Lebesgue-Bochner 函数空间的对偶表示定理*

郭铁信
(厦门大学数学系, 厦门 361005)

摘要 利用随机共轭空间的表示定理证明了一个一般的对偶表示定理. 作为应用, 统一并改进了关于 Lebesgue-Bochner 函数空间的对偶表示方面许多熟知的重要定理.

关键词 随机赋范模 随机共轭空间 对偶表示 **Lebesgue-Bochner** 函数空间

本文中, 恒以$(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$表示一非负测度空间, 记$\mathscr{F}(\mathscr{A})=\{A\in\mathscr{A}\mid\mu(A)<+\infty\}$. 对任给的$A\in\mathscr{A}$, 记$A\cap\mathscr{A}=\{A\cap D\mid D\in\mathscr{A}\}$, μ_A为μ在$A\cap\mathscr{A}$上的限制. 显然当$A\in\mathscr{F}(\mathscr{A})$时, $(A, A\cap\mathscr{A}, \mu_A)$为一有限测度空间. 记 B 为任一给定的赋范空间, B'表示 B 的强拓扑对偶. 称一 Banach 空间关于$(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$具有 Radon-Nikodym 性质(简记为 RNP), 如果对每个 $A\in\mathscr{F}(\mathscr{A})$, 此空间关于$(A, A\cap\mathscr{A}, \mu_A)$都具有 RNP. 关于有限测度空间的 RNP 讨论参见文献[1]; 关于 μ-可测函数, μ-可测集, μ-零集及 μ-等价, 尤其是 Lebesgue-Bochner 函数空间 $L^p(\mu, B)$ $(1\leqslant p\leqslant+\infty)$等的基本知识及术语, 参见文献[2]. $L^p(\mu, B)$的对偶$(L^p(\mu, B))'$的表示问题的研究有悠久的历史(见文献[1]及其参考文献). 文献[1, 3, 4]证明了: $(L^p(\mu, B))'\cong L^q(\mu, B')$当且仅当$B'$关于$(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$具有 RNP, 其中$(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$为 σ-有限, q 是p 的共轭数$(1\leqslant p<+\infty)$. 当$1<p<+\infty$且$(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$为任一测度空间时, 文献[5]给出了$(L^p(\mu, B))'\cong L^q(\mu, B')$的一个充分条件. 本文的主要结果之一是证明$(L^p(\mu, B))'\cong L^q(\mu, B')$的充要条件为$B'$关于$(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$具有 RNP, 并且适当修改 $L^\infty(\mu, B')$的定义后所获结论对 $p=1$ 也成立.

当 B 为一般赋范空间时, 关于$(L^p(\mu, B))'$的表示已有一系列工作[1, 2, 6~9], 特别是文献[9]对任一测度空间及$1<p<+\infty$给出了一个一般定理: $(L^p(\mu, B))'\cong L^q(\mu, B', \omega^*)$; 当$p=1$且$(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$可严格局部化时相应结果见文献[7]. 本文的中心目的是利用随机共轭空间表示定理统一地给出一个更一般的对偶表示定理, 它包括并改进了所有上述分散的已知结果, 基本思想来自于文献[10, 11].

由于本文处理的测度空间主要是非 σ-有限的, 这需引入广义 μ-可测函数的概念并以此为起点建立以任一测度空间为基的随机赋范模及相关的理论.

1 广义 μ-可测函数

本节中, K 表示实数域R 或复数域C, B 为域 K 上的赋范空间. 记 $L^0(\mu, B)$ ($L^0(\mu, B'$,

1999-06-02 收稿

* 国家自然科学基金(批准号: 19501034)和福建省自然科学基金资助项目

ω^*))为所有定义在$(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$上取值于$B$(相应地, B')的μ-可测(弱*-μ-可测)函数所成的线性空间; $L(\mu, B)$($L(\mu, B', \omega^*)$)表示$L^0(\mu, B)$(相应地, $L^0(\mu, B', \omega^*)$)中元的μ-等价类(弱*-μ-等价类)全体所成的空间. 对任一$A\in\mathscr{A}$, $L^0_A(\mu, B)$, $L^0_A(\mu, B', \omega^*)$, $L_A(\mu, B)$及$L_A(\mu, B', \omega^*)$分别表示由上述4个空间中支撑含于A的元所成的线性空间. 对Ω中任一子集, I_E表示E的特征函数, $\tilde{I}_E$表示I_E的μ-等价类, $F(E, B')$表示定义在Ω上取值于B'的支撑含于E的函数所成的线性空间, E^c表示E在Ω中的补集.

