

UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID

ESCUELA POLITÉCNICA

INGENIERÍA INDUSTRIAL



# Determinación de la actitud de un satélite utilizando un único sensor de horizonte

*Autor:*  
Eduardo García  
López

*Tutor:*  
Javier Rodríguez  
Rodríguez

29 - Abril -2010

## Resumen

En este trabajo se expone un método mediante el que poder determinar la actitud de un satélite. Para ello se ha considerado un satélite orbitando la Tierra de forma que se mantenga apuntando hacia está.

El trabajo se ha desarrollado partiendo de la física contenida en las ecuaciones de Euler, realizando su resolución mediante métodos analíticos y numéricos.

Este estudio preliminar nos ha permitido introducir en las ecuaciones los efectos y características correspondientes al movimiento de un satélite en órbita. De esta forma se ha podido realizar un código que permite su resolución numérica.

Una vez desarrolladas las ecuaciones se ha obtenido su solución analítica linealizándolas para pequeños desplazamientos del satélite. De esta forma el código ha quedado validado y se tiene una base sobre la que conseguir el objetivo del trabajo.

La última parte del trabajo se corresponde con la determinación de la actitud, basándonos en que solo disponemos de la información de un sensor de horizonte. Demostrándose como a partir de la solución analítica obtenida anteriormente, se puede establecer un método que permite la determinación de la actitud del satélite.

En conclusión, se ha conseguido establecer un método de cálculo basado en el análisis de los datos disponibles de un sensor de horizonte que permite determinar la actitud del satélite. Este método es válido siempre que los desplazamientos sean pequeños, es decir el satélite disponga de un sistema de control que lo mantenga en dirección a la Tierra.

## Agradecimientos

No quiero dejar este documento, que pone fin a una etapa muy importante, sin agradecer a todas aquellas personas que simplemente se lo merecen. No cabe duda que este apartado es la parte mas complicada ya que han sido muchas las personas que me han rodeado durante todos estos años. Por todo ello quiero dar las gracias a todos los que se sientan referenciados por mis palabras, a mi tutor *Javier Rodriguez* y muy en especial a las siguientes personas:

*Flori y Ángel*, no solo por ser mis padres, sino por ser unas personas excepcionales que han sabido darme todo su apoyo a pesar de todas las trabas que como buen hijo les pongo

*Alberto*, por ser mi hermano favorito a pesar de nuestras confrontaciones de auténticos hermanos. Y por supuesto a *Maria*, ¡que seáis felices y comáis perdices!

*Victoria*, por ser parte tan especial durante estos últimos años, me ha hecho recobrar el animo en momentos malos y ha sabido ignorarme en momentos de necesidad.

*Juan*, simplemente por ser el amigo, ese compañero para siempre que estaba antes y estará después, con mayor o menor presencia, pero los dos sabemos que estamos. *Paula*, por ser la amiga, por pasar tan buenos ratos juntos y por todo tu cariño. *Cristina, Miguel* (ya si que lo puedes decir), Tintin y Lucas.

*Chema*, por que hemos pasado todo este tiempo juntos de cabo a rabo y de banco en banco, gran compañero y gran amigo. *Aitor*, otro compañero y amigo excepcional, lejos en distancia pero cercanos sin duda. *Pasku*, ese gran compañero y amigo que siempre entendió la esencia de lo que significa ser del ochentayuno.

*Daniela*, por ser tan gran persona y por poder contar con ella siempre.

*Mikel, Mario, Antonio, Jaime, Dani*, por ser los que sois por que todos empezamos juntos y también permanecemos juntos, por que nos quedan muchos sannicasios que celebrar.

*José*, que no lo podra leer.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>6</b>
1.1. Objetivos . . . . .	6
1.2. Estructura del documento . . . . .	7
<b>2. Sensores para control de posición en satélites</b>	<b>8</b>
2.1. Sensores solares . . . . .	8
2.2. Sensores magnéticos . . . . .	9
2.3. Sensores de estrellas . . . . .	9
2.4. Giróscopos . . . . .	9
2.5. Sensores de Horizonte . . . . .	9
<b>3. Dinámica del sólido rígido: Ecuaciones de Euler</b>	<b>13</b>
3.1. Matrices de Rotación . . . . .	13
3.2. Ecuaciones de Euler . . . . .	15
3.3. Solución del movimiento libre . . . . .	17
<b>4. Momentos externos en satélites</b>	<b>22</b>
4.1. Sistemas de ejes de rotación . . . . .	22
4.2. Momento debido al gradiente gravitacional . . . . .	24
4.3. Momento debido a las fuerzas de inercia . . . . .	26
<b>5. Validación del código numérico</b>	<b>28</b>
5.1. Linealización de las ecuaciones . . . . .	28
5.2. Solución de las ecuaciones . . . . .	30
5.3. Validación . . . . .	33
<b>6. Determinación de la actitud</b>	<b>39</b>
6.1. Nutación . . . . .	39
6.2. Obtención de los ángulos de Euler . . . . .	41
6.3. Ejemplos . . . . .	43

## ÍNDICE GENERAL

---

<b>7. Conclusiones y trabajo futuro</b>	<b>51</b>
7.1. Conclusiones . . . . .	51
7.2. Trabajo futuro . . . . .	52
<b>A. Código numérico para el movimiento libre</b>	<b>54</b>
<b>B. Código numérico completo</b>	<b>57</b>

# Índice de figuras

2.1. Sensor de Horizonte de ESA Telecomunicaciones . . . . .	10
2.2. Esquema funcionamiento sensor de horizonte panorámico . . .	11
2.3. T-Scanwheel de Ithaco, Inc. . . . .	11
3.1. Rotaciones principales . . . . .	14
3.2. Solución movimiento libre para $I_1 = I_2 = I_3$ . . . . .	17
3.3. Solución analítica movimiento libre para $I_1 = I_2 = 10$ y $I_3 = 1$	19
3.4. Solución movimiento libre para $I_1 = I_2 = 10$ y $I_3 = 1$ . . . . .	19
3.5. Solución movimiento libre para $I_1 = I_2 = 10$ y $I_3 = 1$ . Energía cinética de rotación para la solución numérica . . . . .	20
3.6. Solución movimiento libre para $I_1 = I_2 = 10$ y $I_3 = 1$ . Suma cuadrado parámetros de Euler . . . . .	21
4.1. Sistema de referencia fijo a la orbita . . . . .	23
5.1. Validación del código. Caso 1. Solución para $\beta(t)$ , $\alpha(t)$ . . . . .	34
5.2. Validación del código. Caso 1. Solución para $\varphi(t)$ . . . . .	35
5.3. Validación del código. Caso 1. Energía cinética y suma de parámetros. . . . .	35
5.4. Validación del código. Caso 2. Solución para $\beta(t)$ , $\alpha(t)$ . . . . .	36
5.5. Validación del código. Caso 3. Solución para $\beta(t)$ , $\alpha(t)$ . . . . .	37
5.6. Validación del código. Efecto de los términos acumulativos. Solución para $\beta(t)$ , $\alpha(t)$ . . . . .	38
6.1. Representación del ángulo de nutación . . . . .	40
6.2. Análisis espectral nutación. $\dot{\varphi} = 1$ , $\lambda = 0,1$ , $w_c = 1$ . . . . .	44
6.3. Análisis espectral nutación. $\dot{\varphi} = 5$ , $\lambda = 0,1$ , $w_c = 1$ . . . . .	44
6.4. Análisis espectral nutación. $\dot{\varphi}_0 = 1$ , $\lambda = 0,5$ , $w_c = 1$ . . . . .	45
6.5. Análisis espectral nutación. $\dot{\varphi} = 1$ , $\lambda = 0,1$ , $w_c = 0,6$ . . . . .	45
6.6. Análisis espectral nutación. $\dot{\varphi} = 5$ , $\lambda = 0,1$ , $w_c = 0,6$ . . . . .	46
6.7. Análisis espectral: Desplazamiento angular $\alpha$ . . . . .	47
6.8. Análisis espectral: Desplazamiento angular $\beta$ . . . . .	48

## ÍNDICE DE FIGURAS

---

6.9. Análisis espectral nutación. $\dot{\varphi}_0 = 5$ , $\lambda = 0,5$ , $w_c = 1$ . . . . .	49
6.10. Análisis espectral: Desplazamiento angular $\alpha$ y $\beta$ . . . . .	49

# Capítulo 1

## Introducción

Este trabajo es un acercamiento a la dinámica y control de posición de los satélites. Estos conceptos, son de una gran importancia en determinados tipos de satélites, y se pueden resumir en la idea de que un satélite no solo debe ser capaz de mantenerse en órbita sino que también debe apuntar en la dirección correcta. Para conseguir ese objetivo necesitaremos de un buen sistema de toma de datos (sensores), estabilización y control.

La idea con la que trabajaremos será la de conseguir que un satélite, en órbita alrededor de la Tierra, se mantenga apuntando hacia la Tierra. Como podría ser el caso de un satélite de comunicaciones. En este tipo de satélites se hace uso de varios sensores, con el fin de obtener información suficiente sobre su posición exacta.

En nuestro caso la principal motivación nace de la idea inversa, de forma que, partiendo de la física del problema se determina la necesidad de estos sensores. Trabajaremos en paralelo con métodos numéricos (haciendo uso de la herramienta informática Matlab) y analíticos.

### 1.1. Objetivos

Los objetivos de este proyecto se resumen en:

- Obtener las ecuaciones que rigen el movimiento de un satélite situado en órbita, incluyendo los principales efectos que afectan a su comportamiento.
- Generar un código numérico capaz de resolver las ecuaciones, validándolo con la resolución analítica.



- Obtener un algoritmo que permita determinar la posición del satélite, utilizando únicamente la información proporcionada por un sensor de horizonte.

## 1.2. Estructura del documento

Empezaremos, en el **Capítulo 2**, realizando una descripción del tipo de sensores que frecuentemente se usan en satélites.

Una vez introducidos este tipo de sensores, en el **Capítulo 3** describiremos la física del problema. En particular las Ecuaciones, Parámetros y Ángulos de Euler relacionados con el movimiento de un sólido rígido. Resolveremos estas ecuaciones de forma numérica y comprobaremos la validez con la solución analítica.

En el **Capítulo 4** consideraremos el efecto de los Momentos de Inercia actuando sobre el satélite. Tendremos en cuenta efectos debidos al gradiente gravitacional así como de las fuerzas de inercia. Alcanzado este punto el modelo matemático será una buena aproximación para describir el comportamiento real de un satélite en órbita, a pesar de las diferentes simplificaciones que se introducirán en el modelo.

En el **Capítulo 5** realizaremos una serie de simplificaciones con el fin de hallar una solución analítica. Obtenida esta nos será fácil verificar el código numérico.

En el **Capítulo 6** se demostrara como a partir de la información proporcionada por un único sensor de horizonte somos capaces de averiguar la posición de un satélite orbitando alrededor de la Tierra y por tanto mantenerlo apuntando hacia está.

Por último, en el **Capítulo 7**, expondremos las conclusiones así como plantearemos posibles trabajos futuros.

# Capítulo 2

## Sensores para control de posición en satélites

Comenzamos describiendo los sensores utilizados en el control de posición de satélites. Con el fin de proporcionar nociones básicas sobre el tema de este trabajo antes de adentrarnos en la resolución del problema físico.

### 2.1. Sensores solares

Estos son sensores son los mas utilizados, actualmente todos los satélites llevan al menos algún tipo de estos sensores. Una de las principales ventajas de estos sensores, es que el ángulo del Sol visto desde orbitas cercanas es suficientemente pequeño y se puede considerar como un punto. Lo cual simplifica tanto el diseño como el algoritmo de control de la posición.

Salvo determinadas excepciones, los satélites actuales están alimentados mediante paneles solares, por tanto están concebidos con la orientación y evolución de la posición del Sol. Lo que hace que el uso de sensores solares se de en numerosas aplicaciones dentro de los satélites como pueden ser sistemas de posicionamiento, protección de equipos y posicionamiento de las células solares.

Existen tres clases principales de estos sensores

- *Sensores analógicos*, miden continuamente el ángulo de incidencia solar por tanto su señal de salida es una función continua. Hacen uso de células fotovoltaicas cuyo voltaje de salida depende de la intensidad de la radiación incidente.

- *Sensores de presencia solar*, proporcionan una señal constante siempre que el Sol se encuentre dentro del campo de visión.
- *Sensores digitales*, proporcionan una señal discreta que es función del ángulo de incidencia solar.

## 2.2. Sensores magnéticos

Este tipo de sensores proporcionan información sobre la magnitud y dirección del campo magnético. Sus principales ventajas son la fiabilidad, ligereza, y bajo consumo eléctrico. Sin embargo, no proporcionan información muy precisa sobre la posición de satélites ya que el campo magnético no es conocido y los modelos utilizados son objeto de errores.

En el caso de la tierra, la fuerza del campo magnético decrece según  $1/r^3$ , quedando por tanto limitado su uso a orbitas inferiores a los 1000 *km*.

## 2.3. Sensores de estrellas

Estos sensores miden la posición de estrellas. Proporcionando información sobre la posición del satélite al comparar la posición medida con información conocida sobre la posición de estrellas (obtenida de un catalogo de estrellas).

En general, este tipo de sensores son los mas precisos, sin embargo esta capacidad va acompañada de una serie de desventajas, como son el elevado peso, el alto consumo eléctrico y su elevado coste.

## 2.4. Giróscopos

Un giróscopo nos proporciona información sobre el cambio de orientación del eje de giro de una masa en rotación. Los giróscopos utilizados en el control de posición miden las velocidades angulares del satélite y mediante su integración permiten conocer la posición del satélite respecto de alguna posición inicial de referencia.

## 2.5. Sensores de Horizonte

La orientación relativa a la tierra es de gran importancia en determinadas aplicaciones como comunicaciones, meteorología o navegación. Para

## CAPÍTULO 2. SENSORES PARA CONTROL DE POSICIÓN EN SATÉLITES

---

un satélite en órbita alrededor de la Tierra esta es el segundo objeto mas brillante, sin embargo no basta con determinar su presencia ya que el ángulo visto es demasiado grande para poder considerarlo un punto. Por tanto para determinar la posición es necesario localizar el horizonte, para lo cual hay que realizar un barrido con el fin de detectarla.

La determinación del horizonte no resulta muy precisa en cuerpos con atmósfera, debido al decaimiento gradual en la intensidad de la radiación, sin embargo la utilización de sensores infrarrojos suaviza este efecto, ya que en ese espectro aumenta la nitidez con la que se localiza el horizonte.

Un sensor de horizonte normalmente esta formado por cuatro componentes básicos: un mecanismo de barrido, un sistema óptico, un detector de radiación y una unidad de procesamiento. Se suelen clasificar en función del sistema de barrido. Tenemos dos tipos principales de sensores:

- *Sensor de horizonte fijo*, es el sistema mas sencillo. Son sensores baratos y fiables. Solo son utilizables en satélites que se encuentran girando ya que el barrido se realiza mediante el propio giro del satélite. En la Fig.2.1 podemos ver un sensor de este tipo.

