

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MUSEO
REVISTA DEL MUSEO DE LA PLATA
(NUEVA SERIE)

APLICACION DEL METODO DE LOS ELEMENTOS
FINITOS EN ESTUDIOS DE DIFERENCIACION
CRANEOFACIAL

HECTOR M. PUCCIARELLI¹, MELVIN L. MOSS², RICHARD SKALAK³,
L. MOSS-SALENTI², K. SEN³ y HENNING VILMANN⁴

RESUMEN

El presente trabajo tiene por objeto: (a) demostrar la aplicabilidad del Método de los Elementos Finitos (MEF) a los estudios de crecimiento y diferenciación craneofacial; (b) fundamentar la incorporación del MEF como método válido en craneografía antropológica y disciplinas relacionadas. Esta innovación implica prescindir de los procedimientos clásicos de orientación según sistemas de líneas, puntos y/o planos (Francfort, Broca, basicraneal, vestibular, etc.) usualmente aplicados en craneología convencional. Se resuelve así la principal limitación de los estudios basados en representaciones gráficas como método de descripción, comparación y análisis. Se incluye a modo de ejemplo, un estudio realizado en ratas experimentales de laboratorio, cuyo análisis craneográfico fue desarrollado mediante el MEF.

Antropología Biológica, Método de los Elementos Finitos, Desarrollo Craneofacial.

ABSTRACT

FINITE ELEMENTAL METHOD IN CRANIOFACIAL DIFFERENTIATION STUDIES. — The object of the present study was: (a) to demonstrate that the Finite Elemental Method (FEM) is an useful way to perform studies on craniofacial growth and development, and (b) to incorporate FEM as an adequate method in studies of craniological anthropology, as well as in other fields related to cephalo-facial development and its alterations. The outstanding feature of this method is that such studies may be done avoiding any type of arbitrary reference systems. This

¹ Cátedra de Antropología Biológica I, Facultad de Ciencias Naturales y Museo, Paseo del Bosque s/n, 1900 La Plata, Argentina.

² Department of Anatomy & Cell Biology, Columbia University, U.S.A.

³ Department of Civil Engineering & Engineering Mechanics, Columbia University, U.S.A.

⁴ Royal Dental College, Dinamarca.

fact will allow to solve the main methodological constraint in craniology, as well as in all fields of biology in which cranial tracing constitutes a valid descriptive, comparative and analytical technique. As an example, a study performed on experimental laboratory rats is included, in which a cranial analysis by the FEM was performed.

Biological Anthropology, Finite Elemental Method, Craniofacial Development

INTRODUCCION

El esqueleto craneano está estructurado por componentes óseos de forma compleja. Durante el crecimiento, se producen numerosos cambios de tamaño, forma y locación con una progresiva diferenciación de estructuras homólogas. Muchas de estas transformaciones estructurales deben ser estudiadas mediante proyecciones craneográficas. El término craneografía se hace extensivo en este estudio a toda técnica de obtención de datos a partir de imágenes, diagramas o proyecciones bi o tridimensionales del cráneo animal o humano incluyendo las originalmente desarrolladas para fines no antropológicos (roentgenografía, tomografía computada, etc.).

Los datos provenientes de técnica craneográfica son normalmente usados para: (a) analizar estadísticamente conjuntos de datos que sirven como promedios normativos del crecimiento craneofacial; (b) comparar valores provenientes de una muestra craneana individual contra dichos promedios normativos; (c) describir los cambios de tamaño y forma craneofacial susceptible de variación a través del crecimiento y (d) comparar entre sí los valores obtenidos de diferentes muestras de la misma edad.

Si bien se ha progresado en las técnicas de imágenes y proyecciones, los criterios de obtención de datos permanecen casi inalterables en su esencia tradicional. La craneografía convencional requiere de por lo menos dos puntos "invariables" que permitan trazar una línea (o tres si se requiere de un plano) de orientación. Uno de dichos puntos (o un tercero) puede actuar como origen. El comportamiento cinemático de cada punto es estudiado superponiendo diagramas según dicho sistema de referencia. La principal dificultad de este procedimiento, reside en que existe variación para un mismo comportamiento, según el sistema de orientación elegido (Krogman y Sassouni, 1957). Regiones que en realidad poseen poco crecimiento pueden exhibir rotaciones y translaciones muy significativas o viceversa. Resulta imposible por definición, construir un modelo convencional que sea independiente de la elección arbitraria de puntos y líneas de referencia. Tampoco puede determinarse (a excepción del método vestibular, que por ser el único que posee fundamento biológico requiere de una discusión aparte) qué sistema resulta más adecuado para lograr una representación menos subjetiva del fenómeno en estudio (Moss *et al.*, 1980; 1983). Aún describiendo el crecimiento relativo en series discretas de puntos anatómicos o materiales, nada puede deducirse del comportamiento en regiones comprendidas entre dichos puntos. Técnicamente, la craneografía clásica muestra movi-

mientos relativos de puntos discretos, tal como se estudia en mecánica de partículas. Pero un segmento entre pares de puntos implica una construcción geométrica arbitraria y cualquier "cambio de crecimiento" de dicha línea es sólo una reflexión indirecta del comportamiento relativo de los puntos que lo conforman. Puntos de alta variabilidad dinámica, pueden coexistir con otros que no crezcan en absoluto (como ciertas regiones óseas intratisulares). Además las distancias entre puntos anatómicos contiguos son usualmente muy grandes con respecto al tamaño craneano total, como para que puedan lograrse descripciones precisas del comportamiento cinemático de una región determinada. Debe concluirse que la craneografía tradicional no es capaz de representar correctamente ni la forma de una región anatómica, ni sus cambios en función del crecimiento o de un modificador ambiental (Bookstein, 1978), por este medio, sólo es posible realizar observaciones anecdóticas de los cambios temporales de forma y/o ubicación de un elemento esquelético.

Esta limitación de la craneografía convencional (Moyers y Bookstein, 1979; Moss *et al.*, 1980) se agudiza en relación directa con el desarrollo progresivo de los estudios modernos y llevó a sugerir varios métodos alternativos de análisis craneográfico. Bookstein (1978; 1982; 1983) propuso un método morfométrico biortogonal aplicable en dos dimensiones. También fue iniciado un estudio sistemático comparativo sobre la aplicabilidad de otros tres modelos matemáticos (Skalak, 1981; Skalak *et al.*, 1982). Fueron probados un modelo con centro alométrico (Moss *et al.*, 1983), otro de crecimiento reticular (Moss *et al.*, 1984) y finalmente el método de los elementos finitos (MEF) (Moss, 1983) del cual fueron enunciadas sus bases matemáticas por Skalak (1981).

EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

El MEF fue introducido hace unos 20 años en ingeniería, con objeto de resolver ciertos problemas de mecánica estructural. Sus fundamentos fueron descritos en textos y tratados (Bathe y Wilson, 1976; Zienkiewicz, 1977; Owen y Hinton, 1980). Se trata de un método que permite subdividir estructuras en gran número de elementos contiguos y analizar los cambios de tamaño y forma de cada elemento por separado. Su aplicabilidad fue rápidamente visualizada en disciplinas biológicas de nivel supracelular (Gallagher *et al.*, 1982). La extensión del MEF a problemas de crecimiento vegetal (Niklas, 1977) y de respuestas esqueléticas (Lewis *et al.*, 1980; McPherson y Kriewall, 1980; Rohlmann *et al.*, 1982) y dentarias (Terlingen, 1973; Bowley *et al.*, 1974; Wright *et al.*, 1978; Cook *et al.*, 1982; Borchert y Reichert, 1983; Reinhardt *et al.*, 1983; Rubin *et al.*, 1983) a diversos tipos de stress físico, resultó de gran utilidad. Uno de tales estudios (Bowley *et al.*, 1974) demuestra la aplicación del MEF al análisis de datos obtenidos por técnicas holográficas, las cuales poseen gran significación potencial en craneología (Kragt y Duterloo, 1982).

