspiré de nombreux modèles diphasiques eulériens, implantés dans divers codes d'aérodynamique interne dont le code de propulsion spatiale de SME.

## 2.2 Approche à deux fluides

L'approche à deux fluides, plus récente que la précédente, est différente. Chaque phase est supposée continue et gouvernée par des équations eulériennes, et le couplage est assuré par des termes de transfert aux interfaces. Les équations différentielles partielles sont obtenues à partir de celles de la mécanique des milieux continus. Elles sont supposées vérifiées au sein de chacune des phases<sup>2</sup>. Ces dernières sont séparées par une interface, *ie* une surface supposée infiniment mince et sans masse qui est le siège des échanges entre phases. Chaque région monophasique est caractérisée par une fonction de phase qui vaut 1 ou 0 selon la nature de la phase en présence. Dans cette approche continue, ou approche à deux fluides, les équations de conservation continues locales, ainsi que les conditions de saut aux interfaces, sont moyennées sur une région incluant un grand nombre de particules (Delhay, 1974 ; Drew, 1983). Ce processus de moyenne permet d'obtenir le champ macroscopique et de faire apparaître des termes dans les équations macroscopiques qui proviennent de termes microscopiques, comme le tenseur de Reynolds qui est issu des fluctuations de vitesse de la phase gazeuse. Cette approche est inspirée de celle utilisée en modélisation de la turbulence (Hinze, 1975) et s'appuie sur des moyennes temporelles (Ishii, 1975), spatiales (Nigmatulin, 1979) ou plus généralement sur des moyennes d'ensemble (Drew, 1983).

Cette approche, très populaire, est cependant très restrictive. En effet, ces modèles ne présentent aucune tentative de modélisation des contributions de la turbulence sous-jacente du fluide.

La prise en compte dans les équations des écoulements diphasiques de la turbulence du fluide et de son effet sur les particules a été réalisée par plusieurs auteurs. La modélisation de la turbulence de la phase dispersée est ainsi obtenue par une dérivation rigoureuse des équations de conservation locales instantanées d'un écoulement monophasique. La fermeture des équations moyennées est ensuite assurée en modélisant les corrélations turbulentes, jusqu'au troisième ordre (Elghobashi & Abou-Arab, 1983). Pour cela, on utilise des modèles algébriques obtenus dans le cadre de la théorie de Tchen sur la dispersion de particules discrètes transportées par des écoulements fluides turbulents homogènes (Tchen, 1947).

Cette approche donne de bons résultats (Elghobashi & Abou-Arab, 1983 ; Simonin *et al*, 1990). Cependant, elle suppose que l'entraînement des particules est entièrement contrôlé par la turbulence du fluide environnant. Il est donc impossible de prendre en compte des mécanismes physiques importants tels que l'influence du cisaillement de l'écoulement moyen ou des conditions d'injection sur les corrélations de vitesses turbulentes et la dispersion des particules. De plus, cette approche est valable uniquement pour des écoulements très dilués ( $\alpha_p \ll 0,01$ ).

Pour pallier ces limitations, d'autres travaux ont été initiés. Ainsi, des modèles à deux fluides et deux pressions ont été développés. Basés sur le modèle proposé par Baer & Nunziato (1986) pour traiter les ondes de détonation dans les explosifs granulaires, ces modèles permettant la simulation d'écoulements multiphasiques compressibles. Ils sont constitués de 3 équations de conservation classiques appliquées à chaque phase du système, auxquelles s'ajoute une équation d'évolution de la fraction volumique, nécessaire pour fermer le système (Saurel & Abgrall, 1999). Chaque phase est caractérisée par une loi de pression  $P_k = P_k(\rho_k, e_k)$  et il existe des termes interfaciaux de pression ( $P_I$ ) et de vitesse ( $V_I$ ). Les différentes hypothèses et opérations de moyenne effectuées ne permettant pas d'écrire rigoureusement ces termes, ils sont modélisés selon des choix réalistes et raisonnables, selon les applications ; voir par exemple Saurel & Le Métayer (2001) et Gallouët *et al* (2004).

<sup>2</sup> Le gaz d'un côté et le liquide contenu dans les gouttes de l'autre.

## 2.3 Approche cinétique

Des modèles s'appuyant sur la théorie cinétique des milieux granulaires secs (Jenkins & Savage, 1983) ont été développés pour des écoulements diphasiques denses. Le mécanisme prédominant considéré est cette fois celui des collisions inter particules. Ces modèles sont donc valables pour des écoulements diphasiques très denses ( $\alpha_p > 0,1$ ), lorsque l'influence du gaz sur les particules est négligeable (Lun *et al*, 1984 ; Ding & Gidaspow, 1990).

La forte analogie qui existe entre le mouvement des particules dans un écoulement turbulent et celui des molécules dans un gaz (à l'échelle microscopique) a également poussé certains auteurs à appliquer aux particules une approche utilisée en théorie cinétique des gaz (Chapman & Cowling, 1939). Le nuage de particules est alors traité comme un milieu continu, à l'instar des molécules d'un gaz. On peut citer par exemple Morioka et Nakajima (1987), Reeks (1991), Zaichik & Vinberg (1991) et Simonin (1991).

La phase dispersée est décrite par une fonction de densité de probabilité (pdf). L'équation de transport de cette pdf particulaire est analogue à l'équation de Boltzmann. Les équations continues pour la phase dispersée sont obtenues par une opération de moyenne de cette équation cinétique. Les hypothèses de fermeture du système d'équations sont dérivées en supposant que la taille des particules reste très petite par rapport à l'échelle de longueur des variations de l'écoulement moyen.

Cette approche statistique est très riche car elle permet de prendre en compte les interactions avec le fluide (Zhang & Prosperetti, 1994 et 1997) ainsi que de nombreux phénomènes physiques tels que la turbulence du fluide et les corrélations fluide/particules (Simonin, 2000), les collisions particule/particule (Laviéville *et al*, 1997 ; Gourdel *et al*, 1998) et particule/paroi (Sakiz & Simonin, 1999 ; Sakiz, 1999).

Néanmoins, la difficulté de cette méthode réside dans l'estimation de la vitesse du fluide turbulent à la position de la particule. Plusieurs méthodes ont été développées dans le cadre des approches Euler/Lagrange pour représenter la turbulence du fluide le long des trajectoires des particules (Berlemont *et al*, 1990). A partir de ces travaux, Simonin (1996) a proposé une extension de l'approche utilisant une équation de Langevin. Néanmoins, cette approche, dérivée des modèles lagrangiens stochastiques monophasiques, ne permet pas de prendre en compte la corrélation spatiale de l'écoulement fluide vu par les particules, qui joue un rôle important dans la distribution instantanée des particules à faible inertie (temps de relaxation comparable à l'échelle de temps de Kolmogorov) et conduit à une mauvaise prédiction des interactions particule/particule. C'est pourquoi des méthodes de simulations numériques type DNS ou LES sont parfois couplées aux modèles issus de l'approche statistique. Ainsi le champ fluide turbulent local instantané "vu" par les particules est exactement celui donné par la DNS, ou par une technique de LES si le temps de relaxation des particules est plus grand que l'échelle caractéristique de sous maille. L'utilisation de ces techniques, couplée à une approche statistique permet de valider les modèles de fermeture utilisés (Laviéville *et al*, 1997 ; Simonin *et al*, 1997 ; Wang *et al*, 1998) et également d'effectuer des simulations plus précises permettant de mieux comprendre les caractéristiques des écoulements diphasiques (Boivin *et al*, 2000 ; Février *et al*, 2001).

Le couplage des techniques de LES (ou DNS) avec l'approche statistique pour la phase dispersée est la méthode de modélisation dite LES/LES (ou DNS/LES) (Pandya & Mashayek, 2002). Dans ce cas, l'équation cinétique de la phase dispersée est filtrée et les équations continues sont obtenues en prenant les premiers moments de l'équation cinétique filtrée. Des relations de fermeture sont ensuite utilisées pour les termes de sous maille de l'équation cinétique filtrée, et pour les moments d'ordre supérieur.

Cependant, cette méthode ne permet pas de prendre en compte le mouvement spatialement décorréolé des particules. En effet, Février a mis en évidence durant ses travaux de thèse que dans un écoulement diphasique, des particules venant de régions différentes de l'écoulement peuvent se retrouver très proches l'une de l'autre tout en ayant des vitesses différentes (Février, 2000). Cette constatation est à l'origine de nombreux et récents travaux qui ont permis de développer une

nouvelle approche statistique (Février *et al*, 2005), basée sur une décomposition de la vitesse particulaire instantanée en une contribution spatialement corrélée, due au champ de vitesse fluide sous-jacent, et une contribution indépendante non corrélée.

Cette approche, appelée Formalisme Eulérien Mésoscopique (MEF) et présentée au paragraphe 4, a été retenue dans le cadre de nos travaux de thèse. Elle nous a permis d'établir deux modèles diphasiques à pression particulaire, notés SPPM et CPPM (cf. Figure 3- 1). Auparavant, nous allons établir dans le paragraphe 3 les équations régissant le comportement d'une particule isolée dans un champ fluide. Ces équations seront ensuite utilisées pour décrire l'évolution d'un nuage de particules.

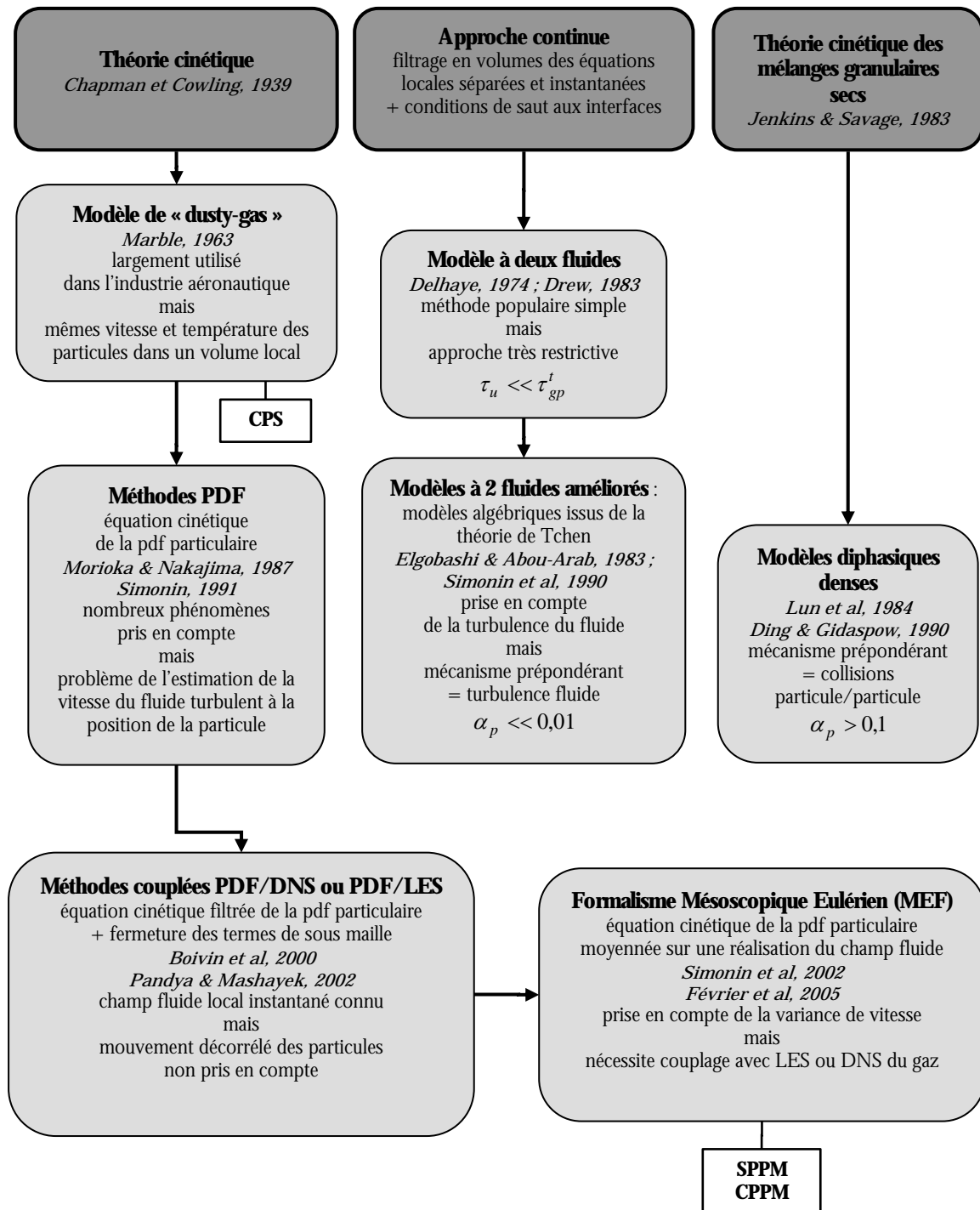


Figure 3- 1 : La modélisation eulérienne d'une phase dispersée, de la théorie cinétique au MEF.

### 3. Equations d'évolution d'une particule

Dans les écoulements diphasiques dilués, les particules sont supposées interagir faiblement. La mise en équations des grandeurs moyennes de la phase dispersée peut donc s'appuyer sur une description microscopique lagrangienne de la dynamique de particules isolées et de leurs interactions avec le champ fluide environnant. Des lois de comportement macroscopiques adaptées au régime de l'écoulement considéré sont ainsi obtenues.

Rappelons brièvement les hypothèses effectuées sur les caractéristiques des écoulements diphasiques considérés dans notre étude : la phase dispersée est supposée constituée de particules sphériques, rigides, de même diamètre et de même masse volumique (H1). Ces particules sont considérées inertes (H2) et les effets des collisions inter particules sont négligés (H3). Enfin, on suppose que les particules sont soumises à la seule force de traînée du gaz (H4).

#### 3.1 Equation d'évolution de la masse d'une particule

La variation de la masse d'une particule est due au flux de masse émis par évaporation, qui est généralement déterminé par le procédé de diffusion à travers le mélange gazeux environnant. Dans notre cas, l'hypothèse de particules inertes (H2) simplifie grandement l'équation d'évolution de la masse d'une particule,  $m_p$ , puisque celle-ci reste constante :

$$\frac{dm_p}{dt} = 0 \quad (3.1)$$

#### 3.2 Equation d'évolution de la quantité de mouvement d'une particule

Compte tenu de l'hypothèse H4, la seule force traduisant les interactions de la particule avec le champ fluide extérieur est la force de traînée :

$$m_p \frac{d}{dt} \mathbf{u}_p^{(m)} = \mathbf{F}_p \quad (3.2)$$

Pour une sphère rigide (H1) de densité nettement supérieure à celle du fluide, cette force de traînée est bien approchée par l'expression suivante :

$$\mathbf{F}_p = -\frac{m_p}{\tau_u} \left( \mathbf{u}_p^{(m)} - \hat{\mathbf{u}}_{g@p} \right) \quad (3.3)$$

$\hat{\mathbf{u}}_{g@p}$  est la vitesse du fluide "vu" par la particule *ie* la vitesse du fluide localement non perturbé par la présence de la particule (Gatignol, 1983 ; Maxey & Riley, 1983). Ce champ fluide est obtenu en remplaçant la particule étudiée par du fluide, évidemment sans modifier le mouvement des autres particules. Notons que cette distinction permet de définir  $\hat{\mathbf{u}}_{g@p}(\mathbf{x}_p(t))$ , la vitesse du fluide à l'emplacement de la particule  $\mathbf{x}_p(t)$  ; ce qui est impossible autrement puisqu'il n'y a pas de fluide à l'emplacement de la particule...

$\tau_u$  est le temps de relaxation dynamique de la particule défini par :

$$\frac{1}{\tau_u} = \frac{3}{4} \frac{\rho_{gaz}}{\rho_p} \frac{C_D}{d_p} \|\mathbf{v}_r\| \quad (3.4)$$

$\rho_p$  et  $\rho_{gaz}$  sont respectivement la masse volumique de la phase dispersée et de la phase continue.  $d_p$  représente le diamètre (constant) d'une particule.  $\mathbf{v}_r = \mathbf{u}_p^{(m)} - \hat{\mathbf{u}}_{g@p}$  est la vitesse relative instantanée entre la particule, de vitesse  $\mathbf{u}_p^{(m)}$ , et le fluide localement non perturbé, de vitesse  $\hat{\mathbf{u}}_{g@p}$ . Le coefficient de traînée  $C_D$ , pour « drag », est donné par la relation empirique de Schiller & Nauman (1935) :

$$C_D = \max \left\{ \frac{24}{\text{Re}_p} \left( 1 + 0,15 \text{Re}_p^{0,687} \right); 0,445 \right\} \quad (3.5)$$

$\text{Re}_p$  est le nombre de Reynolds particulaire défini par :

$$\text{Re}_p = \frac{\|\mathbf{v}_r\| d_p}{\nu_{gaz}} \quad (3.6)$$

où  $\nu_{gaz}$  est la viscosité de la phase gazeuse.

Dans le cas particulier des petits nombres de Reynolds particulaires, l'approximation de Stokes est valide, i.e.  $C_D \cong 24 / \text{Re}_p$ . Le temps de relaxation cinétique s'écrit alors simplement :

$$\tau_u^s = \frac{\rho_p d_p^2}{18\mu_{gaz}} \quad (3.7)$$

### 3.3 Equation d'évolution de la température d'une particule

Compte tenu de l'absence de source de chaleur due aux champs externes (radiations par exemple) et de l'absence de variation de la masse d'une particule (H1), seuls les transferts de chaleur dus à la présence de la particule dans la phase gazeuse sont pris en compte. L'équation d'évolution de la température de la particule,  $T_p^{(m)}$ , se réduit donc à :

$$m_p \frac{d}{dt} T_p^{(m)} = - \frac{m_p}{\tau_H} (T_p^{(m)} - T_{gaz}) \quad (3.8)$$

$\tau_H$  est le temps de relaxation thermique des particules, défini par :

$$\tau_H = \frac{\rho_p C_{p,p} d_p^2}{6 \lambda_{gaz} Nu} \quad (3.9)$$

$\lambda_{gaz}$  est la conductivité thermique de la phase gazeuse et  $Nu$  est le nombre de Nusselt qui peut être déterminé par la corrélation suivante :

$$Nu = 2 + 0,55 \text{Re}_p^{1/2} \text{Pr}^{1/3} \quad (3.10)$$

avec le nombre de Prandtl défini par :

$$\text{Pr} = \frac{\rho_{gaz} \nu_{gaz} C_{p,gaz}}{\lambda_{gaz}} \quad (3.11)$$

Dans l'hypothèse de Stokes, le temps de relaxation thermique  $\tau_H$  peut s'écrire :

$$\tau_H^s = \frac{3}{2} \frac{C_{p,p}}{C_{p,gaz}} \text{Pr} \tau_u^s \quad (3.12)$$

## 4. Le Formalisme Eulérien Mésoscopique (MEF)

Le formalisme eulérien impose de définir le champ de vitesse local instantané de la phase dispersée. La méthode la plus courante consiste à effectuer une moyenne volumique. Cette approche suppose que les particules présentes dans un volume donné possèdent des vitesses égales. Or, il est toujours possible d'avoir, au même instant, deux particules à la fois très proches l'une de l'autre et ayant des vitesses très différentes (Février, 2000).

Lorsque la phase porteuse est turbulente, ces différences de vitesse peuvent s'expliquer par la présence de structures tourbillonnaires d'échelles variables. Ainsi, si les particules sont suffisamment inertielles, elles peuvent arriver au même endroit de l'écoulement tout en ayant gardé en mémoire les autres structures éloignées et indépendantes rencontrées auparavant (Abrahamson, 1975). Dans le cas limite de particules très fortement inertielles dans un écoulement turbulent, le mouvement des particules devient chaotique avec une distribution spatiale aléatoire des vitesses (Février *et al*, 2005). Notons que si le mouvement des particules était complètement analogue au mouvement moléculaire d'un système dilué, alors les positions des particules (en plus des vitesses) seraient décorréelées, et la distribution de vitesse serait gaussienne.

Dans notre cas, et même si l'écoulement gazeux est supposé "laminaire", cette variance de vitesse existe également. Elle peut être due :

- aux conditions d'injection qui peuvent varier en temps et en espace,
- au caractère instationnaire de l'injection (rugosité de la paroi du propergol en combustion),
- aux conditions de symétrie de l'injection et de l'écoulement,
- aux interactions avec les parois,
- aux interactions avec les gradients de vitesse du champ fluide (grosses structures tourbillonnaires existantes dans la chambre de combustion d'un MPS et issues du Vortex Shedding).

La modélisation des corrélations entre les vitesses de particules voisines est très importante pour représenter précisément les effets des collisions inter particules (Laviéville *et al*, 1997 ; Sommerfeld, 1999). Elle est également considérée par Simonin *et al* (2002) comme un point clé dans le mécanisme de modulation de la turbulence par les particules. Plus modestement, cette modélisation de la corrélation spatiale de vitesse particulaire va nous permettre de supprimer le défaut intrinsèque du modèle diphasique eulérien actuel de CPS.

L'approche statistique développée par Février *et al* (2005), présentée au paragraphe suivant, s'efforce de prendre en compte cette variance de vitesse. L'objectif est de fournir un formalisme théorique permettant d'estimer séparément le champ continu spatialement corrélé et la distribution aléatoire décorrélée.

### 4.1 Théorie

Dans les écoulements diphasiques dilués, les corrélations spatiales du mouvement de la phase dispersée sont supposées induites par les interactions des particules avec le champ fluide environnant. Cette hypothèse est fondamentale pour bâtir le formalisme théorique eulérien mésoscopique (MEF). Aussi, les écoulements denses sont exclus de ce type de modélisation : les interactions entre particules, que ce soit les effets hydrodynamiques ou les collisions inter particulaires, peuvent aussi conduire à des distributions de vitesse particulaire spatialement corrélées.

Puisque nous supposons que les interactions avec le fluide sont seules responsables des éventuelles corrélations de vitesse pour la phase dispersée, il est approprié de considérer un opérateur de moyenne conditionné par une réalisation donnée de l'écoulement fluide, notée  $H_f$ . Ainsi, les quantités définies à partir de ce champ fluide fixé seront locales et instantanées, à l'instar du champ de vitesse fluide instantané.

En outre, un comportement chaotique est attribué aux particules inertielles d'une phase dispersée en interaction avec une réalisation donnée de l'écoulement gazeux turbulent (Wang *et al*, 1990 et 1991). Il est donc possible d'envisager un grand nombre de réalisations  $H_p$  de la phase dispersée, qui présentent des conditions initiales légèrement différentes tout en menant aux mêmes statistiques au bout d'un temps fini (pour une réalisation donnée du champ fluide  $H_f$ ).

Enfin, il est nécessaire de définir  $W_p^{(m)}$ , ou « refined-grid pdf » (Reeks, 1991), qui correspond à une réalisation en temps, de position et de vitesse d'une particule  $m$ , pour une réalisation de la phase dispersée, pour un écoulement fluide  $H_f$  donné :

$$W_p^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{C}_p, t, H_p | H_f) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p^{(m)}(t)) \delta(\mathbf{C}_p - \mathbf{u}_p^{(m)}(t)) \quad (3.13)$$

où  $\delta(a)$  est la fonction Dirac. L'application à  $W_p^{(m)}$  d'une moyenne d'ensemble sur toutes les réalisations de l'écoulement particulaire, pour  $\mathbf{x}$ ,  $t$  et  $H_f$  donnés, permet de définir la fonction de densité de probabilité de la phase dispersée  $\tilde{f}_p^{(1)}$  (Février *et al*, 2005) par :

$$\tilde{f}_p^{(1)}(\mathbf{C}_p; \mathbf{x}, t, H_f) = \lim_{N_p \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{N_p} \sum_{N_p} \sum_{m=1}^{N_p} W_p^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{C}_p, t, H_p | H_f) \right] \quad (3.14)$$

où  $N_p$  est le nombre (constant) de particules dans une réalisation quelconque et  $N_p$  représente le nombre de réalisations de l'écoulement particulaire. Ainsi,  $\tilde{f}_p^{(1)}(\mathbf{C}_p; \mathbf{x}, t, H_f) d\mathbf{C}_p$  représente le nombre moyen de particules au temps  $t$ , avec un centre de masse positionné en  $\mathbf{x}$ , ayant une vitesse  $\mathbf{u}_p^{(m)} \in [\mathbf{C}_p, \mathbf{C}_p + d\mathbf{C}_p]$ , pour la réalisation considérée de l'écoulement fluide  $H_f$ .

Le premier moment représente la densité particulaire locale et instantanée :

$$\tilde{n}_p^{(1)} = \int \tilde{f}_p^{(1)}(\mathbf{C}_p, \mathbf{x}, t, H_f) d\mathbf{C}_p \quad (3.15)$$

La vitesse locale instantanée des particules est alors définie en effectuant une moyenne sur les vitesses de phase particulières (Simonin *et al*, 2002) :

$$\tilde{\mathbf{u}}_p(\mathbf{x}, t, H_f) = \frac{1}{\tilde{n}_p^{(1)}} \int \tilde{f}_p^{(1)}(\mathbf{C}_p, \mathbf{x}, t, H_f) \mathbf{C}_p d\mathbf{C}_p \quad (3.16)$$

Le champ de vitesse défini par l'équation (3.16) est appelé **champ de vitesse mésoscopique eulérien**. Ainsi, pour une réalisation fluide  $H_f$  donnée, la vitesse instantanée  $\mathbf{u}_p^{(m)}(t)$  d'une particule  $m$  située au point  $\mathbf{x}$  au temps  $t$  peut être formellement décomposée en deux contributions :

$$\mathbf{u}_p^{(m)}(t) = \tilde{\mathbf{u}}_p(\mathbf{x}_p^{(m)}(t), t) + \delta \mathbf{u}_p^{(m)}(t) \quad (3.17)$$

La première contribution est une partie spatialement corrélée, due au champ de vitesse fluide "sous-jacent" partagé par toutes les particules à cet endroit et à cet instant. En revanche, la seconde contribution est une quantité lagrangienne, associée aux particules individuelles et définie le long

des trajectoires. Cette contribution aléatoire indépendante non corrélée augmente avec l'inertie des particules. En effet, il est logique de penser que pour des particules très faiblement inertielles, type traceurs, leurs vitesses instantanées seront très proches de celle du fluide environnant, d'où une contribution décorrélée qui tend vers zéro (Abrahamson, 1975). Au contraire, pour des particules très inertielles (avec un temps de relaxation dynamique grand devant les structures du fluide) leurs vitesses seront largement indépendantes de celle du fluide qu'elles voient. La partie non corrélée de leur vitesse sera donc prépondérante.

On introduit à présent l'opérateur de moyenne  $\langle \cdot \rangle_p$ , défini sur un grand nombre de réalisations de l'écoulement particulaire :

$$\langle g \rangle_p = \frac{\lim_{N_p \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{N_p} \sum_{N_p} \left( g^{(m)} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p^{(m)}) \right) \right]}{\lim_{N_p \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{N_p} \sum_{N_p} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p^{(m)}) \right]} \quad (3.18)$$

où  $g^{(m)}$  représente la valeur de la variable lagrangienne  $g$  de la particule  $m$ . La vitesse résiduelle  $\delta \mathbf{u}_p(t)$  précédemment introduite vérifie donc, par définition de l'opérateur statistique, la relation :

$$\langle \delta \mathbf{u}_p(t) | H_f \rangle_p = 0 \quad (3.19)$$

La pdf conditionnelle  $\tilde{f}_p^{(1)}$ , introduite dans ce formalisme mésoscopique eulérien, obéit à une équation de transport type Boltzmann ou équation cinétique (Février *et al*, 2005) qui tient compte des interactions avec le fluide et des effets des collisions inter particules :

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{f}_p^{(1)} + \frac{\partial}{\partial x_j} C_{p,j} \tilde{f}_p^{(1)} + \frac{\partial}{\partial C_{p,j}} \frac{F_{p,j}}{m_p} \tilde{f}_p^{(1)} = \left( \frac{\partial}{\partial t} \tilde{f}_p^{(1)} \right)_{coll} \quad (3.20)$$

Le terme du membre de droite traduit la modification de la pdf par les collisions inter particules. Il est négligeable pour un écoulement suffisamment dilué.  $\mathbf{F}_p$  est la force agissant sur une particule de masse  $m_p$ , définie précédemment (cf. paragraphe 3.2). L'équation de transport de la pdf devient alors :

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{f}_p^{(1)} + \frac{\partial}{\partial x_j} C_{p,j} \tilde{f}_p^{(1)} = \frac{\partial}{\partial C_{p,j}} \left( \frac{C_{p,j} - \hat{u}_{g@p,j}}{\tau_u} \tilde{f}_p^{(1)} \right) \quad (3.21)$$

D'après Kaufmann *et al* (2004), la moyenne d'ensemble  $\langle \cdot \rangle_p$  d'une quantité quelconque peut être définie par :

$$\langle \phi \rangle_p(\mathbf{x}, t, H_f) = \frac{1}{\tilde{n}_p^{(1)}} \int \tilde{f}_p^{(1)}(\mathbf{C}_p, \mathbf{x}, t, H_f) \phi d\mathbf{C}_p \quad (3.22)$$

L'application de la procédure de moyenne conditionnelle à l'équation cinétique gouvernant la pdf particulaire (3.21) donne directement l'équation de transport générale d'une fonction de l'espace des vitesses particulières  $\phi(\mathbf{C}_p)$  :

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{n}_p^{(1)} \langle \phi \rangle_p + \frac{\partial}{\partial x_j} \tilde{n}_p^{(1)} \langle \phi C_{p,j} \rangle_p = -\tilde{n}_p^{(1)} \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial C_{p,j}} \frac{C_{p,j} - \hat{u}_{g@p,j}}{\tau_u} \right\rangle_p \quad (3.23)$$



Les détails sont donnés en annexe (B). Pour des raisons de simplicité, nous ne précisons pas la dépendance des variables ci-dessus à  $H_f$ . Cette équation va nous permettre d'écrire les équations moyennées pour la phase dispersée.

## 4.2 Equations continues moyennées pour la phase dispersée

Nous allons à présent établir les équations de transport nécessaires à la modélisation des écoulements diphasiques. Pour cela, nous utilisons l'équation précédemment introduite (3.23) et nous l'appliquons à différentes fonctions  $\phi$ . Il faut noter que cette fonction  $\phi$  doit être une fonction de l'espace des phases de la particule, *ie* fonction des caractéristiques instantanées non moyennées de la particule. Pour ne pas alourdir la lecture, seules les équations principales sont données dans ce paragraphe. Le lecteur pourra trouver en annexe (B) quelques informations complémentaires sur leur obtention.

Précisons tout d'abord que la fraction volumique des particules  $\alpha_p$  peut être définie comme le produit de la densité particulaire mésoscopique et du volume d'une particule. Soit, en introduisant  $\rho_p$  la masse volumique d'une particule :

$$\alpha_p \rho_p = \tilde{n}_p^{(1)} m_p \quad (3.24)$$

### 4.2.1 Bilan de masse

Rappelons que nous négligeons les transferts de masse entre les phases (particules inertes, H2) ainsi que les échanges de masse entre particules durant les collisions (H3). L'équation de conservation de la masse est donc simplement, en posant  $\phi = m_p$  dans l'équation (3.23) :

$$\frac{\partial}{\partial t} \alpha_p \rho_p + \frac{\partial}{\partial x_j} \alpha_p \rho_p \tilde{u}_{p,j} = 0 \quad (3.25)$$

### 4.2.2 Bilan de quantité de mouvement

L'équation (3.23) devient, en posant  $\phi = m_p C_{p,i}$  :

$$\frac{\partial}{\partial t} \alpha_p \rho_p \langle C_{p,i} \rangle_p + \frac{\partial}{\partial x_j} \alpha_p \rho_p \langle C_{p,i} C_{p,j} \rangle_p = -\alpha_p \rho_p \left\langle \frac{\partial C_{p,i}}{\partial C_{p,j}} \frac{C_{p,j} - \hat{u}_{g@p,j}}{\tau_u} \right\rangle_p \quad (3.26)$$

Un temps de relaxation dynamique moyen  $\tau_{gp}^F$  est introduit pour tenir compte de la dépendance non linéaire du coefficient de traînée par rapport à la vitesse relative instantanée (Simonin, 1991) :

$$\frac{1}{\tau_{gp}^F} = \left\langle \frac{1}{\tau_u} \right\rangle_p \approx \frac{3}{4} \frac{\rho_{gaz}}{\rho_p} \frac{C_D \left( \langle \text{Re}_p \rangle_p \right)}{d_p} \langle \|\mathbf{v}_r\| \rangle_p, \quad \langle \text{Re}_p \rangle_p = \langle \|\mathbf{v}_r\| \rangle_p \frac{d_p}{\nu_{gaz}} \quad (3.27)$$

Par définition des contributions corrélées et décorrélées (3.17), on a la relation suivante :

$$\langle C_{p,i} C_{p,j} \rangle_p = \tilde{u}_{p,i} \tilde{u}_{p,j} + \langle \delta u_{p,i} \delta u_{p,j} \rangle_p \quad (3.28)$$

L'équation de transport de la quantité de mouvement s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \alpha_p \rho_p \tilde{u}_{p,i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \alpha_p \rho_p \tilde{u}_{p,i} \tilde{u}_{p,j} = & -\frac{\alpha_p \rho_p}{\tau_{gp}^F} (\tilde{u}_{p,i} - \hat{u}_{g@p,i}) \\ & - \frac{\partial}{\partial x_j} \alpha_p \rho_p \langle \delta u_{p,i} \delta u_{p,j} \rangle_p \end{aligned} \quad (3.29)$$

On voit apparaître  $\langle \delta u_{p,i} \delta u_{p,j} \rangle_p = \langle \delta u_{p,i} \delta u_{p,j} | H_f \rangle_p$ , noté  $\delta \tilde{\sigma}_{p,ij}$ , qui est la composante  $ij$  du **tenseur des contraintes cinétiques mésoscopiques de la distribution de vitesse particulaire**. Ce tenseur prend en compte la partie non corrélée de la vitesse particulaire.

Le premier terme du membre de droite représente le taux de variation de la quantité de mouvement dû aux perturbations locales induites par la présence de la particule (force de traînée). Le second terme traduit l'effet du mouvement décorrélé des particules sur le mouvement corrélé. Il nécessite une loi de fermeture.

### 4.2.3 Bilan d'énergie totale

L'énergie totale particulaire  $E_p$  est définie<sup>3</sup> comme la somme de l'énergie interne :

$$e_p = C_{p,p} T_p \quad (3.30)$$

de l'énergie cinétique moyenne (liée au mouvement eulérien mésoscopique) :

$$E_c = \frac{1}{2} \tilde{u}_{p,k} \tilde{u}_{p,k} \quad (3.31)$$

et de l'énergie cinétique fluctuante (liée au mouvement décorrélé des particules) :

$$\delta \theta_p = \frac{1}{2} \langle \delta u_{p,k} \delta u_{p,k} \rangle_p \quad (3.32)$$

soit :

$$E_p = e_p + E_c + \delta \theta_p = C_{p,p} T_p + \frac{1}{2} \tilde{u}_{p,k} \tilde{u}_{p,k} + \frac{1}{2} \langle \delta u_{p,k} \delta u_{p,k} \rangle_p \quad (3.33)$$

Pour établir l'équation de transport de cette énergie totale, nous devons d'abord écrire l'équation de conservation de chacune des énergies (interne, moyenne et fluctuante). La température étant considérée comme une variable moyenne, l'équation continue moyennée pour la température du nuage de particules s'écrit directement. L'équation de transport de l'énergie cinétique fluctuante des particules est obtenue en posant  $\phi = m_p C_{p,i} C_{p,j}$  dans l'équation de base (3.23) et en utilisant l'équation de transport de la quantité de mouvement (les détails des calculs sont donnés en annexe B) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \alpha_p \rho_p \delta \theta_p + \frac{\partial}{\partial x_j} \alpha_p \rho_p \tilde{u}_{p,j} \delta \theta_p = & -\frac{\partial}{\partial x_j} \alpha_p \rho_p \frac{\langle \delta u_{p,i} \delta u_{p,i} \delta u_{p,j} \rangle_p}{2} \\ & - \frac{\alpha_p \rho_p}{\tau_{gp}^F} 2 \delta \theta_p - \alpha_p \rho_p \langle \delta u_{p,i} \delta u_{p,j} \rangle_p \frac{\partial \tilde{u}_{p,i}}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (3.34)$$

<sup>3</sup> On notera que cette définition de l'énergie totale particulaire est différente de celle utilisée dans le modèle de base de CPS et présentée au chapitre 2.

Le premier terme du membre de droite représente le transport des contraintes cinétiques par le mouvement décorrélé des particules. Le deuxième est un terme de destruction : le mouvement décorrélé est dissipé par le frottement de la traînée visqueuse. La dernière contribution est un terme de production dû aux interactions entre les contraintes cinétiques et le mouvement moyen.

L'équation de transport de l'énergie totale particulaire est :

$$\frac{\partial}{\partial t} \alpha_p \rho_p E_p + \frac{\partial}{\partial x_j} \alpha_p \rho_p \tilde{u}_{p,j} E_p = - \frac{\partial}{\partial x_j} \alpha_p \rho_p \frac{\langle \delta u_{p,i} \delta u_{p,i} \delta u_{p,j} \rangle_p}{2} \quad (\text{I}) \quad (3.35)$$

$$- \frac{\partial}{\partial x_j} \alpha_p \rho_p \tilde{u}_{p,i} \langle \delta u_{p,i} \delta u_{p,j} \rangle_p \quad (\text{II})$$

$$- \alpha_p \rho_p \tilde{u}_{p,i} \frac{\tilde{u}_{p,i} - \hat{u}_{g@p,i}}{\tau_{gp}^F} - \frac{\alpha_p \rho_p}{\tau_{gp}^F} 2\delta\theta_p \quad (\text{III})$$

$$- \alpha_p \rho_p \frac{(T_p - T_{gaz})}{\tau_H} \quad (\text{IV})$$

Les premiers termes du membre de droite représentent respectivement la puissance des contraintes cinétiques entraînées par les mouvements décorrélé (I) et moyen (II) des particules. Les termes (III) traduisent la puissance de la force de traînée. Le dernier terme (IV) représente la puissance des échanges de chaleur entre phases, dus aux perturbations locales introduites par la présence de la particule.

Les équations continues moyennées pour la phase dispersée sont données par les équations (3.25), (3.29) et (3.35). Ces équations, obtenues dans le cadre du formalisme eulérien mésoscopique, peuvent être filtrées en volume, de façon à tenir compte des échelles de sous maille non résolues (Kaufmann *et al.*, 2004). Cette technique de LES est présentée au paragraphe suivant.

## 4.3 Approche LES

### 4.3.1 Principe

Le champ de vitesse particulaire mésoscopique eulérien est une variable transportée, solution des équations de transport des premiers moments de la pdf conditionnelle. Par analogie avec le gaz, on peut utiliser une approche type LES pour caractériser le champ de vitesse instationnaire des particules (cf. Figure 3- 2).

Les équations utilisées pour la LES sont obtenues en filtrant les équations de Navier Stokes instationnaires (Piomelli, 2004), soit par une analyse spectrale de Fourier, soit par la configuration spatiale physique (maillage). Cette procédure de filtrage permet de décomposer une variable  $\varphi$  caractéristique de l'écoulement en une quantité calculée  $\overline{\varphi}$  et une quantité modélisée  $\varphi'$ .

La concentration particulaire n'étant pas homogène (zones de concentration préférentielle par exemple) les quantités sont filtrées par une moyenne pondérée par la fraction volumique, semblable à la moyenne de Favre pour les gaz compressibles, c'est-à-dire :

$$\hat{\varphi} = \frac{\overline{\alpha_p \varphi_p}}{\overline{\alpha_p}} \quad (3.36)$$

Dans le cas de la phase dispersée, les équations constitutives de la technique LES s'écrivent alors pour la masse et la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{\alpha_p} + \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{\alpha_p} \hat{u}_{p,j} = 0 \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \bar{\alpha}_p \rho_p \hat{u}_{p,i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{\alpha}_p \rho_p \hat{u}_{p,i} \hat{u}_{p,j} = & - \frac{\bar{\alpha}_p \rho_p}{\tau_{gp}^F} (\hat{u}_{p,i} - \hat{u}_{g@p,i}) \\
 & - \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{\alpha}_p \rho_p \delta \hat{\sigma}_{p,ij} \\
 & - \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{\alpha}_p \rho_p T_{p,SGS,ij}
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

Le signe  $\hat{\cdot}$  lié au champ mésoscopique eulérien a été omis sur les variables de l'écoulement pour une meilleure lisibilité des équations. L'équation de quantité de mouvement filtrée fait apparaître le tenseur de contrainte de sous maille  $\overline{T}_{p,SGS}$  qui s'écrit :

$$\overline{T}_{p,SGS,ij} = \widehat{u_{p,i} u_{p,j}} - \hat{u}_{p,i} \hat{u}_{p,j} \tag{3.39}$$

Ce terme tient compte des effets des échelles de sous maille sur la quantité de mouvement particulière mésoscopique filtrée. Il s'agit alors de modéliser ce terme en fonction des inconnues du problème. Moreau *et al* (2005) ont adapté les méthodes d'approximation classique utilisées en LES fluide monophasique, largement étudiées depuis l'avènement de la DNS. En se basant sur les modèles de turbulence de sous maille, le tenseur de contrainte particulière aux échelles de sous maille est divisé en parties sphérique et déviatorique :

$$\bar{\alpha}_p \rho_p T_{p,SGS,ij} = P_{p,SGS} \delta_{ij} - \mu_{p,SGS} S_{p,ij}^* \tag{3.40}$$

avec :

$$S_{p,ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \hat{u}_{p,i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u}_{p,j}}{\partial x_i} \right) \text{ et } S_{p,ij}^* = S_{p,ij} - \frac{1}{3} S_{p,kk} \delta_{ij} \tag{3.41}$$

Les modèles développés pour le fluide sont ensuite adaptés à la phase dispersée. Le terme de pression particulière de sous maille est paramétré selon le modèle de Yoshizawa, 1986 (cité dans Riber *et al*, 2005), tandis que la partie déviatorique est modélisée en utilisant une hypothèse de viscosité (type modèle compressible de Smagorinsky). Des tests de simulation de turbulence décroissante libre ont validé ces hypothèses et ont montré que les coefficients constants utilisés dans les modèles de viscosité fluide<sup>4</sup> semblaient, en première approche<sup>5</sup>, être du même ordre de grandeur que ceux du modèle de sous maille particulière (Moreau *et al*, 2005).

### 4.3.2 Modélisation retenue pour notre étude

Dans un premier temps, nous considérons que l'opération de filtrage de la technique LES est implicitement réalisée par la discrétisation spatiale du maillage. L'application de cette technique aux équations de la phase dispersée impose de tenir compte de termes de sous maille supplémentaires. Le tenseur de sous maille ainsi introduit (3.40) n'est certainement pas négligeable dans toutes les applications diphasiques. Néanmoins, dans le cadre de nos travaux, nous avons décidé de négliger ce terme, pour diverses raisons.

D'abord, les simulations effectuées durant cette thèse portent sur des écoulements dilués où l'inertie des particules est prédominante. Il est donc *a priori* justifié de supposer que celles-ci sont influencées de préférence par des forces inertielles plutôt que par l'influence des structures de sous maille. Le tenseur des contraintes cinétiques qui découle de l'inertie particulière semble donc prédominant.

<sup>4</sup> Rappelons que les valeurs de ces constantes ne sont pas universelles.

<sup>5</sup> Les constantes devraient *a priori* être dépendantes des caractéristiques de la phase dispersée, comme le diamètre des particules par exemple.

Rappelons ensuite que la turbulence de la phase gazeuse n'est pas explicitement simulée dans nos calculs (cf. chapitre 2). L'utilisation d'une technique de LES pour la phase dispersée semble donc d'un intérêt limité.

Enfin, le système d'équations obtenu pour la phase dispersée a pour but d'être, à terme, implanté dans le code de mécanique des fluides CPS. Or, le modèle diphasique eulérien de ce code ne comporte à l'origine ni pression particulaire, ni termes visqueux. Ainsi, négliger le tenseur de sous maille permet de simplifier le système d'équations diphasiques et donc les développements numériques associés. En résumé, l'intégration d'une nouvelle modélisation diphasique dans CPS impose de procéder par étapes. L'introduction d'un terme de pression particulaire (cf. chapitre 4) représente la première phase de cette démarche. La prise en compte de la turbulence de la phase gazeuse et des termes de sous maille sera éventuellement réalisée ultérieurement.

La validité de cette hypothèse sera étudiée *a posteriori*, lorsque le code CPS disposera d'un modèle eulérien incluant le tenseur des contraintes cinétiques mésoscopiques  $\overline{\overline{\delta\sigma_p}}$ . Nous serons alors en mesure de comparer les ordres de grandeur de ce tenseur et de celui des contraintes de sous maille  $\overline{T_{p,SGS}}$  (cf. chapitre 7).

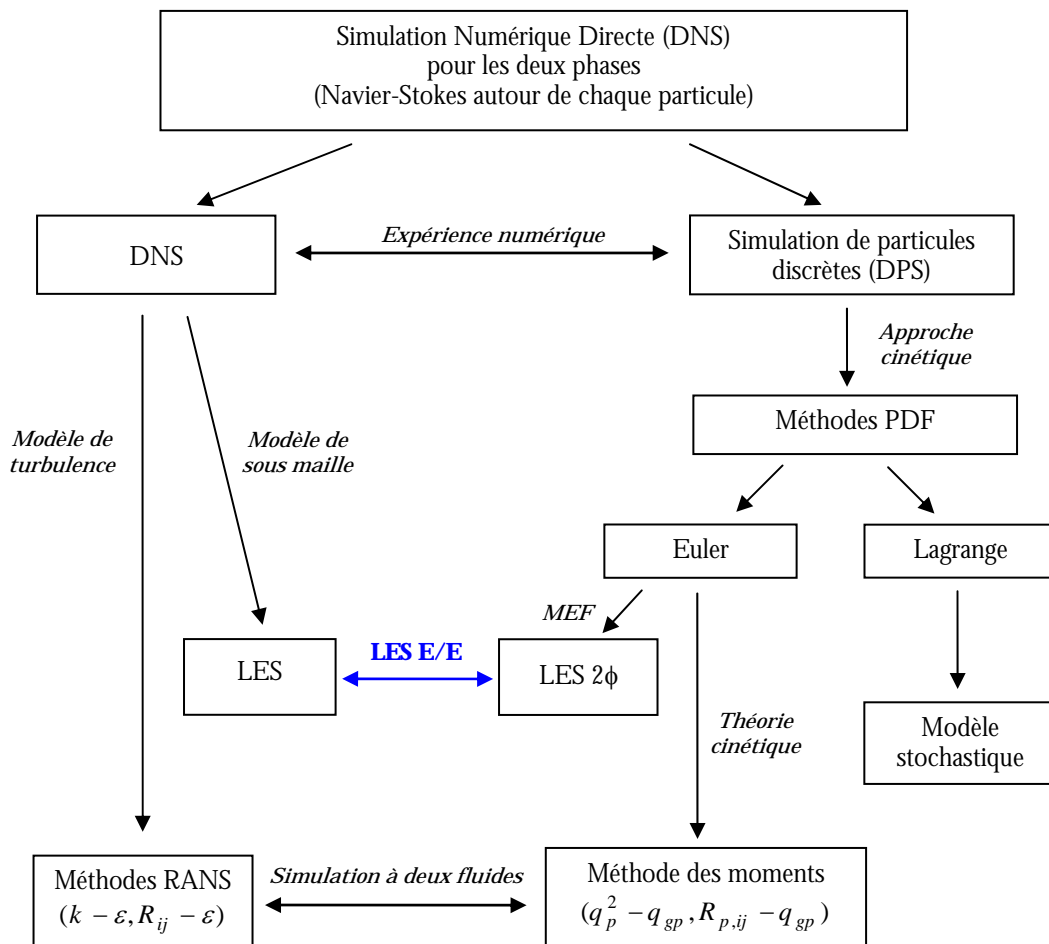


Figure 3-2 : Différentes approches pour les simulations diphasiques gaz/particules

## 5. Conclusion

En conclusion, le formalisme mésoscopique eulérien a permis de construire un système d'équations diphasiques qui traduit l'influence de l'inertie des particules via un tenseur des contraintes cinétiques particulaire.

Il nous faut tout de même préciser que les écoulements que nous considérons dans cette thèse ne vérifient pas exactement les hypothèses liées à ce formalisme théorique. En effet, encore une fois, la phase gazeuse n'est pas considérée turbulente. Dans le cas du TEP, propulseur fictif cylindrique (cf. chapitre 2), l'écoulement est même laminaire stationnaire. De plus, dans nos simulations, les conditions d'injection des particules sont déterministes. Malgré cette apparente simplicité des écoulements étudiés, le formalisme mésoscopique eulérien peut s'appliquer. En effet, la turbulence du fluide n'est pas nécessaire pour écrire les équations de bilan qui découlent de l'équation (3.23). Seule la définition de l'opérateur de moyenne par rapport à une réalisation donnée du fluide est nécessaire, quelle que soit cette réalisation.

D'autre part, même si l'écoulement diphasique est simple (au sens peu perturbé ou peu complexe) les simulations lagrangiennes réalisées sur le TEP (cf. chapitre 2) ont montré que des particules pouvaient être au même endroit tout en possédant des vitesses différentes. Evidemment, les valeurs possibles de ces vitesses particulières sont peu nombreuses (cf. Figure 2-19 et Figure 2-20) et la distribution de vitesses obtenue est loin d'être gaussienne. Néanmoins, les équations moyennées peuvent s'écrire à partir du MEF.

Ajoutons enfin que la contribution résiduelle  $\delta \mathbf{u}_p^{(m)}(t)$ , définie comme spatialement décorrélée et aléatoire dans le MEF (Février *et al.*, 2005 ; Simonin *et al.*, 2002) ne peut être qualifiée ainsi dans nos travaux. En effet, dans un écoulement aussi peu perturbé que celui présent dans le TEP, les vitesses des particules sont définies en grande partie par les positions de ces dernières dans l'écoulement. Nous parlerons donc de préférence de **fluctuation** de vitesse lagrangienne.

Le système d'équations défini par les équations (3.25), (3.29) et (3.35) est très proche de celui obtenu dans le cadre de l'approche à deux fluides classiques. Il faut toutefois prendre garde à la définition du champ de vitesse de la phase gazeuse. Dans l'approche MEF, les équations établies gouvernent des propriétés locales instantanées moyennées de la phase dispersée, pour une réalisation du champ fluide. Le champ de vitesse du fluide est donc le champ eulérien local instantané, non concerné par l'opérateur de moyenne. Ce champ de vitesse est donné par une simulation numérique directe de l'écoulement turbulent, ou bien par une simulation aux grandes échelles si les particules inertielles ont un temps de relaxation plus grand que l'échelle caractéristique de sous maille.

Dans nos simulations, nous considérons le champ fluide eulérien simulé  $\hat{\mathbf{u}}_g$ , solution des équations de Navier-Stokes. Si le fluide est laminaire, ce champ simulé contient toutes les informations nécessaires pour représenter l'écoulement diphasique. En revanche, si l'écoulement est turbulent, cela revient à négliger la fluctuation de vitesse de sous maille du fluide  $\delta \mathbf{u}_{g,SGS}$  et les termes associés.

Ainsi, l'influence du tenseur de sous maille sur le mouvement des particules n'est pas considéré ; ce qui est une hypothèse raisonnable tant que les temps de réponse des particules sont suffisamment grands devant les plus petites échelles de temps résolues par la LES, de sorte que les fluctuations de vitesse de sous maille vont effectivement être filtrées par l'inertie des particules. Nous insistons de nouveau sur le fait que la turbulence de l'écoulement n'est pas une condition *sine qua non* pour appliquer le formalisme mésoscopique eulérien.

En outre, l'extension à des écoulements évaporants, soumis à une force de gravité ou à d'autres forces d'interactions, ou encore présentant des termes de correction dus à la turbulence dans la force de traînée, n'est pas en conflit avec la dérivation des équations eulériennes présentées ici.

Le système d'équations obtenu grâce à ce formalisme a servi de base pour la modélisation diphasique développée durant cette thèse. Néanmoins, il fait apparaître plus d'inconnues que d'équations. La première étape consiste donc à clore ce système, à l'aide de relations de fermeture.

Ces dernières sont présentées dans le chapitre 4 suivant, ainsi que les hypothèses associées à ces relations. On y trouvera également la description des nouveaux modèles eulériens diphasiques avec pression particulaire.





# Chapitre 4

## Modèles diphasiques eulériens avec pression particulaire pour l'application aux moteurs à propergol solide

L'approche statistique utilisée dans le formalisme eulérien mésoscopique, présentée au chapitre précédent, a permis de définir un système d'équations continues pour la phase dispersée. Cette modélisation tient compte d'une partie spatialement décorrélée de la vitesse particulaire, contrairement au modèle eulérien de CPS. Néanmoins, ce système n'est pas fermé.

Le paragraphe 1 de ce chapitre présente les différentes solutions existantes pour clore ce système. La méthode retenue permet de développer deux systèmes d'équations, présentés aux paragraphes 2 et 3. Ces deux modèles sont bâtis sur plusieurs hypothèses dont la validité sera étudiée au paragraphe 5. Au préalable, une rapide analyse des différents termes du bilan de quantité de mouvement de la phase dispersée réalisée sur le TEP<sup>1</sup> permet de quantifier l'influence du tenseur des contraintes cinétiques mésoscopiques et ainsi de s'assurer de son importance dans les équations représentatives d'un nuage de particules en suspension dans un écoulement gazeux.

### 1. Clôture du système d'équations

Le système d'équations établi au chapitre précédent (Eq. 3.25, 3.29, 3.35) exhibe deux termes supplémentaires par rapport au modèle diphasique eulérien classique de CPS (cf. chapitre 2). Ces termes apparaissent lors de l'application de l'opérateur de moyenne aux termes non linéaires des équations. Il s'agit :

- du tenseur des contraintes cinétiques mésoscopiques de composantes :

$$\delta\tilde{\sigma}_{p,ij} = \left\langle \delta u_{p,i} \delta u_{p,j} \right\rangle_p$$

- du tenseur des corrélations du troisième ordre  $\delta\overline{S}_p$ , tel que :

$$\delta S_{p,ijm} = \left\langle \delta u_{p,i} \delta u_{p,j} \delta u_{p,m} \right\rangle_p$$

Pour fermer le système, ces termes doivent être soit calculés (via une équation de transport) soit modélisés.

---

<sup>1</sup> Moteur fictif cylindrique décrit au chapitre 2.

## 1.1 Relation de fermeture pour le tenseur des corrélations triples

Le calcul du terme  $\langle \delta u_{p,i} \delta u_{p,j} \delta u_{p,m} \rangle_p$  est réalisé en appliquant le processus de dérivation des équations de transport des moments à partir de l'équation cinétique de la pdf conditionnelle. L'équation de transport du tenseur des corrélations triples s'écrit à partir de l'équation de base (3.23) en posant  $\phi = m_p C_{p,i} C_{p,j} C_{p,m}$ . En utilisant les équations de transport de la quantité de mouvement et du tenseur des contraintes, il est possible après un certain nombre de manipulations<sup>2</sup> d'obtenir l'équation de transport suivante, pour chacune des composantes du tenseur triple :

$$\begin{aligned} \alpha_p \rho_p \frac{d}{dt} \delta S_{p,ijm} = & -\frac{\partial}{\partial x_n} \alpha_p \rho_p \delta Q_{p,ijmn} - \alpha_p \rho_p \left[ \delta S_{p,jmn} \frac{\partial \tilde{u}_{p,i}}{\partial x_n} + \delta S_{p,imn} \frac{\partial \tilde{u}_{p,j}}{\partial x_n} + \delta S_{p,ijn} \frac{\partial \tilde{u}_{pm}}{\partial x_n} \right] \\ & + \delta R_{p,ij} \frac{\partial}{\partial x_n} (\alpha_p \rho_p \delta R_{p,mn}) + \delta R_{p,jm} \frac{\partial}{\partial x_n} (\alpha_p \rho_p \delta R_{p,in}) + \delta R_{p,im} \frac{\partial}{\partial x_n} (\alpha_p \rho_p \delta R_{p,jn}) \quad (4.1) \\ & - \frac{3}{\tau_{gp}^F} \alpha_p \rho_p \delta S_{p,ijm} \end{aligned}$$

avec  $\delta R_{p,ij} = \langle \delta u_{p,i} \delta u_{p,j} \rangle_p$  et  $\delta Q_{p,ijmn} = \langle \delta u_{p,i} \delta u_{p,j} \delta u_{p,m} \delta u_{p,n} \rangle_p$ .

Evidemment, apparaît dans cette équation un terme de corrélation quadruple  $\delta Q_{p,ijmn}$  qu'il faut calculer à son tour, ou modéliser.

D'après les travaux de Simonin (1991), il est possible d'obtenir une loi de fermeture du tenseur de corrélation triple. D'abord le tenseur d'ordre 4 est exprimé en fonction des tenseurs d'ordre 2, à l'aide d'une approximation gaussienne :

$$\delta Q_{p,ijmn} = \delta R_{p,ij} \delta R_{p,mn} + \delta R_{p,im} \delta R_{p,jn} + \delta R_{p,in} \delta R_{p,jm} \quad (4.2)$$

De plus, l'effet des gradients de vitesse moyenne est négligé et on effectue une approximation de Grad pour les termes de corrélations triples du membre de droite de l'équation de transport précédente (Grad, 1949 cité dans Simonin, 1991). Le tenseur de corrélation triple peut alors être approximé par un modèle de diffusion des gradients (Simonin, 2000). Dans notre cas, nous obtenons l'expression suivante :

$$\delta S_{p,ijm} = -K_{p,in}^t \frac{\partial \delta R_{p,jm}}{\partial x_n} - K_{p,jn}^t \frac{\partial \delta R_{p,im}}{\partial x_n} - K_{p,mn}^t \frac{\partial \delta R_{p,ij}}{\partial x_n} \quad (4.3)$$

où le tenseur de diffusion est défini par  $K_{p,mn}^t = \frac{\tau_{gp}^F}{3} \delta R_{p,mn}$ . Cette équation peut encore être approchée par une forme plus pratique, consistante avec l'approche de Daly & Harlow (1970) :

$$\delta S_{p,ijm} = -K_{p,mn}^{t'} \frac{\partial \delta R_{p,ij}}{\partial x_n} \quad (4.4)$$

avec  $K_{p,mn}^{t'} = \frac{5}{9} \tau_{gp}^F \delta R_{p,mn}$ .

<sup>2</sup> La démonstration de ce calcul peut être trouvée dans la référence Simoes (2003).

Ce type d'approximation a été évalué par Sakiz & Simonin (1998) et Wang *et al* (1998) à partir de simulations Lagrange pour des particules dans des écoulements turbulents pleinement développés en canal vertical. Il a été démontré que l'établissement des corrélations triples nécessite un grand nombre de collisions, et que le type de modélisation précédente surestime généralement l'influence de la dispersion. Nous négligerons donc les corrélations triples :

$$\delta S_{p,ijmn} = \langle \delta u_{p,i} \delta u_{p,j} \delta u_{p,m} \rangle_p \approx 0 \quad (4.5)$$

## 1.2 Modélisation du tenseur des contraintes cinétiques mésoscopiques

Il faut à présent établir une relation de fermeture sur le tenseur des contraintes cinétiques mésoscopiques  $\overline{\delta \sigma}_p$ . Comme précédemment, l'équation cinétique de la pdf conditionnelle peut être utilisée pour dériver l'équation de transport de ce tenseur. En tenant compte de l'hypothèse (4.5), cette équation s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \alpha_p \rho_p \langle \delta u_{p,i} \delta u_{p,j} \rangle_p + \frac{\partial}{\partial x_m} \alpha_p \rho_p \tilde{u}_{p,m} \langle \delta u_{p,i} \delta u_{p,j} \rangle_p &= -\frac{2}{\tau_{gp}^F} \alpha_p \rho_p \langle \delta u_{p,i} \delta u_{p,j} \rangle_p \\ &\quad - \alpha_p \rho_p \langle \delta u_{p,i} \delta u_{p,m} \rangle_p \frac{\partial \tilde{u}_{p,j}}{\partial x_m} \\ &\quad - \alpha_p \rho_p \langle \delta u_{p,j} \delta u_{p,m} \rangle_p \frac{\partial \tilde{u}_{p,i}}{\partial x_m} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Ainsi, chaque terme est défini. Néanmoins, le calcul de chaque composante du tenseur  $\overline{\delta \sigma}_p$  impose de résoudre jusqu'à 6 équations simultanées. Le modèle diphasique eulérien actuel de CPS présentant au maximum 5 équations de transport, l'accroissement du temps de calcul et des difficultés d'intégration dû à cette méthode est manifeste. De plus, la simulation employée dans CPS pour la phase gazeuse est bien moins sophistiquée. Le tenseur des contraintes de Reynolds n'est pas calculé terme à terme : une modélisation type  $q - \omega$  est éventuellement utilisée. C'est pourquoi il est inutile et démesuré de chercher à calculer le tenseur des contraintes cinétiques mésoscopiques de la phase dispersée. La voie de la modélisation est préférable.

Le tenseur des contraintes peut se décomposer en une partie sphérique  $C \cdot \overline{I}$  et une partie déviatorique  $\overline{\delta \tau}_p$  telles que :  $\overline{\delta \sigma}_p = C \cdot \overline{I} + \overline{\delta \tau}_p$  où  $\overline{I}$  est le tenseur identité. La partie déviatorique est définie par  $tr(\overline{\delta \tau}_p) = 0$  soit  $tr(\overline{\delta \sigma}_p - C \cdot \overline{I}) = 0$ . Selon la dimension du tenseur, liée à la configuration géométrique étudiée, la partie déviatorique s'exprime de façon différente<sup>3</sup>. En effet, en 2D plan le tenseur des contraintes cinétiques n'a que deux composantes diagonales :  $\langle \delta u_p \delta u_p \rangle_p$  et  $\langle \delta v_p \delta v_p \rangle_p$ . Il n'existe pas de composante de vitesse dans la troisième dimension, donc la partie sphérique du tenseur est telle que :

$$C = \frac{1}{2} tr(\overline{\delta \sigma}_p) = \delta \theta_p \quad (4.7)$$

où on a posé comme précédemment :

<sup>3</sup> En turbulence monophasique, cette distinction géométrique n'est pas effectuée car la turbulence est souvent considérée comme un phénomène intrinsèquement tridimensionnel.

$$\delta\theta_p = \frac{1}{2} \left\langle \delta u_{p,k} \delta u_{p,k} \middle| H_f \right\rangle_p \quad (4.8)$$

La partie déviatorique, en 2D plan, est donc :

$$\delta\tilde{\tau}_{p,ij} = \left\langle \delta u_{p,i} \delta u_{p,j} \right\rangle_p - \delta\theta_p \delta_{ij} \quad (4.9)$$

Si la configuration géométrique de l'écoulement est 2D axisymétrique ou 3D, alors il existe une troisième composante diagonale, non nulle. La partie sphérique est donc telle que :

$$C = \frac{1}{3} \text{tr}(\overline{\delta\tilde{\sigma}_p}) = \frac{2}{3} \delta\theta_p \quad (4.10)$$

La partie déviatorique est cette fois définie par :

$$\delta\tilde{\tau}_{p,ij} = \left\langle \delta u_{p,i} \delta u_{p,j} \right\rangle_p - \frac{2}{3} \delta\theta_p \delta_{ij} \quad (4.11)$$

Dans le but de conserver une notation générale du tenseur des contraintes cinétiques mésoscopiques, un coefficient  $\gamma_p$  lié à la configuration géométrique étudiée est introduit. De plus, la trace de  $\overline{\delta\tilde{\sigma}_p}$  peut être interprétée comme une température, et reliée à une **pression particulaire** par une équation d'état (Kaufmann *et al.*, 2004). Ainsi, le tenseur des contraintes cinétiques mésoscopiques est tel que :

$$\alpha_p \rho_p \delta\tilde{\sigma}_{p,ij} = P_p \delta_{ij} + \alpha_p \rho_p \delta\tilde{\tau}_{p,ij} \quad (4.12)$$

Par analogie avec les équations de Navier Stokes, la pression particulaire liée au mouvement fluctuant des particules est définie par le produit de l'énergie cinétique fluctuante  $\delta\theta_p$  et de la masse volumique apparente, soit :

$$P_p = (\gamma_p - 1) \alpha_p \rho_p \delta\theta_p \quad (4.13)$$

Le coefficient  $\gamma_p$  vaut simplement 2 en 2D plan, et 5/3 sinon. Quand la distribution de particules devient non uniforme, comme dans le cas des gaz compressibles, ce terme de pression tend à homogénéiser la concentration particulaire.

La partie déviatorique  $\overline{\delta\tilde{\tau}_p}$  doit encore être modélisée. Pour cela nous effectuons une hypothèse d'équilibre de la partie anisotrope du tenseur, comme effectuée pour le tenseur des corrélations turbulentes du fluide en écoulement monophasique (Rodi, 1972 cité par Simonin, 2000). Soit :

$$\frac{d}{dt} \delta\tilde{\tau}_{p,ij} = \frac{d}{dt} \left( \left\langle \delta u_{p,i} \delta u_{p,j} \right\rangle_p - (\gamma_p - 1) \delta\theta_p \delta_{ij} \right) = 0 \quad (4.14)$$

Nous supposons également que le cisaillement est faible<sup>4</sup>, de sorte que la partie anisotrope reste petite devant la partie isotrope (les calculs sont donnés en annexe C). Cette hypothèse nous permet de modéliser la partie déviatorique du tenseur selon une hypothèse de viscosité type Boussinesq (Simonin *et al.*, 2002) :

---

<sup>4</sup> Les simulations réalisées depuis ont montré que cette hypothèse n'était pas toujours vérifiée...

$$\delta \tilde{\tau}_{p,ij} = -\nu_p S_{ij} \quad (4.15)$$

avec  $\nu_p$  le coefficient de viscosité particulaire défini par :

$$\nu_p = \frac{1}{2}(\gamma_p - 1) \tau_{gp}^F \delta \theta_p \quad (4.16)$$

et  $\overline{S}$  le tenseur des taux de déformation particulaire tel que :

$$S_{ij} = \frac{\partial \tilde{u}_{p,i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_{p,j}}{\partial x_i} - (\gamma_p - 1) \frac{\partial \tilde{u}_{p,k}}{\partial x_k} \delta_{ij} \quad (4.17)$$

Par analogie avec les équations de Navier Stokes, les éléments non diagonaux du tenseur sont donc identifiés comme des termes visqueux dus au cisaillement. En posant  $\mu_p = \alpha_p \rho_p \nu_p$ , la viscosité dynamique liée au mouvement décorrélé, on obtient donc :

$$\alpha_p \rho_p \delta \tilde{\sigma}_{p,ij} = P_p \delta_{ij} - \mu_p S_{ij} \quad (4.18)$$

Il est également bon de préciser que l'approximation de Boussinesq, basée sur l'hypothèse selon laquelle les contraintes cinétiques de cisaillement sont proportionnelles au cisaillement moyen de la phase dispersée (4.15), n'est pas satisfaisante pour les écoulements diphasiques (Wang *et al*, 1998). Il serait plus rigoureux de transporter chaque composante du tenseur particulaire des contraintes cinétiques, comme proposé par Simonin (1991). Néanmoins, cette approche nécessite également des relations de fermeture qui ne sont pas validées pour des écoulements diphasiques quelconques dans des géométries complexes. Nous nous contenterons donc, en première approche, de cette approximation.

Ajoutons enfin que l'hypothèse de Boussinesq ne permet pas d'assurer la positivité du tenseur des contraintes. Nous reviendrons sur ce problème au paragraphe suivant.

En conclusion, les équations qui serviront de base à notre étude sont :

$$\frac{\partial}{\partial t} \alpha_p + \frac{\partial}{\partial x_j} \alpha_p \tilde{u}_{p,j} = 0 \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \alpha_p \rho_p \tilde{u}_{p,i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \alpha_p \rho_p \tilde{u}_{p,i} \tilde{u}_{p,j} = & -\frac{\alpha_p \rho_p}{\tau_{gp}^F} (\tilde{u}_{p,i} - \hat{u}_{g@p,i}) \\ & - \frac{\partial}{\partial x_i} (\gamma_p - 1) \alpha_p \rho_p \delta \theta_p + \frac{\partial}{\partial x_j} (\mu_p S_{ij}) \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \alpha_p \rho_p E_p + \frac{\partial}{\partial x_j} \alpha_p \rho_p \tilde{u}_{p,j} E_p = & -\frac{\alpha_p \rho_p}{\tau_H} (T_p - T_{gaz}) - \frac{\alpha_p \rho_p}{\tau_{gp}^F} \tilde{u}_{p,i} (\tilde{u}_{p,i} - \hat{u}_{g@p,i}) \\ & - \frac{\partial}{\partial x_i} (\gamma_p - 1) \tilde{u}_{p,i} \alpha_p \rho_p \delta \theta_p + \frac{\partial}{\partial x_j} \mu_p \tilde{u}_{p,i} S_{ij} \\ & - \frac{2}{\tau_{gp}^F} \alpha_p \rho_p \delta \theta_p \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \alpha_p \rho_p \delta\theta_p + \frac{\partial}{\partial x_j} \alpha_p \rho_p \tilde{u}_{p,j} \delta\theta_p = & -\frac{\alpha_p \rho_p}{\tau_{gp}^F} 2\delta\theta_p + \mu_p S_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_{p,i}}{\partial x_j} \\ & - (\gamma_p - 1) \alpha_p \rho_p \delta\theta_p \frac{\partial \tilde{u}_{p,m}}{\partial x_m} \end{aligned} \quad (4.22)$$

La pression particulaire définie en fonction de  $\delta\theta_p$  va induire une dispersion de la fraction volumique. La partie non diagonale du tenseur  $\overline{\delta\tilde{\tau}_p}$  induira elle une dissipation du mouvement corrélé.

L'estimation de l'énergie cinétique fluctuante des particules  $\delta\theta_p$  peut être réalisée selon deux approches, proches de celles présentées dans Simonin *et al* (2002) et Kaufmann *et al* (2004). Soit on considère l'équation de transport complète de l'énergie cinétique fluctuante des particules, avec termes visqueux et termes sources (4.22), soit on considère un comportement quasi isentropique de la phase dispersée, ce qui conduit à une relation algébrique sur  $\delta\theta_p$ .

Ces deux approches sont à l'origine des deux modèles diphasiques à pression particulaire que nous avons écrits et qui seront présentés tour à tour dans les paragraphes 2.1 et 2.2 suivants.

## 2. Les modèles diphasiques à pression particulaire

### 2.1 Le modèle complet (CPPM)

#### 2.1.1 Système d'équations

Nous avons défini au paragraphe précédent un terme de pression particulaire (4.13) et nous avons modélisé la partie anisotrope du tenseur des contraintes cinétiques mésoscopiques selon une hypothèse de Boussinesq (4.15). Les équations continues moyennées régissant le comportement de la phase dispersée sont donc, d'après les hypothèses précédentes :

$$\frac{\partial}{\partial t} \alpha_p \rho_p + \frac{\partial}{\partial x_j} \alpha_p \rho_p \tilde{u}_{p,j} = 0 \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \alpha_p \rho_p \tilde{u}_{p,i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \alpha_p \rho_p \tilde{u}_{p,i} \tilde{u}_{p,j} = -\frac{\alpha_p \rho_p}{\tau_{gp}^F} (\tilde{u}_{p,i} - \hat{u}_{g@p,i}) - \frac{\partial}{\partial x_j} (P_p \delta_{ij} - \mu_p S_{ij}) \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \alpha_p \rho_p E_p + \frac{\partial}{\partial x_j} \alpha_p \rho_p \tilde{u}_{p,j} E_p = & -\frac{\alpha_p \rho_p}{\tau_H} (T_p - T_{gaz}) - \frac{\alpha_p \rho_p}{\tau_{gp}^F} \tilde{u}_{p,i} (\tilde{u}_{p,i} - \hat{u}_{g@p,i}) \\ & - \frac{\partial}{\partial x_j} \tilde{u}_{p,i} (P_p \delta_{ij} - \mu_p S_{ij}) - \frac{2}{\tau_{gp}^F} \alpha_p \rho_p \delta\theta_p \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \alpha_p \rho_p \delta\theta_p + \frac{\partial}{\partial x_j} \alpha_p \rho_p \tilde{u}_{p,j} \delta\theta_p = -\frac{\alpha_p \rho_p}{\tau_{gp}^F} 2\delta\theta_p - P_p \frac{\partial \tilde{u}_{p,m}}{\partial x_m} + \mu_p S_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_{p,i}}{\partial x_j} \quad (4.26)$$

Le terme  $-P_p \frac{\partial \tilde{u}_{p,m}}{\partial x_m}$  qui figure en terme source dans l'équation de transport de l'énergie cinétique fluctuante (4.26) est un terme convectif. Il est donc intéressant, physiquement et numériquement, de ne pas le considérer comme un terme source. Pour cela, on effectue le changement de variable suivant :

$$\lambda_p = (\alpha_p \rho_p)^{1-\gamma_p} \delta \theta_p \quad (4.27)$$

La pression particulaire de ce système s'écrit donc :

$$P_p = (\gamma_p - 1) \lambda_p (\alpha_p \rho_p)^{\gamma_p} \quad (4.28)$$

On pose  $S^2 = S_{ij} S_{ij} / 2$ , alors le système d'équations continues moyennées pour la phase dispersée s'écrit (encore une fois les détails des calculs sont donnés en annexe C) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \alpha_p \rho_p + \frac{\partial}{\partial x_j} \alpha_p \rho_p \tilde{u}_{p,j} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \alpha_p \rho_p \tilde{u}_{p,i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\alpha_p \rho_p \tilde{u}_{p,i} \tilde{u}_{p,j} + P_p \delta_{ij}) - \frac{\partial}{\partial x_j} (\mu_p S_{ij}) &= -\frac{\alpha_p \rho_p}{\tau_{gp}^F} (\tilde{u}_{p,i} - \hat{u}_{g@p,i}) \\ \frac{\partial}{\partial t} \alpha_p \rho_p E_p + \frac{\partial}{\partial x_j} \alpha_p \rho_p \tilde{u}_{p,j} \left( E_p + \frac{P_p}{\alpha_p \rho_p} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \mu_p \tilde{u}_{p,i} S_{ij} &= -\frac{\alpha_p \rho_p}{\tau_{gp}^F} \tilde{u}_{p,i} (\tilde{u}_{p,i} - \hat{u}_{g@p,i}) \\ &\quad - \frac{2}{\tau_{gp}^F} \frac{P_p}{\gamma_p - 1} \\ &\quad - \frac{\alpha_p \rho_p}{\tau_H} (T_p - T_{gaz}) \\ \frac{\partial}{\partial t} \alpha_p \rho_p \lambda_p + \frac{\partial}{\partial x_j} \alpha_p \rho_p \tilde{u}_{p,j} \lambda_p &= \left( -\frac{2}{\tau_{gp}^F} + (\gamma_p - 1) \frac{\tau_{gp}^F}{2} S^2 \right) \alpha_p \rho_p \lambda_p \end{aligned}$$

Ce système contient quatre équations : trois équations de conservation "classiques" (masse, quantité de mouvement et énergie) plus une équation de transport de l'énergie cinétique fluctuante, via  $\lambda_p$ . Rappelons que l'énergie particulaire totale est définie comme la somme de l'énergie interne et des énergies cinétique moyenne et fluctuante :  $E_p = C_{p,p} T_p + \frac{1}{2} \tilde{u}_{p,k} \tilde{u}_{p,k} + \lambda_p (\alpha_p \rho_p)^{\gamma_p - 1}$ , cf. chapitre 3, ce qui assure la fermeture du système.