定义 1.1 (1) 乘积空间$\prod\{L^0_A(\mu, B) \mid A\in\mathscr{F}(\mathscr{A})\}$中的元$p=(p_A)$($p_A$表$p$的$A$-坐标)称为$B$-值的广义$\mu$-可测函数, 若对任意$E, F\in\mathscr{F}(\mathscr{A})$且$E\subset F$, 恒有$p_E(\omega)=I_E(\omega)\circ p_F(\omega)$ μ-a.e.;

(2) 乘积空间$\prod\{F(A, B') \mid A\in\mathscr{F}(\mathscr{A})\}$中的元$q=(q_A)$称为$B'$-值的广义弱*-$\mu$-可测函数, 若对任意的$b\in B$, 都有$(\langle b, q_A(\circ)\rangle)_{A\in\mathscr{F}(\mathscr{A})}$为一$K$-值的广义$\mu$-可测函数, 这里$\langle\circ, \circ\rangle$表示$B$与$B'$间的自然配对;

(3) 记$GL^0(\mu, B)$($GL^0(\mu, B', \omega^*)$)为所有B-值(B'-值)的广义μ-可测(广义弱*-μ-可测)函数所成之集, $p, q\in GL^0(\mu, B)$($GL^0(\mu, B', \omega^*)$)称为局部μ-等价(局部弱*-μ-等价), 如对任一$A\in\mathscr{F}(\mathscr{A})$, p_A与q_A都μ-等价(弱*-μ-等价), 恒以$GL(\mu, B)$($GL(\mu, B', \omega^*)$)表示$GL^0(\mu, B)$($GL^0(\mu, B', \omega^*)$)中所有元的局部μ-等价类(局部弱*-μ-等价类)所成的线性空间.

命题 1.1 (1) $GL(\mu, B)=\{p\in\prod\{L_A(\mu, B) \mid A\in\mathscr{F}(\mathscr{A})\} \mid p_E=\tilde{I}_E\circ p_F, \forall E, F\in\mathscr{F}(\mathscr{A}), E\subset F\}$, 从而$GL(\mu, B)$恰为线性空间系$\{L_A(\mu, B) \mid A\in\mathscr{F}(\mathscr{A})\}$关于线性投影族$\{I_{EF}: L_F(\mu, B)\to L_E(\mu, B), I_{EF}(p_F)=\tilde{I}_E\circ p_F, \forall p_F\in L_F(\mu, B), E, F\in\mathscr{F}(\mathscr{A}), E\subset F\}$的线性投影极限;

(2) $GL(\mu, B', \omega^*)=\{q\in\prod\{L_A(\mu, B', \omega^*) \mid A\in\mathscr{F}(\mathscr{A})\} \mid q_E=\tilde{I}_E\circ q_F, \forall E, F\in\mathscr{F}(\mathscr{A}), E\subset F\}$, 它也是$\{L_A(\mu, B', \omega^*) \mid A\in\mathscr{F}(\mathscr{A})\}$的线性投影极限;

(3) $GL(\mu, K)$为乘积代数$\prod\{L_A(\mu, K) \mid A\in\mathscr{F}(\mathscr{A})\}$的子代数($L_A(0\mu, K)$在通常函数的加法与乘法诱导的关于类的运算下成为$K$上的代数);

(4) $GL^0(\mu, B)$及$GL^0(\mu, B', \omega^*)$为代数$GL^0(\mu, K)$上的左模(运算由数乘按坐标给出);

(5) 在(4)中运算诱导下$GL(\mu, B)$及$GL(\mu, B', \omega^*)$为代数$GL(\mu, K)$上的左模;

(6) 对任意$\xi^0\in L^0(\mu, K)$, $(I_A\xi^0)_{A\in\mathscr{F}(\mathscr{A})}\in GL^0(\mu, K)$, 故$L^0(\mu, K)$(因此$L(\mu, K)$)可嵌入$GL^0(\mu, K)$(从而$GL(\mu, K)$)视为子代数, 从(4)及(5)可得$GL^0(\mu, B)$与$GL^0(\mu, B', \omega^*)$亦是代数$L^0(\mu, K)$上的模, 尤其$GL(\mu, B)$与$GL(\mu, B', \omega^*)$是代数$L(\mu, K)$上的模.