Ha sido demostrado que el crecimiento biológico (y el crecimiento craneofacial en particular) es en su mayoría de carácter no lineal y ani-

sotrópico. Es anisotrópico porque incluye cambios de forma además de los de tamaño y es no lineal porque la discontinuidad en la variación angular y longitudinal suele ser significativamente grande. Por esta razón es factible emplear los conceptos de mecánica continua no lineal (Calcote, 1968) y los métodos numéricos del MEF para su implementación.

Considérese una serie craneofacial temporal. Para cada individuo se obtendrán secuencias de diagramas o radiografías craneanas tomadas en forma previamente estandarizadas. Series de puntos craneométricos se corresponderán entre sí en cada representación (puntos homólogos). Dichos puntos, que deben ser identificables en todo momento, se individualizan por intersecciones suturales (nasion, bregma) o prominencias óseas (glabella, inion). Existen además, puntos no usuales en craneografía antropológica, como los denominados puntos materiales, los cuales no poseen relieve anatómico alguno y su identificación es producto de técnicas especiales (marcación metálica, colocación de implantes, tinción selectiva) aplicadas en estadios previos o iniciales de la observación. En teoría, se recomienda considerar la mayor cantidad posible de puntos materiales para determinaciones de exactitud, pero en la práctica se utilizan además de puntos exclusivamente materiales, conjuntos mixtos o exclusivamente anatómicos, como fue empleado por Patel (1983) y para ejemplificación del presente trabajo. Los puntos materiales, anatómicos o mixtos darán origen a los nodos de los diagramas del MEF.

Estos diagramas pueden ser considerados como áreas continuas de crecimiento subdivididas por series de líneas imaginarias (o planos, si se trata de una representación tridimensional) conectadas entre sí por los nodos. Las líneas (o planos) pueden indistintamente atravesar tejidos, contenido no tisular o cavidades y deben trazarse de tal modo, que cada nodo conecte dos o más líneas. En las representaciones tridimensionales los nodos deben conectar por lo menos tres bordes. En todos los casos debe existir una relación determinada entre el número de nodos y la cantidad de bordes (líneas o planos) limitantes para obtener una estructura "estable". Esta subdivisión conceptual de un diagrama en subáreas, bi o tridimensionales, se denomina *discretización* y conduce a la formación de series de elementos finitos contiguos, con nodos cuyas coordenadas serán siempre conocidas, en cualquier estadio del tiempo "t" de crecimiento o fase "f" de transformación.

Hay muchas configuraciones posibles que puede adquirir un elemento finito, las cuales dependen de su carácter dimensional y de su estructura nodal. Los elementos trinodales bidimensionales por ejemplo, adquieren forma triangular, los tetranodales tridimensionales adquieren forma tetraédrica, los octonodales tridimensionales pueden adquirir forma cúbica, etc. Además pueden construirse elementos finitos con bordes curvos, útiles porque se ajustan con mayor precisión a límites anatómicos, pero sólo es factible construirlos cuando se tiene gran cantidad de puntos que pueden actuar como nodos.

Considérese un elemento trinodal, bidimensional (ergo triangular) a un tiempo inicial t_0 en el que se determinan las coordenadas de sus

tres nodos. La posición de los nodos será transformada por crecimiento y a un tiempo t_1 las coordenadas nodales tendrán nuevos valores. Este proceso de "crecimiento" es definido en el vocabulario de la mecánica continua como "deformación". También suele decirse que el elemento es "tensionado" o "transformado", entendiéndose aquí por "tensión" (strain) la acepción que tiene en física clásica o mecánica. Cuando un cuerpo físico es sometido a una fuerza de carga, tiende a deformarse. Una fuerza compresiva axial (vertical por ejemplo) tiende a acortar y ensanchar al cuerpo tensionado. Los cambios dimensionales producidos, son pasibles de medición y son expresados como fracciones de una dimensión original. La fuerza por unidad de superficie requerida para producir tal efecto es denominada stress y es una medida de la resistencia interna a la deformación.

En los cuerpos biológicos en desarrollo, la deformación no es debida a fuerzas de carga sino obviamente a crecimiento, esto es, adición de substancia originada por actividad celular y/o a acumulación intercelular. Por consiguiente, la deformación de un cuerpo biológico es mensurable a través de las tensiones de crecimiento, pudiendo también determinarse las direcciones principales seguidas por estas tensiones. Con el uso de las definiciones introducidas por Skalak *et al.* (1982) y con los métodos detallados por Patel (1983) los valores cuantitativos de estas tensiones pueden ser graficados y computados en forma de tensores de crecimiento.

TENSORES DE CRECIMIENTO

Mientras que la craneografía convencional emplea *vectores* para describir sus resultados, el MEF computa *tensores* de crecimiento. Ambos descriptores trasuntan las diferencias esenciales entre estos distintos tipos de técnicas. La craneografía convencional se expresa en términos de desplazamiento o movimiento de puntos en función del tiempo. El concepto de continuum inherente al MEF, sugiere que el efecto fundamental del crecimiento reside básicamente en extensiones localizadas en el entorno de un punto dado. Este efecto se distribuye a través del cuerpo físico y es descripto por un tensor en cada punto considerado. La oposición conceptual entre tensores y vectores, pues, se basa en que el primero deriva de la teoría de la mecánica continua en tanto función de las derivadas con respecto a la posición o gradiente de desplazamiento (Green y Adkins, 1970; Fung, 1972). El concepto de tensor involucra un conjunto de cifras que es llamado componente y que describe una tensión o stress en un área bi o tridimensional. En tanto entidades matemáticas abstractas, los tensores no pueden ser fácilmente visualizables. Sin embargo, si se definen mediante sus direcciones principales, entonces éstas pueden ser gráficamente representadas, expresando al tensor (por única vez) en un sistema de coordenadas. Por cuanto todo tensor puede ser considerado como un descriptor, los tensores de crecimiento son esencialmente descriptores de crecimiento y especificarán las transformaciones de coordenadas que se operan desde un nivel hacia otro de "deformación".

Estas deformaciones no pueden ser afectadas por los movimientos de rotación o translación que el cuerpo en estudio puede sufrir. Esto implica que un tensor de crecimiento es independiente de los desplazamientos o distorsión normalmente producidos en los diagramas y radiografías. Las proyecciones craneográficas convencionales en cambio, incluyen toda variación por rotación y/o translación, demostrando así su dependencia esencial del sistema de referencia elegido. Considérese un cráneo humano en norma vertical, en que la sutura sagital está marcada en los puntos bregma y lambda, mientras que la coronal y lambdaoidea, en pterion y asterion. En el espacio euclideo tridimensional, las tres suturas y los puntos tienen entre sí una relación vectorial fija. Permítase ahora la rotación del cráneo hasta ubicarlo en norma lateral. Si se consideran ejes de referencia, entonces las coordenadas originales de los puntos habrán sido alterados. Sin embargo la relación intrínseca entre estos puntos no varió. Esta *invariabilidad* en la descripción del cuerpo en rotación, es lo que precisamente refleja el tensor de crecimiento. Otro mérito del tensor estriba en que el crecimiento de cada punto es descrito independientemente de su entorno. En un diagrama craneano convencional en cambio, el desplazamiento de un punto puede depender del crecimiento producido en otros aún muy distantes.