Ce modèle à pression particulaire sera appelé modèle complet (CPPM<sup>5</sup>) car il présente une équation de transport sur  $\lambda_p$ , contrairement au second modèle diphasique eulérien, qui sera présenté au paragraphe suivant. Le terme de pression particulaire rend ce modèle diphasique très proche de celui du gaz : les termes convectifs des trois grandeurs classiques peuvent s'écrire de façon analogue aux équations d'Euler pour le gaz (Bird *et al*, 1960 ; Morfouace & Tissier, 1995).

L'hypothèse de viscosité effectuée pour modéliser la partie anisotrope du tenseur des contraintes cinétiques mésoscopiques fait apparaître des termes diffusifs dans les équations de quantité de mouvement et d'énergie. En outre, un terme de pression particulaire figure en terme source sur l'équation d'énergie : il traduit la contribution du mouvement fluctuant au travail de la force de traînée.

Enfin, on note qu'il n'existe pas de flux diffusif sur  $\lambda_p$  et que le terme source sur  $\lambda_p$  est la somme de deux contributions. L'une est un terme de production par les gradients de vitesse moyenne des particules, qui traduit le transfert d'énergie du mouvement moyen vers le mouvement fluctuant.

<sup>5</sup> Pour Complete Particulate Pressure Model.

Notons qu'il n'y a pas d'interaction directe avec l'écoulement fluide porteur, contrairement à l'autre contribution qui est un terme de destruction lié à l'inertie des particules. Précisons enfin que la forme des équations du CPPM assure la positivité de cette variable  $\lambda_p$ , ainsi que celle des fractions volumiques et température des particules (sous réserve de conditions initiales et aux limites physiquement admissibles).

### 2.1.2 Problème de réalisabilité

L'hypothèse de Boussinesq n'est pas nouvelle (Boussinesq, 1877), cependant elle contient intrinsèquement certains défauts (voir par exemple Chassaing, 2000). Elle modélise le tenseur des contraintes cinétiques particulières, non linéaire et d'origine convective, par une relation linéaire de type gradient. Mais surtout, elle n'assure pas la positivité du tenseur des contraintes.

Il est possible de définir des conditions de seuil, dites de réalisabilité, pour forcer le tenseur à être défini positif. Ces relations sont notamment utilisées pour les modèles de turbulence à deux équations (Aupoix, 2004). Si l'on définit une "fréquence diphasique" par la relation :

$$\omega_p = 2 / \tau_{gp}^F$$

alors, en calquant les relations écrites dans CPS pour une phase gazeuse turbulente (Godfroy, 1998), nous obtenons facilement les conditions suivantes, pour un cas bidimensionnel plan :

$$\begin{cases} \frac{2}{\tau_{gp}^F} \geq S_{xx} \\ \left( \frac{2}{\tau_{gp}^F} - S_{xx} \right) \left( \frac{2}{\tau_{gp}^F} - S_{yy} \right) \geq S_{xy}^2 \end{cases}$$

La deuxième relation peut s'écrire :

$$\frac{2}{\tau_{gp}^F} \geq \left( S_{xx} + S_{yy} + \sqrt{(S_{xx} - S_{yy})^2 + 4S_{xy}^2} \right) / 2 = S_{rr}$$

Nous devons donc avoir pour assurer la positivité du tenseur :

$$\frac{2}{\tau_{gp}^F} \geq \max(S_{xx}, S_{rr})$$

Dans les cas pratiques, c'est surtout la condition sur  $S_{rr}$  qui est contraignante. Or, dans le cas 2D plan, on peut remarquer que  $S_{xx} + S_{yy} = 0$  et  $S_{rr}^2 = S^2$ , mais surtout que si  $\frac{2}{\tau_{gp}^F} = S_{rr}$ , alors le terme source de l'équation sur  $\lambda_p$  est nul. Plus précisément, si on respecte l'inégalité de réalisabilité, alors ce terme source ne peut être que négatif, d'où une impossibilité à produire du  $\lambda_p$ . La situation est identique pour une configuration axisymétrique ou tridimensionnelle.

Finalement, si le temps de relaxation dynamique est faible,  $\lambda_p$  est détruit, et dans le cas contraire  $\lambda_p$  augmente. Mais la modélisation employée fait qu'il n'existe pas de plage où l'on puisse avoir simultanément production et réalisabilité. Cela diffère des modèles de turbulence à deux équations type  $q - \omega$  (Coakley, 1983). La différence provient de la constante  $C_\mu$ , qui est présente en turbulence monophasique, mais pas dans les systèmes à pression particulaire. Or, lorsque l'on écrit d'une part les relations de réalisabilité et d'autre part la condition d'annulation du terme source sur  $q$ , cette constante intervient. Elle apparaît directement dans les premières relations, et par sa racine



dans les secondes. Comme  $C_\mu = 0,09$  en turbulence, il existe une plage de variation de  $\omega$  où production et réalisabilité sont possibles. Avec une constante égale à 1, les mêmes équations écrites pour le CPPM empêchent toute production de  $\lambda_p$ . Or, si l'on ne produit jamais de  $\lambda_p$ , le modèle est inopérant : la pression particulaire ne pourra être que détruite, ce qui revient à utiliser la modélisation de base de CPS...

Nous ne pouvons donc pas utiliser directement les conditions de seuil pour le modèle CPPM. Nous verrons au chapitre 6 l'impact de cette modélisation sur l'intégration numérique des termes sources.

## 2.2 Le modèle simplifié (SPPM)

Le système précédent présente des différences importantes avec le modèle de CPS. Nous cherchons donc à le simplifier, pour deux raisons. Premièrement, l'implantation dans CPS d'un modèle moins complexe permettra à terme de faciliter celle du modèle complet. Ensuite, la présence du terme de pression particulaire dans les équations implique un nouveau comportement physique et numérique du modèle, qui sera plus facile à appréhender sur un modèle simplifié.

Pour cela, nous supposons que la production par cisaillement d'énergie cinétique fluctuante et la dissipation due à la traînée s'équilibrent (équilibre classique en turbulence monophasique). On a donc :

$$\frac{\partial}{\partial t} \alpha_p \rho_p \lambda_p + \frac{\partial}{\partial x_j} \alpha_p \rho_p \tilde{u}_{p,j} \lambda_p = 0 \quad (4. 29)$$

Soit, en utilisant l'équation de continuité :

$$\alpha_p \rho_p \left( \frac{\partial}{\partial t} + \tilde{u}_{p,j} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \lambda_p = \alpha_p \rho_p \frac{d}{dt} \lambda_p = 0 \quad (4. 30)$$

La grandeur  $\lambda_p$  est constante le long d'une trajectoire. L'équation de transport de cette variable peut alors être supprimée. Si cette grandeur est supposée la même dans tout le domaine de calcul, nous noterons  $\lambda$  sa valeur.

Nous considérons ensuite un comportement quasi-sphérique du tenseur des contraintes cinétiques mésoscopiques de la phase dispersée. Ce dernier se réduit alors à :

$$\alpha_p \rho_p \delta \tilde{\sigma}_{p,ij} = P_p \delta_{ij} \quad (4. 31)$$

Ce qui revient à négliger les termes visqueux issus de l'hypothèse de Boussinesq. Dans ces conditions, le système d'équations obtenu est donc :

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \alpha_p \rho_p + \frac{\partial}{\partial x_j} \alpha_p \rho_p \tilde{u}_{p,j} = 0 \\
 & \frac{\partial}{\partial t} \alpha_p \rho_p \tilde{u}_{p,i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\alpha_p \rho_p \tilde{u}_{p,i} \tilde{u}_{p,j} + P_p \delta_{ij}) = -\frac{\alpha_p \rho_p}{\tau_{gp}^F} (\tilde{u}_{p,i} - \hat{u}_{g@p,i}) \\
 & \frac{\partial}{\partial t} \alpha_p \rho_p E_p + \frac{\partial}{\partial x_j} \alpha_p \rho_p \tilde{u}_{p,j} \left( E_p + \frac{P_p}{\alpha_p \rho_p} \right) = -\frac{\alpha_p \rho_p}{\tau_{gp}^F} \tilde{u}_{p,i} (\tilde{u}_{p,i} - \hat{u}_{g@p,i}) - \frac{2}{\tau_{gp}^F} \frac{P_p}{\gamma_p - 1} \\
 & \quad - \frac{\alpha_p \rho_p}{\tau_H} (T_p - T_{gaz})
 \end{aligned}$$

La pression particulaire est définie par :

$$P_p = (\gamma_p - 1) \lambda (\alpha_p \rho_p)^{\gamma_p} \quad (4.32)$$

Par rapport au modèle diphasique eulérien classique, implanté dans CPS, ce modèle contient uniquement un terme de pression particulaire supplémentaire. L'objectif est donc atteint. Ajoutons que l'hypothèse d'une grandeur  $\lambda_p$  constante est équivalente à :

$$\frac{P_p}{(\alpha_p \rho_p)^{\gamma_p}} = cste \quad (4.33)$$

et confère donc aux particules un comportement proche de celui d'un gaz isentropique.

Dans ce modèle, nous avons fixé  $\gamma_p = 2$  quelle que soit la configuration géométrique du calcul. En effet, les approximations effectuées pour établir ce modèle sont telles que considérer  $\gamma_p = 2$ , au lieu de  $\gamma_p = 5/3$  dans les configurations non planes, n'est pas très pénalisant. Par contre, d'un point de vue numérique, il est extrêmement intéressant de conserver un exposant entier égal à 2 dans la loi de pression. Les développements réalisés lors de la mise en place des solveurs numériques pour un paramètre  $\gamma_p$  différent de 2 (et présentés au chapitre 5) en témoignent.

L'expression de la pression particulaire utilisée dans ce modèle, dit SPPM<sup>6</sup>, est donc :

$$P_p = \lambda (\alpha_p \rho_p)^2 \quad (4.34)$$

## 2.3 Principe du maximum

Les modèles diphasiques eulériens ainsi construits présentent tous deux un terme de pression pour la phase dispersée. Cette notion est habituelle en modélisation des écoulements gaz/solide denses. Or, les travaux effectués dans ce domaine ont montré que la loi de pression devait respecter le principe du maximum, *ie* assurer que la fraction volumique ne dépasse pas une valeur maximale, classiquement  $\alpha_{\max} = 0,64$  (voir par exemple Combe, 1997). Pour cela, le comportement asymptotique au voisinage de la valeur maximale admissible est crucial (Combe & Hérard, 1997). La pression inter-granulaire peut alors être définie comme le produit d'un terme de pression identique à celui introduit dans le CPPM et d'une fonction monotone croissante de la fraction volumique (Combe & Hérard, 1999). En reprenant les notations utilisées dans l'article précité, la pression inter-granulaire est donc définie par :

<sup>6</sup> Pour Simplified Particulate Pressure Model.

$$P_{dense} = \Xi(\alpha_2) = \frac{2}{3} \rho_2 (q_2^2)_0 \alpha_2^{5/3} g(\alpha_2)$$

$$g(\alpha_2) = \left\{ 1 + \frac{4\alpha_2}{[1 - (\alpha_2 / \alpha_{max})]^2 \alpha_{max}^5} \right\} \times \exp \left\{ \frac{8\alpha_{max}}{[(15/2)\alpha_{max} - 3]} \left( 1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_{max}} \right)^{1 - \frac{5}{2}\alpha_{max}} \right\}$$

Cette fonction de compression assure une pression infinie lorsque la fraction volumique tend vers  $\alpha_{max}$ , évitant ainsi de violer le principe de maximum.

Quelle que soit la définition retenue dans nos modèles diphasiques eulériens pour la pression, (4. 28) ou (4. 34), celle-ci ne présente pas de comportement particulier au voisinage de  $\alpha_{max}$ . La fraction volumique n'est donc pas bornée et le principe du maximum n'est pas respecté. En pratique, la fraction volumique de particules peut dépasser 1.

Cependant, les équations pour la phase gazeuse sont écrites sous le couvert d'une hypothèse fondamentale : l'écoulement est supposé dilué. La valeur de la fraction volumique solide n'intervient donc pas dans le calcul de celle du gaz :  $\alpha_{gaz} = (1 - \alpha_p) \approx 1$ , contrairement aux équations utilisées pour modéliser les écoulements diphasiques denses.

Nous avons conscience que les pressions particulières définies dans notre modélisation n'assurent pas le respect du principe du maximum, mais nous estimons que cet aspect est négligeable dans les simulations diphasiques diluées qui font l'objet de nos préoccupations.

### 3. Pertinence du tenseur cinétique

Les modèles diphasiques à pression particulaire ainsi construits sont basés sur une modélisation du tenseur des contraintes cinétiques de la phase dispersée. Nous allons à présent nous intéresser à l'ordre de grandeur de ce terme dans une configuration simple de propulseur, afin de justifier *a priori* l'introduction de termes supplémentaires<sup>7</sup> dans notre modélisation eulérienne.

Des simulations lagrangiennes réalisées sur un cas test simple, le TEP, ont montré qu'il existait effectivement des variations de vitesse importantes entre deux particules d'une même cellule (cf. chapitre 2). Nous cherchons ici à quantifier l'ordre de grandeur du tenseur cinétique qui en résulte.

Pour cela, nous avons étudié les différents termes qui interviennent dans le bilan de quantité de mouvement de la phase dispersée, pour chaque cellule du maillage du TEP. Nous avons comparé les contributions liées au terme de traînée moyenne (classiquement pris en compte dans les modèles eulériens) et au tenseur des contraintes cinétiques (introduits dans les modèles diphasiques à pression particulaire développés durant cette thèse). Cette étude permet d'affirmer la pertinence du terme de pression particulaire ajouté dans les modèles CPPM et SPPM.

Le bilan de quantité de mouvement en régime stationnaire s'écrit sous forme condensée :

$$\underbrace{\text{div}(\alpha_p \rho_p \mathbf{u}_p \mathbf{u}_p)}_{\text{div(vitesse)}} = \underbrace{-\alpha_p \rho_p \mathbf{F}}_{\text{traînée}} + \underbrace{\text{div}(-\alpha_p \rho_p \overline{\delta \sigma_p})}_{\text{div(tenseur)}}$$

Tous ces termes sont évalués à partir des valeurs moyennes issues de simulations avec le module lagrangien, précédemment utilisé pour comparer des résultats de simulations Euler/Lagrange (cf. chapitre 2). Le calcul des gradients associés est réalisé à l'aide d'une formule de Green. Cette

<sup>7</sup> Par rapport au modèle diphasique eulérien de CPS.

méthode de calcul est relativement imprécise, mais suffisante pour comparer les ordres de grandeur des différents termes du bilan de quantité de mouvement.

L'étude est faite pour différents diamètres de particules. Pour chaque cellule nous traçons les valeurs respectives du bilan de quantité de mouvement (en vert), de la traînée (en noir) et de la divergence du tenseur des contraintes cinétiques (en rouge).

Dans les simulations faites avec le code CPS, le terme dû au tenseur des contraintes cinétiques  $div(tenseur)$  n'est pas pris en compte. Les résultats montrent qu'il est effectivement négligeable pour les particules de très faible diamètre (cf. Figure 4- 1, symboles rouges), alors qu'il joue un rôle important dans le cas des particules de diamètre élevé (cf. Figure 4- 2). En effet, ces particules inertielles ne se comportent pas comme des traceurs : leurs trajectoires se croisent dans certaines zones de l'écoulement. Ainsi, la Figure 4- 3 distingue trois zones, repérées A, B et C, qui sont le siège d'un nombre important de croisements. Ces zones sont également celles où l'importance du tenseur des contraintes cinétiques est maximale (cf. Figure 4- 2).

Les écoulements qui se développent dans un propulseur peuvent contenir des particules possédant un comportement inertiel, *ie* dont le temps de relaxation dynamique est plus grand que le temps caractéristique de l'écoulement. C'est notamment le cas des applications étudiées durant cette thèse (TEP et LP6). En conclusion, la prise en compte du tenseur des contraintes cinétiques se justifie pour des particules inertielles, même si l'écoulement gazeux est supposé stationnaire et laminaire.

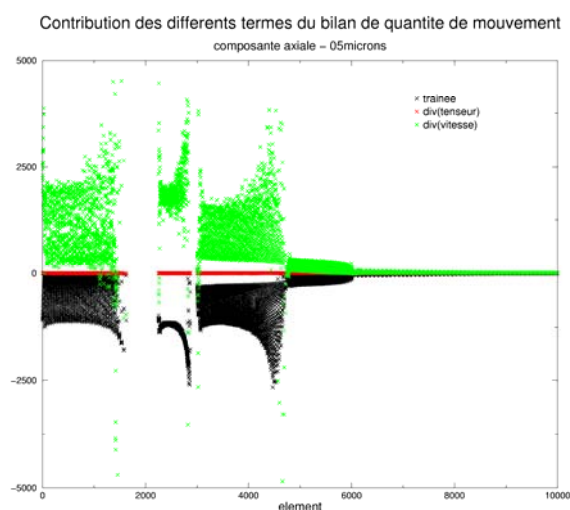


Figure 4- 1 : Bilan de quantité de mouvement,  $dp=5\mu m$ , 40000 trajectoires calculées

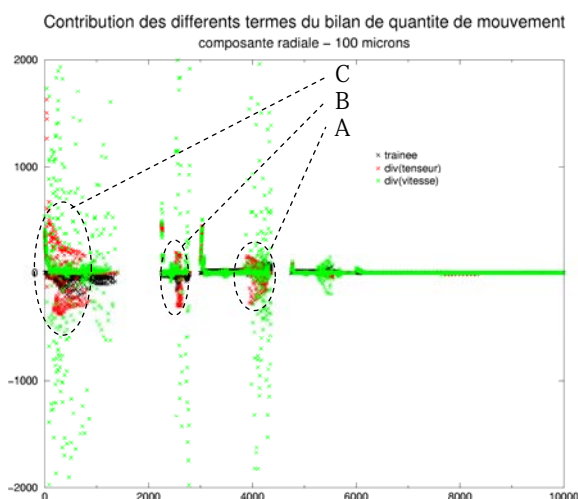


Figure 4- 2 : Bilan de quantité de mouvement,  $dp=100\mu m$ , 40000 trajectoires calculées

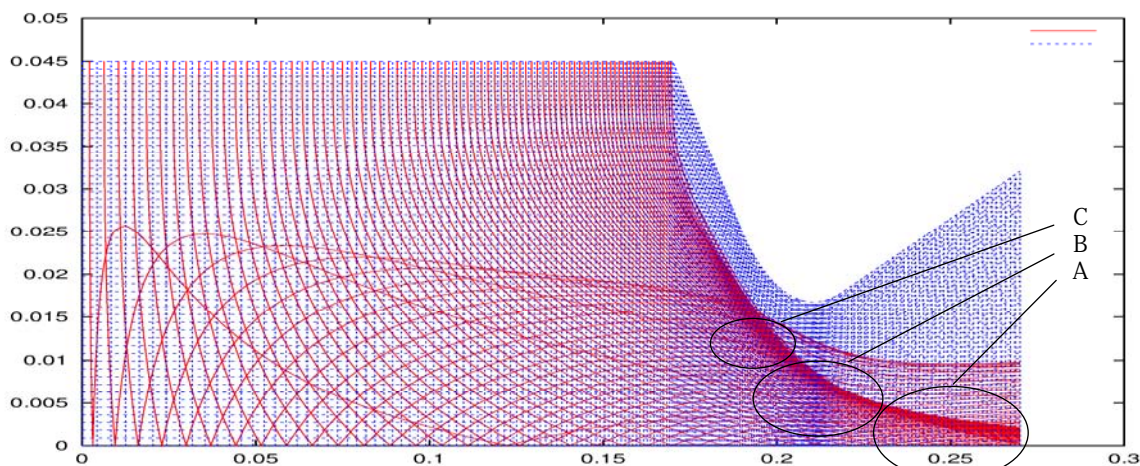


Figure 4-3 : Trajectoires pour des particules de 100µm de diamètre, maillage TEP SME : zones de croisement de trajectoires (terme de tenseur des contraintes cinétiques non négligeable)

## 4. Validation des hypothèses effectuées

Les modèles diphasiques à pression particulaire SPPM et CPPM ont été établis grâce à certaines hypothèses relatives au comportement moyen et fluctuant de la phase dispersée. Dans une démarche scientifique, la validité de ces hypothèses doit être analysée. Pour cela, le calcul de certaines variables moyennées de la phase dispersée est nécessaire : le gradient de la vitesse moyenne, le tenseur des contraintes cinétiques et l'énergie cinétique fluctuante. Cette phase de validation est réalisée sur le TEP et les composantes du tenseur des contraintes cinétiques de la phase dispersée sont comparées aux modèles proposés.

### 4.1 Méthode de calcul du tenseur cinétique

Tout d'abord, la méthode de calcul du tenseur des contraintes cinétiques de la phase dispersée nécessite de calculer les différentes grandeurs de l'écoulement diphasique suivantes :

- le gradient de la vitesse moyenne de la phase dispersée  $\frac{\partial \tilde{u}_{p,i}}{\partial x_j}$ ,
- le tenseur quadratique des vitesses fluctuantes de la phase dispersée  $\langle \delta u_{p,i} \delta u_{p,j} \rangle_p$ ,  
l'énergie cinétique fluctuante des particules  $\delta \theta_p$  et la variable  $\lambda_p = (\alpha_p \rho_p)^{1-\gamma_p} \delta \theta_p$ ,
- le coefficient de viscosité  $\nu_p = (\gamma_p - 1) \frac{\tau_{gp}^F}{2} \delta \theta_p$ .

Pour calculer ces différentes grandeurs de l'écoulement diphasique eulérien, nous avons de nouveau utilisé le module lagrangien. Il a été modifié de façon à calculer non seulement les valeurs moyennes de la phase condensée (fraction volumique, masse et vitesse) mais également les moyennes des grandeurs définies à partir des valeurs fluctuantes de la vitesse de la phase dispersée (cf. Figure 4-4). En effet nous disposons, à partir du calcul lagrangien, et pour chaque cellule du maillage :

- de la vitesse moyennée sur l'ensemble des trajectoires de particules présentes dans la cellule :  $\bar{\mathbf{u}}(\Omega)$ , correspondant à  $\bar{\mathbf{u}}_p$ ,
- de la vitesse "instantanée" de chaque trajectoire  $j$  le long de son parcours dans la cellule :  $\bar{\mathbf{u}}_{j,i}(t)$ , correspondant à  $\mathbf{u}_p^{(j)} = \bar{\mathbf{u}}_p + \delta \mathbf{u}_p^{(j)}$ .

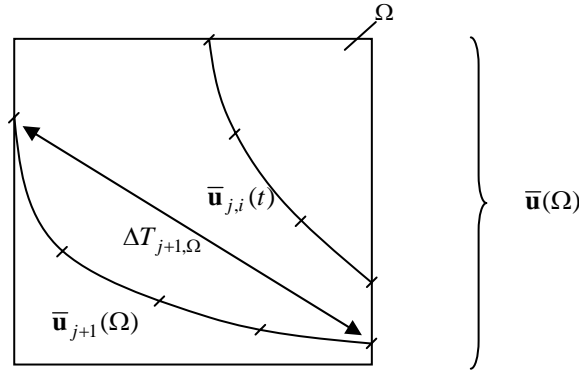


Figure 4-4 : Illustration des vitesses lagrangiennes moyenne et instantanée.

Il nous est donc possible de calculer les composantes du tenseur des contraintes cinétiques de la phase dispersée, en appliquant la même méthode de moyenne que pour le calcul des vitesses. Dans chaque cellule  $\Omega$  du maillage, les valeurs de la vitesse fluctuante sont calculées pour chaque pas de temps de chaque trajectoire. L'écart à la vitesse moyenne (de l'ensemble des trajectoires d'une cellule  $\Omega$ ) de la vitesse instantanée d'une particule (représentée dans cette cellule  $\Omega$  par la trajectoire  $j$ ) est sur un pas de temps  $\delta t_{ij}$  :

$$\mathbf{u}'_{j,i}(t) = \bar{\mathbf{u}}_{j,i}(t) - \bar{\mathbf{u}}(\Omega) \quad (4.35)$$

Les composantes des contraintes cinétiques sont donc calculées de la façon suivante (les détails des calculs sont donnés en annexe C) :

$$\langle u'_k u'_l \rangle = \frac{\sum_j \dot{q}_j \sum_i \delta t_{ij} \bar{u}_{k,j,i}(\Omega) \bar{u}_{l,j,i}(\Omega)}{\sum_j \dot{q}_j \Delta T_{j\Omega}} - \bar{u}_k(\Omega) \bar{u}_l(\Omega) \quad (4.36)$$

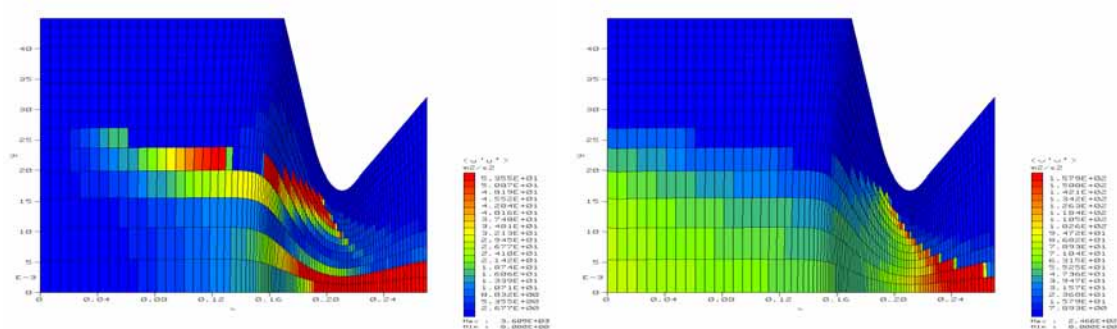
L'énergie cinétique fluctuante des particules  $\delta\theta_p$  est calculée à partir des composantes du tenseur des contraintes cinétiques :

$$\delta\theta_p = \frac{1}{2} \langle u'_i u'_i \rangle \quad (4.37)$$

Les composantes diagonales du tenseur cinétique particulière sont présentées, pour des particules de  $100\mu\text{m}$  de diamètre, sur la Figure 4-5.

En ce qui concerne la composante  $\langle u'u' \rangle$ , nous pouvons remarquer que les variations sont importantes dans certaines zones de croisement de trajectoires, notamment celle où l'on trouve des particules issues de la paroi débitante et des particules ayant traversé l'axe de symétrie. Une autre zone de plus fortes variations se situe près du col de la tuyère, là où les particules sont rapidement accélérées.

Les variations  $\langle v'v' \rangle$  sont très importantes lorsque des trajectoires à vitesse radiale négative croisent des particules avec une vitesse radiale opposée. C'est ce qui se passe dans le fond avant, lorsque les particules ayant rebondi sur l'axe de symétrie croisent celles issues de la paroi débitante, ou bien dans le divergent de la tuyère, lorsque les vitesses sont très différentes.



**Figure 4-5 : Composantes du tenseur quadratique pour  $dp=100\mu\text{m}$   
composante  $\langle u'u' \rangle$  à gauche, composante  $\langle v'v' \rangle$  à droite**

Ces résultats confirment ceux obtenus au paragraphe 3. La méthodologie de calcul ainsi introduite va permettre d'analyser la validité des hypothèses effectuées pour bâtir les modèles CPPM et SPPM.

## 4.2 Hypothèse du modèle à pression particulaire complet

Le modèle à pression particulaire complet (CPPM) a été établi sur la base d'une hypothèse de viscosité :

$$\begin{cases} \langle \delta u_{p,i} \delta u_{p,j} \rangle_p - (\gamma_p - 1) \delta \theta_p \delta_{ij} = -\nu_p \left[ \frac{\partial \tilde{u}_{p,i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_{p,j}}{\partial x_i} - (\gamma_p - 1) \frac{\partial \tilde{u}_{p,m}}{\partial x_m} \delta_{ij} \right] \\ \nu_p = (\gamma_p - 1) \frac{\tau_{gp}^F}{2} \delta \theta_p \end{cases} \quad (4.38)$$

Afin de vérifier cette loi, nous cherchons à comparer les termes suivants :

$$\tilde{A} = \left( \langle \delta u_{p,i} \delta u_{p,j} \rangle - (\gamma_p - 1) \delta \theta_p \delta_{ij} \right) \left( \frac{\partial \tilde{u}_{p,i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_{p,j}}{\partial x_i} - (\gamma_p - 1) \frac{\partial \tilde{u}_{p,m}}{\partial x_m} \delta_{ij} \right) \quad (4.39)$$

$$B = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \tilde{u}_{p,i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_{p,j}}{\partial x_i} - (\gamma_p - 1) \frac{\partial \tilde{u}_{p,m}}{\partial x_m} \delta_{ij} \right]^2 \quad (4.40)$$

Le calcul du gradient de la vitesse moyenne de la phase dispersée est identique à celui du gradient de vitesse gaz : les vitesses moyennes de la phase dispersée précédemment définies sont calculées dans chaque cellule du maillage, puis elles sont pondérées par la surface de la maille. Enfin le gradient  $\frac{\partial \tilde{u}_{p,i}}{\partial x_j}$  est déterminé à l'aide de la formule de Green.

Les termes  $\tilde{A}$  et  $B$ , ainsi définis, sont normalisés en les divisant par la valeur absolue au carré du gradient maximum :  $\left( \max_{i,j} \left( \left| \frac{\partial \tilde{u}_{p,i}}{\partial x_j} \right| \right) \right)^2$ .

Les cartes de corrélation entre  $\tilde{A}$  et  $\nu_p B$  sont ensuite tracées, pour chaque élément du maillage excepté les cellules vides. Les résultats sont présentés pour des particules de diamètres respectifs 5, 30 et  $100\mu\text{m}$ .

Théoriquement, nous devons obtenir  $\tilde{A} = -\nu_p B$  et la carte de corrélation devrait se réduire à la bissectrice  $y = x$ . Les résultats sont satisfaisants avec des particules de diamètre égal à  $100\mu\text{m}$  dans la mesure où une droite de coefficient directeur proche de 1 semble se dessiner (cf. Figure 4- 6). Néanmoins, les diamètres plus faibles ne donnent pas satisfaction (cf. Figure 4- 7). L'hypothèse de viscosité semble donc, dans ce cas d'étude, d'autant plus vérifiée que les particules sont grosses. Comme en turbulence monophasique, il est nécessaire d'avoir une certaine "agitation" des particules pour être dans le domaine de validité de l'hypothèse. Dans le cas de particules de  $100\mu\text{m}$  de diamètre, nous observons une corrélation satisfaisante dans la mesure où les particules "rebondissent" sur l'axe de symétrie et créent ainsi des zones de forte variance. En revanche, les petites particules créent moins d'agitation car leurs trajectoires ne se croisent pas suffisamment.

Pour que l'hypothèse de viscosité soit respectée, il semble donc que de nombreux croisements de trajectoires soient nécessaires. Pour nous en assurer, nous avons réalisé un calcul avec des particules de taille moyenne ( $30\mu\text{m}$ ) injectées dans le TEP avec une vitesse tangentielle qui varie aléatoirement. Les trajectoires obtenues sont présentées Figure 4- 8 pour un nombre restreint de trajectoires. Contrairement au cas sans bruit à l'injection et où la grande majorité des trajectoires sont parfaitement colinéaires, l'écoulement obtenu avec ce calcul montre de nombreux croisements de trajectoires (cf. Figure 4- 9).

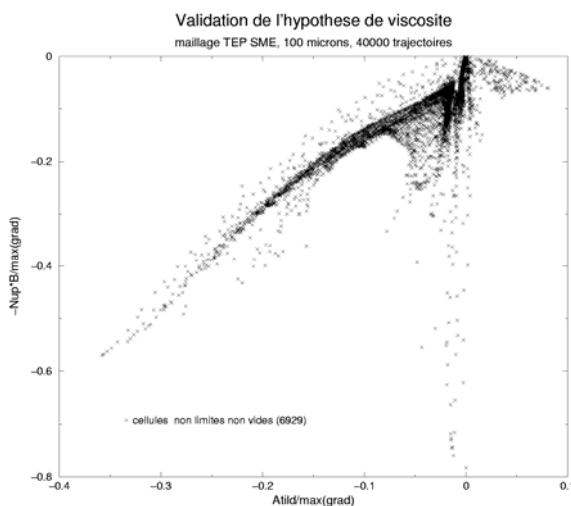


Figure 4- 6 : Carte de corrélation pour  $dp=100\mu\text{m}$

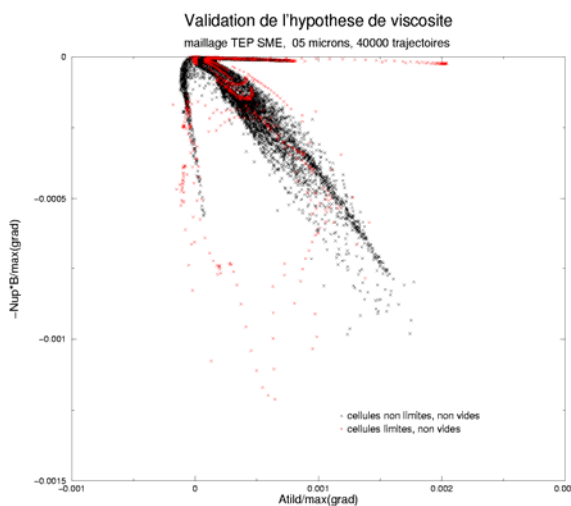


Figure 4- 7 : Carte de corrélation pour  $dp=5\mu\text{m}$

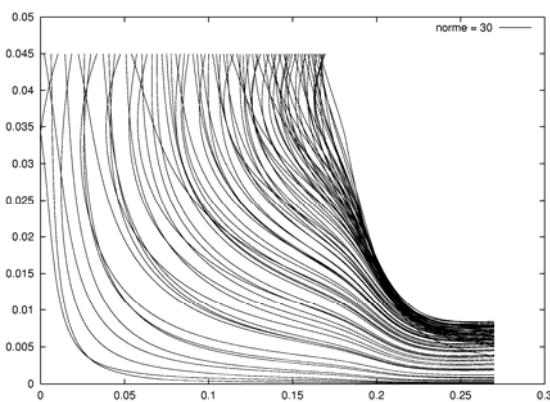
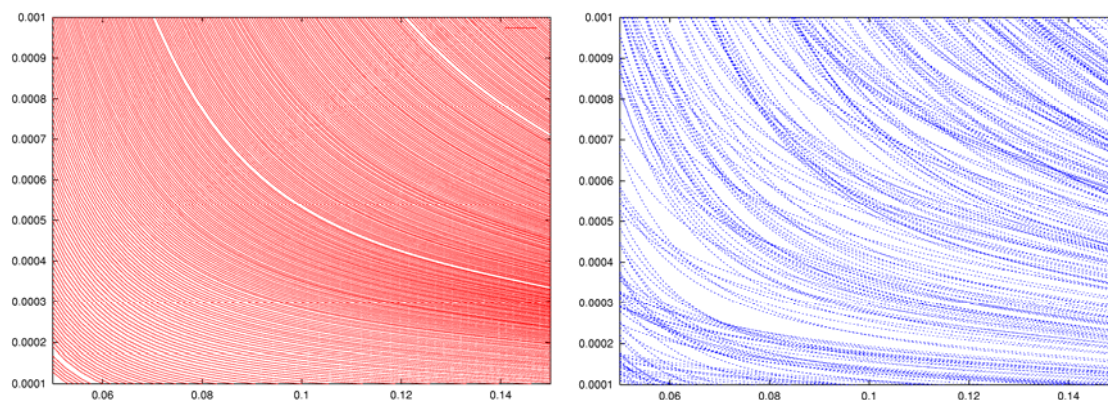


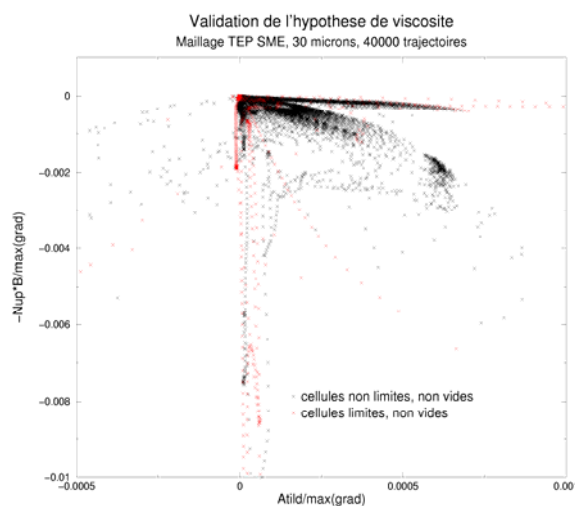
Figure 4- 8 : Trajectoires de particules injectées avec une vitesse tangentielle initiale variable, TEP, maillage SME, 80 trajectoires,  $dp=30\mu\text{m}$



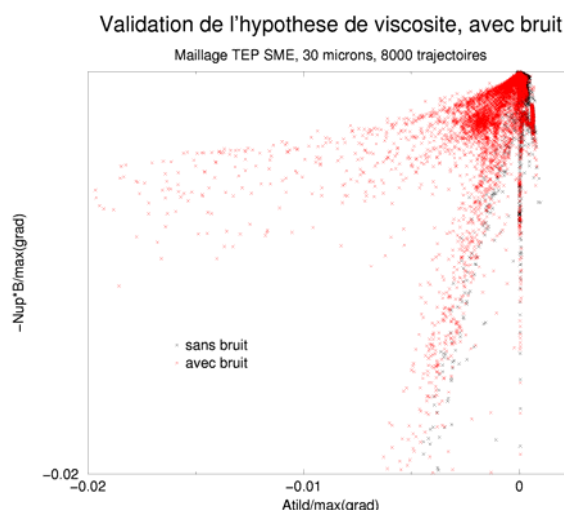


**Figure 4- 9 : Calcul TEP, maillage SME, 8000 trajectoires**  
**Zoom sur les trajectoires obtenues pour des particules de 30 $\mu$ m de diamètre,**  
 à gauche : vitesse tangentielle constante à l'injection ; à droite : vitesse tangentielle variable à l'injection

Les Figure 4- 10 et Figure 4- 11 représentent les cartes de corrélation entre  $\tilde{A}$  et  $-\nu_p B$ , pour les deux types d'injection. Elles confirment que l'hypothèse de viscosité est mieux respectée lorsque l'écoulement est "tourmenté", c'est-à-dire lorsqu'il présente de multiples croisements de trajectoires.



**Figure 4- 10 : Carte de corrélation pour dp=30 $\mu$ m**



**Figure 4- 11 : Carte de corrélation pour dp=30 $\mu$ m, avec injection bruitée**

L'écoulement diphasique développé dans le TEP est trop lisse et les hypothèses de calcul trop simples (laminaires) pour pouvoir prétendre représenter un écoulement réel. En injectant des particules avec des vitesses variables nous nous rapprochons d'un écoulement réaliste et l'hypothèse de viscosité est alors mieux vérifiée.

### 4.3 Hypothèses du modèle à pression particulaire simplifié

Dans le cas du modèle à pression particulaire simplifié (SPPM), les hypothèses à valider sont au nombre de 2. Elles reposent d'une part sur le caractère quasi-sphérique du tenseur des contraintes cinétiques particulaire :

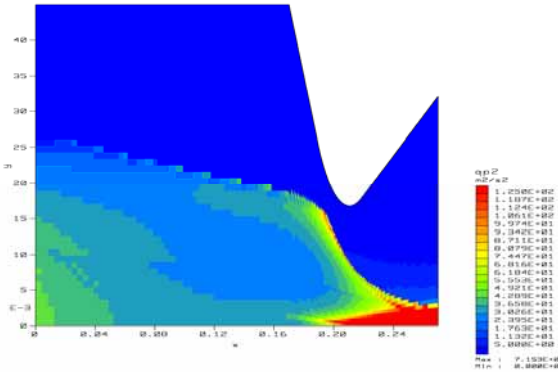
$$\langle \delta u_{p,i} \delta u_{p,j} \rangle_p \approx \delta \theta_p \delta_{ij} \quad (4.41)$$

et d'autre part sur la relation de proportionnalité entre la fraction volumique solide et l'énergie cinétique fluctuante des particules, qui se traduit par  $\lambda_p = \lambda = cste$  le long d'une trajectoire :

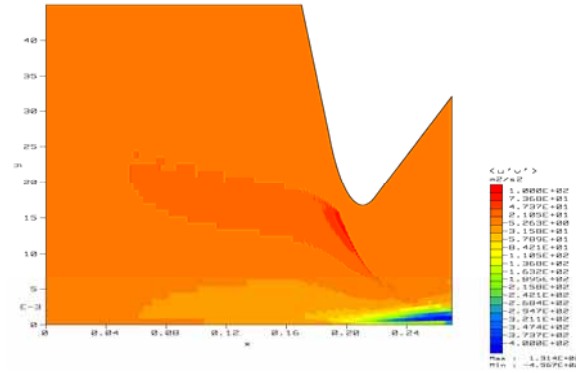
$$(\alpha_p \rho_p)^{1-\gamma_p} \delta\theta_p = cste \quad (4.42)$$

Pour valider cette hypothèse, nous comparons les champs de  $\langle \delta u_{p,i} \delta u_{p,j} \rangle_p$  et  $\delta\theta_p$ , et nous étudions les variations de  $\lambda$ .

En ce qui concerne l'hypothèse de tenseur des contraintes sphériques (4.41), les résultats obtenus ne sont pas très satisfaisants. La carte de répartition de l'énergie cinétique fluctuante  $\delta\theta_p$  dans la chambre de combustion du TEP est donnée Figure 4-12. La composante non diagonale du tenseur des contraintes cinétiques mésoscopiques  $\langle u'v' \rangle$  est représentée Figure 4-13, dans les mêmes conditions de calcul. La comparaison de ces termes ne permet pas de vérifier l'hypothèse (4.41) : la composante  $\langle u'v' \rangle$  est du même ordre de grandeur que l'énergie cinétique.



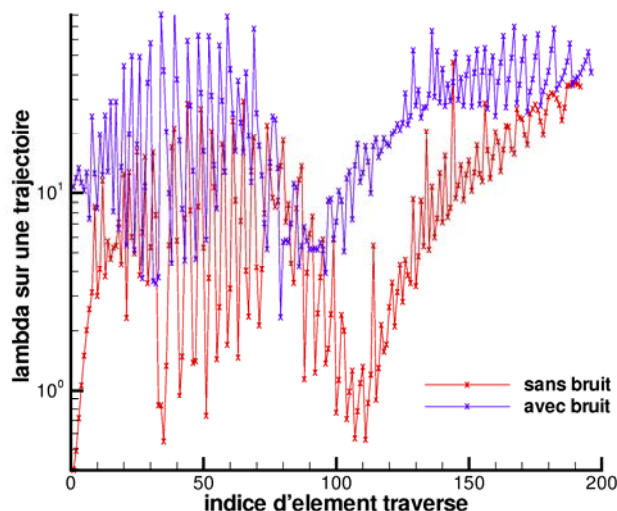
**Figure 4-12 : Energie cinétique fluctuante des particules, calcul TEP, maillage SME, particules de 100µm de diamètre, 40000 trajectoires calculées.**



**Figure 4-13 : Composante  $\langle u'v' \rangle$  du tenseur des contraintes cinétiques mésoscopiques particulaire, calcul TEP, maillage SME, particules de 100µm de diamètre, 40000 trajectoires calculées.**

Pour valider la seconde hypothèse (4.42), nous avons tracé les cartes de corrélation entre  $\lambda$  et  $\alpha_p \rho_p$ , pour les différents diamètres de particules. Toutefois, elles ne permettent pas de dégager une quelconque relation de proportionnalité. Ces cartes de corrélation sont difficiles à exploiter et surtout trop contraignantes par rapport à l'hypothèse à valider ( $\lambda = cste$  le long d'une trajectoire).

Nous avons donc calculé la variable  $\lambda_p = \delta\theta_p (\alpha_p \rho_p)^{1-\gamma_p}$ , dans chacune des cellules traversées par une trajectoire donnée. Pour cela un calcul lagrangien de trajectoires de particules est effectué en injectant 8000 particules de 30µm de diamètre. L'une de ces 8000 trajectoires est utilisée pour calculer le terme  $\lambda$ . Les valeurs obtenues pour chaque cellule traversée sont reportées dans le graphe suivant (cf. Figure 4-14).



**Figure 4-14 : Evolution de lambda pour une trajectoire donnée, avec et sans bruit à l'injection. Calcul lagrangien, TEP maillage SME, 8000 particules,  $d_p=30\mu\text{m}$**

Le terme  $\lambda_p$  n'est pas rigoureusement constant le long de cette trajectoire, néanmoins ses variations sont bornées entre 1 et 100, ce qui permet de déterminer son ordre de grandeur.

## 5. Conclusion

Deux modèles diphasiques avec pression particulaire ont été mis au point à partir du formalisme eulérien mésoscopique (MEF). Le tenseur des contraintes cinétiques mésoscopiques est exprimé comme la somme d'une partie sphérique, représentée par le terme de pression, et d'une partie déviatorique, modélisée par une hypothèse de Boussinesq.

Dans le premier modèle, dit modèle complet ou CPPM, la pression particulaire est fonction de la fraction volumique et de l'énergie cinétique fluctuante des particules. Cette dernière est déterminée via la résolution d'une équation de convection.

Le modèle simplifié, ou SPPM, présente également un terme de pression particulaire, mais qui dépend de la fraction volumique et d'une constante  $\lambda$ . L'ordre de grandeur de cette constante a pu être déduit de cartes de corrélation. Il est compris entre 1 et 100, environ, dans le cas d'étude du TEP. Cependant, la valeur exacte de cette constante  $\lambda$  est difficile à appréhender. *A priori*, elle va dépendre de l'écoulement envisagé et des caractéristiques de la phase dispersée, notamment le diamètre des particules injectées. D'autre part il semble peu probable que ce paramètre soit effectivement constant dans un écoulement donné.

Ces limitations sont bien sûr éliminées par le modèle complet, plus riche physiquement et qui s'affranchit justement de cette constante. Néanmoins, le modèle SPPM ne présente pas d'équation supplémentaire par rapport au modèle actuel de CPS. Il est donc plus simple à mettre en œuvre que le CPPM, d'où son intérêt.

L'analyse par simulations numériques de l'hypothèse de viscosité sur laquelle reposent les deux modèles à pression particulaire a permis d'assurer sa validité, particulièrement dans le cas d'écoulements désordonnés (croisements de trajectoires). Les hypothèses inhérentes au modèle à pression particulaire simplifié sont plus difficilement vérifiées, mais elles restent acceptables. Les deux modèles à pression particulaire conservent donc tout leur intérêt.

Ces modèles ont ensuite été intégrés dans le code CPS. L'implantation du modèle simplifié a été logiquement effectuée en premier, permettant ainsi de faciliter la tâche d'intégration du CPPM. L'analyse mathématique du système convectif de chacun de ces modèles est présentée au chapitre suivant.

# Chapitre 5

## Analyse mathématique du système convectif à pression particulaire

Les modèles diphasiques développés au chapitre précédent présentent un terme de pression particulaire qui doit permettre de pallier un défaut du modèle eulérien utilisé dans CPS en améliorant la représentation de la répartition des particules dans l'écoulement. En vue de l'implantation de ces modèles dans CPS, il est nécessaire de développer des méthodes de calcul des flux convectifs. Les systèmes convectifs des modèles SPPM et CPPM étant hyperboliques (comme nous le démontrerons plus loin), nous pouvons utiliser des méthodes numériques issues des écoulements monophasiques dont la précision et la robustesse sont avérées. Le calcul des flux convectifs peut ainsi s'appuyer sur la résolution du problème de Riemann appliqué à chaque face des éléments du maillage. Des méthodes classiques de type Godunov ou Roe peuvent être utilisées dans ce sens.

Dans ce chapitre, nous présentons les solveurs numériques exacts et approchés écrits pour chacun des modèles diphasiques à pression particulaire, ainsi que leur validation sur un cas test de tube à choc. Les écoulements diphasiques pouvant contenir des zones vides de particules, nous insistons ensuite sur la résolution de ces cas particuliers. De même, l'apparition du vide comme solution du problème de Riemann fait l'objet d'un traitement spécifique. Enfin, un soin particulier est apporté à l'étude de la condition limite de type paroi débitante, qui nécessite de résoudre un problème de Riemann partiel.

### 1. Le problème de Riemann

Le problème de Riemann consiste à résoudre le problème de Cauchy suivant, pour  $\mathbf{W} \in \mathbf{R}^p$ ,  $p \geq 1$  :

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{W})}{\partial x} = 0 \quad (5.1)$$

pour la condition initiale :

$$\mathbf{W}_0(x) = \begin{cases} \mathbf{W}_G & \text{pour } x < 0 \\ \mathbf{W}_D & \text{pour } x > 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

Ce problème correspond à une condition initiale constante de part et d'autre d'une interface (située en  $x=0$ ) et discontinue en  $x=0$ . La solution de ce problème est composée d'au plus  $(p+1)$  états constants, séparés par des chocs admissibles, des ondes de détente ou des ondes de discontinuité de contact, satisfaisant aux conditions initiales (Vila, 1986). Dans le plan  $(x,t)$ , la solution peut donc avoir l'aspect donné par la Figure 5- 1.

Le système d'équations (5. 1) est dit hyperbolique si la matrice Jacobienne de ce système possède  $p$  valeurs propres distinctes. Dans ce cas, si les états gauche et droit sont physiquement admissibles et assez proches l'un de l'autre, la solution au problème de Riemann (5. 1) et (5. 2) existe et est unique (Chargy *et al*, 1992-a). Ce problème joue donc un rôle fondamental dans l'analyse des problèmes hyperboliques. Dans le cas de la dynamique des gaz (équations d'Euler), le système obtenu est

constitué d'équations non linéaires, ce qui rend sa résolution difficile et a motivé la construction de nombreuses méthodes numériques.

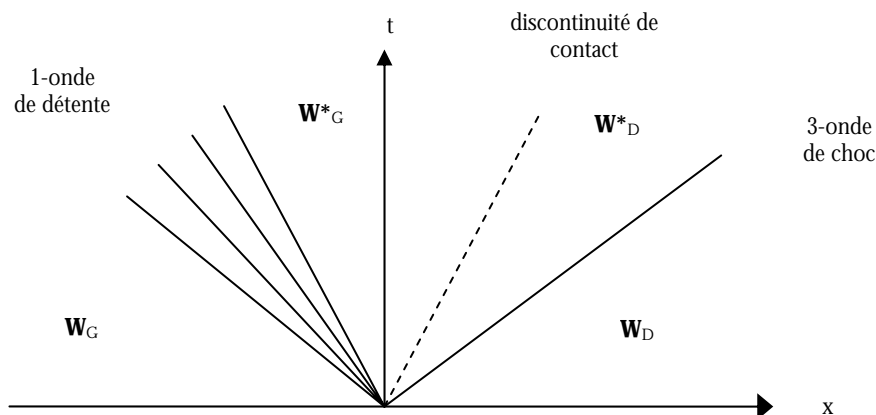


Figure 5-1 : Solution type du problème de Riemann, structure d'ondes

Si le système différentiel (5. 1) est résolu par une méthode de volumes finis, la principale difficulté réside dans l'évaluation de l'intégrale surfacique du vecteur  $\mathbf{F}(\mathbf{W})$ . Cette dernière est discrétisée sous la forme :

$$\oint_{\partial K} \mathbf{F}(\mathbf{W}) \cdot \mathbf{n} ds = |S| \phi$$

où  $S$  est l'aire de la surface sur laquelle on évalue l'intégrale surfacique. La fonction  $\phi$  est la fonction flux numérique. Elle peut être obtenue de différentes manières. On peut utiliser la solution exacte (Godunov *et al*, 1979) ou la solution approchée (Van Leer, 1979 ; Colella & Woodward, 1984) du problème de Riemann. Il est également possible d'employer un solveur numérique qui va donner la solution exacte d'un problème de Riemann approché (Roe, 1981) ou encore la solution approchée d'un problème approché (Davis, 1988). Durant nos travaux, nous nous sommes intéressés aux solveurs de Godunov et de Roe.

A priori, le solveur de Godunov est le plus performant, puisque exact. Néanmoins il est très coûteux en temps de calcul car il détermine toute la structure d'ondes et fait souvent appel à une méthode itérative. En pratique, ces ondes ne sont pas utilisées pour le calcul des flux : seul l'état à l'interface est nécessaire. L'idée des solveurs approchés est de s'affranchir de cette détermination complexe en approchant directement les flux. En effet, on doit garder à l'esprit que le problème de Riemann est en lui-même une approximation de la réalité. Ce problème n'a de sens ici que parce que les variables aérodynamiques sont discontinues du fait de la discrétisation spatiale réalisée avec le maillage, ce qui n'est pas le cas dans la réalité. De plus, les problèmes de Riemann sont basés sur une approximation des données pour les valeurs de part et d'autre de l'interface qui sépare deux états quelconques de l'écoulement.

Le solveur de Roe, en approximant les flux aux interfaces, donne généralement de bons résultats, tout en étant plus rapide que le solveur exact. Se basant sur une linéarisation de la matrice Jacobienne, il peut cependant faire apparaître des pathologies sur des cas particuliers.

Les modèles diphasiques à pression particulière développés durant cette thèse ont l'avantage d'être tous deux des systèmes hyperboliques (cf. paragraphes 2.1 et 2.5.2). Nous pouvons donc calculer les flux convectifs liés à ces systèmes à l'aide de méthodes éprouvées en écoulement monophasique.

Pour chaque modèle (CPPM ou SPPM), un problème de Riemann spécifique est résolu. Le système d'équations du modèle simplifié possède une très forte analogie avec celui des équations d'Euler, cependant la loi définissant la pression particulière est propre à ce système. Le modèle complet

présente, en plus d'une loi de pression spécifique, une équation de convection supplémentaire. Des développements adéquats sont donc réalisés pour résoudre chaque problème de Riemann.

Cette adaptation des méthodes de calcul de flux numériques à un système d'équations autre que celui d'Euler est courante. Ainsi, depuis la résolution du problème de Riemann pour un gaz parfait (Godunov *et al*, 1979 ; Roe, 1986), de nombreux auteurs ont étudié le problème pour des gaz non idéaux : loi Noble-Abel avec covolume (Toro, 1987), loi de Van Der Waals (Guardone & Viganero, 2002) ou loi de pression quelconque (Vinokur & Montagné, 1990). L'utilisation de la méthode de Roe a également été généralisée à l'étude de la magnétohydrodynamique (Dai & Woodward, 1995 ; Cargo & Gallice, 1997), à un gaz compressible turbulent (Berthon *et al*, 2002) ou encore aux écoulements diphasiques.

Dans le cas des écoulements diphasiques denses, les modèles sont généralement non conservatifs et non strictement hyperboliques, ce qui rend la résolution du problème de Riemann relativement ardue. On peut trouver la description d'un solveur approché de type Roe dans la référence Combe & Hérard (1999) pour un modèle à deux fluides à 4 équations. Saurel & Abgrall (1999) et Gallouët *et al* (2004) ont proposé une méthode de résolution pour des modèles diphasiques denses compressibles à 7 équations (trois équations de conservation classiques pour chaque phase, auxquelles s'ajoute une équation d'évolution de la fraction volumique).

La modélisation des écoulements diphasiques dilués peut s'appuyer sur des modèles dont le système convectif n'est pas hyperbolique. C'est notamment le cas du modèle de Marble (1963), qui ne contient aucun terme de pression dans les équations de la phase dispersée, contrairement aux modèles à deux pressions précédents. Le calcul des flux numériques ne peut donc se baser sur la résolution d'un problème de Riemann à l'interface. On peut alors utiliser une méthode de calcul des flux de type Donor Cell. Grossièrement, cette méthode consiste à décentrer les flux en fonction des flux de masse respectifs dans chaque cellule. Une autre possibilité consiste à rendre le système hyperbolique, en introduisant par exemple un terme de pression diphasique. Sainsaulieu (1995-a) ajoute ainsi dans les équations de la phase dispersée un terme proportionnel à la fraction volumique de gouttelettes liquides en suspension dans une phase gazeuse :  $\theta = \theta_0 (1 - \alpha_p)^{4/3}$ . On peut citer également Toumi & Kumbaro (1996) qui introduisent un terme de masse ajoutée dans l'équation de quantité de mouvement d'un modèle à deux fluides isentropique (égalité des pressions). Le système à 4 équations devient alors hyperbolique.

Dans nos travaux, les équations obtenues dans les modèles diphasiques CPPM et SPPM s'appuient sur un formalisme théorique traduisant des considérations physiques. Ainsi, le terme de pression particulière présent dans ces modèles n'est pas introduit pour assurer l'hyperbolicité du système, mais découle de la modélisation de la variance de vitesse particulière dans l'écoulement.

La partie conservative des systèmes d'équations obtenus étant intrinsèquement hyperbolique, il est possible, sans artifice supplémentaire, de tirer profit des méthodes de calcul des flux écrites pour les systèmes hyperboliques. Les problèmes de Riemann associés à ces deux nouveaux modèles diphasiques peuvent donc être résolus à l'aide de solveurs numériques classiques, établis soit par une méthode exacte (cf. paragraphe 2), soit par une méthode approchée (cf. paragraphe 3). Soulignons que ces solveurs, qui permettent d'effectuer le calcul des flux aux interfaces, ne doivent pas être confondus avec les schémas de Godunov et de Roe, qui représentent l'ensemble du schéma numérique.

Précisons enfin que, à l'instar des méthodes de résolution utilisées dans CPS pour la phase gazeuse (Della Pieta & Godfroy, 1998), chaque solveur est écrit en monodimensionnel. Un changement de base est réalisé pour se placer dans le repère lié à l'interface et les variables diphasiques simplement transportées, telles que les composantes tangentielles des vitesses, sont calculées par une méthode de décentrement des flux (Larrouturou, 1992 ; Chargy *et al*, 1992-b).

## 2. Résolution exacte du problème de Riemann pour les modèles diphasiques à pression particulaire

La résolution du problème de Riemann peut être faite de façon exacte, en appliquant la méthode de Godunov. Les équations des modèles CPPM et SPPM ont été étudiées dans ce sens, afin de déterminer les flux numériques convectifs. Pour des raisons évidentes de logique et de simplicité, le modèle à trois équations a été étudié en premier lieu, néanmoins dans un souci de concision, nous présentons d'abord la méthode de résolution du problème de Riemann pour le modèle complet. Nous verrons ensuite que l'extension des résultats obtenus au cas du modèle simplifié est immédiate.

Dans le but d'alléger les notations, nous supprimons dorénavant les indices précisant qu'il s'agit de la phase dispersée et nous posons  $\rho = \alpha_p \rho_p$ .

### 2.1 Système convectif du CPPM

Le modèle diphasique à pression particulaire présente par rapport au modèle eulérien actuel de CPS une équation supplémentaire sur  $\lambda$ . Le système à résoudre est, en monodimensionnel :

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{W})}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \\ \rho \lambda \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P \\ \rho u H \\ \rho u \lambda \end{pmatrix} = 0 \quad (5.3)$$

On rappelle que  $E$  représente l'énergie particulaire totale, définie par la somme de l'énergie interne et des énergies cinétiques moyenne et fluctuante des particules. Le terme de pression particulaire est donné par  $P = (\gamma - 1)\lambda \rho^\gamma$  où  $\gamma$  est un paramètre constant dépendant de la géométrie<sup>1</sup> du système. On introduit l'enthalpie particulaire  $H$  définie par :  $H = E + P / \rho$ .

Outre l'équation supplémentaire<sup>2</sup> du CPPM, la différence majeure entre ce système et celui des équations d'Euler repose sur la définition du terme de pression. Dans le cas du gaz parfait, la pression est fonction de la masse volumique et de l'énergie interne, alors que pour la phase dispersée le terme de pression est lié à la fraction volumique solide et à l'énergie cinétique fluctuante, via le terme  $\lambda$  :  $P = P(\rho, \lambda)$ .

### 2.2 Entropie du système

Dans un premier temps, nous définissons l'entropie spécifique de ce système convectif. Celle-ci dépend *a priori* des 4 variables physiques du modèle, soit :

$$s = s(\varpi) = s(\rho, u, T, \lambda)$$

On introduit l'entropie mathématique au sens de Lax (Friedrichs & Lax, 1971) :  $\eta(\varpi) = -\rho s(\varpi)$  et le flux entropique associé :  $\zeta(\varpi) = -\rho u s(\varpi)$ .

<sup>1</sup> Ce paramètre apparaît lors de l'écriture du tenseur d'anisotropie des contraintes cinétiques particulaire (hypothèse de Boussinesq).

<sup>2</sup> Cette équation supplémentaire s'apparente à celles introduites dans les modèles q- $\omega$  pour décrire les écoulements monophasiques turbulents.



Par définition (Dubois, 1990), ces fonctions doivent vérifier la relation suivante :

$$d\zeta = d\eta \cdot \mathbf{dJ} \quad (5.4)$$

où  $\mathbf{dJ}$  est la Jacobienne définie selon les variables physiques, soit :

$$\mathbf{dJ} = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 & 0 \\ \gamma P / \rho^\gamma & u & 0 & P / \rho\lambda \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u \end{pmatrix}$$

La relation (5.4) se traduit par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} -us - \rho u \frac{\partial s}{\partial \rho} = u \left( -s - \rho \frac{\partial s}{\partial \rho} \right) + \gamma \frac{P}{\rho^\gamma} \left( -\rho \frac{\partial s}{\partial u} \right) \\ -\rho s - \rho u \frac{\partial s}{\partial u} = \rho \left( -s - \rho \frac{\partial s}{\partial \rho} \right) + u \left( -\rho \frac{\partial s}{\partial u} \right) \\ -\rho u \frac{\partial s}{\partial T} = u \left( -\rho \frac{\partial s}{\partial T} \right) \\ -\rho u \frac{\partial s}{\partial \lambda} = \frac{P}{\rho\lambda} \left( -\rho \frac{\partial s}{\partial u} \right) + u \left( -\rho \frac{\partial s}{\partial \lambda} \right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial s}{\partial u} = 0 \\ \frac{\partial s}{\partial \rho} = 0 \end{cases}$$

L'entropie spécifique du système ne dépend donc que des variables T et  $\lambda$  :

$$s = s(T, \lambda) \quad (5.5)$$

Nous étudions ensuite la convexité de l'entropie mathématique. Pour cela, nous pouvons par exemple déterminer les conditions pour lesquelles la matrice Hessienne est définie positive (Desprès & Dubois, 2005). Il s'agit de la matrice des dérivées secondes de l'entropie mathématique en fonction des variables physiques dont dépend l'entropie spécifique, soit :

$$d^2\eta = \begin{pmatrix} -\rho \frac{\partial^2 s}{\partial T^2} & -\rho \frac{\partial^2 s}{\partial T \partial \lambda} \\ -\rho \frac{\partial^2 s}{\partial T \partial \lambda} & -\rho \frac{\partial^2 s}{\partial \lambda^2} \end{pmatrix}$$

Cette matrice est définie positive si les relations suivantes sont vérifiées :

$$\frac{\partial^2 s}{\partial \lambda^2} < 0; \quad \left( -\rho \frac{\partial^2 s}{\partial T^2} \right) \left( -\rho \frac{\partial^2 s}{\partial \lambda^2} \right) > \left( -\rho \frac{\partial^2 s}{\partial T \partial \lambda} \right)^2 \quad (5.6)$$

La détermination de l'entropie du système nécessite alors d'établir une fonction satisfaisant les équations (5.5) et (5.6). Ainsi, on aura défini une fonction strictement convexe qui vérifie la relation (5.4), propriétés suffisantes pour définir une entropie mathématique.

On peut montrer que la fonction :

$$s = s(T, \lambda) = s_0 + C_p \log\left(\frac{T}{T_0}\right) + (\gamma - 1) \log\left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right) \quad (5.7)$$

satisfait aux conditions demandées et constitue donc l'entropie spécifique du système.

L'existence d'une entropie pour le système de lois de conservation (5. 3) assure l'hyperbolicité de ce dernier (Desprès & Dubois, 2005). Le calcul des valeurs propres et des vecteurs propres du CPPM, présenté au paragraphe suivant, nous le confirmera.

### 2.3 Hyperbolicité du système convectif du CPPM

Les variables  $\rho, \rho u, \rho E, \rho \lambda$  sont indépendantes. Cela permet d'écrire les dérivées des termes de flux en fonction des dérivées de chacune de ces variables. La matrice Jacobienne du système (5. 3) est ainsi définie par :

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{W})}{\partial \mathbf{W}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -u^2 + \rho \lambda & 2u & 0 & \rho \\ -u E & H & u & \rho u \\ -u \lambda & \lambda & 0 & u \end{pmatrix} \quad (5. 8)$$

Cette matrice admet quatre valeurs propres réelles :

$$\lambda_1 = u - c, \quad \lambda_2 = u, \quad \lambda_3 = u + c, \quad \lambda_4 = u \quad (5. 9)$$

où  $c$  est la **vitesse du son diphasique**, définie par :

$$c = \sqrt{P_\rho + \lambda P_{\rho\lambda}} = \sqrt{\gamma P / \rho} = \sqrt{\gamma(\gamma - 1)\lambda \rho^{\gamma-1}} \quad (5. 10)$$

Cette "vitesse du son" n'est ni la vitesse du son qui existe dans le gaz équivalent (mélange diphasique gaz/particules), ni la vitesse du son dans le milieu formé par les particules solides. Il s'agit d'un abus de langage motivé par l'analogie entre la vitesse du son réelle dans un écoulement gazeux définie par  $c_{gaz} = \sqrt{\gamma_{gaz} P_{gaz} / \rho_{gaz}}$  (avec  $\gamma_{gaz}$  le coefficient isentropique) et le terme associé à la pression particulaire défini par  $c = \sqrt{\gamma P / \rho}$  (avec  $\gamma$  constante). La vitesse du son diphasique ainsi définie est liée au système d'équations du CPPM. Cette notion est très utile pour caractériser les solveurs de Riemann, mais elle n'a aucune utilité sur le plan pratique.

Le système convectif est donc hyperbolique, non strictement car la valeur propre  $u$  est d'ordre de multiplicité 2 (voire 4 si on est dans le cas particulier du vide de particules).

### 2.4 Ecriture d'un solveur de Godunov

L'écriture d'un solveur de type Godunov nécessite la résolution exacte du problème de Riemann associé au système hyperbolique des équations de conservation de la phase dispersée. Pour un maillage donné, le schéma numérique de Godunov (Yang et Przekwas, 1991) permet de déterminer l'état d'une cellule  $j$  au temps  $t_{n+1}$  ( $\mathbf{W}_{j,n+1}$ ) à partir de l'état au temps  $t_n$  de cette même cellule ( $\mathbf{W}_{j,n}$ ) et des flux entre cette cellule et ses deux voisines ( $j-1$ ) et ( $j+1$ ). Ces flux sont entièrement définis par l'état à l'interface des cellules considérées :  $\mathbf{W}_F = {}^t(\rho_F, u_F, T_F, \lambda_F)$ .

L'intégration du système d'équations lié à la phase dispersée se ramène donc à la détermination de l'état  $\mathbf{W}_F$  à l'interface entre deux états  $\mathbf{W}_G$  et  $\mathbf{W}_D$ . Pour déterminer cet état, il est nécessaire de connaître les états intermédiaires  $\mathbf{W}_G^*$  et  $\mathbf{W}_D^*$ , ainsi que la position des ondes (donnée par leurs vitesses de propagation) : c'est la résolution du problème de Riemann (cf. Figure 5- 2).

Les vecteurs propres de la Jacobienne définie par l'équation (5. 8), associés aux quatre valeurs propres  $\lambda_i(\mathbf{W})$ ,  $i = 1, \dots, 4$  précédemment définies, sont donnés par :

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ u - c \\ H - uc \\ \lambda \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ u + c \\ H + uc \\ \lambda \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ 0 \\ -(\gamma - 1)\lambda \end{pmatrix}$$

La matrice des vecteurs propres est donc la suivante :

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ u - c & 0 & u + c & u \\ H - uc & 1 & H + uc & 0 \\ \lambda & 0 & \lambda & -(\gamma - 1)\lambda \end{pmatrix} \quad (5. 11)$$

Un calcul direct montre que :

$$\nabla \lambda_k(\mathbf{W}) \cdot \mathbf{r}_k(\mathbf{W}) = 0, \quad k = 2 \text{ ou } 4$$

Les champs caractéristiques  $\mathbf{r}_2$  et  $\mathbf{r}_4$  sont donc linéairement dégénérés et associés à des ondes de discontinuité (Sainsaulieu, 1995-b). La variable  $u$  est donc conservée à travers une discontinuité de contact.

Au contraire, on peut montrer que :

$$\nabla \lambda_k(\mathbf{W}) \cdot \mathbf{r}_k(\mathbf{W}) \neq 0, \quad k = 1 \text{ ou } 3$$

Les champs caractéristiques  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_3$  sont vraiment non linéaires, ils correspondent à des ondes de choc (cf. paragraphe 2.4.1) ou à des ondes de raréfaction (cf. paragraphe 2.4.2).

On notera que la définition particulière de la pression particulière implique une indépendance des équations de continuité et de quantité de mouvement par rapport à la température. Cette dernière joue donc un rôle découplé dans ce nouveau système d'équations. Le rôle de la variable  $\lambda$  est également à définir.

### 2.4.1 Ondes de choc

Les courbes de choc sont des solutions particulières discontinues de l'écoulement. Ces solutions faibles du problème sont obtenues par les relations de Rankine-Hugoniot qui caractérisent les solutions discontinues de (5. 3) :

$$\mathbf{F}(\mathbf{W}_G) - \mathbf{F}(\mathbf{W}_D) = \sigma(\mathbf{W}_G - \mathbf{W}_D)$$

où  $\sigma$  la vitesse de la discontinuité.

Appliquées aux équations du CPPM, ces équations s'écrivent sous la forme suivante :

$$[\rho u] = \sigma[\rho] \quad (5. 12)$$

$$[\rho u^2 + P] = \sigma[\rho u] \quad (5. 13)$$

$$[\rho u H] = \sigma[\rho E] \quad (5. 14)$$

$$[\rho u \lambda] = \sigma [\rho \lambda] \quad (5.15)$$

où  $[\cdot]$  représente le saut d'une variable entre deux états. On notera  $\mathbf{W}^*$  l'état séparé de l'état quelconque  $\mathbf{W}$  par une onde de choc. La variable  $\lambda$  étant purement convectée, elle restera constante à travers un choc (cf. 5. 12 et 5. 15), d'où :

$$[\lambda] = 0 \Rightarrow \lambda^* = \lambda \quad (5.16)$$

Déterminons à présent la relation de choc liée à la température. Les relations de Rankine-Hugoniot permettent d'écrire la relation suivante :

$$e^* - e + \left( \frac{1}{\rho^*} - \frac{1}{\rho} \right) \frac{(P^* + P)}{2} = 0 \quad (5.17)$$

où  $e$  est l'énergie "interne" du système, définie telle que l'énergie totale soit la somme de cette énergie interne et de l'énergie cinétique, soit pour la phase dispersée :

$$e = C_p T + \lambda \rho^{\gamma-1}$$

L'équation (5. 17) permet alors d'écrire pour la température de la phase dispersée une relation identique à celle du gaz :

$$T^* = T + \frac{\lambda}{2\rho\rho^* C_p} \left( (\gamma+1) (\rho^* \rho^\gamma - \rho \rho^{*\gamma}) - (\gamma-1) (\rho^{\gamma+1} - \rho^{*\gamma+1}) \right) \quad (5.18)$$

Par définition de l'entropie (5. 7), la température doit augmenter à travers un choc<sup>3</sup>. L'équation précédente implique que c'est également le cas pour la fraction volumique solide, soit :

$$\rho^* > \rho$$

Puisque l'équation sur la température est découplée des équations sur  $\rho$  et  $u$ , on résout ensuite le système constitué des équations (5. 13) et (5. 14) qui s'écrit, d'après la relation (5. 16), de la façon suivante :

$$\rho^* u^* - \rho u = \sigma (\rho^* - \rho) \quad (5.19)$$

$$\rho^* u^{*2} + \lambda \rho^{*\gamma} - (\rho u^2 + \lambda \rho^\gamma) = \sigma (\rho^* u^* - \rho u) \quad (5.20)$$

En remplaçant  $\sigma$  dans (5. 20) par l'expression  $\sigma = (\rho^* u^* - \rho u) / (\rho^* - \rho)$ , tirée de (5. 19), nous obtenons une équation du second degré en  $u^*$ . Il nous faut ensuite sélectionner les chocs admissibles, *ie* vérifiant cette équation et au travers desquels l'entropie augmente. Ces chocs entropiques sont tels que :

$$\text{pour une 1-onde de choc : } \rho^* > \rho_g, \lambda^* = \lambda_g, u^* = u_g - \sqrt{\lambda_g \left( \rho^{*\gamma} - \rho_g^\gamma \right) \left( \frac{1}{\rho_g} - \frac{1}{\rho^*} \right)} \quad (5.21)$$

<sup>3</sup> Puisque la variable  $\lambda$  reste constante à travers un choc.

$$\text{pour une 3-onde de choc : } \rho^* > \rho_d, \lambda^* = \lambda_d, u^* = u_d + \sqrt{\lambda_d \left( \rho^{*\gamma} - \rho_d^\gamma \right) \left( \frac{1}{\rho_d} - \frac{1}{\rho^*} \right)} \quad (5.22)$$

### 2.4.2 Ondes de détente

Les ondes de raréfaction sont associées à des champs vraiment non linéaires qui sont caractérisés ici par les valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_3$ . Ces ondes de détente peuvent être caractérisées par les invariants de Riemann  $\varphi$ . Soit une fonction  $\varphi(\rho, \rho u, \rho E, \rho \lambda)$ , ces invariants sont solutions de l'équation (Toumi, 1992) :

$$\vec{\nabla} \varphi \cdot \mathbf{r}_{1,3} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} + \frac{\partial \varphi}{\partial \rho u} (u \pm c) + \frac{\partial \varphi}{\partial \rho E} (H \pm uc) + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \rho \lambda} = 0$$

Si nous prenons comme variables indépendantes  $\rho, u, T, \lambda$  et considérons la fonction  $\Psi(\rho, u, T, \lambda)$ , on peut écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} &= \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} - \frac{u}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial u} + \frac{(u^2 - E - \lambda \rho)}{\rho C_p} \frac{\partial \Psi}{\partial T} - \frac{\lambda}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \rho u} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial u} - \frac{u}{\rho C_p} \frac{\partial \Psi}{\partial T} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \rho E} &= \frac{1}{\rho C_p} \frac{\partial \Psi}{\partial T} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \rho \lambda} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} - \frac{\rho^{\gamma-1}}{\rho C_p} \frac{\partial \Psi}{\partial T} \end{aligned}$$

L'équation précédente se réduit alors à :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \pm \frac{c}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial u} = 0 \Leftrightarrow \Psi = u \pm \int \frac{c}{\rho} d\rho$$

D'après l'expression (5.10), la solution de cette équation est  $\Psi = u \pm \frac{2c}{\gamma-1}$ . Les invariants de Riemann sont donc :

$$\Psi = T, \Psi = \lambda \text{ et } \Psi = u \pm \frac{2}{\gamma-1} c \quad (5.23)$$

On pose  $\xi = \frac{dx}{dt}$  et  $\xi = 0$  sur  $x = 0$ . Finalement les caractéristiques des ondes de détente cherchées sont telles que :

$$\text{pour une 1-onde de détente : } \rho^* < \rho_g, \xi = u - c, u + \frac{2}{\gamma-1} c = cste, T = cste, \lambda = cste \quad (5.24)$$

$$\text{pour une 3-onde de détente : } \rho^* < \rho_d, \xi = u + c, u - \frac{2}{\gamma-1} c = cste, T = cste, \lambda = cste \quad (5.25)$$

L'état  $\mathbf{W}^*$  correspond cette fois à un état séparé de  $\mathbf{W}$  par une onde de détente. On peut vérifier que l'entropie ne varie pas à travers cette détente, puisque les variables  $T$  et  $\lambda$  qui la définissent sont constantes.