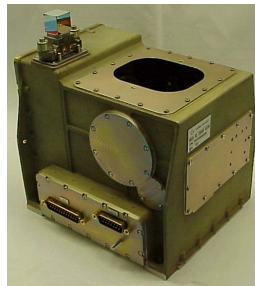


Figura 2.1: Sensor de Horizonte de ESA Telecomunicaciones

- *Sensor panorámico de horizonte*, se diferencian de los anteriores en poseer un mecanismo de barrido, este mecanismo consiste en un espejo en rotación continua que enfoca un rayo de luz en un elemento llamado bolómetro (dispositivo que determina la energía de la radiación incidente). La rotación hace que el dispositivo barra un cono completo, pudiendo medirse cuando la señal del horizonte terrestre aparece y desaparece(ver Fig.2.2).

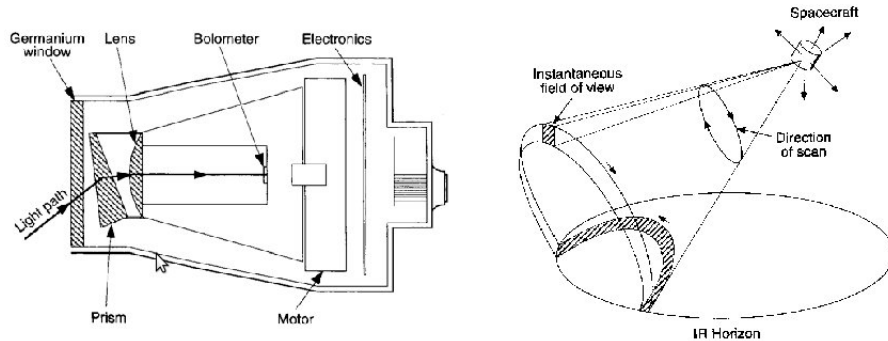


Figura 2.2: Esquema funcionamiento sensor de horizonte panorámico

Existen otros tipos de sensores de Horizonte, como puede ser el "Scanwheel", este sensor consiste en la integración de un giróscopo y un sensor de horizonte (ver Fig.2.3).

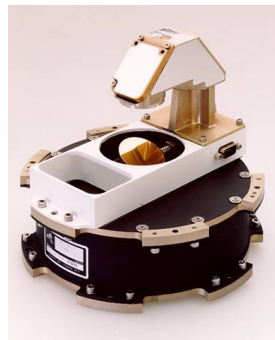


Figura 2.3: T-Scanwheel de Ithaco, Inc.

En resumen, hemos visto los tipos de sensores mas comunes que suelen aparecer en satélites, actualmente en un satélite podemos encontrar varios de estos tipos de sensores en función de la aplicación a que este dedicado. Por ejemplo los sensores solares los podemos encontrar como hemos visto en la mayor parte satélites, para aplicaciones donde la precisión es importante resulta imprescindible el uso de sensores de estrellas, la información proporcionada por los giróscopos puede ser muy útil para realizar seguimientos de control, y como hemos visto en la ultima sección en satélites apuntando a la Tierra es imprescindible el uso de sensores de Horizonte.

## *CAPÍTULO 2. SENSORES PARA CONTROL DE POSICIÓN EN SATÉLITES*

---

En concreto, en este trabajo se vera como el uso de la información de un único sensor de Horizonte puede permitir conocer la posición del satélite y por tanto permitir mantenerlo apuntando hacia la Tierra.

## Capítulo 3

# Dinámica del sólido rígido: Ecuaciones de Euler

En este capítulo estudiaremos el movimiento de un sólido rígido con un punto fijo en ausencia de fuerzas externas. Este estudio nos permitirá comprender y definir los conceptos básicos sobre los que se apoya todo el trabajo.

### 3.1. Matrices de Rotación

Empezamos enunciando el *Teorema de Euler*:

*“El movimiento general de un sólido rígido con punto fijo es una rotación alrededor de un cierto eje”*

Para definir el movimiento de un sólido rígido, es necesario asignar un sistema de ejes fijo a éste, y otro sistema de ejes de referencia, en torno al cual consideramos el movimiento.

Estos dos sistemas al tener un punto fijo común, se pueden relacionar mediante los cosenos de los ángulos que forman los ejes. Estos cosenos definen la **Matriz de Rotación**. Esta matriz expresa la relación de transformación entre los dos sistemas de ejes.

Siguiendo el *Teorema de Euler*, el movimiento del sólido rígido se podrá determinar a través del cambio de orientación del sistema de ejes anclados al sólido con respecto del sistema de referencia, o lo que es igual, a través de la Matriz de Rotación.

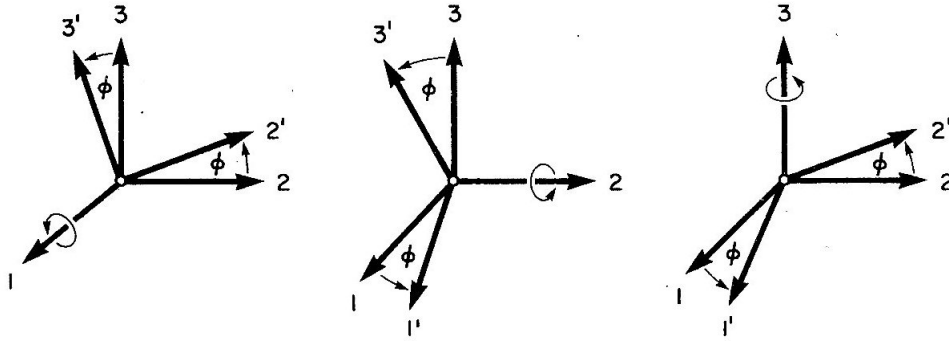


Figura 3.1: Rotaciones principales

Podemos descomponer el movimiento en rotaciones alrededor de cada eje (Fig.3.1), de forma que

$$\begin{Bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{Bmatrix} = C_i \cdot \begin{Bmatrix} \vec{i}' \\ \vec{j}' \\ \vec{k}' \end{Bmatrix}$$

Estas rotaciones principales se definen mediante las matrices de rotación principales  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$ , definidas como sigue

$$C_1(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}; \quad C_2(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix};$$

$$C_3(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si consideramos una determinada secuencia de giros se tendrán tres transformaciones consecutivas mediante sus correspondientes matrices de rotación, que nos permitirán pasar del sistema de referencia inicial al final. Teniendo en cuenta que en una rotación se tienen tres grados de libertad bastara definir tres desplazamientos angulares, estos tres desplazamientos angulares son conocidos como los **Ángulos de Euler**.

### Parámetros de Euler



Existe una formulación alternativa para conocer la Matriz de Rotación. Está formulación se basa en la definición de cuatro parámetros  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \text{ y } \eta)$  como sigue,

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{bmatrix} = \vec{a} \sin \frac{\phi}{2} \quad \eta = \cos \frac{\phi}{2}$$

donde  $\vec{a}$  es el vector que define el eje de rotación del sólido rígido y  $\phi$  el ángulo girado alrededor del eje.

Mediante estos parámetros la Matriz de Rotación,  $C$ , viene dada por

$$C(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \eta) = \begin{bmatrix} 1 - 2(\varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2) & 2(\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_3\eta) & 2(\varepsilon_1\varepsilon_3 - \varepsilon_2\eta) \\ 2(\varepsilon_1\varepsilon_2 - \varepsilon_3\eta) & 1 - 2(\varepsilon_3^2 + \varepsilon_1^2) & 2(\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_1\eta) \\ 2(\varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\eta) & 2(\varepsilon_3\varepsilon_2 - \varepsilon_1\eta) & 1 - 2(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Esta matriz esta definida de forma que

$$\begin{Bmatrix} \vec{i}' \\ \vec{j}' \\ \vec{k}' \end{Bmatrix} = C(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \eta) \cdot \begin{Bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{Bmatrix}$$

Para poder trabajar con estos cuatro parámetros es necesario añadir una restricción, Ec.(3.2), ya que un movimiento de rotación solo tiene tres grados de libertad.

$$\eta^2 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 = 1 \quad (3.2)$$

## 3.2. Ecuaciones de Euler

Hemos visto como el movimiento de un sólido rígido con punto fijo se puede determinar conociendo los *ángulos de Euler*, por lo que las ecuaciones del movimiento las podemos definir en torno a estos ángulos.

Las *Ecuaciones de Euler* se obtienen a partir de la conservación del momento angular definido mediante la ecuación (3.3), donde,  $\vec{M}$ , representa la suma de momentos externos aplicados sobre el sólido rígido y  $\vec{L}$ , el momento angular debido al movimiento de rotación.

$$\left( \frac{d\vec{L}}{dt} \right)_{\text{ejes referencia}} = \vec{M} \quad (3.3)$$

CAPÍTULO 3. DINÁMICA DEL SÓLIDO RÍGIDO: ECUACIONES DE EULER

---

Conocido el tensor de inercia y las velocidad angular, sabemos que  $\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}$ . De esta forma podemos expresar la ecuación en ejes fijos al cuerpo, resultando

$$\frac{d\vec{L}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \vec{L} = \vec{M}$$

Tomando como ejes fijos al cuerpo los ejes principales de inercia y sabiendo que los momentos principales de inercia  $(I_1, I_2, I_3)$  son fijos en el tiempo respecto de estos ejes, obtenemos,

$$I \frac{d\vec{\omega}}{dt} + \vec{\omega} \wedge I\vec{\omega} = \vec{M}, \quad \text{donde} \quad (3.4)$$

$$I = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}, \vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}, \text{ y } \vec{M} = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix}$$

Desarrollando la ecuación 3.2 llegamos a las **Ecuaciones de Euler** (3.6) del movimiento para un sólido rígido con punto fijo.

$$\begin{aligned} I_1 \frac{d\omega_1}{dt} - \omega_2 \omega_3 (I_2 - I_3) &= N_1 \\ I_2 \frac{d\omega_2}{dt} - \omega_3 \omega_1 (I_3 - I_1) &= N_2 \\ I_3 \frac{d\omega_3}{dt} - \omega_1 \omega_2 (I_1 - I_2) &= N_3 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Resolver estas ecuaciones de forma analítica no es posible debido a los términos no lineales, existen sin embargo determinados casos en los que las ecuaciones se pueden simplificar llegando a tener un sistema lineal, siendo posible obtener a una solución cerrada.

Por este motivo para obtener soluciones en casos generales, debemos emplear métodos numéricos de integración. A su vez estos métodos los debemos validar comparándolos con las soluciones cerradas, en los casos que es posible obtenerlas.

Es en estos métodos numéricos en los que encontramos de gran utilidad el uso de los parámetros de Euler, ya que permiten evitar ciertas singularidades, y el uso de funciones trigonométricas. Resultando ser más eficiente la ejecución del código numérico.

Para integrar las *Ecuaciones de Euler* utilizando los parámetros de Euler,

son necesarias las ecuaciones diferenciales que definen su evolución temporal. Tenemos las siguientes expresiones,

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_1 &= \frac{1}{2}(\varepsilon_2 w_3 - \varepsilon_3 w_2 + \eta w_1) \\ \dot{\varepsilon}_2 &= \frac{1}{2}(\varepsilon_3 w_1 - \varepsilon_1 w_3 + \eta w_2) \\ \dot{\varepsilon}_3 &= \frac{1}{2}(\varepsilon_1 w_2 - \varepsilon_2 w_1 + \eta w_3) \\ \dot{\eta} &= \frac{1}{2}(\varepsilon_1 w_1 + \varepsilon_2 w_2 + \varepsilon_3 w_3)\end{aligned}$$

### 3.3. Solución del movimiento libre

Nos referimos a movimiento libre a aquel en el que no existen momentos aplicados sobre el sólido rígido,  $M = 0$ . En el Anexo II podemos encontrar el código numérico empleado para la resolución del movimiento libre.

En el caso de un sólido donde los tres momentos de inercia principales son iguales,  $I_1 = I_2 = I_3 = 0$  (por ejemplo una esfera). Al sustituir, las ecuaciones (3.6) quedan desacopladas y los términos no lineales se anulan resultando,  $I_i \dot{w}_i = 0$ , luego las velocidades angulares son constantes en el tiempo. En la figura 3.2 podemos ver la solución numérica para las velocidades iniciales,  $w_1(0) = 1$ ,  $w_2(0) = 2$ ,  $w_3(0) = 3$ .

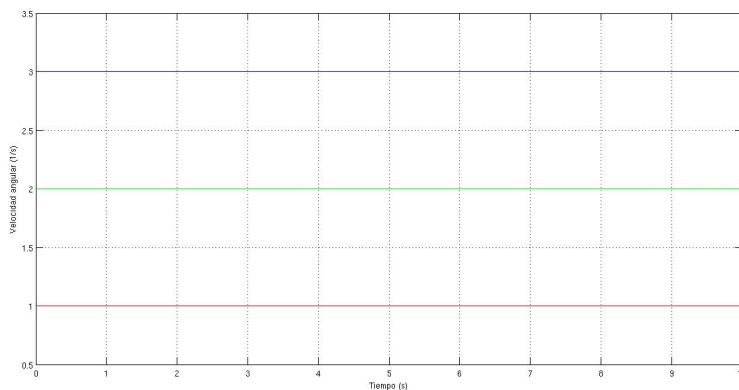


Figura 3.2: Solución movimiento libre para  $I_1 = I_2 = I_3$

Un solución menos trivial la encontramos cuando solo dos de los momen-

CAPÍTULO 3. DINÁMICA DEL SÓLIDO RÍGIDO: ECUACIONES DE EULER

---

tos principales son iguales, por ejemplo, un prisma de lados  $a$ ,  $a$  y  $b$ . De esta forma definimos  $I_t$  e  $I_a$  como sigue,

$$I_t = I_1 = I_2 \quad I_a = I_3$$

llegando finalmente a las siguientes ecuaciones,

$$\begin{aligned} I_t \frac{dw_1}{dt} - w_2 w_3 (I_t - I_a) &= 0 \\ I_t \frac{dw_2}{dt} + w_3 w_1 (I_t - I_a) &= 0 \\ I_a \frac{dw_3}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

La tercera ecuación queda desacoplada y se tiene  $w_3 = cte$ , por lo que las otras dos ecuaciones resultan lineales y podemos obtener una solución cerrada. Tenemos un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden con coeficientes constantes, resolviendo obtenemos,

$$\begin{aligned} w_1(t) &= w_{10} \cos nt + w_{20} \sin nt \\ w_2(t) &= w_{20} \cos nt - w_{10} \sin nt \\ w_3(t) &= w_{30} \end{aligned} \tag{3.6}$$

donde,  $w_1(0) = w_{10}$ ,  $w_2(0) = w_{20}$ ,  $w_3(0) = w_{30}$  y  $n = \frac{w_{30}(I_t - I_a)}{I_t}$

Otro aspecto que tenemos que considerar, es la conservación de la energía ya que en este caso no hay ningún mecanismo de disipación. Por lo que el valor de la energía cinética,  $T$ , debe permanecer constante en el tiempo. Expresando esta energía en términos de las velocidades angulares tenemos,

$$T = \frac{1}{2}(I_1 w_1^2 + I_2 w_2^2 + I_3 w_3^2)$$

Sustituyendo en la ecuación anterior la solución (3.6) se tiene

$$T = \frac{1}{2} [I_t(w_{10}^2 + w_{20}^2) + I_a w_{30}^2] = cte \tag{3.7}$$

En la figura 3.3 podemos ver representada la solución (3.6) para las condiciones iniciales  $w_1(0) = 1$ ,  $w_2(0) = 2$ ,  $w_3(0) = 3$ . El eje  $x$  representa el número de periodos, siendo un periodo igual a  $1/n$  segundos (0.37 s en el caso resuelto).