La invariabilidad de los puntos craneométricos es crucial en el MEF porque los análisis de transformación requieren una localización exacta de cada nodo en todo momento. Este desplazamiento de puntos homólogos de una estructura temporal a otra, puede ser definido como la manera de identificar el trayecto de un punto en el espacio-tiempo. Son precisamente estas relaciones entre puntos homólogos lo que los tensores de crecimiento describen y cuantifican. Si la variación de un cuerpo es registrada en todos sus puntos, la información obtenida permitirá reconstruir la forma final de dicho cuerpo a partir de su forma inicial y el tensor de descripción se transforma entonces en un tensor de predicción.

Hay varios tipos de tensores. A continuación se describen algunos que son de interés en craneología:

1 — *Extensión máxima* (maximum strain): Este es un tensor que describe el crecimiento máximo de un elemento en cualquier dirección, con respecto a un elemento homólogo de referencia.

2 — *Extensión mínima* (minimal strain): Describe la cantidad de crecimiento mínimo en cualquier dirección, en relación al elemento homólogo de referencia. Las direcciones de las tensiones máxima y mínima son inicialmente perpendiculares entre sí.

3 — *Distorsión máxima* (maximum shear): El valor de este tensor está determinado en plano bidimensional, por la diferencia entre las tensiones máxima y mínima. Esta diferencia representa la magnitud de la deformación máxima, que ocurre a 45 grados de la dirección máxima de tensión. Esta es una medición del cambio angular entre los dos segmentos que fueron inicialmente perpendiculares.

4 — *Índice de área* (area ratio): Es la diferencia entre el área del elemento estudiado a una edad determinada y la del elemento homólogo de referencia. En estudios tridimensionales, debe calcularse el índice de volumen.

5 — *Índices de extensión máxima y mínima* (maximum and minimum extension ratios): Igual que en (4) estos valores representan la relación entre las longitudes inicial y final, correspondientes a las direcciones de las tensiones máxima y mínima. Los índices de extensión dividen la elongación sufrida a una edad dada por el valor correspondiente al del elemento homólogo de referencia. Tanto estos índices como los tensores de extensión máxima y mínima proporcionan información similar por estar interrelacionados, según se explica en el apéndice.

6 — *Rotación axial* (rotation of principal axes): Este tensor representa al coseno de los ángulos que forman las proyecciones de las extensiones máxima y mínima, con respecto a un eje de abscisas arbitrariamente seleccionado. Puede determinarse complementariamente el coseno del ángulo de la misma línea con respecto a un eje de ordenadas. En los elementos finitos tridimensionales, un eje mayor representa la dirección de crecimiento máximo, mientras que los otros dos ejes se suceden en direcciones mutuamente perpendiculares. Uno de ellos representa la tensión mínima de crecimiento y el otro representa un valor intermedio. Básicamente, la orientación de los ejes principales está sólo condicionada por los límites de cada elemento (nodos y lados) y en este sentido, son independientes de la elección del sistema de coordenadas. Variaciones en la elección de los ejes locales producirán diferentes cosenos direccionales, pero la orientación de los ejes principales será siempre la misma.

Los índices de área y de extensión, junto con la rotación axial, interpretan las variaciones tensionales y direccionales localizadas en cada elemento (figs. 2/8). Las cruces trazadas en el centro del elemento marcan las direcciones principales de extensión. El número en cada segmento representa el índice de extensión máxima en esa dirección. La longitud de cada brazo de la cruz es proporcional al grado de elongación producido. Cuando el crecimiento es aproximadamente uniforme, el elemento no cambia perceptiblemente su forma y consecuentemente, los índices de extensión son prácticamente iguales. Pero estos índices difieren cuando se producen cambios significativos en la forma del segmento, con la consiguiente alteración de sus ángulos interiores. Si la dirección máxima bisecta un ángulo interior, dicho ángulo decrecerá en función de la extensión producida.

Se ilustra a continuación, la aplicación del MEF a través de un estudio de crecimiento craneofacial de la rata. Por tratarse de una ejemplificación de procedimiento, no se discutirá en detalle los resultados obtenidos, sino más bien las propiedades conceptuales del método y sus ventajas con respecto a los métodos convencionales y a otros métodos propuestos.

MATERIAL Y METODOS

Fueron empleados datos provenientes de un estudio longitudinal del cráneo de rata de cepa europea. Los datos empleados consisten en las coordenadas de una serie de puntos anatómicos sagitales de 21 machos y 25 hembras obtenidos a las edades de 7, 14, 21, 30, 40, 60, 90 y 150 días de edad. Fueron empleados los siguientes puntos, según Vilmann y Moss (1979; 1981): rinion, nasion, bregma, lambda, sutura lambdaidea posterior, opistion, basion, esfenooccipital, interesfenoidal, preesfenoidal, espina nasal posterior, borde palatino anterior (Fig. 1).

Fueron construidos 10 elementos finitos triangulares bidimensionales (Fig. 1). Este número permitió realizar una discretización relativamente grande de los componentes neural y facial superior.

Los conceptos y operaciones computarizadas relativas al análisis de los elementos finitos, son descriptos en el apéndice. Dichas operaciones son detalladas en textos previamente citados y fueron adaptados por Patel (1983) a los estudios de crecimiento. El programa utilizado fue desarrollado íntegramente en la Universidad de Columbia, cuya copia puede ser obtenida solicitándola al primer autor. La tarea fue realizada con una computadora VAX 11/750 con pantalla Apolo, en el Instituto de Bioingeniería de dicha Universidad. Se comenzó por recolectar los datos a partir de los valores coordenados de cada punto craneano. Los pares de comparación se obtuvieron de los puntos homólogos provenientes de diferentes estadios de crecimiento de un mismo individuo, de promedios calculados entre diferentes individuos de un mismo sexo, o de valores entre sexos. Sólo se requiere que sean formas comparables entre sí. Estos puntos homólogos (nodos) fueron identificados por números secuenciales arbitrarios, con objeto de su identificación en el programa. A continuación se preparó una grilla, indicando los nodos a ser unidos para delimitar las regiones elementales. El otro cuerpo de datos, consistió en una lista de números arbitrariamente asignados a los números

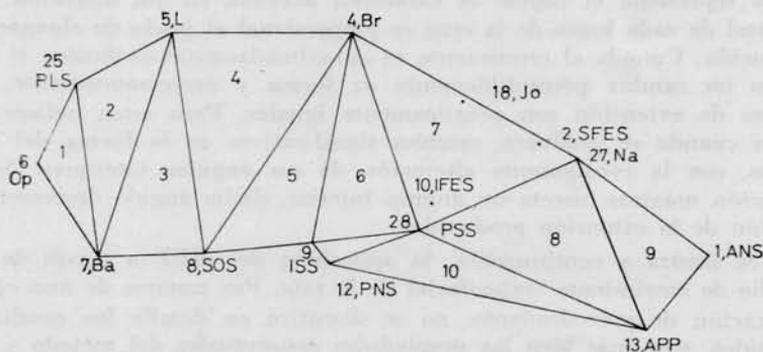


FIG. 1. — Discretización de un diagrama craneano sagital de la rata en elementos finitos bidimensionales trinodales.

nodales de cada elemento. Junto con las coordenadas nodales, estos datos constituyen la entrada primaria del programa.