### 2.4.3 Onde de discontinuité

L'étude des champs linéairement dégénérés permet aussi d'établir qu'à travers une discontinuité de contact, seules la vitesse et la pression ne subissent pas de saut. En effet, ces variables vérifient la relation suivante :

$$\vec{\nabla}\varphi \cdot \mathbf{r}_{2,4} = 0 \Leftrightarrow [P] = 0 \text{ et } [u] = 0$$

Par conséquent, les variables  $T, \rho, \lambda$  peuvent présenter un saut à travers une discontinuité de contact. Précisons que la fraction volumique et  $\lambda$  présentent un saut tel que  $[P] = [\lambda \rho'] = 0$ .

### 2.4.4 Structure de la solution et résolution

La solution du problème de Riemann pour la phase dispersée est de la forme suivante :

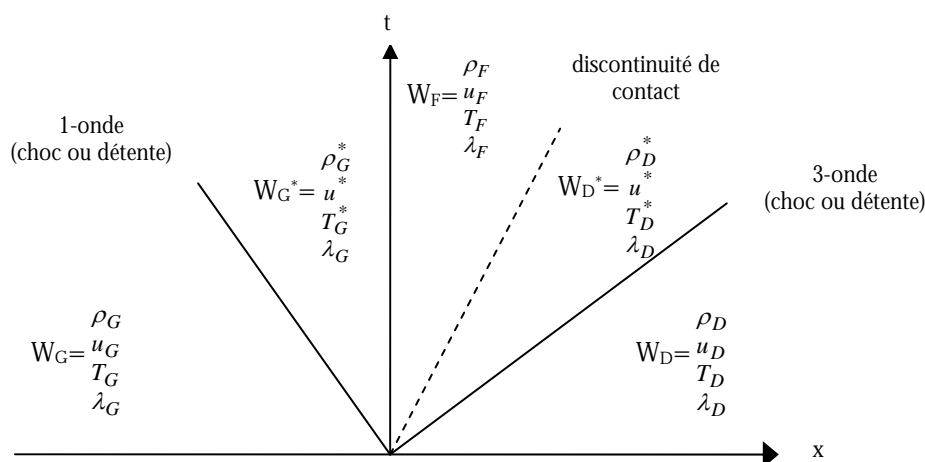
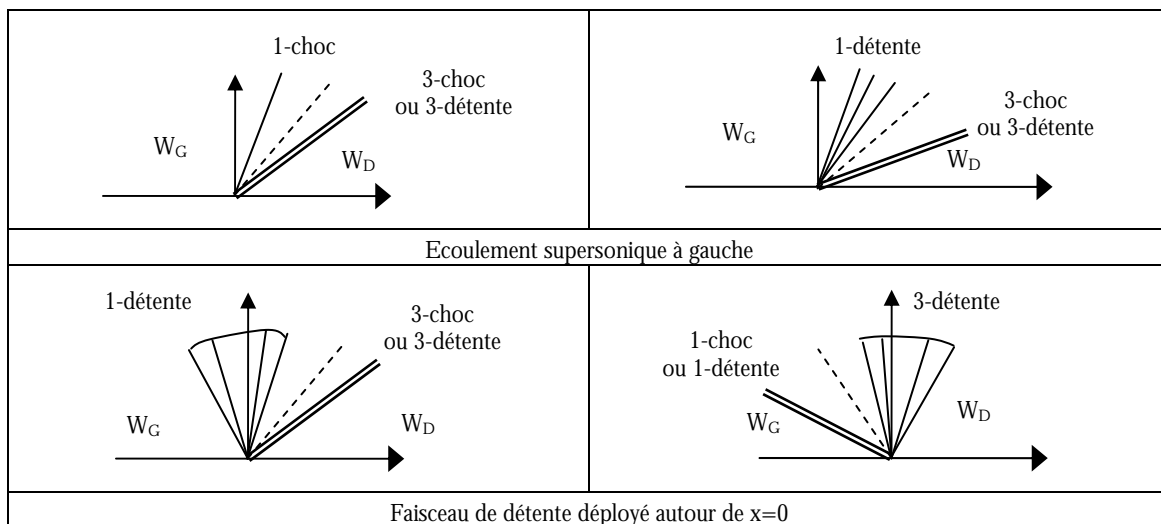
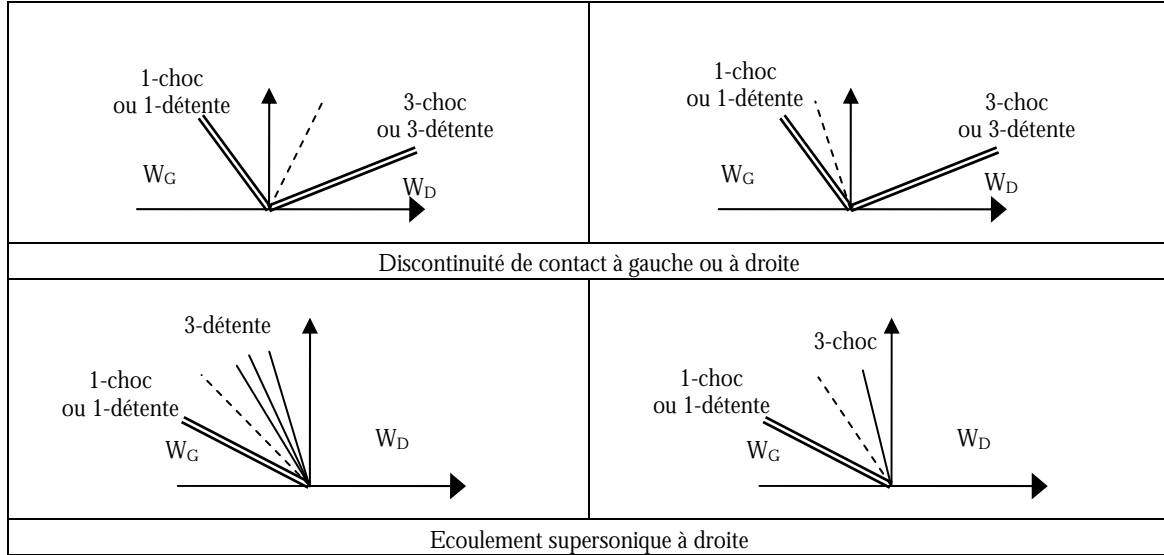


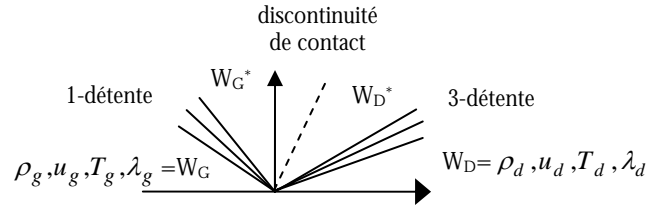
Figure 5- 2 : Solution du problème de Riemann pour la phase dispersée, structure d'ondes du CPPM

Les relations de choc et de détente permettent de déterminer l'état intermédiaire à gauche et à droite de l'interface ( $\mathbf{W}_G^*, \mathbf{W}_D^*$ ) en fonction des états connus  $\mathbf{W}_G$  et  $\mathbf{W}_D$ . La détermination de l'état  $\mathbf{W}_F$  à l'interface  $x = 0$  permettra de déterminer le flux numérique à l'interface :  $\phi = \mathbf{F}(\mathbf{W}_F)$ . Selon la disposition des ondes, différents cas -illustrés par les schémas suivants- sont possibles.





S'il s'agit d'une double détente, le problème se résout analytiquement. Les variables  $\lambda$  et  $T$  restant constantes à travers une onde de raréfaction (cf. (5. 24) et (5. 25)), leurs valeurs à l'interface  $(\lambda_F, T_F)$  sont simplement  $(\lambda_g, T_g)$  ou  $(\lambda_d, T_d)$  selon le signe de la vitesse de propagation de la discontinuité de contact.



**Figure 5- 3 : Solution constituée d'une double détente**

Pour déterminer la fraction volumique et la vitesse de l'état intermédiaire, il faut résoudre le système d'équations couplées suivant :

$$\begin{cases} u^* + \frac{2}{\gamma-1} \sqrt{\gamma(\gamma-1)\lambda_g \rho_g^{*\gamma-1}} = u_g + \frac{2}{\gamma-1} \sqrt{\gamma(\gamma-1)\lambda_g \rho_g^{\gamma-1}} \\ u^* - \frac{2}{\gamma-1} \sqrt{\gamma(\gamma-1)\lambda_d \rho_d^{*\gamma-1}} = u_d - \frac{2}{\gamma-1} \sqrt{\gamma(\gamma-1)\lambda_d \rho_d^{\gamma-1}} \end{cases}$$

On utilise la condition de saut de pression nulle à la discontinuité de contact pour résoudre ce système, soit :

$$\lambda_g \rho_g^{*\gamma} = \lambda_d \rho_d^{*\gamma} \quad (5. 26)$$

On obtient alors<sup>4</sup>, sous condition d'existence :

$$\rho_g^* = \left( \frac{((\gamma-1)(u_g - u_d) + 2(c_G + c_D))^2}{4\gamma(\gamma-1)\lambda_g \left(1 + (\lambda_d/\lambda_g)^{1/2\gamma}\right)^2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

$$\rho_d^* = \left( \frac{\lambda_g}{\lambda_d} \right)^{1/\gamma} \rho_g^*$$

$$u^* = \frac{1}{\lambda_g^{1/2\gamma} + \lambda_d^{1/2\gamma}} \left( \lambda_g^{1/2\gamma} \left( u_d - \frac{2}{\gamma-1} c_d \right) + \lambda_d^{1/2\gamma} \left( u_g + \frac{2}{\gamma-1} c_g \right) \right)$$

La condition d'existence  $\rho_g^* > 0$  n'est pas assurée si :

$$u_d - u_g > \frac{2}{\gamma-1} (c_g + c_d) \quad (5.27)$$

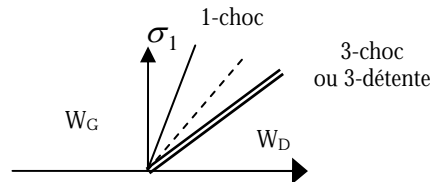
Nous étudierons ce cas particulier d'apparition du vide dans le paragraphe 0.

S'il ne s'agit pas d'une double détente, la solution est composée soit de deux ondes de choc, soit d'une onde de choc et d'une onde de détente. On utilise alors les équations (5.21), (5.22), (5.24) et (5.25). Du fait de leur forme non linéaire, on ne peut pas écrire de solution analytique et on utilise une méthode de Newton. A chaque itération on compare la fraction volumique solide de l'état initial ( $\mathbf{W}_G$  ou  $\mathbf{W}_D$ ) à celle issue de la méthode de Newton et on détermine ainsi s'il faut utiliser les relations de choc ou de détente.

Une fois la fraction volumique  $\rho_g^*$  obtenue pour l'état intermédiaire gauche, on détermine la fraction volumique  $\rho_d^*$  et la vitesse  $u^*$  associées (onde de choc ou de détente par rapport à l'un des états initiaux).

A ce stade du calcul, nous connaissons les états intermédiaires ( $\mathbf{W}_G^*$ ,  $\mathbf{W}_D^*$ ). Il nous reste à établir la répartition des ondes pour déterminer l'état à l'interface  $\mathbf{W}_F$ , nécessaire au calcul des flux par la méthode de Godunov. Pour cela nous calculons les vitesses de propagation des ondes et nous définissons leurs positions par rapport à l'interface.

Par exemple, dans le cas simple où l'écoulement est supersonique à gauche, la vitesse de propagation de la 1-onde de choc est  $\sigma_1 = \frac{\rho_g u_g - \rho_g^* u^*}{\rho_g - \rho_g^*} > 0$ , critère suffisant pour affirmer que l'état à l'interface est tel que  $\mathbf{W}_F = \mathbf{W}_G$ .



**Figure 5-4 : Ecoulement supersonique à gauche**

<sup>4</sup> Dans ces calculs la variable  $\lambda$  est bien sûr supposée non nulle. Dans le cas contraire, la pression particulière serait nulle et le système d'équations ne serait plus hyperbolique.



Le cas le plus compliqué correspond au faisceau de détente déployé de part et d'autre de l'interface, puisqu'il faut alors déterminer les caractéristiques de la détente sur  $\xi = 0$ . Ainsi, dans le cas illustré par la Figure 5- 5, nous avons  $u_d + c_d > 0$  mais  $u^* + c_d^* < 0$ . L'état recherché est alors tel que :

$$\xi_F = u_F + c_F = 0, \quad u_d - \frac{2}{\gamma-1}c_d = \text{cste} = u_F - \frac{2}{\gamma-1}c_F$$

Soit :

$$c_F = \frac{-(\gamma-1)u_d + 2c_d}{\gamma+1}, \quad \rho_F = \left( \frac{c_F^2}{\gamma(\gamma-1)\lambda_d} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}, \quad u_F = -c_F, \quad \lambda_F = \lambda_d \quad \text{et} \quad T_F = T_d$$

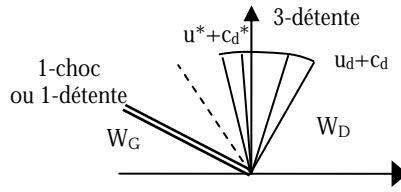


Figure 5- 5 : Détente de part et d'autre de l'interface

Tous les cas peuvent être traités ainsi, en calculant les vitesses de propagation des ondes afin de savoir quel est l'état à la face, pour des états initiaux non vides et n'aboutissant pas à une apparition du vide. Nous allons à présent nous intéresser au modèle diphasique à pression particulière simplifié. Les équations nécessaires à la résolution numérique du problème de Riemann associé sont présentées ci-après.

## 2.5 Résolution pour le système convectif du SPPM

Le système convectif du SPPM est donné par l'équation (5. 28), pour une loi de pression telle que  $P = \lambda \rho^2$ . Par hypothèse de modélisation, la variable  $\lambda$  est une grandeur constante le long d'une trajectoire. En toute rigueur il faudrait donc transporter cette grandeur également. Cela donnerait un système à 4 équations nécessitant l'initialisation de cette grandeur  $\lambda$  et un traitement particulier des conditions aux limites. Ce système, trop proche du modèle complet, perd donc son intérêt. C'est pourquoi nous avons décidé de considérer  $\lambda$  comme une constante dans tout le domaine de calcul, sachant que le modèle diphasique complet permet d'éviter la détermination de cette constante.

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{W} + \frac{\partial}{\partial x} F(\mathbf{W}) = \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P \\ \rho u H \end{pmatrix} = 0 \quad (5. 28)$$

Ce modèle est similaire au système des équations d'Euler, mais la loi de pression particulière exhibée par ce modèle nécessite de développer un solveur numérique adéquat. Celui-ci est directement issu de l'étude du problème de Riemann présentée pour le CPPM. En effet, dans ce modèle,  $\lambda$  ne varie qu'à travers une discontinuité de contact. Il est donc facile d'obtenir les équations du solveur de Godunov du modèle simplifié : il suffit de considérer  $\lambda_g = \lambda_d$  dans les équations précédemment établies et  $\gamma = 2$ .

### 2.5.1 Entropie du système

L'entropie de ce système est déterminée directement depuis l'expression obtenue pour le modèle complet (5. 7) en considérant la variable  $\lambda$  constante, soit :

$$s = s_o + C_p \ln\left(\frac{T}{T_0}\right)$$

L'entropie d'un système fermé restant constante au cours d'une détente et augmentant à travers un choc, la température de la phase dispersée doit rester constante au cours d'une détente et augmenter à travers un choc. Une discontinuité de contact sur la température  $T$  doit donc nécessairement exister, comme dans le cas du CPPM.

### 2.5.2 Hyperbolicité du système convectif du SPPM

La matrice Jacobienne du système (5. 28), déterminée avec les variables indépendantes  $\rho, \rho u, \rho E$  est définie par :

$$\mathbf{J}(\mathbf{U}) = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{W})}{\partial \mathbf{W}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -u^2 + 2\lambda\rho & 2u & 0 \\ -uH + 2u\lambda\rho & H & u \end{bmatrix} \quad (5. 29)$$

Cette matrice admet trois valeurs propres réelles et distinctes :

$$\lambda_1 = u - c, \quad \lambda_2 = u, \quad \lambda_3 = u + c \quad (5. 30)$$

Le système est donc strictement hyperbolique (tant que  $\rho \neq 0$ ). La variable  $c$  est la vitesse du son diphasique, définie comme précédemment (5. 10), soit :

$$c = \sqrt{2\lambda\rho}$$

### 2.5.3 Ecriture d'un solveur de Godunov

Les vecteurs propres de la Jacobienne, associés aux trois valeurs propres  $\lambda_i(\mathbf{W}), i = 1, \dots, 3$  sont donnés par :

$$r_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ u - c \\ H - uc \end{pmatrix}, \quad r_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad r_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ u + c \\ H + uc \end{pmatrix} \quad (5. 31)$$

On peut montrer que les champs caractéristiques  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_3$  (respectivement  $\mathbf{r}_2$ ) sont vraiment non linéaires (resp. linéairement dégénéré) et donc associés à des ondes de choc ou des ondes de raréfaction (resp. des ondes de discontinuité).

Les calculs réalisés précédemment pour le modèle complet permettent d'appréhender la structure d'ondes associée au système simplifié. Ainsi, la fraction volumique et la vitesse vont être modifiées à travers les ondes de choc et de détente. En revanche, la pression reste conservée à travers une discontinuité de contact. Par définition de la pression particulière pour le modèle simple, cela impose une égalité des fractions volumiques de chaque côté de la discontinuité, soit :

$$\rho_g^* = \rho_d^* = \rho^*$$

Dans le cas du SPPM, il n'existe donc pas de discontinuité sur la fraction volumique.

Les équations pour le choc et la détente sont donc dérivées de celles du modèle complet en posant  $\gamma = 2$ ,  $\lambda_g = \lambda_d = \lambda$ . Ainsi, les équations obtenues dans le cas d'un choc sont les suivantes (cf. (5. 21) et (5. 22)) :

$$\text{pour une 1-onde de choc : } \rho^* > \rho_g \text{ et } u^* = u_g - \sqrt{\lambda \frac{(\rho^* - \rho_g)^2 (\rho^* + \rho_g)}{\rho^* \rho_g}}$$

$$\text{pour une 3-onde de choc : } \rho^* > \rho_d \text{ et } u^* = u_d + \sqrt{\lambda \frac{(\rho^* - \rho_d)^2 (\rho^* + \rho_d)}{\rho^* \rho_d}}$$

La température après le choc est définie par l'équation (5. 18), soit :

$$T^* = T + \frac{\lambda}{C_p} \frac{(\rho^* - \rho)^3}{2\rho^* \rho}$$

Les invariants de Riemann, donnés par l'équation (5. 23), sont :

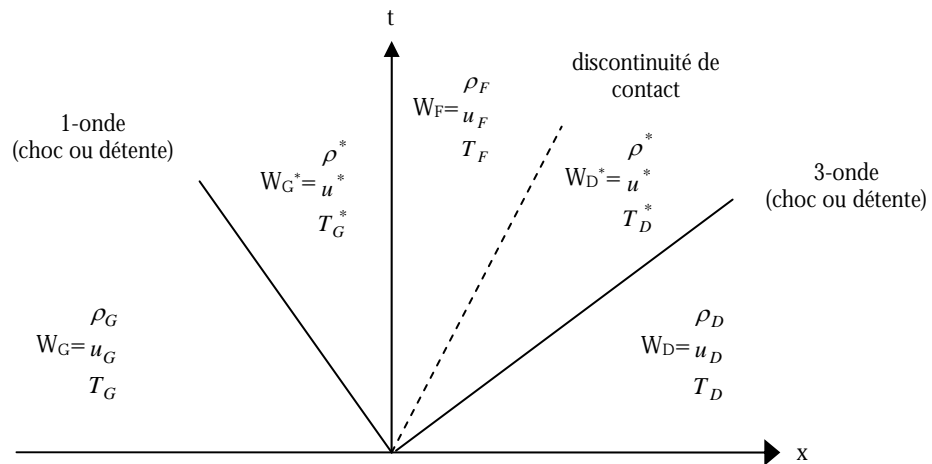
$$\Psi = T, \quad \Psi = u \pm 2c = u \pm 2\sqrt{2\lambda\rho}$$

Les équations pour une détente sont (cf. (5. 24) et (5. 25)) :

$$\text{pour une 1-onde de détente : } \rho^* < \rho_g, \quad \xi = u - c \text{ et } u + 2c = cste$$

$$\text{pour une 3-onde de détente : } \rho^* < \rho_d, \quad \xi = u + c \text{ et } u - 2c = cste$$

Finalement, la solution du problème de Riemann pour la phase dispersée est de la forme suivante :



**Figure 5- 6 : Solution du problème de Riemann pour la phase dispersée : structure d'ondes du SPPM.**

La discontinuité de contact, si elle existe, ne concerne que la température. Comme pour le modèle complet, si la solution est une double détente, le problème se résout analytiquement<sup>5</sup> et on obtient :

$$\rho^* = \frac{1}{32\lambda} (u_g - u_d + 2(c_g + c_d))^2$$

$$u^* = \frac{u_g + u_d}{2} + c_g - c_d$$

Sinon, la méthode de résolution est identique à celle présentée dans le cas du modèle complet.

### 3. Résolution approchée du problème de Riemann pour les modèles diphasiques à pression particulaire

Dans ce paragraphe, nous présentons les développements théoriques réalisés pour écrire un solveur approché. La méthode classique de Roe (1981) peut être appliquée au système convectif du modèle simplifié. En revanche, il s'avère que la loi de pression particulaire associée au CPPM ne possède pas une forme adaptée. Nous contournerons cette difficulté en utilisant la méthode de Roe étendue par Toumi (1992).

La méthode de Roe appliquée au système du SPPM est présentée au paragraphe 3.2, puis nous développons la méthode de Toumi. Ce paragraphe théorique et numérique est rendu un peu plus digeste par l'application des deux solveurs approchés au cas test du tube à choc.

#### 3.1 Principe

Soit un système d'équations non linéaires, conservatif et hyperbolique, associé à une condition initiale discontinue :

$$\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{Z})}{\partial x} = 0$$

$$\mathbf{Z}(x,0) = \mathbf{Z}_G \quad \text{si } x < 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{Z}_D \quad \text{si } x > 0$$

Pour résoudre le problème de Riemann associé à ce système, Roe (1981) a introduit la linéarisation locale suivante :

$$\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{Z}_G, \mathbf{Z}_D) \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial x} = 0$$

$\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{Z}_G, \mathbf{Z}_D)$  est une matrice moyenne de la Jacobienne  $\mathbf{J}(\mathbf{Z}) = \mathbf{F}_{\mathbf{Z}}$  qu'il nous faut déterminer. Cette matrice moyenne est appelée matrice de Roe et doit posséder les propriétés suivantes :

$$\mathbf{F}(\mathbf{Z}_G) - \mathbf{F}(\mathbf{Z}_D) = \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{Z}_G, \mathbf{Z}_D) (\mathbf{Z}_G - \mathbf{Z}_D)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}) = \mathbf{J}(\mathbf{Z})$$

$$\tilde{\mathbf{A}} \text{ est diagonalisable}$$

---

<sup>5</sup> La condition d'existence de  $\rho^*$  sera également étudiée au paragraphe 4.

La première propriété assure que les chocs du système linéaire sont aussi ceux du système non-linéaire. La seconde propriété exprime la consistance du solveur, c'est-à-dire la continuité de la première relation lorsque les deux états gauche et droit convergent vers le même état. L'existence de cette matrice pour tout système entropique a été montrée.

Le flux  $\phi(\mathbf{Z}_G, \mathbf{Z}_D)$  qui passe à l'interface en fonction des états gauche et droit  $(\mathbf{Z}_G, \mathbf{Z}_D)$  est alors :

$$\phi(\mathbf{Z}_G, \mathbf{Z}_D) = \frac{1}{2} [\mathbf{F}(\mathbf{Z}_G) + \mathbf{F}(\mathbf{Z}_D) + \Delta \mathbf{F}]$$

$$\Delta \mathbf{F} = \mathbf{T}^{-1}(\bar{\mathbf{Z}}) |\Lambda(\bar{\mathbf{Z}})| \mathbf{T}(\bar{\mathbf{Z}}) (\mathbf{Z}_G - \mathbf{Z}_D)$$

$\bar{\mathbf{Z}}$  est l'état moyen de Roe défini de sorte que  $\mathbf{J}(\bar{\mathbf{Z}}) = \tilde{\mathbf{A}}$ .  $\mathbf{T}(\bar{\mathbf{Z}})$  et  $\mathbf{T}^{-1}(\bar{\mathbf{Z}})$  sont respectivement la matrice des vecteurs propres de la matrice de Roe et son inverse.  $|\Lambda|$  est la matrice diagonale des valeurs propres absolues de la matrice de Roe.

Une telle matrice  $\mathbf{T}^{-1}|\Lambda|\mathbf{T} = \tilde{\mathbf{A}}$  a été construite par Roe pour les équations d'Euler. Le problème posé est de déterminer cette matrice pour les équations des modèles diphasiques à pression particulière CPPM et SPPM.

### 3.2 Ecriture d'un solveur de Roe (SPPM)

Le système d'équations à résoudre est celui donné par (5. 28) et la Jacobienne du système est définie par<sup>6</sup> :

$$\mathbf{J}(\mathbf{U}) = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -u^2 + P_\rho & 2u + P_{\rho u} & P_{\rho E} \\ -uH + uP_\rho & H + uP_{\rho u} & u + uP_{\rho E} \end{bmatrix}$$

où  $U = {}^t(\rho, \rho u, \rho E)$  et où les dérivées de la pression particulière sont définies par :

$$P_\rho = P / \rho, \quad P_{\rho u} = 0, \quad P_{\rho E} = 0$$

#### 3.2.1 Etude théorique

La première étape de construction d'un solveur de Roe consiste à déterminer l'état moyen de Roe (Roe, 1981) associé au système convectif. Nous posons pour paramètre vecteur :

$$\mathbf{W} = {}^t [w_1, w_2, w_3] = {}^t [\sqrt{\rho}, \sqrt{\rho}u, \sqrt{\rho}H] \quad (5. 32)$$

Les relations de saut de  $\mathbf{U}$  et de  $\mathbf{F}(\mathbf{U})$  en fonction de ce paramètre vecteur permettent de définir deux matrices  $\tilde{\mathbf{B}}$  et  $\tilde{\mathbf{C}}$  telles que  $\Delta \mathbf{U} = \tilde{\mathbf{B}} \Delta \mathbf{W}$  et  $\Delta \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \tilde{\mathbf{C}} \Delta \mathbf{W}$ , et d'écrire  $\Delta \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{B}}^{-1} \Delta \mathbf{U}$ . En comparant cette matrice 3\*3 avec la Jacobienne appliquée à l'état moyen  $\bar{\mathbf{U}} = {}^t [\bar{\rho}, \bar{\rho}u, \bar{\rho}E]$ , nous devrions être capables de déterminer cet état moyen. L'opérateur  $\Delta$ , introduit dans Roe (1981), est tel que :  $\Delta(\cdot) = (\cdot)_g - (\cdot)_d$ .

<sup>6</sup> La matrice Jacobienne de ce système est celle donnée par la relation (5. 29), nous l'écrivons ici en conservant les expressions des dérivées de la pression, dans un souci de généralité.

En fonction de ces définitions, l'état des variables conservatives  $\mathbf{U}$  s'écrit :

$$\mathbf{U} = {}^t(w_1^2, w_1 w_2, w_1 w_3 - \lambda w_1^4)$$

et le vecteur des flux  $\mathbf{F}$  est :

$$\mathbf{F} = {}^t(w_1 w_2, w_2^2 + \lambda w_1^4, w_2 w_3)$$

On pose  $\bar{\delta} = \bar{w}_3 - 4\lambda \bar{w}_1 \bar{w}_1^2$ . La matrice  $\tilde{\mathbf{B}}$  et son inverse sont respectivement données par :

$$\tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 2\bar{w}_1 & 0 & 0 \\ \bar{w}_2 & \bar{w}_1 & 0 \\ \bar{\delta} & 0 & \bar{w}_1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{B}}^{-1} = \frac{1}{2\bar{w}_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\bar{w}_2/\bar{w}_1 & 2 & 0 \\ -\bar{\delta}/\bar{w}_1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Le calcul de la matrice  $\tilde{\mathbf{C}}$  telle que  $\Delta\mathbf{F}(\mathbf{U}) = \tilde{\mathbf{C}}\Delta\mathbf{W}$  donne :

$$\tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \bar{w}_2 & \bar{w}_1 & 0 \\ 4\lambda\bar{w}_1\bar{w}_1^2 & 2\bar{w}_2 & 0 \\ 0 & \bar{w}_3 & \bar{w}_2 \end{bmatrix}$$

Finalement, nous obtenons :

$$\tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{B}}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\left(\frac{\bar{w}_2}{\bar{w}_1}\right)^2 + 2\lambda\bar{w}_1^2 & 2\frac{\bar{w}_2}{\bar{w}_1} & 0 \\ -\frac{\bar{w}_3}{\bar{w}_1}\frac{\bar{w}_2}{\bar{w}_1} + \frac{\bar{w}_2}{\bar{w}_1}2\lambda\bar{w}_1^2 & \frac{\bar{w}_3}{\bar{w}_1} & \frac{\bar{w}_2}{\bar{w}_1} \end{bmatrix}$$

La comparaison terme à terme de cette matrice avec la Jacobienne appliquée à l'état moyen  $\bar{\mathbf{U}} = {}^t[\bar{\rho}, \bar{\rho}u, \bar{\rho}E]$ , définie par :

$$\mathbf{J}(\bar{\mathbf{U}}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\bar{u}^2 + \bar{P}_\rho & 2\bar{u} & 0 \\ -\bar{u}\bar{H} + \bar{u}\bar{P}_\rho & \bar{H} & \bar{u} \end{bmatrix}$$

nous permet de déterminer cet état moyen. Ainsi, avec  $r = \sqrt{\rho_d / \rho_g}$ , nous obtenons facilement :

$$\bar{u} = \frac{\bar{w}_2}{\bar{w}_1} = \frac{u_g + r u_d}{1 + r}$$

$$\bar{H} = \frac{\bar{w}_3}{w_1} = \frac{H_g + r H_d}{1 + r}$$

$$\bar{P}_\rho = 2\lambda \bar{w}_1^2 = \lambda(\rho_g + \rho_d)$$

Nous vérifions que cette définition de la dérivée de pression moyenne  $\bar{P}_\rho$  vérifie la relation de saut sur la pression :

$$\Delta P = \bar{P}_\rho \Delta \rho = \lambda(\rho_g^2 - \rho_d^2) \quad (5.33)$$

La vitesse du son diphasique moyenne associée est définie par :

$$\bar{c}^2 = \bar{P}_\rho = \lambda(\rho_g + \rho_d) \quad (5.34)$$

L'état moyen de Roe est ainsi entièrement déterminé. Nous avons déjà calculé les valeurs propres de ce système (5.30), nous en déduisons donc la matrice diagonale des valeurs propres absolues :

$$|\Lambda| = \begin{pmatrix} |\bar{u} - \bar{c}| & 0 & 0 \\ 0 & |\bar{u}| & 0 \\ 0 & 0 & |\bar{u} + \bar{c}| \end{pmatrix}$$

De même nous connaissons les vecteurs propres de ce système (5.31) d'où les matrices de passage suivantes :

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \bar{u} - \bar{c} & 0 & \bar{u} + \bar{c} \\ \bar{H} - \bar{u}\bar{c} & 1 & \bar{H} + \bar{u}\bar{c} \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} (\bar{c} + \bar{u})/2\bar{c} & -1/2\bar{c} & 0 \\ \bar{u}^2 - \bar{H} & -\bar{u} & 1 \\ (\bar{c} - \bar{u})/2\bar{c} & 1/2\bar{c} & 0 \end{pmatrix} \quad (5.35)$$

La matrice  $\mathbf{T}^{-1}|\Lambda|\mathbf{T}$  est entièrement déterminée. Nous avons donc écrit un solveur de Roe pour le modèle diphasique à pression particulaire simplifié.

### 3.2.2 Le cas test du tube à choc

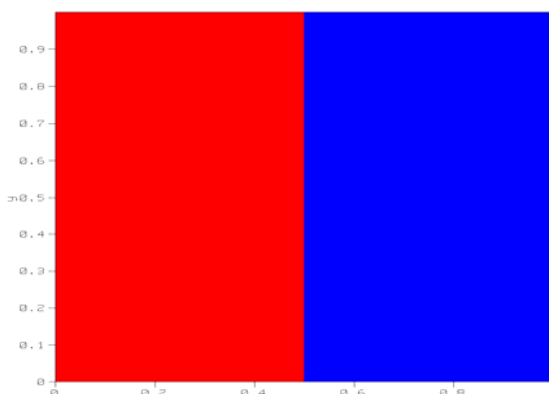
Ce solveur de Roe a été testé sur un cas test de tube à choc : on simule un écoulement avec une discontinuité initiale sur la fraction volumique solide, exactement de la même façon que pour un tube à choc appliqué à une phase gazeuse. Pour retrouver la structure des ondes, nous effectuons des simulations numériques sur un calcul diphasique, mais en découplant les phases<sup>7</sup>. Ainsi les particules ne sont pas entraînées par le gaz et seule la phase dispersée agit sur elle-même.

Les résultats obtenus confirment l'analyse théorique effectuée lors du développement du solveur de Godunov. Une discontinuité initiale sur la fraction volumique solide (cf. Figure 5-7) est équivalente à une discontinuité de pression. Nous observons la propagation dans le milieu dispersé d'une onde de choc et d'une onde de détente.

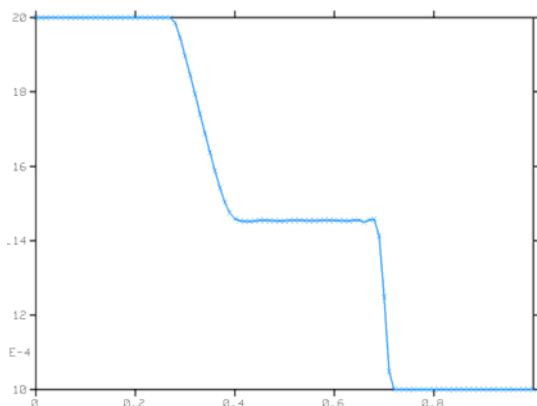
Les profils de fraction volumique solide et de vitesse particulaire sont semblables à ceux que l'on obtiendrait en simulant un tube à choc pour une phase gazeuse (cf. Figure 5-8 et Figure 5-9). Les vitesses de propagation des ondes ainsi que le niveau du palier intermédiaire sur la fraction volumique ont été calculés analytiquement : les solutions numérique et analytique sont bien identiques.

<sup>7</sup> Les termes sources, assurant le couplage entre les phases gazeuse et dispersée, ne sont pas calculés.

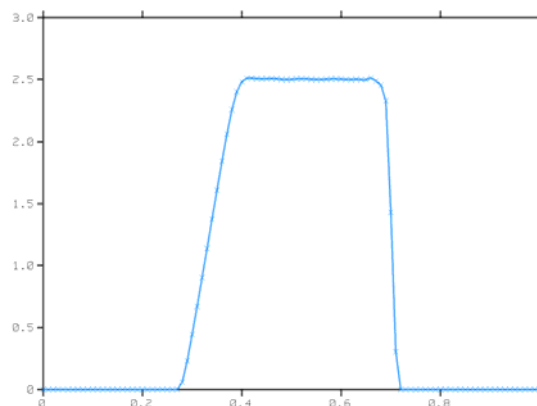
L'absence de discontinuité de contact sur la fraction volumique est bien retrouvée par la simulation numérique : le système d'équations de la phase dispersée a un comportement très proche de celui d'un gaz, mais pas identique du fait que la pression n'est fonction que de la fraction volumique  $\alpha_p$ .



**Figure 5- 7 : Tube à choc diphasique, discontinuité initiale sur la fraction volumique.**



**Figure 5- 8 : Profil de fraction volumique solide, SPPM, lambda=10.**



**Figure 5- 9 : Profil de vitesse particulaire axiale, SPPM, lambda=10.**

### 3.3 Ecriture d'un solveur de Roe-Toumi (CPPM)

La loi de pression particulière du modèle complet CPPM ne permet pas d'établir une matrice de Roe unique en utilisant la méthode de Roe de base. Il a en effet été montré que la loi d'état doit être au plus quadratique pour que la méthode de Roe s'applique avec succès. Dans le cas du SPPM, la loi de pression, du type  $f = ax^2$  avec  $a$  constante, est bien une forme quadratique. En revanche, pour le CPPM, l'équation d'état est de la forme  $f = a'yx^\gamma$ , qui n'est pas quadratique<sup>8</sup>.

Pour remédier à ce problème, nous avons appliqué la méthode de Toumi (Toumi, 1992 ; Toumi *et al*, 1999). L'intérêt de cette méthode est d'être générale et de permettre l'écriture d'un solveur de Roe pour une équation d'état quelconque. Elle tient compte des dérivées de la pression particulière en fonction des variables qui la définissent, soit  $\rho$  et  $\lambda$  dans le cas du CPPM.

<sup>8</sup> Par curiosité, nous avons tenté d'appliquer la méthode de Roe au CPPM, dans le cas où le coefficient  $\gamma$  vaut 2. Il est possible d'écrire une matrice de Roe, qui s'identifie à la Jacobienne appliquée à l'état moyen, mais la relation de saut de pression telle que celle écrite (5. 33) n'est pas vérifiée.



### 3.3.1 Etude théorique

L'approche de Toumi s'appuie sur la définition d'une courbe  $\Phi$  qui connecte un état gauche  $\mathbf{Z}_G$  à un état droit  $\mathbf{Z}_D$  :

$$\Phi(\theta, \mathbf{Z}_G, \mathbf{Z}_D) : [0,1] \times Z \times Z \rightarrow Z$$

de sorte que :

$$\Phi(0, \mathbf{Z}_G, \mathbf{Z}_D) = \mathbf{Z}_G \text{ et } \Phi(1, \mathbf{Z}_G, \mathbf{Z}_D) = \mathbf{Z}_D$$

On cherche les solutions approchées du problème de Riemann, qui sont solutions exactes du problème linéarisé  $\mathbf{Z}_t + \mathbf{A}(\mathbf{Z}_G, \mathbf{Z}_D)_\Phi \mathbf{Z}_x = 0$  où  $\mathbf{A}(\mathbf{Z}_G, \mathbf{Z}_D)_\Phi$  est une matrice constante qui dépend des états  $\mathbf{Z}_G$  et  $\mathbf{Z}_D$ , et du chemin  $\Phi$  qui connecte ces deux états.

On choisit le chemin  $\Phi(\theta, \mathbf{Z}_G, \mathbf{Z}_D) = \mathbf{Z}_G + \theta(\mathbf{Z}_D - \mathbf{Z}_G)$ , alors :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = \mathbf{Z}_D - \mathbf{Z}_G$$

et on obtient :

$$\mathbf{A}(\mathbf{Z}_G, \mathbf{Z}_D)_\Phi = \int_0^1 \mathbf{A}[\mathbf{Z}_G + \theta(\mathbf{Z}_D - \mathbf{Z}_G)] d\theta$$

On introduit ensuite le changement de variable intermédiaire  $\mathbf{Z} = g(\boldsymbol{\Omega})$  tel que :

$$\Phi(\theta, \mathbf{Z}_G, \mathbf{Z}_D) = g(\boldsymbol{\Omega}_G + \theta(\boldsymbol{\Omega}_D - \boldsymbol{\Omega}_G))$$

Nous utilisons le paramètre vecteur suivant :

$$\boldsymbol{\Omega} = {}^t [w_1, w_2, w_3, w_4] = {}^t [\sqrt{\rho}, \sqrt{\rho}u, \sqrt{\rho}H, \sqrt{\rho}\lambda] \quad (5.36)$$

Ce qui donne :

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \\ \rho \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1^2 \\ w_1 w_2 \\ w_1 w_3 - P \\ w_1 w_4 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{F}(\mathbf{Z}) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P \\ \rho u H \\ \rho u \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 w_2 \\ w_2^2 + P \\ w_2 w_3 \\ w_2 w_4 \end{pmatrix}$$

Et nous cherchons à définir l'état moyen  $\bar{\mathbf{U}} = {}^t [\bar{\rho}, \bar{\rho}u, \bar{\rho}E, \bar{\rho}\lambda]$ .

La pression particulière dépend de  $\rho$  et  $\lambda$ , soit :  $P = P(w_1, w_4)$ , mais elle n'est pas directement exprimée en fonction du vecteur  $\boldsymbol{\Omega}$ , comme dans la méthode de Roe de base. Cela permet, entre autre, de conserver une expression très générale de la loi de pression particulière.

Pour la variable  $w_j$ , nous considérons le chemin suivant :  $w_j(\theta) = w_{jg} + \theta(w_{jd} - w_{jg})$ , qui traduit le passage de son état gauche  $w_{jg}$  ( $\theta = 0$ ) à son état droit  $w_{jd}$  ( $\theta = 1$ ). Par exemple, nous avons :

$$w_1 = \sqrt{\rho} = \sqrt{\rho_g} + \theta(\sqrt{\rho_d} - \sqrt{\rho_g}).$$

En définissant :  $\mathbf{R} = \int_0^1 \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \Omega}(\theta) d\theta$  et  $\mathbf{Q} = \int_0^1 \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \Omega}(\theta) d\theta$ , on peut écrire :  $\Delta \mathbf{F} = \mathbf{Q}(\Omega_D - \Omega_G)$  et  $\Delta \mathbf{Z} = \mathbf{R}(\Omega_D - \Omega_G)$  ; soit :

$$\Delta \mathbf{F} = \mathbf{Q} \mathbf{R}^{-1} \Delta \mathbf{Z} \text{ et } \mathbf{A}(\mathbf{Z}_G, \mathbf{Z}_D)_\Phi = \mathbf{Q} \mathbf{R}^{-1}$$

Le calcul des Jacobiennes  $\mathbf{Z}_\Omega$  et  $\mathbf{F}_\Omega$  donne, en notant  $P_{w_j} = \frac{\partial P}{\partial w_j}$  :

$$\mathbf{Z}_\Omega = \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \Omega} = \begin{pmatrix} 2w_1 & 0 & 0 & 0 \\ w_2 & w_1 & 0 & 0 \\ w_3 - P_{w_1} & 0 & w_1 & -P_{w_4} \\ w_4 & 0 & 0 & w_1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{F}_\Omega = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \Omega} = \begin{pmatrix} w_2 & w_1 & 0 & 0 \\ P_{w_1} & 2w_2 & 0 & P_{w_4} \\ 0 & w_3 & w_2 & 0 \\ 0 & w_4 & 0 & w_2 \end{pmatrix}$$

On cherche à présent à calculer les matrices  $\mathbf{Q}$  et  $\mathbf{R}$ . Si on pose :

$$\overline{w_j} = \int_0^1 w_j(\theta) d\theta \text{ et } \overline{P_{w_j}} = \int_0^1 \frac{\partial P}{\partial w_j}(\theta) d\theta$$

après intégration nous obtenons :

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \overline{2w_1} & 0 & 0 & 0 \\ \overline{w_2} & \overline{w_1} & 0 & 0 \\ \overline{w_3 - P_{w_1}} & -\overline{P_{w_2}} & \overline{w_1 - P_{w_3}} & -\overline{P_{w_4}} \\ \overline{w_4} & 0 & 0 & \overline{w_1} \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \overline{w_2} & \overline{w_1} & 0 & 0 \\ \overline{P_{w_1}} & 2\overline{w_2} + \overline{P_{w_2}} & \overline{P_{w_3}} & \overline{P_{w_4}} \\ 0 & \overline{w_3} & \overline{w_2} & 0 \\ 0 & \overline{w_4} & 0 & \overline{w_2} \end{pmatrix}$$

En notant  $\overline{d} = \frac{1}{\overline{w_1}} \left( \overline{P_{w_1}} - \overline{w_3} - \frac{\overline{w_4 P_{w_4}}}{\overline{w_1}} \right)$ , l'inverse de  $\mathbf{R}$  s'écrit :

$$\mathbf{R}^{-1} = \frac{1}{2\overline{w_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\overline{w_2}}{\overline{w_1}} & 2 & 0 & 0 \\ \overline{d} & 0 & 2 & \frac{2\overline{P_{w_4}}}{\overline{w_1}} \\ -\frac{\overline{w_4}}{\overline{w_1}} & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La comparaison de cette matrice avec la Jacobienne du système, donnée par :

$$\mathbf{J}(\bar{\mathbf{U}}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\bar{u}^2 + \bar{P}_\rho & 2\bar{u} & 0 & \bar{P}_{\rho\lambda} \\ -\bar{u} \bar{H} + \bar{u} \bar{P}_\rho & \bar{H} & \bar{u} & \bar{u} \bar{P}_{\rho\lambda} \\ -\bar{u} \bar{\lambda} & \bar{\lambda} & 0 & \bar{u} \end{bmatrix}$$

permet d'identifier les variables suivantes :

$$\bar{u} = \frac{\bar{w}_2}{w_1}; \quad \bar{H} = \frac{\bar{w}_3}{w_1}; \quad \bar{\lambda} = \frac{\bar{w}_4}{w_1}$$

$$\bar{P}_\rho = \frac{\bar{w}_1 \bar{P}_{w_1} - \bar{w}_4 \bar{P}_{w_4}}{2w_1}; \quad \bar{P}_{\rho\lambda} = \frac{\bar{P}_{w_4}}{w_1}$$

Il nous faut à présent calculer les termes  $\bar{w}_j$  et  $\bar{P}_{w_j}$ . Les premiers sont faciles à déterminer :

$$\bar{w}_j = \int_0^1 w_j(\theta) d\theta = \frac{w_{jg} + w_{jd}}{2}$$

L'intégration des termes  $\bar{P}_{w_j} = \int_0^1 \frac{\partial P}{\partial w_j}(\theta) d\theta$  est possible sans approximation numérique car la loi de

pression particulière donnée par  $P = (\gamma - 1)\lambda\rho^\gamma = (\gamma - 1)w_4 (w_1)^{2\gamma-1}$  est relativement simple. Nous obtenons :

$$\begin{cases} \bar{P}_{w_1} = (\gamma - 1)(2\gamma - 1)w_1^{2(\gamma-1)} w_4 \\ \bar{P}_{w_4} = (\gamma - 1)w_1^{2\gamma-1} \end{cases}$$

Et après quelques calculs, il vient :

$$\bar{P}_{w_4} = \begin{cases} \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \frac{w_{1d}^{2\gamma} - w_{1g}^{2\gamma}}{w_{1d} - w_{1g}} & \text{si } w_{1d} \neq w_{1g} \\ (\gamma - 1)w_{1d}^{2\gamma-1} & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\bar{P}_{w_1} = \begin{cases} (\gamma - 1) \left( \frac{w_{1d}^{2\gamma-1} w_{4d} - w_{1g}^{2\gamma-1} w_{4g}}{w_{1d} - w_{1g}} - \frac{(w_{4d} - w_{4g})(w_{1d}^{2\gamma} - w_{1g}^{2\gamma})}{2\gamma(w_{1d} - w_{1g})^2} \right) & \text{si } w_{1d} \neq w_{1g} \\ (\gamma - 1) \left( \gamma - \frac{1}{2} \right) w_{1d}^{2\gamma-2} (w_{4d} + w_{4g}) & \text{sinon} \end{cases}$$

L'état moyen est alors défini par :

$$\bar{u} = \frac{\sqrt{\rho_g} u_g + \sqrt{\rho_d} u_d}{\sqrt{\rho_g} + \sqrt{\rho_d}}$$

$$\begin{aligned}\bar{H} &= \frac{\sqrt{\rho_g} H_g + \sqrt{\rho_d} H_d}{\sqrt{\rho_g} + \sqrt{\rho_d}} \\ \bar{\lambda} &= \frac{\sqrt{\rho_g} \lambda_g + \sqrt{\rho_d} \lambda_d}{\sqrt{\rho_g} + \sqrt{\rho_d}} \\ \bar{P}_\rho &= \begin{cases} \frac{(\gamma-1)}{(\rho_g - \rho_d)} \left\{ \rho_g^\gamma \lambda_g - \rho_d^\gamma \lambda_d - \frac{1}{\gamma} \frac{(\rho_g^\gamma - \rho_d^\gamma)(\rho_g \lambda_g - \rho_d \lambda_d)}{(\rho_g - \rho_d)} \right\} & \text{si } \rho_g \neq \rho_d \\ \frac{(\gamma-1)^2}{2} (\lambda_g + \lambda_d) \rho_d^{\gamma-1} & \text{sinon} \end{cases} \\ \bar{P}_{\rho\lambda} &= \begin{cases} \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\rho_g^\gamma - \rho_d^\gamma}{\rho_g - \rho_d} & \text{si } \rho_g \neq \rho_d \\ (\gamma-1) \rho_d^{\gamma-1} & \text{sinon} \end{cases}\end{aligned}$$

La vitesse du son diphasique associé au solveur de Roe du CPPM est donnée par :

$$\bar{c}^2 = \bar{P}_\rho + \bar{\lambda} \bar{P}_{\rho\lambda} \quad (5.37)$$

L'état moyen est ainsi entièrement déterminé. Le flux numérique  $\phi$  associé à chaque grandeur peut être obtenu en utilisant les valeurs propres (5.9) et les vecteurs propres (5.11) de la matrice Jacobienne appliquée à l'état moyen :

$$\phi = \frac{1}{2} (\mathbf{F}_G + \mathbf{F}_D + \Delta \mathbf{F}) \text{ avec } \Delta \mathbf{F} = \mathbf{T}(\bar{\mathbf{U}}) \mathbf{\Lambda}(\bar{\mathbf{U}}) \mathbf{T}^{-1}(\bar{\mathbf{U}}) \Delta \mathbf{U}$$

Nous pouvons remarquer qu'en posant  $\lambda_g = \lambda_d$  et  $\gamma = 2$ , nous retrouvons les expressions obtenues lors de l'écriture du solveur de Roe pour le SPPM. Par exemple, les définitions (5.34) et (5.37) de la vitesse du son diphasique sont équivalentes. Il est effectivement tout à fait possible d'utiliser la méthode de Toumi pour le modèle simplifié, puisqu'il s'agit d'une extension de la méthode de Roe pour des lois de pressions plus générales.

### 3.3.2 Cas test du tube à choc

Ce solveur de Roe-Toumi a été validé sur un cas test de tube à choc. Comme précédemment, les termes sources permettant le couplage entre la phase gazeuse et la phase dispersée sont annulés. L'objectif étant uniquement de tester le solveur de Roe pour la phase dispersée, les flux diffusifs ne sont évidemment pas pris en compte. De plus, la variable  $\lambda$  est supposée constante au cours du temps.

La phase dispersée est initialement au repos avec une température uniforme. Le solveur est testé sur différents cas de calcul : la fraction volumique initiale est toujours telle que  $\rho_g = 2 \times \rho_d$  et on fait ensuite varier le rapport initial  $\lambda_g / \lambda_d$ . On veut retrouver les résultats du problème de Riemann équivalent avec, en particulier, deux ondes partant respectivement à gauche et à droite qui, grâce à la pression particulière, vont uniformiser le taux de particules dans le domaine. De plus, la solution numérique doit correspondre à la solution de Godunov que nous avons exprimée auparavant.

Dans le premier cas étudié, la variable  $\lambda$  est identique dans tout le domaine :  $\lambda_g / \lambda_d = 1$ . On observe alors la propagation dans le milieu de deux ondes : une onde de raréfaction vers la gauche et une onde de choc vers la droite. La vitesse et la pression particulière sont modifiées à travers ces ondes et ne présentent pas de saut à travers la discontinuité de contact (cf. Figure 5- 12). Le saut de pression nul à la discontinuité de contact impose donc un saut de fraction volumique nul à cette même interface<sup>9</sup>, d'où la présence d'un seul palier sur le profil de fraction volumique (cf. Figure 5- 11).

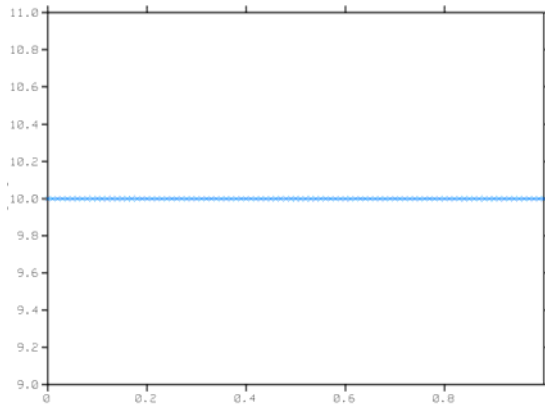


Figure 5- 10 : Profil de lambda, cas test 1, t=25ms.

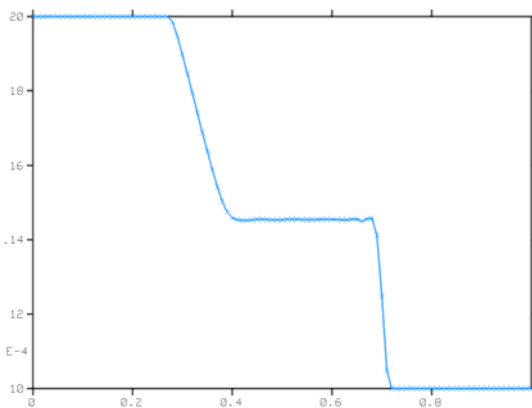


Figure 5- 11 : Profil de fraction volumique solide, cas test 1.

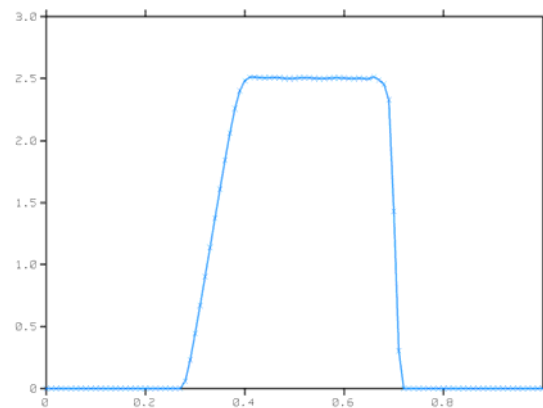


Figure 5- 12 : Profil de vitesse axiale particulaire, cas test 1.

Puisque la variable  $\lambda$  reste constante dans tout le domaine (cf. Figure 5- 10), le modèle CPPM a le même comportement que le modèle SPPM, testé dans une configuration équivalente au paragraphe 3.2.2.

Nous étudions à présent une configuration où la variable  $\lambda$  est initialisée avec des valeurs différentes de part et d'autre de la discontinuité sur la fraction volumique :  $\lambda_g / \lambda_d = 0,5$ . La structure d'ondes solution de ce problème est alors constituée d'une onde de détente (à gauche), d'une discontinuité de contact (au milieu) et d'une onde de choc (à droite). La présence de cette discontinuité de contact est évidemment due aux valeurs initiales différentes de la variable  $\lambda$  qui est transportée dans l'écoulement, cf. Figure 5- 14. Le taux de particules est modifié à travers cette discontinuité pour conserver la pression particulière :  $P = (\gamma - 1)\lambda\rho^\gamma$ , d'où la présence du palier (cf.

<sup>9</sup> Puisque le saut sur  $\lambda$  est nul.

Figure 5- 14). Le profil de vitesse axiale, présenté Figure 5- 15, montre bien que le saut de vitesse est nul à la discontinuité de contact.

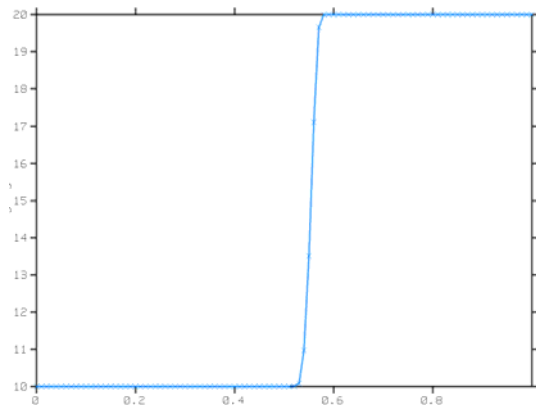


Figure 5- 13 : Profil de lambda, cas test 2.

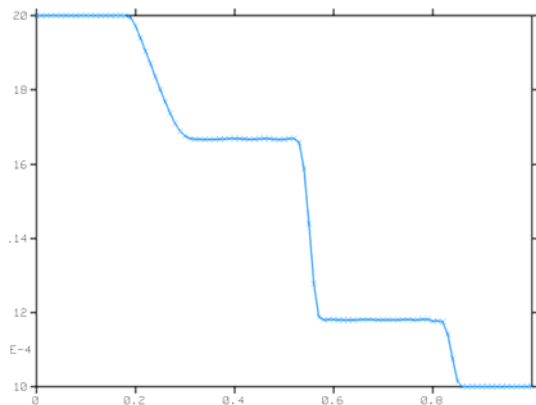


Figure 5- 14 : Profil de fraction volumique solide cas test 2.

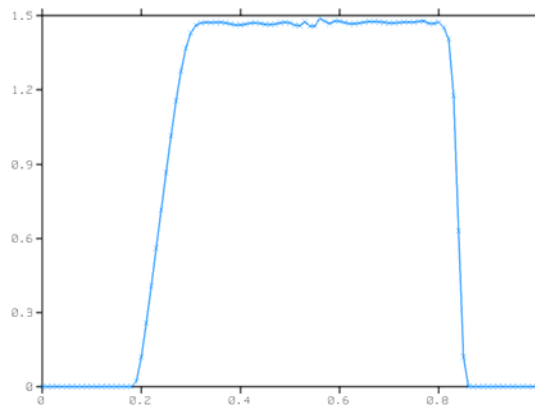
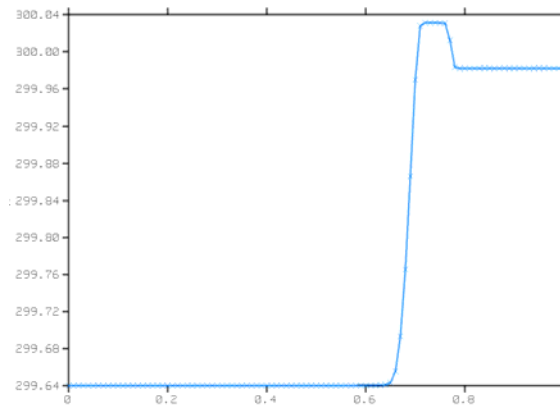


Figure 5- 15 : Profil de vitesse axiale particulaire, cas test 2.

Les écarts de température obtenus dans cette configuration sont très faibles, il est donc difficile de vérifier le comportement de cette quantité à travers les différents types d'ondes. Nous avons donc effectué un calcul tel que  $\lambda_g / \lambda_d = 10$ . La solution obtenue est similaire à la précédente : une onde de détente (respectivement de choc) se propage sur la gauche (respectivement la droite) et une discontinuité de contact existe entre les deux. Le profil de température est donné Figure 5- 16.

On peut vérifier que la température augmente à travers un choc, subit un saut à la traversée de la discontinuité de contact et reste constante à travers une onde de détente.



**Figure 5- 16 : Profil de température.**

Pour chaque cas test, les valeurs des différents paliers ont été validées par comparaison avec celles données par la théorie. Précisons toutefois que le schéma utilisé ne permet pas de conserver une discontinuité de contact au niveau discret. Ce défaut, aux conséquences limitées puisqu'il n'entraîne pas une divergence du calcul, pourrait être corrigé en introduisant une double information. Une équation supplémentaire permettrait ainsi d'assurer un saut de pression nul à la discontinuité.

## 4. Traitement des zones de vide

Quelle que soit la loi de pression particulière choisie, les solveurs établis pour calculer les flux convectifs sont définis pour une vitesse du son diphasique non nulle, c'est-à-dire pour une fraction volumique non nulle. Or les écoulements diphasiques rencontrés dans les propulseurs peuvent comporter des zones où les particules sont absentes : soit dans des régions où l'écoulement gazeux est très faible (zone d'eau morte), par exemple au niveau du fond avant, soit dans le divergent de la tuyère où les particules décollent de la paroi. Il est donc indispensable d'adapter les solveurs numériques afin de pouvoir estimer les flux convectifs dans les cas particuliers où la fraction volumique est nulle.

Ce traitement des zones de vide nécessite des développements appropriés pour le solveur de Godunov mais également pour le solveur approché de Roe. Deux cas sont à distinguer : soit l'un des états initiaux considérés pour le calcul des flux convectifs présente une fraction volumique nulle, soit le vide apparaît comme solution des états physiques en présence. La résolution du problème de Riemann est présentée aux paragraphes suivants, pour chaque cas. Précisons que, la démarche étant fondamentalement identique pour les deux modèles, cette étude est décrite dans le cas général d'une pression particulière définie par :  $P = (\gamma - 1)\lambda\rho'$ .

### 4.1 Etat initial vide de particules

Si une cellule est vide de particules, à l'initialisation d'un calcul par exemple, alors la fraction volumique solide est nulle, ce qui pose problème pour la résolution du problème de Riemann. Si on considère un état gauche  $\mathbf{W}_G$  quelconque non nul<sup>10</sup>, et un état droit  $\mathbf{W}_D$  tel que  $\rho_d = 0$ , alors l'état droit ne peut être relié à l'état intermédiaire  $\mathbf{W}^*$  de ce système que par un choc puisque la fraction volumique ne peut qu'augmenter. Or les relations de saut s'écrivent alors (cf. (5. 19) et (5. 20)) :

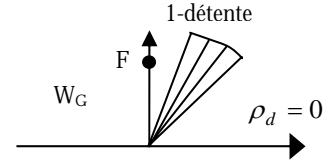
<sup>10</sup> Si l'état gauche est vide également, les flux convectifs sont imposés nuls directement.

$$\begin{cases} \rho^* u^* = \sigma \rho^* \\ \rho^* u^{*2} + (\gamma - 1) \lambda \rho^{*\gamma} = \sigma \rho^* u^* \end{cases}$$

soit  $\rho^* = 0$  et, par continuité,  $u^* = u_D$ . L'onde de choc entre l'état droit vide et l'état intermédiaire est finalement inexistante : ce système particulier a pour solution une onde unique (exceptée l'éventuelle discontinuité de contact). Cette onde est obligatoirement une détente puisque l'état à relier à l'état gauche est vide. Cette 1-onde de détente se positionne différemment selon les cas :

- soit l'écoulement est supersonique, auquel cas la solution est évidente et les flux sont décentrés :  $u_g - c_g > 0$  et

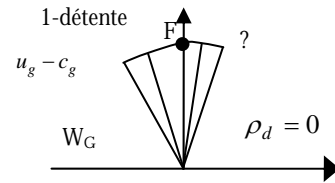
$$\mathbf{W}_F = \mathbf{W}_G.$$



- soit l'écoulement est subsonique et il faut alors calculer les caractéristiques de la détente en  $x=0$ . Si le faisceau de détente est de part et d'autre de cette intersection, on ne connaît pas la vitesse de la caractéristique extrême de la détente, puisque  $u_d$  et  $T_d$  ne sont pas définis, mais on est capable de déterminer l'état à l'interface :

$$\rho_F = \left( \frac{c_F^2}{\gamma(\gamma-1)\lambda_d} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}, \quad c_F = \frac{(\gamma-1)u_g + 2c_g}{\gamma+1}, \quad u_F = c_F,$$

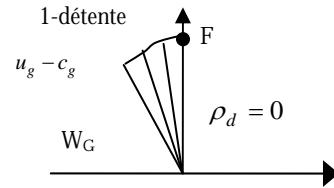
$$T_F = T_g \quad \text{et} \quad \lambda_F = \lambda_g.$$



- le cas limite est tel que le pied du faisceau de détente est superposé à l'interface. Dans ce cas,  $u_F = 0$ , puisqu'on sait que  $c_F = 0$  et  $u_F = c_F$ . Les flux sont donc nuls. Le critère qui permet de déterminer si nous sommes au-delà du point critique ou non est tel que :

$$u_g + \frac{2}{\gamma-1}c_g = u_F + \frac{2}{\gamma-1}c_F = 0, \quad \text{d'où} \quad u_g = -\frac{2}{\gamma-1}c_g.$$

Finalement, les flux sont annulés si  $u_g \leq -\frac{2}{\gamma-1}c_g$ .



## 4.2 Apparition du vide

Le second cas à traiter correspond à deux états initiaux non vides, mais tels que le vide apparaît comme état intermédiaire entre deux ondes de détente. D'après l'équation (5. 27), c'est le cas si :

$$u_d - u_g > \frac{2}{\gamma-1}(c_g + c_d)$$

Notons que dans le cas du CPPM, l'état intermédiaire est théoriquement composé de deux fractions volumiques distinctes ( $\rho_g^*$ ,  $\rho_d^*$ ). Toutefois, par conservation de la pression particulaire à la traversée de la discontinuité de contact, si l'une de ces grandeurs est nulle, alors l'autre l'est aussi. Nous ne faisons donc pas de distinction entre l'état intermédiaire gauche  $\mathbf{W}_G^*$  et l'état intermédiaire droit  $\mathbf{W}_D^*$ , dans le cas du CPPM.

Le cas le plus intuitif d'apparition du vide est celui où les vitesses des deux états initiaux sont opposées et divergentes par rapport à l'interface :



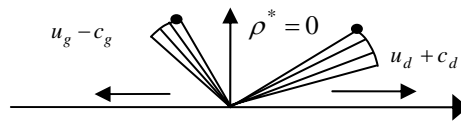
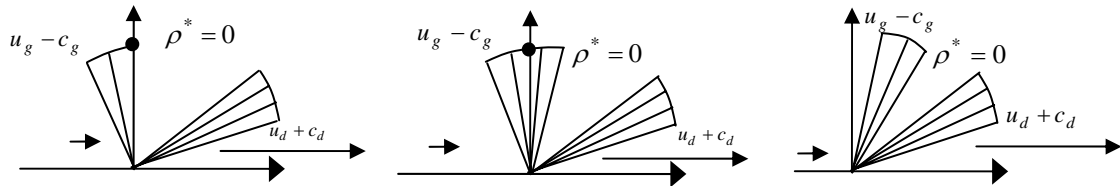


Figure 5-17 : Apparition du vide

Et dans ce cas, on impose logiquement les flux nuls. Cependant, deux états avec des vitesses de même signe peuvent également aboutir à une formation de vide, sans pour cela que le flux à l'interface soit nul. C'est le cas notamment si une cellule a une vitesse divergente élevée par rapport à celle de la cellule adjacente :



Les différents cas possibles sont traités exactement de la même façon que pour le cas précédent (état initial vide).

Si le cas d'apparition du vide est traité en annulant systématiquement les flux, sans tenir compte de l'analyse présentée ci-dessus, on peut arriver à des situations très mal traitées. Par exemple, considérons une cellule avec une vitesse positive très faible, et une cellule voisine avec une vitesse de même signe, mais très élevée, de sorte que le critère d'apparition du vide soit respecté. Si on annule tous les flux à l'interface entre ces deux cellules, la cellule de gauche va se remplir de particules, alors que celle de droite au contraire va se vider. Un "bouchon" de particules peut ainsi se créer dans la cellule de gauche, ce qui est particulièrement gênant et faux. Si on décide de traiter les cas où les vitesses sont de même signe en décentrant les flux, on va avoir tendance au contraire à surestimer les flux, ce qui entraîne une augmentation non négligeable des vitesses.

### 4.3 Modification du solveur de Roe

La résolution exacte du problème de Riemann pour le système convectif à pression particulière (SPPM ou CPPM) a permis de mettre en évidence un défaut du solveur approché de Roe. En effet, comme pour d'autres solveurs de Riemann approchés, la linéarisation opérée par cette méthode ne permet pas de traiter les zones de vide de particules de manière aussi satisfaisante que la méthode de Godunov. Le solveur de Roe diphasique a donc été modifié, pour les deux modèles à pression particulière, de façon à tenir compte de ces zones particulières de l'écoulement (état physique initialement exempt de particules ou apparition du vide). Une série de tests préliminaires est effectuée en début d'algorithme et les cas pathologiques repérés sont traités selon une approche de type Godunov.

## 5. Traitement de la condition limite débitante

Dans la version de référence de CPS (Mombelli & Cesco, 1999 ; Ballereau *et al*, 2003), le modèle diphasique exploité ne présente pas de pression particulière. Le traitement de la condition limite d'injection des particules est réalisé par décentrement des flux. La condition est donc de type supersonique : le débit, la vitesse d'injection et la température des particules sont imposés à la face, grâce aux données renseignées par l'utilisateur à la mise en donnée. Ainsi la vitesse d'injection  $u_{inj}$  est soit définie par une valeur quelconque positive, soit fixée égale à la vitesse du gaz dans la cellule.

La fraction volumique solide est ensuite déterminée à l'aide du débit gazeux à l'injection  $\dot{m}_{gaz}$  et de la fraction massique  $f_m$ , également donnés par l'utilisateur :

$$\rho_{inj} = \frac{f_m}{1-f_m} \frac{\dot{m}_{gaz}}{u_{inj}}$$

Ainsi, les valeurs imposées à la condition limite sont indépendantes des grandeurs physiques dans la maille adjacente à la paroi. Pour une condition limite de type injection à débit constant, les flux à la paroi restent donc constants au cours du calcul.

Cette condition supersonique est logique dans le cas du modèle eulérien de base. En effet ce modèle correspond à la limite du SPPM quand la constante  $\lambda$  tend vers zéro, *ie* quand la vitesse du son diphasique tend aussi vers zéro. En revanche, lorsqu'une pression particulière est définie, la condition limite peut être subsonique. Il n'est alors plus possible d'imposer simultanément trois grandeurs physiques pour définir une condition d'injection de type paroi débitante. Cette condition limite doit être traitée, comme pour la phase gazeuse, en calculant un flux convectif en paroi qui tienne compte de l'état physique dans la cellule adjacente à la paroi.

Pour cela, un problème de Riemann partiel à la paroi est résolu pour les deux modèles à pression particulière (SPPM et CPPM). La définition de la pression étant différente pour ces deux modèles, des développements différents sont réalisés. Le résultat de ces études est présenté au paragraphe suivant. La démarche étant fondamentalement identique pour les deux modèles, nous ne détaillons pas les calculs effectués pour résoudre le problème de Riemann partiel pour le modèle simple.

## 5.1 Le problème de Riemann partiel à la condition limite

Résoudre le problème de Riemann partiel à la paroi d'injection, c'est déterminer l'état qu'il faut imposer à l'interface pour assurer à la fois la condition de débit donnée par :

$$\dot{m}_p = \frac{f_m}{1-f_m} \dot{m}_{gaz} = -\rho_F u_F$$

et une structure d'ondes de choc ou de détente entre les états à l'interface  $(\rho_F, u_F, T_F, \lambda_F)$  et dans la cellule adjacente à la paroi  $(\rho_i, u_i, T_i, \lambda_i)$ .

La variable  $\lambda$  est définie dans la cellule par la valeur  $\lambda_i$  et à la face débitante par la valeur  $\lambda_F$ . Tout comme la température, ces deux quantités n'ont aucune raison d'être identiques. Le problème à résoudre est donc le suivant :

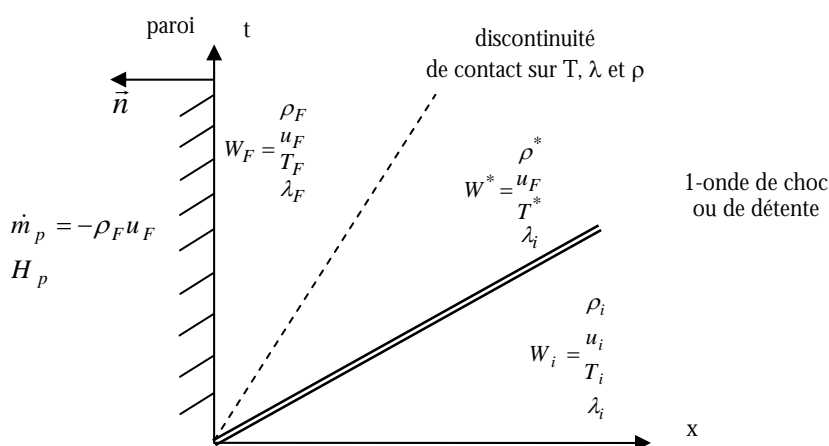


Figure 5- 18 : Problème de Riemann partiel pour la paroi débitante, CPPM.

Les variables  $T$  et  $\lambda$  étant discontinues de part et d'autre de la discontinuité de contact, leurs valeurs  $T_F$  et  $\lambda_F$  à l'interface sont déterminées en fonction de données imposées par l'utilisateur.

L'état imposé à la face doit respecter la condition de débit, soit  $\dot{m}_p = -\rho_F u_F$ , avec  $\dot{m}_p > 0$  et  $\mathbf{u}_F = u_F \mathbf{n}$ . Cet état doit aussi être relié à travers une simple discontinuité de contact, à l'état  $\mathbf{W}^* = (\rho^*, u_F, T^*, \lambda_i)$ , lui-même relié à l'état de la cellule adjacente  $\mathbf{W}_i = (\rho_i, u_i, T_i, \lambda_i)$  soit par une 1-onde de choc, soit par une 1-onde de détente<sup>11</sup>.