### CAPÍTULO 3. DINÁMICA DEL SÓLIDO RÍGIDO: ECUACIONES DE EULER

---

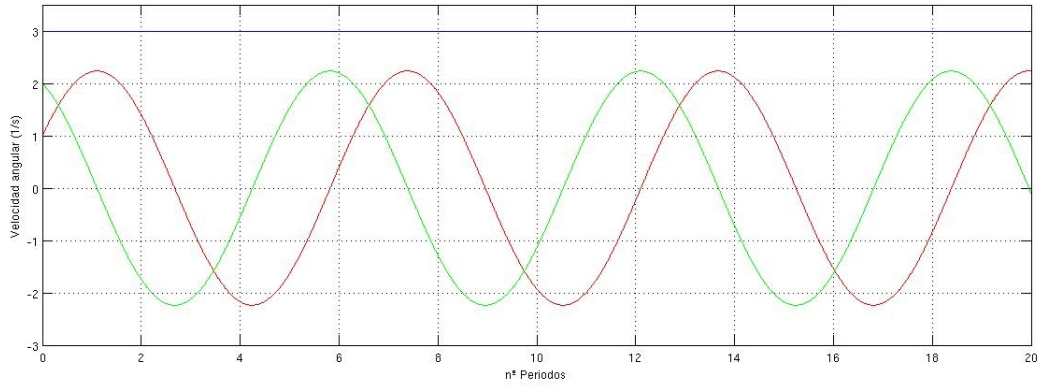


Figura 3.3: Solución analítica movimiento libre para  $I_1 = I_2 = 10$  y  $I_3 = 1$

En la siguiente figura representamos las solución numérica sobre la solución analítica para el mismo tiempo de integración (20 periodos). Donde la mayor diferencia entre soluciones ha sido,  $\max(|w_{numérica} - w_{analítica}|) = 1,6018 \cdot 10^{-9}$ .

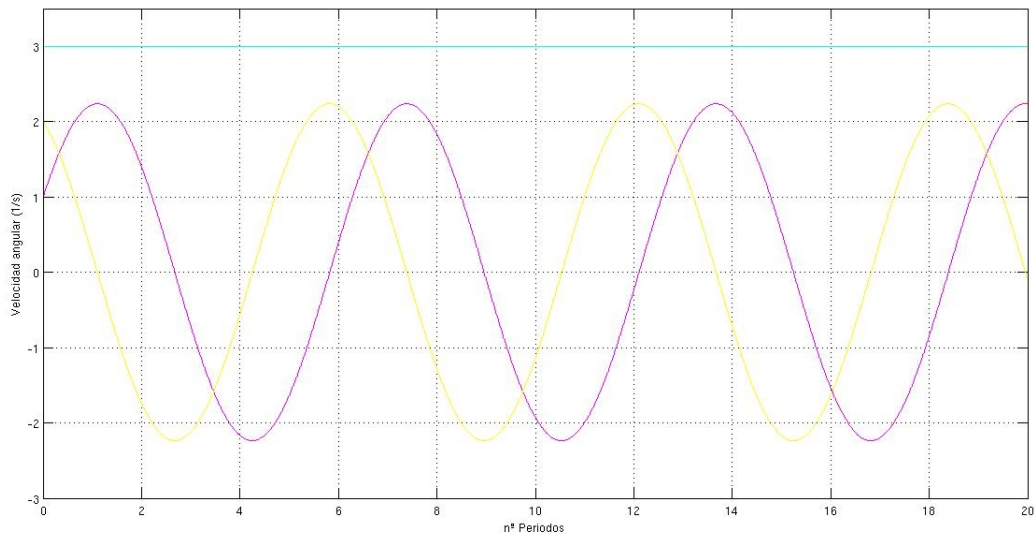


Figura 3.4: Solución movimiento libre para  $I_1 = I_2 = 10$  y  $I_3 = 1$

Según la ecuación (3.7), la energía cinética de rotación para las condiciones iniciales y momentos de inercia considerados es  $T = 29,5 J$ . Para la solución numérica obtenemos el resultado de la figura 3.5, siendo la variación

### CAPÍTULO 3. DINÁMICA DEL SÓLIDO RÍGIDO: ECUACIONES DE EULER

---

de energía cinética,  $\Delta T = 4,1935 \cdot 10^{-8}$ . Esta magnitud es muy importante para poder asegurarnos de no estar introduciendo errores que nos desvíen del comportamiento físico del problema.

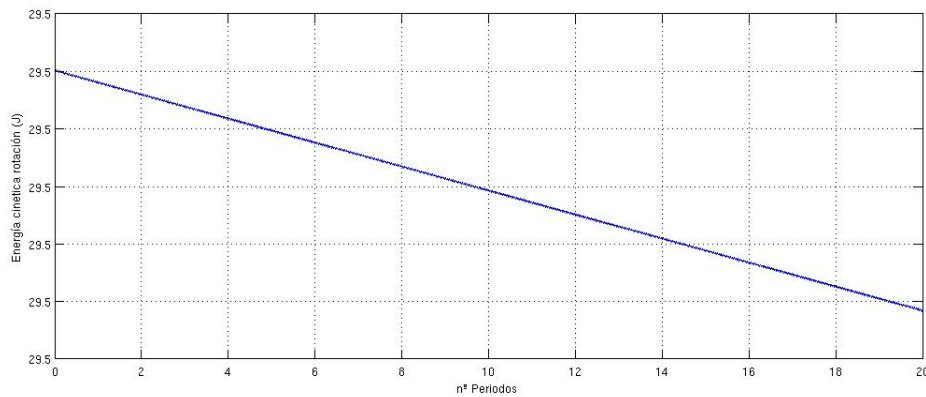


Figura 3.5: Solución movimiento libre para  $I_1 = I_2 = 10$  y  $I_3 = 1$ . Energía cinética de rotación para la solución numérica

Como se puede ver en el apéndice A, en la resolución numérica se ha introducido la integración de los parámetros de Euler, por lo que una última comprobación es ver que se cumple la ecuación (3.2). En la figura 3.6 podemos ver la evolución temporal de la suma de los cuadrados de los parámetros de Euler. La variación máxima es igual a  $\Delta \Sigma \text{ parámetros}^2 = 8,79 \cdot 10^{-10}$ .

### CAPÍTULO 3. DINÁMICA DEL SÓLIDO RÍGIDO: ECUACIONES DE EULER

---

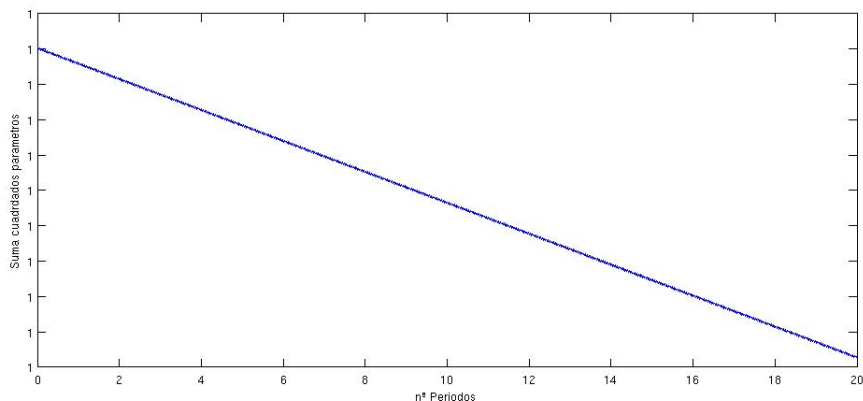


Figura 3.6: Solución movimiento libre para  $I_1 = I_2 = 10$  y  $I_3 = 1$ . Suma cuadrado parámetros de Euler

Cuando los momentos de inercia principales son todos diferentes se puede llegar también a una solución analítica. En este caso la resolución resulta bastante más complicada. No es objeto de este trabajo profundizar en las *Ecuaciones de Euler* y su resolución. Por lo que no hemos considerado necesaria su introducción. Por ello nos hemos limitado a comprobar como la solución obtenida numéricamente sigue el mismo comportamiento que la encontrada en la literatura.

Una vez analizadas y comparadas ambas soluciones podemos asegurar que el código numérico es válido, ya que los errores obtenidos respecto de la solución exacta son muy pequeños, además hemos comprobado la conservación de la energía. Por último cabe destacar que no existen errores de efecto acumulativo, ya que el tiempo de integración elegido ha sido suficientemente grande.

*En resumen*, hemos introducido los conceptos básicos de la física del problema. Teniendo un punto de partida que nos permitirá avanzar de forma correcta al caso de nuestro interés.

Al mismo tiempo hemos generado un código numérico. Este código ha quedado validado y será el núcleo sobre el que se introducirán futuras modificaciones.

# Capítulo 4

## Momentos externos en satélites

En este capítulo introduciremos el efecto de los dos principales momentos que actúan sobre un satélite en órbita. Estos efectos son debidos a las fuerzas de inercia y a la existencia de un gradiente en el campo gravitacional.

### 4.1. Sistemas de ejes de rotación

En la sección 3.1 hemos visto como es fundamental la elección de un sistema de ejes adecuados, para poder obtener la Matriz de Rotación del sistema. Asimismo, es necesario determinar una secuencia de giros adecuada.

En nuestro caso vamos a utilizar un sistema de ejes de referencia (*pitch-roll-yaw*) definidos de la siguiente forma,

**roll** → eje tangente a la órbita de vector unitario  $\vec{I}$

**yaw** → eje perpendicular a roll, apuntando al centro de la Tierra, de vector unitario  $\vec{K}$

**pitch** → eje perpendicular a roll y yaw de vector unitario  $\vec{J}$



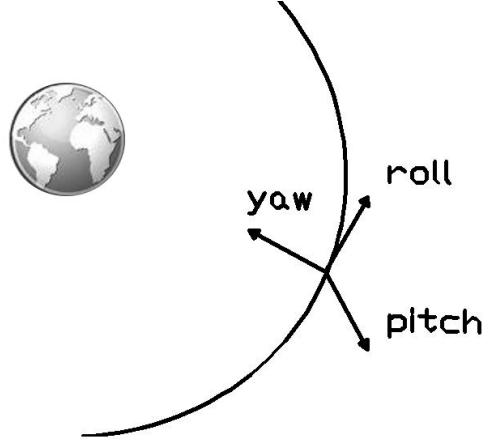


Figura 4.1: Sistema de referencia fijo a la órbita

por tanto tenemos un sistema de ejes cuyo origen se encuentra fijo en la órbita (ver Fig.4.1).

Por otro lado los ejes principales de inercia definen un sistema de ejes fijo al satélite,  $i$ - $j$ - $k$ , de vectores unitarios  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  y  $\vec{k}$  respectivamente. Siendo  $I_1$  la componente en el eje  $i$ ,  $I_2$  la componente en el eje  $j$  e  $I_3$  la componente en el eje  $k$ .

Para definir el desplazamiento tomamos la siguiente secuencia de giros principales: primero una rotación  $\alpha$  alrededor de *pitch* seguido de una rotación  $\beta$  en torno a *roll* y por último una rotación  $\varphi$  en torno a *yaw*. De esta forma la Matriz de Rotación,  $C$ , vendrá dada por,

$$C = C_2(\alpha) \cdot C_1(\beta) \cdot C_3(\varphi)$$

desarrollando se tiene de forma completa,

$$C = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \varphi + \sin \alpha \sin \beta \sin \varphi & -\cos \alpha \sin \varphi + \sin \alpha \sin \beta \cos \varphi & \sin \alpha \cos \beta \\ \cos \beta \sin \varphi & \cos \beta \cos \varphi & -\sin \beta \\ -\sin \alpha \cos \varphi + \cos \alpha \sin \beta \sin \varphi & \sin \alpha \sin \varphi + \cos \alpha \sin \beta \cos \varphi & \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

El uso de los ejes *pitch-roll-yaw* es muy extendido en la resolución de problemas de control de posición de satélites, así como también en problemas de aeronáutica. Por otro lado la combinación de giros elegida es muy común ya

que evita que se produzcan singularidades para ángulos nulos, trasladándose estas singularidades a  $\pm\pi/2$ .

Las transformación entre los sistemas de ejes fijo a la órbita y fijo al satélite mediante el uso de la Matriz de Rotación (4.1), viene dada por la siguiente expresión

$$\left\{ \begin{array}{c} \vec{I} \\ \vec{J} \\ \vec{K} \end{array} \right\}_{\text{ejes órbita}} = C \cdot \left\{ \begin{array}{c} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{array} \right\}_{\text{ejes satélite}} \quad (4.2)$$

En la sección 3.2 explicamos que en el código numérico será utilizada la formulación alternativa de los *Parámetros de Euler*. Se hace por tanto necesario emplear una relación entre estos y los ángulos  $(\beta, \alpha, \varphi)$ . Una forma conveniente de obtener esta relación resulta de comparar términos de la Matriz de Rotación (4.1) basada en los ángulos y la Matriz de Rotación (3.1) basada en los Parámetros de Euler, teniendo en cuenta que  $C(\alpha, \beta, \varphi)^T = C(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \eta)$  se tiene

$$\alpha = \arctan \frac{2(\varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\eta)}{1 - 2(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)} \quad (4.3)$$

$$\beta = \arcsin(-2(\varepsilon_2\varepsilon_3 - \varepsilon_1\eta)) \quad (4.4)$$

$$\varphi = \arctan \frac{2(\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_3\eta)}{1 - 2(\varepsilon_3^2 + \varepsilon_1^2)} \quad (4.5)$$

## 4.2. Momento debido al gradiente gravitacional

Un efecto muy importante en la dinámica de cuerpos en el espacio resulta de que en este el campo gravitacional no es uniforme. El principal efecto de ese gradiente lo tenemos en que el centro de masas y el centro de gravedad no coinciden. Por tanto la fuerza de gravedad provoca un par,  $\vec{M}_G$ , en torno al centro de masas del satélite.

La fuerza de gravedad sobre un elemento diferencial de masa,  $dm$  es

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \frac{G \cdot m_{earth} \cdot \vec{R} \cdot dm}{|\vec{R}|^3} = G \cdot m_{earth} \frac{\vec{R}_0 - \vec{r}}{|\vec{R}_0 - \vec{r}|^3} dm \\ &\simeq G \cdot m_{earth} \frac{\vec{R}_0 - \vec{r}}{R_0^3} \left( 1 + 3 \frac{\vec{r} \cdot \vec{R}_0}{R_0^2} \right) dm\end{aligned}\quad (4.6)$$

$$G = 6,667 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$$

$$m_{earth} = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$$

donde se ha considerado que  $r/R_0 \ll 1$ . El momento producido por la fuerza de gravedad se obtiene usando la ecuación (4.6) y aplicando que  $\int \vec{r} \, dm = 0$  ya que  $\vec{r}$  es un vector aplicado desde el centro de masas del satélite. El resultado es

$$\begin{aligned}\vec{M}_G &= \int \vec{r} \wedge \vec{F} \, dm \\ &= \frac{3 \cdot G \cdot m_{earth}}{R_0^5} \int (\vec{r} \wedge \vec{R}_0)(\vec{r} \cdot \vec{R}_0) \, dm\end{aligned}\quad (4.7)$$

El vector dado por,  $(\vec{R}_0)_{ejes \, referencia} = R_0 \vec{K}$ , se puede reescribir en coordenadas fijas al satélite usando la identidad (4.2), luego

$$(\vec{R}_0)_{ejes \, satélite} = R_0 \cdot (C(3, 1)\vec{i} + C(3, 2)\vec{j} + C(3, 3)\vec{k})\quad (4.8)$$

donde el vector  $C(i, 3)$ , son las componentes de la tercera fila de la Matriz de Rotación (4.1). Sustituyendo la ecuación (4.8) en la ecuación (4.7), tenemos,

$$\vec{M}_G = 3w_c^2 \begin{bmatrix} (I_3 - I_2)C(3, 2)C(3, 3) \\ (I_1 - I_3)C(3, 3)C(3, 1) \\ (I_2 - I_1)C(3, 1)C(3, 2) \end{bmatrix}\quad (4.9)$$

donde,

$$w_c^2 = \frac{G \cdot m_{earth}}{R_0^3}$$

siendo  $w_c$  la velocidad angular del satélite en la orbita suponiendo una orbita circular de radio,  $R_0$ . De aquí en adelante trabajaremos con la suposición de orbita circular.