El programa toma un elemento finito por vez y mediante series de cálculos basados en las coordenadas nodales realizó la transformación entre las coordenadas inicial y final de los puntos homólogos. Esta transformación es la idea básica del método. A cada estado (edad) del elemento, su región interna fue mapeada en un sistema coordenado estandarizado. Los determinantes jacobianos de esta transformación definen el tránsito del estado inicial al final. A continuación se empleó una rutina para computar las direcciones principales y los valores de las transformaciones calculadas. Esto corresponde en mecánica continua al cálculo de las tensiones y direcciones principales. El ángulo de distorsión fue calculado partiendo de fórmulas propias de mecánica continua, mientras que el índice de área fue obtenido de los productos resultantes de los índices de extensión. El programa posee comentarios especializados, con explicación adicional para cada una de las rutinas empleadas.

En resumen, estas operaciones computarizadas tratan al conjunto de datos, de modo que para cada elemento finito, el programa determina la intensidad de los cambios máximos y mínimos de crecimiento (extensión) y su dirección (rotación axial) en relación a un grupo etéreo inicial, cuyos elementos fueron tomados como referencia. En el caso presente, los cráneos de 7 días proveen dicho conjunto de valores básicos.

RESULTADOS

CRECIMIENTO NEUROCRANEANO

Se describe en primer término la cinemática del crecimiento neurocraneano de la rata, en el período 7-150 días (Figs. 2/8). La zona subtendida por los puntos Ba-Op-PLS-L-Br-PSS-ISS-SOS y comprendida por los elementos 1 al 6 conforma la región neurocraneana (Fig. 1). Puede observarse que la dirección y magnitud de los índices de extensión fueron aproximadamente iguales en casi todo el neurocráneo entre 7 y 14 días, cuya extensión máxima fue prácticamente paralela al segmento PLS-ISS (Fig. 2). Después de los 14 días los índices de extensión máxima fueron significativamente mayores en los elementos 3, 5 y 6 a lo largo del neurocráneo (Ba-SOS; SOS-ISS y ISS-PSS). Las extensiones paralelas a la línea L-SOS fueron significativamente menores que las de la base (Figs. 3/6) y luego de los 60 días ya no existió extensión alguna en esa dirección (Figs. 7 y 8).

Fue observado en los elementos 1 y 2 la dirección del índice de extensión máxima que prácticamente bisectó al ángulo situado en el punto PLS del elemento 1 entre los 14 y 30 días (Figs. 2/4) y el del elemento 2, hasta los 150 días (Figs. 2/8). Esto implica un decrecimiento para ambos ángulos. Luego de los 30 días, la elongación del elemento 1 ocurrió primariamente sobre el segmento OP-PLS (Figs. 5/8). Además la dirección de la extensión mínima bisectó el ángulo

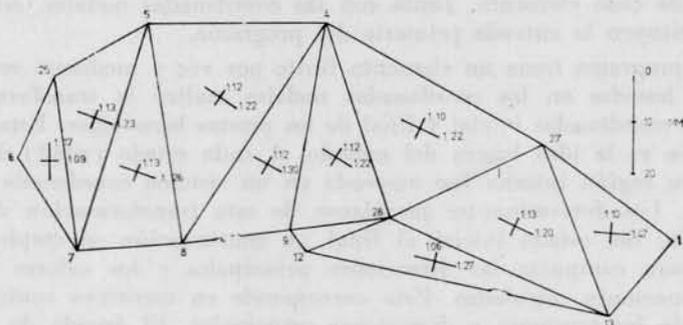


FIG. 2.—Tensores de extensión máxima y mínima y de rotación axial en cada elemento finito a los 14 días, con respecto a los elementos homólogos del grupo de referencia (7 días).

situado en el punto L del elemento 2, sugiriendo un incremento significativo de dicho ángulo durante todo el período. Las extensiones en los elementos 3 y 5 fueron similares en todos los períodos, como muestran las magnitudes y direcciones de las extensiones principales de estos elementos (Figs. 2/8). Grandes elongaciones ocurrieron en los segmentos Ba-SOS y SOS-ISS, con incrementos en los ángulos situados en puntos L y Br respectivamente. Por otro lado, el crecimiento en el elemento 4 tendió a ser más isotrópico, pues hubo insignificantes cambios de forma. Después de los 60 días (Fig. 6) prácticamente no hubo crecimiento en este elemento. El elemento 6 creció en forma similar al elemento 3. Fue observada gran extensión en el segmento ISS-PSS, mientras que el ángulo correspondiente al punto PSS decreció significativamente (Figs. 2/8).

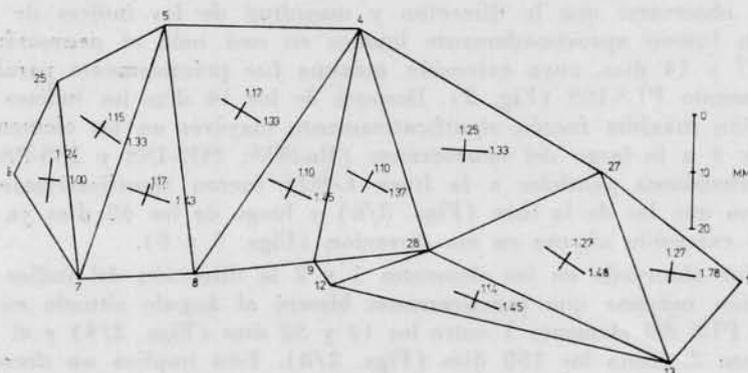


FIG. 3.—Tensores de extensión máxima y mínima y de rotación axial en cada elemento finito a los 21 días, con respecto a los homólogos del grupo de referencia (7 días).

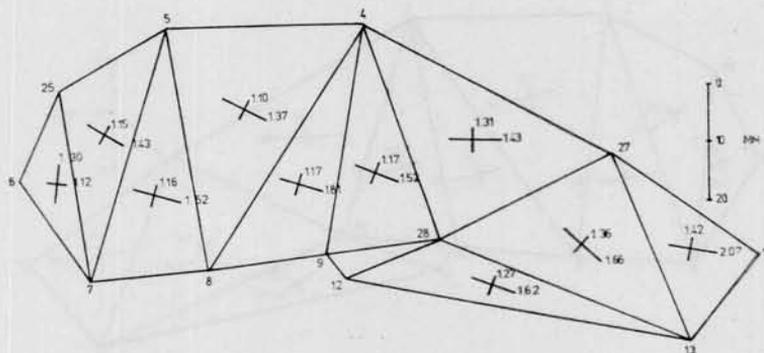


FIG. 4.—Tensores de extensión máxima y mínima y de rotación axial en cada elemento finito a los 30 días, con respecto a los homólogos del grupo de referencia (7 días).