Considérons dans un premier temps que les états  $\mathbf{W}^*$  et  $\mathbf{W}_i$  sont reliés par un **choc**, alors d'après l'équation (5. 21), il faut résoudre le système à trois équations et trois inconnues suivant :

$$\begin{cases} \dot{m}_p = -\rho_F u_F \\ u_F = u_i - \sqrt{(\gamma-1)\lambda_i(\rho^{*\gamma} - \rho_i^\gamma)} \left( \frac{1}{\rho_i} - \frac{1}{\rho^*} \right) \\ \lambda_F \rho_F^\gamma = \lambda_i \rho^{*\gamma} \end{cases}$$

avec  $u_F < 0$ . Nous posons  $X = \rho_F / \rho_i$  et  $\lambda = \lambda_i / \lambda_F$  (connu). Alors, la solution  $X$  est acceptable pour un choc si et seulement si  $\rho^* > \rho_i$ , soit  $X > \lambda^{1/\gamma}$ . On introduit les coefficients sans dimension suivants :

$$M_i = \frac{|u_i|}{c_i} = \frac{|u_i|}{\sqrt{\gamma(\gamma-1)\lambda_i \rho_i^{\gamma-1}}} > 0$$

$$\beta = \frac{\dot{m}_p}{\rho_i u_i}$$

qui sont respectivement le nombre de mach de l'écoulement particulaire interne et le rapport des débits. Ces grandeurs sont donc connues. L'équation de choc s'écrit alors, avec  $s$  le signe de  $u_i$  (et donc de  $\beta$ ) :

$$sM_i \sqrt{\gamma\lambda}(X + \beta) - \sqrt{X(X^\gamma - \lambda)(X - \lambda^{1/\gamma})} = 0$$

On peut montrer que cette fonction de degré  $(\gamma+2)/2$  admet toujours une solution dans le domaine  $[\lambda^{1/\gamma}; +\infty[$  et que cette solution est unique. Une méthode de Newton est utilisée pour déterminer cette solution. La convergence de cette méthode est assurée pour un point de départ  $X_0$  défini par :

$$X_0 = \frac{1}{4} \left( 1 + 2\sqrt{2}M_i + \sqrt{(1 + 2\sqrt{2}M_i)^2 + 8(1 + 2\sqrt{2}M_i|\beta|)} \right)$$

Considérons maintenant le cas **détente**. D'après l'équation (5. 24), le système à résoudre est alors le suivant :

<sup>11</sup> L'orientation de la normale à la paroi, respectant les conventions adoptées dans CPS, impose de travailler avec une 1-onde et non une 3-onde.

$$\begin{cases} \dot{m}_p = -\rho_F u_F \\ u_F = u_i + \frac{2}{\gamma-1} \sqrt{\gamma(\gamma-1)\lambda_i} \left( \sqrt{\rho_i^{\gamma-1}} - \sqrt{\rho^{*\gamma-1}} \right) \\ \lambda_F \rho_F^\gamma = \lambda_i \rho^{*\gamma} \end{cases}$$

On pose cette fois  $X = \sqrt{\rho_F} / \sqrt{\rho_i}$ , ainsi la solution  $X$  est acceptable pour une détente si et seulement si  $X < \lambda^{1/2\gamma}$ . L'équation de détente s'écrit, avec les notations précédentes :

$$2X^2 \left( \lambda^{(1-\gamma)/2\gamma} X^{\gamma-1} - 1 \right) + M_i (X^2 + \beta) = 0$$

On peut montrer que cette fonction admet toujours une solution dans le domaine  $[0; \lambda^{1/2\gamma}]$  et que cette solution est unique. Le point de départ de la méthode de Newton est  $X_0 = \lambda^{1/2\gamma}$ .

Soulignons que le raccordement entre les solutions choc et détente existe bien pour  $\rho_F / \rho_i = \lambda^{1/\gamma}$ .

Les équations de choc et de détente sont établies et la méthode de Newton est correctement définie, dans chaque cas de figure. Il reste à présent à déterminer quelles sont les conditions d'apparition d'un choc ou d'une détente. Pour cela, on regarde l'évolution des fraction volumique et vitesse à travers une onde de choc et de détente. En tenant compte de l'orientation de la normale à la cellule, nous obtenons les quatre possibilités suivantes :

CHOC			DETENTE

Figure 5- 19 : Détermination du cas choc ou détente selon l'état de l'écoulement dans la cellule

La détente est donc admissible seulement si  $u_i < u_F < 0$ , ce qui conduit à la relation suivante :

$$-\left( \frac{\lambda_i}{\lambda_F} \right)^{1/\gamma} < \beta < 0 \Leftrightarrow \dot{m}_p + \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_F} \right)^{1/\gamma} \rho_i u_i \leq 0$$

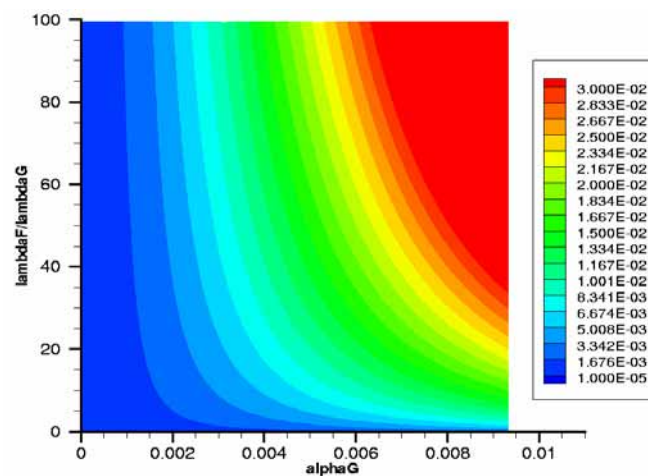
Intuitivement, on sent bien que le seul moyen d'avoir une détente en injectant des particules dans une cellule, c'est d'injecter ces particules avec un débit plus faible que celui existant dans la cellule. Si les particules sont injectées dans une cellule où les particules sont au repos, ie  $u_i = 0$ , on a donc obligatoirement un choc.

## 5.2 Validation

Un module de calcul de l'état  $(\rho_F, u_F)$  à imposer à la face en fonction de l'état dans la cellule  $(\rho_i, u_i, \lambda_i / \lambda_F)$  a été écrit. Sa robustesse a été étudiée en faisant varier la vitesse initiale dans la cellule,  $u_i$ , de  $-5000\text{m/s}$  à  $+5000\text{m/s}$ , pour une fraction volumique solide  $\rho_i$  fixée. La solution observée est parfaitement continue et il existe toujours une solution, même dans le cas d'une

détente supersonique. Ensuite on a fixé  $u_i$  et on a fait varier  $\rho_i$  d'abord de  $\rho_i = \rho_p \times 10^{-4}$  à  $\rho_i = \rho_p \times 10^{-2}$ , pour valider le calcul de la détente, puis de  $\rho_i = \rho_p \times 10^{-4}$  à  $\rho_i \approx 10^{-28}$ , afin d'appréhender la solution numérique d'une injection dans une cellule vide de particules ( $\rho_i = 0$ ). La solution numérique obtenue est telle que  $\rho_F \rightarrow 0$  et  $|u_F| \rightarrow +\infty$ . Nous avons donc décidé d'imposer une valeur minimale<sup>12</sup> pour la fraction volumique de la cellule d'injection :  $\rho_i = \rho_p \times 10^{-7}$ . Enfin, notons que la température à la face  $T_F$  est calculée en fonction de la condition d'enthalpie imposée à l'injection, en utilisant les valeurs  $(\rho_F, u_F)$ , solution du problème de Riemann partiel à la face.

Le module de calcul a ensuite été utilisé pour faire varier en même temps la fraction volumique  $\rho_i$  et le rapport  $\lambda_i / \lambda_F$  dans la cellule d'injection. La valeur  $\rho_F$  obtenue à la face est tracée en fonction de ces deux paramètres, sous forme de nappe (cf. Figure 5- 20).



**Figure 5- 20 : Fraction volumique à imposer à la face, en fonction de la vitesse dans la cellule et du rapport  $\lambda_i/\lambda_F$ .**

On vérifie ainsi la continuité de la solution. On comprend également mieux pourquoi le fait d'imposer des flux constants à la face d'injection peut engendrer un problème : respecter la condition de débit n'est pas suffisant, il faut tenir compte de l'état dans la cellule variable au cours du temps.

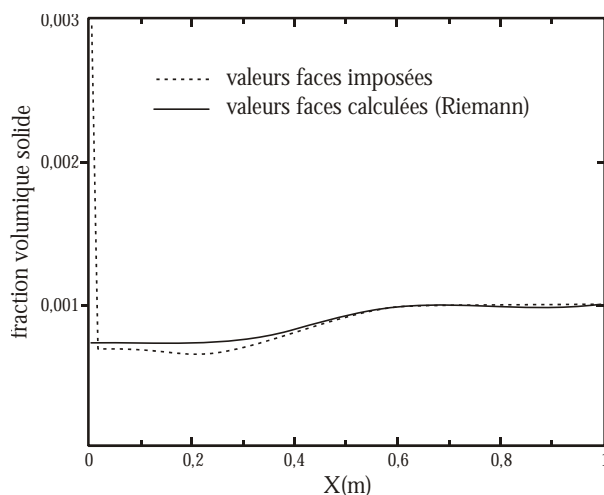
Le traitement de la paroi débitante est ainsi assuré. Cependant, il nous reste à déterminer la valeur de la variable  $\lambda$  à la paroi. Contrairement à la température qui est calculée en fonction de la condition d'enthalpie imposée à l'injection, l'énergie cinétique fluctuante ne peut être déterminée par une relation imposée à la face. Nous pouvons envisager diverses possibilités. La première solution est d'imposer le gradient sur  $\lambda$  nul et donc de fixer  $\lambda_F = \lambda_i$  (ce qui revient à traiter la condition limite de façon équivalente à celle du SPPM). Une autre option est de tenir compte des conditions d'injection en fixant l'énergie cinétique fluctuante injectée comme un pourcentage de la vitesse du gaz, s'inspirant ainsi des modèles de turbulence de type  $k - \varepsilon$ . La solution retenue lors de l'intégration de ce modèle dans le code CPS permet à l'utilisateur de fixer une valeur de  $\lambda_F$  à la mise en données ou de choisir  $\lambda_F = \lambda_i$ .

Ce nouveau traitement de condition limite a été appliqué sur un cas simple : des particules sont injectées, à débit constant, dans un tube rempli de particules ( $\rho_i = \rho_p \times 10^{-3}$ ) animées d'une vitesse  $|u_i| = 20 \text{ m/s}$ . La variable  $\lambda_F$  est choisie égale à  $\lambda_i$ . Le débit imposé est tel qu'une détente se met

<sup>12</sup> Cette valeur de seuil est déjà utilisée dans la version actuelle du code.

en place entre les deux états. Si on impose les flux à la face comme effectué dans le code CPS, on observe une accumulation de particules dans la cellule d'injection (cf. Figure 5- 21). Si ces flux sont calculés en fonction des conditions de débit imposées ( $\dot{m}_p, H_p$ ) et de l'écoulement ( $\rho_i, u_i$ ), alors cette accumulation disparaît et on observe une mise à l'équilibre du taux de particules dans le tube (cf. Figure 5- 21).

Cette méthode de calcul des flux à la face débitante est donc indispensable pour assurer une injection correcte des particules. Néanmoins, il n'est plus possible d'imposer la vitesse d'injection des particules, comme auparavant dans CPS : si on impose la vitesse d'injection, on impose en même temps la fraction volumique et donc la pression particulaire ; ce qui, on l'a vu dans le cas test précédent, peut mener à des situations aberrantes. Avec le modèle CPPM, c'est donc le terme de pression particulaire qui régit l'écoulement et qui impose à l'interface la vitesse vérifiant la condition de débit.



**Figure 5- 21 : Cas test d'injection de particules dans un tube. Profil de la fraction volumique solide obtenue. en trait pointillé : valeurs aux faces imposées ; en trait plein : valeurs aux faces obtenues par résolution du problème de Riemann partiel à l'injection**

En fait, pour être encore plus précis dans la modélisation de l'injection des particules, il faudrait développer un modèle de paroi qui permette de calculer, sur une faible épaisseur, l'accélération des particules injectées, en fonction de la vitesse du gaz. Il faudrait pour cela traiter les termes sources d'échange entre les deux phases dans la résolution du problème de Riemann partiel, ce qui la rend peu triviale.

### 5.3 Application au modèle simple (SPPM)

Le traitement de la paroi débitante est réalisé de façon identique dans le cas du SPPM, en tirant avantage de l'égalité  $\lambda_F = \lambda_i = cste$ . Le problème à résoudre est donc celui donné par la Figure 5- 22.

Les équations précédemment établies sont toujours valables mais simplifiées puisque  $\lambda_i / \lambda_F = 1$  et  $\gamma = 2$ . Par exemple, la condition d'apparition d'une détente est telle que :

$$-1 < \beta < 0 \Leftrightarrow \dot{m}_p + \rho_i u_i \leq 0$$

La démarche de validation entreprise pour valider la résolution du problème de Riemann pour le CPPM a également été adoptée pour ce modèle. Le module de calcul a ainsi été utilisé pour faire varier la fraction volumique  $\rho_i$  et la vitesse  $u_i$  des particules dans la cellule d'injection (vide initial ou non, vitesses fortes ou faibles, opposées ou non). Comme précédemment, la valeur  $\rho_F$  obtenue

à la face est tracée en fonction de ces deux paramètres, pour différentes valeurs du paramètre  $\lambda$  (cf. Figure 5- 23 et Figure 5- 24).

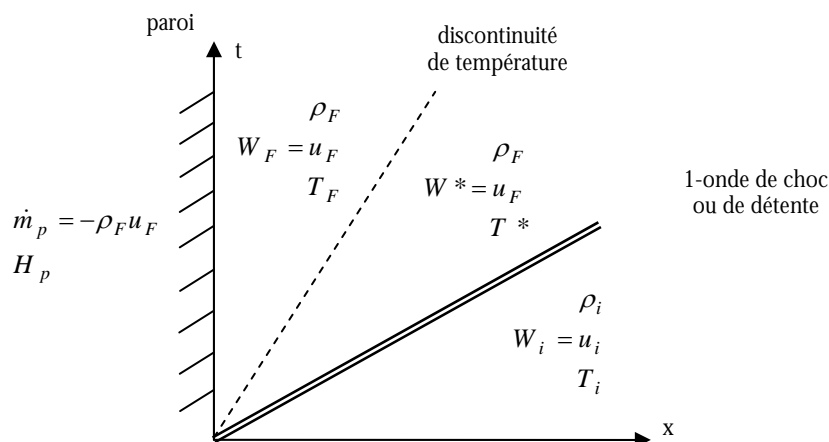


Figure 5- 22 : Problème de Riemann partiel pour la paroi débitante

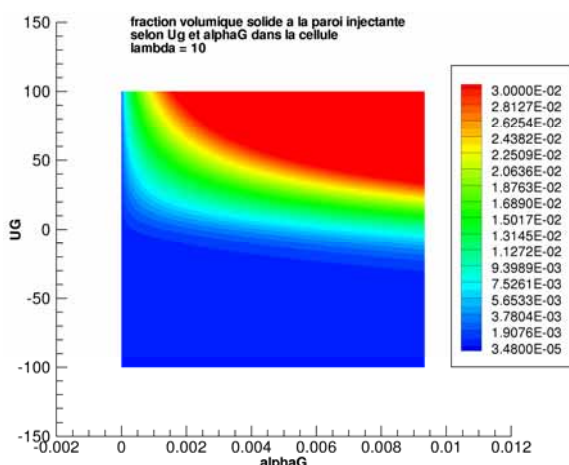


Figure 5- 23 : Fraction volumique solide à imposer à la face, en fonction de l'état de la cellule, pour lambda=10

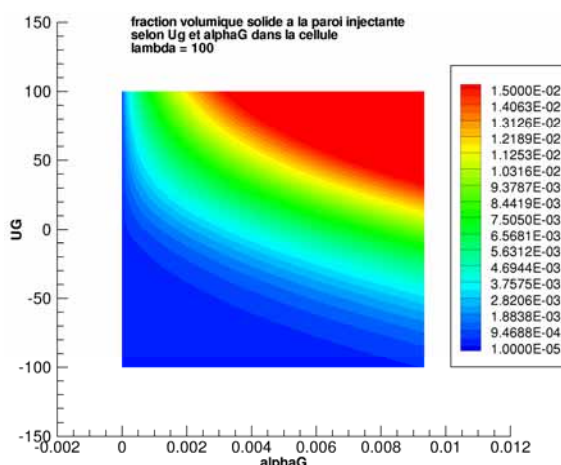


Figure 5- 24 : Fraction volumique solide à imposer à la face, en fonction de l'état de la cellule, pour lambda=100

## 6. Conclusion

Le terme de pression particulaire présent dans les modèles diphasiques eulériens développés au cours de la thèse permet d'utiliser une nouvelle méthode de calcul des flux convectifs. Nous avons ainsi écrit un solveur de Godunov et un solveur de Roe pour chaque modèle (SPPM et CPPM) et l'aspect convectif du schéma numérique a été validé sur un cas test de tube à choc.

Les cas d'apparition du vide ou de présence initiale d'état vide de particules dans l'écoulement ont été traités spécifiquement<sup>13</sup>. Nous avons ainsi mis en évidence un défaut de la linéarisation du

<sup>13</sup> D'autres développements numériques ont été effectués pour permettre de traiter correctement les zones de vide de particules, notamment pour le modèle CPPM, voir Godfroy (2005).

solveur de Roe lors du traitement de ces cas particuliers pathologiques. Ce dernier a donc été modifié en conséquence.

Nous avons aussi amélioré le traitement de la condition limite de type injection à débit constant. En effet, le terme de pression particulaire impose de calculer des flux à la face d'injection selon les conditions de débit imposées sur la face limite, mais également en fonction de la cellule adjacente à la paroi. Pour cela, nous avons résolu un problème de Riemann partiel à la face d'injection. Il existe une solution unique à ce problème, soit avec une onde de détente, soit avec une onde de choc. La résolution de ce problème exige une méthode de Newton dans la mesure où les équations obtenues n'admettent pas de solution algébrique. Néanmoins, la méthode converge très vite. Les valeurs des masse volumique apparente et vitesse des particules sont ainsi déterminées à la face limite.

Ces développements théoriques et numériques fondamentaux ont permis de réaliser et de valider l'analyse mathématique des deux systèmes convectifs. Même si, pour le moment, nous manquons de recul pour préjuger du solveur à utiliser en fonction des applications, les méthodes de calcul des flux convectifs sont écrites pour les deux modèles diphasiques. L'implantation de ces modèles dans une version de travail de CPS fait l'objet du chapitre suivant.



# Chapitre 6

## Implantation numérique dans CPS et validation des modèles à pression particulière

Les modèles à pression particulière écrits durant la thèse ont pour vocation d'être implantés dans le code de mécanique des fluides de SME, CPS, qui possède déjà un modèle diphasique eulérien. Il ne s'agit donc pas de partir *ex nihilo*. Néanmoins la plus grande complexité des modèles SPPM et CPPM impose de tenir compte de termes supplémentaires.

Nous décrivons dans ce chapitre les principales étapes de l'implantation numérique : le calcul des flux convectifs (dont la résolution mathématique a été présentée au chapitre précédent), le calcul des flux diffusifs (pour le CPPM uniquement) et l'intégration des termes sources. Le modèle simple, à trois équations, a été implanté en premier car il nécessite des modifications moins importantes dans le code. L'intégration du CPPM s'est ensuite largement appuyée sur cette nouvelle version de CPS. La description théorique et numérique présentée ci-après ne respecte bien sûr pas cet ordre chronologique. Une présentation aussi générale que possible est adoptée, elle est agrémentée de cas tests et de calculs en géométrie simple.

Commençons par décrire brièvement le code CPS...

### 1. Le code CPS

CPS est, comme son nom l'indique, un code de mécanique des fluides dédié aux écoulements internes des chambres de combustion des moteurs fusée. Créé en 1999 par l'action commune des équipes de Bertin technologies et SNPE Propulsion, ce code répond à un besoin du CNES de disposer d'un outil numérique capable de simuler à la fois le fonctionnement de systèmes propulsifs à ergols liquides (CPS\_C, Bertin Technologies) et les écoulements aérodynamiques dans les moteurs à propergol solide (CPS\_P, SNPE) (Durand *et al*, 2000).

CPS\_P est basé sur le code PATRIC (Tissier *et al*, 1992). Son développement est principalement assuré par les membres du laboratoire Aéro-thermochimie et Combustion du Centre de Recherches du Bouchet, avec la participation financière du CNES, dans le cadre de la R&T Spatiale. Ses objectifs principaux sont d'aider à la conception des chargements de propergol, de contribuer aux études d'avant-projet des futurs moteurs à propergol solides et d'offrir un moyen d'analyse du fonctionnement après tir, notamment au niveau des oscillations de pression.

#### 1.1 Présentation des modèles physiques

Les critères de choix des modèles implantés dans CPS ont porté sur leur capacité à représenter les phénomènes physico-chimiques présents au sein d'un moteur à propergol solide (Godfroy, 1998). De même, les méthodes numériques utilisées répondent à des besoins exprimés par une utilisation en propulsion spatiale (couplage avec un remailleur automatique et un code de régression de surface par exemple, cf. Le Breton *et al*, 1998).

CPS résout les équations de Navier-Stokes dans des configurations planes, axisymétriques ou tri-dimensionnelles, pour des écoulements laminaires ou turbulents. Le comportement du gaz est régi

par une équation d'état qui peut être celle des gaz parfaits ou celle d'un gaz compressible réel. Les écoulements peuvent être réactifs, compressibles et multi-espèces.

La combustion du propergol est simulée par différentes lois de comportement<sup>1</sup>. Les modèles les plus élaborés tiennent compte de la réponse en pression du propergol et de la combustion érosive. Il est également possible, grâce au maillage mobile, de coupler CPS à un code de mécanique du solide afin de réaliser une simulation fluide/structure d'un écoulement dans un moteur à géométrie variable (Della Pieta *et al*, 2001).

Enfin, nous avons vu au chapitre 2 qu'une phase dispersée, inerte ou non, pouvait être prise en compte dans les simulations avec un couplage fort des interactions entre les deux phases (« two-way coupling »). Les détails numériques de ce couplage seront discutés au paragraphe 1.3.

## 1.2 Présentation des méthodes numériques

La discrétisation spatiale est réalisée par une méthode de volumes finis, en formulation conservative, les points d'intégration étant situés au centre des cellules du maillage. Les méthodes numériques utilisées permettent l'emploi de maillages non-structurés, pouvant mêler des cellules quadrangles et triangles en 2D, et des pyramides, tétraèdres, pentaèdres et hexaèdres en 3D. Le caractère conservatif de la formulation est très utile en aérodynamique interne car il permet de garantir l'égalité des débits en entrée et en sortie du moteur.

L'intégration en temps est soit explicite d'ordre 2 ou 4, soit implicite<sup>2</sup>. L'intégration explicite est obtenue par une méthode de Runge-Kutta qui permet une bonne représentation en instationnaire.

La méthode de calcul des flux convectifs repose essentiellement sur la notion de problème de Riemann (discutée au chapitre précédent). Les flux sont calculés aux faces des éléments du maillage par un solveur de Godunov ou un solveur approché de type Roe, étendu aux mélanges de gaz non idéaux en suivant une approche de Toumi. L'ordre 2 en espace est obtenu par la méthode MUSCL développée par Van Leer (1979), avec construction des pentes et limitation de celles-ci. Les flux sont ainsi calculés non pas en fonction des valeurs au centre des cellules mais selon des valeurs définies de part et d'autre d'une face, en fonction des gradients qui règnent dans les cellules. La limitation des pentes permet d'éliminer des situations génératrices d'oscillations numériques, telles que celles créées au voisinage de chocs. Un schéma d'ordre 3, faisant appel au schéma  $\beta$ - $\gamma$  construit par Carpentier (1999), est également disponible.

Le calcul des flux diffusifs nécessite dans CPS de connaître les valeurs des différentes variables physiques impliquées (tenseur des contraintes visqueuses, flux de chaleur etc.) aux faces des éléments. Ce choix impose de savoir calculer les gradients d'une grandeur quelconque sur la face d'un élément. Pour cela, si le maillage est rectangle, seules les valeurs au centre des éléments gauche et droit sont utilisées. Si les cellules sont déformées, on tient compte d'un terme de torsion, proportionnel au gradient moyen sur la face et à l'angle de torsion. Un second terme correctif est ajouté pour tenir compte de la distance entre les centres des éléments (Godfroy, 2004).

Enfin, compte tenu des temps de calcul de certaines simulations instationnaires, une option parallèle du code existe pour des applications sur machines de calcul à mémoire distribuée.

## 1.3 Prise en compte de la phase dispersée

Le modèle diphasique eulérien de CPS est traduit par le système d'équations présenté au chapitre 2. L'hypothèse d'écoulement dilué permet d'assurer le couplage entre les phases gazeuse et solide uniquement à travers les termes de transfert interfaciaux, *ie* les termes sources.

---

<sup>1</sup> Dans nos simulations, nous avons utilisé une simple régression de surface à taux constant.

<sup>2</sup> Les simulations diphasiques sont exclusivement explicites.

Dans ces conditions, il est tentant d'adopter une démarche modulaire : les deux systèmes sont traités séparément, sans tenir compte des termes sources et le couplage s'effectue au cours d'une seconde étape. Cette méthode de séparation des opérateurs (ou « splitting ») est courante en modélisation diphasique diluée (voir par exemple Dupays (1996) pour la description du code SIERRA). Elle permet d'utiliser pour chaque système un solveur optimisé, puisque les équations ne sont plus couplées. En revanche, l'intégration des termes sources doit être effectuée simultanément pour les deux phases.

Pour exposer ce principe d'intégration des systèmes, nous utilisons la forme condensée suivante des équations impliquées :

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{S}(\mathbf{W})$$

où  $\mathbf{W}$  désigne le vecteur des inconnues pour les deux phases,  $\mathbf{F}$  le vecteur flux (convection et éventuellement diffusion) et  $\mathbf{S}(\mathbf{W})$  le second membre (formé des termes sources et des termes en axisymétrique, si besoin). On suppose connu le vecteur  $\mathbf{W}^n$  à l'instant  $t^n$ . Alors on définit le vecteur  $\mathbf{W}^*$  par intégration des flux convectifs (et diffusifs) sur le pas de temps considéré, sans termes sources, soit :

$$\mathbf{W}^* = \mathbf{W}^n + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \vec{\nabla} \cdot \mathbf{F} dt$$

Précisons que les flux diffusifs et convectifs de la phase gazeuse sont calculés séparément, puisqu'il s'agit de deux problèmes bien distincts (les flux diffusifs sont linéaires, contrairement aux flux convectifs). Dans la version actuelle de CPS, les flux convectifs de la phase dispersée sont estimés par une méthode de type Donor Cell.

On obtient ensuite le vecteur  $\mathbf{W}^{n+1}$  à l'instant  $t^{n+1}$  en intégrant un système d'équations différentielles ordinaires pour les termes sources, le reste de l'écoulement étant alors figé, soit :

$$\mathbf{W}^{n+1} = \mathbf{W}^* + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{S}(\mathbf{W}) dt$$

Dans CPS, cette intégration est faite de façon analytique. Cette technique de résolution s'apparente à la technique des pas fractionnaires, dont l'intérêt majeur est la simplicité.

## 1.4 Implantation des modèles diphasiques à pression particulière

L'implantation des modèles à pression particulière ne nécessite pas de modifier l'architecture globale du code. Les grands principes numériques de CPS restent valables : séparation des opérateurs pour les deux phases, intégration analytique des termes sources, formulation conservative, etc. En particulier, les sous-programmes spécifiques à la phase gazeuse restent inchangés.

En revanche, la prise en compte d'un terme de pression particulière dans la modélisation de la phase dispersée a modifié le système d'équations associé. Ainsi, nous avons vu au chapitre précédent que des solveurs numériques de type Roe ou Godunov pouvaient être utilisés pour le calcul des flux convectifs diphasiques, au lieu d'une méthode de type Donor cell. De plus, le modèle complet présente des termes diffusifs, issus de la modélisation du tenseur des contraintes cinétiques particulière par une hypothèse de Boussinesq. Il est donc nécessaire de calculer les flux diffusifs associés à ces nouveaux termes. De même, l'équation supplémentaire sur la variable  $\lambda$  (qui est fonction de l'énergie cinétique fluctuante des particules) modifie le nombre d'équations du système

et doit être prise en compte à chaque étape de calcul<sup>3</sup>. Enfin, quel que soit le modèle utilisé, les termes sources sont modifiés par le terme de pression particulière, leur intégration analytique doit donc être adaptée en conséquence.

Dans les paragraphes suivants, nous allons décrire les modifications apportées au code CPS afin de permettre l'utilisation des modèles SPPM et CPPM. Mais que le lecteur soit de suite rassuré, il ne s'agit pas de donner une liste détaillée et exhaustive des sous-programmes modifiés, ajoutés ou supprimés par rapport à la version de référence ! Seuls les aspects techniques ou mathématiques sont abordés ici, ils sont d'ailleurs autant que possible illustrés par des cas tests, qui ont également l'intérêt de donner un aperçu immédiat de l'influence des différents termes contenus dans les modèles à pression particulière.

## 2. Les flux convectifs

### 2.1 Traitement numérique

L'analyse mathématique des systèmes convectifs des CPPM et SPPM, qui représente la partie la plus complexe du traitement des flux convectifs, a été présentée au chapitre 4. Nous ne revenons donc pas sur cet aspect.

En revanche, nous donnons dès à présent quelques précisions sur la méthode de calcul du pas de temps. En effet, en introduisant un terme de pression particulière dans les équations du système de la phase dispersée, nous avons pu utiliser des méthodes classiques de résolution des problèmes de Riemann. Or, celles-ci nécessitent de définir un pas de temps selon diverses caractéristiques du système, dont la vitesse de propagation du son (condition dite de CFL). Une vitesse du son diphasique ayant été définie au cours de l'écriture des solveurs de Roe et de Godunov, il est logique d'en tenir compte lors du calcul du pas de temps. Nous calculons donc un premier pas de temps pour la phase gazeuse et un second spécifique à la phase dispersée. La valeur retenue pour l'intégration étant bien sûr la plus faible des deux. L'algorithme de détermination du pas de temps diphasique est rigoureusement identique à celui pour la phase gazeuse. Il suffit de raisonner par analogie, en tenant compte des vitesses particulières et de la vitesse du son diphasique. La viscosité particulière présente dans le modèle CPPM est également prise en compte dans le calcul du pas de temps diphasique.

Précisons que dans le cas du modèle simplifié, le calcul du pas de temps diphasique est réalisé plus par rigueur scientifique que par utilité pratique. En effet, la vitesse du son diphasique est faible<sup>4</sup> et les ordres de grandeur des vitesses des deux phases identiques, la grande majorité des écoulements est donc pilotée par le gaz. Pour le modèle complet la situation est différente car la viscosité particulière peut être élevée.

Revenons aux flux convectifs. Grâce à la structure modulaire du code, leur calcul est entièrement réalisé dans un sous-programme indépendant. Selon le modèle choisi par l'utilisateur à la mise en données (modèle de base, SPPM ou CPPM) et le solveur élu (Godunov, Roe ou Roe-Toumi le cas échéant), le solveur idoine est utilisé.

Au chapitre précédent, nous avons validé sur des cas tests de tube à choc les solveurs numériques écrits pour résoudre le système convectif des modèles CPPM et SPPM. Nous allons à présent voir, à l'aide d'un cas de calcul très simple, quelle est l'influence du terme de pression particulière sur le comportement de la phase dispersée.

---

<sup>3</sup> La prise en compte de cette équation supplémentaire est effectuée à la lecture de la mise en données du calcul : si le modèle diphasique choisi est le modèle de base ou le modèle simplifié SPPM, alors le paramètre fixant le nombre de variables physiques du système est fixé à 8 ; si le modèle complet est choisi, alors ce paramètre vaut 9. Dans la majeure partie des situations, cette modification suffit, nous n'insisterons donc pas sur cette particularité du CPPM.

<sup>4</sup> Pour les valeurs choisies dans nos simulations pour la constante  $\lambda$ .

## 2.2 Application à un cas test de compression

### 2.2.1 Description du cas de calcul

Nous cherchons à tester le comportement de la partie **convective** des modèles à pression particulaire sur une configuration de calcul que l'on sait mal traitée par le modèle diphasique actuel de CPS. Cette configuration peut correspondre à des particules injectées dans un tube, fermé à l'extrémité opposée (cf. Figure 6- 1).

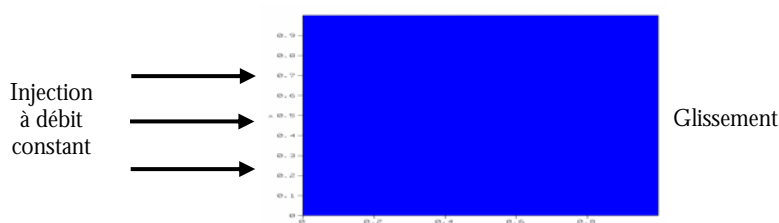


Figure 6- 1 : Cas test d'accumulation de particules en paroi, dans un tube fermé.

Comme dans le cas théorique du tube à choc, les calculs sont réalisés en découplant les phases, *ie* en annulant les termes sources de façon à éliminer toute influence de la phase gazeuse. Le calcul CPS présente, sans surprise, une accumulation de particules près de la paroi opposée à l'injection, dans la dernière cellule (cf. Figure 6- 2). Cette accumulation se fait à taux constant (cf. Figure 6- 11) et peut mener à des niveaux de concentration de particules très importants.

### 2.2.2 Résultats SPPM

Nous effectuons le même calcul, en utilisant le modèle à pression particulaire simplifié, pour une valeur de  $\lambda$  fixée à 100. Nous comparons les résultats obtenus avec ce modèle et ceux obtenus par le modèle de base de CPS.

Le calcul effectué avec SPPM présente une répartition des particules dans le tube beaucoup plus homogène : l'accumulation de particules dans la dernière cellule a disparu (cf. Figure 6- 3) et les particules remplissent peu à peu le tube.

Les profils de fraction volumique solide dans le tube illustrent très clairement la différence de comportement des deux modèles : avec le modèle de CPS (sans pression particulaire) la fraction volumique peut augmenter indéfiniment (cf. Figure 6- 4) alors qu'avec SPPM, la fraction volumique ne dépasse pas une certaine valeur limite (cf. Figure 6- 5).

En ce qui concerne la vitesse axiale des particules, elle est constante et non nulle dans le cas du modèle sans pression (cf. Figure 6- 6), d'où l'accumulation de particules obtenue pour ce modèle. La présence du terme de pression particulaire dans le SPPM permet, grâce à la propagation dans l'écoulement d'un choc, d'annuler la vitesse près de la paroi, et au fur et à mesure dans tout le tube (cf. Figure 6- 7).

Ces résultats sont donc très concluants. Le comportement aberrant du modèle de base de CPS est nettement amélioré par la prise en compte d'une pression particulaire.

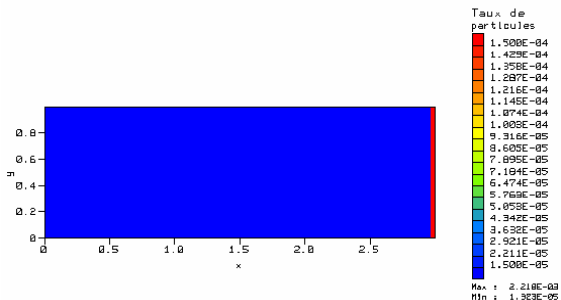


Figure 6- 2 : Calcul Euler sans pression particulaire, répartition des particules dans le tube.

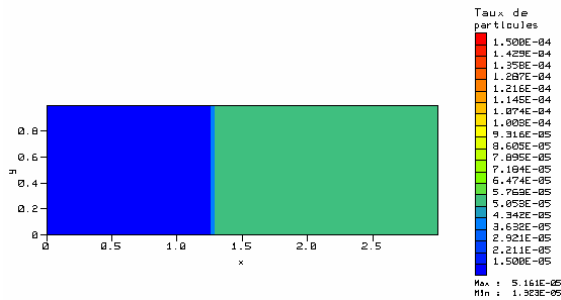


Figure 6- 3 : Calcul SPPM (lambda=100), répartition des particules dans le tube

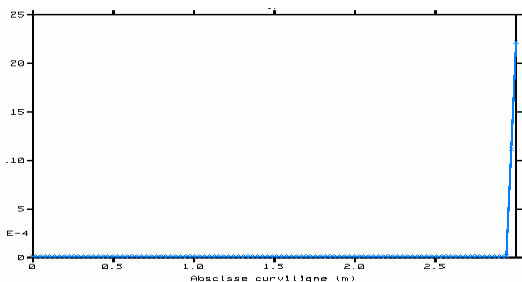


Figure 6- 4 : Profil de la fraction volumique solide, calcul Euler sans pression particulaire.

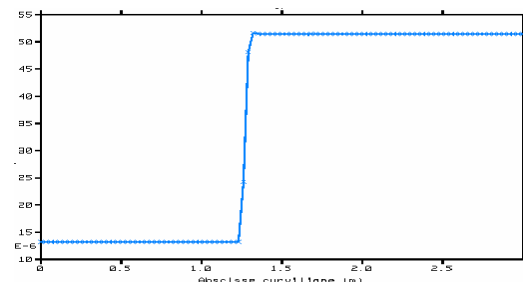


Figure 6- 5 : Profil de la fraction volumique solide, calcul SPPM, lambda=100.

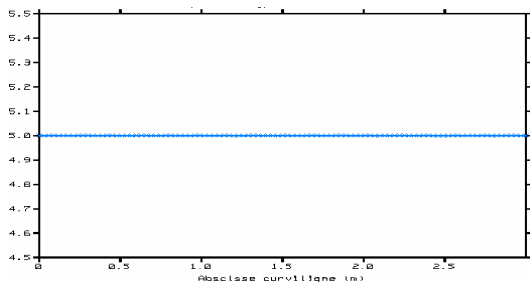


Figure 6- 6 : Profil de vitesse particulaire axiale, calcul Euler sans pression particulaire.

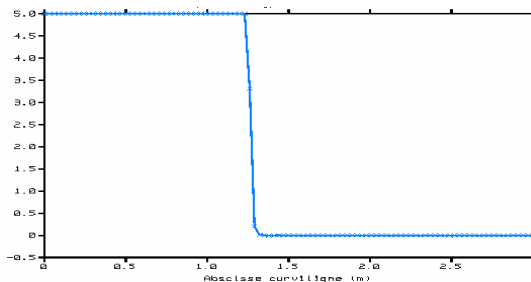


Figure 6- 7 : Profil de vitesse particulaire axiale, calcul SPPM, lambda=100.

Nous avons ensuite réalisé le même calcul, pour une valeur plus faible du paramètre  $\lambda$  :  $\lambda = 10$ . Comme précédemment, le tube se remplit progressivement (cf. Figure 6- 8). Par contre, la fraction volumique maximale atteinte est environ trois fois plus importante. On remarque sur la Figure 6- 9 que l'onde de choc ne s'est pas autant propagée vers la gauche que dans le cas précédent (les deux solutions sont observées au même instant).

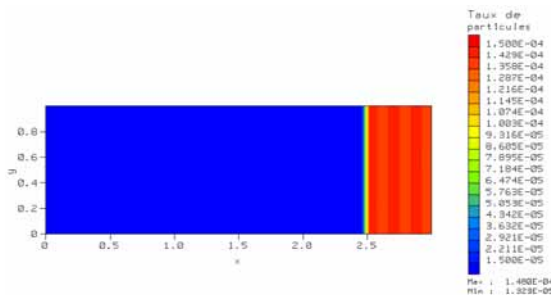


Figure 6- 8 : Répartition des particules, calcul SPPM, lambda=10.

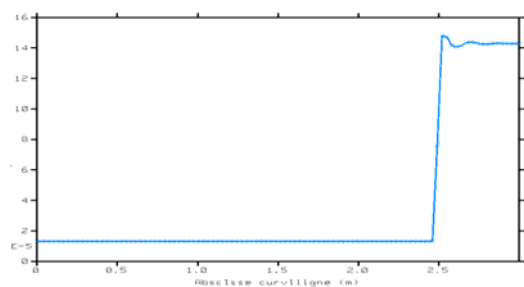


Figure 6- 9 : Profil de fraction volumique, calcul SPPM, lambda=10.

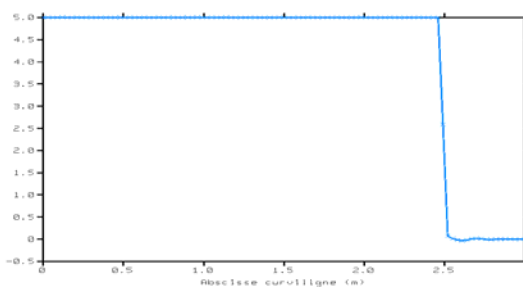


Figure 6- 10 : Profil de vitesse particulaire axiale, calcul SPPM, lambda=10.

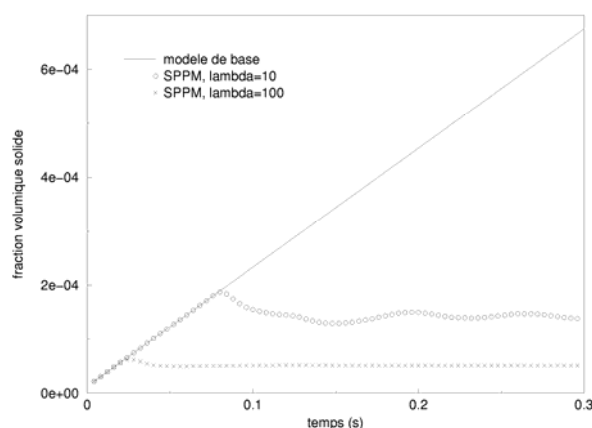


Figure 6- 11 : Evolution de la fraction volumique solide dans la cellule adjacente à la paroi opposée à l'injection, selon le modèle diphasique utilisé.

Nous pouvons également constater que, malgré l'utilisation d'un schéma numérique limitant fortement les gradients, pour cette valeur plus faible de la variable  $\lambda$ , les profils de fraction volumique et de vitesse présentent un comportement légèrement « oscillant » (cf. Figure 6- 9 et Figure 6- 10).

Mis à part ce comportement moyen du schéma numérique, il nous faut encore préciser que pour des valeurs plus faibles de  $\lambda$ , le calcul diverge. Nous avons étudié ce défaut du SPPM sur un cas de compression symétrique, dans lequel des particules sont injectées à vitesse constante par les deux parois opposées d'un tube. L'influence du traitement de la condition à la limite est ainsi supprimée. Les résultats obtenus ont confirmé l'instabilité du modèle, y compris pour un schéma d'ordre 1 en espace, lorsque le terme de pression particulaire n'est pas assez fort pour compenser le terme de quantité de mouvement. Le même calcul, réalisé avec le modèle de base de CPS a également abouti à une divergence du calcul, ce qui est logique puisque dans ce cas la pression particulaire est nulle. En revanche, en diminuant la vitesse d'injection des particules pour la même simulation (*ie* avec  $\lambda = 10$ ), le calcul s'est déroulé normalement.

Il s'agit donc d'un problème inhérent à la méthode numérique qui nécessiterait pour être corrigé de travailler sur le solveur. Dans la pratique, nous ne nous attendons pas à rencontrer trop souvent ce cas. En effet, au centre d'un moteur comme le LP6, les vitesses radiales des particules sont plutôt faibles. Nous avons donc décidé d'arrêter là nos investigations.

### 2.2.3 Résultats CPPM

Ce cas test a été réalisé avec le CPPM. Les flux diffusifs et les termes d'échange entre les phases sont annulés, toujours dans l'optique de découpler les phénomènes. Nous considérons également

que la variable  $\lambda_p$  reste constante au cours du calcul. Cette hypothèse est évidemment en contradiction avec la physique que nous cherchons à représenter, mais elle a l'avantage de confirmer la validation de la méthode de Roe-Toumi écrite pour le CPPM. En effet, cette configuration de calcul est l'exact équivalent de celle présentée au paragraphe précédent, pour le SPPM.

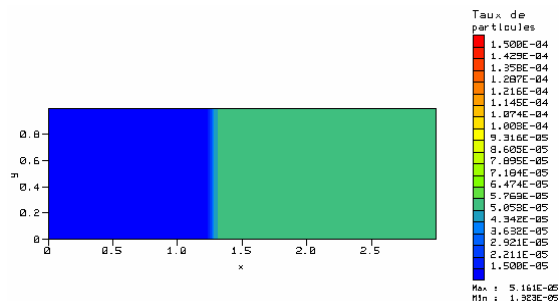


Figure 6- 12 : Répartition des particules, calcul CPPM plan, lambda=100.

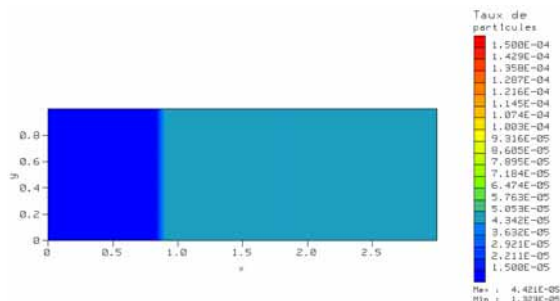


Figure 6- 13 : Répartition des particules, calcul CPPM axisymétrique, lambda=100.

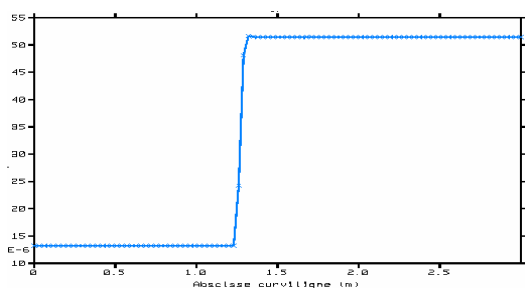


Figure 6- 14 : Profil de fraction volumique, calcul CPPM plan, lambda=100.

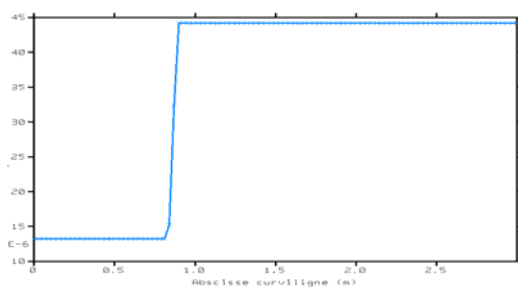


Figure 6- 15 : Profil de fraction volumique, calcul CPPM axisymétrique, lambda=100.

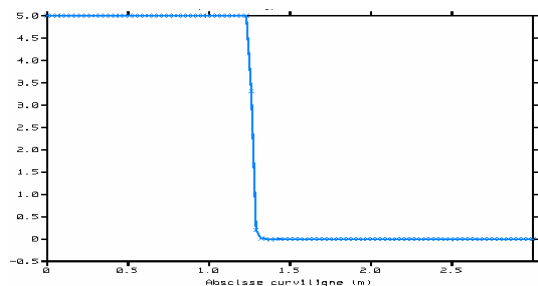


Figure 6- 16 : Profil de vitesse particulaire axiale, calcul CPPM plan, lambda=100.

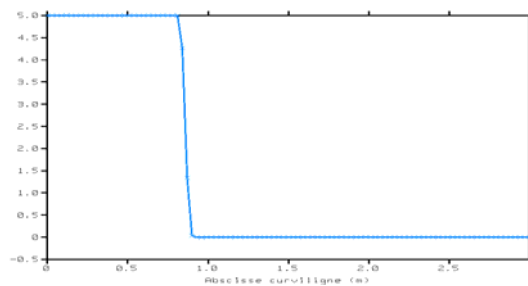


Figure 6- 17 : Profil de vitesse particulaire axiale, calcul CPPM axisymétrique, lambda=100.

Nous vérifions que les résultats obtenus avec ce modèle et  $\lambda_p = cste = 100$  (cf. Figure 6- 12, Figure 6- 14, Figure 6- 16) sont identiques à ceux obtenus avec le SPPM pour une valeur identique du paramètre  $\lambda$ .

Le même calcul est réalisé pour une configuration axisymétrique (cf. Figure 6- 13). Par rapport à la configuration plane étudiée précédemment, seul le coefficient  $\gamma$  est modifié dans la loi de pression particulaire : il vaut alors 5/3 au lieu de 2. Cela implique une pression particulaire plus forte, d'où une propagation plus rapide du choc dans l'écoulement (cf. Figure 6- 17) et un taux de particules atteint légèrement plus faible (cf. Figure 6- 15).

En conclusion, le traitement des flux convectifs des modèles à pression particulaire est globalement satisfaisant. Sur un cas test théorique simplifié à l'extrême, la pression particulaire a d'ores et déjà



montré sa capacité à améliorer le comportement physique de la phase dispersée. Ce qui est très encourageant pour la suite.

### 3. Les flux diffusifs (CPPM)

Rappelons que les flux diffusifs n'existent pas dans le modèle à pression particulaire simple (SPPM) car le tenseur de Reynolds est considéré comme purement isotrope. Le modèle complet modélise la partie anisotrope par une hypothèse de Boussinesq, d'où l'apparition des termes diffusifs du CPPM.

#### 3.1 Traitement numérique

Le terme diffusif du CPPM est défini par :

$$\mathbf{R}_p = y^n \begin{pmatrix} 0 \\ -\mu_p S_{ij} \\ -\mu_p \mathbf{u}_p S_{ij} \\ 0 \end{pmatrix}$$

où  $\mu_p$  est le coefficient de viscosité particulaire<sup>5</sup> défini par :

$$\mu_p = (\gamma_p - 1) \frac{\tau_{gp}^F}{2} \lambda_p (\alpha_p \rho_p)^\gamma = \frac{\tau_{gp}^F}{2} P_p \quad (6.1)$$

et  $\bar{\bar{S}}$  est le tenseur des taux de déformation de la phase dispersée, tel que :

$$S_{ij} = \frac{\partial \tilde{u}_{p,i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_{p,j}}{\partial x_i} - (\gamma_p - 1) \frac{\partial \tilde{u}_{p,k}}{\partial x_k} \delta_{ij}$$

Le vecteur des flux diffusifs du CPPM est linéaire et formellement très proche de celui du gaz, nous avons donc utilisé les méthodes numériques de calcul des flux de la phase gazeuse, disponibles dans CPS (Godfroy *et al.*, 1992 ; Tissier *et al.*, 1992 ; Godfroy & Tissier, 1992). Il est simplement nécessaire de calculer le terme de viscosité dynamique particulaire  $\mu_p$  ainsi que les gradients aux interfaces.

Une formule de Green est ensuite utilisée pour calculer les gradients au second ordre, au centre de la maille. Cette méthode numérique, relativement imprécise, est améliorée par la prise en compte de termes correctifs traduisant les caractéristiques de la géométrie du maillage et la torsion des mailles.

Notons également qu'un tenseur analogue à  $\bar{\bar{S}}$  est calculé dans CPS afin de modéliser la phase gazeuse par les équations de Navier-Stokes. Il existe donc une base numérique qui permet de coder aisément<sup>6</sup> le traitement des flux diffusifs de la phase dispersée.

#### 3.2 Cas test d'accumulation de particules en paroi

Nous effectuons un calcul identique à celui présenté au paragraphe 2.2.3, mais cette fois les flux diffusifs sont calculés. Les résultats sont présentés Figure 6- 18 pour la fraction volumique et Figure 6- 19 pour la vitesse axiale. Ils sont comparés à ceux obtenus sans prise en compte des termes diffusifs. On observe bien un lissage des profils au niveau du choc lorsque les termes diffusifs sont calculés.

<sup>5</sup> Cette viscosité est fonction de l'énergie cinétique fluctuante (via  $\lambda_p$ ), comme dans un modèle de turbulence.

<sup>6</sup> Si l'on excepte quelques situations peu agréables où la fraction volumique tend vers zéro mais pas la pression particulaire (à cause du comportement de  $\lambda$ , que l'on explicitera plus tard). Comme le vide n'est pas censé exercer de frottement, la viscosité particulaire doit être modifiée de façon à tendre vers zéro si la situation l'impose (Godfroy, 2005).

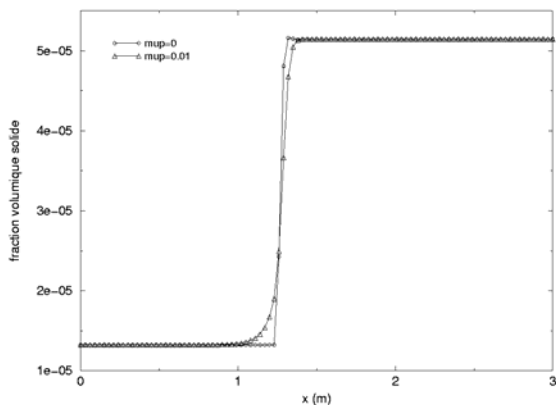


Figure 6- 18 : Profil de fraction volumique, avec ou sans prise en compte des flux diffusifs.

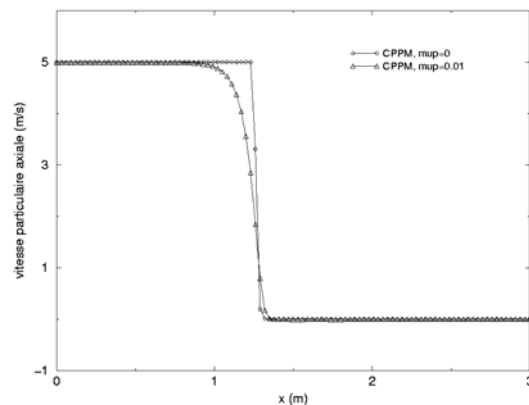


Figure 6- 19 : Profil de vitesse particulaire axiale, avec ou sans prise en compte des flux diffusifs.

Précisons que cette démarche ne nous permet pas de valider le calcul des flux diffusifs, mais juste de vérifier que l'effet obtenu est celui attendu. En particulier, la valeur de la viscosité particulaire est imposée constante lors du calcul ( $\mu_p = 0,01$ ).

### 3.3 Cas test d'une couche de cisaillement

Nous avons ensuite appliqué le modèle CPPM à un cas test de couche de cisaillement (cf. Figure 6-20). Contrairement aux cas précédents, aucune hypothèse simplificatrice n'est faite sur les termes sources, sauf pour la variable  $\lambda_p$  qui est toujours considérée constante.

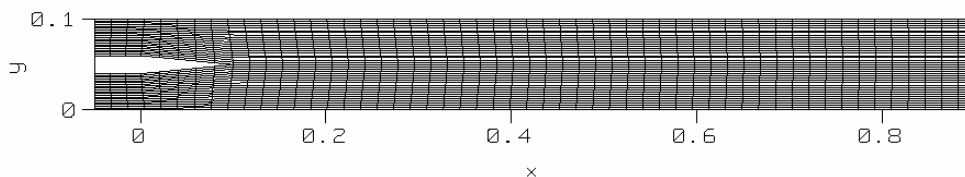


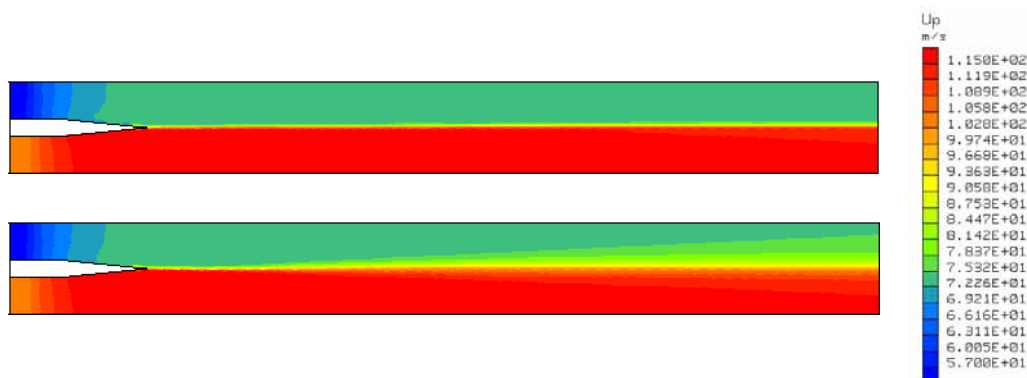
Figure 6- 20 : Maillage du cas test de cisaillement.

Le principe est simple : l'injection se fait pour les deux phases par la paroi gauche du domaine de calcul. Dans la moitié supérieure, gaz et particules sont injectés avec une vitesse axiale de 50m/s, contre 100m/s dans la partie inférieure. La valeur de la variable  $\lambda_p$  à l'injection est identique à sa valeur initiale dans le domaine, soit  $\lambda_p = 100$ . Les particules font 30 $\mu$ m de diamètre.

La différence de vitesse à l'injection crée un fort cisaillement sur l'axe de symétrie, qui crée un gradient de la vitesse moyenne particulaire et donc une diffusion de celle-ci. Le gaz est supposé non visqueux (résolu par les équations d'Euler) de façon à éviter une diffusion des caractéristiques de la phase dispersée due à l'entraînement par le gaz.

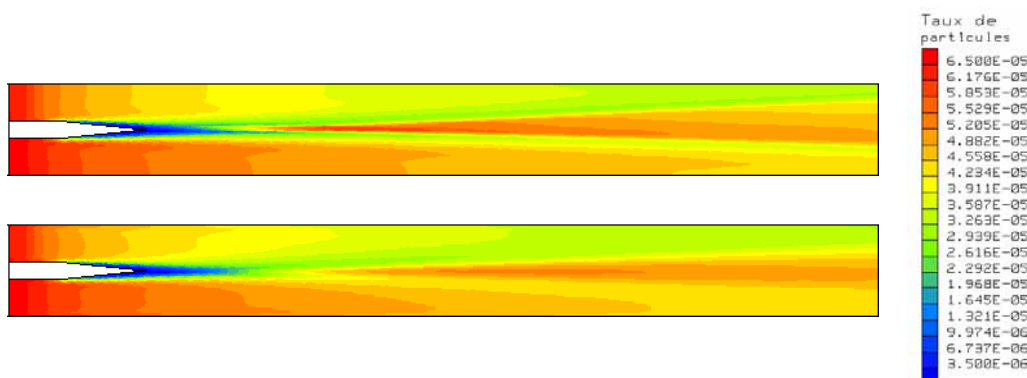
Un premier calcul est réalisé sans tenir compte des flux diffusifs pour la phase dispersée, il est ensuite comparé à un calcul avec flux diffusifs (la viscosité particulaire est cette fois évaluée normalement au cours du calcul).

La Figure 6- 21 présente les variations de vitesse pour la phase dispersée. Sans prise en compte des termes diffusifs (figure du haut), les particules entraînées par un gaz non visqueux conservent des vitesses très différentes. En revanche, si les flux diffusifs sont modélisés, la couche de mélange a une nette tendance à s'épaissir le long de l'écoulement, ce qui témoigne de l'influence de la diffusion.



**Figure 6- 21 : Couche de cisaillement, vitesse particulaire axiale  
en haut : sans flux diffusifs ; en bas : avec flux diffusifs.**

Si l'on regarde l'évolution de la fraction volumique (cf. Figure 6- 22), on note un étalement plus marqué des particules dans le tube si les flux diffusifs sont pris en compte. La fraction volumique maximale atteinte est également plus faible et les discontinuités moins nettes. En fait, cet étalement des particules est surtout dû au terme de pression particulaire qui tend à homogénéiser la concentration de particules.



**Figure 6- 22 : Couche de cisaillement, fraction volumique solide  
en haut : sans flux diffusifs ; en bas : avec flux diffusifs.**

Le comportement du modèle CPPM avec flux convectifs, flux visqueux, termes sources et  $\lambda_p$  constante est donc tout à fait satisfaisant. L'étude du cas nominal où  $\lambda_p$  varie en fonction de l'écoulement nécessite au préalable d'intégrer les termes sources, c'est l'objet du paragraphe suivant.

## 4. Les termes sources

La dernière phase d'implantation des modèles à pression particulaire dans CPS consiste à déterminer les variations temporelles des variables physiques. Rappelons tout d'abord les expressions des termes sources pour les deux modèles :

$$S_{SPPM} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\rho}{\tau_{gp}^F} (u - u_{gaz}) \\ -\frac{\rho}{\tau_{gp}^F} u (u - u_{gaz}) - \frac{2}{\tau_{gp}^F} \frac{P}{\gamma - 1} + \frac{\rho}{\tau_H} (T_{gaz} - T) \end{pmatrix}$$

$$S_{CPPM} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\rho}{\tau_{gp}^F} (u - u_{gaz}) \\ -\frac{\rho}{\tau_{gp}^F} u (u - u_{gaz}) - \frac{2}{\tau_{gp}^F} \frac{P}{\gamma - 1} + \frac{\rho}{\tau_H} (T_{gaz} - T) \\ \left( -\frac{2}{\tau_{gp}^F} + (\gamma - 1) \frac{\tau_{gp}^F}{2} S^2 \right) \lambda \rho \end{pmatrix}$$

Nous avons simplifié les notations en supprimant les indices liés à la phase dispersée et au champ mésoscopique eulérien. En particulier, la vitesse de la phase dispersée est notée  $u$  plutôt que  $u_p$ .

Nous avons également posé  $\rho = \alpha_p \rho_p$  et  $S^2 = S_{ij} S_{ij} / 2$ .

Nous considérons que le système est globalement conservatif, *ie* que le terme source lié à la pression particulière dans l'équation d'énergie de la phase dispersée existe également dans l'équation d'énergie du gaz, mais avec un signe opposé. Le terme source pour la phase gazeuse est donc :

$$S_{gaz} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\rho}{\tau_{gp}^F} (u - u_{gaz}) \\ \frac{\rho}{\tau_{gp}^F} u (u - u_{gaz}) + \frac{2}{\tau_{gp}^F} \frac{P}{\gamma - 1} - \frac{\rho}{\tau_H} (T_{gaz} - T) \end{pmatrix}$$

Il s'agit d'intégrer ces termes sources diphasiques, de façon couplée, afin de déterminer l'état  $(n+1)$  des variables à partir des états  $(*)$  issus de l'intégration des flux convectifs et diffusifs. Cette intégration est analytique dans CPS. Elle est détaillée au paragraphe suivant.

## 4.1 Intégration analytique

Lors de l'intégration des termes sources, la fraction volumique est traitée en première. L'hypothèse de phase dispersée inerte rend cette intégration triviale. Ensuite, dans le cas du CPPM, nous calculons la nouvelle valeur de la variable  $\lambda$ , qui est utilisée ensuite pour le calcul des vitesses et des températures des deux phases.

### 4.1.1 La fraction volumique

Puisque le terme source de l'équation de conservation de la masse est nul<sup>7</sup>, nous avons  $\rho = cste$  sur un pas de temps, soit :

$$\rho^{n+1} = \rho^*$$

Cette relation est valable pour les deux systèmes d'équations à pression particulaire.

### 4.1.2 La variable $\lambda$ (CPPM)

L'équation à résoudre est :

$$\frac{d}{dt} \rho \lambda = \left( -\frac{2}{\tau_{gp}^F} + (\gamma - 1) \frac{\tau_{gp}^F}{2} S^2 \right) \lambda \rho$$

Bien qu'indépendante des équations de la phase gazeuse, l'intégration de la variable  $\lambda$  est loin d'être aisée. En effet, le temps de relaxation dynamique  $\tau_{gp}^F$  est dépendant de  $\lambda$ . Ce couplage a l'air faible, mais si l'on étudie de près la loi algébrique qui définit  $\tau_{gp}^F$ , on s'aperçoit que si  $\lambda$  croît fortement, et pour peu que la masse de particules soit non négligeable, alors  $\tau_{gp}^F$  diminue de façon notable. Le calcul de  $\lambda$  doit donc être couplé avec celui de  $\tau_{gp}^F$ .

Rappelons tout d'abord la loi donnant le temps de relaxation dynamique. Celui-ci s'exprime en fonction du nombre de Reynolds particulaire, de la vitesse de glissement entre les phases, et de la loi de traînée par l'intermédiaire du coefficient  $C_D$  :

$$\tau_{gp}^F = \frac{1}{C_D} \frac{\rho}{\rho_{gaz}} \frac{4}{3} d_p \frac{1}{\|\mathbf{v}_r\|}$$

$$C_D = \max \left( 0,445; \left( 1 + 0,15 \text{Re}^{0,687} \right) \frac{24}{\text{Re}_p} \right)$$

$$\text{Re}_p = \frac{\rho_{gaz} d_p \|\mathbf{v}_r\|}{\mu_{gaz}}$$

$$\|\mathbf{v}_r\|^2 = \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{gaz}\|^2 + 2\lambda \rho^{\gamma-1}$$

Ces expressions ont été présentées auparavant dans le document et sont rappelées ici pour faciliter la lecture. Si l'on voulait prendre en compte la dépendance de  $C_D$  et  $\|\mathbf{v}_r\|$  vis-à-vis de  $\lambda$ , l'intégration analytique ne serait plus possible. Or cette technique a le mérite de la précision. Nous introduisons donc une fonction "itéro-analytique".

L'idée est de conserver la forme exponentielle de l'intégration analytique et d'introduire un processus itératif afin de prendre en compte la non constance de la vitesse de glissement diphasique. Nous écrivons donc :

<sup>7</sup> L'adaptation des modèles à pression particulaire à une phase dispersée réactive ou évaporante n'a pas été réalisée. Cela demande des modifications non immédiates du schéma numérique, qui seront (espérons-le) prises en compte ultérieurement, dans le cadre des travaux de développement du code CPS.

$$\begin{cases} \Gamma = \lambda^i - \lambda^* e^{H^i \Delta t} \\ d\Gamma = 1 - \Delta t \left( \frac{dH}{d\lambda} \right)^i \lambda^* e^{H^i \Delta t} \end{cases}$$

où nous avons posé :

$$H = -\frac{2}{\tau_{gp}^F} + \frac{\gamma-1}{2} \tau_{gp}^F S^2 \quad (6.2)$$

Ce terme dépend de  $\tau_{gp}^F$ , il doit donc être réestimé à chaque pas. Sa dérivée par rapport à  $\lambda$  s'écrit facilement :

$$\frac{dH}{d\lambda} = \frac{d\tau_{gp}^F}{d\lambda} \left( \frac{2}{\tau_{gp}^F{}^2} + \frac{\gamma-1}{2} S^2 \right)$$

En considérant le coefficient  $C_D$  constant, la dérivée du temps de relaxation par rapport à  $\lambda$  est :

$$\frac{d\tau_{gp}^F}{d\lambda} = -\frac{\rho^{\gamma-1}}{\|\mathbf{v}_r\|^2} \tau_{gp}^F$$

Cette dérivée a donc un comportement monotone et assure que  $\tau_{gp}^F$  décroît quand  $\lambda$  croît. La valeur de  $\lambda$  cherchée est celle qui annule  $\Gamma$  :  $\Gamma(\lambda^{n+1}) = 0$ , elle s'obtient classiquement par une formule de Newton :

$$\lambda^{i+1} = \lambda^i - \frac{\Gamma(\lambda^i)}{d\Gamma(\lambda^i)}$$

La convergence de ce processus itératif est très rapide et donne de bons résultats. Le couple solution  $(\tau_{gp}^F, \lambda)^{n+1}$  est ensuite utilisé pour intégrer les vitesses et les températures. On retiendra que la valeur du temps de relaxation dynamique obtenue peut donc être différente de celle obtenue initialement à l'issue des calculs de flux convectifs et diffusifs.

Nous attirons à présent l'attention du lecteur sur le fait que, comme pour l'équation turbulente de  $q$  dans le modèle  $q-\omega$  (Coakley, 1983), le terme source sur la variable  $\lambda$  n'est pas borné en temps. Théoriquement, un état d'équilibre doit exister, mais numériquement c'est beaucoup moins évident.

Par définition du terme source  $H$ , la variable  $\lambda$  peut augmenter indéfiniment. Or, si  $\lambda$  augmente, la viscosité particulière augmente également, ce qui doit avoir pour effet d'augmenter les effets visqueux, par suite de réduire les gradients et donc de limiter la création de  $\lambda$ . Un équilibre pour  $\lambda$  doit théoriquement être assuré par la diffusion. Ceci étant, le temps caractéristique associé à la production de  $\lambda$  est très nettement inférieur à celui de la diminution des gradients par l'augmentation de la viscosité. En effet, les phénomènes diffusifs sont bien plus longs à se mettre en place que la production de  $\lambda$  via son terme source (dont l'intégration est en exponentielle). Le terme de création de  $\lambda$  peut donc être prépondérant devant le terme de destruction. La méthode à pas fractionnaires utilisée impliquant un découplage de la convection/diffusion des termes sources, la variable  $\lambda$  peut ainsi augmenter fortement sans que la viscosité ait le temps de diminuer les gradients de vitesse moyenne.

Cet écueil provient de l'hypothèse de Boussinesq. En effet, physiquement, la production de  $\lambda$  devrait être prise entièrement sur l'énergie cinétique de la phase dispersée. Or, l'approximation de

Boussinesq implique que la production de  $\lambda$  et la perte d'énergie cinétique due à cette même production se font par des mécanismes différents, respectivement par intégration du terme source et par diffusion. La modélisation employée peut donc aboutir à des valeurs très fortes de  $\lambda$  et par conséquent à une énergie cinétique fluctuante importante. Ce qui va avoir tendance à diminuer l'énergie interne des particules, d'où l'apparition éventuelle de températures négatives pour la phase dispersée.

Pour pallier ce défaut, nous utilisons, si besoin, une condition basée sur le calcul des conditions de réalisabilité<sup>8</sup> (cf. chapitre 4). La majorité des calculs effectués ne nécessite cependant pas cette limitation arbitraire.

Précisons également que la croissance de  $\lambda$  serait limitée, pour les grosses particules, si on prenait en compte les collisions entre les particules. En effet, lorsque l'agitation des particules augmente, le temps de collision  $\tau_p^c$  diminue. La dissipation inélastique des collisions devient importante et surtout la viscosité des particules se met alors à diminuer. Ainsi, le modèle proposé par Simonin *et al* (2002) contient une viscosité particulaire qui s'exprime en fonction du temps de relaxation dynamique  $\tau_{gp}^F$  mais également du temps de collision  $\tau_p^c$ . La compétition entre ces deux mécanismes permet de limiter les variations de  $\lambda$ .

### 4.1.3 Les vitesses

Considérons à présent l'intégration des vitesses. Comme la fraction volumique solide, la masse volumique du gaz reste constante sur un pas de temps, soit  $\rho_{gaz} = cste$  et  $C = \rho / \rho_{gaz} = cste$ . L'intégration du terme source de l'équation de quantité de mouvement revient donc à résoudre le système couplé suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_{gaz}}{\partial t} = C \frac{u - u_{gaz}}{\tau_{gp}^F} \\ \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{u - u_{gaz}}{\tau_{gp}^F} \end{cases}$$

Nous considérons  $\tau_{gp}^F$  constant sur le pas de temps et sa valeur est issue de l'intégration itéro-analytique de la variable  $\lambda$ . Ce système s'intègre analytiquement (Morfouace, 1994). Si nous posons  $A = (1+C) / \tau_{gp}^F$  et  $u_m^* = \frac{C u^* + u_{gaz}^*}{1+C}$ , la solution du système est :

$$\begin{cases} u_{gaz}^{n+1} = u_{gaz}^* - C(u^{n+1} - u^*) \\ u^{n+1} = u^* e^{-A\Delta t} + u_m^* (1 - e^{-A\Delta t}) \end{cases} \quad (6.3)$$

Cette solution est identique<sup>9</sup> pour les deux modèles à pression particulaire, puisque les termes sources sont les mêmes.

### 4.1.4 Les températures

Nous allons à présent développer la méthode d'intégration des termes liés à la température. Les équations pour les énergies totales s'écrivent :

<sup>8</sup> Celles-ci fournissent une valeur seuil pour le temps de relaxation dynamique, que l'on multiplie par un coefficient *ad hoc* inférieur à 1 afin d'autoriser une production de  $\lambda$  tout en la limitant.

<sup>9</sup> A l'exception de la valeur du temps de relaxation dynamique qui, comme nous l'avons vu précédemment, peut être différente selon le modèle utilisé.

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \rho E_{gaz} = \frac{\rho}{\tau_{gp}^F} u (u - u_{gaz}) - \rho C_{p,p} \frac{T_{gaz} - T}{\tau_H} + \frac{2}{\tau_{gp}^F} \lambda \rho^\gamma \\ \frac{\partial}{\partial t} \rho E = - \frac{\rho}{\tau_{gp}^F} u (u - u_{gaz}) + \rho C_{p,p} \frac{T_{gaz} - T}{\tau_H} - \frac{2}{\tau_{gp}^F} \lambda \rho^\gamma \end{cases} \quad (6.4)$$

avec  $E_{gaz} = C_v T_{gaz} + \frac{u_{gaz}^2}{2}$  et  $E = C_{p,p} T + \frac{u^2}{2} + \lambda \rho^{\gamma-1}$ . On soustrait ensuite les énergies cinétiques aux énergies totales, grâce aux équations de conservation de la quantité de mouvement. On soustrait également l'énergie cinétique fluctuante à l'équation sur l'énergie totale de la phase dispersée. Il est ainsi possible d'extraire les équations couplées suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial T_{gaz}}{\partial t} = - \frac{\beta}{\tau_H} (T_{gaz} - T) + \frac{\beta}{\tau_{gp}^F C_{p,p}} (u - u_{gaz})^2 + \frac{2}{\tau_{gp}^F} \frac{\beta}{C_{p,p}} \lambda \rho^{\gamma-1} \\ \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_{gaz} - T}{\tau_H} - \frac{M}{C_{p,p}} \lambda \rho^{\gamma-1} \end{cases}$$

$$\text{avec } \beta = \frac{\gamma_{gaz} C C_{p,p}}{C_{p,gaz}} = cste \text{ et } M = H + \frac{2}{\tau_{gp}^F} = (\gamma - 1) \frac{\tau_{gp}^F}{2} S^2.$$

En manipulant ces équations, nous obtenons un système sur  $a(t) = \frac{\beta T + T_{gaz}}{1 + \beta}$ , la température barycentrique, et  $b(t) = T_{gaz} - T$  l'écart sur les températures. Les équations sont les suivantes :

$$\begin{cases} a'(t) = F(t) + R(t) - \beta Q(t) \\ b'(t) = (1 + \beta)(F(t) + Q(t) + R(t)) - Bb(t) \end{cases} \quad (6.5)$$

Les autres fonctions introduites sont telles que :

$$F(t) = \frac{\beta}{1 + \beta} \frac{(u - u_{gaz})^2}{C_{p,p} \tau_{gp}^F}, \quad R(t) = \beta \frac{2}{\tau_{gp}^F} Y \lambda(t), \quad Q(t) = Y M \lambda(t), \quad Y = \frac{1}{1 + \beta} \frac{1}{C_{p,p}} \rho^{\gamma-1}, \quad B = \frac{1 + \beta}{\tau_H}$$

L'étape suivante consiste à intégrer  $a'(t)$ . L'intégration de  $F(t)$  utilise un résultat de l'intégration des vitesses d'où l'introduction du terme  $\tilde{u} = \frac{\|\mathbf{u}_{gaz}^* - \mathbf{u}^*\|}{1 + C}$ . De même, la détermination de la

constante nécessite de poser  $T_b^* = \frac{\beta T^* + T_{gaz}^*}{1 + \beta}$ . On en déduit l'expression de  $a(t)$  suivante :

$$a(t) = T_b^* + \frac{\beta}{1 + \beta} \frac{(1 + C) \tilde{u}^2}{2 C_{p,p}} (1 - e^{-2At}) + \beta Y \lambda^* (1 - e^{-Ht}) \quad (6.6)$$

On notera que le coefficient  $H$  est calculé à partir de la valeur  $(\tau_{gp}^F)^{n+1}$  définie précédemment par la méthode itéro-analytique. Ensuite, nous calculons  $b(t)$ . D'après la définition de  $b'(t)$ , (6.5), si on pose  $K'(t) = (1 + \beta)(F(t) + Q(t) + R(t))e^{-Bt}$ , alors il vient  $b(t) = K(t)e^{-Bt}$ . Cette étape du calcul, bien que fastidieuse, ne présente pas de difficulté particulière. Nous obtenons l'expression suivante :



$$b(t) = (T_{gaz}^* - T^*)e^{-Bt} + \frac{\beta(1+C)\tilde{u}^2 A}{C_{p,p}(B-2A)}(e^{-2At} - e^{-Bt}) + \frac{\rho^{\gamma-1}\lambda^*}{C_{p,p}(H+B)}\left(\frac{2}{\tau_{gp}^F}\beta + M\right)(e^{Ht} - e^{-Bt}) \quad (6.7)$$

Les équations (6.6) et (6.7) permettent de déterminer l'équation d'évolution de la température des particules, sur un pas de temps. On pose pour cela :

$$T_{drag} = \frac{\beta(1+C)\tilde{u}^2}{2C_{pp}(1+\beta)} \text{ et } T_{pression} = \frac{\beta\rho^{\gamma-1}\lambda^*}{C_{pp}(1+\beta)}$$

qui traduisent respectivement l'influence des termes de traînée et du terme de pression particulaire.