La ecuación (4.9) nos da a conocer el par que produce el efecto del gradiente gravitacional. Este viene determinado por los tres ángulos,  $\beta, \alpha, \varphi$ , siendo conocidos los momentos de inercia así como el radio,  $R_0$ , de la orbita.

### 4.3. Momento debido a las fuerzas de inercia

Se ha visto como el par debido al gradiente gravitacional esta caracterizado por la velocidad angular del movimiento en la orbita. Esta velocidad angular, respecto del sistema de ejes inercial, es la causa de las fuerzas de inercia que aparecen en el satélite.

Para determinar el momento debido a estas fuerzas,  $M_i$ , conviene expresar la velocidad angular del solido en los ejes fijos al satélite, ya que si integramos las *Ecuaciones de Euler* respecto de este sistema de ejes tenemos  $I = cte$ . Se tiene

$\vec{w}_t \rightarrow$  Velocidad angular total del satélite

$\vec{w} \rightarrow$  Velocidad angular del satélite en ejes fijos a este. Sus componentes son p , q, r.

$\vec{w}_c \rightarrow$  Velocidad angular del satélite en la orbita

siendo  $\vec{w}_t = \vec{w} + \vec{w}_c$  , para tener  $\vec{w}_t$  expresado expresado en ejes fijos al satélite, debemos expresar  $\vec{w}_c$  en estos ejes. Se tiene,

$$\vec{w}_c = - w_c \vec{J}$$

ya que el eje de *pitch*, es perpendicular al plano de la orbita al igual que  $\vec{w}_c$ , luego aplicando la identidad (4.2),

$$\vec{w}_t = \vec{w} - w_c \vec{c}_2 \quad , \quad \text{donde, } \vec{c}_2 = \begin{bmatrix} C(2,1) & C(2,2) & C(2,3) \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{array} \right\}$$

tenemos  $\vec{w}_t$  expresado en ejes fijos al satélite, por tanto sustituyendo en la ecuación (3.4)

$$\begin{aligned} I \frac{d\vec{w}_t}{dt} + \vec{w}_t \wedge I \vec{w}_t &= \vec{M} \\ I \frac{d\vec{w}}{dt} - w_c I \frac{d\vec{c}_2}{dt} + (\vec{w} - w_c \vec{c}_2) \wedge I (\vec{w} - w_c \vec{c}_2) &= \vec{M} \end{aligned} \quad (4.10)$$

aplicando la ecuación 1 del Anexo I, y sabiendo que respecto de los ejes de inercia  $d\vec{c}_2/dt = 0$ , se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{c}_2}{dt} &= -\vec{w} \wedge \vec{c}_2, \text{ sustituyendo en (4.10)} \\ I \frac{d\vec{w}}{dt} + w_c I (\vec{w} \wedge \vec{c}_2) + (\vec{w} - w_c \vec{c}_2) \wedge I(\vec{w} - w_c \vec{c}_2) &= \vec{M}, \text{ desarrollando} \\ I \frac{d\vec{w}}{dt} + \vec{w} \wedge I\vec{w} + w_c I (\vec{w} \wedge \vec{c}_2) - w_c(\vec{w} \wedge I\vec{c}_2 + \vec{c}_2 \wedge I\vec{w}) + w_c^2(\vec{c}_2 \wedge I\vec{c}_2) &= \vec{M} \end{aligned} \quad (4.11)$$

al comparar con la ecuación (3.4), podemos extraer la contribución de las fuerzas de inercia de forma que,

$$\begin{aligned} I \frac{d\vec{w}}{dt} + \vec{w} \wedge I\vec{w} &= \vec{M} + \vec{M}_i, \text{ siendo} \\ \vec{M}_i &= -w_c I (\vec{w} \wedge \vec{c}_2) + w_c(\vec{w} \wedge I\vec{c}_2 + \vec{c}_2 \wedge I\vec{w}) - w_c^2(\vec{c}_2 \wedge I\vec{c}_2) \end{aligned} \quad (4.12)$$

Desarrollando la expresión (4.12), llegamos a la ecuación (4.13). Esta permite obtener las componentes del momento debido a las fuerzas de inercia, en función de los ángulos tres ángulos y velocidades angulares ( $\beta$ ,  $\alpha$ ,  $\varphi$ ,  $p$ ,  $q$ ,  $r$ ) y del parámetro  $w_c$ .

$$\begin{aligned} \vec{M}_i &= -w_c \begin{bmatrix} (I_1 - I_3 + I_2)C(2,3)q - (I_1 - I_2 - I_3)C(2,2)r \\ (I_2 - I_1 + I_3)C(2,1)r - (I_2 - I_3 - I_1)C(2,3)p \\ (I_3 - I_2 + I_1)C(2,2)p - (I_2 - I_1 - I_2)C(2,1)q \end{bmatrix} \\ &\quad - w_c^2 \begin{bmatrix} (I_3 - I_2)C(2,2)C(2,3) \\ (I_1 - I_3)C(2,3)C(2,1) \\ (I_2 - I_1)C(2,1)C(2,2) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.13)$$

En las anteriores ecuaciones aparece el momento  $\vec{M}$ , este momento hace referencia al par debido a todas las fuerzas externas que actúan sobre el satélite (exceptuando las fuerzas de inercia). En este trabajo solo se considerara el efecto del gradiente gravitacional, con lo que bastaría sustituir  $\vec{M}$  por  $\vec{M}_G$ , con lo que el par total sobre el satélite será  $\vec{M}_i + \vec{M}_G$ .

Otros momentos que se pueden considerar en un satélite son el par debido a la radiación solar, debida a la presión que ejerce la radiación incidente y el debido al campo magnético. El valor de estos momentos suele ser muy pequeño, sin embargo a lo largo de grandes periodos se produce un efecto acumulativo que los hace significativos.

# Capítulo 5

## Validación del código numérico

En este capítulo, linealizaremos las ecuaciones que definen el comportamiento de un satélite en órbita. De esta forma obtendremos una solución analítica con la que podremos validar el código numérico.

### 5.1. Linealización de las ecuaciones

Desarrollando la ecuación vectorial (3.4) con  $\vec{M} = \vec{M}_G + \vec{M}_i$ , llegamos al sistema de ecuaciones diferenciales (5.1). Estas nos permiten obtener las velocidades angulares del satélite, expresadas en el sistema de ejes fijo al cuerpo.

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} - (1 - \lambda)qr + w_c(2 - \lambda)C(2, 3)q - w_c\lambda C(2, 2)r \\ - w_c^2(1 - \lambda)C(2, 2)C(2, 3) + 3w_c^2(1 - \lambda)C(3, 2)C(3, 3) &= 0 \\ \frac{dq}{dt} + (1 - \lambda)pr + w_c\lambda C(2, 1)r - w_c(2 - \lambda)C(2, 3)p \\ + w_c^2(1 - \lambda)C(2, 3)C(2, 1) - 3w_c^2(1 - \lambda)C(3, 3)C(3, 1) &= 0 \\ \frac{dr}{dt} + w_cC(2, 2)p - w_cC(2, 1)q &= 0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

donde se ha supuesto que el satélite es esbelto a lo largo del eje  $k$ , es decir  $I_1 = I_2 = I_t > I_3$ , definiéndose el parámetro de esbeltez  $\lambda = I_3/I_t$ .

Estas ecuaciones rigen el movimiento de un satélite siempre que se cumplan las suposiciones hechas e integrándolas somos capaces de determinar la posición del satélite. Por tanto son la base sobre la que trabajaremos. El código numérico integra estas ecuaciones utilizando los *Parámetros de Euler*.

Para poder encontrar soluciones analíticas es necesario linealizar las ecuaciones. Para ello consideraremos desplazamientos muy pequeños en torno a la posición inicial, lo que permitirá llegar a un sistema de ecuaciones diferenciales lineales.

Las ecuaciones (5.1) se pueden expresar en los tres ángulos de Euler  $\beta$ ,  $\alpha$  y  $\varphi$  sustituyendo los términos de la Matriz de Rotación (4.1) y las velocidades angulares  $p$ ,  $q$ ,  $r$ , por  $\dot{\beta}$ ,  $\dot{\alpha}$ ,  $\dot{\varphi}$ . La siguiente ecuación proporciona una relación entre estos dos conjuntos de variables,

$$\begin{Bmatrix} p \\ q \\ r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\beta} \cos \varphi + \dot{\alpha} \cos \beta \sin \varphi \\ \dot{\alpha} \cos \beta \cos \varphi - \dot{\beta} \sin \varphi \\ \dot{\varphi} - \dot{\alpha} \sin \beta \end{Bmatrix}$$

Para linealizar las ecuaciones (5.1) expresadas en términos de  $\beta$ ,  $\alpha$  y  $\varphi$  vamos a considerar los desplazamientos angulares  $\beta$ , y  $\alpha$  muy pequeños, de esta forma obtenemos las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \ddot{\beta} \cos \varphi + \ddot{\alpha} \sin \varphi + \lambda \dot{\varphi} [(\dot{\alpha} \cos \varphi - \dot{\beta} \sin \varphi) - w_c \cos \varphi] \\ + w_c^2 (1 - \lambda) \beta \cos \varphi + 3w_c^2 (1 - \lambda) (\alpha \sin \varphi + \beta \cos \varphi) = 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} \cos \varphi - \ddot{\beta} \sin \varphi - \lambda \dot{\varphi} [(\dot{\alpha} \sin \varphi + \dot{\beta} \cos \varphi) - w_c \sin \varphi] \\ - w_c^2 (1 - \lambda) \beta \sin \varphi - 3w_c^2 (1 - \lambda) (-\alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi) = 0 \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\ddot{\varphi} + w_c \dot{\beta} = 0 \quad (5.4)$$

Combinando las dos primeras ecuaciones como sigue

$$\begin{aligned} (5.2) \cdot \sin \varphi + (5.3) \cdot \cos \varphi \\ (5.3) \cdot \sin \varphi - (5.2) \cdot \cos \varphi \end{aligned}$$

obtenemos las siguientes ecuaciones

$$\ddot{\alpha} - \lambda \dot{\varphi} \dot{\beta} + 3w_c^2 (1 - \lambda) \alpha = 0 \quad (5.5)$$

$$\ddot{\beta} + \lambda \dot{\varphi} \dot{\alpha} + 4w_c^2 (1 - \lambda) \beta = 0 \quad (5.6)$$

$$\ddot{\varphi} + w_c \dot{\beta} = 0 \quad (5.7)$$

Las dos primeras ecuaciones siguen teniendo términos no lineales. En cuanto a la tercera ecuación podemos llegar a la conclusión de que si  $\beta$  tiene un comportamiento puramente oscilatorio entonces  $\varphi$  tendrá un comportamiento también oscilatorio sumado a un comportamiento lineal. Es decir

$$\varphi = W \cdot t + \delta, \text{ siendo}$$

$$W = \text{cte y } \delta \simeq \beta \simeq 0$$

Sustituyendo en las ecuaciones (5.5), (5.6), (5.7) obtenemos

$$\ddot{\alpha} - \lambda W \dot{\beta} + 3w_c^2(1 - \lambda)\alpha = 0 \quad (5.8)$$

$$\ddot{\beta} + \lambda W \dot{\alpha} + 4w_c^2(1 - \lambda)\beta = w_c\lambda(W + \dot{\delta}) \quad (5.9)$$

$$\ddot{\delta} + w_c\dot{\beta} = 0 \quad (5.10)$$

Con lo que hemos llegado a un sistema de ecuaciones lineales de segundo orden y coeficientes constantes. En la siguiente sección resolveremos estas ecuaciones.

## 5.2. Solución de las ecuaciones

Para llegar a una solución de las ecuaciones (5.8), (5.9), (5.10), comenzamos integrando directamente la ecuación (5.10). Tenemos  $\dot{\delta} = -w_c\beta + C_\delta$ , por tanto sustituyendo en (5.9) tenemos siguiente ecuación para  $\beta$

$$\ddot{\beta} + \lambda W \dot{\alpha} + w_c^2(4 - 3\lambda)\beta = w_c\lambda(W - C_\delta)$$

Por tanto la solución para  $\beta$  viene dada por la solución de la parte homogénea mas la solución particular, siendo esta una constante,  $\beta_p$ , igual a

$$\beta_p = \frac{\lambda(W + C_\delta)}{w_c(4 - 3\lambda)}$$

Por definición  $\delta$  no tiene ninguna componente lineal, es decir  $-w_c\beta_p + C_\delta = 0$ , sustituyendo el valor de  $\beta_p$ , se tiene

$$C_\delta = \frac{\lambda W}{4(1 - \lambda)} \quad \beta_p = \frac{\lambda W}{4w_c(1 - \lambda)}$$

Las ecuaciones (5.5), (5.6), (5.7) están caracterizadas por los parámetros  $\lambda$ ,  $w_c$  y  $W$ , siendo  $\lambda$  conocido a partir de los momentos de inercia principales y  $w_c$  conocido a partir del radio de la orbita. Debemos por tanto determinar  $W$ .

Integrando la ecuación (5.7) se tiene

$$\dot{\varphi} = -w_c\beta + C_\varphi \quad \text{donde} \quad C_\varphi = \dot{\varphi}_0 + w_c\beta_0$$

siendo  $\dot{\varphi}_0$  y  $\beta_0$  las condiciones iniciales para  $\varphi$  y  $\beta$ .