CRECIMIENTO FACIAL

El crecimiento facial (elementos 7 al 10) (Fig. 1) entre los 7 y 14 días fue uniforme en los elementos 7, 8 y 10 con elongaciones primariamente en dirección paralela al segmento Br-Na. Sin embargo en el elemento 9, la elongación fue mayor y su dirección no fue paralela al segmento Br-Na. Su dirección tendió a bisecar al ángulo situado en ANS lo que implica la agudización de este ángulo y el consecuente cambio de forma del elemento correspondiente, durante el período 7-14 días (Fig. 2).

El crecimiento del elemento 8 fue similar al 10 (Figs. 3/9). La dirección observada en los elementos 8 y 10 fue paralela al segmento Na-ANS y bisectó el ángulo situado en el vértice APP provocando su agudización en el elemento 8. En el elemento 10 en cambio, la direc-

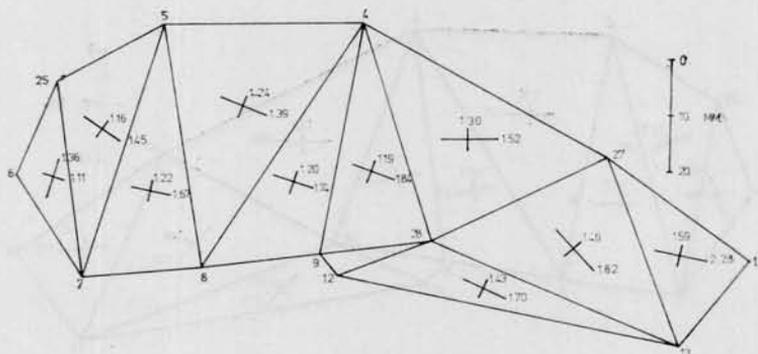


FIG. 5.—Tensores de extensión máxima y mínima y de rotación axial en cada elemento finito a los 40 días, con respecto a los homólogos del grupo de referencia (7 días).

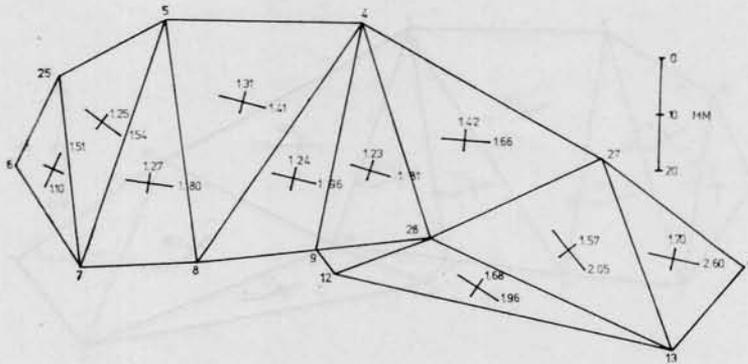


FIG. 6. — Tensores de extensión máxima y mínima y de rotación axial en cada elemento finito a los 60 días, con respecto a los homólogos del grupo de referencia (7 días).

ción de la elongación máxima provocó decrecimiento del ángulo APP sólo durante el período 7-21 días (Figs. 2, 3). Después la dirección cambió en sentido del segmento PSS-APP, rotando progresivamente hasta los 150 días y tornándose paralela a la correspondiente dirección del eje principal del elemento 8 (Figs. 4/8). Esto indica que el crecimiento observado en los elementos 8 y 10 fue predominantemente paralelo a la línea Br-APP. En el elemento 7 la dirección de la elongación máxima no fue paralela al segmento Br-Na después del día 14, sino que rotó en sentido contra reloj, hasta ubicarse paralelamente al segmento L-Br. Fue notado que el crecimiento en este elemento es más uniforme que en los elementos 8 y 10, con su ángulo en Na decreciendo progresivamente (Figs. 3/8).

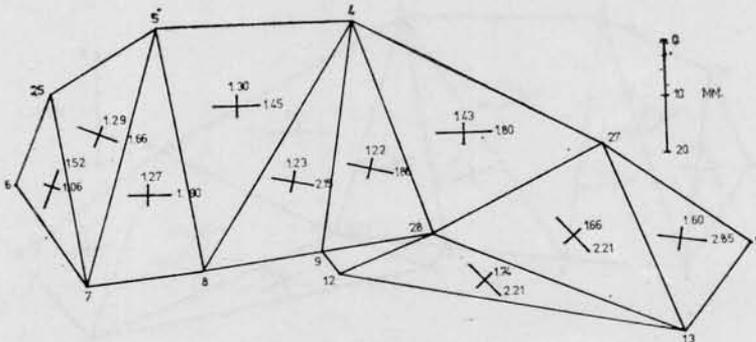


FIG. 7. — Tensores de extensión máxima y mínima y de rotación axial en cada elemento finito a los 90 días, con respecto a los homólogos del grupo de referencia (7 días).

En el elemento 9 la dirección de máxima extensión bisectó el ángulo ANS durante todo el período, implicando significativos cambios de forma por el decrecimiento de dicho ángulo. La magnitud del índice de extensión en el elemento 9 fue mayor que en los elementos 7, 8 y 10 y su dirección tendió a ser paralela al segmento L-Br (Figs. 2/8).

DISCUSION

Los rasgos salientes del crecimiento neurocraneano en proyección sagital fueron: (a) extensiones máximas (aproximadamente 5,0 mm) en las regiones basioccipital, basiesfenoidal y preesfenoidal, mientras que extensiones menores (aproximadamente 3,0 mm) correspondieron a las regiones parietal e interparietal, (b) cambios angulares significativos en los puntos lambda y occipito-interparietal, (c) las extensiones mínimas (aproximadamente 2,0 mm) ocurrieron en dirección de la altura neurocraneana posterior. Las grandes elongaciones observadas en la región basicraneal, junto con un grado mucho menor de elongación de la porción parietal de la bóveda, causaron una significativa rotación contra reloj de las regiones frontal anterior y de la placa cribosa del etmoides en torno al punto bregma, que se correspondió con la ortocefalización del cráneo facial de la rata.

Los rasgos salientes del crecimiento facial en proyección sagital fueron: (a) extensiones máximas (aproximadamente 5,7 mm) en el área central del esplanocráneo, en dirección dorso-basilar, paralela al segmento Br-APP, (b) crecimiento de la región posterior del esplanocráneo en dirección paralela al segmento parietal con una extensión de unos 4,8 mm, (c) pronunciadas extensiones (hasta 7,5 mm) y significativos cambios de forma en la región anterior del esplanocráneo, fundamentalmente del complejo nasal, (d) variación angular significativa en las regiones iniaca e infradental.

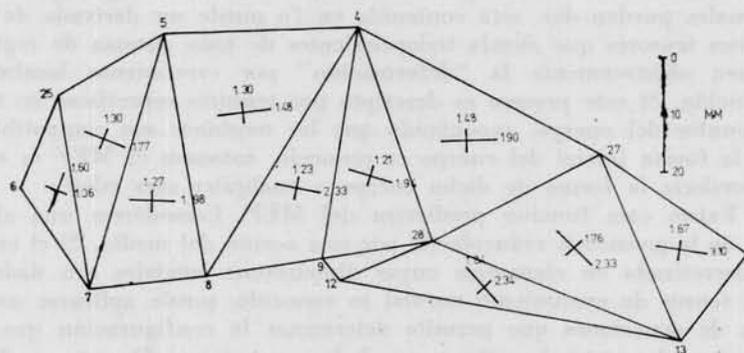


FIG. 8. — Tensores de extensión máxima y mínima y de rotación axial en cada elemento finito a los 150 días, con respecto a los homólogos del grupo de referencia (7 días).