La valeur de  $T$  au temps  $t^{n+1}$  est alors définie par :

$$\begin{aligned} T^{n+1} = & T^* e^{-B\Delta t} + T_b^* (1 - e^{-B\Delta t}) \\ & + T_{drag} \left( 1 + \frac{2Ae^{-B\Delta t} - Be^{-2A\Delta t}}{B - 2A} \right) \\ & + T_{pression} \left( 1 - e^{H\Delta t} - \left( \frac{2}{\tau_{gp}^F} + \frac{M}{\beta} \right) \left( \frac{e^{H\Delta t} - e^{-B\Delta t}}{H + B} \right) \right) \end{aligned} \quad (6.8)$$

Voyons à présent le cas du modèle à pression particulaire simplifié. Le terme  $T_{drag}$ , qui intervient dans le calcul des températures et qui traduit l'influence des termes de traînée, n'est pas modifié. De même, le terme  $T_{pression}$  est inchangé et l'équation (6.8) devient :

$$\begin{aligned} T^{n+1} = & T^* e^{-B\Delta t} + T_b^* (1 - e^{-B\Delta t}) \\ & + T_{drag} \left( 1 + \frac{2Ae^{-B\Delta t} - Be^{-2A\Delta t}}{B - 2A} \right) \\ & + T_{pression} \left( -\frac{2}{B\tau_{gp}^F} \left( \frac{1+\beta}{\beta} \right) (1 - e^{-B\Delta t}) \right) \end{aligned} \quad (6.9)$$

On notera que dans ce cas, la contribution de la pression particulaire est toujours négative, ce qui implique une tendance de ce terme à diminuer la température des particules et, en contre partie, à augmenter celle de la phase gazeuse.

## 4.2 Second membre en axisymétrie

Le passage d'une configuration tridimensionnelle à une configuration bidimensionnelle axisymétrique impose de prendre en compte des termes sources supplémentaires (voir par exemple Carpentier, 1999). Dans le cas des équations de Navier-Stokes, le terme de pression gazeuse crée lors de l'intégration des flux convectifs un terme de pression au second membre, pour la composante de vitesse radiale (cf. chapitre 2). De même, le calcul des flux diffusifs impose de tenir compte d'un terme de contrainte visqueuse au second membre pour la composante de vitesse radiale. Dans le cas du gaz, ce terme est :

$$\sigma_\theta = \mu_{gaz} \left( 2 \frac{v_{gaz}}{y} - \frac{2}{3} \text{div}(\mathbf{u}_{gaz}) \right)$$

$\mu_{gaz}$  représente la viscosité laminaire de la phase gazeuse, éventuellement complétée d'une viscosité turbulente. Le second membre est alors :

$$\mathbf{K}_g = n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ P_{gaz} - \sigma_\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les équations du modèle complet étant similaires à celles de Navier-Stokes, nous devons également prendre en compte un second membre équivalent en axisymétrie.

D'après les équations du CPPM, ce terme s'écrit :

$$\mathbf{K}_{p,CPM} = n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ P - \sigma_{p,\theta} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le terme de pression particulaire est défini par  $P = (\gamma - 1)\lambda\rho^\gamma$ , soit en 2D axisymétrie :

$$P = \frac{2}{3}\lambda\rho^{5/3}$$

Le terme de contrainte visqueuse se déduit de la relation imposant une trace nulle pour la partie déviatorique du tenseur des contraintes cinétiques particulières, soit :

$$\sigma_{p,\theta} = \mu_p \left( 2\frac{v_p}{y} - \frac{2}{3}div(\mathbf{u}_p) \right)$$

Dans le cas du modèle simplifié, il n'existe pas de flux diffusifs, le second membre se réduit donc à :

$$\mathbf{K}_{p,SPPM} = n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda\rho^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'intégration de ces seconds membres a été effectuée dans CPS, en calquant la méthode retenue pour les termes gazeux.

### 4.3 Cas test d'une boîte fermée

Nous avons vérifié le comportement global du système avec termes sources sur un cas test consistant à maintenir un écoulement constant au repos dans une boîte fermée. Pour les deux phases, les vitesses sont initialement nulles et les températures sont égales à 300K. Des conditions de glissement sont appliquées aux quatre faces du maillage. Le calcul est réalisé avec le CPPM, pour une énergie cinétique fluctuante initiale des particules telle que  $\lambda = 1000$ .

L'absence de gradients de vitesse particulaire dans l'écoulement implique une diminution exponentielle de  $\lambda$  jusqu'à la valeur seuil fixée à  $\lambda_{seuil} = 10^{-15}$  (cf. (6. 2)). Ce comportement est parfaitement retrouvé par le calcul (cf. Figure 6- 23).

Les profils de température sont présentés Figure 6- 24 pour le gaz et la phase dispersée. On remarque que la température d'équilibre finale est supérieure (légèrement) à la température initiale. C'est logique : l'énergie cinétique fluctuante est détruite (diminution de  $\lambda$ ) et transférée à l'énergie

interne des phases continue et dispersée. La mise à l'équilibre est ensuite due au terme d'échange thermique.

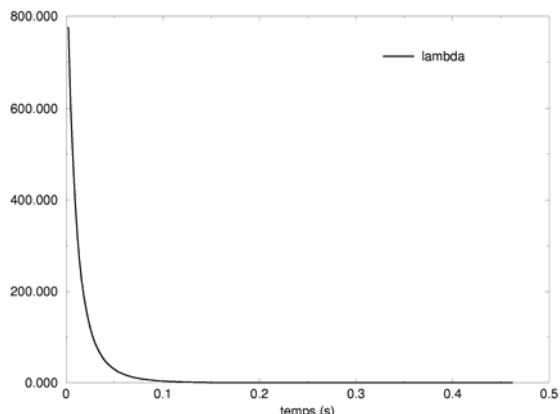


Figure 6- 23 : Diminution exponentielle de lambda.

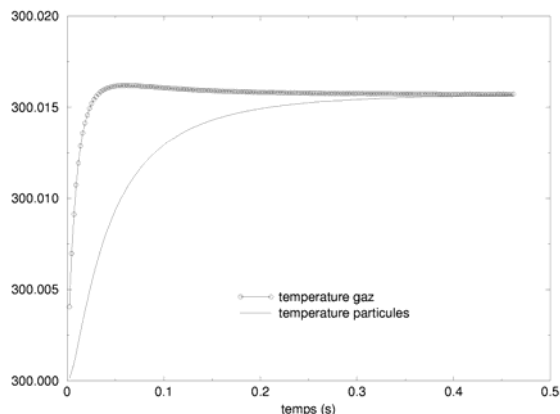


Figure 6- 24 : Evolution de la température dans une boîte fermée, influence de la pression particulaire.

Le même calcul, effectué avec le modèle simplifié, présente des résultats notablement différents. Dans ce cas particulier, les températures des deux phases ne peuvent s'équilibrer (cf. Figure 6- 25). En effet, la pression particulaire reste constante puisque la variable  $\lambda$  n'est pas détruite au cours du temps et que la fraction volumique est également constante. Le terme source sur les énergies totales (6. 2) ne peut donc s'annuler que si :

$$T_{gaz} - T = \frac{2}{C_{pp}} \frac{\tau_H}{\tau_{gp}} \lambda \rho^{\gamma-1} \neq 0$$

L'état à l'équilibre est donc tel que la température de la phase gazeuse est supérieure<sup>10</sup> à celle des particules. L'écart entre ces températures est proportionnel à l'énergie cinétique fluctuante initiale.

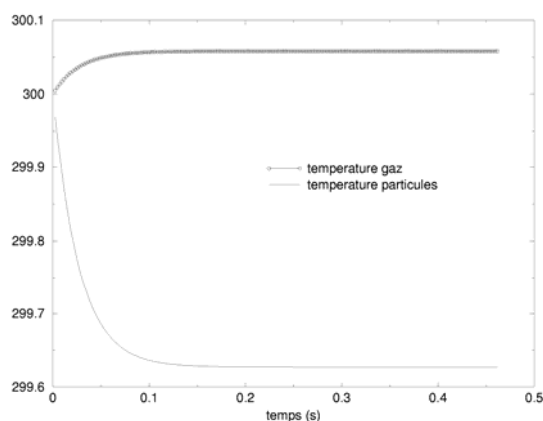


Figure 6- 25 : Influence de la pression particulaire, modèle SPPM, lambda=1000.

<sup>10</sup> Cet état final hors d'équilibre peut surprendre un physicien... Précisons donc que l'état d'équilibre entre les phases est bien atteint si l'on considère que la température de la phase dispersée est constituée de la température  $T_p$  et de la

température liée à l'énergie cinétique fluctuante des particules  $T_p^* = \lambda \rho^{\gamma-1} / C_{p,p}$ .

## 5. Comparaisons de calculs réalisés avec les trois modèles diphasiques eulériens

Dans ce paragraphe, nous présentons les résultats obtenus sur deux cas tests (un calcul de couche de cisaillement et un calcul de couche de mélange instationnaire) pour les trois modèles eulériens à notre disposition : le modèle de base de CPS, le modèle dit SPPM et le modèle dit CPPM. Toutes les caractéristiques physiques de chacun des modèles sont utilisées (termes sources, diffusion, pression particulaire, ...).

### 5.1 Calcul d'une couche de cisaillement

Ce cas de calcul a été décrit au paragraphe 3.3. Contrairement au cas précédent, les calculs réalisés avec le CPPM tiennent compte de la variation de  $\lambda_p$ . L'intérêt de ce cas test est justement d'offrir sur l'axe une forte zone de cisaillement qui doit engendrer une création de  $\lambda_p$  en conséquence. Deux diamètres de particules ( $5\mu\text{m}$  et  $30\mu\text{m}$ ) sont testés afin de vérifier l'influence du terme de traînée sur le comportement des modèles, notamment le CPPM. En effet la variation de  $\lambda_p$  est due à une compétition entre un terme de destruction lié à l'inertie des particules et un terme de production dû au cisaillement des vitesses moyennes.

Pour des particules faiblement inertielles,  $ie$  dont le temps de relaxation dynamique est très faible devant le temps caractéristique de l'écoulement, le terme source de destruction de  $\lambda_p$  est prédominant dans l'équation (6. 2), ce qui implique une diminution très rapide de la variable  $\lambda_p$ . Le graphe donnant les valeurs de cette grandeur dans le champ n'est pas donné car il ne présente que peu d'intérêt : initialisé à 100,  $\lambda_p$  atteint la valeur seuil minimale en moins de 10 cellules. La pression particulaire est donc quasi-nulle dans tout le champ, ce qui explique que les résultats obtenus pour le CPPM soient identiques à ceux obtenus pour le modèle de base (le taux de particules est présenté Figure 6- 26). Le modèle SPPM considère la grandeur  $\lambda$  constante, égale à 100 dans ce cas de calcul, la pression particulaire n'est donc pas nulle. Comme elle a tendance à lisser les discontinuités, la répartition de particules dans le tube est légèrement différente : le champ de particules est plus diffus.



Figure 6- 26 : Calcul d'une couche de cisaillement, répartition des particules selon les modèles diphasiques, (a) Modèle de base, (b) SPPM  $\lambda=100$ , (c) CPPM.

Le profil de la fraction volumique obtenu en sortie du domaine est tracé Figure 6- 27, pour le modèle de base<sup>11</sup> de CPS et le SPPM. La fraction volumique est nettement discontinue dans le cas du modèle de base, alors qu'avec le terme de pression, un profil continu inflexionnel est obtenu.

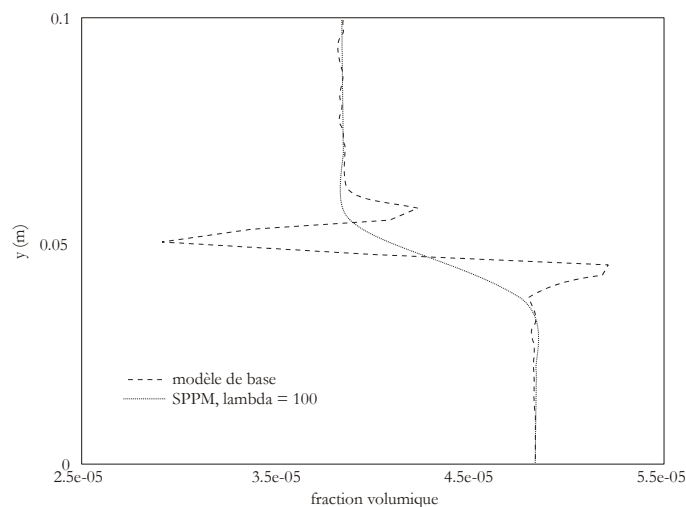


Figure 6- 27 : Profil de fraction volumique.

Les simulations réalisées pour des particules de 30 $\mu$ m de diamètre donnent des résultats sensiblement différents, pour les trois modèles, cf. Figure 6- 28. Les particules ne se comportent alors pas comme des traceurs et sont sensibles aux conditions initiales de leur injection. Ainsi, dans le cas du modèle de base, une zone d'accumulation de particules ( $\alpha_{pmax} = 1,235.10^{-4}$ ) est visible sur l'axe, près de la sortie. Seule la convection est prise en compte dans ce modèle, les particules injectées à une vitesse faible ont donc tendance à s'accumuler. La répartition des particules est plus homogène avec le modèle SPPM : le terme de pression particulaire étale les particules dans le tube et atténue les zones d'accumulation ( $\alpha_{pmax} = 6,667.10^{-5}$ ).

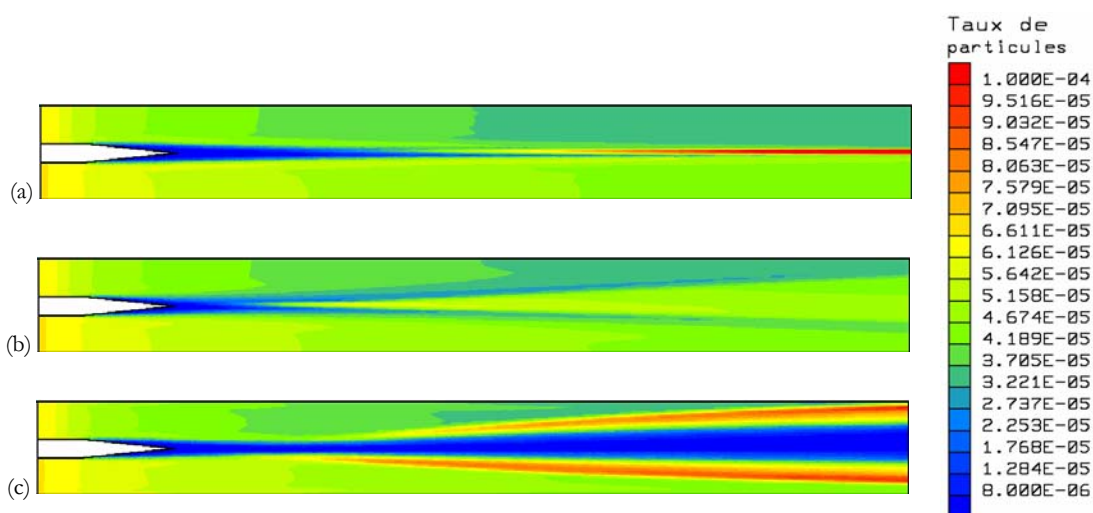


Figure 6- 28 : Calcul d'une couche de cisaillement, répartition des particules selon les modèles diphasiques, particules de 30 $\mu$ m de diamètre. (a) Modèle de base, (b) SPPM lambda=100, (c) CPPM.

<sup>11</sup> Les résultats pour le CPPM sont identiques à ceux du modèle de base, ils ne figurent donc pas sur le graphe présenté dans ce document.

Dans le cas du CPPM, la situation est plus complexe : la pression particulaire varie dans l'écoulement, en fonction de la fraction volumique et du terme  $\lambda_p$ . Or, cette grandeur dépend des conditions de l'écoulement et peut donc diminuer ou augmenter, selon la zone de l'écoulement.

La Figure 6- 29 montre que dans la majeure partie de l'écoulement, la variable  $\lambda_p$  est peu à peu détruite. En effet, l'écoulement est simplement convecté et il n'existe pas de gradients de la vitesse moyenne. L'énergie cinétique fluctuante des particules ne peut donc être que détruite par les termes d'inertie. C'est ce que nous pouvons observer près des parois supérieure et inférieure du tube. Les valeurs choisies pour  $\lambda_p$  à l'initialisation ont donc une influence négligeable sur le résultat obtenu. Les conditions initiales sont rapidement « oubliées » dans les zones ne présentant pas de gradients de vitesse moyenne particulaire.

En revanche, au centre du domaine, il se trouve une zone de production significative de  $\lambda_p$ , due aux forts gradients de vitesse. On notera que cette zone de fortes valeurs de  $\lambda_p$  correspond à une zone de faible fraction volumique. Les particules se retrouvent principalement sur le pourtour de cette zone de vide. Cette accumulation reste cependant limitée :  $\alpha_{p\max} = 9,683.10^{-5}$ .

La validité physique de ce résultat semble discutable : la justification de la zone de vide de particules créée au centre du tube n'est pas immédiate. Il serait intéressant de comparer nos résultats à ceux obtenus par un code possédant un niveau de modélisation équivalent afin de pouvoir conclure sur le sujet. Pour l'instant, nous ne pouvons que constater que les résultats du calcul avec CPPM traduisent fidèlement les équations que nous avons écrites. Une zone de forts gradients crée un fort  $\lambda_p$  et donc une forte agitation des particules. Le terme de pression particulaire qui en découle tend ensuite à disperser les particules dans le champ. Il est cependant légitime de s'interroger sur la validité du comportement du modèle lorsque les gradients de vitesse moyenne sont dus uniquement à une zone de cisaillement "pur" et non à une compression ou à du rotationnel.

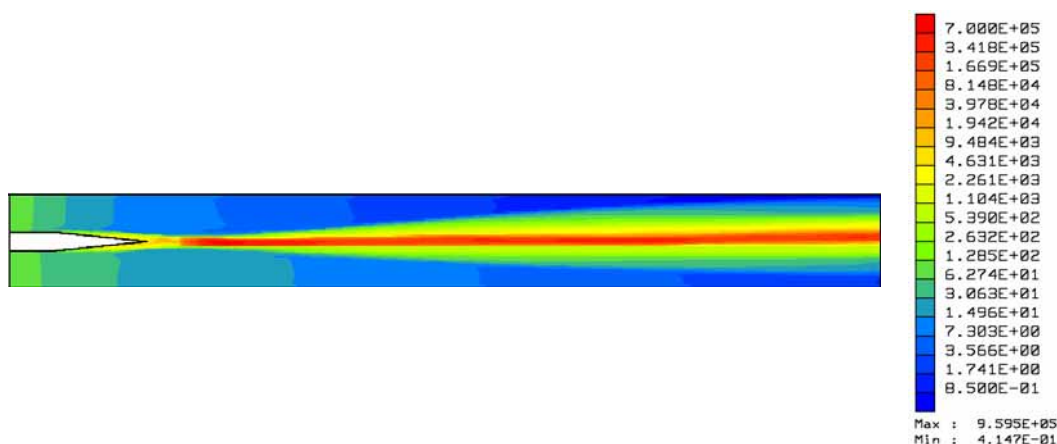


Figure 6- 29 : Couche de cisaillement, variable  $\lambda$ .

La Figure 6- 30 donne les valeurs des vitesses axiales particulières dans le domaine, pour les trois modélisations utilisées. Les modèles de base et SPPM montrent une nette discontinuité du champ près de l'axe contrairement au CPPM qui présente une forte diffusion des vitesses.

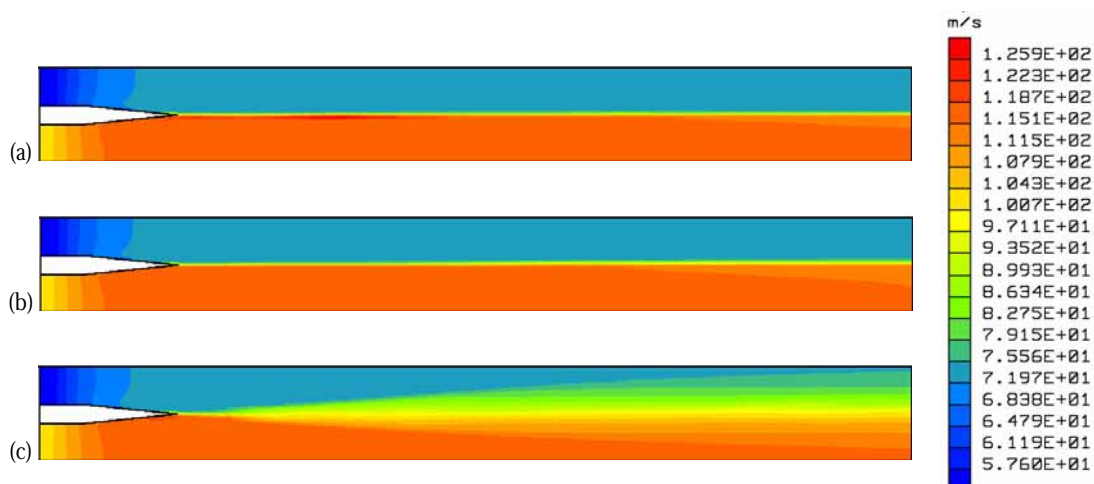


Figure 6- 30 : Calcul d'une couche de cisaillement, vitesse axiale particulaire selon les modèles diphasiques, particules de 30 $\mu$ m de diamètre, (a) Modèle de base, (b) SPPM  $\lambda=100$ , (c) CPPM.

## 5.2 Calcul d'une couche de mélange diphasique instationnaire

Le dernier calcul présenté dans ce chapitre correspond à une couche de mélange instationnaire. Ce cas a été défini lors d'une étude préalable sur l'influence du diamètre des particules dans leur comportement à proximité d'une structure tourbillonnaire (Godfroy *et al*, 2004). Les conditions d'injection utilisées créent un déséquilibre progressif de l'écoulement gazeux qui est plus ou moins ressenti par les particules.

L'objectif de cette étude était de reproduire les résultats de travaux théoriques menés dans un cadre différent (Wen *et al*, 1992 ; Tang *et al*, 1992) et selon lesquels la centrifugation des particules à la périphérie de tourbillons dans un écoulement diphasique est maximale pour un nombre de Stokes égal à 1. Rappelons qu'il est possible de définir un nombre de Stokes  $St$  par le rapport du temps de relaxation dynamique des particules  $\tau_u^s$  et du temps caractéristique des grosses structures tourbillonnaires de l'écoulement (lié ici à la fréquence de l'instabilité de la couche de mélange).

Les simulations initiales ont été réalisées avec le modèle de base de CPS pour quatre diamètres de particules, correspondant approximativement à des nombres de Stokes variant de 0,01 à 10. Les résultats, présentés Figure 6- 31, montrent que les particules à très faible nombre de Stokes ( $St = 0,01$ ) suivent l'écoulement, y compris au cœur des structures tourbillonnaires. Lorsque le diamètre augmente, et avec lui le nombre de Stokes, ce comportement est moins net : les particules ont plutôt tendance à rester sur le pourtour des tourbillons. Cette centrifugation est, comme prévu par la théorie, maximale pour  $St = 1$ . Pour des nombres de Stokes très importants, l'inertie des particules est telle qu'elles ne voient pas les tourbillons et se comportent comme des « boulets de canon ». Ces résultats sont des résultats classiques (Wen *et al*, 1992 ; Tang *et al*, 1992 ; Burger *et al*, 2003).

Nous avons effectué les mêmes calculs avec les deux modèles à pression particulaire afin de comparer le comportement des trois modèles eulériens. Pour cela nous traçons Figure 6- 32 et Figure 6- 33 les iso-valeurs de la concentration des particules dans l'écoulement établi. Le calcul SPPM est réalisé pour une valeur de  $\lambda$  fixée à 100.

Pour les plus petits nombres de Stokes, les trois modèles ont un comportement identique : les particules ne sont pas particulièrement rejetées à l'extérieur des tourbillons. On remarque cependant que lorsque  $St = 0,1$  le SPPM a tendance à étaler les particules : les légères accumulations visibles en rouge sur les cartes du modèle de base et du CPPM sont supprimées.

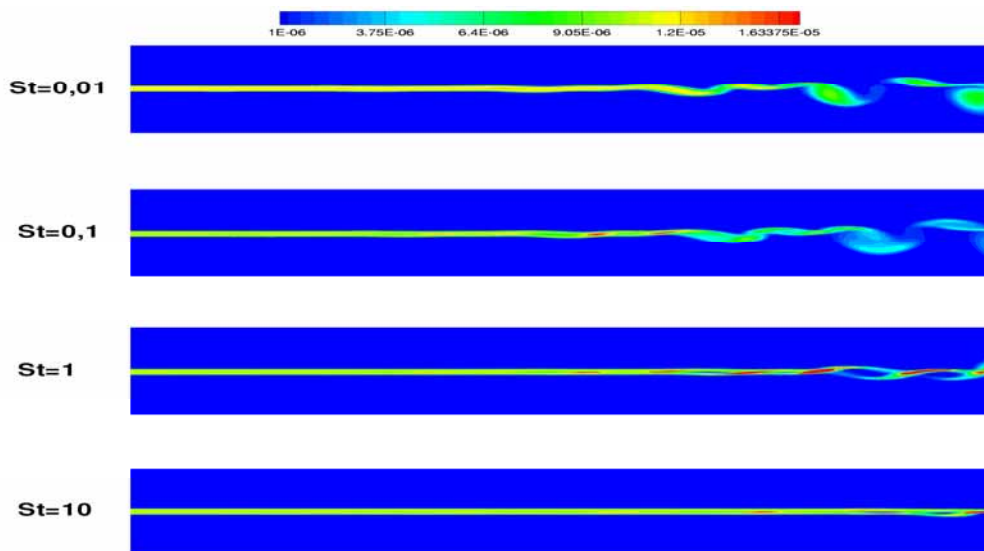


Figure 6- 31 : Calcul d'une couche de mélange instationnaire, résultats du modèle de base.

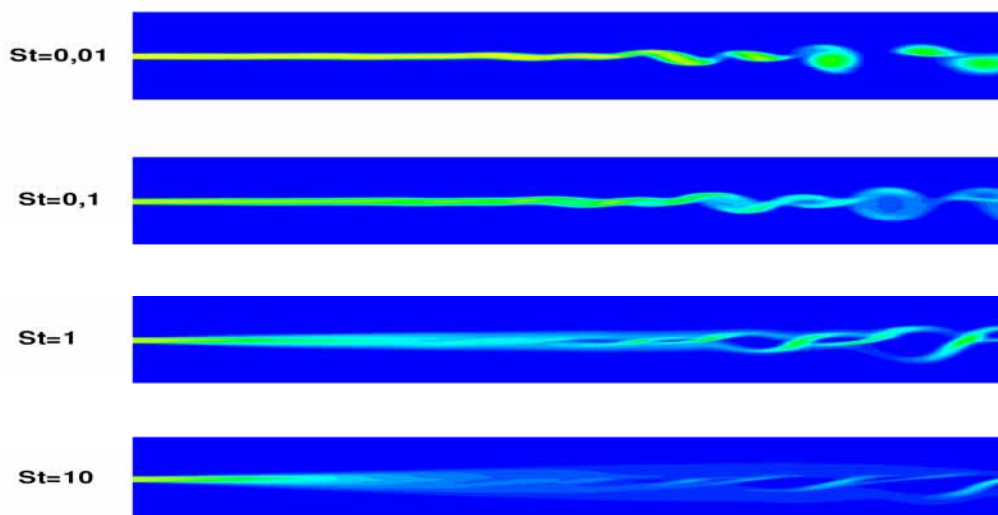


Figure 6- 32 : Calcul d'une couche de mélange instationnaire, résultats SPPM (lambda=100).

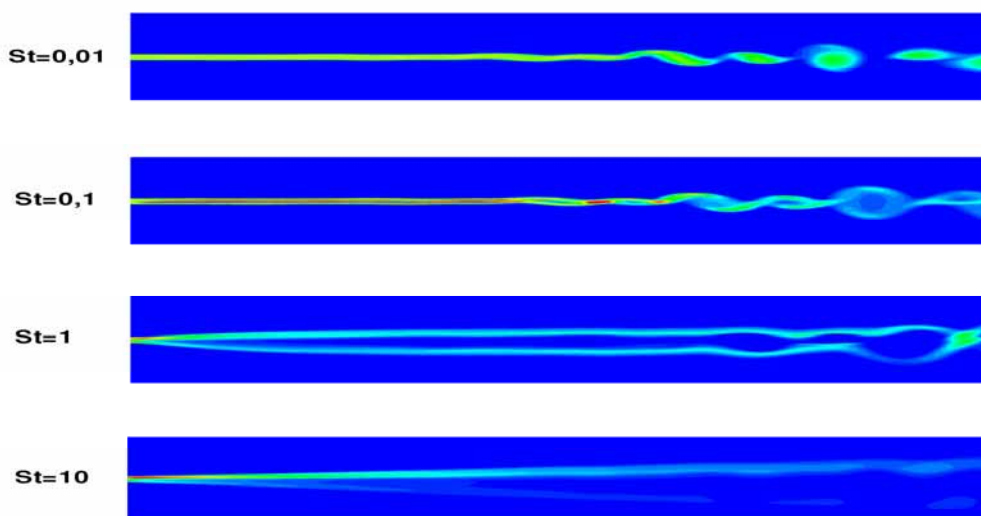


Figure 6- 33 : Calcul d'une couche de mélange instationnaire, résultats CPPM.



Des différences notables apparaissent pour des valeurs supérieures du nombre de Stokes. Ainsi, lorsque celui-ci vaut 1, la centrifugation des particules autour des tourbillons existe pour les trois modèles mais elle est nettement moins marquée lorsqu'une pression particulaire est prise en compte. Le résultat du calcul avec le modèle complet est singulier : nous observons deux filets de particules qui contournent les tourbillons. Comme dans le cas précédent de la couche de cisaillement, les gradients de vitesse moyenne créés dans cette zone de l'écoulement engendrent une forte augmentation de la variable  $\lambda_p$  (cf. Figure 6- 34). La pression particulaire est donc importante et a tendance à vider de particules la zone de cisaillement.

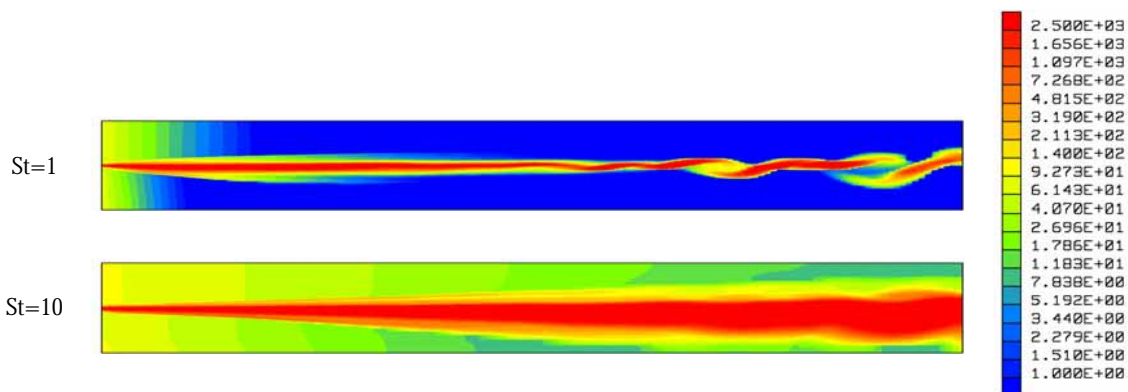


Figure 6- 34 : Variation de lambda, couche de mélange diphasique instationnaire.

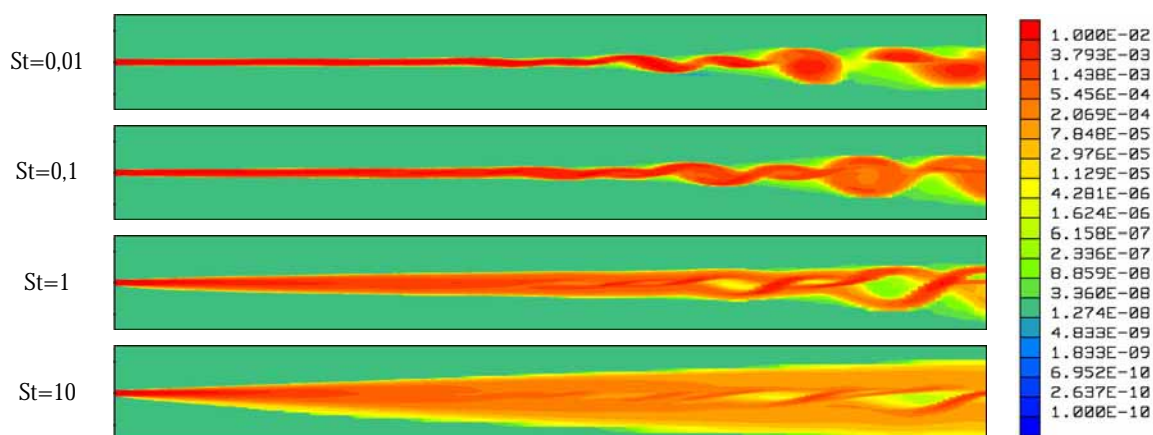


Figure 6- 35 : Pression diphasique (en Pa), résultats SPPM.

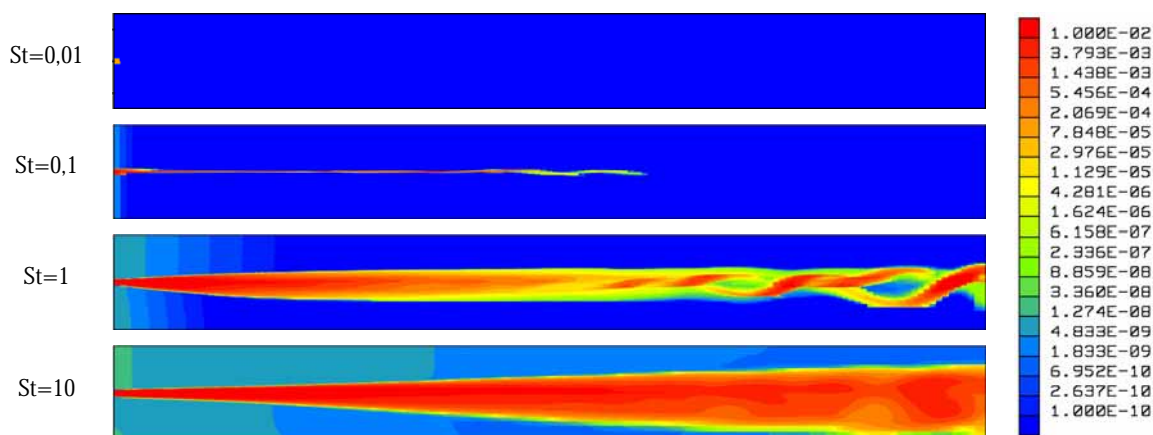


Figure 6- 36 : Pression diphasique (en Pa), résultats CPPM.

Dans le cas des forts nombres de Stokes, les particules ne subissent pas l'influence de l'écoulement gazeux, elles sont étalées dans le tube par l'action du terme de pression particulaire. On peut en effet voir Figure 6- 34 que, dans le cas du CPPM,  $\lambda_p$  prend des valeurs très fortes dans la majorité du domaine. Précisons que si nous ne présentons pas les mêmes cartographies pour les nombres de Stokes plus faibles, c'est parce que l'agitation des particules est détruite quasi instantanément à cause du faible temps de relaxation dynamique (6. 2). La variable  $\lambda_p$  est donc nulle (ou presque) dans tout le domaine.

Afin de mieux appréhender le rôle de la pression particulaire dans ces différents cas de calcul, nous avons tracé les valeurs de la pression diphasique pour les modèles SPPM (Figure 6- 35) et CPPM (Figure 6- 36). Selon le diamètre des particules, cette pression est très différente pour les deux modèles. Dans le cas du SPPM, la pression diphasique est proportionnelle à la fraction volumique car  $\lambda$  est constante et fixée à 100 (pour ce cas de calcul). En revanche, dans le modèle complet,  $\lambda_p$  varie en fonction des caractéristiques de l'écoulement (via les gradients de vitesse moyenne) et de la phase dispersée (via le temps de relaxation dynamique).

Dans le cas du SPPM, la pression est constante dans la zone "hors mélange" et proportionnelle à la valeur initiale de  $\lambda$ , alors que dans le cas du CPPM, la pression est quasi-nulle car  $\lambda_p$  a été détruit par l'absence de gradients de vitesse moyenne dans cette région de l'écoulement.

Les pressions diphasiques sont proches pour des nombres de Stokes élevés. On notera cependant que pour  $St = 1$ , la pression CPPM est nulle au cœur des tourbillons contrairement à celle du SPPM qui est proche de sa valeur initiale. Lorsque  $St = 10$ , la pression diphasique obtenue par le calcul CPPM est plus forte et nous ne distinguons pas de structures cohérentes : la pression est répartie uniformément au centre du tube. Cette diffusion de la pression au cœur des tourbillons est certainement due aux termes visqueux présents dans le CPPM qui sont d'autant plus forts que le temps de relaxation dynamique est grand et que la pression est grande (6. 1).

Dans le cas des petits nombres de Stokes, les pressions sont très différentes. Comme précisé auparavant, l'absence d'inertie des particules entraîne une diminution brutale de  $\lambda_p$ , la pression diphasique du CPPM est donc quasi-nulle. Ce n'est pas le cas du SPPM puisque  $\lambda$  est constante. On remarquera cependant que, malgré ces comportements très différents de la pression, les deux modèles donnent des résultats identiques sur la répartition des particules. Ces résultats sont également similaires à ceux du modèle sans pression, ce qui est normal. En effet, si les particules sont petites, la mise à l'équilibre dynamique avec le gaz est très rapide : le terme de pression ne suffit pas à déstabiliser l'écoulement et à étaler les particules. Bien sûr, si nous choisissons une valeur de  $\lambda$  déraisonnable, cette situation ne sera plus vérifiée et le résultat du SPPM sera probablement différent. C'est ce que nous observons dans le cas de la couche de cisaillement : la répartition des particules est différente lorsque l'on utilise le modèle simple (cf. Figure 6- 26). La valeur choisie pour  $\lambda$  est identique à celle du calcul de la couche de mélange instationnaire ( $\lambda = 100$ ), mais dans ce cas, il se trouve que les fractions volumiques sont plus élevées et que la pression particulaire est suffisamment forte pour modifier le mouvement des particules.

Ce constat a motivé l'étude de modèles diphasiques particuliers pour les plus petites particules. En effet, celles-ci étant quasi instantanément en équilibre avec le gaz, il peut sembler inutile de résoudre deux (voire trois) équations différentielles sur la quantité de mouvement pour obtenir au final une vitesse particule très proche de celle du gaz. Nous nous sommes également intéressés à ce problème au cours de la thèse, ce qui justifie la digression suivante.

### 5.3 Vers un modèle de glissement algébrique

Des modèles de glissement algébriques ont été proposés par divers auteurs. On peut citer en particulier Ferry & Balachandar (2001) qui, en se basant sur les travaux de Druzhinin (1995) et Maxey (1987), ont développé une méthode baptisée Equilibrium Eulerian Approach dans le but de modéliser les fines particules de fumées créées par la combustion du propergol dans un MPS. L'idée

fondatrice est la suivante : si les particules sont suffisamment petites, même si elle ne suivent pas strictement l'écoulement fluide local, leur vitesse peut être décrite en fonction de la vitesse du fluide local et de ses dérivées en temps et en espace. Si on note respectivement  $\boldsymbol{\omega}_p$  et  $\mathbf{u}_{gaz}$  les vecteurs vitesse des particules résiduelles et de la phase gazeuse, alors :

$$\boldsymbol{\omega}_p = \mathbf{u}_{gaz} - \tau_u \frac{D}{Dt} \mathbf{u}_{gaz} \quad (6. 10)$$

où  $D/Dt$  représente la dérivée totale selon l'élément fluide. Notons que cette équation peut également s'écrire sous la forme :

$$\boldsymbol{\omega}_p = \mathbf{u}_{gaz} + \frac{\tau_u}{\alpha_p \rho_p + \rho_{gaz}} \mathbf{grad}(P_{gaz}) \quad (6. 11)$$

La précision de cette méthode a été testée avec succès par Ferry & Balachandar (2001 et 2002). Elle est employée au CSAR (Najjar *et al*, 2002) pour simuler des écoulements multiphasiques dans des moteurs à propergol solide. Une méthode équivalente a été implantée dans le code SIERRA de l'ONERA (Meynet & Dupays, 2003) et donne de très bons résultats pour les vitesses<sup>12</sup>. L'intérêt de ces approches est de permettre de simuler à moindre frais des écoulements polydispersés, en intégrant une unique équation différentielle par classe de particules.

Les écoulements diphasiques régnant dans les chambres de combustion des MPS se prêtent bien à ces méthodes car le diamètre des particules peut être très faible (résidus de combustion). Nous pourrions ainsi disposer d'un modèle efficient pour les petites particules (modèle de glissement) et d'un modèle efficace pour les plus grosses qui ne peuvent être considérées en équilibre relatif avec le gaz. Les modèles à pression particulaire présentés ont pour ambition de répondre à la seconde partie de cette démarche. Nous allons à présent discuter d'un modèle algébrique pour les particules à faible diamètre.

En partant des équations des modèles à pression particulaire, il est possible, en suivant le même formalisme que Ferry & Balachandar (2001), d'obtenir une relation équivalente à (6. 11) de la forme suivante :

$$\boldsymbol{\omega}_p = \mathbf{u}_{gaz} + \frac{\tau_{gp}^F}{\alpha_p \rho_p + \rho_{gaz}} \left( \mathbf{grad}(P_{gaz}) - \frac{\rho_{gaz}}{\alpha_p \rho_p} \mathbf{grad}(P_p) \right) \quad (6. 12)$$

Si la pression particulaire tend vers 0, on retrouve l'équation "standard" du modèle de Balachandar (6. 11).

Il peut paraître contradictoire de tenir compte du terme de pression particulaire dans cette équation, car, pour les petites particules, ce terme de pression est *a priori* relativement faible. Nous serions donc plutôt tentés de le négliger. Pourtant ce terme de pression particulaire permet de considérer un champ de vitesse particulaire avec des vitesses différentes en un même point. Ce qui est impossible avec le modèle de Balachandar classique qui suppose, en plus d'une absence de collisions, que le nombre de Stokes des particules est très petit. Dans notre cas, l'écoulement est supposé dilué mais les collisions sont possibles. Cela permet de généraliser le modèle de Balachandar à des particules plus fortement inertielles. La dispersion des particules est ainsi créée d'une part par leur inertie (à travers le temps de relaxation dynamique) et d'autre part par le terme de pression particulaire<sup>13</sup>.

<sup>12</sup> Une approche équivalente peut être appliquée au champ de température des particules, cependant, les résultats obtenus par Meynet & Dupays (2003) sont décevants. Une correction a depuis été apportée par Ferry & Balachandar (2005).

<sup>13</sup> Dans le cas d'un fluide turbulent, il y aurait une dispersion supplémentaire liée à la définition de la vitesse de la phase gazeuse qui peut être différente de la valeur moyenne.

Ce modèle algébrique (6. 12) a été testé avec une définition de la pression particulaire type SPPM ( $\lambda = 10$ ) sur une simulation du TEP pour des particules de 5 microns de diamètre. Les résultats obtenus sont encourageants (les profils de vitesse et les ordres de grandeur sont bien retrouvés). Ce modèle mériterait d'être implanté dans CPS après toutefois quelques investigations supplémentaires.

## 6. Conclusion

Les modèles diphasiques à pression particulaire SPPM et CPPM ont été implantés et ont donné naissance à une nouvelle version de CPS. L'existence préalable d'un modèle diphasique eulérien dans ce code, ainsi que la similitude des équations du CPPM avec celles des modèles de turbulence monophasique à deux équations, ont facilité cette intégration. De nombreux cas tests ont permis de valider chaque étape de l'implantation mais aussi, et c'est tout aussi important, d'appréhender le rôle des différents termes des modèles.

Les calculs réalisés ont montré un bon comportement global des deux modèles. En particulier, ils donnent de bons résultats dans des cas de compression pure qui est le cas pathologique révélé lors de nos études préliminaires (cf. chapitre 2). Avec le modèle SPPM, l'hypothèse selon laquelle  $\lambda$  est constant dans tout l'écoulement est discutable au vu des résultats obtenus avec le modèle CPPM. Néanmoins ce modèle simple permet déjà d'éviter des accumulations intempestives de particules.

Le modèle complet CPPM donne des résultats satisfaisants. Néanmoins, il repose sur une hypothèse de Boussinesq qui suppose un accroissement de  $\lambda_p$  dès que des gradients de vitesse moyenne existent, ce qui semble discutable. En effet, en turbulence monophasique, la production d'énergie doit être maximale dans un cas de cisaillement, mais nulle si l'écoulement est en compression. Les conditions de réalisabilité aident à respecter ces tendances. Dans notre cas, la situation est presque opposée : l'énergie cinétique fluctuante des particules doit être forte dans le cas d'une compression. Dans le cas de cisaillement, on peut se demander si une forte augmentation de  $\lambda_p$  se trouve justifiée.

Cependant, les écoulements en propulseur présentent rarement des situations aussi tranchées. De plus, le but de nos travaux est d'étudier le couplage entre le diamètre des particules et les ODP dans des écoulements présentant des structures tourbillonnaires type VSP. Or, le calcul de la couche de mélange instationnaire a justement montré que le modèle à pression particulaire complet est efficace dans ce type d'écoulement. Dans l'ensemble, ces résultats sont donc très encourageants.

**PARTIE 3**

**RESULTATS**  
**ET**  
**INTERPRETATIONS**

---

Nous voici arrivés à la dernière partie de ce manuscrit, qui constitue le « point d'orgue » de nos travaux. En effet, nous allons tâcher de répondre aux objectifs fixés pour cette thèse en appliquant les modèles à pression particulaire à des configurations type propulseur. Rappelons que la nouvelle modélisation, dont la mise au point a fait l'objet de la partie précédente, doit permettre d'améliorer la précision des simulations diphasiques et d'aider à progresser dans la compréhension du couplage entre les oscillations de pression et la présence dans l'écoulement d'une phase dispersée de caractéristiques physiques données.

Des simulations d'écoulements diphasiques en propulseur permettront dans un premier temps d'évaluer les capacités des modèles SPPM et CPPM à représenter de façon précise et fiable la répartition des particules dans le moteur. Le chapitre 7 est dévolu à l'exploitation de ces résultats. Nous verrons que les résultats obtenus sont sans conteste meilleurs lorsque l'on tient compte d'un terme de pression particulaire. Ce qui ne nous empêchera pas de discuter des limites de ces modèles.

Ensuite, nous étudions au chapitre 8 le rôle de la phase dispersée sur les amplitudes des ODP, à travers le couplage qui existe entre les particules et les tourbillons créés par le phénomène de Vortex Shedding Pariétal (VSP). Nous nous appuyons sur des travaux récents qui montrent que la théorie classique utilisée en balistique ne peut pas être directement appliquée au cas d'un moteur comme le LP6, qui présente un VSP pur. Nous revenons notamment sur la capacité d'une phase dispersée inerte à augmenter les amplitudes des ODP et nous décrivons le scénario imaginé pour expliquer ce comportement inattendu. Ces résultats sont ensuite confirmés par une étude paramétrique réalisée avec le modèle SPPM pour différents diamètres de particules.

# Chapitre 7

## Application des modèles diphasiques à deux configurations de propulseur

Les modèles diphasiques à pression particulaire ont été testés avec succès sur des configurations de calcul intéressantes certes, mais fort éloignées des applications habituellement traitées avec CPS, à savoir les moteurs à propergol solide. Ce chapitre va nous permettre de pallier ce manque.

Nous présentons dans un premier temps les résultats obtenus avec le modèle simplifié (SPPM) sur deux configurations de propulseurs : le TEP (moteur fictif cylindrique présenté au chapitre 2) et le LP6 (maquette à l'échelle 1/15<sup>ème</sup> du P230). Une étude paramétrique est menée sur le TEP afin de déterminer l'ordre de grandeur de la quantité  $\lambda$ , considérée constante dans ce modèle. Les simulations du LP6 permettent d'appréhender le comportement du SPPM dans une configuration réaliste de propulseur, présentant un phénomène de détachement tourbillonnaire pariétal (VSP, cf. chapitre 1). Nous discutons ensuite des limites de ce modèle, à l'éclairage de ces nouveaux résultats.

Des simulations équivalentes ont ensuite été effectuées avec le modèle complet. Néanmoins, ce modèle ayant été implanté ultérieurement au SPPM, seul un nombre limité de simulations a pu être réalisé. Ces résultats, associés à notre connaissance du CPPM, ainsi qu'à l'expérience acquise au cours des simulations réalisées auparavant, nous autorisent à émettre quelques critiques ou propositions d'amélioration de ce modèle. Nous discutons aussi d'une éventuelle validation de la modélisation diphasique avec pression particulaire.

### 1. Résultats de simulations SPPM

#### 1.1 Simulation du TEP : estimation de la constante du modèle

##### 1.1.1 Principe

Comme nous l'avons écrit au chapitre 2, le TEP est un moteur fictif imaginé par l'ONERA (Dupays *et al.*, 2001 ; Meynet & Dupays, 2003) pour valider les modèles physiques et numériques de différents codes (Dupays & Fabignon, 2000). Il est donc tout à fait indiqué pour une étude préliminaire de la validité du SPPM sur des applications type propulseur. En fait, l'objectif de ces travaux est double : nous voulons vérifier le comportement du modèle à pression particulaire simplifié mais également estimer la valeur de la constante  $\lambda$ . Un ordre de grandeur de ce paramètre a pu être déterminé lors de la phase de validation des hypothèses inhérentes au modèle simplifié (entre 1 et 100, cf. chapitre 4), mais cela ne nous semble pas suffisant et nous cherchons une valeur plus précise, basée sur des considérations physiques, qui servira ensuite aux simulations du LP6.

Pour cela, nous comparons les résultats de simulations de l'écoulement diphasique du TEP obtenus par une approche lagrangienne d'une part, et par une approche eulérienne d'autre part. Les simulations lagrangiennes<sup>1</sup> sont réalisées à l'aide du module de calcul de trajectoires présenté au chapitre 2, à partir du champ aérodynamique obtenu par le calcul eulérien. Cette comparaison est effectuée

---

<sup>1</sup> Il ne s'agit pas d'un calcul lagrangien à proprement parler, puisque les trajectoires des particules sont calculées en fonction d'un champ aérodynamique fixé : la phase dispersée n'influence pas le gaz.

pour différents diamètres de particules ( $d_p = 5\mu\text{m}$ ,  $30\mu\text{m}$  et  $100\mu\text{m}$ ) et différentes valeurs de  $\lambda$  ( $\lambda = 1, 10$  et  $100$ ).

Une fois le régime stationnaire établi, nous comparons les iso-concentrations de particules obtenues avec le module lagrangien<sup>2</sup>, le modèle eulérien de base (code CPS) et le modèle à pression particulaire simplifié, pour chaque valeur de  $\lambda$ . Pour ne pas alourdir inutilement la lecture, nous ne présentons ici qu'une partie des résultats, le lecteur intéressé pourra trouver le complément en annexe D.

### 1.1.2 Résultats

Les simulations réalisées pour des particules de diamètre élevé montrent que la répartition des particules est fortement modifiée par la présence d'un terme de pression particulaire dans les équations de la phase dispersée. Nous présentons ici les résultats obtenus pour des particules de  $100\mu\text{m}$  de diamètre, sur une simulation du TEP version maillage SME. Les six figures présentées ci-après représentent le taux de particules dans le moteur, pour une échelle commune.

Le résultat du calcul eulérien sans terme de pression particulaire est présenté Figure 7- 2 et le calcul lagrangien associé est donné Figure 7- 1. L'accumulation excessive de particules près de l'axe de symétrie (cf. Figure 7- 2) disparaît lorsque l'on tient compte de la pression particulaire (cf. Figure 7- 4 et Figure 7- 6) et les solutions eulériennes obtenues sont alors plus proches des solutions lagrangiennes associées<sup>3</sup> (cf. Figure 7- 3 et Figure 7- 5).

Le terme de pression particulaire (dont la cartographie est représentée Figure 7- 7 et Figure 7- 8) permet bien d'éliminer le défaut du modèle eulérien actuel de CPS : la prise en compte du tenseur des contraintes cinétiques évite une accumulation excessive de particules près de l'axe de symétrie. Les résultats sont donc très satisfaisants dans le cas des grosses particules. Ils sont à nuancer pour les plus petites : si le paramètre  $\lambda$  choisi est trop grand, on risque d'éliminer des surconcentrations réelles (cf. annexe D, particules de  $30\mu\text{m}$ ) ou bien d'obtenir une concentration excessive de particules par endroit (cf. annexe D, particules de  $5\mu\text{m}$ ). Les effets de cette surconcentration restent cependant minimes car les taux de particules atteints sont faibles (de l'ordre de  $10^{-4}$  pour les particules de  $5\mu\text{m}$ ).

En conclusion, les résultats sont jugés bons pour les grosses particules avec une valeur du paramètre  $\lambda$  fixée à 10. Bien que cette valeur puisse dépendre de la configuration du calcul, nous conservons cette valeur pour les simulations du LP6, présentées ensuite.

---

<sup>2</sup> Après avoir effectué une opération de moyenne, comme expliqué au chapitre 2 lors de l'analyse de la validité du modèle eulérien de CPS.

<sup>3</sup> Avec le modèle à pression particulaire, les particules ne sont pas injectées à une vitesse constante connue (nouveau traitement de la condition limite débitante) et le champ aérodynamique s'en trouve donc modifié, pour les grosses particules particulièrement. C'est pourquoi nous avons effectué, pour chaque calcul eulérien, un nouveau calcul lagrangien à partir du nouveau champ gazeux.



Champs de fraction volumique solide, iso-échelles

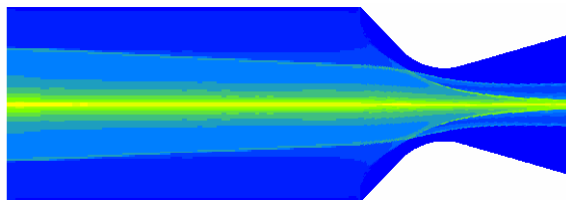


Figure 7- 1 : Calcul lagrangien à partir du champ aérodynamique obtenu par un calcul Euler sans pression particulaire ;  
taux max= $1,897 \cdot 10^{-2}$ .

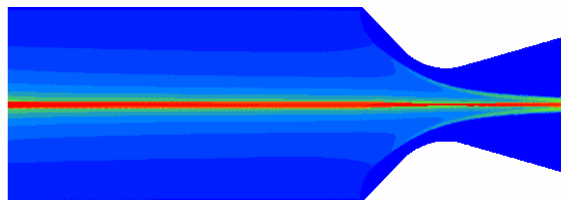


Figure 7- 2 : Calcul eulérien de base sans pression particulaire ; taux max= $2,413$ .

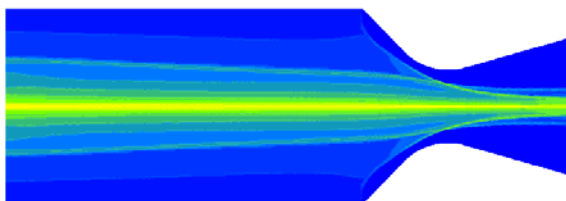


Figure 7- 3 : Calcul lagrangien à partir du champ aérodynamique obtenu par un calcul SPPM ( $\lambda=1$ ) ;  
taux max= $1.854 \cdot 10^{-2}$ .

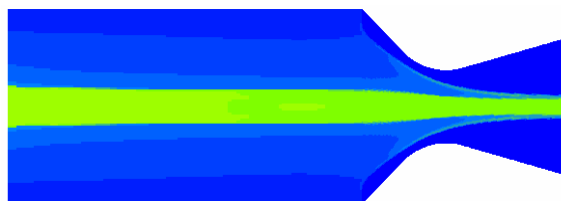


Figure 7- 4 : Calcul eulérien avec pression particulaire, SPPM,  $\lambda=1$  ; taux max= $1,886 \cdot 10^{-3}$ .

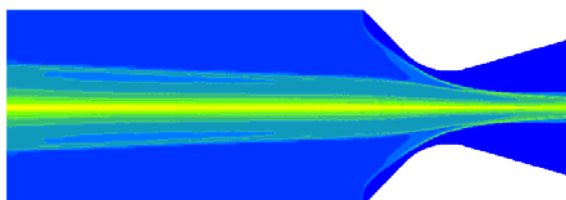


Figure 7- 5 : Calcul lagrangien à partir du champ aérodynamique obtenu par un calcul SPPM ( $\lambda=10$ ) ;  
taux max= $1.863 \cdot 10^{-2}$ .

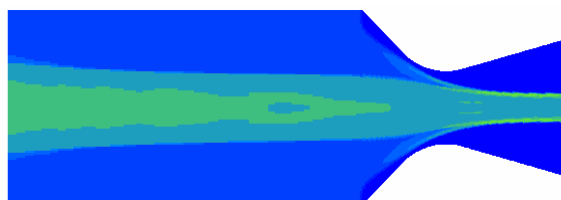


Figure 7- 6 : Calcul eulérien avec pression particulaire, SPPM,  $\lambda=10$  ; taux max= $4,645 \cdot 10^{-3}$ .

Champs de pression particulaire (en Pa), iso-échelles

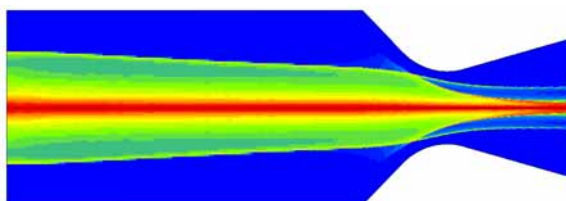


Figure 7- 7 : Calcul lagrangien à partir du champ aérodynamique obtenu par un calcul SPPM ( $\lambda=1$ ),  
pression maximale : 1169Pa.

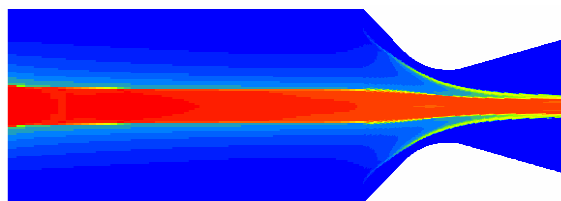


Figure 7- 8 : Calcul SPPM ( $\lambda=1$ ),  
pression maximale : 70,1Pa.

## 1.2 Simulations du LP6

Les résultats obtenus dans le cas d'une géométrie simple et d'un écoulement stationnaire régulier étant satisfaisants, nous passons à un niveau de difficulté supérieur. Le modèle à pression particulière simplifié est appliqué au LP6 tir N°7 pour des particules inertes.

### 1.2.1 Description du cas de calcul, le LP6

Ce moteur est une maquette à l'échelle 1/15<sup>ème</sup> du MPS P230. Il s'agit d'un moteur segmenté, avec tuyère intégrée. L'instant considéré pour les calculs correspond à l'instant de tir 6,4 secondes. Le bloc avant (S1) a complètement brûlé et la géométrie interne du chargement est représentée Figure 7- 9. Une description partielle de cette maquette peut être trouvée dans Traineau *et al* (1997), et dans Ballereau *et al* (2003) pour ce qui concerne les aspects diphasiques.



Figure 7- 9 : Géométrie du LP6 tir N°7.

Le propulseur LP6 dans la configuration du tir N°7 a été choisi pour différentes raisons. D'abord il s'agit d'un cas bien connu qui a suscité de nombreux calculs (Dupays & Fabignon, 2002 ; Meynet & Dupays, 2003 ; Lupoglazoff *et al*, 2002 ; Gallier & Godfroy, 2001). Il a également l'avantage d'être représentatif des écoulements qui se développent dans le MPS P230, avec un maillage relativement petit (moins de 20000 mailles). Enfin, cette configuration présente essentiellement un détachement tourbillonnaire pariétal<sup>4</sup> au niveau du segment S3 (Lupoglazoff & Vuillot, 1996-b). Or, les particules peuvent s'agglutiner en périphérie de ces tourbillons, modifiant ainsi l'écoulement gazeux (Godfroy & Guéry, 1997-b ; Guéry *et al*, 2001).

Ces zones de concentration élevée de particules doivent être correctement modélisées pour espérer prédire avec exactitude les oscillations de poussée rencontrées dans ce type de moteur (Ballereau *et al*, 2003 ; Briand, 2003 ; Godfroy *et al*, 2004). Un autre phénomène important mis en évidence par le LP6 est l'accumulation dans les fonds arrière de particules piégées dans des zones de recirculation du gaz. Actuellement, ces zones sont mal traitées et les accumulations sont exagérées : dans certains cas de calcul, la fraction volumique solide peut devenir supérieure à 1. Le LP6 calculé avec le modèle eulérien de CPS (sans terme de pression particulière) présente également, pour certains diamètres, des accumulations non physiques de particules près de l'axe de symétrie.

En utilisant le modèle à pression particulière simplifié sur le LP6, nous voulons observer :

- la répartition des particules près de l'axe de symétrie : y a-t-il élimination des accumulations fictives ?
- les niveaux maximum de concentration de particules : a-t-on une meilleure recirculation des particules dans les fonds arrière ?
- la structure générale de l'écoulement (tourbillons).

### 1.2.2 Interprétation des résultats

Une série de calculs a été effectuée avec  $\lambda = 10$ . Nous présentons les résultats des calculs effectués pour des particules de 60 $\mu$ m de diamètre, sans terme de pression particulière (cas A, calcul CPS, cf. Figure 7- 10) et avec terme de pression particulière (cas B, SPPM, cf. Figure 7- 11). Les résultats obtenus pour des particules de 5, 20 et 100 $\mu$ m de diamètre sont donnés en annexe (D).

En ce qui concerne l'accumulation des particules près de l'axe de symétrie, la prise en compte du terme de pression particulière améliore fortement la situation : les particules se répartissent de façon

<sup>4</sup> La source d'excitation de ce VSP est l'inter-segment situé entre S2 et S3.

plus homogène autour de l'axe de symétrie et le niveau maximum du taux de concentration est plus faible. Les profils de fraction volumique solide dans le LP6, selon l'axe y, à la moitié du segment S2, sont donnés Figure 7- 12. Ils illustrent parfaitement l'amélioration des résultats de la simulation numérique lorsque la pression particulaire est introduite dans le modèle eulérien de base.

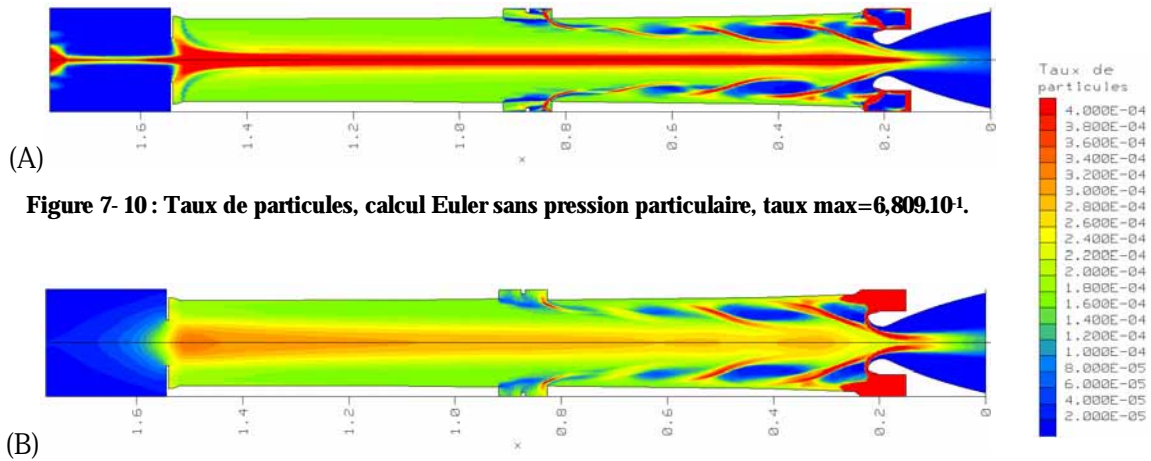


Figure 7- 10 : Taux de particules, calcul Euler sans pression particulaire, taux max=6,809.10<sup>-1</sup>.

Figure 7- 11 : Taux de particules, calcul SPPM, lambda=10, taux max=6,353.10<sup>-3</sup>.

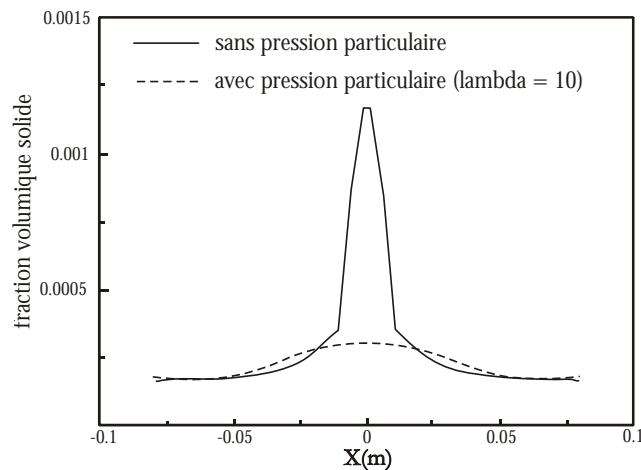


Figure 7- 12 : Profil de concentration des particules dans le LP6 pour des particules de 60µm de diamètre.

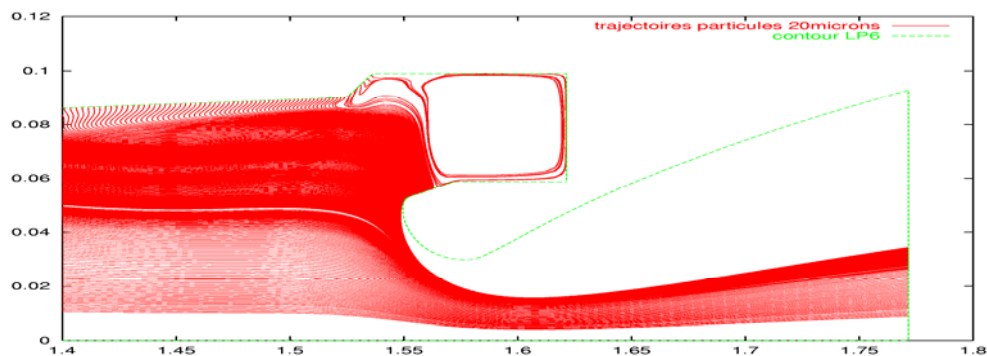
Si on s'intéresse maintenant à la répartition des particules au niveau des fonds arrière, on peut constater deux choses.

Sur la répartition spatiale, le fond arrière est entièrement rempli de particules dans le cas (B), alors que les particules s'accumulent près des parois dans le cas (A) : c'est la conséquence d'une meilleure recirculation des particules dans ces zones où l'écoulement est très particulier (cf. Figure 7- 13).

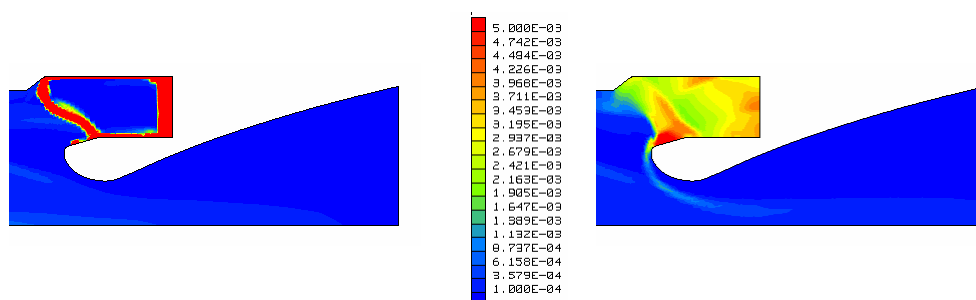
Ensuite, le taux de concentration maximal dans le cas (B) est très nettement inférieur à celui obtenu dans le cas (A) : environ 100 fois inférieur (cf. Figure 7- 14). Cela traduit également une meilleure recirculation des particules dans cette zone. Les taux de concentration atteints restent dans les limites de validité de la modélisation eulérienne du diphasique dilué. En effet, sans pression particulaire, les particules piégées par la recirculation du gaz ne peuvent que s'entasser. Ce phénomène est dorénavant limité par le terme de pression particulaire qui a tendance à les "décoller" de la paroi pour les remettre dans l'écoulement. Une représentation plus physique des particules dans la zone de recirculation est donc obtenue.

Précisons que si nous voulions estimer le taux de dépôt des particules d'alumine au fond arrière, il serait nécessaire d'ajouter au SPPM une modélisation physique du phénomène de captation des particules par la flaque d'alumine.

Le dernier point étudié concerne l'aspect général de l'écoulement. En plus de ce que nous venons d'évoquer, nous pouvons remarquer une structure tourbillonnaire similaire dans les deux cas. En effet, on retrouve le même nombre de tourbillons et ces tourbillons sont de formes identiques. Par contre le terme de pression particulaire a tendance à diminuer les niveaux de concentration de particules entre les tourbillons du VSP. Ceci s'explique par le fait que la pression particulaire lisse les discontinuités de concentration des particules. On note également que le "dard" de particules, peu réaliste, que l'on observe au niveau du fond avant dans le cas (A) a complètement disparu dans le cas (B).



**Figure 7-13 : Mise en évidence d'une zone de recirculation dans le fond arrière du LP6, trajectoires calculées avec le module lagrangien pour des particules de 20 $\mu$ m de diamètre.**



**Figure 7-14 : Zoom sur le fond arrière du LP6, taux de particules, à gauche : calcul Euler sans pression particulaire (taux max=0,681) à droite : calcul SPPM, lambda=10 (taux max=0,006).**

La solution du calcul avec terme de pression particulaire (cas B) semble donc bien meilleure que celle obtenue avec CPS : élimination des accumulations non physiques sur l'axe de symétrie et meilleure répartition des particules dans les fonds avant et arrière du moteur, tout en conservant la structure générale de l'écoulement.

En ce qui concerne les autres diamètres de particules étudiés, les résultats obtenus pour des particules de 100 $\mu$ m sont encore plus marqués que pour les particules de 60 $\mu$ m. Les calculs sur des particules de diamètre moyen (20 $\mu$ m) montrent également une amélioration de la description de l'écoulement près de l'axe de symétrie. En revanche, pour les petites particules (5 $\mu$ m), nous avons observé des concentrations de particules plus importantes entre les tourbillons.

La Figure 7-15 représente les valeurs de la pression particulaire dans le moteur, pour des particules de 20 $\mu$ m de diamètre et  $\lambda = 10$ .

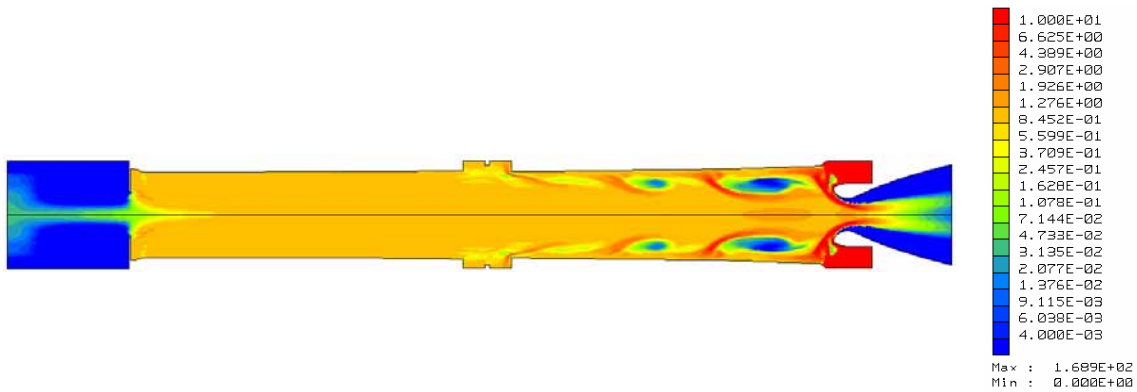


Figure 7- 15 : Pression particulaire (en Pa), calcul LP6, particules de 20 $\mu$ m de diamètre, SPPM ( $\lambda=10$ ).

Toutes ces observations confirment l'intérêt d'une modélisation plus précise de la phase dispersée, réalisée ici par la prise en compte d'un terme de pression particulaire. Néanmoins, même si les résultats obtenus avec ce modèle à pression particulaire simplifié sont tout à fait satisfaisants, ce modèle n'est pas une panacée, loin s'en faut. Ses limites sont discutées au paragraphe suivant.

### 1.3 Limites du SPPM

La principale lacune du SPPM réside évidemment dans l'hypothèse de constance de la variable  $\lambda$ . De cette supposition découle -au moins- trois défauts, que nous allons détailler aux paragraphes suivants. Il s'agit de l'indépendance de  $\lambda$  vis-à-vis de l'évolution de l'écoulement et vis-à-vis de la configuration de calcul étudiée, et de la difficulté à estimer sa valeur.

#### 1.3.1 Indépendance de $\lambda$ par rapport à l'écoulement

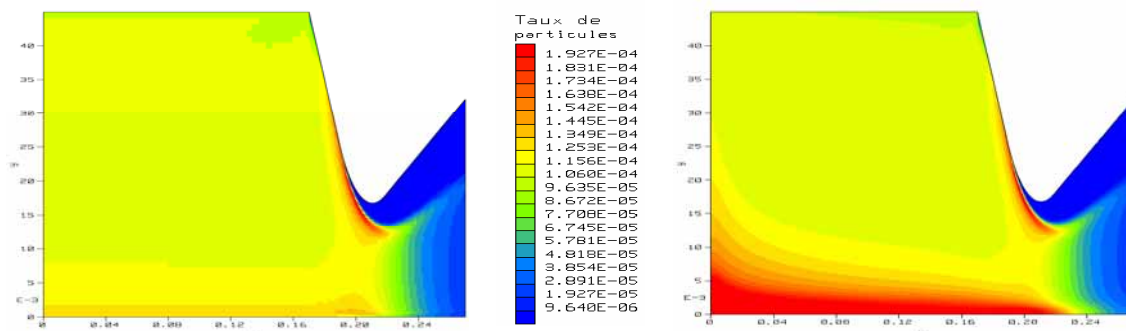
Dans le cas du SPPM,  $\lambda$  est un paramètre constant en temps et en espace, quelle que soit l'évolution du champ aérodynamique. Or, nous avons vu au chapitre 6, grâce aux simulations réalisées avec le modèle complet, que cette hypothèse n'était pas vérifiée. En effet, si l'écoulement présente des gradients de vitesse particulaire non nuls (cisaillement, compression, rotationnel, etc.) alors la quantité  $\lambda$  est fortement modifiée.