Dado que  $\beta$  es igual a una oscilación mas una constante,  $\beta_p$ , se tiene que la parte lineal de  $\varphi$ , denominada por  $W$ , es igual a

$$W = -w_c\beta_p + \dot{\varphi}_0 + w_c\beta_0$$



sustituyendo  $\beta_p$ , finalmente tenemos

$$W = \frac{(1 - \lambda)(\dot{\varphi}_0 + w_c \beta_0)}{(1 - \frac{3}{4}\lambda)}$$

Una vez determinados los parámetros de las ecuaciones y demostrado como la ecuación para  $\delta$  queda desacoplada. Buscaremos soluciones para el sistema formado por las ecuaciones (5.11), (5.12). Estas ecuaciones se corresponden con las de dos osciladores acoplados. Por ultimo la solución para  $\varphi$  se obtendrá a partir de la solución para  $\beta$ .

$$\ddot{\alpha} - \lambda W \dot{\beta} + 3w_c^2(1 - \lambda)\alpha = 0 \quad (5.11)$$

$$\ddot{\beta} + \lambda W \dot{\alpha} + 4w_c^2 \left(1 - \frac{3}{4}\lambda\right) \beta = w_c \lambda W \frac{(1 - \frac{3}{4}\lambda)}{(1 - \lambda)} \quad (5.12)$$

Buscamos soluciones de la forma  $\vec{X} = \vec{a} \cdot e^{st}$  para la parte homogénea, de forma que tenemos

$$\begin{bmatrix} s^2 + B & -As \\ As & s^2 + C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{siendo } A &= \lambda W \\ B &= 3w_c^2(1 - \lambda) \\ C &= 4w_c^2 \left(1 - \frac{3}{4}\lambda\right) \end{aligned}$$

teniendo la ecuación característica  $s^4 + (B + C + A^2)s^2 + BC = 0$

de donde obtenemos los siguientes autovalores complejos,

$$\begin{aligned} s_1 &= ir_1 & s_2 &= ir_2 \\ s_3 &= -ir_1 & s_4 &= -ir_2 \end{aligned}$$

$$\text{siendo } \begin{cases} r_1 = \sqrt{\left| \frac{-(B+C+A^2) + \sqrt{(B+C+A^2)^2 - 4BC}}{2} \right|} \\ r_2 = \sqrt{\left| \frac{-(B+C+A^2) - \sqrt{(B+C+A^2)^2 - 4BC}}{2} \right|} \end{cases}$$

para los que obtenemos los siguientes autovectores (evitando singularidades para  $W = 0$ )

$$\begin{aligned} s_1 \rightarrow \vec{a}_1 &= \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ \frac{Ar_1}{(r_1^2 - C)}i \end{array} \right\} & s_2 \rightarrow \vec{a}_2 &= \left\{ \begin{array}{c} \frac{-Ar_2}{(r_2^2 - B)}i \\ 1 \end{array} \right\} \\ s_3 \rightarrow \vec{a}_3 &= \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ \frac{-Ar_1}{(r_1^2 - C)}i \end{array} \right\} & s_4 \rightarrow \vec{a}_4 &= \left\{ \begin{array}{c} \frac{Ar_2}{(r_2^2 - B)}i \\ 1 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Por tanto la solución para  $\alpha$  y  $\beta$  vendrá dada por la siguiente combinación en forma vectorial

$$\left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \beta \end{array} \right\} = C_1 \vec{a}_1 e^{s_1 t} + C_2 \vec{a}_2 e^{s_2 t} + C_3 \vec{a}_3 e^{s_3 t} + C_4 \vec{a}_4 e^{s_4 t} + \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \beta_p \end{array} \right\}$$

La solución para  $\delta$  se obtiene de la integración de  $\beta$ , luego

$$\delta = -w_c \left( C_1 \frac{A}{(r_1^2 - C)} e^{s_1 t} - \frac{C_2}{r_2} i e^{s_2 t} + C_3 \frac{A}{(r_1^2 - C)} e^{s_3 t} + \frac{C_4}{r_2} i e^{s_4 t} \right) + C_5$$

donde  $C_5$  se viene dada por la condición inicial,  $\delta_0 = \varphi_0$ .

Resumiendo tenemos las siguientes ecuaciones para los ángulos de Euler

$$\begin{aligned} \alpha &= C_1 e^{s_1 t} - C_2 N_2 i e^{s_2 t} + C_3 e^{s_3 t} + C_4 N_2 i e^{s_4 t} \\ \beta &= C_1 N_1 i e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t} - C_3 N_1 i e^{s_3 t} + C_4 e^{s_4 t} + \beta_p \\ \varphi &= W \cdot t - w_c \left( \frac{C_1 N_1}{r_1} e^{s_1 t} - \frac{C_2}{r_2} i e^{s_2 t} + \frac{C_3 N_1}{r_1} e^{s_3 t} + \frac{C_4}{r_2} i e^{s_4 t} \right) + C_5 \end{aligned}$$

siendo

$$N_1 = \frac{\lambda W r_1}{r_1^2 - 4w_c^2(1 - \frac{3}{4}\lambda)}; \quad N_2 = \frac{\lambda W r_2}{r_2^2 - 3w_c^2(1 - \lambda)}$$

Podemos reescribir estas ecuaciones aplicando la identidad de Euler,  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ , y sabiendo que las constantes  $C_3$  y  $C_4$  son los complejos conjugados de  $C_1$  y  $C_2$  respectivamente. De esta forma la solución para los tres ángulos de Euler  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\varphi$  viene dada por las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \alpha &= A_1 \cos(r_1 t + \delta_1) + N_2 A_2 \sin(r_2 t + \delta_2) \\ \beta &= -N_1 A_1 \sin(r_1 t + \delta_1) + A_2 \cos(r_2 t + \delta_2) + \beta_p \\ \varphi &= W \cdot t - w_c \frac{N_1 A_1}{r_1} \cos(r_1 t + \delta_1) - w_c \frac{A_2}{r_2} \sin(r_2 t + \delta_2) + C_5 \end{aligned} \tag{5.13}$$

donde las constantes  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $C_5$ ,  $\delta_1$  y  $\delta_2$  se determinan a partir de las condiciones iniciales. Cabe destacar que las constantes  $A_1$ ,  $A_2$  son proporcionales al modulo de las constantes complejas  $C_1$ ,  $C_2$  y su fase viene dada por  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ .

En resumen, hemos obtenido una solución analítica (Ec.(5.13)) para los tres desplazamientos angulares  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\varphi$ , siempre que se cumpla que  $\alpha$  y  $\beta$  son pequeños. Estas soluciones se corresponden con oscilaciones amortiguadas para  $\alpha$  y  $\beta$  (este amortiguamiento se traduce en un cambio de desplazamiento angular entre los ejes de  $\alpha$  y  $\beta$ ).

### 5.3. Validación

Una vez definidas las ecuaciones (5.1) que definen el comportamiento del satélite (bajo determinadas suposiciones) estamos en condiciones de integrarlas numéricamente. Para verificar que el código carece de errores, compararemos su solución con la solución analítica obtenida en la sección 5.2. En el apendice B podemos encontrar el código numérico utilizado.

Las fuerzas debidas a la rotación del satélite en la orbita así como las debidas al gradiente de gravedad son de tipo conservativo. Es decir, no tenemos ningún mecanismo por el cual se disipe energía, por tanto podemos garantizar que la energía cinética de rotación permanece constante. Este hecho nos permitirá realizar una comprobación extra.

En todas las soluciones tomaremos los valores  $\lambda = 0,1$  y  $w_c = 1$ . Como condiciones iniciales se consideraran desplazamientos pequeños para  $\alpha_0$  y  $\beta_0$ , y cero para  $\varphi_0$ . Las velocidades angulares iniciales serán nulas para  $\dot{\beta}_0$  y  $\dot{\alpha}_0$ .

Compararemos en tres casos diferentes, en función de las condiciones iniciales. Para comparar las soluciones se han superpuesto las soluciones analítica y numerica en las figuras.

**Caso 1:**  $\dot{\varphi}_0 = 0$ ,  $\beta_0 = 0,01$ ,  $\alpha_0 = 0$

Los desplazamientos angulares obtenidos para  $\alpha$  y  $\beta$  vienen dados por la figura 5.1 y para  $\varphi$  por la figura 5.2. En ambos casos no se aprecia ninguna diferencia notable entre las dos soluciones. En este caso  $W = 0,0097$ , por tanto  $A \sim 10^{-3}$ , por lo que se explica que tengamos una oscilación de am-

plitud constante en  $\beta$  (esta oscilación se produce alrededor de  $\beta_p \simeq 3 \cdot 10^{-4}$ ) y que  $\alpha$  sea prácticamente nulo. En cuanto al comportamiento de  $\varphi$  se corresponde con lo descrito en la sección 5.2.

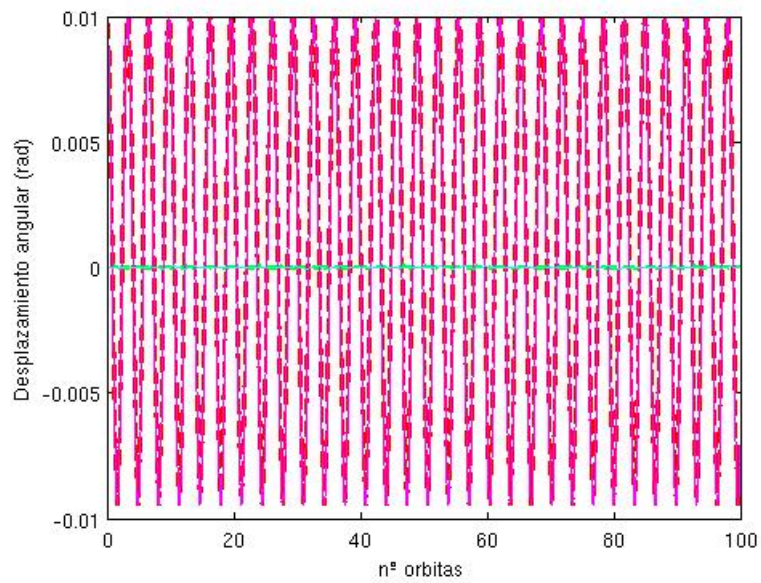


Figura 5.1: Validación del código. Caso 1. Solución para  $\beta(t)$ ,  $\alpha(t)$ .

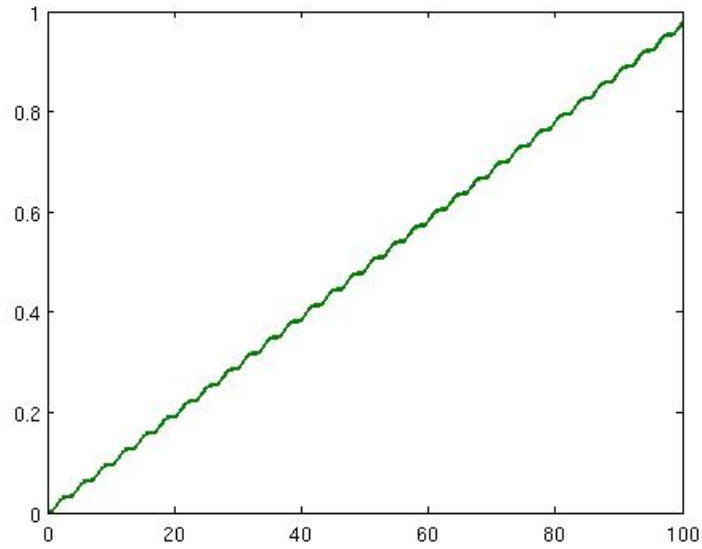


Figura 5.2: Validación del código. Caso 1. Solución para  $\varphi(t)$ .

Por ultimo vemos como la evolución temporal de la energía cinética permanece constante y el sumatorio del cuadrado de los parámetros es siempre igual a la unidad (Fig. 5.3).

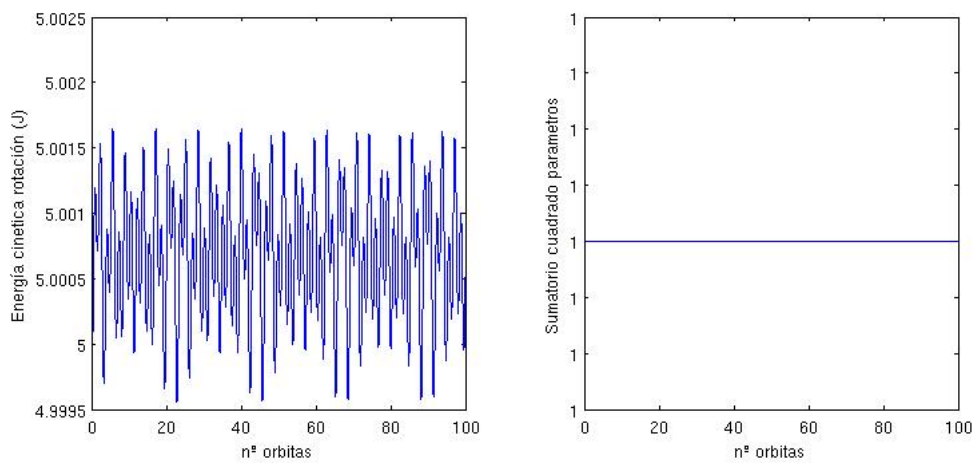


Figura 5.3: Validación del código. Caso 1. Energía cinética y suma de parámetros.

En el caso que tengamos desplazamiento inicial en  $\alpha$  en lugar de  $\beta$ , se tiene  $W = 0$  y  $A = 0$ . Por tanto la ecuación para  $\alpha$  queda desacoplada y su solución es un oscilación de amplitud constante.  $\beta$  se mantiene nulo, al igual que  $\varphi$ . La solución por tanto es similar a la anterior y no se considera necesaria su representación. No se han apreciado diferencias entre las soluciones numerica y analítica. Así mismo se ha comprobado la conservación de la energía de rotación y que la suma del cuadro de los parámetros es igual a la unidad.

**Caso 2:**  $\dot{\varphi}_0 = 1$ ,  $\beta_0 = 0$ ,  $\alpha_0 = 0$

En este caso el valor de  $A$  deja de ser nulo, por tanto se produce un efecto de amortiguamiento entre los desplazamientos  $\alpha$  y  $\beta$  (Fig.5.4). La oscilación de  $\beta$  se produce alrededor de la constante  $\beta_p = 0,027$ , esta a su vez determina la amplitud de la oscilación. La solución para  $\varphi$  como ya se ha visto se corresponde prácticamente con una recta de pendiente  $W$ .

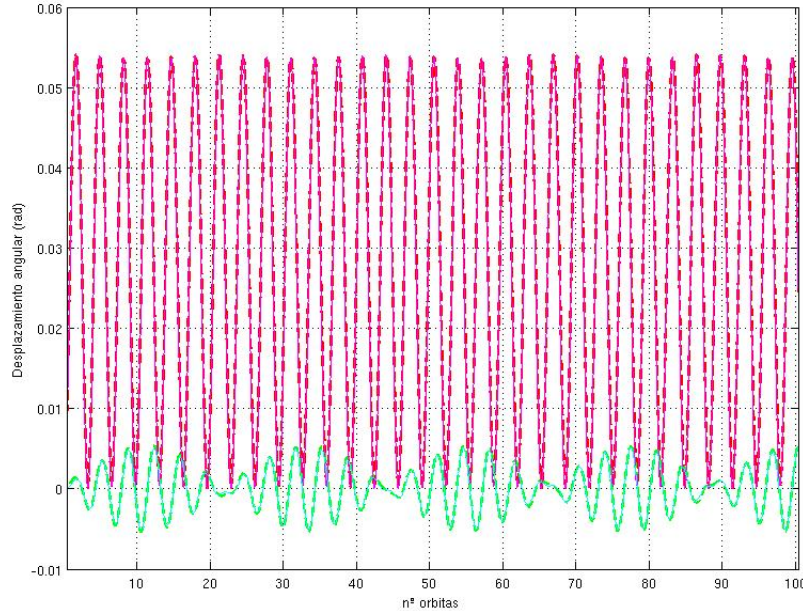


Figura 5.4: Validación del código. Caso 2. Solución para  $\beta(t)$ ,  $\alpha(t)$ .

Para que se cumpla la conservación de la energía cinética, ha sido nece-

sario reducir el error de integración a un orden de  $10^{-12}$ . Por ultimo se ha comprobado que el valor de los parámetros de Euler es correcto.

**Caso 3:**  $\dot{\varphi}_0 = 1$ ,  $\beta_0 = 0,01$ ,  $\alpha_0 = 0,02$

En este caso la solución es similar al anterior salvo que al introducir desplazamientos iniciales para  $\alpha$  y  $\beta$ , sus soluciones son del mismo orden y se aprecia mejor el efecto del amortiguamiento. Al igual que para el resto de soluciones se verifica la conservación de la energía, así como la validez para los parámetros de euler.