Fue también calculada la rotación de los tensores en cada elemento. Sus direcciones relativas con respecto al elemento (4) confirmó la gran rotación en sentido contra reloj producida en el esplanocráneo con respecto al cráneo neural.

Se considera que la descripción efectuada ilustra las características del método de los Elementos Finitos y evidencia su utilidad en la resolución de problemas tanto de craneología antropológica como de todo estudio sobre desarrollo craneofacial. Para realizar estudios más detallados, se requiere de una mayor discretización, la cual sin embargo, es comparable con la usada para un estudio craneofacial en mono *Macacus rhesus* (Cheverud *et al.*, 1983).

Toda persona familiarizada con los métodos craneográficos tradicionales puede quedar confundida por la ausencia en el MEF de la acostumbrada superposición de diagramas. A este respecto debe recordarse que no existen puntos ni segmentos referenciales para el MEF, por cuanto se parte de la base conceptual que ninguno permanece inalterado por los cambios de crecimiento. Tampoco considera un centro fijo alrededor del cual el resto del esqueleto craneano crezca y se desarrolle. El MEF emplea el centroide de cada elemento finito para poder determinar la intersección de los ejes de extensión máxima y mínima, pero estas localizaciones no son consideradas invariables.

Por conceptos de mecánica continua, se supone que todos los puntos situados dentro de cada elemento finito se comportan de igual forma. Esto puede no corresponderse con la realidad cuando el grado de discretización realizado es bajo. También debe considerarse que los elementos finitos pueden incluir componentes anatómicos de diferente estructura histológica y con distintos tipos de crecimiento, a lo que debe agregarse también, la eventual existencia de continentes extracelulares. Estas deficiencias pueden ser fácilmente remediables con un incremento de la discretización, disminuyendo la distancia entre nodos contiguos mediante la inclusión de nuevos puntos craneométricos.

Toda la información que la craneografía y la roentgenografía tradicionales pueden dar, está contenida en (o puede ser derivada de) diferentes tensores que siendo independientes de todo sistema de registro, definen objetivamente la "deformación" por crecimiento localmente producida. Si este proceso es descrito por tensores específicos en todos los puntos del cuerpo, suponiendo que las tensiones son compatibles y que la forma inicial del cuerpo es conocida, entonces el MEF es capaz de predecir la forma de dicho cuerpo a cualquier otra edad.

Existe otra función predictora del MEF. Considérese una alteración de la geometría craneofacial por una acción del medio. Si el cráneo es discretizado en elementos cuyas dimensiones iniciales son dadas, y si el tensor de crecimiento normal es conocido, puede aplicarse un sistema de ecuaciones que permite determinar la configuración que tendrán los elementos homólogos a edades posteriores. De este modo, el MEF puede también ser usado para estudiar los cambios de tamaño y forma del esqueleto craneofacial cuando está sometido a cualquier tipo de tensión exógena que altere el crecimiento normal.

Fueron probados otros modelos matemáticos de crecimiento craneofacial, tales como el modelo de centro alométrico y el de crecimiento reticular (Moss *et al.*, 1984). El primero presupone una relación estrictamente alométrica de crecimiento a lo largo de radios fijos y por eso, no puede modelar con precisión el tipo de crecimiento no gnomónico, en el que cada segmento está sujeto a diferentes relaciones de crecimiento. Además es difícil definir un único centro alométrico, tanto en el cráneo humano como en el de la rata (Moss *et al.*, 1983).

El modelo de centro alométrico no fue capaz de describir hasta ahora, cambios tales como la variación angular entre segmentos contiguos. Tampoco es posible analizar los componentes facial y neurocráneo a partir de un único centro alométrico, por cuanto los componentes óseos en ambas regiones crecen en forma muy diferente en función de la edad. Este modelo tampoco puede describir adecuadamente la rotación del componente facial en torno al neurocráneo, durante la ortocefalización.

El modelo reticular puede detectar fenómenos de crecimiento con mayor precisión que el modelo alométrico, por su mayor poder descriptivo de los cambios de tamaño y forma craneofacial. Esto fue verificado aplicando pruebas que permitieron definir modelos matemáticos, tanto en el cráneo humano como en el de la rata (Moss *et al.*, 1983). Otra ventaja importante del modelo reticular es que puede aplicarse tanto al neuro como al esplanocráneo, considerados ambos como una única estructura ósea. De este modo puede determinarse la rotación relativa entre estos componentes durante el crecimiento.

Ambos modelos considerados están basados en la ley de alometría aunque fue comprobado que el crecimiento alométrico es restringido (Skalak *et al.*, 1981; 1982; Moss *et al.*, 1983; 1984). Algunos segmentos, aún en la estructura reticular, pueden no crecer alométricamente y ésto limitaría el alcance de estos métodos. Además por cuanto las extensiones máximas y mínimas no son directamente cuantificables, estos parámetros son más convenientemente computados por el MEF. A ésto debe agregarse lo dicho en razón de la función predictora del MEF, en tanto los datos básicos estén especificados como tensores.

Se concluye que si bien los modelos alométrico y reticular constituyen un avance substancial con respecto a la craneografía convencional, el MEF constituye hasta el momento el modelo más apto para el estudio de la cinemática craneofacial, tanto normal como bajo condición biológico-ambiental modificadora.

APENDICE

Se fundamenta el método propuesto describiendo las ecuaciones específicas para los casos más simples, como el de un elemento finito triangular trinodal sometido a tensión constante en dos dimensiones. Los resultados presentados en este trabajo fueron computados sobre esta base, aunque pueden realizarse otros

estudios, empleando elementos de mayor complejidad (Desai y Abel, 1972; Patel, 1983).

Para describir un cuerpo en un sistema tridimensional, pueden utilizarse los ejes cartesianos (x_1, x_2, x_3) a un tiempo t_0 , especificando estas coordenadas en cada punto del cuerpo (Fig. 9). A un tiempo posterior t_1 , se supone que el cuerpo sufrió deformación por crecimiento, el cual es descrito especificando las nuevas coordenadas con respecto a los ejes X_1, X_2, X_3 . Los ejes X_i pueden corresponder al mismo conjunto que x_i , pero no necesitan tener el mismo origen u orientación. El hecho que el tensor de crecimiento es independiente de estas elecciones, ilustra la conveniencia del tensor de descripción, dado su carácter de invariabilidad. Se considera que el crecimiento del cuerpo es completamente conocido si las coordenadas finales X_i de cada punto homólogo a un tiempo t_1 son dadas como funciones de las coordenadas iniciales x_i de los mismos puntos a t_0 . El desplazamiento de cualquier punto homólogo es definido como el vector μ , teniendo componentes μ_i dados por:

$$\mu_i = X_i - x_i \quad (1)$$

En la ecuación (1) y siguientes, el subíndice i puede tomar valores 1, 2, 3. Los desplazamientos en μ_i pueden ser considerados como funciones conocidas de x_i , por cuanto X_i se supone conocido en términos de x_i . Luego, el tensor de crecimiento es definido por:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha\mu_i}{\alpha x_j} + \frac{\alpha\mu_j}{\alpha x_i} + \frac{\alpha\mu_k}{\alpha x_i} + \frac{\alpha\mu_k}{\alpha x_j} \right) \quad (2)$$

donde i, j, k , tienen otra vez el rango 1, 2, 3. Si μ fuera el desplazamiento del cuerpo original debido a su deformación por fuerzas externas más que por el crecimiento, el tensor E_{ij} podría ser el denominado Tensor de Green, usado en mecánica continua (Green y Adkins, 1970; Fung, 1972). Es llamado tensor de cre-