En considérant ce terme constant, nous risquons donc de surestimer la valeur de la pression particulaire dans certaines zones de l'écoulement et/ou de la sous-estimer dans d'autres régions, les deux cas étant néfastes puisque la physique de l'écoulement n'est pas correctement représentée. En particulier, une pression excessive aura tendance à trop étaler les particules (cf. résultats de simulations du TEP, annexe D) alors qu'un niveau trop faible n'empêchera pas une éventuelle accumulation non réaliste de particules.

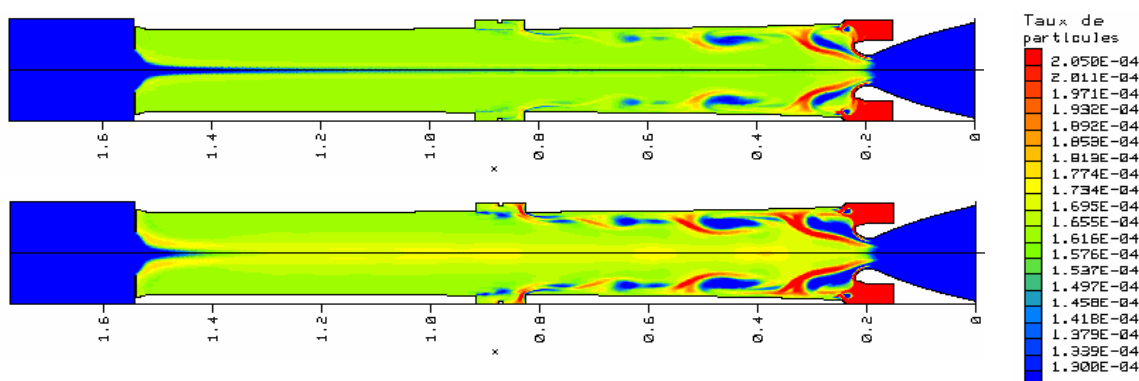
#### 1.3.2 Indépendance de $\lambda$ par rapport au cas de calcul

Non seulement  $\lambda$  est considérée constante au cours du calcul, mais en plus cette variable n'est pas évaluée en fonction de paramètres représentatifs de l'écoulement simulé. Ainsi, la géométrie globale du problème n'est pas prise en compte, pas plus que la taille des particules injectées, ce qui semble pourtant être une donnée fondamentale pour estimer  $\lambda$ .

Il s'avère en effet que, pour des petites particules de 5 $\mu$ m de diamètre, les simulations du TEP (cf. Figure 7- 16) et du LP6 (cf. Figure 7- 17), réalisées avec une valeur de  $\lambda$  fixée à 10, montrent une légère surconcentration de particules, dans certaines zones de l'écoulement.



**Figure 7-16 : Cas TEP, maillage SME, particules de 5 $\mu$ m de diamètre, fraction volumique solide à gauche : calcul Euler sans pression particulaire ; à droite : calcul SPPM, lambda=10.**

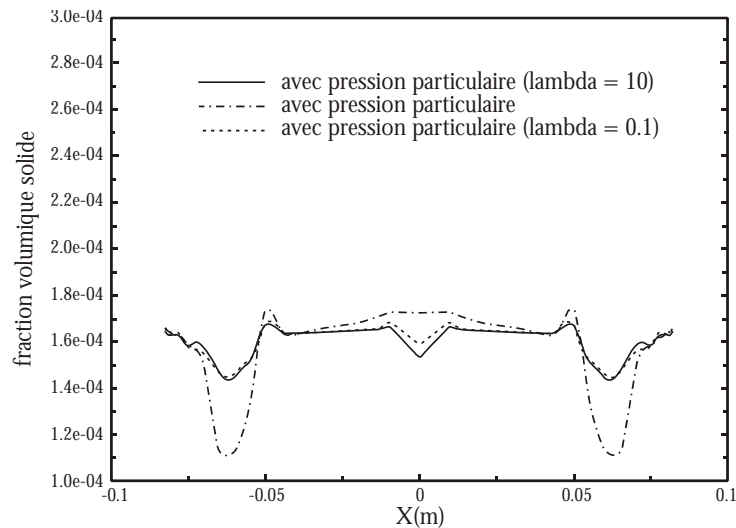


**Figure 7-17 : Simulation numérique du LP6, particules de 5 $\mu$ m de diamètre, en haut : calcul sans pression particulaire ; en bas : calcul SPPM, lambda=10.**

Ces résultats montrent clairement que le SPPM a tendance à augmenter les niveaux de concentration des petites particules. Il n'existe aucune ambiguïté pour le TEP, pour  $\lambda = 1$  (cf. annexe D) comme  $\lambda = 10$ . Un calcul avec  $\lambda = 0,1$  a donné des résultats similaires : la surconcentration est toujours présente au niveau de l'axe de symétrie, même si elle est atténuée. Notons que cette surconcentration de particules reste très relative : les taux atteints sont de l'ordre de  $10^{-4}$ . Cela reste négligeable par rapport aux problèmes d'accumulation des grosses particules que l'on rencontre si l'on ne considère pas de pression particulaire : le taux de particules peut alors atteindre des valeurs proches de 1.

Cette surconcentration de particules peut s'expliquer : dans le modèle SPPM, le terme de pression particulaire varie uniquement en fonction de la fraction volumique solide. Ce terme, qui permet d'éviter des accumulations dans certains cas, peut aussi remplir les zones de vide dans d'autres. Pour le TEP, les simulations lagrangiennes (cf. annexe D) montrent qu'il se forme une zone de vide au fond avant au niveau de l'axe de symétrie car les particules sont entraînées par le gaz. En conséquence, le modèle avec pression particulaire a tendance à remplir cette zone de vide. Le processus d'accumulation ou d'évacuation est une question d'équilibre entre ce terme de pression particulaire en  $\lambda \rho^2$  et le terme de quantité de mouvement en  $\rho u^2$  : si la vitesse est faible, c'est la pression qui aura un rôle prépondérant. Il est donc normal d'avoir un maximum de pression là où la vitesse est quasi nulle.

Dans le cas du LP6, la situation est différente : la surconcentration de particules a lieu en périphérie des tourbillons. Pour être plus précis, les zones de vide sont creusées et les accumulations sur le pourtour des tourbillons sont amplifiées. Cette situation est très nettement illustrée par la Figure 7-18 qui représente un profil de fraction volumique solide, pour différents calculs, selon une coupe transversale de la chambre, à l'abscisse  $X=0,6$ .



**Figure 7- 18 : Profil transversal de la fraction volumique, calcul LP6, particules de 5 $\mu$ m de diamètre**

Ce comportement différent pour les petites particules autour des tourbillons du VSP n'est pas assurément compris. L'étude du rotationnel de vitesse du gaz montre que celui-ci n'est pas modifié par la prise en compte du terme de pression particulaire, ce n'est donc pas l'explication cherchée. Par contre, le nombre de Reynolds particulaire est défini dans SPPM par :

$$\text{Re}_p = \frac{1}{\mu_{\text{gaz}}} \rho_{\text{gaz}} d_p \sqrt{V_{r,i} V_{r,i} + 2\lambda \alpha_p \rho_p}$$

avec  $\mathbf{V}_r = \tilde{\mathbf{u}}_p - \mathbf{u}_{\text{gaz}}$ . Pour les petites particules, on peut penser que  $V_{r,i} V_{r,i}$  va être faible, mais le terme en  $\lambda \alpha_p \rho_p$  peut être non négligeable. En effet, ce terme dépend fortement du paramètre  $\lambda$  qui est imposé constant dans tout le domaine de calcul. Le nombre de Reynolds particulaire peut donc se trouver augmenté par rapport à sa valeur dans le cas du modèle sans pression particulaire. Les particules adoptent alors un comportement qui se rapproche de celui de particules plus grosses. Cela peut expliquer les surconcentrations des petites particules dans le cas du LP6. Pour nous en assurer, nous avons effectué une simulation du LP6, pour une valeur plus faible de  $\lambda$  ( $\lambda = 0,1$ ). Les résultats sont présentés Figure 7- 18 en ce qui concerne le profil de la fraction volumique. Ils montrent clairement que la surconcentration de particules, que l'on observe lorsque  $\lambda = 10$ , n'est pas retrouvée par ce calcul. Intuitivement, on pressent que  $\lambda$  doit être adapté en fonction du diamètre des particules.

Finalement, étant donné le peu d'informations disponibles sur le sujet, nous ne pouvons conclure quant à une meilleure description physique ou non. En revanche, ces surconcentrations restent très faibles (de l'ordre de  $10^{-5}$  dans le cas présenté Figure 7- 16) et ne remettent pas en cause les résultats cohérents obtenus par ailleurs.

### 1.3.3 Estimation de la valeur de $\lambda$

Malgré les bons résultats obtenus avec le modèle simplifié, il est à présent évident que le paramètre constant du SPPM a une forte influence sur les résultats des simulations et qu'il n'est pas correct de le définir indépendamment du cas de calcul considéré. Nous avons donc cherché à définir  $\lambda$  en fonction des caractéristiques de l'écoulement.

Attention, il ne s'agit pas de faire varier  $\lambda$  au cours du calcul en fonction de l'évolution du champ aérodynamique. Nous ne ferions que créer un ersatz du modèle CPPM de précision moindre mais de mise en œuvre aussi complexe... Le but recherché est de relier  $\lambda$  à des données physiques du



calcul, comme le diamètre des particules par exemple. Précisons également que le fait de considérer  $\lambda$  variable nous obligerait à écrire de nouveaux solveurs pour le système d'équations convectifs.

Dans un premier temps, nous avons pensé intuitivement que  $\lambda$  doit dépendre du temps de relaxation dynamique des particules : les particules faiblement inertielles ont en effet peu tendance à s'accumuler, contrairement aux particules plus inertielles. On peut également penser que  $\lambda$  doit dépendre du cisaillement de l'écoulement via le terme  $S^2 = S_{ij}S_{ij}/2$  par exemple. Malheureusement, ces pistes se sont révélées infructueuses.

Nous nous sommes ensuite intéressés aux conditions d'injection des particules, l'idée étant d'exprimer le paramètre  $\lambda$  comme le produit d'une constante sans dimension  $\xi$  et des caractéristiques de l'injection (qui sont des paramètres « maîtrisés » en propulsion solide), soit par exemple :

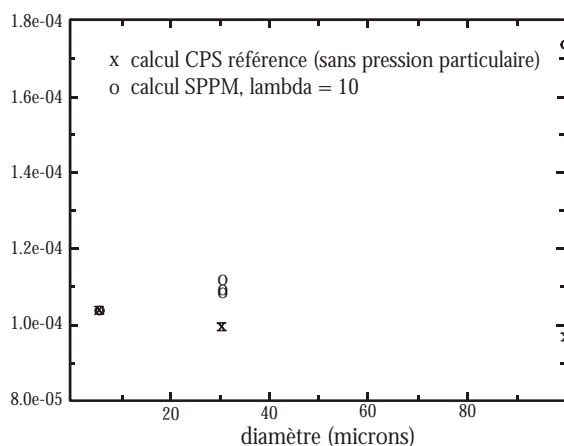
$$\lambda = \xi \frac{\|\mathbf{V}_{pinj}\|^2}{\alpha_{pinj} \rho_p}$$

où  $\mathbf{V}_{pinj}$  correspond à la vitesse des particules à l'injection. Or, cette vitesse n'est pas connue puisqu'elle est déterminée en résolvant un problème de Riemann partiel à la paroi débitante (cf. chapitre 5). Nous pouvons cependant la définir en fonction de la vitesse d'injection du gaz, qui est une donnée d'entrée du problème, selon la dimension des particules. La pression particulaire est alors définie par :

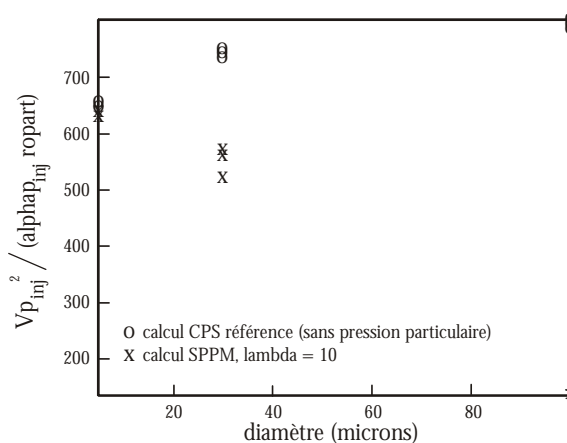
$$P_p = \xi \left( \frac{\alpha_p}{\alpha_{pinj}} \right)^2 \|\mathbf{V}_{pinj}\|^2 \alpha_{pinj} \rho_p$$

Précisons que la quantité  $\alpha_{pinj}$  est alors telle que le débit massique à l'injection est respecté :

$\alpha_{pinj} = \dot{m}_p / \|\mathbf{V}_{pinj}\|$ . Différents calculs sur le TEP ont été dépouillés, pour trois diamètres de particules (5, 30 et 100 $\mu\text{m}$ ). Pour un calcul avec le modèle de base, la fraction volumique solide calculée à la paroi débitante diminue lorsque le diamètre des particules injectées augmente. Pour un calcul SPPM, c'est l'inverse (cf. Figure 7- 19).



**Figure 7- 19 : Fraction volumique solide à l'injection en fonction du diamètre des particules, calcul TEP.**



**Figure 7- 20 : Variation du rapport  $V_{pinj}^2 / (\alpha_{pinj} \rho_p)$  selon le diamètre.**

Le rapport  $V_{pinj}^2 / (\alpha_{pinj} \rho_p)$  calculé pour différentes cellules de la paroi d'injection augmente avec le diamètre des particules pour un calcul avec le modèle de base, mais diminue pour un calcul SPPM



(cf. Figure 7- 20). De plus, ce rapport n'est pas constant le long de la paroi d'injection. Il semble donc difficile de déterminer un paramètre dépendant des conditions d'injection et qui soit constant.

En conclusion, le SPPM présente un intérêt indéniable dans la modélisation diphasique eulérienne des propulseurs. Néanmoins, le choix de la constante  $\lambda$  reste délicat, notamment à cause du fait qu'il n'existe aucune expérience permettant de la calibrer. De plus, la validité de cette hypothèse n'est pas rigoureuse. L'implantation du modèle CPPM, avec une équation supplémentaire sur l'énergie cinétique fluctuante des particules, permet de contourner cette difficulté.

## 2. Résultats CPPM

### 2.1 Simulations du TEP

Il ne s'agit pas bien sûr de recommencer l'étude paramétrique menée pour le SPPM : celle-ci n'a aucun intérêt dans le cas du CPPM puisqu'il n'y a pas de constante à déterminer dans ce modèle.

Nous avons cependant estimé utile de tester le CPPM sur cette configuration simple qui ne présente *a priori* pas de difficulté particulière. Le diamètre de particules choisi est le plus pénalisant, *ie* 100 $\mu$ m. La variable  $\lambda_p$  est initialisée à 1 dans le domaine et nous imposons une valeur identique à l'injection.

La répartition de particules obtenue est présentée Figure 7-21. Ces résultats, à comparer aux figures 7-1 et 7-2, sont très satisfaisants : l'accumulation fictive de particules obtenue par une simulation avec le modèle de base de CPS est supprimée. La Figure 7-22 montre que la pression particulaire est majoritairement créée au niveau de l'axe de symétrie, dans une région présentant un écoulement fortement cisailé.

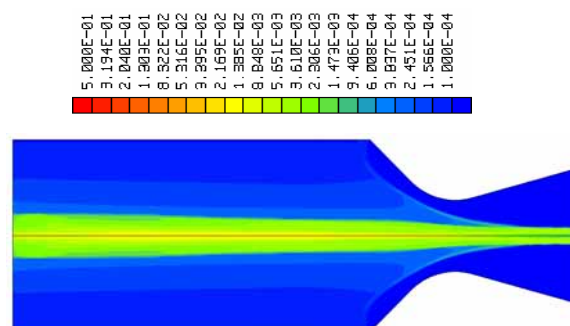


Figure 7- 21 : Calcul CPPM,  
champ de fraction volumique solide, taux max= $2,478.10^{-2}$ .

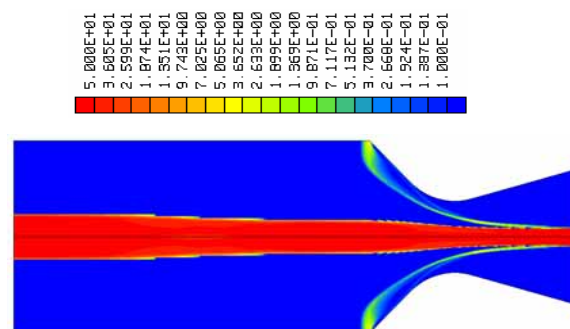


Figure 7- 22 : Calcul CPPM,  
Champ de pression particulaire (en Pa), pression maximale : 550,5Pa.

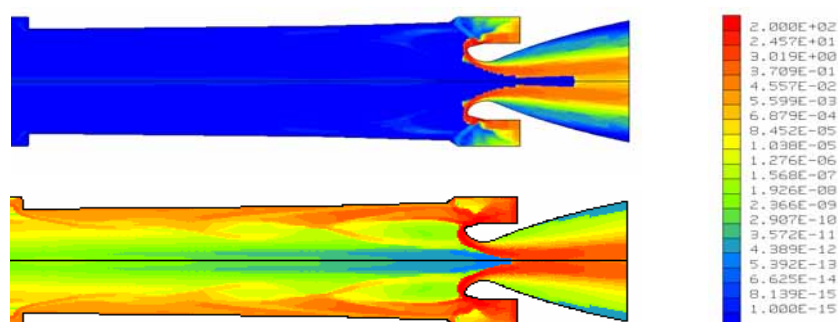
## 2.2 Simulations du LP6

Les objectifs poursuivis sont identiques à ceux des calculs SPPM : observer la répartition des particules dans l'écoulement et plus particulièrement près de l'axe de symétrie et au niveau des fonds arrière, et étudier la structure générale de l'écoulement. Nous nous intéresserons également aux valeurs de la pression particulaire dans le propulseur.

Quatre simulations ont été réalisées, pour des diamètres de particules de 5, 20, 60 et 100 $\mu\text{m}$ .

Dans le cas des petites particules (5 et 20 $\mu\text{m}$ ), les résultats obtenus sont similaires à ceux donnés par une simulation eulérienne de base, *ie* sans pression particulaire. Cette constatation, qui peut paraître surprenante, s'explique en fait très logiquement. Nous avons vu aux chapitres précédents, notamment lors du calcul de la couche de mélange diphasique instationnaire, que la production de la variable  $\lambda_p$  était fortement liée aux caractéristiques dynamiques de la phase dispersée. Ainsi, pour des particules faiblement inertielles qui suivent quasi-instantanément la phase gazeuse, les gradients de vitesse particulaire sont très faibles. Cela entraîne donc une destruction de  $\lambda_p$ , d'où une pression particulaire quasi-nulle lorsque l'état stationnaire établi est atteint. Or, sans pression particulaire, le modèle complet est exactement<sup>5</sup> équivalent au modèle de base de CPS...

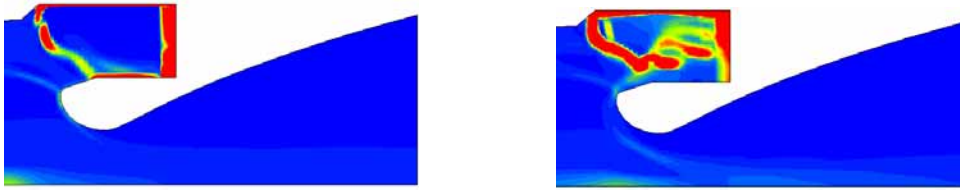
En revanche, les simulations réalisées avec des particules de diamètre suffisant pour créer de la variance de vitesse particulaire, et donc pour engendrer une production de  $\lambda_p$ , donnent des résultats différents de ceux obtenus avec le modèle de base. Les champs de pression particulaire, tracés Figure 7-23, montrent que ce terme est non négligeable dans les zones de cisaillement, en particulier au niveau de la tuyère et du fond arrière. Dans le cas des particules de 100 $\mu\text{m}$  de diamètre, les structures tourbillonnaires sont également le siège d'une production de pression.



**Figure 7- 23 : Champs de pression particulaire (Pa), résultats CPPM particules de 60 $\mu\text{m}$  (en haut) et 100 $\mu\text{m}$  (en bas).**

Cette pression particulaire modifie évidemment la répartition des particules dans l'écoulement. Si l'on s'intéresse au taux de particules présent dans le fond arrière du moteur, on constate que celui-ci est nettement plus faible dans le cas de la simulation avec CPPM (cf. Figure 7-24). De plus, la prise en compte du terme de pression particulaire pour ces particules fortement inertielles a permis de rester dans le domaine de validité de la modélisation diphasique diluée.

<sup>5</sup> Les différences liées aux solveurs numériques employées restent limitées.



**Figure 7- 24 : Zoom sur le fond arrière du LP6, taux de particules de 100µm de diamètre, à gauche : calcul Euler sans pression particulaire (taux max=1,477), à droite : calcul CPPM (taux max=0,352).**

L'utilisation du modèle complet pour des simulations de propulseurs type TEP ou LP6 donne donc de très bons résultats. L'accumulation fictive de particules au niveau de l'axe de symétrie, dans le cas du TEP, disparaît grâce à la prise en compte du terme de pression particulaire. La recirculation des particules au fond arrière du LP6 est nettement améliorée et permet ainsi de respecter l'hypothèse de base d'écoulement dilué. Les défauts relevés sur les résultats des simulations LP6 avec le SPPM sont également corrigés. Ainsi, les problèmes de surconcentration des petites particules n'existent pas avec le modèle complet car il adapte la pression particulaire en fonction du temps de relaxation dynamique des particules (et donc indirectement en fonction de leur diamètre). Il reste cependant des pistes d'amélioration de ce modèle.

## 2.3 Limites du CPPM

L'atout du modèle à pression particulaire complet est de s'affranchir du choix de la valeur de  $\lambda_p$  (sauf pour les conditions limites). Néanmoins, ce modèle n'est pas parfait pour autant et nous pouvons d'ores et déjà discuter de plusieurs points critiques.

D'abord, évoquons la valeur de  $\lambda_p$  à l'injection. Nous avons vu que la méthode retenue lors de l'implantation du modèle dans CPS permet à l'utilisateur de choisir une valeur à l'injection. Certains pourraient alors souligner qu'il s'agit toujours d'une constante. Certes, mais une constante qui va évoluer et qui n'a qu'une influence restreinte sur le résultat des simulations. En effet, les valeurs à l'injection, comme les valeurs initiales dans le champ, sont *a priori* rapidement oubliées : les caractéristiques de l'écoulement les font très rapidement varier. Il serait toutefois utile de vérifier ces propos par diverses simulations.

En revanche, il reste à décider de la valeur de  $\lambda_p$  à l'injection. Le problème est très proche de celui rencontré lors de l'initialisation de simulations monophasiques turbulentes, mais nous souffrons d'un net manque de recul et d'expérience. Nous avons proposé de déterminer la valeur de  $\lambda_p$  en fonction des conditions d'injection des particules et du gaz, il faudrait poursuivre les investigations.

Le second point qui mérite d'être abordé concerne l'hypothèse de Boussinesq. Nous avons vu au cours de ce document que cette approche, discutable pour le gaz, l'était encore plus dans le cas des écoulements diphasiques (cf. chapitre 1) et qu'elle ne permettait pas d'assurer à la fois la positivité du tenseur des contraintes cinétiques particulières (cf. chapitre 4) et la production de  $\lambda_p$  dans l'écoulement. Par rapport à la modélisation retenue en monophasique, notre approche n'exhibe pas de constante  $C_\mu$ . C'est pourquoi nous ne pouvons pas appliquer les conditions de réalisabilité au CPPM. Nous pouvons donc envisager d'introduire une constante  $C_{\mu p}$ , différente de 1, de sorte que le tenseur des contraintes s'écrive :

$$\alpha_p \rho_p \delta \tilde{\sigma}_{p,ij} = P_p \delta_{ij} - \mu_p S_{ij}$$

avec :

$$\mu_p = C_{\mu p} \frac{\tau_{sp}^F}{2} P_p$$

Nous pouvons également nous appuyer sur les méthodes développées en turbulence monophasique pour améliorer la modélisation du tenseur. Par exemple, à l'instar de ce qui est fait dans les modèles semi-déterministes, une fonction dépendante des gradients de vitesse pourrait être utilisée, à la place de la constante  $C_{\mu p}$ .

De façon plus fondamentale, l'hypothèse de Boussinesq que nous avons établie est basée sur un certain nombre d'hypothèses : tenseur des corrélations triples négligé, stationnarité de la partie déviatorique du tenseur des contraintes cinétiques et enfin prédominance de la partie isotrope de ce tenseur sur la partie anisotrope. Or, au vu des résultats obtenus au cours des simulations réalisées avec le CPPM, il s'avère que cette dernière hypothèse doit être remise en question. Le tenseur des contraintes cinétiques doit s'exprimer en fonction des gradients de vitesse particulière mais également selon la direction du tenseur considérée. Un comportement plus anisotrope de ce tenseur devrait ainsi permettre d'améliorer les résultats obtenus.

Les expériences disponibles étant rares, toute la difficulté de ces modélisations repose sur le calage des constantes inhérentes à chacune de ces méthodes...

Enfin, nous nous devons d'évoquer le couplage de la turbulence du gaz avec le mouvement des particules. Nous avons volontairement occulté ce phénomène car nos travaux sont dévolus à des applications qui autorisent une telle démarche. Cependant, il faut être conscient que dans un cadre plus général, cette hypothèse peut être fondamentalement fautive. De plus, la prise en compte de la turbulence de la phase porteuse fournit une source d'agitation supplémentaire pour les particules. Ce qui va dans le sens du terme de pression particulière que nous avons défini mais qui se base uniquement sur la variance produite par l'inertie des particules. Cela pourrait constituer une prochaine étape, après la prise en compte de la combustion des particules, qui reste primordiale.

## 2.4 Analyse de la validité de la modélisation diphasique avec pression particulière

Lors de la mise au point des modèles à pression particulière, nous avons décidé de négliger les termes de sous-maille issus de l'approche LES (cf. chapitre 3). Nous avons alors mentionné que cette hypothèse devrait faire l'objet d'une validation *a posteriori*, à l'aide du modèle complet. Il s'agit en fait de calculer le terme de pression de sous-maille et de le comparer à la pression particulière. Bien sûr, la comparaison doit être faite avec la pression obtenue par un calcul avec le CPPM, afin de s'affranchir de la définition arbitraire de la constante du modèle SPPM.

Moreau *et al* (2005) proposent un modèle de sous maille pour la phase dispersée, par analogie avec celui développé par Moin *et al* (1991) pour les écoulements compressibles. En suivant Yoshizawa (1986), la pression de sous-maille peut ainsi être définie par :

$$P_{p,SGS} = 4C_l \alpha_p \rho_p \Delta_f^2 S_{p,ij} S_{p,ij}, \quad C_l = 0,012$$

$\Delta_f$  caractérise la dimension de la maille et on rappelle que le tenseur  $\overline{\overline{S}}$  est défini par :

$$S_{ij} = \frac{\partial \tilde{u}_{p,i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_{p,j}}{\partial x_i} - (\gamma_p - 1) \frac{\partial \tilde{u}_{p,k}}{\partial x_k} \delta_{ij}$$

Il nous faut calculer ce terme de pression de sous-maille lors d'une simulation d'un LP6, en utilisant les valeurs des gradients calculés par CPS. Cela demande de modifier légèrement le code et de tracer les cartes de valeurs des pressions de sous-maille et particulière, pour chaque élément du maillage.

Pour les raisons évoquées auparavant, cette étude est malheureusement restée au stade théorique : aucun résultat de calcul n'a pu (pour le moment !) être exploité à ces fins.

### 3. Conclusion

Les résultats des simulations du TEP avec le SPPM ont été comparés à ceux de simulations « lagrangiennes », réalisées avec le module de calcul de trajectoire développé durant la thèse. Nous avons ainsi choisi une valeur réaliste pour le paramètre  $\lambda$  que nous avons ensuite utilisée lors des simulations du LP6. Les résultats obtenus sont extrêmement satisfaisants : la structure globale de l'écoulement est conservée et la recirculation des particules dans le fond arrière est bien meilleure. Surtout, les accumulations intempestives de particules près de l'axe de symétrie, nettement visibles pour des particules de  $60\mu\text{m}$  de diamètre et plus, sont gommées avec le SPPM.

Les résultats obtenus avec le modèle complet sont également très satisfaisants. La variation de  $\lambda_p$  en fonction des gradients de vitesse particulaire et du temps de relaxation dynamique des particules permet d'adapter le modèle aux conditions de calcul. Ainsi, nous avons vu que le terme de pression particulaire pouvait être quasi-nul dans certains cas, mais que lorsque la situation le nécessitait, ce terme pouvait prendre des valeurs non négligeables et modifier la répartition des particules dans l'écoulement en conséquence.

Globalement, les deux modèles à pression particulaire répondent à l'objectif fixé pour ces travaux de thèse : améliorer la répartition des particules dans la chambre de combustion d'un moteur à propergol solide. Le modèle complet, qui ne nécessite pas de définir la valeur d'un paramètre constant, semble très prometteur. Nous manquons cependant de recul pour appréhender ce modèle dans son ensemble. Des études supplémentaires sont donc souhaitables.

Nous nous intéressons au chapitre suivant au second objectif de cette thèse : l'étude du rôle de la phase dispersée sur l'amplitude des oscillations de pression.



# Chapitre 8

## Rôle de la phase dispersée sur les oscillations de pression

L'influence de la présence d'une phase dispersée sur les amplitudes des ODP créées par un moteur à propergol solide a été évoquée au chapitre 1. Nous revenons sur le sujet dans ce dernier chapitre, avec l'espoir d'y apporter quelques éclaircissements.

Le premier paragraphe est consacré à la théorie linéaire qui est utilisée depuis très longtemps en propulsion solide, et qui confère un rôle amortissant à une phase dispersée inerte. Après une brève description de cette méthode, nous verrons que, si elle donne de bons résultats dans certaines situations, elle est en revanche mise en défaut lors d'une application à un moteur à propergol solide présentant une instabilité hydrodynamique, et en particulier un VSP pur.

Un scénario expliquant l'effet amplificateur de particules inertes sur les amplitudes des oscillations est présenté au paragraphe 2. Il s'appuie sur une vaste étude paramétrique réalisée sur le LP6, en faisant varier notamment le diamètre des particules. La capacité des particules à se concentrer sur le pourtour des tourbillons créés par le VSP est considérée comme le mécanisme de base, ce qui explique que l'augmentation des ODP est trouvée maximale pour un nombre de Stokes égal à 1.

Nous présentons ensuite une étude paramétrique réalisée avec le modèle à pression particulaire simplifié, également sur le LP6. Globalement, les résultats obtenus confirment le scénario proposé. Leur validité est toutefois discutée, en particulier par rapport à la valeur choisie pour le paramètre constant du modèle SPPM.

### 1. La théorie linéaire

#### 1.1 Principe

L'étude théorique de l'atténuation d'une onde acoustique par des particules en suspension dans un gaz a fait l'objet de nombreux travaux. Dans le cadre d'écoulements dilués et en absence de combustion, la théorie linéaire proposée par Culick (1966-a et 1981) et Temkin & Dobbins (1966) s'appuie sur un certain nombre d'hypothèses simplificatrices qui permettent de linéariser les équations de bilan des deux phases en présence.

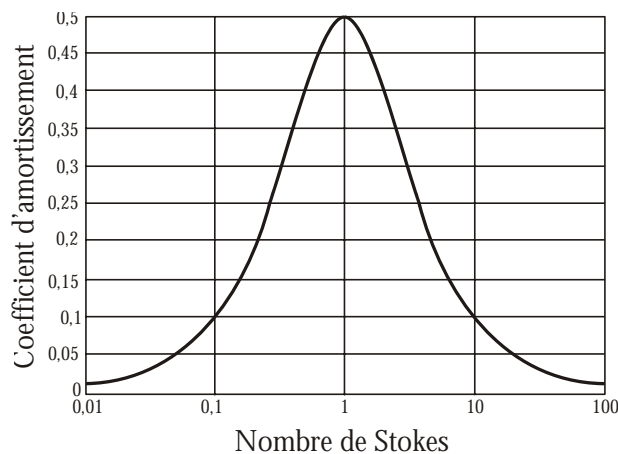
La méthode de Temkin et Dobbins considère que la variation d'une variable physique quelconque  $F$  est harmonique, *ie* telle que  $F = \tilde{F} e^{i(Kx - \omega t)}$  avec  $K = k_1 + ik_2$ . Alors, l'amortissement spatial d'une onde acoustique est donné par  $\alpha(x) = 2k_2$ . On en déduit l'expression du coefficient d'amortissement de l'énergie acoustique  $\alpha^*$ , donnée sous forme adimensionnée par :

$$\alpha^* = (c_{gaz} / \omega) \alpha \quad (8.1)$$

où  $c_{gaz}$  et  $\omega$  sont respectivement la vitesse du son dans le gaz et la pulsation de l'onde acoustique. Ce coefficient sans dimension  $\alpha^*$  est tracé Figure 8- 1 en fonction du nombre de Stokes  $\omega \tau_u^s$  des particules. Notons que le nombre de Stokes ici mentionné est formé à partir de la pulsation de l'oscillation et du temps de relaxation dynamique des particules. La courbe d'amortissement de

l'oscillation ainsi obtenue a l'allure classique d'une courbe en cloche et montre que la présence de particules dans un gaz amortit toujours les oscillations. Cet amortissement est supposé maximal pour un diamètre de particules correspondant à un nombre de Stokes égal à 1. Il est au contraire très faible pour les petites particules qui suivent le gaz et les grosses qui l'ignorent.

Cette théorie est largement utilisée en balistique pour optimiser le diamètre des particules dans les compositions de propergol, en fonction de l'acoustique de la chambre de combustion.



**Figure 8-1 : Amortissement théorique.**

Des simulations numériques ont été effectuées pour confirmer cette théorie (Morfouace & Tissier, 1995 ; Dupays *et al*, 1996 ; Vuillot *et al*, 1997). Les résultats concordent parfaitement dans le cas de la propagation d'une onde dans un tube rempli de particules en suspension dans un gaz. En revanche, l'application à un propulseur présentant un détachement tourbillonnaire d'angle montre des écarts notables entre la théorie et le calcul. Nous allons voir au paragraphe suivant que dans le cas des moteurs à propergol solide, la situation est effectivement relativement complexe.

## 1.2 Application à un propulseur

L'effet important de la présence de particules d'alumine et d'aluminium au sein de l'écoulement sur les niveaux d'oscillations de pression dans les MPS segmentés a largement été étudié (voir par exemple Lupoglazoff *et al*, 2000 ; Ballereau *et al*, 2003). A l'origine, les idées admises supposaient un rôle amortissant aux particules inertes (comme prédit par la théorie linéaire) et un rôle amplificateur aux particules réactives, par dégagement d'énergie dans les tourbillons.

Or, les résultats des simulations numériques ont montré que, selon le diamètre des particules, la prise en compte d'une phase dispersée **réactive** aboutit soit à un amortissement, soit à une augmentation de l'amplitude des ODP (Godfroy *et al*, 2004).

Le mécanisme soupçonné être à l'origine de l'amplification des oscillations par une phase dispersée a d'abord été relié logiquement à la combustion distribuée des particules. En fonction de leur diamètre initial, la zone de combustion est plus ou moins étendue<sup>1</sup> et si un phénomène de détachement tourbillonnaire pariétal est présent dans le moteur, alors la combustion des particules peut se produire au sein des tourbillons. Le scénario imaginé par la communauté scientifique est alors le suivant : en brûlant, les particules dégagent de l'énergie dans les tourbillons et cette énergie vient renforcer le phénomène de détachement tourbillonnaire, par un mécanisme de couplage qui reste à

<sup>1</sup> En proche paroi propergol pour les petits diamètres et, pour fixer les idées, jusqu'à mi-rayon du canal pour les gros diamètres.



identifier (Le Breton *et al*, 1999). En revanche, la théorie linéaire, qui s'applique à des particules inertes<sup>2</sup>, reste *a priori* valable.

Cependant, d'autres simulations réalisées sur des maquettes du P230 (LP6 et LP10) pour une phase dispersée **inerte** ont montré une amplification systématique des ODP par rapport à un écoulement monophasique, dans le cas d'un VSP pur (Briand, 2003). De plus, les particules ne modifient aucunement la forme du mode de vibration : le champ aérodynamique est globalement préservé et les particules ne font qu'amplifier l'instabilité existante. Ces résultats s'opposent très nettement au principe de la théorie linéaire, chère aux balisticiens. Ils semblent également montrer que la combustion des particules n'est pas l'unique mécanisme permettant d'expliquer l'effet d'une phase dispersée sur les ODP d'un moteur.

En fait, il s'avère que la théorie linéaire ne s'applique pas à des moteurs présentant un phénomène de détachement tourbillonnaire pariétal, et plus généralement à un moteur présentant une instabilité hydrodynamique, dans la mesure où les particules sont centrifugées autour des tourbillons créés par le VSP (cf. simulations du LP6 présentées au chapitre précédent). Le milieu n'est donc pas du tout homogène en particules. Or, cette hypothèse est cruciale pour la théorie acoustique.

Sur la base d'une étude paramétrique menée sur le LP6 tir N°7, Godfroy *et al* (2004) proposent un scénario explicatif de l'amplification des ODP par une phase dispersée inerte pour un moteur présentant un VSP pur (voir aussi Ballereau *et al*, 2003). Le principe et les résultats de cette étude paramétrique seront décrits au paragraphe 3.

## 2. Scénario explicatif du rôle d'une phase dispersée inerte sur les ODP

Dans un écoulement présentant un VSP pur, les particules s'accumulent<sup>3</sup> en périphérie des tourbillons et forment des paquets. Après visionnage de films numériques illustrant la répartition des particules dans le moteur au cours du fonctionnement en mode instationnaire établi, il s'avère que ces paquets de particules sont ensuite convectés jusqu'à la tuyère et absorbés d'un coup dans le convergent. Au passage du col, lorsque le débit de particules est maximal, celui du gaz est minimal ; et inversement. Les paquets de particules créent donc un pic de pression en passant le col : ils agissent un peu comme un bouchon et font monter la pression. Ce pic de pression est à l'origine de l'augmentation des ODP existantes.

En diphasique inerte, la formation de paquets de particules doit donc être considérée comme le phénomène explicatif de l'accroissement des oscillations dues à un VSP pur.

Or, la création de paquets de particules est un effet essentiellement dynamique dû au terme de couplage dynamique entre les phases, *ie* la force de traînée<sup>4</sup>. En définissant un nombre de Stokes à partir du temps de relaxation dynamique des particules et de la pulsation de l'écoulement (cf. paragraphe 3.1), alors l'amplification maximale est obtenue pour  $St = 1$ . Pour ce nombre, la centrifugation des particules est en effet optimale sur le pourtour des tourbillons du VSP (Wen *et al*, 1992), ce qui favorise au maximum la création de paquets. Lorsque le nombre de Stokes est faible, les particules suivent le gaz et l'écoulement est alors relativement homogène. A l'opposé, pour des nombres de Stokes supérieurs à 1, les particules sont assez insensibles au gaz et suivent leur propre trajectoire, de ce fait les paquets se forment difficilement (cf. Figure 8- 2).

<sup>2</sup> Une extension de cette théorie à des écoulements diphasiques réactifs a été proposée par Dupays & Vuillot (1998) mais le cas de la combustion de l'aluminium reste, de l'avis des auteurs, sujet à caution.

<sup>3</sup> La concentration restant toutefois compatible avec l'hypothèse diluée.

<sup>4</sup> Dans le modèle de base de CPS, utilisé pour réaliser l'étude à l'origine de ces conclusions, la force de traînée est la seule contribution prise en compte. Il n'existe pas de termes liés à la gravité, à la portance ou autres. Rappelons que c'est également le cas des modèles SPPM et CPPM.

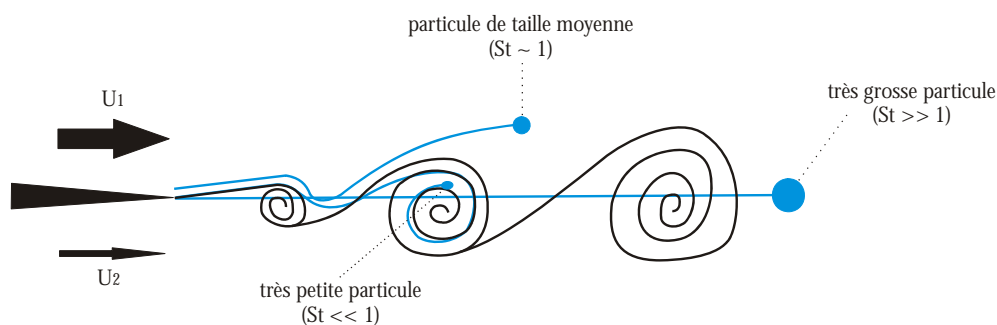


Figure 8-2 : Influence du nombre de Stokes, d'après Wen *et al* (1992)

Les paramètres fondamentaux dans le mécanisme d'amplification des ODP par une phase dispersée inerte sont identifiés au nombre de deux : le taux de présence des particules (plus les paquets de particules sont importants en terme de concentration, plus l'augmentation des ODP est forte) et le nombre de Stokes (amplification maximale pour  $St = 1$ ). En revanche, le déséquilibre thermique n'a aucune importance, dans la mesure où les écarts de température sont faibles dans la chambre de combustion.

### 3. Simulations du LP6 (SPPM)

L'étude paramétrique à l'origine de cet éclairage nouveau sur l'influence d'une phase dispersée sur les ODP a été réalisée avec le modèle diphasique de base de CPS (Mombelli & Cesco, 1999). Or, nous avons vu que celui-ci présente un défaut : des surconcentrations fictives de particules peuvent être obtenues dans l'écoulement. On peut donc s'interroger sur la légitimité des conclusions présentées précédemment.

Pour répondre à cette question, nous avons effectué une étude paramétrique équivalente avec le modèle à pression particulaire simplifié<sup>5</sup> et nous avons comparé les deux séries de résultats.

#### 3.1 Etude paramétrique

Les calculs sont réalisés sur le LP6, dans la configuration de tir N°7 car seul le VSP y est développé (Lupoglazoff & Vuillot, 1996-b). Rappelons que ce phénomène est important car il rend l'écoulement hétérogène : les particules sont centrifugées sur le pourtour des tourbillons créés par ce détachement tourbillonnaire pariétal (Godfroy & Guéry, 1997-b).

##### 3.1.1 Principe

Les simulations sont menées sur 350 ms, soit plus de 100 périodes du premier mode longitudinal de façon à obtenir une bonne résolution fréquentielle : de l'ordre de 5Hz pour une fréquence recherchée de l'ordre de 300Hz. Nous ne faisons varier qu'un paramètre à la fois (soit le diamètre des particules, soit le paramètre  $\lambda$ ). Le rôle de la phase inerte est évalué en comparant chaque simulation à la référence que constitue le calcul en gaz équivalent.

Pour réaliser ce calcul de référence, nous déterminons à l'aide du logiciel OPHELIE (Jacquemin, 1982) les produits de combustion et leurs propriétés thermodynamiques. Ces produits contiennent des gaz et des particules, qui sont regroupés dans un gaz unique équivalent de propriétés thermodynamiques constantes. Les grandeurs  $\gamma_{eq}, C_{p, eq}$  du gaz équivalent sont définies à partir de la fraction massique  $f_m$  des particules, et des propriétés du gaz seul  $\gamma_{gaz}, C_{p, gaz}$  :

<sup>5</sup> Comme évoqué précédemment, les résultats disponibles avec le modèle complet sont trop peu nombreux pour permettre une étude paramétrique.

$$\begin{aligned}
 C_{p,eq} &= f_m C_{p,p} + (1 - f_m) C_{p,gaz} \\
 C_{v,eq} &= f_m C_{p,p} + (1 - f_m) C_v \\
 \gamma_{eq} &= \frac{f_m C_{p,p} + (1 - f_m) C_{p,gaz}}{f_m C_{p,p} + (1 - f_m) C_v}
 \end{aligned} \tag{8. 2}$$

La simulation en gaz équivalent est alors physiquement comparable à celle faite en diphasique dans la mesure où les grandeurs essentielles (débit, vitesse du son, niveau de pression moyenne,...) sont préservées entre les deux calculs. La simulation diphasique met alors en évidence l'influence du déséquilibre entre les phases.

Quand nous effectuons une simulation diphasique, les particules sont retirées du gaz équivalent et on détermine un nouveau gaz équivalent, dont on spécifie le débit et la thermodynamique (en inversant les relations présentées ci-dessus). Cette méthode met directement en évidence les effets liés à la modélisation séparée des deux phases. Ce ne serait pas le cas si la phase dispersée était superposée au gaz initial, sans modification du débit gazeux et de ses propriétés thermodynamiques.

### 3.1.2 Méthode de comparaison des résultats

La méthode retenue pour comparer les résultats obtenus est celle utilisée par Briand (2003). Pour chaque calcul, nous observons la répartition des particules dans la chambre de combustion (cf. chapitre précédent) et le signal de pression du gaz aux fonds avant et arrière du moteur. Puis nous dépouillons les résultats avec le logiciel PlotBasC qui permet de faire un traitement des signaux oscillants (outil de la base de données POP, Cagnon *et al*, 1997). Nous obtenons ainsi, pour chaque cas de calcul, la pression gazeuse moyenne et les valeurs des  $\sqrt{2}RMS$  aux fonds avant et arrière.

Il faut ensuite raisonner en  $\Delta P / P$ , *ie* comparer les oscillations de pression obtenues et la pression moyenne. En effet, le  $\Delta P$  est proportionnel à la pression : toutes choses égales par ailleurs, les ODP sont donc plus fortes pour une pression plus forte. Or, il faut être conscient que la pression moyenne obtenue par un calcul diphasique peut varier. Même si nous prenons garde à redéfinir la thermodynamique pour conserver le niveau de pression moyenne, cela n'empêche pas une perte de pression dans la tuyère en diphasique. En effet, pour passer le col de la tuyère, les particules doivent être accélérées par le gaz qui perd ainsi de l'énergie. La force de traînée augmentant avec le diamètre des particules, il est logique que la perte de pression en diphasique augmente également avec le diamètre (cf. Figure 8- 3).

L'amplification (ou l'amortissement) des oscillations est donc étudiée en calculant le rapport des niveaux d'oscillations au fond avant dans le cas d'un écoulement diphasique et dans le cas du calcul monophasique de référence (commun à tous les calculs car indépendant du modèle diphasique utilisé) :

$$\Pi = \frac{\Delta P_{2\phi} / P_{moy\ 2\phi}}{\Delta P_{1\phi} / P_{moy\ 1\phi}} \tag{8. 3}$$

Le point important est que toutes les simulations diphasiques effectuées convergent vers un état instationnaire établi, quels que soient les paramètres de calcul. A titre d'exemple, la Figure 8- 5 montre la convergence de calculs diphasiques réalisés avec les modèles de base et SPPM. L'excellente régularité des courbes montre un parfait établissement de l'écoulement.

Enfin, nous définissons un nombre de Stokes  $St$  par le produit  $\omega \tau_u^s$  avec :

$$\omega = 2\pi f \tag{8. 4}$$

$$\tau_u^s = \frac{\rho_p d_p^2}{18\mu_{gaz}} \tag{8. 5}$$

où  $f$  est la fréquence des oscillations de l'écoulement égale à 295 Hz ici. On notera que le temps de relaxation dynamique considéré est celui valable dans l'hypothèse de Stokes, le terme de pression particulaire du modèle SPPM ne modifie donc aucunement ce terme. Nous reviendrons sur la validité de cette définition du nombre de Stokes au paragraphe 3.4.

Les résultats des simulations sont comparés en traçant le rapport  $\Pi$  en fonction du nombre de Stokes  $St$ .

### 3.2 Résultats des simulations

Avec le modèle de base de CPS, 14 simulations diphasiques ont été réalisées (Briand, 2003) pour des diamètres de particules variant de 1 à 200 $\mu\text{m}$ , soit des nombres de Stokes approximativement compris entre 0,002 et 100. Les résultats obtenus, regroupés dans le Tableau 2, ont permis de mettre en avant les points suivants :

- la théorie linéaire est inapplicable dans un milieu fortement hétérogène,
- il existe un maximum d'amplification pour  $St=1$ , correspondant à un diamètre de particules inertes de 20 $\mu\text{m}$ ,
- en dessous de  $St=1$ , plus les particules sont petites, moins elles amplifient le niveau des oscillations de pression, jusqu'à atteindre un coefficient d'amplification de 1 : on retrouve alors le comportement obtenu avec le gaz équivalent.

Notre objectif est de comparer ces résultats à ceux obtenus avec le modèle SPPM et de voir si ces tendances sont respectées.

Avec le modèle SPPM, nous avons effectué une trentaine de simulations, pour des diamètres de particules allant de 0,5 à 300 $\mu\text{m}$ , et pour des valeurs de  $\lambda$  de 0,1 à 50 (cf. Tableau 1). Rappelons que la valeur 10 est celle correspondant à un écart minimal entre les calculs eulériens et lagrangiens réalisés sur le TEP (cf. chapitre précédent).

		diamètre des particules ( $\mu\text{m}$ )																				
		0,5	1	2	5	10	15	20	25	30	40	50	60	75	90	100	125	150	175	200	250	300
paramètre lambda	0,1				x																	
	1				x			x														
	10	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	20							x					x									
	50							x						x	x		x					

**Tableau 1 : Simulations LP6 réalisées avec SPPM**

Les résultats de calculs obtenus sont regroupés dans le Tableau 2, pour le modèle de base de CPS et pour le modèle SPPM avec  $\lambda = 10$ .

Au chapitre 7, nous avons utilisé les résultats de certaines de ces simulations pour étudier l'influence du terme de pression particulaire sur la répartition des particules dans l'écoulement. A présent, il s'agit d'étudier l'influence de ce terme sur les oscillations de pression créées.

Nous avons tracé Figure 8- 3 la pression moyenne du gaz au fond avant, en fonction du diamètre des particules avec les modèles de base (sans pression particulaire) et SPPM ( $\lambda = 10$ ). L'allure générale des deux courbes, qui traduit une diminution de la pression moyenne lorsque le diamètre des particules augmente, est identique.

Pour des particules de diamètre supérieur à 20 $\mu\text{m}$ , soit  $St \approx 1$ , la pression moyenne obtenue avec le modèle SPPM est supérieure à celle obtenue sans terme de pression particulaire. Il est très probable que les particules s'accumulent moins près de l'axe de symétrie avec le nouveau modèle, le gaz perde moins d'énergie à accélérer ce paquet de particules. On note également que la modification de courbure qui a lieu vers 50 $\mu\text{m}$  pour le modèle de base, et qui n'a pas été expliquée, est totalement gommée avec le modèle à pression particulaire, ce qui semble plus physique.

diamètre (µm)	Nombre de Stokes	Pression moyenne Fond avant (Mpa)		$\sqrt{2}$ RMS FAV (Pa)		$\Pi$	
		base	SPPM	base	SPPM	base	SPPM
0,5	5,72E-04		4,249		10137,9		1,023
1	2,29E-03	4,246	4,246	9876,8	10595,6	0,997	1,070
2	9,15E-03		4,240		11600,8		1,173
5	5,72E-02	4,225	4,225	12226,2	14551,0	1,241	1,477
10	2,29E-01	4,211	4,210	17267,3	18635,8	1,758	1,898
15	5,15E-01	4,200	4,200	20175,2	20860,9	2,060	2,130
20	9,15E-01	4,193	4,193	20661,6	21013,8	2,113	2,149
25	1,43	4,186	4,187	19727,0	19452,6	2,021	1,992
30	2,06	4,180	4,183	17839,3	17377,4	1,830	1,781
40	3,66	4,169	4,175	13957,8	14085,3	1,436	1,447
50	5,72	4,151	4,170	11179,4	12162,0	1,155	1,251
60	8,24	4,148	4,167	11801,4	11086,1	1,220	1,141
75	1,29E+01	4,143	4,163	10895,8	9662,0	1,128	0,995
90	1,85E+01		4,160		7699,7		0,794
100	2,29E+01	4,140	4,158	11878,4	6385,9	1,230	0,659
125	3,58E+01		4,155		8108,9		0,837
150	5,15E+01	4,137	4,152	11297,4	11150,7	1,171	1,152
175	7,01E+01		4,150		12927,1		1,336
200	9,15E+01	4,135	4,148	10853,7	12933,5	1,126	1,337
250	1,43E+02		4,144		10549,1		1,092
300	2,06E+02		4,142		9752,5		1,010
monophasique		4,25		9911,3		1,000	

Tableau 2 : Résultats des dépouillements PlotBasC

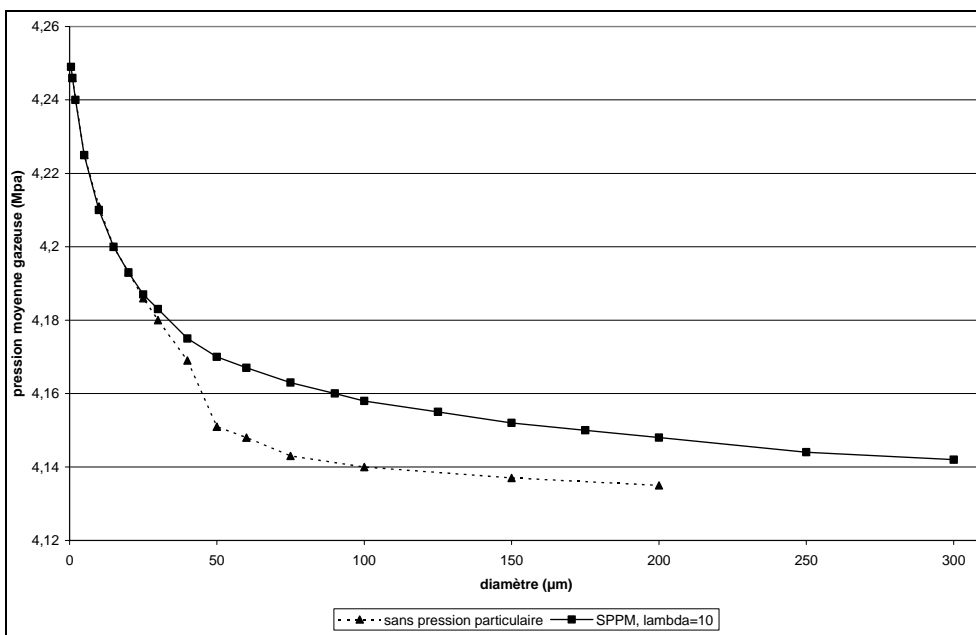
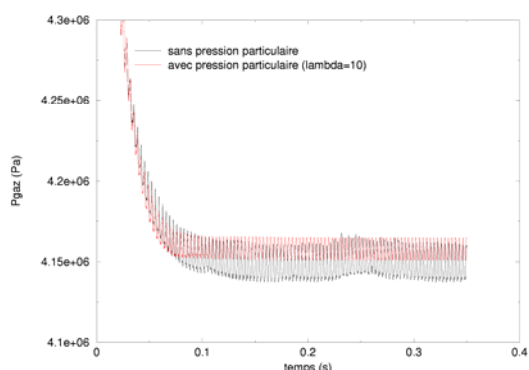


Figure 8- 3 : Pression moyenne au fond avant en fonction du diamètre des particules injectées

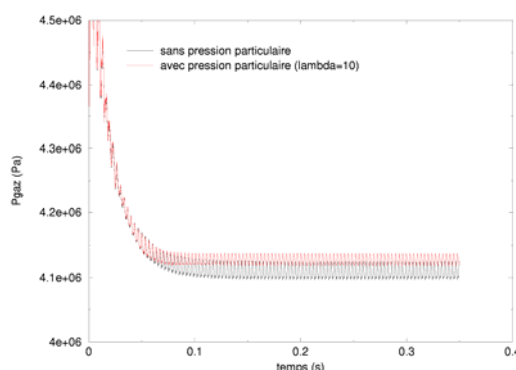
Les oscillations de pression créées pour des particules de 60µm de diamètre sont présentées Figure 8- 4 et Figure 8- 5 pour les fonds avant et arrière du LP6. On observe une augmentation de la pression moyenne dans le cas du modèle à pression particulaire : les particules sont moins piégées dans les zones de recirculation (cf. chapitre 7) et sortent donc en plus grande quantité par la tuyère. On observe par contre une légère diminution de l'amplitude des oscillations due à la diminution des concentrations de particules entre les tourbillons du VSP.

Les résultats obtenus pour des particules de 100µm de diamètre sont encore plus marqués que pour les particules de 60µm (cf. annexe D). Les calculs sur des particules de diamètre moyen (20µm) montrent des ODP quasi identiques, en niveau et en amplitude, à celles obtenues pour un calcul

sans pression particulaire. En revanche, pour les petites particules ( $5\mu\text{m}$ ), les concentrations plus importantes entre les tourbillons, que nous avons notées au chapitre précédent, entraînent une légère augmentation de l'amplitude des ODP.

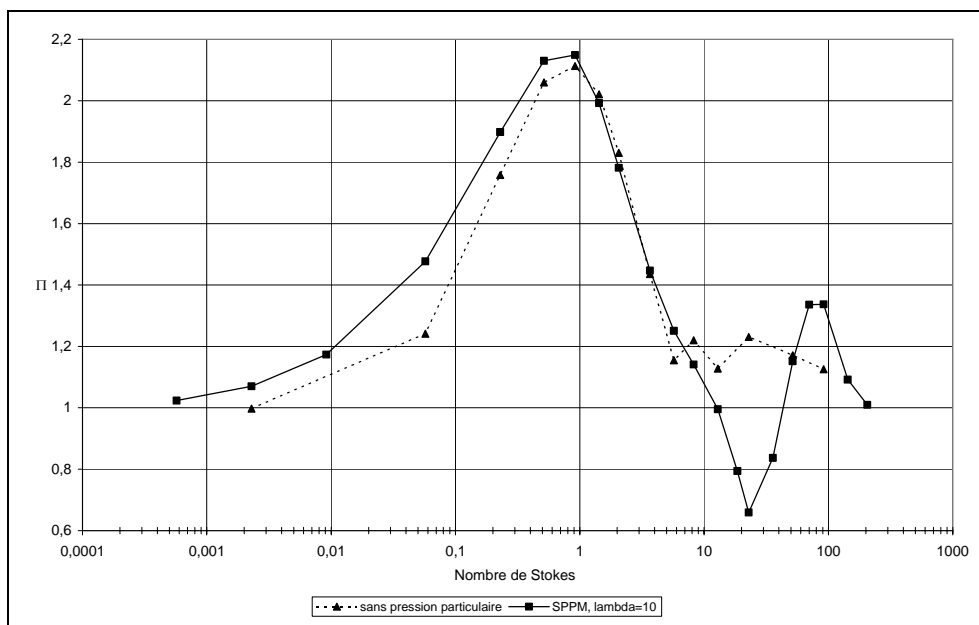


**Figure 8- 4 : Courbe de pression du gaz au fond avant, calcul LP6 sur 350ms, particules de  $60\mu\text{m}$ .**



**Figure 8- 5 : Courbe de pression du gaz au fond arrière, calcul LP6 sur 350ms, particules de  $60\mu\text{m}$ .**

La Figure 8- 6 montre l'évolution, en fonction du nombre de Stokes, du caractère amplificateur ou amortissant de la phase dispersée. Concrètement, un rapport  $\Pi$  supérieur à 1 traduit un rôle amplificateur des ODP pour la phase dispersée, et inversement. La courbe ainsi obtenue a globalement l'allure d'une cloche, quel que soit le modèle eulérien utilisé. Le maximum d'amplification est obtenu pour  $St \approx 1$ , avec un niveau très légèrement supérieur dans le cas du calcul SPPM. Pour les petites particules, le facteur d'amplification tend vers 1 de façon tout à fait continue dans le cas du SPPM.



**Figure 8- 6 : Rapport des niveaux d'ODP au fond avant en diphasique et en monophasique, en fonction du nombre de Stokes, pour les modèles de base et SPPM.**

Pour les particules de diamètre supérieur à  $20\mu\text{m}$ , les deux courbes sont d'abord superposées, avant d'adopter des allures très différentes. A partir de  $St \approx 8$ , la courbe obtenue avec le modèle de base, sans pression particulaire, présente des oscillations autour de la valeur 1,2 ; ce qui semble peu physique. Avec SPPM, le facteur d'amplification diminue jusqu'à 0,65 pour  $St \approx 25$ . Ensuite, ce

facteur augmente et confère de nouveau un rôle amplificateur aux particules telles que  $St \geq 40$ . Ce comportement n'est pas clairement compris.

Pour de grosses particules, on peut penser que, puisque les paquets de particules se créent avec difficulté en périphérie des tourbillons, il ne peut y avoir amplification des oscillations par la phase dispersée inerte, d'où un paramètre  $\Pi$  qui tende vers 1. On peut également envisager que les particules vont amortir les oscillations en détruisant les structures tourbillonnaires caractéristiques du VSP, d'où un coefficient  $\Pi$  qui tende vers 0. La situation est complexe et il est possible que plusieurs mécanismes entrent en compétition.

Ajoutons toutefois qu'à partir d'un certain diamètre, il se peut que la valeur du paramètre  $\lambda$  (fixée à 10) soit trop faible dans les zones de fortes accumulations de particules. En effet, les simulations réalisées avec le modèle complet ont montré que ce paramètre pouvait prendre des valeurs largement supérieures à 10.

En conclusion, l'utilisation du modèle à pression particulaire simplifié améliore la représentation physique de l'écoulement. Ainsi, des travers numériques classiquement obtenus avec le modèle de base (accumulations excessives de particules au centre du moteur et dans les fonds arrière) sont supprimés, ce qui permet de confirmer le scénario proposé par Godfroy *et al* (2004).

### 3.3 Influence du paramètre $\lambda$

Nous cherchons à présent à évaluer l'influence du paramètre  $\lambda$ . Pour cela, nous effectuons des simulations du moteur LP6 avec différentes valeurs du paramètre  $\lambda$ . La grande majorité de ces simulations sont réalisées pour une valeur de  $\lambda$  comprise entre 1 et 100. Rappelons que cet ordre de grandeur a été jugé pertinent au vu des résultats de calculs du TEP (cf. chapitre 7). Or, l'expérience acquise avec le modèle complet montre que des valeurs plus importantes peuvent être atteintes. C'est par exemple le cas du calcul de la couche de cisaillement réalisé avec le CPPM (cf. chapitre 6).

Les résultats sont présentés Figure 8- 7. Pour les petites particules ( $5\mu\text{m}$ ), on peut noter que l'amplification augmente avec  $\lambda$ . Ce phénomène a déjà été discuté au chapitre précédent, dans le cadre des limites du SPPM. La vitesse de glissement, qui tient compte du paramètre  $\lambda$ , peut être surestimée pour des petites particules, qui se comportent alors comme si elles étaient plus grosses.

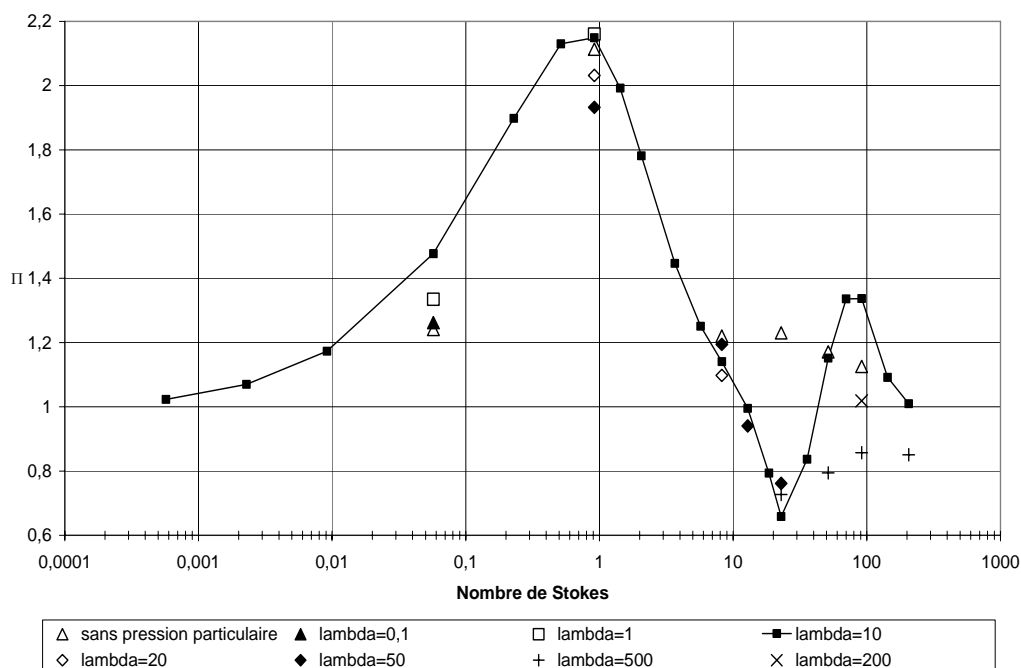


Figure 8- 7: Influence du paramètre  $\lambda$  sur les amplitudes des ODP.

Pour des particules de  $20\mu\text{m}$  ( $St \approx 1$ , maximum d'amplification) on observe le phénomène inverse : l'amplification diminue quand  $\lambda$  augmente, et contrairement aux petites particules, l'écart entre  $\lambda = 1$  et  $\lambda = 10$  est très faible. Pour des particules de  $60$  ou  $100\mu\text{m}$  de diamètre, il ne se détache aucune tendance nette mais les écarts restent limités entre les valeurs minimale ( $10$ ) et maximale ( $50$ ) de  $\lambda$ .

Pour les diamètres les plus élevés, on observe une forte influence de la valeur du paramètre  $\lambda$  sur l'amplitude des oscillations de pression créées. Ainsi, des particules de  $200\mu\text{m}$  de diamètre ont un rôle amplificateur si  $\lambda = 10$ , mais amortissant si  $\lambda = 500$ . Cela démontre nettement l'importance de la valeur de ce paramètre. En effet, l'accumulation des particules au fond arrière dépend fortement de la pression particulaire, donc de  $\lambda$ , et on sait que cette cavité arrière peut jouer le rôle de cage de résonance (Anthoine, 2000). On peut donc penser qu'une meilleure résolution de l'écoulement au FAR grâce à une valeur mieux choisie de  $\lambda$ , permettra d'améliorer les résultats pour les grosses particules (partie droite de la courbe en cloche).

Finalement, on retiendra que, dans la gamme initialement retenue pour les variations de  $\lambda$ , *ie* [1;100], la valeur de ce paramètre semble surtout influente pour les petites particules. En revanche, on ne peut rien affirmer en général quant à sa capacité à accentuer ou non le phénomène d'amplification des niveaux des ODP. Ces résultats confirment la nécessité de pouvoir définir ce paramètre selon les conditions de l'écoulement d'une part et selon le diamètre des particules d'autre part.

### 3.4 Analyse critique

Nous proposons maintenant quelques pistes de réflexion concernant la validité des résultats présentés auparavant. La majorité des points que nous allons aborder sont évoqués dans Godfroy *et al* (2004), nous les complétons à la lumière des résultats obtenus avec le modèle à pression particulaire simplifié.

Tout d'abord, le scénario proposé pour expliquer le rôle amplificateur d'une phase dispersée inerte sur les ODP est bien étayé. Il repose sur un grand nombre de simulations qui le corroborent toutes. D'autres simulations<sup>6</sup> d'écoulements diphasiques inertes en propulseur ont également montré une augmentation des niveaux par rapport aux écoulements monophasiques équivalents (voir<sup>7</sup> par exemple Gallier & Godfroy, 2001 ; Dupays & Fabignon, 2002).

En revanche, deux critiques peuvent être émises à l'encontre de ces travaux. D'abord, l'absence de validation expérimentale : nous ne disposons aujourd'hui d'aucun résultat de tir permettant d'attester de la réalité physique du phénomène. Comme brièvement évoqué au chapitre 1, il est prévu en 2006 de réaliser dans le cadre de la R&T spatiale un tir de LP10 avec des particules inertes. Les résultats obtenus en simulation numérique auront alors une chance d'être validés, à condition que les hypothèses du calcul soient bien celles de l'expérience (particules inertes, sphériques, incompressibles, sans fragmentation ni coalescence, etc.). La seconde critique concerne la définition du nombre de Stokes<sup>8</sup> et plus généralement le manque de données théoriques sur le sujet. Le couplage entre des particules et un tourbillon caractéristique des structures du VSP fera l'objet en 2006 de travaux spécifiques réalisés par l'IUSTI, toujours dans le cadre de la R&T spatiale CNES.

En ce qui concerne plus particulièrement les travaux réalisés durant cette thèse, le point essentiel à retenir est que, contrairement à ce qui pouvait être craint, la modélisation à pression particulaire ne remet pas en question le scénario explicatif du rôle amplificateur d'ODP pour des particules inertes.

---

<sup>6</sup> Précisons que les codes de simulations utilisés pour réaliser ces simulations contiennent le même modèle diphasique eulérien mais présentent de nombreuses différences sur le plan des méthodes numériques. Il ne fait donc pas de doute que les solutions obtenues soient bien conformes aux équations résolues.

<sup>7</sup> Des résultats de simulation avec le code CEDRE (ONERA), présentés par T. Fontfreyde lors de la journée des doctorants de l'ONERA, à Chatillon, le 25 janvier 2005, montrent la même tendance.

<sup>8</sup> Les dépouillements de résultats numériques sont effectués en utilisant un temps caractéristique lié à la fréquence de l'écoulement, or les travaux théoriques réalisés sur la centrifugation des particules autour de tourbillons utilisent le temps caractéristique d'un tourbillon unitaire, ce qui est tout de même différent.



Le comportement des grosses particules doit cependant être éclairci, notamment par rapport à la valeur du paramètre  $\lambda$ . Des simulations avec le CPPM pourraient éclaircir le sujet, en permettant de calculer plus précisément la pression particulaire. Néanmoins, cela impose de bien maîtriser ce modèle, par rapport aux données à l'injection, aux conditions initiales et au choix effectué pour modéliser le tenseur des contraintes cinétiques.

## 4. Conclusion

Dans un propulseur présentant un VSP pur, la théorie linéaire ne peut pas être directement appliquée car la répartition des particules n'est pas toujours homogène. Il est possible de montrer que la centrifugation des particules autour des tourbillons du VSP confère à la phase dispersée un rôle amplificateur des ODP existantes. L'augmentation des oscillations est maximale pour un nombre de Stokes égal à 1. Pour mémoire, cette valeur est celle qui, selon la théorie linéaire, amortit le plus les oscillations.

Les résultats obtenus avec le modèle à pression particulaire simplifié sont tout à fait satisfaisants. Non seulement le problème d'accumulation non physique des particules sur l'axe de symétrie et dans le fond arrière du propulseur a été résolu, mais en plus les résultats obtenus confirment le scénario expliquant l'amplification des niveaux des ODP par des particules inertes.

Néanmoins, une dépendance des résultats par rapport au paramètre  $\lambda$  existe. L'utilisation du modèle à pression particulaire complet permettra, à terme, de s'affranchir de cette constante. Il sera alors peut-être possible de fournir une explication au comportement des grosses particules (cf. Figure 8- 6).

Enfin, il ne faut pas oublier que cette étude sur des particules inertes n'est qu'une étape vers le P230, qui est le sujet final de toutes les études réalisées sur les ODP. Pour cela, il est nécessaire de considérer deux phénomènes importants : le couplage entre VSO et VSP et la combustion des particules.

En diphasique réactif, la situation est complexe : non seulement on peut avoir atténuation ou amplification des ODP selon les particules considérées (cf. Figure 8- 8, courbe orange), mais en plus le comportement de la phase dispersée est très variable d'un diamètre à l'autre (effets de seuil). A l'heure actuelle, il n'existe pas d'explication globale à ce phénomène erratique.

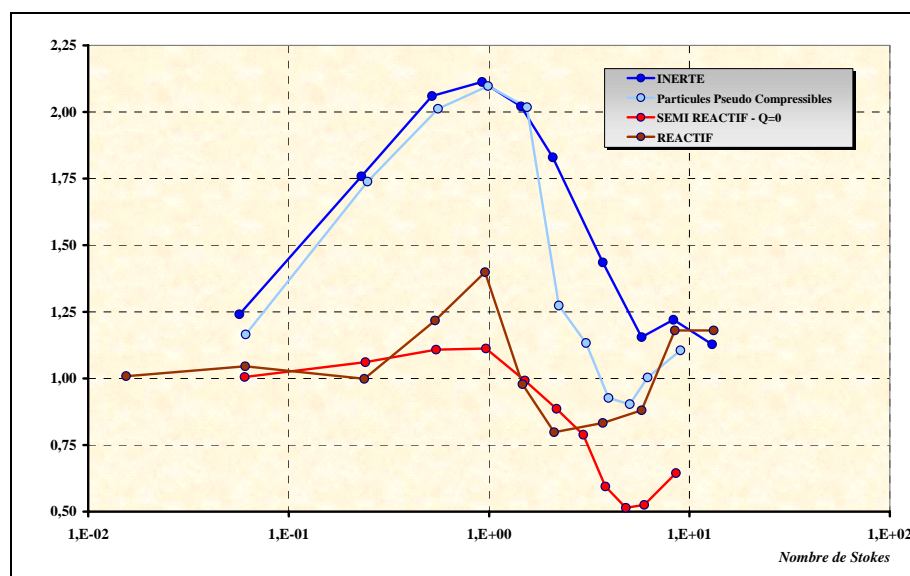


Figure 8- 8 : Comparaison des différentes modélisations de la phase dispersée, d'après Orlandi (2005).

Toutefois, des travaux récents menés à SME ont montré que l'accumulation de particules en périphérie des tourbillons du VSP, observée en inerte, a également lieu. En réactif, ce phénomène est couplé à (au moins) un autre mécanisme, qui semble être l'échange de masse entre les phases durant la combustion des particules (Orlandi, 2005). Il s'avère en effet que les résultats obtenus en faisant varier le diamètre<sup>9</sup> de particules inertes, sans transfert de masse (cf. Figure 8- 8, courbe bleu clair), sont quasi-identiques à ceux obtenus pour des particules inertes à diamètre constant (cf. Figure 8- 8, courbe bleu foncé). En revanche, lorsque les échanges de masse<sup>10</sup> sont autorisés entre les phases, nous retrouvons un fort amortissement possible des oscillations par une phase dispersée constituée de grosses particules (cf. Figure 8- 8, courbe rouge).

En conclusion, on retiendra qu'une représentation précise de la répartition des particules dans l'écoulement est indispensable à la compréhension du rôle d'une phase dispersée sur les ODP. La prise en compte d'un terme de pression particulaire dans les modèles diphasiques eulériens apparaît donc comme un outil nécessaire à toute future investigation sur le sujet.