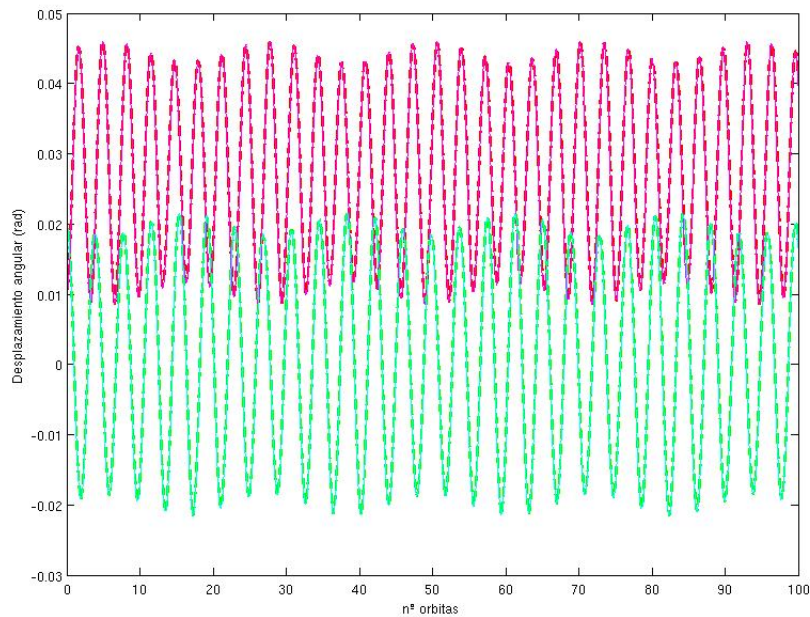


Figura 5.5: Validación del código. Caso 3. Solución para  $\beta(t)$ ,  $\alpha(t)$ .

Para las tres soluciones anteriores hemos obtenido el mismo resultado para el calculo numérico como el analítico. Sin embargo estas soluciones sufren una diferenciación a lo largo del tiempo, o numero de orbitas, esta diferencia se produce por el efecto de términos orden muy pequeño. Es decir, para tiempos pequeños su efecto acumulativo es despreciable no siendo así para tiempos suficientemente largos. En la figura 5.6 podemos ver este efecto para  $\dot{\varphi}_0 = 2$ ,  $\beta_0 = 0,01$ ,  $\alpha_0 = 0,02$ .

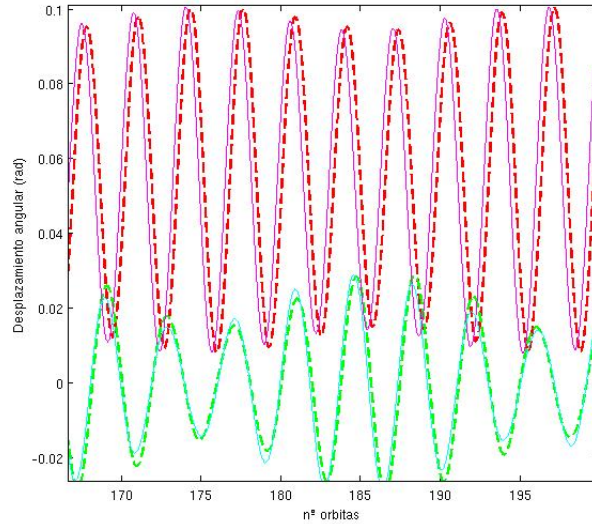


Figura 5.6: Validación del código. Efecto de los términos acumulativos. Solución para  $\beta(t)$ ,  $\alpha(t)$ .

Para tener en cuenta el efecto de estos términos es conveniente el uso de dos escalas de tiempo para obtener la solución. No es objeto de este trabajo profundizar en la búsqueda de soluciones validas para tiempos muy largos, por lo que no se ha realizado dicho tratamiento a las ecuaciones.

En resumen, hemos obtenido soluciones para  $\beta$ ,  $\alpha$  y  $\varphi$ . Esta soluciones no solo nos han permitido validar el código numérico sino también conocer el comportamiento de las soluciones. Estas soluciones se corresponden con oscilaciones, quedando caracterizadas por las frecuencias  $r_1$  y  $r_2$ , en el caso de  $\beta$  y  $\alpha$  pequeños.



# Capítulo 6

## Determinación de la actitud

En este capítulo llegaremos al objetivo del trabajo, es decir, determinar la posición empleando la información de un único sensor de horizonte. Para lo cual sera necesario describir el concepto de nutación y su relación con los Ángulos de Euler definidos en el capitulo anterior.

### 6.1. Nutación

En la sección 3.3 se determino la solución de las Ecuaciones de Euler en el caso de no existir momentos externos sobre el solido. De la solución de la Ec.(3.6), tenemos que el vector dado por  $w_1\vec{i} + w_2\vec{j}$  en ejes fijos al cuerpo, tiene modulo constante y realiza una rotación uniforme alrededor del eje  $z$  de velocidad angular  $n$ . Como  $\vec{w}_3$  es un vector de modulo constante la velocidad angular  $\vec{w}$  también tiene modulo constante y efectúa una *precesión* alrededor del eje  $z$ .

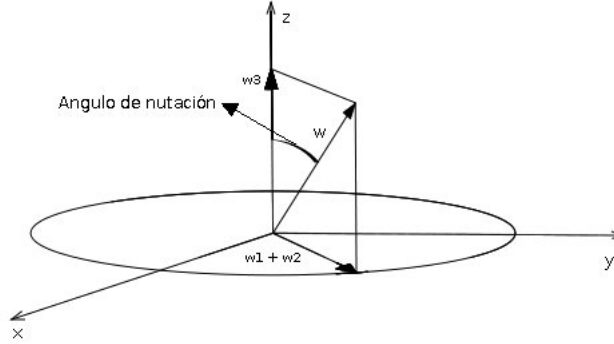


Figura 6.1: Representación del ángulo de nutación

Definimos como *nutación* al ángulo que forma el eje de rotación, dado por  $\vec{w}$  y el eje  $z$  (ver Fig.6.1). En el caso de tener un cuerpo sometido a momentos externos aparece un cabeceo o desplazamiento angular del eje  $z$  y el eje de rotación ya que el ángulo de nutación no se mantiene constante en el tiempo.

En nuestro caso de un satélite en órbita, podemos expresar la velocidad angular,  $\vec{w}$ , en los ejes de referencia *roll*, *pitch* y *yaw*. De forma que definimos la *nutación* como el desplazamiento angular entre el eje de *yaw* y el eje de rotación.

Eligiendo la siguiente secuencia de giros: una rotación  $\theta$  en torno a *yaw*, seguido de una rotación  $\gamma$  alrededor de *roll* y por último una rotación  $\psi$  en torno a *yaw*. La matriz de rotación viene dada por  $A = C_3(\theta) \cdot C_1(\gamma) \cdot C_3(\psi)$ , de esta forma el ángulo de *nutación* viene dado por  $\gamma$ . Expresando  $A$  de forma completa, tenemos

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi - \sin \theta \cos \gamma \sin \psi & -\cos \theta \sin \psi - \sin \theta \cos \gamma \cos \psi & \sin \theta \sin \gamma \\ \sin \theta \cos \psi + \cos \theta \cos \gamma \sin \psi & -\sin \theta \sin \psi + \cos \theta \cos \gamma \cos \psi & -\cos \theta \sin \gamma \\ & \sin \gamma \sin \psi & \sin \gamma \cos \psi \\ & & \cos \gamma \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

El hecho de que exista la nutación implica que la señal que obtenemos de los sensores de posición no sea un valor constante, sino que se produce una

variación en el tiempo. Este fenómeno resulta muy interesante ya que nos permite obtener el valor de la nutación a partir de la medida de un sensor, permitiendo por tanto obtener uno de los tres ángulos de Euler, que de otra manera sería imposible obtener ya que no es posible medir la variación de los ángulos de Euler.

## 6.2. Obtención de los ángulos de Euler

Definido el ángulo de nutación y la matriz de rotación  $A$ . Podemos relacionar la nutación,  $\gamma$  con los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  definidos en la sección 4.1. Para ello resulta útil comparar términos de las matrices  $C$  y  $A$ . De esta forma tenemos

$$\cos \gamma = \cos \alpha \cdot \cos \beta$$

de forma que para  $\alpha$  y  $\beta$  pequeños se tiene

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 \tag{6.2}$$

Lo que implica que podemos determinar el ángulo de nutación del satélite una vez conocida la solución dada por la ecuación (5.13).

Nuestro interés reside en la operación inversa, es decir, una vez conocido el desplazamiento angular  $\gamma$  determinar los desplazamientos angulares  $\alpha$  y  $\beta$ . De esta forma quedarán determinados los tres ángulos de Euler, ya que como vimos en la sección 5.2, el desplazamiento angular  $\varphi$  queda determinado una vez conocido  $\beta$ .

Conocida la nutación el problema reside en obtener por separado la solución para  $\alpha$  y  $\beta$ , ya que solo disponemos de una ecuación para relacionar los tres desplazamientos angulares. Para ello resulta conveniente apoyarse en la forma de la solución analítica obtenida en el sección 5.2.

La solución analítica de los ángulos de euler  $\alpha$  y  $\beta$  viene dada por la combinación de oscilaciones de frecuencias  $r_1$  y  $r_2$  y de las constantes  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ ,  $A_1$  y  $A_2$  que se determinan por medio de las condiciones iniciales. Luego la nutación,  $\gamma$ , quedara a su vez definida por oscilaciones de frecuencias  $r_1$  y  $r_2$ .

Por otra parte sabemos que el análisis de Fourier nos permite expresar una determinada función (en nuestro caso la señal obtenida para la nutación),

$f(t)$ , como sigue

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{i=1}^n [A_i \cos(iwt) + B_i \sin(iwt)], \quad \text{donde}$$

$$A_i = \frac{2}{T} + \int_{t-T}^t \gamma(t) \cos(iwt) dt$$

$$B_i = \frac{2}{T} + \int_{t-T}^t \gamma(t) \sin(iwt) dt$$

siendo  $w$  la frecuencia fundamental y  $iw$  sus armónicos

quedando la función descompuesta en suma de oscilaciones puras para las frecuencias fundamentales y sus armónicos. En nuestro caso la señal adquirida para la nutación se puede expresar de forma analítica utilizando la Ec.(6.2), de esta forma tenemos

$$\begin{aligned} \gamma^2 = & \frac{A_1^2(1 - N_1^2)}{2} \cos(2r_1t + 2\delta_1) + \frac{A_2^2(1 - N_2^2)}{2} \cos(2r_2t + 2\delta_2) \\ & + A_1A_2(N_2 - N_1) \sin[(r_2 + r_1)t + (\delta_2 + \delta_1)] \\ & + A_1A_2(N_2 + N_1) \sin[(r_2 - r_1)t + (\delta_2 - \delta_1)] \\ & - 2\beta_p N_1 A_1 \sin(r_1t + \delta_1) + 2\beta_p A_2 \cos(r_2t + \delta_2) \\ & + \beta_p^2 + \frac{A_1^2(1 + N_1^2)}{2} + \frac{A_2^2(1 + N_2^2)}{2} \end{aligned}$$

Por tanto para  $\gamma^2$  tenemos oscilaciones puras para las frecuencias angulares  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $2r_1$ ,  $2r_2$ ,  $(r_1 + r_2)$  y  $(r_2 - r_1)$ . Por tanto un análisis de Fourier de  $\gamma^2$  nos permite determinar las constantes que definen las condiciones iniciales para  $\alpha$  y  $\beta$ .

En efecto, conocidas las amplitudes para cada frecuencia podemos determinar  $A_1$  y  $A_2$ , y conocidos los desfases podemos determinar  $\delta_1$  y  $\delta_2$ .

Una forma de determinar la amplitud de las oscilaciones es realizando un análisis espectral. Este análisis nos proporcionara la potencia de densidad espectral para cada frecuencia. Esta potencia es proporcional al cuadrado de la amplitud de las oscilaciones. Por tanto sera necesario que del análisis espectral seamos capaces de distinguir las seis frecuencias de oscilación. Una vez identificadas, el valor relativo de la potencia de densidad espectral para cada frecuencia nos permitirá a su vez determinar el valor relativo de las amplitudes.

Es decir, si llamamos por  $Pxx_1$ ,  $Pxx_2$ ,  $Pxx_3$ ,  $Pxx_4$ ,  $Pxx_5$  y  $Pxx_6$  a las potencias de densidad espectral del análisis espectral para  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $2r_1$ ,  $2r_2$ ,  $(r_2 + r_1)$  y  $(r_2 - r_1)$  respectivamente. Podemos obtener  $A_1$  y  $A_2$  como sigue

$$A_1 = \frac{4\beta_p N_1}{(1 - N_1^2)} \cdot \sqrt{\frac{Pxx_3}{Pxx_1}}$$

$$A_2 = \frac{4\beta_p}{(1 - N_2^2)} \cdot \sqrt{\frac{Pxx_4}{Pxx_2}}$$

Conocidos  $A_1$  y  $A_2$ , los desfases  $\delta_1$  y  $\delta_2$  se obtienen evaluando la expresión analítica para  $\gamma^2$  para cualquier  $\delta_1$  y  $\delta_2$  y comparando con el valor conocido de  $\gamma^2$ .

### 6.3. Ejemplos

Con el fin de poder comprobar el método propuesto realizaremos varias ejemplos. En estos ejemplos se considerara conocida la nutación, que obtendremos a partir de la solución proporcionada por el código numérico. Partiendo de está, realizaremos el análisis espectral y de esta forma determinaremos las constantes  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $\delta_1$  y  $\delta_2$  que permiten obtener  $\alpha$  y  $\beta$ .

En total consideraremos cinco casos diferentes. En todos ello mantendremos las condiciones iniciales  $\alpha_0 = 0,02$  y  $\beta_0 = 0,01$  fijas. Variando por tanto la velocidad angular inicial en torno a yaw,  $\dot{\varphi}$ , el parámetro de esbeltez  $\lambda$  y el radio de la orbita (siendo  $w_c = G \cdot m_{earth}/R_0^3$ ).

El análisis espectral se realizara utilizando la función *pwelch* integrada en Matlab. Esta función permite obtener un periodograma utilizando el método de Welch.

A continuación se muestran los espectros obtenidos para cada caso. En todos ellos se han numerado los picos de potencia espectral para cada frecuencia utilizados, siguiendo el orden ascendente  $r_1$  (1),  $r_2$  (2),  $2r_1$  (3),  $2r_2$  (4),  $(r_2 + r_1)$  (5) y  $(r_2 - r_1)$  (6).

**Caso 1:**  $\lambda = 0,1$ ,  $\dot{\varphi} = 1$ ,  $w_c = 1$

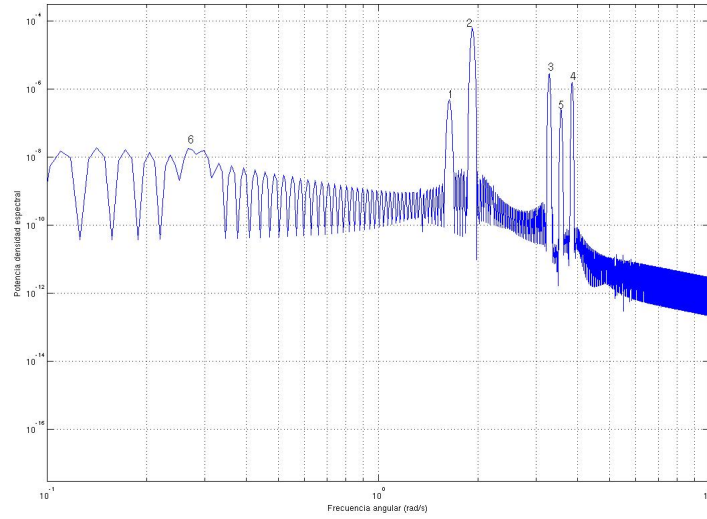


Figura 6.2: Análisis espectral nutación.  $\dot{\varphi} = 1$ ,  $\lambda = 0,1$ ,  $w_c = 1$  .