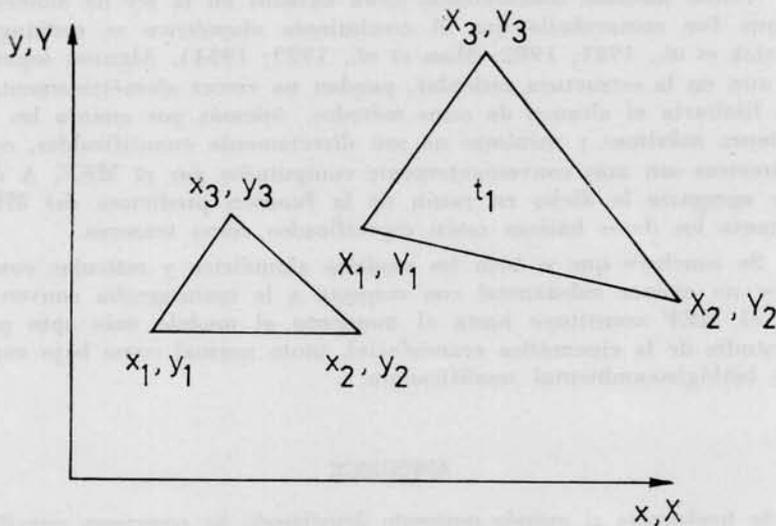


FIG. 9. — Elemento finito trinodal, bidimensional en posición inicial, con coordenadas x_i, y_i y en posición final con coordenadas X_i, Y_i .

cimiento cuando la deformación ocurre sólo por este proceso, sin fuerzas externas interactuantes.

Por cuanto el tensor E_{ij} es simétrico, tiene tres valores principales E_1 , E_2 y E_3 dados por la raíz E_k del determinante:

$$| E_{ij} - E_k \delta_{ij} | = 0 \quad (3)$$

donde δ_{ij} constituye el denominado delta de Kronecker. Las raíces E_1 y E_2 son los valores máximo y mínimo de los componentes normales de tensión y E_3 es un valor estacionario. Estas tensiones principales ocurren en tres direcciones mutuamente perpendiculares, dadas por:

$$(E_{ij} - E_k \delta_{ij}) n_j^k = 0 \quad (4)$$

donde n_j^k son los componentes del vector unitario n^k en la dirección E_k . Los elementos lineares en estas direcciones principales permanecen siendo mutuamente perpendiculares después de la deformación (crecimiento). Consiguientemente, una rotación en el entorno de un punto con respecto a otro, es computada como el cambio en la orientación relativa de sus ejes principales. Una propiedad de las extensiones principales es que están relacionadas con los índices de elasticidad (stretch ratios) por (Fung, 1972):

$$\lambda_1 = (1 + 2 E_1)^{1/2} \quad (5)$$

El índice de elasticidad es la relación del elemento lineal a t_1 con respecto a su longitud a t_0 . Todas estas ecuaciones son aplicadas al crecimiento bidimensional, por lo cual i, j, k , están limitados a 1, 2 solamente. Sin embargo, conviene ilustrar las ecuaciones específicas para dos dimensiones, usando (x, y) en lugar de (x_1, x_2) ; (X, Y) en lugar de (X_1, X_2) y (u, v) en lugar de (u_1, u_2) . Los índices 1, 2, 3 son ahora usados para indicar valores relacionados con los nodos 1, 2, 3 del triángulo típico trinodal bidimensional. Se asume que las coordenadas de los puntos nodales son conocidas a partir de datos biológicos. Luego, los desplazamientos de los puntos nodales son:

$$\mu_1 = X_1 - x_1 \quad \mu_2 = X_2 - x_2 \quad \mu_3 = X_3 - x_3 \quad (6)$$

$$v_1 = Y_1 - y_1 \quad v_2 = Y_2 - y_2 \quad v_3 = Y_3 - y_3 \quad (7)$$

También se asume que los desplazamientos (u, v) son funciones lineares de las coordenadas (x, y) en esta clase particular de elementos finitos. Además, se requiere que tales desplazamientos se expresen en los valores nodales dados por las ecuaciones (6) y (7). Estos requerimientos conducen a formular las ecuaciones para desplazamientos en cualquier punto (x, y) del elemento en la forma:

$$\mu = [(a_1 + b_1 x + c_1 y) \mu_1 + (a_2 + b_2 x + c_2 y) \mu_2 + (a_3 + b_3 x + c_3 y) \mu_3] / 2 \Delta \quad (8)$$

$$v = [(a_1 + b_1 x + c_1 y) v_1 + (a_2 + b_2 x + c_2 y) v_2 + (a_3 + b_3 x + c_3 y) v_3] / 2 \Delta \quad (9)$$

Donde:

$$a_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2 \quad (10)$$

$$b_1 = y_2 - y_3 \quad (11)$$

$$c_1 = x_3 - x_2 \quad (12)$$

$$\Delta = x_2 y_3 - x_3 y_2 + x_3 y_1 - x_1 y_3 + x_1 y_2 - x_2 y_1 \quad (13)$$

Los coeficientes $a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3$ están dados por las ecuaciones (1), (11) y (12) con rotaciones cíclicas de los subscripts. La constante representa el área del elemento triangular a t_0 . Para coordenadas nodales dadas, los coeficientes en las ecuaciones (8) y (9) son conocidos y sólo x e y son variables. Luego los componentes del tensor de crecimiento son computados por:

$$E_{xx} = \frac{a\mu}{ax} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{a\mu}{ax} \right)^2 + \left(\frac{av}{ax} \right)^2 \right] \quad (14)$$

$$E_{xy} = E_{yx} = \frac{a\mu}{ay} + \frac{av}{ax} + \left[\left(\frac{2a\mu}{ax} \frac{av}{ay} \right) + \left(\frac{av}{ax} \frac{av}{ay} \right) \right] \quad (15)$$

$$E_{yy} = \frac{av}{ay} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{a\mu}{ay} \right)^2 + \left(\frac{av}{ay} \right)^2 \right] \quad (16)$$

Por cuanto u y v son lineales en x e y , los componentes de tensión E_{11}, E_{22}, E_{33} son siempre constantes en cada elemento. Las tensiones principales son las raíces E_1, E_2 de la ecuación (3) con rango 1, 2. Cuando se opera en dos dimensiones los resultados pueden expresarse como:

$$E_1, E_2 = \frac{1}{2} (E_{xx} + E_{yy}) \pm \left[\frac{1}{4} (E_{xx} - E_{yy})^2 + E_{xy}^2 \right]^{1/2} \quad (17)$$

Las orientaciones de los ejes principales son dadas por la ecuación (4) la cual conduce al resultado:

$$\sigma = \frac{1}{2} \text{ARCTAN} \frac{2 E_{xy}}{E_{xx} - E_{yy}} \quad (18)$$

Donde σ es el ángulo entre el eje principal y el eje de abscisas. Finalmente, los índices principales de elasticidad están dados por:

$$\lambda_1 = (1 + 2 E_1)^{1/2} \quad \lambda_2 = (1 + 2 E_2)^{1/2} \quad (19)$$

Las ecuaciones precedentes permiten computar los elementos triangulares, usando nodos en los ángulos solamente. Para otros tipos de elemento finito los pasos son los mismos, pero las fórmulas algebraicas de las funciones, particularmente de las (8) y (9), son más complejas. En elementos de alto orden, las tensiones no son siempre constantes, sino que varían entre un punto y otro. Esto concuerda con la observación biológica, que especifica dicha variación como verdadera. No obstante, una tensión constante como la previamente considerada, significa una aproximación válida al hecho real, por cuanto está basada en la variación promedio de cada elemento.