---

<sup>9</sup> Candidat potentiel pour être ce mécanisme supplémentaire.

<sup>10</sup> Les échanges d'énergie entre phases restent nuls.

# Conclusions et perspectives

En propulsion spatiale, les propergols utilisés peuvent contenir une proportion importante d'aluminium pour des raisons énergétiques. Or, ces particules solides, qui se retrouvent dans les produits de combustion, modifient sensiblement le comportement des écoulements gazeux, notamment des écoulements tourbillonnaires instationnaires. En particulier, la présence d'une phase dispersée, même inerte, influe fortement sur les amplitudes des potentielles oscillations de pression créées par le moteur. Une modélisation précise de ces interactions gaz-particules est donc indispensable pour expliquer et prédire le comportement du moteur lors de son fonctionnement.

## Travaux réalisés

Le code de mécanique des fluides de SME, CPS, possède évidemment un modèle diphasique, globalement équivalent à celui implanté dans d'autres codes utilisés dans les mêmes programmes de recherche. Cependant, ce modèle eulérien présente un défaut qui se traduit notamment par des accumulations fictives de particules dans certaines régions de l'écoulement.

Nous avons clairement mis en évidence ces surconcentrations intempestives de particules lors de comparaisons de résultats de calculs obtenus d'une part avec CPS et d'autre part avec un module de calcul de trajectoires lagrangien. Le manque de précision du modèle eulérien de CPS réside dans la représentation moyennée du champ de vitesse particulaire. Le nuage de particules est en effet animé d'une vitesse commune, sans distinction des particularités de l'écoulement.

Pour pallier ce défaut, nous nous sommes inspirés des travaux de Simonin *et al* (2002) et Février *et al* (2005) sur le formalisme mésoscopique eulérien (MEF) pour établir une modélisation diphasique eulérienne avec pression particulaire. Ce terme de pression traduit les effets du tenseur des contraintes cinétiques mésoscopiques particulaire qui apparaît lorsque l'on tient compte du fait que deux particules peuvent être au même instant à la fois très proches l'une de l'autre et animées de vitesses différentes.

Selon les hypothèses retenues, deux modèles à pression particulaire ont été construits. Dans le modèle dit complet (CPPM), le tenseur des contraintes cinétiques est modélisé par une hypothèse de type Boussinesq. Ce modèle comprend quatre équations de transport des variables diphasiques : masse, quantité de mouvement, énergie totale et une variable supplémentaire, appelée  $\lambda_p$ , qui est fonction de l'énergie cinétique fluctuante des particules et de la fraction volumique solide. Cette quantité varie en fonction des caractéristiques de la phase dispersée et de l'écoulement. En particulier, le cisaillement de l'écoulement (*ie* lorsque les gradients de vitesse particulaire mésoscopique sont non nuls) a tendance à l'augmenter alors que les effets inertiels entraînent sa destruction. La pression particulaire, qui dépend de la fraction volumique solide et de cette variable  $\lambda_p$ , varie donc en temps et en espace, selon la configuration de l'écoulement étudié.

Un second modèle a été dérivé du CPPM : la variable  $\lambda_p$  est considérée constante en temps et en espace, et la partie visqueuse du tenseur est négligée. Ce modèle simplifié, dit SPPM, ne présente donc que trois équations de transport. De plus, la pression particulaire ne varie qu'avec la fraction volumique. L'intérêt de ce modèle réside évidemment dans sa relative simplicité, qui a permis d'une part de bâtir des solutions théoriques plus simples, facilitant ainsi les travaux d'implantation dans CPS, et d'autre part d'appréhender le rôle de la pression particulaire seule.

Cette implantation a nécessité une phase préliminaire d'analyse mathématique des systèmes convectifs. Ces systèmes étant hyperboliques, nous avons écrit des solveurs numériques basés sur la

---

résolution des problèmes de Riemann associés. Deux solveurs ont été mis au point pour chaque modèle : un solveur exact de type Godunov et un solveur approché de type Roe pour le SPPM et Roe-Toumi pour le CPPM. Ces méthodes de calcul des flux ont été validées sur des cas tests académiques de tube à choc. Les cas liés au vide de particules (courants dans les propulseurs) ont fait l'objet d'un traitement spécifique. De même, le traitement de la condition limite de type paroi débitante a nécessité la résolution d'un problème de Riemann partiel. Les vitesses et fraction volumique à l'injection sont dorénavant calculées en fonction du débit particulaire imposé mais aussi des conditions de l'écoulement dans la cellule adjacente à la paroi d'injection.

Une fois les flux diffusifs calculés et les termes sources intégrés analytiquement, les modèles à pression particulaire ont été validés sur différents cas tests. Cette étape a également permis de se familiariser avec le comportement des nouveaux modèles. En particulier, un calcul de couche de mélange diphasique instationnaire a été réalisé, avec les trois modèles diphasiques dorénavant disponibles dans CPS.

## Résultats obtenus

Les modèles SPPM et CPPM ont été utilisés avec succès pour simuler le fonctionnement de deux propulseurs : le TEP, moteur cylindrique fictif, et le LP6, maquette à l'échelle 1/15<sup>ème</sup> du P230 d'Ariane 5, qui présente un détachement tourbillonnaire pariétal pur. Les résultats sont très satisfaisants. La structure globale de l'écoulement est bien conservée et la répartition des particules dans les zones de recirculation du gaz (au fond arrière) est nettement meilleure, dans la mesure où on ne viole plus l'hypothèse d'écoulement dilué. De plus, les accumulations de particules sur l'axe de symétrie obtenues avec le modèle de base notamment dans le cas du TEP disparaissent avec ces modèles à pression particulaire. Enfin, le modèle complet, en adaptant le terme de pression particulaire en fonction des caractéristiques de l'écoulement (cisaillement) et des particules (temps de relaxation dynamique), est plus précis que le modèle simplifié.

Globalement, l'objectif consistant à développer une modélisation diphasique eulérienne améliorée par rapport à celle utilisée dans CPS jusqu'alors est donc atteint. Malgré quelques difficultés pour estimer la valeur de  $\lambda$  dans le cas du SPPM, les travers du modèle de base sont clairement supprimés lors de l'utilisation de la modélisation avec pression particulaire, tout en conservant les caractéristiques générales de l'écoulement.

Le second objectif de ces travaux est lié à ce que nous avons évoqué dans les premières lignes de cette conclusion : les oscillations de pression. Le rôle amplificateur d'une phase dispersée inerte sur les amplitudes des oscillations a été étudié, sur le LP6, avec le modèle simplifié. Les résultats confirment la théorie mise en avant par Godfroy *et al* (2004) selon laquelle des paquets de particules sont formés par l'accumulation des particules en périphérie des tourbillons formés par le VSP, et que ces paquets créent ensuite des pics de pression en passant le col de la tuyère. L'application de la théorie linéaire classique de Temkin & Dobbins, qui confère un rôle systématiquement amortissant à des particules inertes dans un écoulement, est en effet rendue caduque par l'hétérogénéité de l'écoulement dans les propulseurs présentant une instabilité hydrodynamique.

Les simulations avec le SPPM ont permis de retrouver les mêmes tendances que les résultats donnés par le modèle eulérien de base : maximum d'amplification des oscillations pour des particules présentant un nombre de Stokes proche de 1 et quasiment aucune influence des plus petites particules. La représentation physique de l'écoulement est également nettement améliorée.

Enfin, précisons que les modèles SPPM et CPPM sont applicables à d'autres configurations que celles étudiées durant cette thèse. Ils peuvent servir à d'autres sujets d'études que les oscillations de pression dans les moteurs à propergol solide d'Ariane 5 puisque leur principale caractéristique est de permettre une représentation précise de la répartition de particules solides dans un écoulement gazeux instationnaire.

## Perspectives

A ce stade, les premiers travaux qui viennent à l'esprit pour poursuivre notre étude concernent évidemment le modèle complet, et en particulier l'analyse de la validité de notre modélisation avec pression particulaire, en comparant les ordres de grandeur des termes de pression de sous-maille, issus de l'approche LES diphasique et que nous avons négligés, et de pression particulaire, calculés avec le CPPM.

L'application du CPPM à la configuration du LP6 pour d'autres diamètres de particules permettrait également d'effectuer la même étude paramétrique que celle réalisée avec le SPPM, et ainsi d'observer le comportement des particules, en particulier les plus grosses. En effet, le comportement obtenu pour les grosses particules (dans le cas du SPPM) reste mal compris. Nous avons vu que la valeur retenue pour  $\lambda_p$  influe fortement sur les résultats obtenus. Le calcul de cette variable, tel que réalisé par le modèle complet, peut donc donner une répartition différente des particules dans les fonds arrière, si la pression particulaire obtenue est supérieure à celle utilisée dans le modèle SPPM. Ces fonds arrière jouant un rôle amplificateur important dans les oscillations, il est possible que les résultats soient nettement différents et qu'ils mènent à une interprétation plus pertinente.

Grâce au modèle complet, d'autres voies peuvent être explorées, parmi lesquelles on peut citer l'étude de la valeur de  $\lambda_p$  à l'injection qui pour le moment est soit une donnée fixée par l'utilisateur, soit telle que la valeur à l'injection est égale à celle dans la cellule adjacente. Même si les simulations réalisées sur des cas plus simples ont montré que les données à l'injection étaient rapidement oubliées par le calcul, il faudrait s'assurer de l'indépendance des résultats par rapport à la valeur choisie à l'injection, ou le cas échéant chercher à paramétrer cette quantité.

En ce qui concerne le modèle simplifié, l'étude paramétrique, menée sur le LP6, sur le diamètre des particules injectées dans l'écoulement (de 0,5 à 300 $\mu$ m) et sur la valeur du paramètre  $\lambda$  (de 0,1 à 500) a montré les limites de ce modèle. Celles-ci reposent essentiellement, et évidemment, sur le caractère constant prêté à la variable  $\lambda$ . Non seulement la valeur choisie ne varie pas dans l'écoulement, mais en plus elle est indépendante du cas de calcul. Si elle est insuffisante, les accumulations de particules ne sont pas évitées et si elle est excessive, des résultats aberrants peuvent être obtenus. Toute la difficulté de l'utilisation de ce modèle réside dans l'estimation de ce paramètre, sans quoi il est aussi facile à employer que le modèle standard. L'exploitation des résultats obtenus avec le modèle complet (CPPM) pourrait donner une idée plus précise de la valeur de ce paramètre. L'utilisation du SPPM, d'approche beaucoup plus simple et de mise en œuvre moins lourde, serait alors idéale pour des études paramétriques. Nos tentatives pour définir  $\lambda$  en fonction des conditions de l'écoulement ou des paramètres à l'injection ont échoué, il serait néanmoins intéressant de poursuivre dans cette voie.

A un niveau plus amont, d'autres critiques peuvent d'ores et déjà être formulées, notamment par rapport à l'hypothèse de Boussinesq utilisée pour construire les modèles à pression particulaire. Nous savons qu'elle est discutable d'un point de vue phénoménologique, mais en plus nous avons vu qu'elle ne permet pas de respecter les conditions de réalisabilité du tenseur tout en assurant une production de  $\lambda_p$ . En outre, l'anisotropie de ce dernier doit être prise en compte. Une modélisation améliorée du tenseur des contraintes cinétiques est donc fortement souhaitable.

De plus, la turbulence de l'écoulement gazeux, supposée négligeable dans les configurations étudiées durant cette thèse, pourrait être prise en considération. Cela permettrait de créer une source de dispersion supplémentaire des particules. Enfin, un enrichissement physique de notre modélisation serait très utile, en permettant la coalescence et la fragmentation des particules, et surtout en considérant une phase dispersée réactive. Nous disposerions alors d'une modélisation idoine pour traiter les écoulements dans la chambre de combustion du P230, qui est l'objet final de ces travaux.

---

# Annexe A

## Résultats des comparaisons Euler/Lagrange

Dans cette annexe, nous présentons des résultats de comparaisons des simulations Euler/Lagrange réalisées sur le cas test TEP (maillage SME).

### 1. Particules de 5 $\mu$ m

Les simulations lagrangiennes sont réalisées pour 40000 trajectoires, soit 50 particules injectées dans chaque cellule de la paroi débitante.

#### 1.1 Fraction volumique

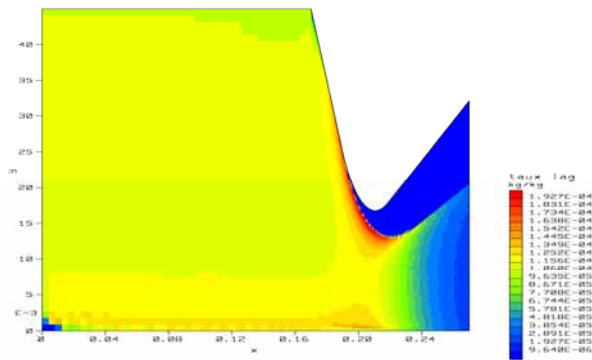


Figure A- 1 : Calcul lagrangien

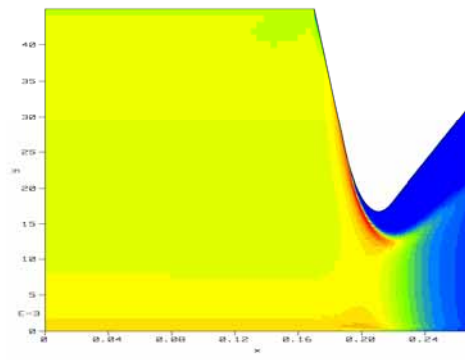


Figure A- 2 : Calcul eulérien

Les résultats présentent une très bonne corrélation. Les valeurs extrêmes obtenues par ces simulations sont regroupées dans le tableau suivant :

	Résultat Euler	Résultat Lagrange
Fraction volumique minimale	5,817.10 <sup>-9</sup>	0
Fraction volumique maximale	2,023.10 <sup>-4</sup>	2,322.10 <sup>-4</sup>

On notera cependant qu'au fond avant, près de l'axe de symétrie, les valeurs diffèrent pour quelques cellules. Il s'agit d'une zone de faible recirculation gazeuse, ce qui implique un nombre restreint de particules présentes et donc un écart important entre les valeurs moyennées. De plus, on peut remarquer une diffusion légèrement plus importante au niveau du jet en sortie de tuyère pour le calcul eulérien, par rapport à la simulation lagrangienne. Cette différence est due au traitement des zones de vide particulier dans le cas des simulations eulériennes. Nous avons vérifié que la dissipation numérique du schéma n'était pas mise en cause en effectuant une simulation avec un schéma numérique spatial d'ordre plus élevé.

#### 1.2 Vitesse moyenne axiale

Les résultats des simulations pour les vitesses moyennes sont présentés ci-après. Il faut savoir que le traitement des zones de vide diffère selon la méthode de calcul. Dans la version de CPS utilisée pour réaliser ces calculs, si une cellule présente une fraction volumique inférieure à un certain seuil (typiquement de l'ordre de 10<sup>-7</sup>) alors les variables vitesses et température ne sont plus calculées et leurs valeurs sont imposées égales à celles de la phase gazeuse. Dans le cas des simulations lagrangiennes, si une cellule est vide de particules, toutes les variables de la phase dispersée sont

annulées. Cette différence de traitement explique les écarts observés au niveau de la tuyère sur les figures ci-dessous.

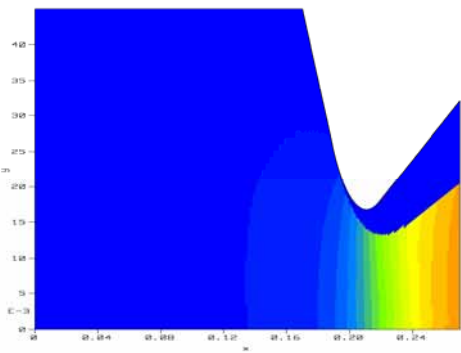


Figure A- 3 : Calcul lagrangien

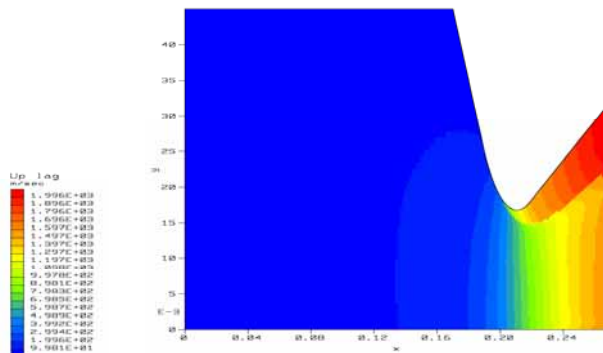


Figure A- 4 : Calcul eulérien

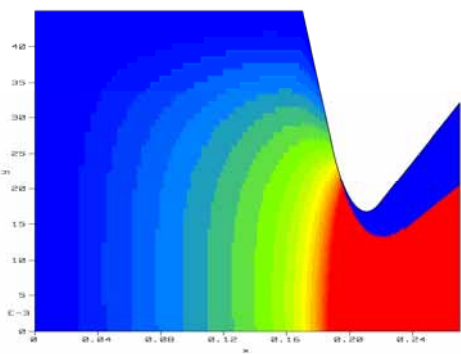


Figure A- 5 : Calcul lagrangien, isos adaptés à la chambre de combustion

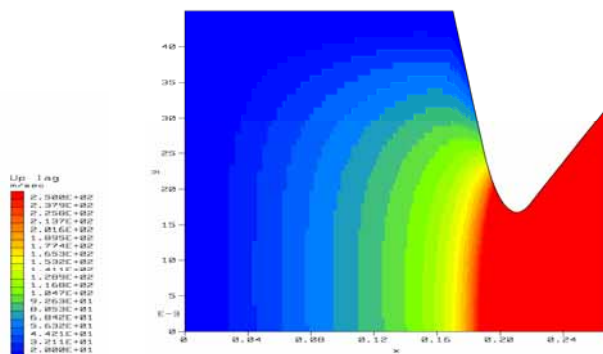


Figure A- 6 : Calcul eulérien, isos adaptés à la chambre de combustion

En dehors des zones de vide, les résultats obtenus pour les vitesses axiales des particules sont donc très proches.

### 1.3 Vitesse moyenne radiale

L'écart fictif observé pour les vitesses axiales, dû au traitement des zones de vide, se retrouve évidemment pour les vitesses radiales. En dehors de cette zone, les simulations Euler et Lagrange donnent les mêmes résultats, comme illustré par les figures suivantes.

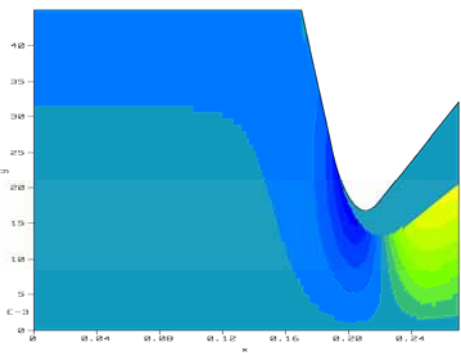


Figure A- 7 : Calcul lagrangien

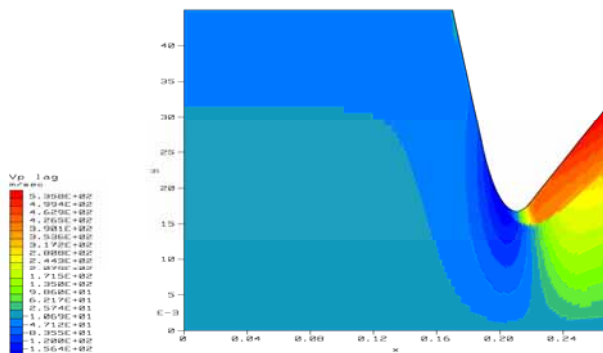


Figure A- 8 : Calcul eulérien



## 2. Particules de 30 $\mu\text{m}$

Les simulations lagrangiennes sont réalisées pour 3200 trajectoires, soit 4 particules injectées dans chaque cellule de la paroi débitante.

### 2.1 Vitesse moyenne axiale

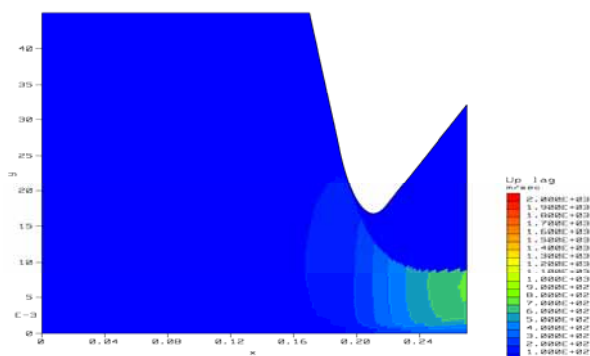


Figure A- 9 : Calcul lagrangien

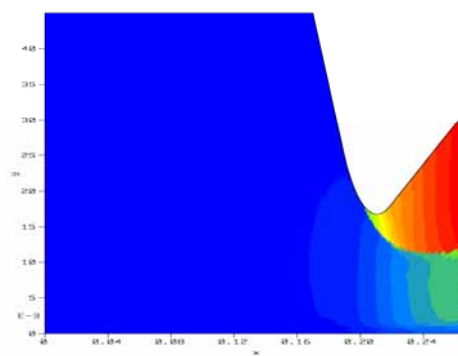


Figure A- 10 : Calcul eulérien

Comme expliqué précédemment, les différences de résultat visibles au niveau de la tuyère ne doivent pas être pris en compte. En revanche, le jet de particules est légèrement plus large dans le cas du calcul eulérien. Cet écart peut s'expliquer par un traitement différent des particules près de la paroi du convergent de la tuyère : la simulation lagrangienne est plus précise que l'eulérienne. Le champ de vitesse dans la chambre de combustion est quasi-identique dans les deux calculs (cf. Figure A- 11 et Figure A- 12). L'écart entre les vitesses Euler et Lagrange est inférieur à 1% dans cette partie du moteur.

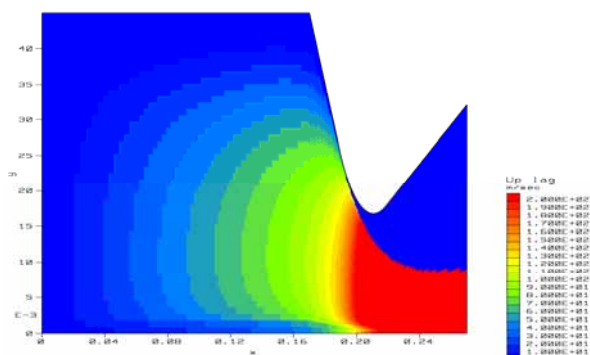


Figure A- 11 : Calcul lagrangien isos adaptés à la chambre de combustion

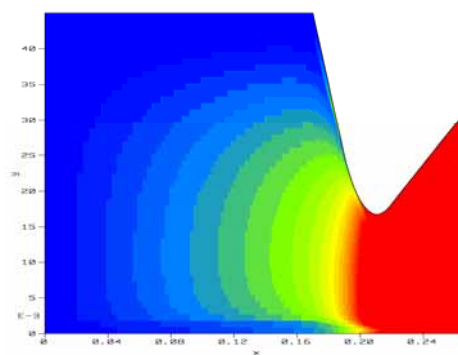


Figure A- 12 : Calcul eulérien isos adaptés à la chambre de combustion

Précisons que la discontinuité de vitesse visible près de l'axe de symétrie dans les deux simulations est due au champ de vitesse de la phase gazeuse dans ces cellules. En effet, la légère accumulation de particules dans cette zone ralentit l'écoulement gazeux, les vitesses des particules sont donc diminuées.

### 2.2 Vitesse moyenne radiale

La comparaison des résultats pour les vitesses radiales appelle les mêmes commentaires. Il ne faut pas tenir compte des divergences de traitement des zones de vide qui se traduit par des différences de vitesse flagrante dans la tuyère. La structure du jet de particules en sortie du divergent est différente dans les deux cas, à cause des particules injectées près de la paroi du convergent de la tuyère et qui interagissent avec celle-ci.

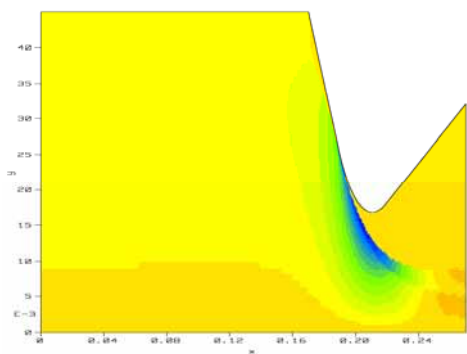


Figure A- 13 : Calcul lagrangien

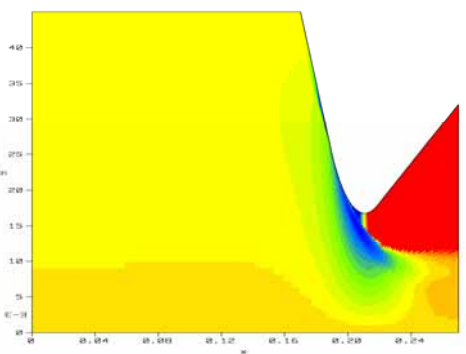


Figure A- 14 : Calcul eulérien

### 3. Particules de 100µm

Les simulations lagrangiennes sont réalisées pour 40000 trajectoires, soit 50 particules injectées dans chaque cellule de la paroi débitante. Les résultats des simulations pour des particules de 100µm de diamètre sont nettement différents selon la méthode utilisée.

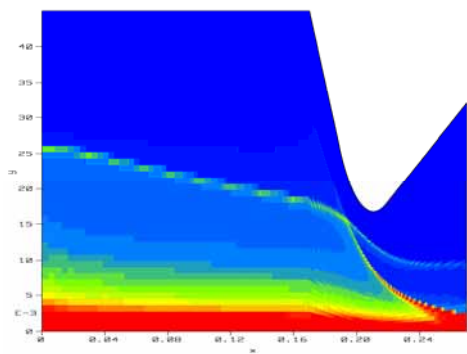


Figure A- 15 : Calcul lagrangien

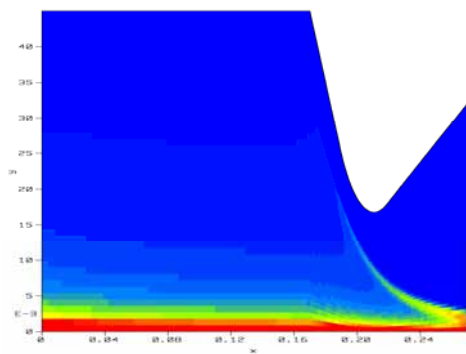


Figure A- 16 : Calcul eulérien

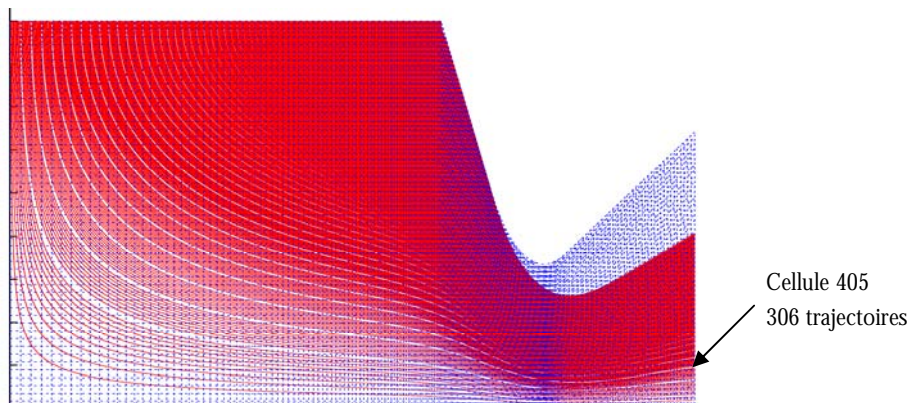
Les valeurs extrêmes obtenues par ces simulations sont regroupées dans le tableau suivant :

	Résultat Euler	Résultat Lagrange
Fraction volumique minimale	0	0
Fraction volumique maximale	2,413	1,888.10-2

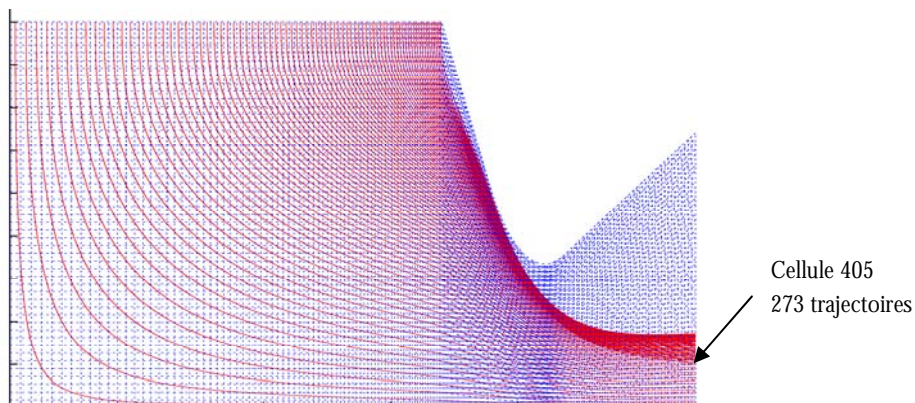
Le défaut du modèle eulérien de CPS est ainsi clairement mis en évidence.

## 4. Cellules pour l'étude de la distribution de vitesse

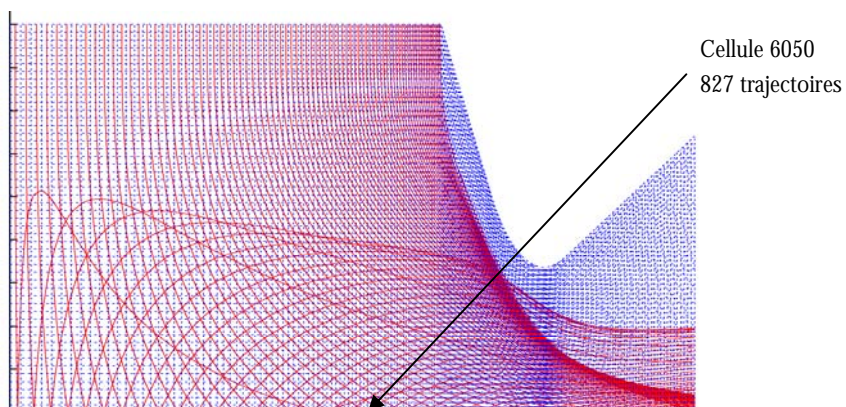
### 4.1 Particules de 5 $\mu\text{m}$ de diamètre



### 4.2 Particules de 30 $\mu\text{m}$ de diamètre



### 4.3 Particules de 100 $\mu\text{m}$ de diamètre



# Annexe B

## Equations du formalisme mésoscopique eulérien

### 1. Equation de transport générale d'une fonction de l'espace des vitesses particulières

L'équation de transport de la pdf définie au chapitre 3 s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{f}_p^{(1)} + \frac{\partial}{\partial x_j} C_{p,j} \tilde{f}_p^{(1)} = \frac{\partial}{\partial C_{p,j}} \left( \frac{C_{p,j} - \hat{u}_{g@p,j}}{\tau_u} \tilde{f}_p^{(1)} \right) \quad (\text{B-1})$$

Nous rappelons la définition de la moyenne d'ensemble  $\langle \cdot \rangle_p$  d'une quantité quelconque :

$$\langle \phi \rangle_p(\mathbf{x}, t, H_f) = \frac{1}{\tilde{n}_p^{(1)}} \int \tilde{f}_p^{(1)}(\mathbf{C}_p, \mathbf{x}, t, H_f) \phi d\mathbf{C}_p \quad (\text{B-2})$$

L'application de la procédure de moyenne conditionnelle à l'équation cinétique gouvernant la pdf particulière (B-1) donne l'équation de transport générale d'une fonction de l'espace des vitesses particulières  $\phi(\mathbf{C}_p)$  rappelée ici :

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{n}_p \langle \phi \rangle_p + \frac{\partial}{\partial x_j} \tilde{n}_p \langle \phi C_{p,j} \rangle_p = -\tilde{n}_p \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial C_{p,j}} \frac{C_{p,j} - \hat{u}_{g@p,j}}{\tau_u} \right\rangle_p \quad (\text{B-3})$$

Nous allons établir cette équation par étapes, en considérant successivement chacun des trois termes de l'équation B-1.

#### 1.1 Dérivée en temps

La dérivée temporelle de l'équation de transport de la pdf est :

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{f}_p^{(1)} \quad (\text{B-4})$$

Nous appliquons la procédure de moyenne à ce terme. Pour cela, nous multiplions l'expression B-4 par une fonction de l'espace des phases  $\phi(\mathbf{C}_p)$  puis nous intégrons par rapport à l'ensemble des vitesses de phase, sachant que cette fonction  $\phi(\mathbf{C}_p)$  est indépendante, par définition de l'espace des phases, de la variable temporelle. Nous obtenons alors le premier terme de l'équation B-3 :

$$\begin{aligned} \int \left( \frac{\partial}{\partial t} \tilde{f}_p^{(1)}(\mathbf{C}_p, \mathbf{x}, t, H_f) \right) \phi(\mathbf{C}_p) d\mathbf{C}_p &= \int \left( \frac{\partial}{\partial t} \tilde{f}_p^{(1)}(\mathbf{C}_p, \mathbf{x}, t, H_f) \phi(\mathbf{C}_p) \right) d\mathbf{C}_p \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \int \tilde{f}_p^{(1)}(\mathbf{C}_p, \mathbf{x}, t, H_f) \phi(\mathbf{C}_p) d\mathbf{C}_p \\ &= \tilde{n}_p^{(1)} \frac{\partial}{\partial t} \langle \phi \rangle_p \end{aligned} \quad (\text{B-5})$$

## 1.2 Dérivée en espace

La dérivée spatiale de l'équation de transport de la pdf est :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} C_{p,j} \tilde{f}_p^{(1)} \quad (\text{B-6})$$

Comme précédemment, nous multiplions ce terme par une fonction de l'espace des phases  $\phi(\mathbf{C}_p)$  puis nous intégrons par rapport à l'ensemble des vitesses de phase, sachant que cette fonction  $\phi(\mathbf{C}_p)$  est indépendante, par définition de l'espace des phases, de la variable spatiale. Soit :

$$\begin{aligned} \int \left( \frac{\partial}{\partial x_j} C_{p,j} \tilde{f}_p^{(1)}(\mathbf{C}_p, \mathbf{x}, t, \mathbf{H}_f) \right) \phi(\mathbf{C}_p) d\mathbf{C}_p &= \int \left( \frac{\partial}{\partial x_j} C_{p,j} \tilde{f}_p^{(1)}(\mathbf{C}_p, \mathbf{x}, t, \mathbf{H}_f) \phi(\mathbf{C}_p) \right) d\mathbf{C}_p \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} \int \tilde{f}_p^{(1)}(\mathbf{C}_p, \mathbf{x}, t, \mathbf{H}_f) C_{p,j} \phi(\mathbf{C}_p) d\mathbf{C}_p \quad (\text{B-7}) \\ &= \tilde{n}_p^{(1)} \frac{\partial}{\partial x_j} \langle \phi C_{p,j} \rangle_p \end{aligned}$$

## 1.3 Dérivée en vitesse

Le dernier terme de l'équation B-1 est :

$$\frac{\partial}{\partial C_{p,j}} \left( \frac{C_{p,j} - \hat{u}_{g@p,j}}{\tau_u} \tilde{f}_p^{(1)} \right) \quad (\text{B-8})$$

La procédure est identique à celle utilisée dans les calculs précédents. Cependant, il faut noter que la fonction  $\phi(\mathbf{C}_p)$  dépend de la variable de dérivation. Les calculs sont donc les suivants :

$$\begin{aligned} &\int \left( \frac{\partial}{\partial C_{p,j}} \left( \frac{C_{p,j} - \hat{u}_{g@p,j}}{\tau_u} \tilde{f}_p^{(1)}(\mathbf{C}_p, \mathbf{x}, t, \mathbf{H}_f) \right) \right) \phi(\mathbf{C}_p) d\mathbf{C}_p \\ &= \int \left\{ \frac{\partial}{\partial C_{p,j}} \left( \frac{C_{p,j} - \hat{u}_{g@p,j}}{\tau_u} \tilde{f}_p^{(1)}(\mathbf{C}_p, \mathbf{x}, t, \mathbf{H}_f) \phi(\mathbf{C}_p) \right) - \left( \frac{C_{p,j} - \hat{u}_{g@p,j}}{\tau_u} \tilde{f}_p^{(1)}(\mathbf{C}_p, \mathbf{x}, t, \mathbf{H}_f) \right) \frac{\partial \phi(\mathbf{C}_p)}{\partial C_{p,j}} \right\} d\mathbf{C}_p \\ &= \frac{\partial}{\partial C_{p,j}} \left( \int \frac{C_{p,j} - \hat{u}_{g@p,j}}{\tau_u} \tilde{f}_p^{(1)}(\mathbf{C}_p, \mathbf{x}, t, \mathbf{H}_f) \phi(\mathbf{C}_p) d\mathbf{C}_p \right) - \int \tilde{f}_p^{(1)}(\mathbf{C}_p, \mathbf{x}, t, \mathbf{H}_f) \frac{C_{p,j} - \hat{u}_{g@p,j}}{\tau_u} \frac{\partial \phi(\mathbf{C}_p)}{\partial C_{p,j}} d\mathbf{C}_p \\ &= -\tilde{n}_p^{(1)} \left\langle \frac{C_{p,j} - \hat{u}_{g@p,j}}{\tau_u} \frac{\partial \phi(\mathbf{C}_p)}{\partial C_{p,j}} \right\rangle_p \quad (\text{B-9}) \end{aligned}$$

En tenant compte des termes donnés par les relations B-5, B-7 et B-9, nous retrouvons l'expression B-3.

## 2. Equations continues moyennées pour la phase dispersée

En appliquant cette équation B-3 à des fonctions  $\phi$  idoines, nous obtenons les équations de transport moyennées de la phase dispersée.

## 2.1 Equation de transport de la masse

L'équation de conservation de la masse est obtenue en posant  $\phi = m_p$  :

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{n}_p \langle m_p \rangle_p + \frac{\partial}{\partial x_j} \tilde{n}_p \langle m_p C_{p,j} \rangle_p = -\tilde{n}_p \left\langle \frac{\partial m_p}{\partial C_{p,j}} \frac{C_{p,j} - \hat{u}_{g@p,j}}{\tau_u} \right\rangle_p \quad (\text{B-10})$$

Rappelons que nous avons défini au chapitre 3 la fraction volumique comme :

$$\alpha_p \rho_p = \tilde{n}_p^{(1)} m_p \quad (\text{B-11})$$

En remarquant que  $\langle m_p \rangle_p = m_p$  et  $\frac{\partial m_p}{\partial C_{p,j}} = 0$ , la simplification de cette équation est immédiate :

$$\frac{\partial}{\partial t} \alpha_p \rho_p + \frac{\partial}{\partial x_j} \alpha_p \rho_p \tilde{u}_{p,j} = 0 \quad (\text{B-12})$$

## 2.2 Equation de transport de la quantité de mouvement

L'équation de conservation de la quantité de mouvement est obtenue en posant  $\phi = m_p C_{p,i}$  :

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{n}_p \langle m_p C_{p,i} \rangle_p + \frac{\partial}{\partial x_j} \tilde{n}_p \langle m_p C_{p,i} C_{p,j} \rangle_p = -\tilde{n}_p \left\langle \frac{\partial m_p C_{p,i}}{\partial C_{p,j}} \frac{C_{p,j} - \hat{u}_{g@p,j}}{\tau_u} \right\rangle_p \quad (\text{B-13})$$

Les définitions données au chapitre 3 permettent d'écrire les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \langle m_p C_{p,i} C_{p,j} \rangle_p &= m_p \tilde{u}_{p,i} \tilde{u}_{p,j} + m_p \langle \delta u_{p,i} \delta u_{p,j} \rangle_p \\ &= m_p \tilde{u}_{p,i} \tilde{u}_{p,j} + m_p \delta \tilde{\sigma}_{p,ij} \end{aligned} \quad (\text{B-14})$$

$$\left\langle \frac{1}{\tau_u} \right\rangle_p = \frac{1}{\tau_{gp}^F} \quad (\text{B-15})$$

Soit l'équation de transport suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} \alpha_p \rho_p \tilde{u}_{p,i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \alpha_p \rho_p \left( \tilde{u}_{p,i} \tilde{u}_{p,j} + \langle \delta u_{p,i} \delta u_{p,j} \rangle_p \right) = -\frac{\alpha_p \rho_p}{\tau_{gp}^F} \left( \tilde{u}_{p,i} - \hat{u}_{g@p,i} \right) \quad (\text{B-16})$$

## 2.3 Equation de transport de l'énergie interne

L'énergie interne de la phase dispersée est définie par :

$$e_p = C_{p,p} T_p \quad (\text{B-17})$$

Cette variable ne dépend pas de l'espace des phases. L'équation de transport associée est directement donnée par la relation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} \alpha_p \rho_p C_{p,p} T_p + \frac{\partial}{\partial x_j} \alpha_p \rho_p C_{p,p} T_p \tilde{u}_{p,j} = -\alpha_p \rho_p \frac{T_p - T_{gaz}}{\tau_H} \quad (\text{B-18})$$

## 2.4 Equation de transport de l'énergie cinétique moyenne

L'équation de transport de la quantité de mouvement B-16, multipliée par  $\tilde{u}_{p,i}$  et combinée à l'équation de conservation de la masse B-12, permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \alpha_p \rho_p \tilde{u}_{p,i} \tilde{u}_{p,i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \alpha_p \rho_p \tilde{u}_{p,i} \tilde{u}_{p,i} \tilde{u}_{p,j} = & -2 \tilde{u}_{p,i} \frac{\partial}{\partial x_j} \alpha_p \rho_p \delta \tilde{\sigma}_{p,ij} \\ & - 2 \frac{\alpha_p \rho_p}{\tau_{gp}^F} \tilde{u}_{p,i} (\tilde{u}_{p,i} - \hat{u}_{g @ p,i}) \end{aligned} \quad (\text{B-19})$$

L'équation de transport de l'énergie cinétique moyenne, définie par :

$$E_c = \frac{1}{2} \tilde{u}_{p,i} \tilde{u}_{p,i} \quad (\text{B-20})$$

s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \alpha_p \rho_p E_c + \frac{\partial}{\partial x_j} \alpha_p \rho_p \tilde{u}_{p,j} E_c = & - \tilde{u}_{p,i} \frac{\partial}{\partial x_j} \alpha_p \rho_p \langle \delta u_{p,i} \delta u_{p,j} \rangle_p \\ & - \frac{\alpha_p \rho_p}{\tau_{gp}^F} \tilde{u}_{p,i} (\tilde{u}_{p,i} - \hat{u}_{g @ p,i}) \end{aligned} \quad (\text{B-21})$$

Ou encore :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \alpha_p \rho_p E_c + \frac{\partial}{\partial x_j} \alpha_p \rho_p \tilde{u}_{p,j} E_c = & - \frac{\partial}{\partial x_j} \alpha_p \rho_p \tilde{u}_{p,i} \langle \delta u_{p,i} \delta u_{p,j} \rangle_p \\ & + \alpha_p \rho_p \langle \delta u_{p,i} \delta u_{p,j} \rangle_p \frac{\partial \tilde{u}_{p,i}}{\partial x_j} \\ & - \frac{\alpha_p \rho_p}{\tau_{gp}^F} \tilde{u}_{p,i} (\tilde{u}_{p,i} - \hat{u}_{g @ p,i}) \end{aligned} \quad (\text{B-22})$$

## 2.5 Equation de transport du tenseur des contraintes cinétiques

L'équation de transport du tenseur des contraintes est obtenue en posant  $\phi = m_p C_{p,i} C_{p,j}$  dans l'équation B-3 :

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{n}_p \langle m_p C_{p,i} C_{p,j} \rangle_p + \frac{\partial}{\partial x_m} \tilde{n}_p \langle m_p C_{p,i} C_{p,j} C_{p,m} \rangle_p = - \tilde{n}_p \left\langle \frac{\partial m_p C_{p,i} C_{p,j}}{\partial C_{p,m}} \frac{C_{p,m} - \hat{u}_{g @ p,m}}{\tau_u} \right\rangle_p \quad (\text{B-23})$$

Sachant que :

$$\frac{\partial C_{p,i} C_{p,j}}{\partial C_{p,m}} = C_{p,i} \delta_{jm} + C_{p,j} \delta_{im} \quad (\text{B-24})$$

le membre de droite de l'équation B-23 s'écrit :

$$\begin{aligned}
-\tilde{n}_p \left\langle \frac{\partial m_p C_{p,i} C_{p,j} C_{p,m} - \hat{u}_{g@p,m}}{\partial C_{p,m} \tau_u} \right\rangle_p &= -\alpha_p \rho_p \left\langle C_{p,i} \frac{C_{p,j} - \hat{u}_{g@p,j}}{\tau_u} \right\rangle_p \\
&\quad - \alpha_p \rho_p \left\langle C_{p,j} \frac{C_{p,i} - \hat{u}_{g@p,i}}{\tau_u} \right\rangle_p \\
&= -\frac{\alpha_p \rho_p}{\tau_{gp}^F} \left\{ \tilde{u}_{p,i} (\tilde{u}_{p,j} - \hat{u}_{g@p,j}) + \tilde{u}_{p,j} (\tilde{u}_{p,i} - \hat{u}_{g@p,i}) \right\} \\
&\quad - \frac{\alpha_p \rho_p}{\tau_{gp}^F} 2 \left\langle \delta u_{p,i} \delta u_{p,j} \right\rangle_p
\end{aligned} \tag{B-25}$$

Compte tenu de B-13 et B-25, et sachant que :

$$\begin{aligned}
\left\langle C_{p,i} C_{p,j} C_{p,m} \right\rangle_p &= \tilde{u}_{p,i} \tilde{u}_{p,j} \tilde{u}_{p,m} + \left\langle \delta u_{p,i} \delta u_{p,j} \delta u_{p,m} \right\rangle_p \\
&\quad + \tilde{u}_{p,i} \left\langle \delta u_{p,j} \delta u_{p,m} \right\rangle_p + \tilde{u}_{p,j} \left\langle \delta u_{p,i} \delta u_{p,m} \right\rangle_p + \tilde{u}_{p,m} \left\langle \delta u_{p,i} \delta u_{p,j} \right\rangle_p
\end{aligned} \tag{B-26}$$

L'équation B-23 devient :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t} \alpha_p \rho_p \tilde{u}_{p,i} \tilde{u}_{p,j} + \frac{\partial}{\partial x_m} \alpha_p \rho_p \tilde{u}_{p,i} \tilde{u}_{p,j} \tilde{u}_{p,m} + \frac{\partial}{\partial t} \alpha_p \rho_p \delta \tilde{\sigma}_{p,ij} + \frac{\partial}{\partial x_m} \alpha_p \rho_p \tilde{u}_{p,m} \delta \tilde{\sigma}_{p,ij} \\
&= -\frac{\partial}{\partial x_m} \alpha_p \rho_p \left( \tilde{u}_{p,i} \delta \tilde{\sigma}_{p,jm} + \tilde{u}_{p,j} \delta \tilde{\sigma}_{p,im} \right) - \frac{\partial}{\partial x_m} \alpha_p \rho_p \left\langle \delta u_{p,i} \delta u_{p,j} \delta u_{p,m} \right\rangle_p \\
&\quad - \frac{\alpha_p \rho_p}{\tau_{gp}^F} \left( \tilde{u}_{p,i} (\tilde{u}_{p,j} - \hat{u}_{g@p,j}) + \tilde{u}_{p,j} (\tilde{u}_{p,i} - \hat{u}_{g@p,i}) + 2 \delta \tilde{\sigma}_{p,ij} \right)
\end{aligned} \tag{B-27}$$

En combinant cette équation B-27 avec l'équation de quantité de mouvement B-15, il est possible d'écrire l'équation de transport du tenseur des contraintes cinétiques :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \alpha_p \rho_p \delta \tilde{\sigma}_{p,ij} + \frac{\partial}{\partial x_m} \alpha_p \rho_p \tilde{u}_{p,m} \delta \tilde{\sigma}_{p,ij} &= -\frac{\alpha_p \rho_p}{\tau_{gp}^F} (2 \delta \tilde{\sigma}_{p,ij}) \\
&\quad - \alpha_p \rho_p \left( \delta \tilde{\sigma}_{p,im} \frac{\partial \tilde{u}_{p,j}}{\partial x_m} + \delta \tilde{\sigma}_{p,jm} \frac{\partial \tilde{u}_{p,i}}{\partial x_m} \right) \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial x_m} \alpha_p \rho_p \left\langle \delta u_{p,i} \delta u_{p,j} \delta u_{p,m} \right\rangle_p
\end{aligned} \tag{B-28}$$

Cette équation nous permet alors d'établir l'équation de transport de l'énergie cinétique fluctuante des particules  $\delta \theta_p$  :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \alpha_p \rho_p \delta \theta_p + \frac{\partial}{\partial x_j} \alpha_p \rho_p \tilde{u}_{p,j} \delta \theta_p &= -\frac{\alpha_p \rho_p}{\tau_{gp}^F} 2 \delta \theta_p \\
&\quad - \alpha_p \rho_p \left\langle \delta u_{p,i} \delta u_{p,j} \right\rangle_p \frac{\partial \tilde{u}_{p,i}}{\partial x_j} \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial x_m} \alpha_p \rho_p \frac{\left\langle \delta u_{p,i} \delta u_{p,i} \delta u_{p,j} \right\rangle_p}{2}
\end{aligned} \tag{B-29}$$



## 2.6 Equation de transport de l'énergie particulaire totale

L'énergie particulaire totale est définie par :

$$E_p = e_p + E_c + \delta\theta_p \quad (\text{B- 30})$$

L'équation de transport associée correspond donc à la somme des équations B-18, B-21 et B29, soit l'équation donnée au chapitre 3.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \alpha_p \rho_p E_p + \frac{\partial}{\partial x_j} \alpha_p \rho_p \tilde{u}_{p,j} E_p = & - \frac{\partial}{\partial x_j} \alpha_p \rho_p \left\langle \frac{\delta u_{p,i} \delta u_{p,i} \delta u_{p,j}}{2} \right\rangle_p \\ & - \frac{\partial}{\partial x_j} \alpha_p \rho_p \tilde{u}_{p,i} \langle \delta u_{p,i} \delta u_{p,j} \rangle_p \\ & - \alpha_p \rho_p \tilde{u}_{p,i} \frac{\tilde{u}_{p,i} - \hat{u}_{g@p,i}}{\tau_{gp}^F} - \frac{\alpha_p \rho_p}{\tau_{gp}^F} 2\delta\theta_p \\ & - \alpha_p \rho_p \frac{(T_p - T_{gaz})}{\tau_H} \end{aligned} \quad (\text{B- 31})$$

On peut remarquer que le terme  $\alpha_p \rho_p \langle \delta u_{p,i} \delta u_{p,j} \rangle_p \frac{\partial \tilde{u}_{p,i}}{\partial x_j}$  apparaît dans les équations de transport des énergies cinétiques moyenne (B-22) et fluctuante (B-29) avec des signes opposés. Il disparaît donc de l'équation d'énergie particulaire totale. Il s'agit d'un terme de couplage qui représente un échange d'énergie entre les mouvements moyen et fluctuant.

# Annexe C

## Equations autour du tenseur des contraintes cinétiques particulière

### 1. Modélisation de la partie déviatorique du tenseur des contraintes cinétiques

Le tenseur des contraintes cinétiques est décomposé en parties sphérique et déviatorique telles que :

$$\alpha_p \rho_p \delta \bar{\sigma}_{p,ij} = P_p \delta_{ij} + \alpha_p \rho_p \delta \bar{\tau}_{p,ij} \quad (\text{C-1})$$

L'hypothèse suivante est également effectuée :

$$\frac{d}{dt} \delta \bar{\tau}_{p,ij} = \frac{d}{dt} \left( \left\langle \delta u_{p,i} \delta u_{p,j} \right\rangle_p - (\gamma_p - 1) \delta \theta_p \delta_{ij} \right) = 0 \quad (\text{C-2})$$

Si l'on néglige le tenseur des corrélations triple, l'équation de transport du tenseur des contraintes cinétiques définie en annexe B devient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \alpha_p \rho_p \delta \bar{\sigma}_{p,ij} + \frac{\partial}{\partial x_m} \alpha_p \rho_p \tilde{u}_{p,m} \delta \bar{\sigma}_{p,ij} = & - \frac{\alpha_p \rho_p}{\tau_{gp}^F} (2 \delta \bar{\sigma}_{p,ij}) \\ & - \alpha_p \rho_p \left( \delta \bar{\sigma}_{p,im} \frac{\partial \tilde{u}_{p,j}}{\partial x_m} + \delta \bar{\sigma}_{p,jm} \frac{\partial \tilde{u}_{p,i}}{\partial x_m} \right) \end{aligned} \quad (\text{C-3})$$

De même, l'équation de transport de l'énergie cinétique fluctuante s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \alpha_p \rho_p \delta \theta_p + \frac{\partial}{\partial x_j} \alpha_p \rho_p \tilde{u}_{p,j} \delta \theta_p = & - \frac{\alpha_p \rho_p}{\tau_{gp}^F} 2 \delta \theta_p \\ & - \alpha_p \rho_p \left\langle \delta u_{p,i} \delta u_{p,j} \right\rangle_p \frac{\partial \tilde{u}_{p,i}}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (\text{C-4})$$

L'équation C-2 devient donc :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \delta \bar{\tau}_{p,ij} = & - \frac{\alpha_p \rho_p}{\tau_{gp}^F} (2 \delta \bar{\tau}_{p,ij}) \\ & - \alpha_p \rho_p \left( \delta \bar{\tau}_{p,im} \frac{\partial \tilde{u}_{p,j}}{\partial x_m} + \delta \bar{\tau}_{p,jm} \frac{\partial \tilde{u}_{p,i}}{\partial x_m} \right) \\ & - (\gamma_p - 1) \left( - \frac{\alpha_p \rho_p}{\tau_{gp}^F} 2 \delta \theta_p - \alpha_p \rho_p \delta \bar{\sigma}_{p,mn} \frac{\partial \tilde{u}_{p,m}}{\partial x_n} \right) \delta_{ij} \end{aligned} \quad (\text{C-5})$$

On en déduit :

$$\frac{\alpha_p \rho_p}{\tau_{gp}^F} 2\delta\tilde{\tau}_{p,ij} = -\alpha_p \rho_p \left( \delta\tilde{\sigma}_{p,im} \frac{\partial\tilde{u}_{p,j}}{\partial x_m} + \delta\tilde{\sigma}_{p,jm} \frac{\partial\tilde{u}_{p,i}}{\partial x_m} - (\gamma_p - 1)\delta\tilde{\sigma}_{p,mm} \frac{\partial\tilde{u}_{p,m}}{\partial x_n} \delta_{ij} \right) \quad (C-6)$$

En posant  $P_{ij} = -\delta\tilde{\sigma}_{p,im} \frac{\partial\tilde{u}_{p,j}}{\partial x_m}$  et donc  $P_{mm} = -\delta\tilde{\sigma}_{p,mm} \frac{\partial\tilde{u}_{p,m}}{\partial x_n}$ , cette équation devient :

$$\frac{\alpha_p \rho_p}{\tau_{gp}^F} 2\delta\tilde{\tau}_{p,ij} = \alpha_p \rho_p (P_{ij} + P_{ji} - (\gamma_p - 1)P_{mm} \delta_{ij}) \Leftrightarrow \delta\tilde{\tau}_{p,ij} = \frac{\tau_{gp}^F}{2} (P_{ij} + P_{ji} - (\gamma_p - 1)P_{mm} \delta_{ij}) \quad (C-7)$$

On écrit alors  $P_{ij}$  de la façon suivante :

$$\begin{aligned} P_{ij} &= -\left(\delta\tilde{\tau}_{p,im} + (\gamma_p - 1)\delta\theta_p \delta_{im}\right) \frac{\partial\tilde{u}_{p,j}}{\partial x_m} \\ &\approx -\left((\gamma_p - 1)\delta\theta_p \delta_{im}\right) \frac{\partial\tilde{u}_{p,j}}{\partial x_m} \end{aligned} \quad (C-8)$$

L'expression C-8 est obtenue en supposant que la partie anisotrope reste petite devant la partie isotrope, *ie* :

$$\left| \frac{\delta\tilde{\tau}_{p,ij} - (\gamma_p - 1)\delta\theta_p \delta_{ij}}{(\gamma_p - 1)\delta\theta_p \delta_{ij}} \right| \ll 1 \quad (C-9)$$

Nous obtenons finalement :

$$\delta\tilde{\tau}_{p,ij} = -\frac{\tau_{gp}^F}{2} (\gamma_p - 1)\delta\theta_p \left( \delta_{im} \frac{\partial\tilde{u}_{p,j}}{\partial x_m} + \delta_{jm} \frac{\partial\tilde{u}_{p,i}}{\partial x_m} - (\gamma_p - 1)\delta_{ij} \delta_{mn} \frac{\partial\tilde{u}_{p,m}}{\partial x_n} \right) \quad (C-10)$$

D'où l'expression du tenseur des contraintes cinétiques :

$$\langle \delta u_{p,i} \delta u_{p,j} \rangle_p = (\gamma_p - 1)\delta\theta_p \delta_{ij} - \frac{\tau_{gp}^F}{2} (\gamma_p - 1)\delta\theta_p \left( \frac{\partial\tilde{u}_{p,j}}{\partial x_i} + \frac{\partial\tilde{u}_{p,i}}{\partial x_j} - (\gamma_p - 1)\delta_{ij} \frac{\partial\tilde{u}_{p,m}}{\partial x_m} \right) \quad (C-11)$$

Par analogie avec l'hypothèse de Boussinesq utilisée en turbulence monophasique, nous définissons une viscosité particulaire :

$$\nu_p = \frac{\tau_{gp}^F}{2} (\gamma_p - 1)\delta\theta_p \quad (C-12)$$

## 2. Le modèle diphasique à pression particulaire complet

On pose  $\mu_p = \alpha_p \rho_p \nu_p$  et on rappelle que la pression particulaire est définie par :

$$P_p = (\gamma_p - 1)\alpha_p \rho_p \delta\theta_p \quad (C-13)$$

L'équation de transport de l'énergie cinétique fluctuante s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \alpha_p \rho_p \delta \theta_p + \frac{\partial}{\partial x_j} \alpha_p \rho_p \tilde{u}_{p,j} \delta \theta_p = -\frac{\alpha_p \rho_p}{\tau_{gp}^F} 2 \delta \theta_p - P_p \frac{\partial \tilde{u}_{p,m}}{\partial x_m} + \mu_p S_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_{p,i}}{\partial x_j} \quad (\text{C-14})$$

Nous avons vu que le terme  $-P_p \frac{\partial \tilde{u}_{p,m}}{\partial x_m}$  qui figure en terme source dans cette équation de transport est un terme convectif. Or, l'équation C-14 peut s'écrire, à l'aide de l'équation de conservation de la masse :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \alpha_p \rho_p \delta \theta_p + \frac{\partial}{\partial x_j} \alpha_p \rho_p \tilde{u}_{p,j} \delta \theta_p &= -\frac{\alpha_p \rho_p}{\tau_{gp}^F} 2 \delta \theta_p \\ &+ \mu_p S_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_{p,i}}{\partial x_j} \\ &+ (\gamma_p - 1) \delta \theta_p \left( \frac{\partial}{\partial t} \alpha_p \rho_p + \tilde{u}_{p,j} \frac{\partial}{\partial x_j} \alpha_p \rho_p \right) \end{aligned} \quad (\text{C-15})$$

On multiplie cette équation par  $(\alpha_p \rho_p)^{-(\gamma_p+1)}$ , ce qui donne :

$$\begin{aligned} &(\alpha_p \rho_p)^{-(\gamma_p-1)} \left( \frac{\partial}{\partial t} \delta \theta_p + \tilde{u}_{p,j} \frac{\partial}{\partial x_j} \delta \theta_p \right) \\ &+ (\gamma_p - 1) (\alpha_p \rho_p)^{-(\gamma_p+1)} \delta \theta_p \left( \frac{\partial}{\partial t} \alpha_p \rho_p + \tilde{u}_{p,j} \frac{\partial}{\partial x_j} \alpha_p \rho_p \right) \\ &= -\frac{(\alpha_p \rho_p)^{-(\gamma_p-1)}}{\tau_{gp}^F} 2 \delta \theta_p + \frac{\tau_{gp}^F}{2} \delta \theta_p (\gamma_p - 1) S^2 (\alpha_p \rho_p)^{-(\gamma_p-1)} \end{aligned} \quad (\text{C-16})$$

Notons que  $S_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_{p,i}}{\partial x_j} = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij} = S^2$ .

En remarquant que  $\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_p \rho_p)^{-(\gamma_p-1)} = -(\gamma_p - 1) (\alpha_p \rho_p)^{-(\gamma_p+1)} \frac{\partial}{\partial t} \alpha_p \rho_p$ , il vient :

$$\begin{aligned} &(\alpha_p \rho_p)^{-(\gamma_p-1)} \left( \frac{\partial}{\partial t} \delta \theta_p + \tilde{u}_{p,j} \frac{\partial}{\partial x_j} \delta \theta_p \right) \\ &+ \delta \theta_p \left( \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_p \rho_p)^{-(\gamma_p-1)} + \tilde{u}_{p,j} \frac{\partial}{\partial x_j} (\alpha_p \rho_p)^{-(\gamma_p-1)} \right) \\ &= -\frac{(\alpha_p \rho_p)^{-(\gamma_p-1)}}{\tau_{gp}^F} 2 \delta \theta_p + \frac{\tau_{gp}^F}{2} \delta \theta_p (\gamma_p - 1) S^2 (\alpha_p \rho_p)^{-(\gamma_p-1)} \end{aligned} \quad (\text{C-17})$$

On multiplie à présent cette équation par  $(\alpha_p \rho_p)$  et on utilise le bilan de masse pour établir la forme conservative suivante :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} \alpha_p \rho_p (\alpha_p \rho_p)^{-(\gamma_p-1)} \delta \theta_p + \frac{\partial}{\partial x_j} \tilde{u}_{p,j} \alpha_p \rho_p (\alpha_p \rho_p)^{-(\gamma_p-1)} \delta \theta_p \\ &= -\alpha_p \rho_p \frac{2}{\tau_{gp}^F} (\alpha_p \rho_p)^{-(\gamma_p-1)} \delta \theta_p + \frac{\tau_{gp}^F}{2} (\gamma_p - 1) S^2 \alpha_p \rho_p (\alpha_p \rho_p)^{-(\gamma_p-1)} \delta \theta_p \end{aligned} \quad (\text{C-18})$$

Nous effectuons alors le changement de variable suivant :

$$\lambda_p = (\alpha_p \rho_p)^{1-\gamma_p} \delta \theta_p \quad (\text{C- 19})$$

L'équation obtenue est donc :

$$\frac{\partial}{\partial t} \alpha_p \rho_p \lambda_p + \frac{\partial}{\partial x_j} \tilde{u}_{p,j} \alpha_p \rho_p \lambda_p = \left( -\frac{2}{\tau_{gp}^F} + (\gamma_p - 1) \frac{\tau_{gp}^F}{2} S^2 \right) \alpha_p \rho_p \lambda_p \quad (\text{C- 20})$$

D'où l'expression du modèle à pression particulaire complet.

### 3. Calcul du tenseur des contraintes cinétiques en lagrangien

Au chapitre 2, nous avons vu que, par définition, les composantes du tenseur des contraintes cinétiques s'écrivent :

$$\langle u'_{pk} u'_{pl} \rangle_{\Omega} = \frac{\sum_j \dot{q}_j \sum_i \delta t_{ij} (u'_{k,j,i}(\Omega) u'_{l,j,i}(\Omega))}{\sum_j \dot{q}_j \Delta T_{j\Omega}} \quad (\text{C- 21})$$

Et par définition des valeurs fluctuantes, il vient :

$$\langle u'_{pk} u'_{pl} \rangle_{\Omega} = \frac{\sum_j \dot{q}_j \sum_i \delta t_{ij} (\bar{u}_{k,j,i}(\Omega) - \bar{u}_k(\Omega)) (\bar{u}_{l,j,i}(\Omega) - \bar{u}_l(\Omega))}{\sum_j \dot{q}_j \Delta T_{j\Omega}} \quad (\text{C- 22})$$

Ce qui peut s'écrire sous forme développée, en omettant la dépendance à la cellule  $\Omega$  :

$$\langle u'_{pk} u'_{pl} \rangle_{\Omega} = \frac{1}{\sum_j \dot{q}_j \Delta T_{j\Omega}} \sum_j \dot{q}_j \sum_i \delta t_{ij} (\bar{u}_{k,j,i} \bar{u}_{l,j,i} + \bar{u}_k \bar{u}_l - \bar{u}_k \bar{u}_{l,j,i} - \bar{u}_l \bar{u}_{k,j,i}) \quad (\text{C- 23})$$

Les valeurs moyennes ne dépendant ni du pas de temps  $i$ , ni de la trajectoire  $j$ , il vient :

$$\begin{aligned} \langle u'_{pk} u'_{pl} \rangle_{\Omega} &= \frac{\sum_j \dot{q}_j \sum_i \delta t_{ij} (\bar{u}_{k,j,i} \bar{u}_{l,j,i})}{\sum_j \dot{q}_j \Delta T_{j\Omega}} + \bar{u}_k \bar{u}_l \frac{\sum_j \dot{q}_j \sum_i \delta t_{ij}}{\sum_j \dot{q}_j \Delta T_{j\Omega}} \\ &\quad - \bar{u}_k \frac{\sum_j \dot{q}_j \sum_i \delta t_{ij} (\bar{u}_{l,j,i})}{\sum_j \dot{q}_j \Delta T_{j\Omega}} - \bar{u}_l \frac{\sum_j \dot{q}_j \sum_i \delta t_{ij} (\bar{u}_{k,j,i})}{\sum_j \dot{q}_j \Delta T_{j\Omega}} \end{aligned} \quad (\text{C- 24})$$

Enfin, par définition des vitesses moyennes dans un élément  $\Omega$ , nous obtenons :

$$\langle u'_{pk} u'_{pl} \rangle_{\Omega} = \frac{\sum_j \dot{q}_j \sum_i \delta t_{ij} (\bar{u}_{k,j,i} \bar{u}_{l,j,i})}{\sum_j \dot{q}_j \Delta T_{j\Omega}} + \bar{u}_k \bar{u}_l - \bar{u}_k \bar{u}_l - \bar{u}_l \bar{u}_k \quad (\text{C- 25})$$

Ce qui revient finalement à l'expression suivante :

$$\langle u'_{pk} u'_{pl} \rangle_{\Omega} = \frac{\sum_j \dot{q}_j \sum_i \delta_{ij} (\bar{u}_{k,j,i}(\Omega) \bar{u}_{l,j,i}(\Omega))}{\sum_j \dot{q}_j \Delta T_{j\Omega}} - \bar{u}_k(\Omega) \bar{u}_l(\Omega) \quad (\text{C- 26})$$

# Annexe D

## Résultats des simulations SPPM sur les configurations TEP et LP6

Dans cette annexe, nous présentons dans un premier temps les résultats des simulations du TEP avec le SPPM, pour différents diamètres (de 5 à 100 $\mu\text{m}$ ) et différentes valeurs du paramètre  $\lambda$ . Ces résultats sont comparés à la simulation lagrangienne correspondant au champ aérodynamique obtenu par la simulation eulérienne.

Ensuite, les résultats des calculs LP6 sont donnés, pour des particules de 5, 20 et 100 $\mu\text{m}$ . Il n'existe pas de résultats lagrangiens associés, nous comparons donc ces résultats à ceux obtenus par le modèle de base de CPS. Nous nous intéressons en particulier au profil de la fraction volumique dans le segment S2 du moteur. Le signal de pression est également tracé en fonction du temps, pour les modèles de base et SPPM ( $\lambda=10$ ). Cela permet d'appréhender l'influence du terme de pression particulaire sur le niveau de la pression moyenne et sur les amplitudes des oscillations.

### 1. Simulations du TEP

#### 1.1 Particules de 100 $\mu\text{m}$

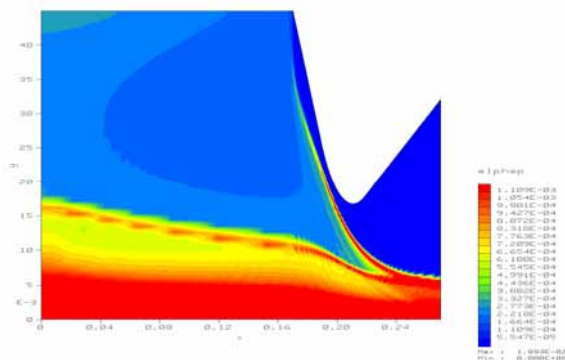


Figure D- 1 : Calcul lagrangien associé au calcul SPPM avec lambda=100.

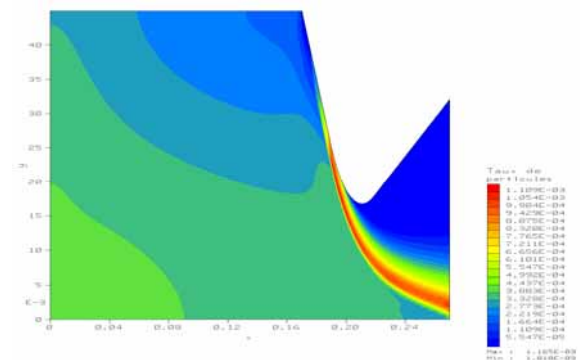


Figure D- 2 : Calcul SPPM, lambda=100.

## 1.2 Particules de 30µm

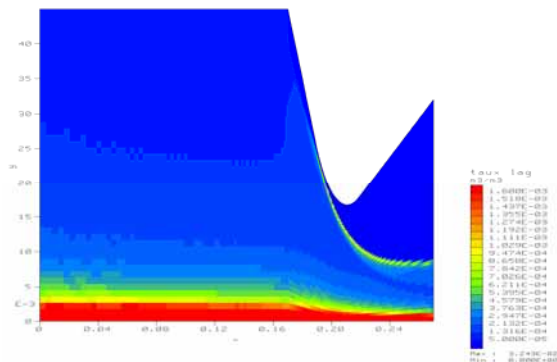


Figure D- 3 : Calcul lagrangien associé au calcul Euler de base (modèle sans pression particulaire).

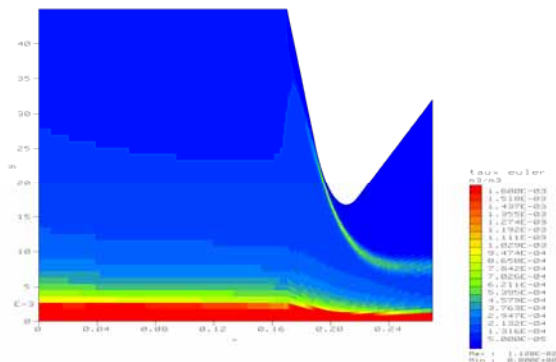


Figure D- 4 : Calcul Euler (CPS).

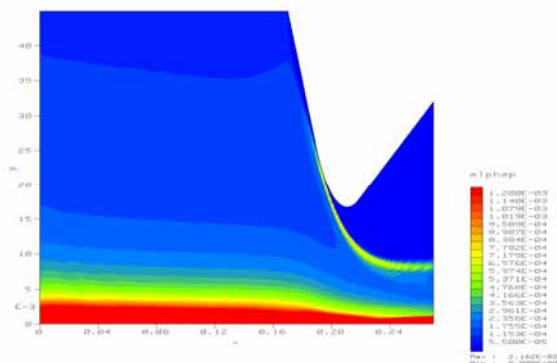


Figure D- 5 : Calcul lagrangien associé au calcul SPPM (lambda=1).

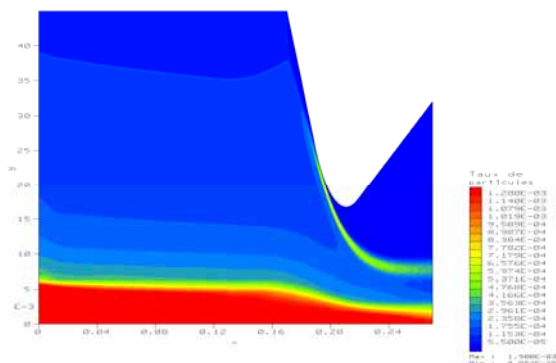


Figure D- 6 : Calcul SPPM (lambda=1).

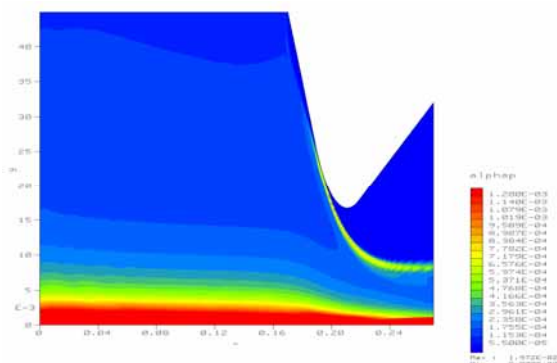


Figure D- 7 : Calcul lagrangien associé au calcul SPPM (lambda=10).

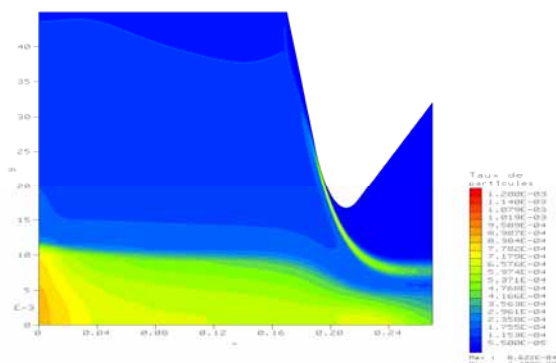


Figure D- 8 : Calcul SPPM (lambda=10).



### 1.3 Particules de 5 $\mu$ m

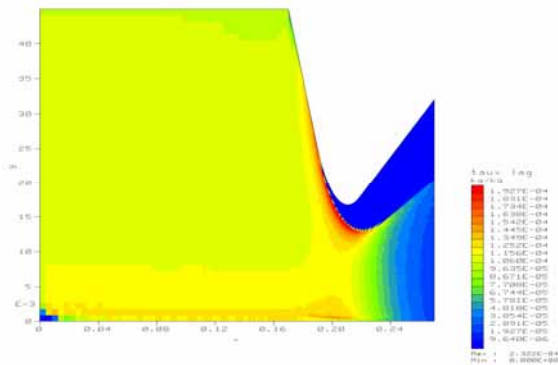


Figure D- 9 : Calcul lagrangien associé au calcul Euler de base (modèle sans pression particulaire).