**Caso 2:**  $\lambda = 0,1$ ,  $\dot{\varphi} = 5$ ,  $w_c = 1$

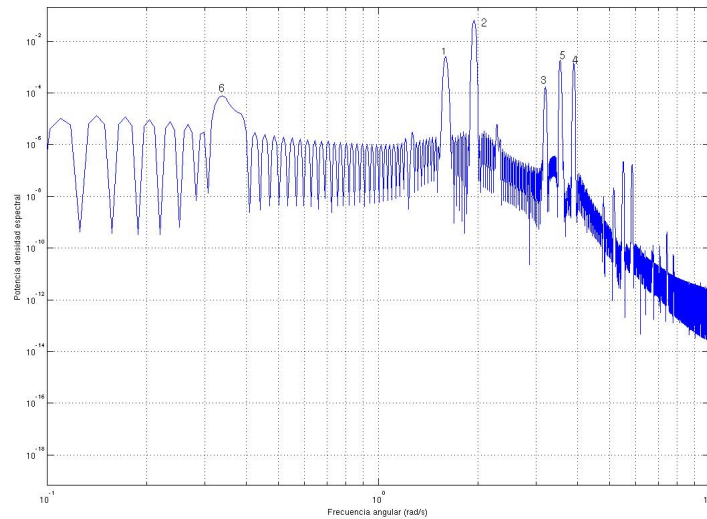


Figura 6.3: Análisis espectral nutación.  $\dot{\varphi} = 5$ ,  $\lambda = 0,1$ ,  $w_c = 1$  .

**Caso 3:**  $\lambda = 0,5$ ,  $\dot{\varphi} = 1$ ,  $w_c = 1$

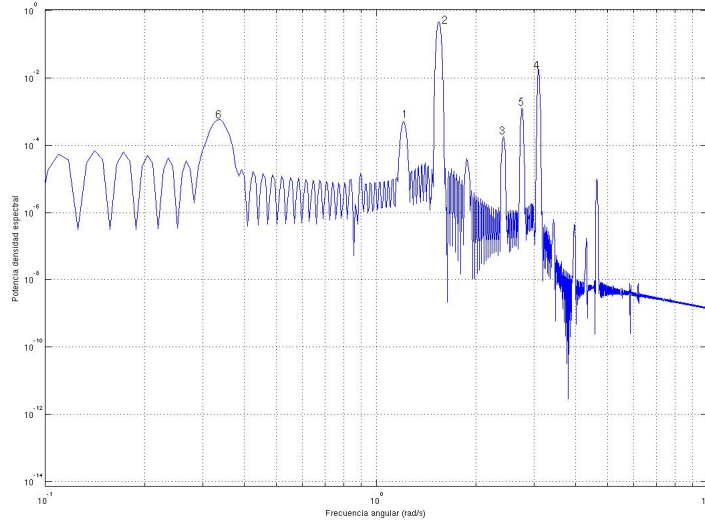


Figura 6.4: Análisis espectral nutación.  $\dot{\varphi}_0 = 1$ ,  $\lambda = 0,5$ ,  $w_c = 1$  .

**Caso 4:**  $\lambda = 0,1$ ,  $\dot{\varphi} = 1$ ,  $w_c = 0,6$

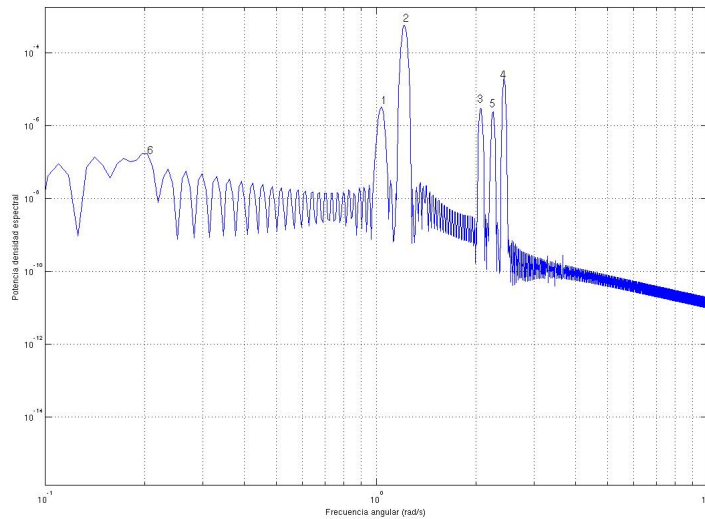


Figura 6.5: Análisis espectral nutación.  $\dot{\varphi} = 1$ ,  $\lambda = 0,1$ ,  $w_c = 0,6$  .

**Caso 5:**  $\lambda = 0,1$ ,  $\dot{\varphi} = 5$ ,  $w_c = 0,6$

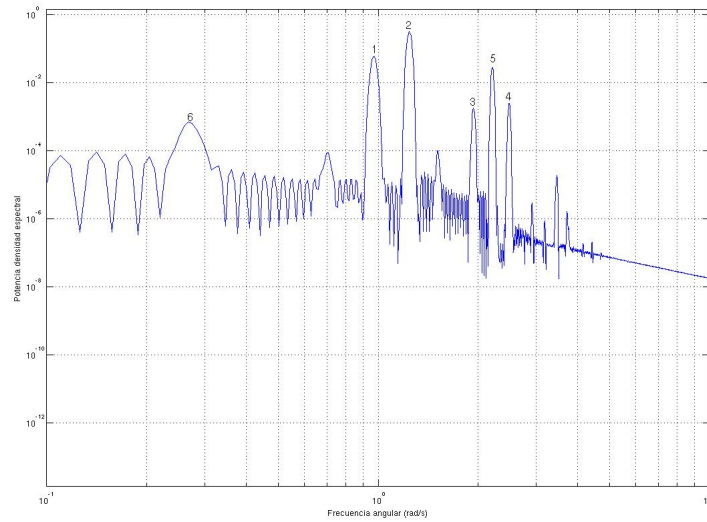


Figura 6.6: Análisis espectral nutación.  $\dot{\varphi} = 5$ ,  $\lambda = 0,1$ ,  $w_c = 0,6$  .

En estos cinco ejemplos se comprueba como obtenemos seis componentes para  $\gamma^2$  tal como se había descrito analíticamente. Una vez obtenidos los valores de potencia espectral podemos encontrar la solución para los ángulos de Euler.

De esta forma para el primer ejemplo (Caso 1) tenemos las siguientes figuras donde se representan los ángulos de Euler  $\alpha$  y  $\beta$  obtenidos mediante el análisis espectral (en línea discontinua) superpuestos con la solución obtenida de forma numérica.



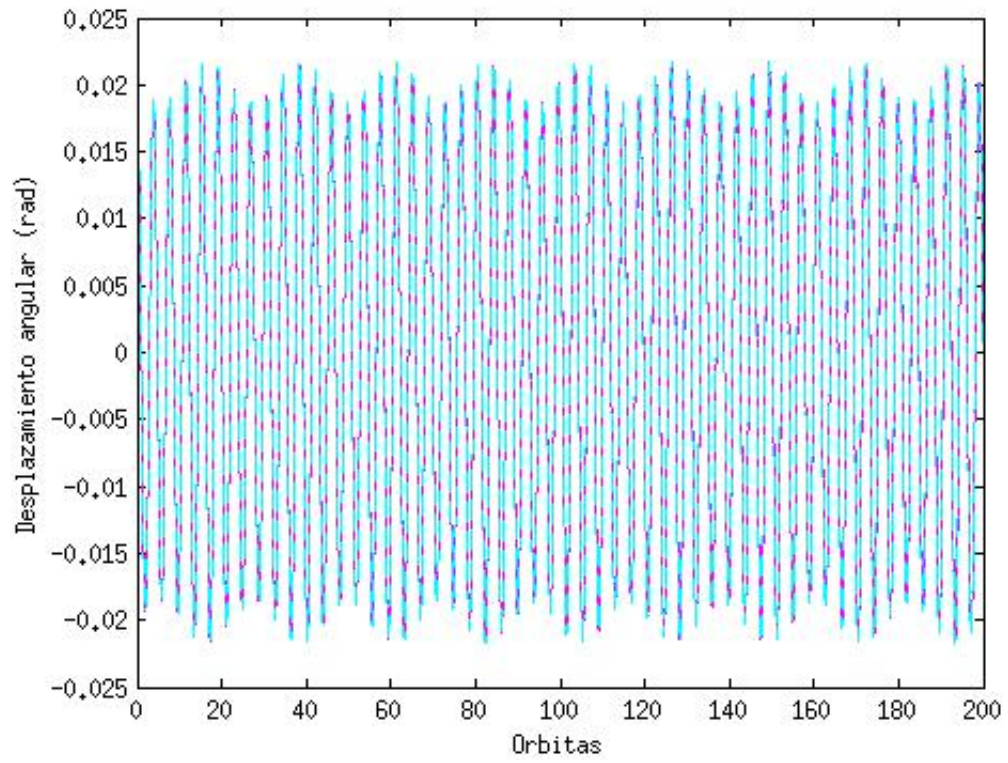


Figura 6.7: Análisis espectral: Desplazamiento angular  $\alpha$

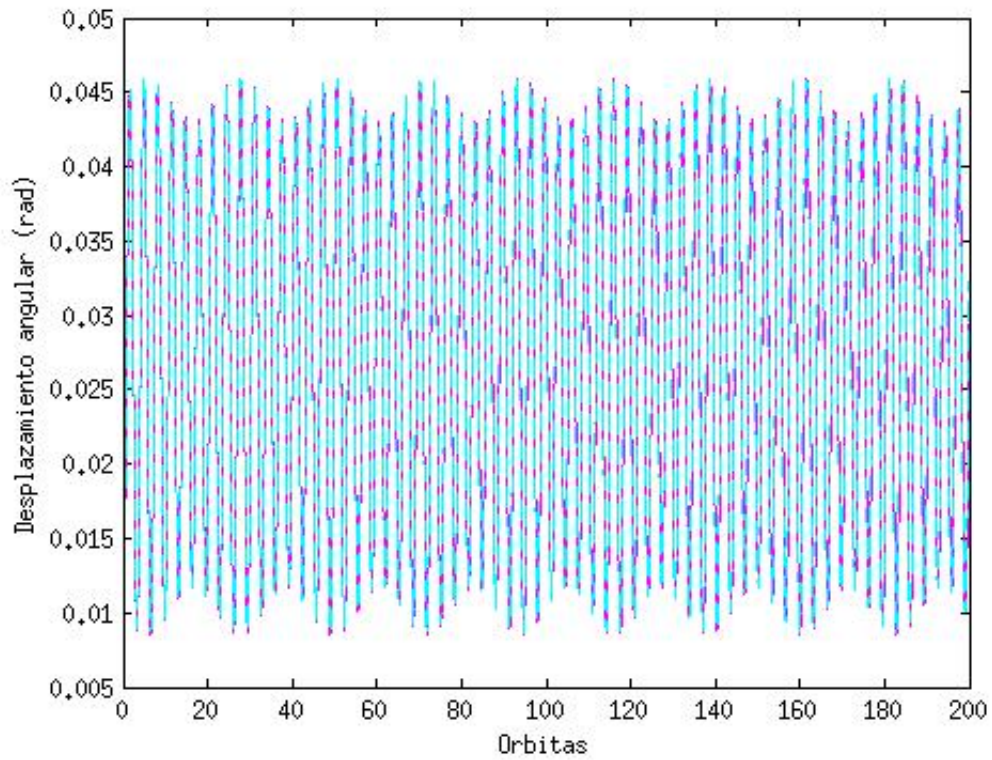


Figura 6.8: Análisis espectral: Desplazamiento angular  $\beta$

Para el resto de casos las figuras obtenidas son similares, por lo que no se considera necesaria su representación.

Por ultimo representamos el análisis espectral en un caso extra donde el método pierde validez, en este caso el análisis espectral obtenido es el siguiente,

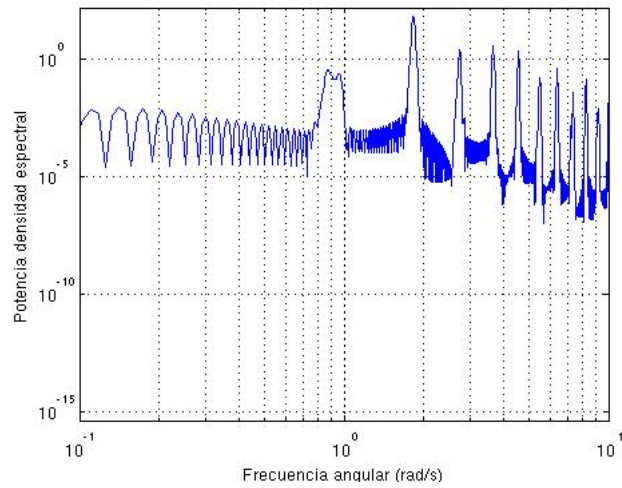


Figura 6.9: Análisis espectral nutación.  $\dot{\varphi}_0 = 5$ ,  $\lambda = 0,5$ ,  $w_c = 1$  .

En este caso el periodograma obtenido no sigue la estructura prevista, esta falta de correspondencia se debe a que los valores que toman los Ángulos de Euler  $\alpha$  y  $\beta$  dejan de ser pequeños (ver Fig.6.10) y por tanto la solución analítica pierde validez.

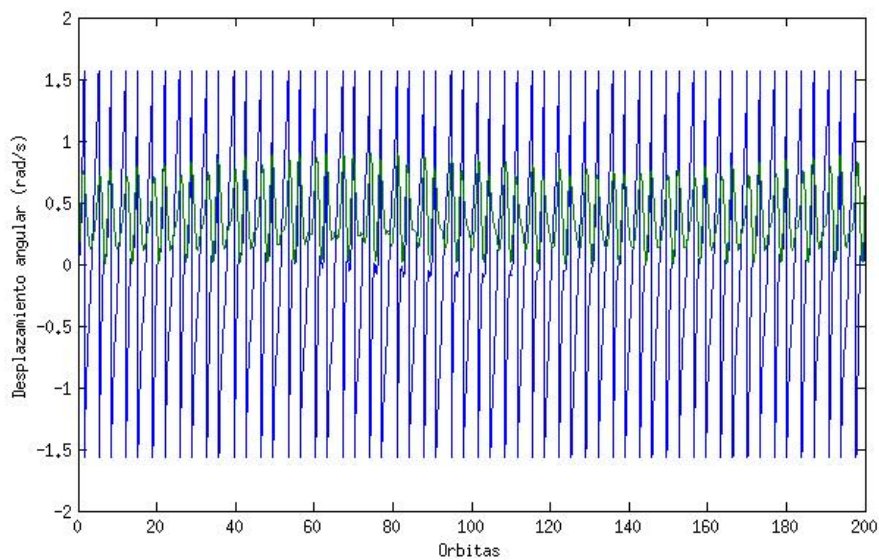


Figura 6.10: Análisis espectral: Desplazamiento angular  $\alpha$  y  $\beta$

Este último ejemplo demuestra que la validez del método propuesto queda restringida a aquellas situaciones en que  $\alpha$  y  $\beta$  se mantengan en valores pequeños. Dado que el objetivo perseguido es el de mantener al satélite apuntando a la Tierra de forma estable es una buena suposición que los valores toman estos desplazamientos angulares son pequeños.