定义 1.2 (1) 设$p\in GL^0(\mu, B)$(或$L^0(\mu, B)$), $\tilde{p}\in L^0(\mu, B)$, 若p_A(或$I_A\circ p$)与$I_A\circ\tilde{p}$对任一$A\in\mathscr{F}(\mathscr{A})$都$\mu$-等价, 则称$p$与$\tilde{p}$局部$\mu$-等价, 类似地可对$GL^0(\mu, B', \omega^*)$(或$L^0(\mu, B', \omega^*)$)中元与$L^0(\mu, B', \omega^*)$中元之间定义局部弱*-$\mu$-等价;

(2) 设$p\in GL^0(\mu, B)$, 称p的支撑为σ-有限, 若存在测度为σ-有限的μ-可测集D, 使得$I_{D^c}\circ p$局部μ-等价于$GL^0(\mu, B)$中的零元;

(3) 设 $q\in \mathrm{GL}^0(\mu, B', \omega^*)$(或 $\mathrm{L}^0(\mu, B', \omega^*)$), 称 q 为支撑 σ-有限的, 若存在 σ-有限的 μ-可测集 D, 使得 $I_{D^c}\circ q$ 局部弱 * -μ-等价(弱 * -μ-等价)于 $\mathrm{GL}^0(\mu, B', \omega^*)$($\mathrm{L}^0(\mu, B', \omega^*)$)中的零元.

定义 **1.3**　称测度空间$(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$(或测度 μ)为可严格局部化, 如果存在 $\mathscr{F}(\mathscr{A})$的局部可数的不交子族 $\mathscr{U}$, 使得$(\bigcup \mathscr{U})^c$ 为局部 μ-零集, 这里 $\mathscr{U}$为局部可数意为任一 $A\in\mathscr{F}(\mathscr{A})$至多与 $\mathscr{U}$中可数多个元相交, 而 Ω 中子集 E 称为局部 μ-零集, 如果 E 与每个 $\mathscr{F}(\mathscr{A})$中元之交为 μ-零集. σ-有限测度与局部紧 Hausdorff 空间上的 Radon 测度均为可严格局部化测度[6,8].

命题 **1.2**　设$(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$为可严格局部化, 那么每一元 $p\in \mathrm{GL}^0(\mu, B)$($\mathrm{GL}^0(\mu, B', \omega^*)$)必局部 μ-等价(局部弱 * -μ-等价)于 $\mathrm{L}^0(\mu, B)$($\mathrm{L}^0(\mu, B', \omega^*)$)中唯一元 $\tilde{p}$(在局部 μ-等价(局部弱 * -μ-等价)意义下唯一); 特别地, 对任一测度空间$(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$, 每一个 $\mathrm{GL}^0(\mu, B)$($\mathrm{GL}^0(\mu, B', \omega^*)$)中具有 σ-有限支撑的元 p 必局部 μ-等价于(局部弱 * -μ-等价于)$\mathrm{L}^0(\mu, B)$($\mathrm{L}^0(\mu, B', \omega^*)$)中一元 $\tilde{p}$($\tilde{p}$ 在 μ-等价(弱 * -μ-等价)意义下唯一且支撑 σ-有限).

证　设$(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$为严格可局部化, 记 $\mathscr{U}=\{A_\alpha \mid \alpha\in\Lambda\}$为定义 1.3 中所述的族, 对任一 $p=(p_A)\in \mathrm{GL}^0(\mu, B)$($\mathrm{GL}^0(\mu, B', \omega^*)$). 定义 $\tilde{p}:\Omega\to B$(相应地, B')如下: 若 $\omega\in A_\alpha$, 令 $\tilde{p}(\omega)=p_{A_\alpha}(\omega)$; 若 $\omega\in(\bigcup\mathscr{U})^c$, 则令 $\tilde{p}(\omega)=\theta$(B(或 B')中的零元), 那么由 $\mathscr{U}$的性质易验证 $\tilde{p}$ 即满足要求. 若$(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$为任一测度空间且 p 为支撑σ-有限的元, D 如定义 1.2, 选$\{A_n\}$为 D 的任一可数可测的剖分且 $A_n\in\mathscr{F}(\mathscr{A})$, 那么用族$\{A_n \mid n\in\mathrm{N}\}$代替上述族 $\mathscr{U}$即得后半部分的证明.