BIBLIOGRAFIA

- BATHE, K. & WILSON, E., 1976. *Numerical methods in finite element analysis*. Prentice Hall, Englewood, New Jersey.
- BOOKSTEIN, F. L., 1978. *The measurement of biological shape and shape change: Lecture notes in biomath.* 24, Springer Verlag, Berlin.
- 1982. On the cephalometric of skeletal change. *Am. J. Orthod.* 82: 177-198.
- 1983. Geometry of craniofacial growth invariants. *Am. J. Orthod.* 83: 221-234.
- BORCHER, L. & RICHERT, P., 1983. Three-dimensional stress distributor around a dental implant at different stages of interface development. *J. Dent. Res.* 62: 155-159.
- BOWLEY, W. W., BURSTONE, C., KOENIG, H. A. & SIATKOWSKY, R., 1974. Prediction of tooth displacement using laser holography and finite element technique. *Proc. Symp. of Comission V., Internat. Soc. for Photogrammetry.*
- CALCOTE, L. R., 1968. *Introduction to continuum mechanics*. D. van Nostrand Comp. Inc., Princeton.
- COOK, S. D., KLAWITTER, J. J. & WEINSTEIN, S. M., 1982. A model for the implant-bone interface characteristic of porous dental implants. *J. Dent. Res.* 61: 1006-1009.
- CHEVERUD, J., LEWIS, J., BACHRACH, W. & LEW, W. D., 1983. The measurement of form and variation in form: an application of three-dimensional quantitative morphology by finite element methods. *Am. J. Phys. Anthropol.* 62: 151-165.
- DESAI, C. S. & ABEL, J. F., 1972. *Introduction to the finite element method: A numerical method for engineering analysis*. van Nostrand Reinhold Comp., New York.
- FUNG, Y. C., 1972. *Foundations of solid mechanics*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- GALLAGHER, R. H., SIMON, B. R., JOHNSON & GROSS, J. F., 1982. *Finite elements in biomechanics*. John Wiley and Sons, New York
- GREEN, A. E. & ADKINS, J. E., 1970. *Large elastic deformations*. 2nd Ed. Oxford University Press, London.
- KRAGT, G. & DUTERLOO, H. S., 1982. The initial effects of orthopedic forces: A study of alterations in the craniofacial complex of a macerated skull owing to high-pull headgear traction. *Am. J. Orthod.* 81: 57-64.
- KROGMAN, W. M. & SASSOUNI, V., 1957. *Syllabus in roentgenographic cephalometry*. University of Pennsylvania, Center for the study of child growth. Philadelphia.
- LEWIS, J. L., LEW, W. D. & ZIMMERMAN, J. R., 1980. A non-homogenous anthropometric scaling method based on finite element principles. *J. Biomech.* 13: 815-824.
- MCPHERSON, G. K. & KRIEWAHL, T. J., 1980. Fetal head mouldings: An investigation utilizing a finite element of the human fetal parietal bone. *J. Biomech.* 13: 17-26.
- MOSS, M. L., 1983. Beyond roentgenographic cephalometry-What? *Am. J. Orthod.* 84: 77-79.
- MOSS, M. L., SKALAK, R., DASGUPTA, G. & VILMANN, H., 1980. Space time and space-time in craniofacial growth. *Am. J. Orthod.* 77: 591-612.
- MOSS, M. L., SKALAK, R., PATEL, H., MOSS-SALENTIEN, L. & VILMANN, H., 1984. An allometric network model of craniofacial growth. *Am. J. Orthod.* (en prensa).
- MOSS, M. L., SKALAK, R., SHINOZUKA, M., PATEL, H., MOSS-SALENTIEN, L., VILMANN, H. & MEHTA, P., 1983. Statistical testing of an allometric centred model of craniofacial growth. *Am. J. Orthod.* 83: 5-18.
- MOYERS, R. E. & BOOKSTEIN, F. L., 1979. The inappropriateness of conventional cephalometrics. *Am. J. Orthod.* 75: 599-617.

- NIKLAS, K. J., 1977. Applications of finite element analyses to problems in plant morphology. *Ann. Bot.* 41: 133-153.
- OWEN, D. R. J. & HINTON, E., 1980. *A simple guide to finite elements*. Pineridge Press Ltd. Sansea.
- PATEL, H. C., 1983. *Growth analysis by non-linear continuum theory*. Tesis Doctoral Columbia University, New York.
- REINHARDT, R. A., KREJCI, R. F., PAO, Y. C. & STANNARD, J. G., 1983. Dentin stresses in post-reconstructed teeth with diminishing bone support. *J. Dent. Res.* 62: 1002-1008.
- ROHLMANN, A., MOSSNER, U., BERGMANN, B. & KOLBEL, R., 1982. Finite-element-analysis and experimental investigations of stress in the femur. *J. Biomed. Eng.* 4: 241-246.
- RUBIN, C., KRISHN MURTHY, N., CAPILUOTO, E. & YI, H., 1983. Stress analysis of the human tooth using a three-dimensional finite element model. *J. Dent. Res.* 62: 82-86.
- SKALAK, R., 1981. *Growth as a finite displacement field*. D. Carlson and R. T. Shields (eds.). IUTAM Symposium on finite elements. Martinus Nijhoff Publ. Den. Haag, pp. 347-355.
- SKALAK, R., DASGUPTA, G., MOSS, M. L., OTTEN, E., DULLEMEIJER, P. & VILMANN, H., 1982. Analytical description of growth. *J. Theor. Biol.* 94: 555-577.
- TERLINGEN, P. J. A. M., 1973. *Material and mathematical model experiments on orthodontic extraoral traction*. Tesis Doctoral. University of Nijmegen.
- VILMANN, H. & MOSS, M. L., 1979. Studies on orthocephalization. 2. Flexion of the rat head in the period between 14 and 60 days. *Gegenbaurs Morphol. Jahrb.* 125: 577-582.
- VILMANN, H. & MOSS, M. L., 1981. Studies on orthocephalization. 7. Behavior of the rat cranial frame in the period between 1 day before birth and 14 days after birth. *Acta Anat.* 109: 157-160.
- WRIGHT, K. W. J. & YETTRAM, A. L., 1978. Finite element stress analysis of a Class I amalgam restoration subjected to setting and thermal expansion. *J. Dent. Res.* 57: 715-723.
- ZIENKIEWICZ, O. C., 1977. *The finite element method*. 3rd edition. McGraw-Hill Book Comp. (U.K.) Ltd., London.

Manuscrito recibido el 6 de enero de 1986.

Manuscrito revisado recibido el 1 de octubre de 1986.