# Capítulo 7

## Conclusiones y trabajo futuro

### 7.1. Conclusiones

El objetivo perseguido en este trabajo era conseguir establecer un método de cálculo que permitiese determinar la actitud de un satélite orbitando la Tierra y apuntando hacia ella. Utilizando para ello un único sensor de horizonte.

En primer lugar nos hemos encargado de analizar los diferentes sensores que existen para determinar la actitud en sensores. Esto nos ha permitido situar el problema, así como ver las diferentes soluciones posibles. En concreto para nuestro caso de interés se ha visto como el uso de sensores de horizonte resulta conveniente.

Para poder entender el problema, se ha realizado un estudio de las ecuaciones básicas que determinan la física del problema. Así mismo se han definido variables básicas para la determinación de la actitud, como los ángulos de Euler. Para lo cual no se ha tenido en cuenta efectos característicos que aparecen en la dinámica de satélites. De esta forma hemos introducido un núcleo consistente en el código numérico de resolución.

Generado este núcleo, se han analizado los efectos más importantes que aparecen en un satélite en órbita alrededor de la Tierra. Los efectos que se han considerado han sido los momentos de inercia provocados por los efectos del gradiente gravitacional y los debidos a las fuerzas de inercia del satélite. Despreciando para ello efectos como el de la presión radiación solar.

Completadas las ecuaciones, se ha obtenido el código numérico final. Para

poder validar este código, se ha buscado una solución analítica. Esta solución ha sido posible obtenerla realizando una serie de simplificaciones que nos permita llegar a un sistema lineal. En concreto se han considerado desplazamientos angulares pequeños, que sera cierto siempre que tengamos un satélite estabilizado. De esta forma nos hemos asegurado tanto de tener un código fiable como de tener una solución analítica que sera la base para llegar a nuestra meta.

Por ultimo se ha realizado un estudio para demostrar como es posible obtener información suficiente de un sensor de horizonte para determinar la actitud. Para lo cual se ha introducido el concepto de nutación y como afecta a los valores de la señal obtenida por los sensores. Con todo ello se ha establecido un método que permite determinar la actitud del satélite utilizando para ello la información proporcionada por un único sensor de horizonte. Este método se basa en el análisis en frecuencia de la señal obtenida por el sensor, y compararla con la solución analítica conocida para el satélite.

En resumen, hemos obtenido un método que permite obtener determinar la actitud del satélite con un solo sensor. Actualmente como se ha visto en el capítulo 2 los satélites van provistos de varios de estos sensores, obteniéndose datos suficientes para una determinación precisa de la actitud. Por lo que una aplicación de este método podría ser la de apoyar en la determinación de actitud en el caso de tener capacidad de computación disponible a bordo.

## 7.2. Trabajo futuro

Para continuar este trabajo seria conveniente aumentar el nivel de detalle haciendo posible determinar la actitud del satélite con mayor precisión.

Los futuros puntos sobre los que trabajar serian:

- Introducir la geometría elíptica de una orbita real. Afectando principalmente al calculo de los momentos de inercia externos sobre el satélite.
- Resolver las ecuaciones haciendo uso de dos escalas de tiempo. De forma que la solución sea valida para cualquier número de orbitas al tenerse en cuenta los efectos acumulativos de términos de las ecuaciones que para tiempos pequeños son despreciables.
- Considerar la oblicuidad de la tierra. Para lo cual resulta interesante el uso de un sensor de horizonte extra

## *CAPÍTULO 7. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO*

---

Asimismo queda pendiente la realización de un sistema de control para mantener el satélite apuntando a la Tierra.

# Apéndice A

## Código numérico para el movimiento libre

```
clear
%DURACIÓN DE LA SIMULACIÓN
tfinal = 7.41;

%COMPONENTES PRINCIPALES MATRIZ DE INERCIA
I1 = 10;
I2 = 5;
I3 = 1; lambda=I3/I1;

%CONDICIONES INICIALES(velocidades angulares y ángulos)
p =3; q = 2; r = 1;
alpha0 =0; beta0 =0; gamma0 =0;

%CONDICIONES INICIALES(parámetros de Euler)
%Se ha elegido para ello la matriz de secuencia 2, 1, 3.
%Calculo de parámetros iniciales a partir de los ángulos de euler

c110=cos(alpha0)*cos(gamma0)-sin(alpha0)*sin(beta0)*sin(gamma0);
c120=cos(alpha0)*sin(gamma0)+sin(alpha0)*sin(beta0)*cos(gamma0);
c130=-sin(alpha0)*cos(beta0);

c210=-cos(beta0)*sin(gamma0);
c220=cos(beta0)*cos(gamma0);
c230=sin(beta0);

c310=sin(alpha0)*cos(gamma0)+cos(alpha0)*sin(beta0)*sin(gamma0);
```



## APÉNDICE A. CÓDIGO NUMÉRICO PARA EL MOVIMIENTO LIBRE

```
c320=sin(alpha0)*sin(gamma0)-cos(alpha0)*sin(beta0)*cos(gamma0);
c330=cos(alpha0)*cos(beta0);

eta0 = 0.5*(1+c110+c220+c330)^0.5;
eps10 = (c230-c320)/(4*eta0);
eps20 = (c310-c130)/(4*eta0);
eps30 = (c120-c210)/(4*eta0);

%RESOLUCIÓN MEDIANTE ODE45 (ECUACIONES DEFINIDAS EN ECS.M

[tout,yout] = ode45(@ecs,[0 tfinal],[p q r eps10 eps20 eps30 eta0 I1 I2 I3],...
    odeset('abstol', 1e-12, 'reltol', 1e-12));

function dy = ecs(t,y)
dy = zeros(10,1);

%ECUACIONES DE EULER PARA LAS VELOCIDADES ANGULARES Y(1), Y(2), Y(3)
dy(1) = (1/y(8))*(-y(2)*y(3)*(y(10)-y(9)));
dy(2) = (1/y(9))*(-y(1)*y(3)*(y(8)-y(10)));
dy(3) = (1/y(10))*(-y(1)*y(2)*(y(9)-y(8)));

%ECUACIONES DIFERENCIALES PARA LOS PARAMETROS DE EULER
dy(4) = 0.5*(y(5)*y(3) - y(6)*y(2) + y(7)*y(1));
dy(5) = 0.5*(y(6)*y(1) - y(4)*y(3) + y(7)*y(2));
dy(6) = 0.5*(y(4)*y(2) - y(5)*y(1) + y(7)*y(3));
dy(7) = -0.5*(y(4)*y(1) + y(5)*y(2) + y(6)*y(3));

Calculo de los Angulos de euler a partir de los parámetros de Euler:

%EXTRAEMOS LOS PARÁMETROS DE LA SOLUCIÓN DADA POR ODEECS.M
eps1 = yout(:,4); eps2 = yout(:,5); eps3 = yout(:,6);
eta = yout(:,7);

%CALCULO DE LOS TERMINOS DE LA MATRIZ DE ROTACION C

c11 = 1-2.*(eps2.^2+eps3.^2); c12 = 2.*(eps1.*eps2+eta.*eps3);
c13 = 2.*(eps1.*eps3-eta.*eps2);

c21 = 2.*(eps2.*eps1-eta.*eps3); c22 = 1-2.*(eps3.^2+eps1.^2);
```

APÉNDICE A. CÓDIGO NUMÉRICO PARA EL MOVIMIENTO LIBRE

```
c23 = 2.*(eps2.*eps3+eta.*eps1);
```

```
c31 = 2.*(eps1.*eps3+eta.*eps2); c32 = 2.*(eps3.*eps2-eta.*eps1);  
c33 = 1-2.*(eps1.^2+eps2.^2);
```

```
%COMPARANDO CON LA MATRIZ PARA C2*C1*C3 OBTENEMOS LOS ANGULOS DE EULER  
alpha = atan(-c13./c33);  
beta = asin(c23);  
gamma = atan(-c21./c22);
```

# Apéndice B

## Código numérico completo

```
clear
caso='caso6';
%DURACIÓN DE LA SIMULACIÓN
tfinal = 200;
%COMPONENTES PRINCIPALES MATRIZ DE INERCIA MATRIZ DE INERCIA
I1 = 10;
I2 = 10;
I3 = 1;
%CONDICIONES INICIALES(velocidades angulares y ángulos)
dalphadt0 = 0; dbetadt0 = 0; dphidt0 =5;
alpha0 = 0.02;
beta0 = 0.01;
phi0 = 0;
%Velocidad en la orbita([wc] = [1/s])
mu=3.986*10^14; Rc=10^5;
wc=(mu/(Rc^3))^0.5;
%wc=1;
lambda=I3/I1;
W=(1-lambda)*(dphidt0+beta0*wc)/(1-0.75*lambda);

p0=dalphadt0*cos(beta0)*sin(phi0)+dbetadt0*cos(phi0);
q0=dalphadt0*cos(beta0)*cos(phi0)-dbetadt0*sin(phi0);
r0=dphidt0-dalphadt0*sin(beta0);

%CONDICIONES INICIALES(parámetros de Euler)
%Calculo de parámetros iniciales a partir de los ángulos de euler

c11=cos(alpha0)*cos(phi0)+sin(alpha0)*sin(beta0)*sin(phi0);
```

## APÉNDICE B. CÓDIGO NUMÉRICO COMPLETO

---

```
c12=cos(beta0)*sin(phi0);
c13=-sin(alpha0)*cos(phi0)+cos(alpha0)*sin(beta0)*sin(phi0);

c21=-cos(alpha0)*sin(phi0)+sin(alpha0)*sin(beta0)*cos(phi0);
c22=cos(beta0)*cos(phi0);
c23=sin(alpha0)*sin(phi0)+cos(alpha0)*sin(beta0)*cos(phi0);

c31=sin(alpha0)*cos(beta0);
c32=-sin(beta0);
c33=cos(alpha0)*cos(beta0);

eta = 0.5*(1+c11+c22+c33)^0.5;
eps1 = 0.25*(1/eta)*(c23-c32);
eps2 = 0.25*(1/eta)*(c31-c13);
eps3 = 0.25*(1/eta)*(c12-c21);

w10=p0-wc*c12;
w20=q0-wc*c22;
w30=r0-wc*c32;

%RESOLUCION MEDIANTE ODE45
[tout,yout] = ode45(@ecs,[0 tfinal],[p0 q0 r0 eps1 eps2 eps3 eta I1 I2 I3 wc],...
odeset('InitialStep',9.9520e-04, 'MaxStep',9.9520e-04));
%odeset('abstol', 1e-12, 'reltol', 1e-12));
function dy = ecs(t,y)
dy = zeros(11,1);

c12 = 2*(y(4)*y(5)+ y(6)*y(7));
c22 = 1 - 2*(y(6)^2+y(4)^2);
c32 = 2*(y(6)*y(5)-y(4)*y(7));

c13 = 2*(y(4)*y(6)-y(5)*y(7));
c23 = 2*(y(5)*y(6)+y(4)*y(7));
c33 = 1 - 2*(y(4)^2+y(5)^2);

dy(1) = (1/y(8))*(-y(2)*y(3)*(y(10)-y(9))-y(11)*y(2)*c32*(y(8)-y(10)+y(9))+ ...
y(11)*y(3)*c22*(y(8)-y(9)+y(10))-y(11)^2*c22*c32*(y(10)-y(9))+ ...
3*y(11)^2*c23*c33*(y(10)-y(9)));
dy(2) = (1/y(9))*(-y(1)*y(3)*(y(8)-y(10))-y(11)*y(3)*c12*(y(9)-y(8)+y(10))+ ...
y(11)*y(1)*c32*(y(9)-y(10)+y(8))-y(11)^2*c12*c32*(y(8)-y(10))+ ...
3*y(11)^2*c13*c33*(y(8)-y(10)));
```

APÉNDICE B. CÓDIGO NUMÉRICO COMPLETO

---

```
dy(3) = (1/y(10))*(-y(1)*y(2)*(y(9)-y(8))-y(11)*y(1)*c22*(y(10)-y(9)+y(8))+...
        y(11)*y(2)*c12*(y(10)-y(8)+y(9))-y(11)^2*c12*c22*(y(9)-y(8))+ ...
        3*y(11)^2*c13*c23*(y(9)-y(8)));
```

```
dy(4) = 0.5*(y(5)*y(3)-y(6)*y(2)+y(7)*y(1));
dy(5) = 0.5*(y(6)*y(1)-y(4)*y(3)+y(7)*y(2));
dy(6) = 0.5*(y(4)*y(2)-y(5)*y(1)+y(7)*y(3));
dy(7) = -0.5*(y(4)*y(1)+y(5)*y(2)+y(6)*y(3));
```

Calculo de la solución analítica:

```
%CONSTANTES
betaRB=lambda*W/(4*wc*(1-lambda));
Cdelta=lambda*W/(4*(1-lambda));

A=W*lambda;
B=3*wc^2*(1-lambda);
C=4*wc^2*(1-0.75*lambda);
%AUTOVALORES
b=(B+C+A^2);
r1=abs((0.5*(-b+(b^2-4*B*C)^0.5))^0.5);
r2=abs((0.5*(-b-(b^2-4*B*C)^0.5))^0.5);

N1=(A*r1)/(r1^2-C);
N2=(A*r2)/(r2^2-B);
%CALCULO DE CONDICIONES INICIALES
M=[-r1 0 0 N2*r2;
    -N1 0 0 1;
    0 N1*r1 r2 0;
    0 1 N2 0];
N=[0; (beta0-betaRB)/2; 0; alpha0/2];

x=M\N;

delta1=atan(x(1)/x(2)); delta2=atan(x(3)/x(4));
c1=(x(1)+x(2))/(sin(delta1)+cos(delta1));
c2=(x(3)+x(4))/(sin(delta2)+cos(delta2));

c5=phi0+(2*wc*N1*c1/r1)*cos(delta1)+(2*wc*c2/r2)*sin(delta2);
%OBTENCION DE LOS ANGULOS DE EULER Y REPRESENTACIÓN
alpha_anl=2*c1*cos(r1*tout+delta1)+2*N2*c2*sin(r2*tout+delta2);
```

*APÉNDICE B. CÓDIGO NUMÉRICO COMPLETO*

---

```
beta_anl=-2*N1*c1*sin(r1*tout+delta1)+2*c2*cos(r2*tout+delta2)+betaRB;  
phi_anl=W*tout-(2*wc*N1*c1/r1)*cos(r1*tout+delta1)...  
          -(2*wc*c2/r2)*sin(r2*tout+delta2)+c5;  
  
plot(tout*wc,beta_anl,'m',tout*wc,alpha_anl,'c','LineWidth',2)
```

# Bibliografía

Goldstein, H.: Mecánica Clásica. Editorial Reverte, 1994

Hughes, Peter C.: Spacecraft Attitude Dynamics. Dover Publications, 2004

Wertz, James R.: Spacecraft Attitude Determination and Control, Kluwer Academic, 1978