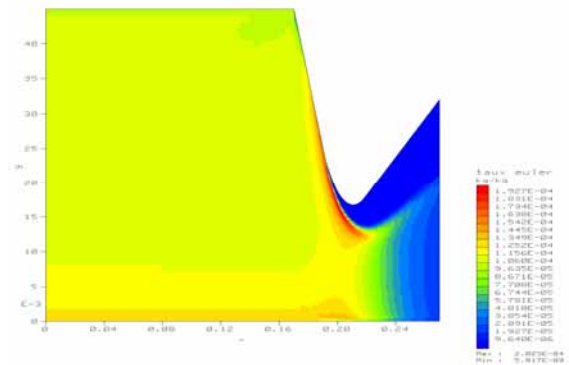


Figure D- 10 : Calcul Euler (CPS)

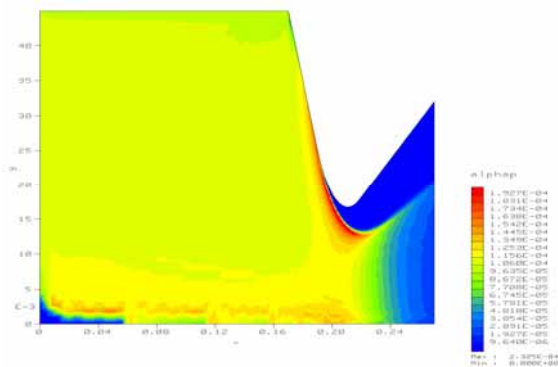


Figure D- 11 : Calcul lagrangien associé au calcul SPPM (lambda=1).

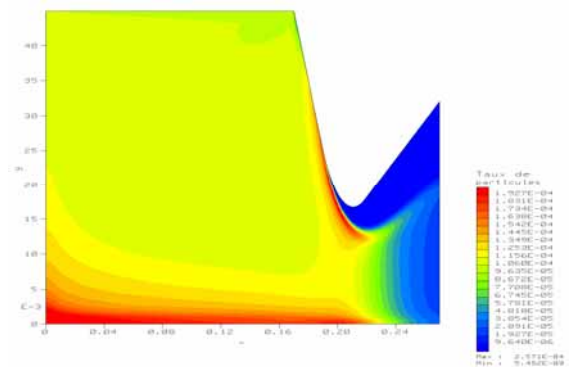


Figure D- 12 : Calcul SPPM (lambda=1).

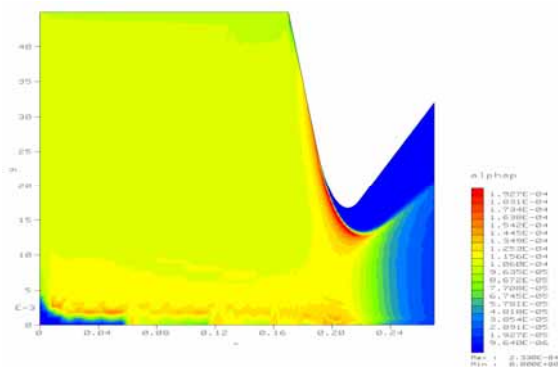


Figure D- 13 : Calcul lagrangien associé au calcul SPPM (lambda=10).

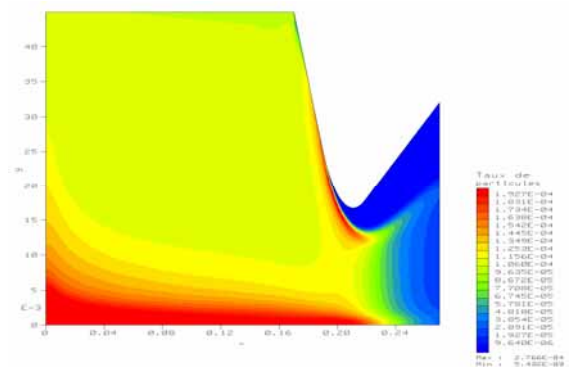


Figure D- 14 : Calcul SPPM (lambda=10).

## 2. Simulations du LP6

### 2.1 Particules de 5µm

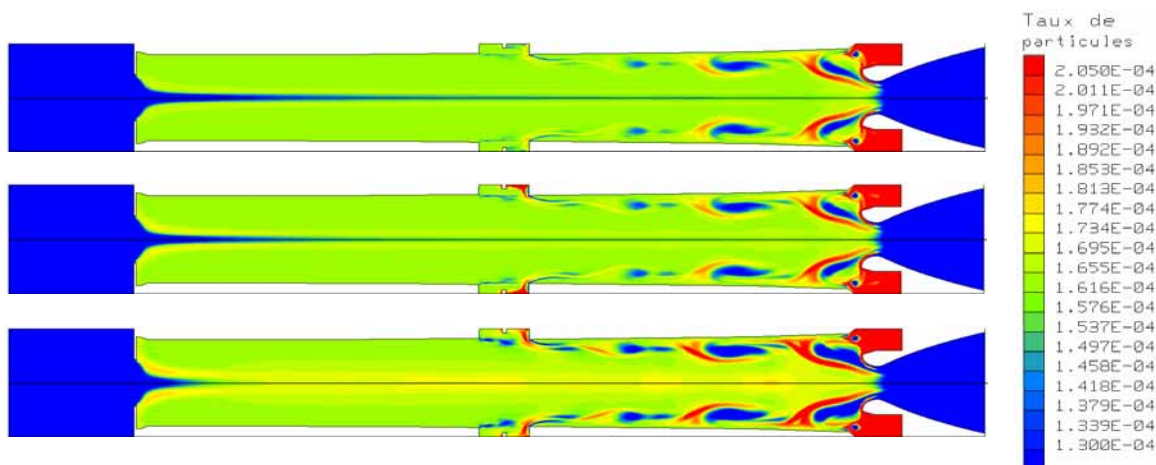


Figure D- 15 : Fraction volumique solide, de haut en bas : calcul sans pression particulaire (taux max= $3,34 \cdot 10^{-4}$ ), calcul SPPM  $\lambda=0,1$  (taux max= $5,33 \cdot 10^{-4}$ ), calcul SPPM  $\lambda=10$  (taux max= $5,34 \cdot 10^{-4}$ ).

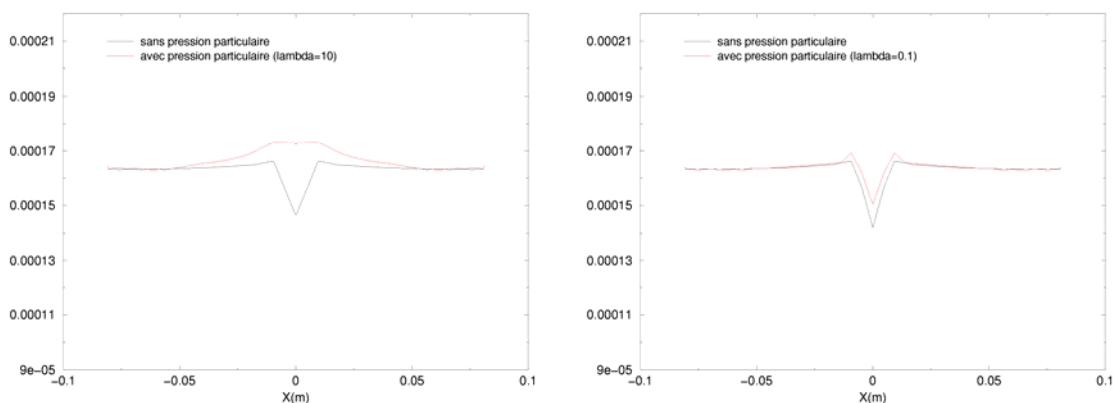


Figure D- 16 : Profil de concentration de particules dans le segment S2 du LP6, comparaison des résultats de simulations Euler (sans pression particulaire) et SPPM ( $\lambda=10$  à gauche,  $\lambda=0,1$  à droite).

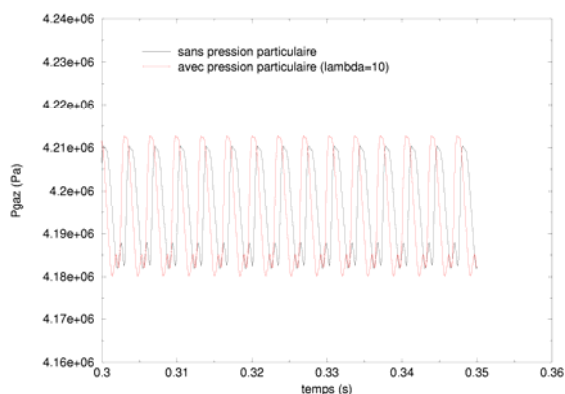


Figure D- 17 : Signal de pression au fond arrière, en noir : sans pression particulaire ; en rouge : SPPM ( $\lambda=10$ ).

## 2.2 Particules de 20 $\mu\text{m}$

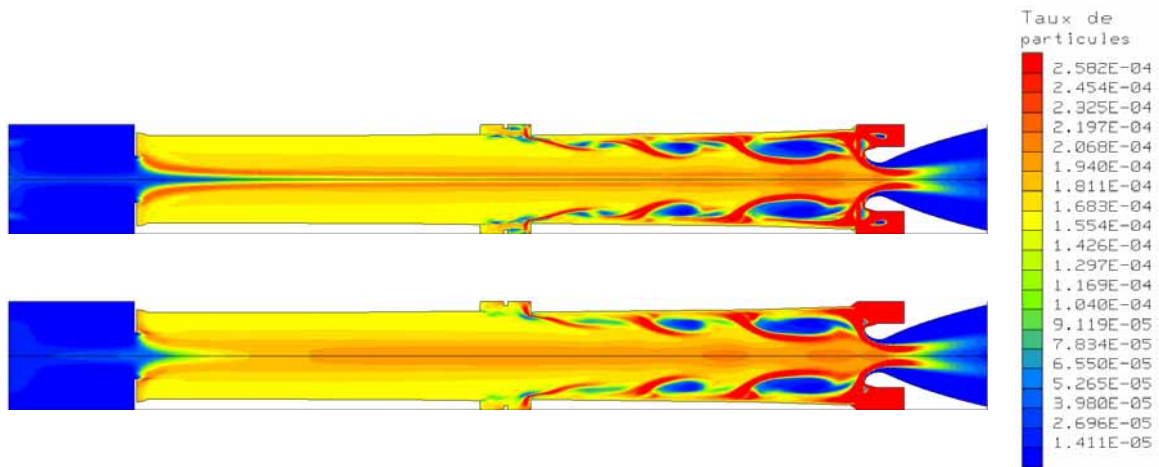


Figure D- 18 : Fraction volumique solide, LP6, particules de 20 $\mu\text{m}$  ; en haut : calcul sans pression particulaire (taux max= $1,33.10^{-2}$ ) ; en bas : calcul SPPM lambda=10 (taux max= $2,49.10^{-3}$ ).

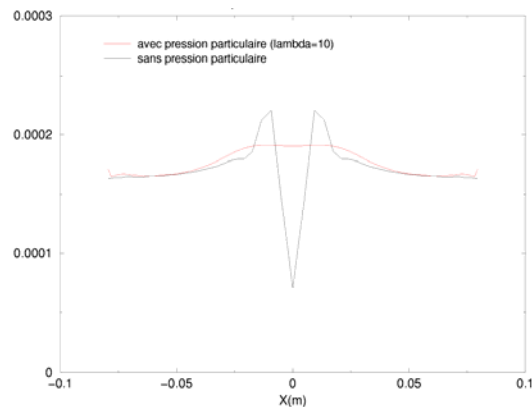


Figure D- 19 : Profil de concentration de particules dans le segment S2 du LP6, comparaison des résultats de simulations Euler (sans pression particulaire) et SPPM (lambda=10).

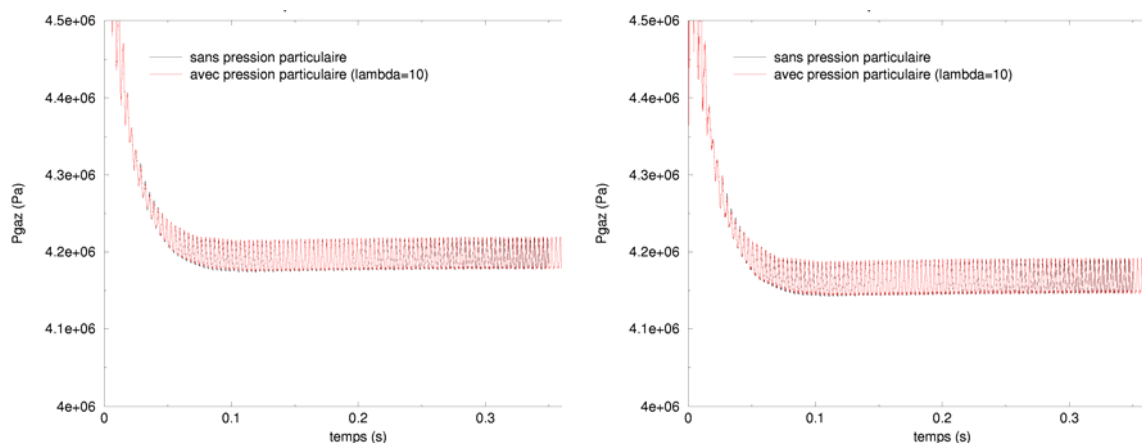


Figure D- 20 : Signal de pression aux fonds avant (gauche) et arrière (droite), en noir : sans pression particulaire ; en rouge : SPPM (lambda=10).

### 2.3 Particules de 100 $\mu\text{m}$

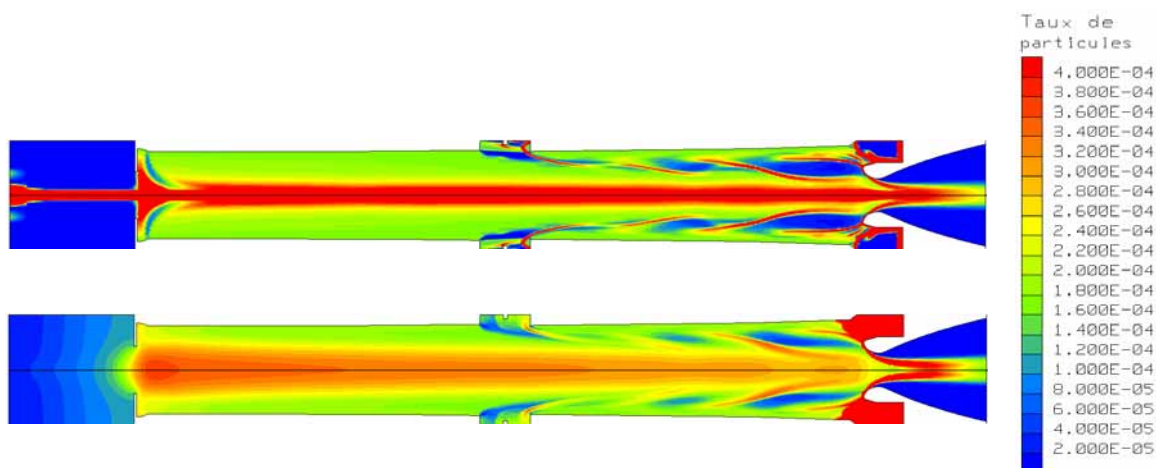


Figure D- 21 : Fraction volumique solide, LP6, particules de 100 $\mu\text{m}$  ; en haut : calcul sans pression particulaire (taux max=1,48) ; en bas : calcul SPPM lambda=10 (taux max=5,90.10<sup>-3</sup>).

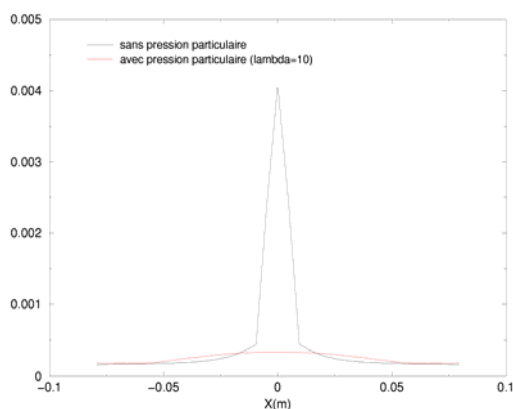


Figure D- 22 : Profil de concentration de particules dans le segment S2 du LP6, comparaison des résultats de simulations Euler (sans pression particulaire) et SPPM (lambda=10).

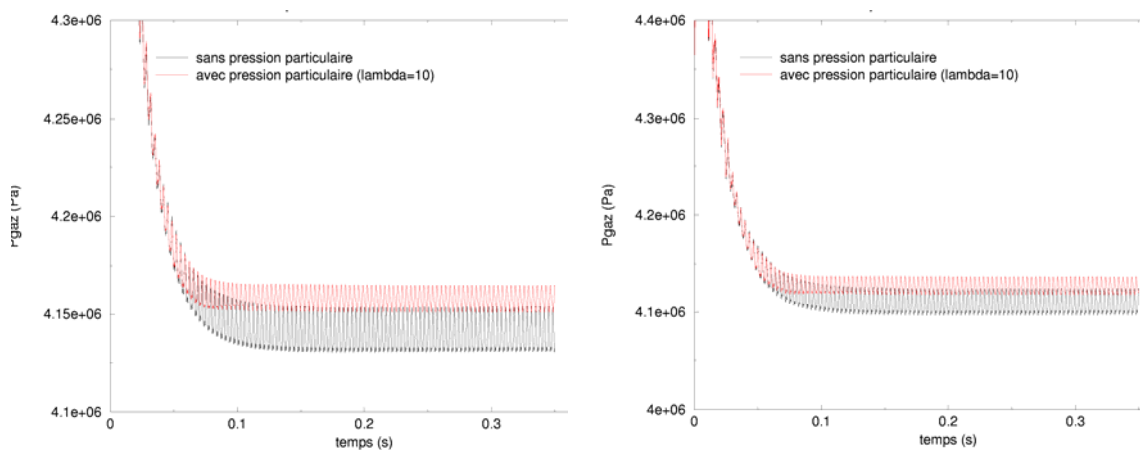


Figure D- 23 : Signal de pression aux fonds avant (gauche) et arrière (droite), en noir : sans pression particulaire ; en rouge : SPPM (lambda=10).

# Bibliographie

## A

ABRAHAMSON J., 1975, Collision rates of small particles in a vigorously turbulent fluid, *Chemical Engineering Science* Vol. 30, pp. 1371-1379.

ACHIM P., BERLEMONT A., 1998, Comportement dispersif des gouttes d'alumine dans les MPS : prise en compte des interactions particulières, *3<sup>ème</sup> colloque R&T ENSMA/CNES/ONERA sur les écoulements internes en propulsion solide*, 25-27 mars 1998, Poitiers, France.

ACHIM P., 1999, Simulation de collisions, coalescence et rupture de gouttes par une approche lagrangienne : application aux moteurs à propergol solide, *Thèse de doctorat*, Université de Rouen.

ANTHOINE J., 2000, Experimental and numerical study of aeroacoustic phenomena in large solid propellant boosters, with application to the Ariane 5 solid rocket motor, *Thèse de Doctorat*, Université Libre de Bruxelles.

ANTHOINE J., BUCHLIN J.-M., GUERY J.-F., 2000, Experimental and numerical investigations of nozzle geometry effect on the instabilities in solid propellant boosters, *36<sup>th</sup> AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit*, papier N°2000-3560.

AUPOIX B., 2004, From mixing length to Reynolds stress models, Introduction to turbulence modeling, *Lecture Series 2004-06, von Karman Institute for Fluid dynamics*, 22-26 mars 2004, Rhode Saint Genèse, Belgique.

AVALON G., CASALIS G., GRIFFOND J., 1998, Flow instabilities and acoustic resonance of channels with wall injection, *34<sup>th</sup> AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit*, papier N°98-3218.

AVALON G., LAMBERT D., 2000, Montage VALDO : premiers essais de mise au point et de qualification, *Rapport technique ONERA RF 5/00064 DEFA*.

AVALON G., UGURTAS B., GRISCH F., BRESSON A., 2000, Numerical computations and visualization tests of the flow inside a cold gas simulation with characterization of a parietal vortex-shedding, *36<sup>th</sup> AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit*, papier N°2000-3387.

## B

BAER M. S., NUNZIATO J. W., 1986, A two-phase mixture theory for the deflagration to detonation (DDT) transition in reactive granular materials, *Int. J. Multiphase Flow*, Vol. 12, pp. 861-889.

BALLEREAU S., GODFROY F., GUERY J.-F., RIBEREAU D., 2003, Assessment on analysis and prediction method applied on thrust oscillations of Ariane 5 solid rocket motor, *39<sup>th</sup> AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit*, papier N°2003-4675.

BALLEREAU S., BALLION D., GODFROY F., ORLANDI O., 2005, Note de synthèse des simulations échelle 1 de l'impact d'une PTFS3 3D sur les niveaux ODP 3<sup>ème</sup> bouffée, *Rapport technique SME, N°34/2005/SME/DPS/CEP*.

BERLEMONT A., DESJONQUIERES P., GOUESBET G., 1990, Particle Lagrangian simulation in turbulent flows, *Int. J. Multiphase Flow*, Vol. 16, pp. 19-34.

BERTHON C., COQUEL F., HERARD J.-M., UHLMANN M., 2002, An approximate solution of the Riemann problem for a realisable second-moment turbulent closure, *Shock Waves*, Vol. 11, pp. 245-269.

BIAGIONI M., AUSTRUY H., 1996, Propellant and process for Ariane 5 boosters, *5<sup>th</sup> Int. Symp. Propulsion in Space Transportation*, 22-24 mai 1996, Paris, France.

---

BIRD R.B., STEWART W.E., LIGHTFOOT E.N., 1960, Transport Phenomena, Wiley International Edition.

BOIVIN M., SIMONIN O., SQUIRES K.D., 1998, Direct numerical simulation of turbulence modulation by particles in isotropic simulation, *J. Fluid Mech.* Vol. 375, pp. 235-263.

BOIVIN M., SIMONIN O., SQUIRES K.D., 2000, On the prediction of gas-solid flows with two-way coupling using large eddy simulation, *Phys. Fluids* Vol. 12, N°8, pp. 2080-2090.

BOUSSINESQ M.J., 1877, Essai sur la théorie des eaux courantes, *Mémoires présentés par divers savants étrangers à l'Académie des Sciences*, Gauthier-Villars, Paris.

BRIAND R., 2003, Note de synthèse des calculs VSP/combustion, *Rapport technique SME*, N°593/2003/SME/DPS/CER.

BROWN R.S., DUNLAP R., YOUNG S.W., WAUGH R.C., 1981, Vortex shedding as a source of acoustic energy in segmented solid rockets, *J. of Spacecraft and Rocket*, Vol. 18, N°4, pp. 312-319.

BURGER M., SCHMEHL R., SCHAEFER O., KOCH R., WITTIG S., 2003, Numerical study of Strouhal instabilities in two-phase flows, *9<sup>th</sup> International Conference on Liquid Atomization and Spray Systems*, ICLASS 2003, Sorrento, Italie, 13-18 juillet 2003.

## C

CAGNON B., CHASTENET J.-C., GUERY J.-F., GODFROY F., 1997, Programme Oscillations de Poussée 1996, Base de données numérique, *Rapport technique SME*, 5823/97/SNPE/DFP/CER.

CARGO P., GALLICE G., 1997, Roe matrices for ideal MHD and systematic construction of Roe matrices for systems of conservation laws, *Journal of Computational Physics*, Vol. 136, pp. 446-466.

CARPENTIER R., 1999, Le schéma  $\beta$ - $\gamma$  en axisymétrie, *Rapport de recherche INRIA* N°3676.

CASALIS G., AVALON G., PINEAU J.-C., 1998, Spatial instability of planar channel flow with fluid injection through porous walls, *Phys. Fluids*, Vol. 10, N°10, pp. 25-58.

CASALIS G., GRIFFOND J., AVALON G., UGURTAS B., VUILLOT F., 2000, Instability and resonance in a system simulating the solid propellant motors behaviour, *2<sup>nd</sup> European Conference on Launcher Technology*, Space Solid Propulsion, 21-24 novembre 2000, Rome, Italie.

CESCO N., LAVERGNE G., ESTIVALEZES J.L.; 1996, Simulation of the two-phase flow in solid rocket motors, *32<sup>nd</sup> ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit*, papier N°96-2640.

CESCO N., 1997, Etude et modélisation de l'écoulement diphasique à l'intérieur des propulseurs à poudre, *Thèse de Doctorat*, Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace.

CHAOUAT B., 1994, Modélisation et simulation des écoulements turbulents dans les propulseurs à propergol solide, *Thèse de Doctorat*, Université de Paris VI.

CHAOUAT B., SCHIESTEL R., 2000, Turbulence stress transport modelling for flow prediction in solid rocket motors, *2<sup>nd</sup> European Conference on Launcher Technology*, Space Solid Propulsion, 21-24 novembre 2000, Rome, Italie.

CHAPMAN S., COWLING T.G., 1939, The mathematical theory of non-uniform gases, Cambridge University Press.

CHARGY D., DUBOIS F., VILA J.-P., 1992-a, Méthodes numériques pour le calcul d'écoulements compressibles, Applications industrielles, *Cours Institut pour la Promotion des Sciences de l'Ingénieur*, 15-17 septembre 1992, Paris, France.

CHARGY D., ABGRALL R., FEZOU L., LARROUTUROU B., 1992-b, Quelques schémas conservatifs décentrés pour les mélanges de gaz parfaits, *La Recherche Aéronautique*, N°2, pp. 61-80.

CHASSAING P., 2000, Turbulence en mécanique des fluides, Cepaduès éditions.

- 
- CLAVIN P., 1996, Etude analytique de l'amortissement des ondes acoustiques longitudinales dans une chambre avec injection pariétale, *Programme ASSM 5 Axe Stabilité de Fonctionnement, Rapport IRPHE*.
- COAKLEY T.J., 1983, Turbulence modelling methods for the compressible Navier-Stokes equations, *16<sup>th</sup> AIAA Fluid and PlasmaDynamics Conference*, papier N°83-1963.
- COHEN N.S., 1983, A pocket model for aluminum agglomeration in composite propellants, *AIAA J.*, Vol. 21, N°5, pp. 720-725.
- COLELLA P., WOODWARD P.R., 1984, The piecewise parabolic method (PPM) for gas dynamical simulations, *Journal of Computational Physics*, Vol. 54, pp. 357-372.
- COMBE L., 1997, Simulation numérique d'écoulements gaz-particules pour maillage non structuré, *Thèse de doctorat*, Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse.
- COMBE L., HERARD J.-M., 1997, Un schéma Volumes-Finis pour la simulation d'un modèle bi-fluide d'écoulements diphasiques compressibles gaz-solide, *Revue Européenne des Eléments Finis*, Vol. 5, N°2, pp. 197-231.
- COMBE L., HERARD J.-M., 1999, Finite volume algorithm to compute dense compressible gas-solid flows, *AIAA Journal*, Vol. 37, N°3, pp. 337-345.
- COUTON D., PLOURDE F., DOAN KIM S., 1996, Cold gas simulation of a solid propellant rocket motor, *AIAA Journal*, Vol.34, N°12, pp. 1462-1464.
- CROWE C.T., 1991, The state-of-the-art in the development of numerical models for dispersed phase flows, *Proc. Int. Conference on Multiphase Flows*, Vol. 3, pp. 49-60.
- CULICK F.E.C., 1966-a, Acoustic oscillations in solid propellant rocket chambers, *Astronautica Acta*, Vol. 12, N°2, pp.113-125.
- CULICK F.E.C., 1966-b, Rotational axisymmetric mean flow and damping of acoustic waves in a solid propellant rocket, *AIAA Journal*, Vol. 4, N°8, pp. 1462-1464.
- CULICK F.E.C., 1975, Stability of three-dimensional motions in a combustion chamber, *Combust. Sci. and Tech.*, Vol. 10, pp. 109-124.
- CULICK F.E.C., MAGIAWALA K., 1979, Excitation of acoustic modes in a chamber by vortex shedding, *J. of Sound and Vibration*, Vol. 64, N°3, pp. 455-457.
- CULICK F.E.C., 1981, Combustion instability in solid rocket motors, CPIA Publication 290.
- D**
- DAI W., WOODWARD P.R., 1995, A simple Riemann solver and high-order Godunov schemes for hyperbolic systems of conservation laws, *Journal of Computational Physics*, Vol. 121, N°1, pp. 51-65.
- DALY B.J., HARLOW F.H., 1970, Transport equations in turbulence, *Phys. Fluids*, Vol. 13, pp. 2634-2649.
- DAVENAS A., 1993, Solid Rocket Propulsion Technology, Pergamon Press.
- DAVENAS A., 1995, Solid propellant environmental issues : a European perspective, *31<sup>st</sup> ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit*, papier N°95-3009.
- DAVIS S.F., 1988, Simplified second-order Godunov-type methods, *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, Vol. 9, pp. 104-117.
- DELHAYE J.M., 1974, Jump condition and entropy sources in two-phase systems. Local instant formulation, *Int. J. Multiphase Flow*, Vol. 1, pp. 395-409.

- 
- DELLA PIETA P., GODFROY F., 1998, Projet CPS, Dossier de modélisation, Flux convectifs, *Rapport technique SME* 7016/98/SNPE/DFP/CER-b.
- DELLA PIETA P., GODFROY F., GUERY J.-F., 2001, Couplage fluide/structure appliqué en propulsion solide, *XI<sup>ème</sup> Congrès Français de Mécanique*, 3-7 septembre 2001, Nancy.
- DESPRES B., DUBOIS F., 2005, Systèmes hyperboliques de lois de conservation ; application à la dynamique des gaz, Les Editions de l'Ecole Polytechnique.
- DING J., GIDASPOW D., 1990, A bubbling fluidization model using kinetic theory of granular flow, *AIChE J.*, Vol. 36, N°4, pp. 523-538.
- DORIATH G., D'ANDREA B., 1996, New solid propellants formulations and production processes, *5<sup>th</sup> Int. Symp. Propulsion in Space Transportation*, 22-24 mai 1996, Paris, France.
- DREW D.A., 1983, Continuum modelling of two-phase flows, in *Theory of Dispersed Multiphase Flow*, Edited by Meyer Richard E., Academic Press, pp. 173-190.
- DRUZHININ O., 1995, On the two-way interaction in two-dimensional particle laden flows: the accumulation of particles and flow modification, *J. Fluid Mechanics*, Vol. 297, pp. 49-76.
- DUBOIS F., 1990, Concavité de l'entropie thermostatique et convexité de l'entropie mathématique au sens de Lax, *La Recherche Aérospatiale*, N°3 (mai-juin), pp. 77-80.
- DUFOUR G., 2002, Un modèle multi-fluide eulérien pour la fragmentation de gouttes dans un brouillard, *Rapport de DEA*, Université Paul Sabatier Toulouse III, ONERA Centre de Toulouse, MAPLY Université Claude Bernard Lyon I.
- DUNLAP R., BROWN R.S., 1981, Exploratory experiments on acoustic oscillations driven by periodic vortex shedding, *AIAA J.*, Vol. 19, N°3.
- DUPAYS J., 1996, Contribution à l'étude du rôle de la phase condensée dans la stabilité d'un propulseur à propergol solide pour lanceur spatial, *Thèse de Doctorat*, Institut National Polytechnique de Toulouse.
- DUPAYS J., PREVOST M., TARRIN P., VUILLOT F., 1996, Effects of particulate phase on vortex shedding driven oscillations in solid rocket motors, *32<sup>nd</sup> ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit*, papier N°96-3248.
- DUPAYS J., VUILLOT F., 1998, Propagation of an acoustic wave in a two-phase reactive medium, *34<sup>th</sup> AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit*, papier N°98-3696.
- DUPAYS J., FABIGNON Y., 2000, Simulations numériques diphasiques sur le cas TEP, comparaisons avec plusieurs codes, *Rapport technique ONERA RT 4/00548/DMAE/DEFA*.
- DUPAYS J., FABIGNON Y., VILLEDIEU P., LAVERGNE G., ESTIVALEZES J.L., 2000, Some aspects of two-phase flows in solid-propellant rocket motors, in *Solid Propellant Chemistry, Combustion, and Motor Interior Ballistics*, *Progress in Astronautics and Aeronautics*, AIAA Inc., Vol. 185, pp. 859-883.
- DUPAYS J., WEY S., FABIGNON Y., 2001, Steady and unsteady reactive two-phase computations in solid rocket motors with Eulerian and Lagrangian approaches, *37<sup>th</sup> AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit*, papier N°2001-3871.
- DUPAYS J., FABIGNON Y., 2002, Programme SPADA. Simulations numériques de l'écoulement diphasique instationnaire dans le MPS P230 d'ARIANE 5 et le moteur à échelle 1/15<sup>ème</sup> LP6, *Rapport technique ONERA*, RT 1/06316.
- DURAND P., VIEILLE B., LAMBARE H., VUILLERMOZ P., BOURE G., STEINFELD P., GODFROY F., GUERY J.F., 2000, CPS: A three-dimensional CFD numerical code dedicated to space propulsive flows, *36<sup>th</sup> AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit*, papier N°2000-3864.
- DUTERQUE J., LAMBERT D., 1998, Synthèse des travaux sur l'agglomération de l'aluminium dans le propergol du MPS P230, *3<sup>ème</sup> colloque R&T ENSMA/CNES/ONERA sur les écoulements internes en propulsion solide*, 25-27 mars 1998, Poitiers, France.



**E**

ELGOBASHI S.E., ABOU-ARAB T.W., 1983, A two-equation turbulence model for two-phase flows, *Phys. Fluids* Vol. 26, N°4, pp. 931-938.

**F**

FABIGNON Y., 1997, Synthèse de l'activité MACADAM – Modélisation du dépôt dans le MPS P230, *Rapport technique ONERA* N°89/6133 EY.

FABIGNON Y., KUENTZMANN P., VUILLOT F., PREVOST M., BEC R., ROBERT E., MARION M., DUVAL P., 2000, A survey of French research and technology program on the internal aerodynamics of segmented solid motors, 2<sup>nd</sup> European Conference on Launcher Technology Space Solid Propulsion, 21-24 novembre 2000, Rome, Italie.

FABIGNON Y., DUPAYS J., AVALON G., VUILLOT F., LUPOGLAZOFF N., CASALIS G., PREVOST M., 2003, Instabilities and pressure oscillations in solid rocket motors, *Aerospace Science and Technology*, Vol. 7, pp. 191-200.

FAURE A., THOURAUD J.-J., TRICOT J.-C., 1996, Solid propulsion : technological and economical barriers, *5<sup>th</sup> Int. Symp. Propulsion in Space Transportation*, 22-24 mai 1996, Paris, France.

FAVRAY F., 1999, Etude de l'instabilité d'un écoulement confiné. Application à un modèle hydrodynamique de propulseur à propergol solide pour lanceur spatial, *Thèse de Doctorat*, Université de Paris VI.

FERRY J., BALACHANDAR S., 2001, A fast Eulerian method for disperse two-phase flow, *Int. J. Multiphase Flow*, Vol. 27, N°7, pp. 1199-1226.

FERRY J., BALACHANDAR S., 2002, Equilibrium expansion for the Eulerian velocity of small particles, *Powder Technology*, Vol. 125, N°2-3, pp. 131-139.

FERRY J., BALACHANDAR S., 2005, Equilibrium Eulerian approach for predicting the thermal field of a dispersion of small particles, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 48, N° 3-4, pp. 681-689.

FEVRIER P., 2000, Etude numérique des effets de concentration préférentielle et de corrélation spatiale entre vitesses de particules solides en turbulence homogène isotrope stationnaire, *Thèse de doctorat*, INPT/ENSEEIH, Toulouse, France.

FEVRIER P., SIMONIN O., LEGENDRE D., 2001, Particle dispersion and preferential concentration dependence on turbulent Reynolds number from direct and large eddy simulations of isotropic homogeneous turbulence, *4<sup>th</sup> Int. Conference on Multiphase Flow*, ICMF'01.

FEVRIER P., SIMONIN O., SQUIRES K.D., 2005, Partitioning of particle velocities in a gas-solid turbulent flow into a continuous field and a spatially-uncorrelated random distribution : theoretical formalism and numerical study, *J. Fluid Mech.* Vol. 533, pp. 1-46.

FINCK B., PERUT C., 1991, Propergols solides peu ou non polluants pour lanceurs spatiaux, *ESA SP-327*, pp. 137-141, Bordeaux, France.

FLANDRO G.A. et JACOBS H.R., 1973, Vortex-generated sound in cavities, *AIAA Aero-Acoustics Conference*, papier N°73-1014.

FLANDRO G.A., 1986, Vortex driving mechanism in oscillatory rocket flows, *J. Propulsion and Power*, Vol. 2, N°3, pp. 205-214.

FLANDRO G.A., MAJDALANI J., 2003, Aeroacoustic instability in rockets, *AIAA Journal*, Vol. 41, N°3, pp. 485-497.

FRIEDRICHS K.O., LAX P.D., 1971, Systems of conservation equations with a convex extension, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, Vol. 68, N° 8, pp. 1686-1688.

---

## G

GALLIEGUE K., 1998, Etude de la phase condensée dans les propulseurs à propergol solide aluminisé, *Thèse de Doctorat*, Université de Paris VI.

GALLIER S., GODFROY F., 2001, Calculs diphasiques eulériens instationnaires du LP6 et du MPS pour interchangeabilité CPS/SIERRA, *Rapport technique SME* RT-DD-1310000-0175-SNPE.

GALLIER S., GUERY J.-F., 2001, State of the art of CFD for solid rocket motors, *QNET-CFD Network Newsletter*, Vol. 1, N°2, pp. 21-24.

GALLIER S., GUERY J.-F., GODFROY F., LE BRETON P., RIBEREAU D., CLOUTET P., 2002, Instabilités de fonctionnement dans les moteurs à propergol solide de grande taille, *Revue Scientifique et Technique de la Défense*, N°57, septembre 2002.

GALLIER S., GODFROY F., PLOURDE F., 2004, Computational study of turbulence in a subscale solid rocket motor, *40<sup>th</sup> AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit*, papier N°2004-4052.

GALLOUET T., HERARD J.-M., SEGUIN N., 2004, Numerical modelling of two-phase flows using the two-fluid two-pressure approach, *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, Vol. 14, N°5, pp. 663-700.

GATIGNOL R., 1983, The Faxen formulae for a rigid particle in an unsteady non-uniform Stokes flow, *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée* Vol. 1, N°2, pp.143-160.

GODFROY F., JACQUEMIN P., TISSIER P.-Y., JOUVE F., 1992, Three-dimensional simulation of unsteady inviscid flows using a second order finite volume method. Application to flows inside solid propellant motors, *Computing Methods in Applied Sciences and Engineering*, Glowinski éditions, Paris.

GODFROY F., TISSIER P.-Y., 1992, Simulation of unsteady flows inside solid propellant rocket motors, *Colloque CNES-ONERA*, 8-9 décembre 1992, Châtillon, France.

GODFROY F., TISSIER P.-Y., 1993, Simulation numérique du vortex-shedding dans les maquettes 1/15<sup>e</sup> du booster P230 d'Ariane 5, Programme ASSM, Axe Stabilité de Fonctionnement, *Rapport technique SNPE* 883/SNPE/S/NE/D.

GODFROY F., TYSSIER P.-Y., 1994, CFD analysis of vortex shedding inside a subscale segmented motor, *30<sup>th</sup> AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit*, papier N°94-2781.

GODFROY F., GUERY J.-F., 1997-a, Unsteady eulerian two-phase flow analysis of solid rocket motor slag, *33<sup>rd</sup> AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit*, papier N°97-2859.

GODFROY F., GUERY J.-F., 1997-b, Influence de l'instationnarité de l'écoulement sur le mécanisme de formation du dépôt d'alumine dans le MPS P230, *Rapport technique SNPE* 5892/97/SNPE/DFP/CER.

GODFROY F., 1998, Manuel théorique du code PATRIC, *Rapport SME* 6912/98/SNPE/DFP/CER-b.

GODFROY F., 2004, Dossier de modélisation, calcul des gradients, *Rapport SME*, 688/2004/SME/DPS/CEP.

GODFROY F., BRIAND R., 2004, Rapport d'avancement des travaux diphasiques, *Rapport technique SME*, N°25/2004/SME/DPS/CER.

GODFROY F., BRIAND R., GALLIER S., ORLANDI O., 2004, Note de synthèse des travaux SME sur le couplage VSP/particules, *Rapport technique SME*, N°686/2004/SME/DPS/CEP.

GODFROY F., 2005, Dossier d'intégration et de parallélisation du modèle eulérien complexe (CIFRE), *Rapport SME* 655/2005/SME/DPS/CEP.

GODFROY F., BRIAND R., 2005, Note de synthèse sur l'influence de la position moyenne de la PTFS3 sur le couplage VSO/VSP, *Rapport technique SME*, N°420/2005/SME/DPS/CEP.

GODUNOV S., ZABRODINE A., IVANOV, M., KRAIKO A., PROKOPOV G., 1979, Résolution numérique des problèmes multidimensionnels de la dynamique des gaz, Editions MIR, Moscou.

GONCALVES DE MIRANDA F., 2000, Etude numérique de l'écoulement instationnaire diphasique dans les propulseurs à propergol solide d'Ariane 5, *Thèse de Doctorat*, Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace.

GOSSANT B., 1993, Solid Propellant Combustion and Internal Ballistics of Motors, in Solid Rocket Propulsion Technology, Edited by A. Davenas, Pergamon Press.

GOURDEL C., SIMONIN O., BRUNIER E., 1998, Modelling and simulation of gas-solid turbulent flows with a binary mixture of particles, *3<sup>rd</sup> Int. Conf. on Multiphase Flows*.

GRAD H., 1949, On the kinetic theory of rarefied gases, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, Vol. 2, N°4, pp. 331-407.

GRIFFOND J., CASALIS G., PINEAU J.-P., 2000, Spatial instability of flow in a semi-infinite cylinder with fluid injection through its porous walls, *Eur. J. of Mech. B – Fluids*, Vol. 19, pp. 69-87.

GRIFFOND J., 2001, Instabilité pariétale et accrochage aéro-acoustique dans les conduits à parois débitantes simulant les moteurs à propergol solide d'Ariane 5, *Thèse de Doctorat*, Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace.

GRIFFOND J., CASALIS G., 2001, On the nonparallel stability of the injection-induced two-dimensional Taylor flow, *Phys. Fluids*, Vol. 13, N°6, pp. 1635-1644.

GUARDONE A., VIGEVANO L., 2002, Roe linearization for the van der Waals gas, *Journal of Computational Physics*, Vol. 175, pp. 50-78.

GUERY J.-F., VUILLOT F., AVALON G., PLOURDE F., ANTHOINE J., PLATET B., 2000, Use of cold flow experiments in the ASSM program – Lessons and results, *2<sup>nd</sup> European Conference on Launcher Technology*, Space Solid Propulsion, 21-24 novembre 2000, Rome, Italie.

GUERY J.-F., GALLIER S., DELLA PIETA P., GODFROY F., GUICHARD A., LEBRETON P., RIBEREAU D., 2001, Numerical simulation of thrust oscillations of segmented AP/AL solid rocket motors, *52<sup>nd</sup> International Astronautical Congress*, 1-5 octobre 2001, Toulouse, France.

## H

HART R.W., Mc CLURE F.T., 1965, Theory of acoustic instability in solid propellant rocket combustion, *10<sup>th</sup> Int. Symp. on Combustion*, pp. 1047-1065, The combustion Institute, Pittsburgh PA.

HINZE J.O., 1975, Turbulence, McGraw-Hill Company Book, New-York, 2<sup>nd</sup> edition.

HYLKEMA J.J., VILLEDIEU P., 1998, Modélisation cinétique et simulation numérique des collisions entre gouttelettes d'alumine dans un propulseur à poudre, *3<sup>ème</sup> colloque R&T ENSMA/CNES/ONERA sur les écoulements internes en propulsion solide*, 25-27 mars 1998, Poitiers, France, Vol. 2, pp. 119-139.

HYLKEMA J.J., 1999, Modélisation cinétique et simulation numérique d'un brouillard dense de gouttelettes. Application aux propulseurs à poudre, *Thèse de Doctorat*, Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace.

## I

ISHII M., 1975, Thermo-fluid dynamic theory of two-phase flow, Eyrolles, Paris.

## J

JACQUEMIN P., 1982, Programme OPHELIE, Première partie : description théorique, *Rapport technique SME NT 108/81/CRB/NP*.

---

JENKINS J.T., SAVAGE S.B., 1983, A theory for the rapid flow of identical, smooth, nearly elastic, spherical particles, *J. Fluid Mech.*, Vol. 130, pp. 187-202.

JOIN-LAMBERT A., HALLE M., DAUVIAU C., 1996, Ariane 5, Oscillations de pression EAP, Synthèse des exploitations AEROSPATIALE des tirs au banc du P230, *Rapport interne AEROSPATIALE AS-NT-1-A-1845-ASAI*.

## K

KAUFMANN A., SIMONIN O., POINSOT T., 2004, Direct numerical simulation of particle-laden homogeneous isotropic turbulent flows using a two-fluid model formulation. *5<sup>th</sup> Int. Conf. on Multiphase Flow, ICMF'04*

KOURTA A., 1995, Acoustic mean-flow interaction and vortex-shedding in solid rocket motors, *J. Propulsion and Power*, Vol. 12, pp. 371-376.

KOURTA A., HA-MINH H., 1995, Turbulence et aéroacoustique dans les moteurs de fusée, *Colloque CNES/ONERA/CNRS Ecoulements pulsifs dans les systèmes de transport spatial*, 11-15 septembre 1995, Bordeaux, France.

KOURTA A., 1999, Computation of vortex shedding in solid rocket motors using time-dependant turbulence model, *Journal of Propulsion and Power*, Vol. 15, N°3.

KUENTZMANN P., 1991, Instabilités de combustion, in *Combustion of Solid Propellants*, AGARD LS-180.

KUENTZMANN P., 1998, Synthèse scientifique des travaux ASSM-POP, *3<sup>ème</sup> colloque R&T ENSMA/CNES/ONERA sur les écoulements internes en propulsion solide*, 25-27 mars 1998, Poitiers, France.

KUENTZMANN P., 2001, Compte rendu de la réunion "Synthèse ASSM/POP", *Rapport technique RT-CR-1113100-0102CNES-01*, CNES Evry, 21 mars 2001.

KUO K.K., 1986, Principles of Combustion, Wiley-Interscience Publication.

## L

LARROUTUROU B., 1992, How to preserve the mass fraction positivity when computing compressible multi-components flows, *Journal of Computational Physics*, Vol. 95, pp. 59-84.

LAURENT F., MASSOT M., VILLEDIEU P., 2004, Eulerian multi-fluid modeling for the numerical simulation of coalescence in polydisperse dense liquid sprays, *J. Computational Physics*, Vol. 194, N°2, pp. 505-543.

LAVERGNE G., JACQUES L., FABIGNON Y., DUMAS L., 1996, Alumine slag prediction in solid boosters, *5<sup>th</sup> Int. Symp. Propulsion in Space Transportation*, 22-24 mai 1996, Paris, France.

LAVIEVILLE J., SIMONIN O., BERLEMONT A., CHANG Z., 1997, Validation of inter-particle collision models based on large eddy simulation in gas-solid turbulent homogeneous shear flow, *7<sup>th</sup> Int. Symp. on Gas-Solid Flows*, ASME-FED, paper N° 3623.

LE BRETON P., RIBEREAU D., GODFROY F., ABGRALL R., AUGOULA S., 1998, MOPTI : Simulation du fonctionnement d'un chargement à propergol solide par couplage de l'évolution de surface et d'un calcul aérodynamique 2D dans la chambre, Publication SNPE/Université de Bordeaux dans le *3<sup>ème</sup> colloque R&T ENSMA/CNES/ONERA sur les écoulements internes en propulsion solide*, 25-27 mars 1998, Poitiers, France.

LE BRETON P., GUERY J.-F., VUILLOT F., PREVOST M., 1999, Recent advances in the prediction of SRM thrust oscillations, *Premier Colloque Européen sur la Technologie des Lanceurs, "Vibration des Lanceurs"*, 14-16 décembre 1999, Toulouse.

LE HELLEY P., COSTE S., PEVERGNE T., 2000, Influence of the unsteady flow on the alumina flux impinging the nozzle and the aft dome of the Ariane 5 booster, *2<sup>nd</sup> European Conference on Launcher Technology, Space Solid Propulsion*, 21-24 novembre 2000, Rome, Italie.

LEGRAND B., CATOIRE L., CHAUVEAU C., GOKALP I., 2000, Combustion of levitated aluminum in CO<sub>2</sub>/HCl mixture, *2<sup>nd</sup> European Conference on Launcher Technology*, Space Solid Propulsion, 21-24 novembre 2000, Rome, Italie.

LUCAS R., 1993, Propulsion Elements for Solid Rocket Motors, in *Solid Rocket Propulsion Technology*, Edited by A. Davenas, Pergamon Press.

LUN C., SAVAGE S.B., JEFFREY D.J., CHERPURNIY N., 1984, Kinetic theories of granular flow : simple shear of inelastic particles and general deformations of nearly elastic particles, *J. Fluid Mech.*, Vol. 140, pp. 223-256.

LUPOGLAZOFF N., VUILLOT F., 1992, Numerical simulation of vortex-shedding phenomena in 2D test case solid rocket motors, *30<sup>th</sup> AIAA Aerospace and Sciences Meeting and Exhibit*, papier N°92-0776.

LUPOGLAZOFF N., VUILLOT F., 1993, Synthèse des résultats obtenus sur le cas test "C2", Programme ASSM, Axe Stabilité de Fonctionnement, *Rapport technique ONERA 40/6133 EY*.

LUPOGLAZOFF N., VUILLOT F., 1996-a, Parietal vortex shedding as a cause of instability for long solid propellant motors - Numerical simulations and comparisons with firing tests, *34<sup>th</sup> AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, papier N°96-0761.

LUPOGLAZOFF N., VUILLOT F., 1996-b, Programme POP. Simulations numériques du LP6 n°7/95. Mise en évidence du détachement tourbillonnaire pariétal, *Rapport technique ONERA, RT 16/6145 EY*.

LUPOGLAZOFF N., VUILLOT F., 1998-a, Conception, spécifications et calculs du cas test C3 pour la validation instationnaire des modèles physiques, *3<sup>ème</sup> colloque R&T ENSMA/CNES/ONERA sur les écoulements internes en propulsion solide*, 25-27 mars 1998, Poitiers, France.

LUPOGLAZOFF N., VUILLOT F., 1998-b, Numerical simulations of parietal vortex-shedding phenomenon in a cold flow set-up, *34<sup>th</sup> AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit*, papier N°98-3220.

LUPOGLAZOFF N., VUILLOT F., DUPAYS J., FABIGNON Y., 2000, Numerical simulations of the unsteady flow inside Ariane 5 P230 SRM booster with burning aluminum particles, *2<sup>nd</sup> European Conference on Launcher Technology*, Space Solid Propulsion, 21-24 novembre 2000, Rome, Italie.

LUPOGLAZOFF N., VUILLOT F., DUPAYS J., FABIGNON Y., 2002, Numerical simulations of the unsteady flow inside segmented solid-propellant motors with burning aluminum particles, *40<sup>th</sup> AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, papier N°2002-0784.

## M

MARBLE F.E., 1963, Dynamics of gas containing small solid particles, *Proceedings of 5<sup>th</sup> AGARD Colloquium on Combustion and Propulsion*, pp. 175-213, Pergamon, Oxford.

MARBLE F.E., 1969, Some gas dynamics problems in the flow of condensing vapors, *Astronautica Acta*. Vol. 14, N°6, pp. 585-614, Pergamon Press.

MARBLE F.E., 1970, Dynamics of dusty gases, *Ann. Rev. Fluid Mech.* Vol. 2, pp. 397-446.

MARION M., CHAUVEAU C., GOKALP I., 1996, Studies on the ignition and burning of levitated aluminum particles, *Combustion Sciences and Technology*, Vol. 115, N°4-6, pp. 369-390.

MARTIN C.L., 1995, Shuttle STS-54 pressure perturbation investigation, *31<sup>st</sup> ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit*, papier N°95-2882.

MAXEY M. R. et RILEY J. J., 1983, Equation of motion for a small rigid sphere in turbulent fluid flow, *Phys. Fluids* Vol. 26, N°4, pp. 883-889.

MAXEY M.R., 1987, The gravitational settling of aerosol particles in homogeneous turbulence and random flow fields, *J. Fluid Mech.*, Vol. 174, pp. 441-465.

---

MEYNET N., DUPAYS J., 2003, Computations using classical and equilibrium Eulerian methods inside solid rocket motors, *39<sup>th</sup> AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit*, papier N°2003-4508.

MOIN P., SQUIRES K., CABOT W., LEE S., 1991, A dynamic subgrid-scale model for compressible turbulence and scalar transport, *Physics of Fluids A*, Vol. 3, N°11, pp. 2746-2757.

MOMBELLI C., CESCO N., 1999, Dossier de modélisation diphasique eulérien, *Rapport technique SME 7845/99/SNPE/DFP/CER-b*.

MOREAU M., BEDAT B., SIMONIN O., 2005, A priori testing of subgrid stress models for Euler-Euler two-phase LES from Euler-Lagrange simulations of gas-particle turbulent flow, *ILASS Americas 18<sup>th</sup> annual conference on liquid atomization and spray systems*.

MORFOUACE V., 1994, Validation de la partie « écoulement diphasique » d'un code de calcul, *Mémoire de stage de DEA, DEA Conversion de l'énergie*.

MORIOKA S., NAKAJIMA T., 1987, Modélisation d'un écoulement diphasique solide-gaz et application aux lits fluidisés / Modeling of gas and solid particles two-phase flow and application to fluidized bed, *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée/Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, Vol. 6, N°1, pp. 77-88.

MORFOUACE V., TISSIER P.-Y., 1995, Two-phase flow analysis of instabilities driven by vortex-shedding in solid rocket motors, *31<sup>st</sup> AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit*, papier N°95-2733.

## N

NAJJAR F.M., FERRY J., WASISTHO B., BALACHANDAR S., 2002, Full-physics large-scale multiphase large eddy simulations of flow inside solid rocket motors, *38<sup>th</sup> AIAA/ASME/SSAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit*, papier N°2002-4343.

NICOUD F., 1995, Programme ASSM 5 : Axe PTI, Simulation numérique directe d'un écoulement avec forte injection pariétale non uniforme, *Rapport de synthèse Programme ASSM5 (CERFACS)*.

NIGMATULIN R.I., 1979, Spatial averaging in the mechanics of heterogeneous and dispersed systems, *Int. J. Multiphase Flow*, Vol. 5, pp. 333-385.

## O

ORLANDI O., 2002, Modélisation et simulation numérique de la combustion d'une goutte isolée d'aluminium, *Thèse de Doctorat*, Université d'Orléans.

ORLANDI O., 2005, Note de synthèse des travaux couplage tourbillons/particules, *Rapport technique SME, 649/2005/SNPE ME/DPS/CPE*.

## P

PANDYA R.V.R., MASHAYEK F., 2002, Two-fluid large eddy simulation approach for particle-laden turbulent flows, *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, Vol. 45, N°24, pp. 4753-4759.

PIOMELLI U., 2004, Large-eddy and direct simulation of turbulent flows, Introduction to turbulence modeling, *Lecture Series 2004-06, von Karman Institute for Fluid dynamics*, 22-26 mars 2004, Rhode Saint Genèse, Belgique.

PLOURDE F., VETEL J., DOAN KIM S., 2001, Introduction d'un modèle de "LES" dans CPS\_P, *Rapport technique SME CPS-SNPE-2001-0015-(01)*.

PREVOST M., VUILLOT F., 1998, Dossier de justification du montage LP9 – Futur démonstrateur du Vortex-shedding pariétal (VSP), *Rapport technique ONERA RT 1/5500.12 DMAE/Y*.

PREVOST M., DOMMEE Y., MAUNOURY J., TRAINEAU J., VUILLOT F., DUVAL P., 2000-a, On the representativity of small scale motor tests, *2<sup>nd</sup> European Conference on Launcher Technology*, Space Solid Propulsion, 21-24 novembre 2000, Rome, Italie.

PREVOST M., MAUNOURY J., PREVOT P., 2000-b, ASSM8, 2<sup>ème</sup> campagne d'essai du montage LP9 démonstrateur du vortex-shedding pariétal (VSP), *Rapport technique ONERA*, RF 9/6182/DSNA/DMAE.

PREVOST M., DOMMEE Y., MAUNOURY J., 2001, Programme POP, Synthèse de la base de données expérimentales instationnaires, *Rapport Technique ONERA* RT 4/05212/DMAE.

PRICE E.W., SIGMAN R.K., 2000, Combustion of aluminized solid propellants, *Solid Propellant Chemistry, Combustion, and Motor Interior Ballistics*, *AIAA Progress in Astronautics and Aeronautics Series*, Ed. Zarchan, Vol. 185, pp. 663-687.

## R

REEKS M.W., 1991, On a kinetic equation for the transport of particles in turbulent flows, *Phys. Fluids A* Vol. 3, N°3, pp. 446-456.

RIBER E., MOREAU M., SIMONIN O., CUENOT B., 2005, Towards large eddy simulation of non-homogeneous particle laden turbulent gas flows using Euler-Euler approach, *11<sup>th</sup> Workshop on Two-Phase Flow Prediction*.

RIBEREAU D., LE BRETON P., 1995, Simulation numérique des instabilités de fonctionnement observées sur un propulseur solide de type axisymétrique, *Colloque CNES/ONERA/CNRS Ecoulements propulsifs dans les systèmes de transport spatial*, 11-15 septembre 1995, Bordeaux, France.

RIBEREAU D., GUERY J.F., LE BRETON P., 2000, Numerical simulation of thrust oscillations of Ariane 5 solid rocket boosters, *2<sup>nd</sup> European Conference on Launcher Technology*, Space Solid Propulsion, 21-24 novembre 2000, Rome, Italie.

RODI W., 1972, The prediction of free turbulent boundary layers by use of a two-equation model of turbulence, *Ph.D. Thesis*, University of London.

ROE P.L., 1981, Approximate Riemann solvers, parameter vectors and difference schemes, *J. Computational Phys.*, Vol. 43, pp. 357-372.

ROE P.L., 1986, Characteristic-based schemes for the Euler equations, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, Vol. 18, pp. 337-365.

## S

SAFFMAN P.G., TURNER J.S., 1956, On the collision of drops in turbulent clouds, *J. Fluid Mech.*, Vol. 1, pp. 16-30.

SAFFMAN P.G., 1962, On the stability of laminar flow of a dusty gas, *J. Fluid Mech.*, Vol. 13, N°1, pp. 120-128.

SAGAUT P., 1998, Introduction à la simulation des grandes échelles pour les écoulements de fluide incompressible, *Mathématiques et Applications*, Springer.

SAINSAULIEU L., RAVIART P.A., 1992, A non-conservative convection-diffusion system describing spray dynamics, *Computing methods in applied sciences and engineering*, Glowinsky Edition, Paris.

SAINSAULIEU L., 1993, An Euler system modelling vaporizing sprays, in *Dynamics of heterogeneous combustion and reacting systems*, *Progress in astronautics and aeronautics*, Vol. 152, pp. 280-305.

SAINSAULIEU L., 1995-a, Finite volume approximation of two phase-fluid flows based on an approximate Roe-type Riemann solver, *Journal of Computational Physics*, Vol. 121, N°1, pp. 1-28.

SAINSAULIEU L., 1995-b, Modélisation numérique des écoulements fluides, Méthodes décentrées et applications, *Cours Collège Polytechnique*, 13 décembre 1995.

- 
- SAKIZ M., SIMONIN O., 1998, Numerical experiments and modeling of non-equilibrium effects in dilute granular flows, *Proceedings of the 21st Int. Symp. on Rarefied Gas Dynamics*, édité par R. Brun, R. Campargue, R. Gagnol et J.C. Lengrand, Cépaduès-Éditions, Toulouse, France.
- SAKIZ M., 1999, Simulation numérique lagrangienne et modélisation eulérienne d'écoulements diphasiques gaz-particules en canal vertical, *Thèse de doctorat*, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, France.
- SAKIZ M., SIMONIN O., 1999, Development and validation of continuum particle wall boundary conditions using Lagrangian simulation of a vertical gas-solid channel flow, *Proceedings of FEDSM'99, 3<sup>rd</sup> ASME/JSME Joint Fluids Engineering Conference*, papier N°7898.
- SAUREL R., ABGRALL R., 1999, A multiphase Godunov method for compressible multifluid and multiphase flows, *Journal of Computational Physics*, Vol. 150, pp. 425-467.
- SAUREL R., LE METAYER O., 2001, A multiphase model for compressible flows with interfaces, shocks, detonation waves and cavitation, *J. Fluid Mech.* Vol. 431, pp. 239-271.
- SCHILLER L., NAUMAN A., 1935, A drag coefficient correlation, *V.D.I. Zeitung* Vol. 77, pp. 318-320.
- SCIPPA S., PASCAL P., ZANIER F., 1994, Ariane 5 MPS chamber pressure oscillations full scale firings results analysis and further studies, *30<sup>th</sup> AIAA Joint Propulsion Conference*, papier N°94-3068.
- SCIPPA S., BIAGIONI M., BUSSIERE M., 1996, Ariane solid boosters experience, *5<sup>th</sup> Int. Symp. Propulsion in Space Transportation*, 22-24 mai 1996, Paris, France.
- SHU P.H., SFOZINI R.H., FOSTER W.A., 1986, Vortex shedding from solid rocket propellant inhibitors, *22<sup>nd</sup> AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint propulsion Conference*, papier N°86-1418.
- SILVESTRINI J.H., COMTE P., LESIEUR M., 1995, Simulation des grandes échelles : application aux moteurs à propergol solide segmentés, *Colloque CNES/ONERA/CNRS Ecoulements propulsifs dans les systèmes de transport spatial*, 11-15 septembre 1995, Bordeaux, France.
- SIMOES M., 2003, Rapport de synthèse de l'année 1 de la thèse CIFRE sur le diphasique eulérien, *Rapport SME*, 1151/2003/SME/DPS/CER.
- SIMOES M., DELLA PIETA P., GODFROY F., SIMONIN O., 2005, Continuum modeling of the dispersed phase in solid rocket motors, *17<sup>th</sup> AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*, papier N°2005-4698.
- SIMONIN O., VIOLLET P.L., MECHITOUA N., 1990, The modelling of turbulent recirculating high temperature flows loaded with particles, *Int. Workshop on Plasma Jets in the Development of New Material Technology*, Frunze, ex-URSS.
- SIMONIN O., 1991, Prediction of the dispersed phase turbulence in particle-laden jets, *4<sup>th</sup> Int. Symp. on Gas-Solid Flows*, ASME-FED, Vol. 121, pp. 197-206.
- SIMONIN O., 1996, Continuum modelling of dispersed two-phase flows, in *Combustion and Turbulence in Two-Phase Flows*, 1995-1996 Lecture Series Programme, Von Karman Institute, Belgique.
- SIMONIN O., WANG Q., SQUIRES K.D., 1997, Comparison between two-fluid model predictions and large-eddy simulation results in a vertical gas-solid turbulent channel flow, *7<sup>th</sup> Int. Symp. on Gas-Solid Flows*, ASME-FED, papier N°3625.
- SIMONIN O., 2000, Theoretical and experimental modeling of particulate flow, part I : Theoretical derivation of dispersed phase Eulerian modeling from probability density function kinetic equation, Lecture Series Programme 2000-06, Von Karman Institute, Belgique.
- SIMONIN O., FEVRIER P., LAVIEVILLE J., 2002, On the spatial distribution of heavy-particle velocities in turbulent flow : from continuous field to particulate chaos, *Journal of Turbulence*, Vol. 40.
- SMAGORINSKY J., 1963, General circulation experiments with the primitive equations, *Monthly Weather Review*, Vol. 91, N°3, pp. 99-164.



SOMMERFELD M., 1999, Inter-particle collisions in turbulent flows: a stochastic Lagrangian model, *Proc. Turbulence and Shear Flow Phenomena*, Vol. 1, pp. 265-270.

SOMMERFELD M., 2000, Theoretical and experimental modelling of particulate flow: overview and fundamentals, *VKI for Fluid Dynamics*, Lecture Series 2000-06.

SQUIRES K.D., EATON J.K., 1991, Measurements of particle dispersion obtained from direct numerical simulations of isotropic turbulence, *J. Fluids Mech.*, Vol. 226, pp. 1-35.

STELLA F., PAGLIA F., GIANGI M., TELARA M., 2005, Numerical Simulation of Pressure Oscillations in Solid Rocket Motors, *European Conference for Aero-Space Sciences (EUCASSS)*, 4-7 juillet 2005, Moscou, Russie.

## T

TANG L., WEN F., YANG Y., CROWE C.T., CHUNG J.N., TROUTT T.R., 1992, Self-organizing particle dispersion mechanism in a plane wake, *Physics of Fluids A*, Vol. 4, N°10, pp. 2244-2251.

TAVERNIER P., BOISSON J., CRAMPEL B., 1970, Propergols hautement énergétiques, AGARD-AG-141-70.

TAYLOR G.I., 1956, Fluid flow in regions bounded by porous surfaces, *Proceedings of the Royal Society of London, series A, Mathematical and Physical Sciences*, Vol. 234, pp. 455-484.

TCHEN C.M., 1947, Mean value and correlation problems connected with the motion of small particles suspended in a turbulent fluid, *Ph.D. Thesis*, University of Delft, La Hague.

TELARA M., JACQUES L., LE HELLEY P., PEVERGNE T., RIBEREAU D., GONDOUIN B., CESCO N., 2005, A new concept to reduce SRM pressure oscillations: the 3D frontal thermal protection, *European Conference for Aero-Space Sciences (EUCASSS)*, 4-7 juillet 2005, Moscou, Russie.

TEMKIN S., DOBBINS R.A., 1966, Attenuation and Dispersion of Sound by Particulate-Relaxation processes, *J. of the Acoustical Society of America*, Vol. 40.

TISSIER P.-Y., GODFROY F., JACQUEMIN P., 1992, Simulation of three-dimensional flows inside solid propellant rocket motors using a second order finite volume method, Application to the study of unstable phenomena, *28<sup>th</sup> AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit*, papier N°92-3275.

TORO E.F., 1987, A fast Riemann solver with constant covolume applied to the random choice method, *Cranfield College of Aeronautics Report*, N°8719.

TOUMI I., 1992, A weak formulation of Roe's approximate Riemann solver, *J. Computational Phys.*, Vol. 102.

TOUMI I., KUMBARO A., 1996, An approximate linearized Riemann solver for a two-fluid model, *Journal of Computational Physics*, Vol. 124, pp. 286-300.

TOUMI I., KUMBARO A., PAILLIERE H. 1999, Approximate Riemann solvers and flux vector splitting schemes for two-phase flow, *VKI Lecture Series 1999-03*, 30<sup>th</sup> Computational Fluid Dynamics, 8-12 mars 1999.

TRAINEAU J.-C., PREVOST M., VUILLOT F., LE BRETON P., CUNY J., PREIONI N., BEC R., 1997, A subscale test program to assess the vortex shedding driven instabilities in segmented solid rocket motors, *33<sup>rd</sup> AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference*, papier N°97-3247.

TRUBERT J.-F., 2000, Agglomeration and combustion of aluminum particles in solid rocket motors, *2<sup>nd</sup> European Conference on Launcher Technology*, Space Solid Propulsion, 21-24 novembre 2000, Rome, Italie.

## U

UGURTAS B., 2000, Etudes numériques et expérimentales des instabilités hydrodynamiques et du couplage aéro-acoustique dans un écoulement de Taylor, *Thèse de Doctorat*, Université de Paris VI.

---

UGURTAS B., AVALON G., LUPOGLAZOFF N., VUILLOT F., CASALIS G., 2000, Stability and acoustic resonance of internal flows generated by side injection, *Solid Propellant Chemistry, Combustion, and Motor Interior Ballistics, AIAA Progress in Astronautics and Aeronautics Series*, Ed. Zarchan, Vol. 185, pp. 823-836.

## V

VAN LEER B., 1979, Toward the ultimate conservation difference scheme V. A second-order sequel to Godunov's method, *Journal of Computational Physics*, Vol. 32, N°1, pp. 101-135.

VARAPAEV V.N., YAGODKIN V.I., 1969, Flow stability in a channel with porous walls, *Izv. AN SSSR. Mekhanika Zhidkosti i Gaza*, Vol. 4, N°5, pp. 91-95.

VETEL J., 2001, Interaction des structures pariétales sur le développement instationnaire d'écoulements cisailés en milieu confiné – Rôle de l'injection différentielle, *Thèse de Doctorat*, Université de Poitiers.

VILA J.-P., 1986, Simplified Godunov schemes for 2\*2 systems of conservation laws, *SIAM J. Num. Anal.*, Vol. 23, N°6.

VILLEDIEU P., HYLKEMA J., LAVERGNE G., PLATET B., FABIGNON Y., VARDELLE M., GUERY J.-F., GODFROY F., LE HELLEY P., JACQUES L., 2000, Slag accumulation in solid propellant rocket motors with a submerged nozzle, *2<sup>nd</sup> European Conference on Launcher Technology, Space Solid Propulsion*, 21-24 novembre 2000, Rome, Italie.

VINOKUR M., MONTAGNE J.-L., 1990, Generalized flux-vector splitting and Roe average for an equilibrium real gas, *Journal of Computational Physics*, Vol. 89, N°2, pp. 276-300.

VUILLOT F., 1995, Vortex-shedding phenomena in solid rocket motors, *J. Propulsion and Power*, Vol. 11, N°4, pp. 626-639.

VUILLOT F., LUPOGLAZOFF N., 1996, Combustion and turbulent flow effects in 2D unsteady Navier-Stokes simulations of oscillatory solid rocket motors - First applications, *34<sup>th</sup> Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, papier N°96-0884.

VUILLOT F., TISSIER P.-Y., DE AMICIS R., 1996, Stability predictions for large segmented solid propellant motors, *5<sup>th</sup> Int. Symp. Propulsion in Space Transportation*, 22-24 mai 1996, Paris, France.

VUILLOT F., BASSET T., DUPAYS J., DANIEL E., LUPOGLAZOFF N., 1997, 2D Navier-Stokes computations for solid rocket motors: rotationnal, combustion and two-phase flow effects, *33<sup>rd</sup> AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit*, papier N° 97-3326.

VUILLOT F., 1998, Point sur les recherches relatives à la stabilité de fonctionnement du MPS P230 d'Ariane 5, *3<sup>ème</sup> colloque R&T ENSMA/CNES/ONERA sur les écoulements internes en propulsion solide*, 25-27 mars 1998, Poitiers, France.

VUILLOT F., CASALIS G., 2000, Recent advances on the stability of large segmented space boosters, *2<sup>nd</sup> European Conference on Launcher Technology, Space Solid Propulsion*, 21-24 novembre 2000, Rome, Italie.

## W

WANG L.P., BURTON T.D., STOCK D.E., 1990, Chaotic dynamics of heavy particle dispersion : Fractal dimension versus dispersion coefficients, *Phys. Fluids A*, Vol. 2, N°8, pp. 1305-1308.

WANG L.P., BURTON T.D., STOCK D.E., 1991, Quantification of chaotic dynamics for heavy particle dispersion in ABC flow, *Phys. Fluids A*, Vol. 3, N°5, pp. 1073-1080.

WANG Q., SQUIRES K.D., SIMONIN O., 1998, Large eddy simulation of turbulent gas-solid flows in a vertical channel and modelling of particle velocity correlations, *Int. J. of Heat and Fluid Flow*, Vol. 19, pp. 505-511.

WEN F., KAMALU N., CHUNG J.N., CROWE C.T., TROUTT T.R., 1992, Particle dispersion by vortex structures in plan mixing layers, *Journal of Fluids Engineering*, Vol. 114, pp. 657-666.

WIDENER J.F., BECKSTEAD M.W., 1998, Aluminum combustion modeling in solid propellant combustion products, *34<sup>th</sup> AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit*, papier N°98-3824.

---

WILLIAMS F.A., 1958, Spray combustion and atomization, *Phys. Fluids*, Vol. 1, N°6, pp. 541-545.

**Y**

YANG H.Q., PRZEKWAŚ A.J., 1991, Unified high-order Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws, *29<sup>th</sup> AIAA Aerospace Sciences Meeting*, papier N°91-0634.

YOSHIZAWA A., 1986, Statistical theory for compressible turbulent shear flows, with the application to subgrid modelling, *Phys. Fluids*, Vol. 29, N°7, pp. 2152-2164.

**Z**

ZAICHIK L.I., VINBERG A.A., 1991, Modeling of particle dynamics and heat transfer in turbulent flows using equations for first and second moments of velocity and temperature fluctuations, *Proceedings of 8th Int. Symp. on Turbulent Shear Flows*, Munich, Allemagne, Vol. 1, pp. 1021-1026.

ZHANG D.Z., PROSPERETTI A., 1994, Averaged equations for inviscid disperse two-phase flow, *J. Fluid. Mech.* Vol. 267, pp. 185-219.

ZHANG D.Z., PROSPERETTI A., 1997, Momentum and energy equations for disperse two-phase flows and their closure for dilute suspensions, *Int. J. Multiphase Flow*, Vol. 23, N°3, pp. 425-453.

## **RESUME**

Une modélisation précise des écoulements gaz-particules réactifs instationnaires rencontrés dans les moteurs à propergol solide d'Ariane 5 est indispensable pour expliquer et prédire le comportement du moteur lors de son fonctionnement. En particulier, la présence d'une phase dispersée, même inerte, influe fortement sur les amplitudes des potentielles oscillations de pression créées par le moteur.

Dans ce but, une approche originale de modélisation, qui prend en compte de façon simple la variance de vitesse de la phase dispersée, est proposée. Deux modèles diphasiques eulériens avec pression particulaire, à niveau de sophistication variable, ont ainsi été écrits. Le premier est un modèle à trois équations qui fait apparaître une pression particulaire fonction de la fraction volumique solide et d'un paramètre constant. Ce terme permet d'obtenir une concentration en particules plus homogène et peut donc fortement modifier la dispersion des particules dans l'écoulement. Le second modèle, qui présente une équation supplémentaire, est basé sur la modélisation du tenseur des contraintes cinétiques de la phase dispersée par une hypothèse de type Boussinesq. La pression particulaire dépend dans ce cas de la fraction volumique solide et de l'énergie cinétique fluctuante de la phase dispersée.

Ces deux modèles ont été implantés dans un code de mécanique des fluides et diverses simulations numériques ont été réalisées. Elles montrent une amélioration évidente des résultats obtenus par rapport aux modèles eulériens sans pression particulaire. Notamment, les accumulations non physiques de particules, qui traduisent un défaut caractéristique de ces modèles basiques, sont éliminées.

## **ABSTRACT**

*An Eulerian model of the dispersed phase in solid rocket motors  
that includes a particulate pressure term*

An accurate model of compressible, reactive, dispersed two-phase flows is needed to correctly predict steady or unsteady behavior of a solid rocket motor such as the Ariane 5. Indeed, the dispersed phase plays an essential role in pressure oscillation levels that may occur during operation.

Therefore, we have developed an advanced Eulerian model that accounts for the particulate velocity variance in a simple way. This 3-equation model exhibits a particulate pressure term which is function of the solid volume fraction and a constant parameter. The particulate pressure tends to homogenize particles concentration and consequently has a major influence on particle dispersion. We have also developed a more complex model with 4 equations, where the particulate kinetic stress tensor is modelled with a Boussinesq assumption. In this model, the particulate pressure is function of both the solid volume fraction and the particulate fluctuating kinetic energy.

These two models have been implemented in a CFD code. Some numerical simulations have been performed and results obtained are clearly improved compared to Eulerian models without a particulate pressure term. In particular unrealistic accumulations of particles, which point out a well-known flaw of these basic models, are shown to disappear.