命题 **1.3**　(1) 记 $\mathrm{L}_{\mathrm{loc}}(\mu, B)$($\mathrm{L}_{\mathrm{loc}}(\mu, B', \omega^*)$)为由 $\mathrm{L}^0(\mu, B)$($\mathrm{L}^0(\mu, B', \omega^*)$)中元的局部 μ-等价(局部弱 * -μ-等价)类全体所成的线性空间, 那么当$(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$为可严格局部化时, 映象 $J:\mathrm{GL}(\mu, B)$($\mathrm{GL}(\mu, B', \omega^*)$)$\to\mathrm{L}_{\mathrm{loc}}(\mu, B)$($\mathrm{L}_{\mathrm{loc}}(\mu, B', \omega^*)$)定义为: $\forall p\in\mathrm{GL}(\mu, B)$($\mathrm{GL}(\mu, B', \omega^*)$), $J(p)$的代表元为命题 1.2 中 p 的代表元对应的 $\tilde{p}$, 为一线性同构;

(2) $I:\mathrm{GL}^\wedge(\mu, B)$($\mathrm{GL}^\wedge(\mu, B', \omega^*)$)$\to\mathrm{L}^\wedge(\mu, B)$($\mathrm{L}^\wedge(\mu, B', \omega^*)$)对任一测度空间为线性同构, 其中 $\mathrm{GL}^\wedge(\mu, B)$, $\mathrm{GL}^\wedge(\mu, B', \omega^*)$, $\mathrm{L}^\wedge(\mu, B)$与 $\mathrm{L}^\wedge(\mu, B', \omega^*)$分别表示 $\mathrm{GL}(\mu, B)$, $\mathrm{GL}(\mu, B', \omega^*)$, $\mathrm{L}(\mu, B)$与 $\mathrm{L}(\mu, B', \omega^*)$中支撑为 σ-有限的元所成的线性空间(等价类的支撑为 σ-有限意指其代表元支撑 σ-有限).

熟知当 μ 为σ-有限时, $L(\mu, \mathrm{R})$在序$\leqslant$: $p\leqslant q \doteq p(\omega)\leqslant q(\omega)$ μ-a.e.之下为完备格, 记为$(\mathrm{L}(\mu, \mathrm{R}), \leqslant, \vee, \wedge)$[2]. 由此易知 $\mathrm{L}^\wedge(\mu, \mathrm{R})$作为 $\mathrm{L}(\mu, \mathrm{R})$的子格对任一测度空间$(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$都为完备格. 尽管对任一测度空间上支撑不为 σ-有限的 μ-可测函数, $(\mathrm{L}(\mu, \mathrm{R}), \leqslant, \vee, \wedge)$不是完备格, 但对 $\mathrm{GL}(\mu, \mathrm{R})$有

命题 **1.4**　$\mathrm{GL}(\mu, \mathrm{R})$在序$\leqslant_{\mathrm{L}}$: $p\leqslant_{\mathrm{L}} q \doteq p_A\leqslant q_A$($\forall A\in\mathscr{F}(\mathscr{A})$)之下为完备格, 记此格为$(\mathrm{GL}(\mu, \mathrm{R}), \leqslant_{\mathrm{L}}, \vee_{\mathrm{L}}, \wedge_{\mathrm{L}})$. 特别地, 对任一子集 $H\subset\mathrm{GL}(\mu, \mathrm{R})$, 任一乘积空间 $\prod\{F(A, \mathrm{R}) \mid A\in\mathscr{F}(\mathscr{A})\}$(有关记号见本节开头)中任一元 r, 有

(1) 若 $h\leqslant_{\mathrm{L}} r$($\forall h\in H$), 那么 $\vee_{\mathrm{L}}H$ 存在, 就是$(\bigvee_{h\in H} h_A)_{A\in\mathscr{F}(\mathscr{A})}$, 且 $\vee_{\mathrm{L}}H\leqslant_{\mathrm{L}} r$;

(2) 若 $r\leqslant_{\mathrm{L}} h$($\forall h\in H$), 那么 $\wedge_{\mathrm{L}}H$ 存在, 就是$(\bigwedge_{h\in H} h_A)_{A\in\mathscr{F}(\mathscr{A})}$, 且 $r\leqslant_{\mathrm{L}}\wedge_{\mathrm{L}}H$.

2　随机赋范模及其随机共轭空间的表示定理

本节中, 记 $\mathrm{GL}^+(\mu, \mathrm{R})$ ($\mathrm{L}^+(\mu, \mathrm{R})$)为 $\mathrm{GL}(\mu, \mathrm{R})$ ($\mathrm{L}(\mu, \mathrm{R})$)中的非负元的全体.

定义 2.1 设 S 为域 K 上的线性空间，映象 $\mathscr{X}$: $S\to GL^{+}(\mu, R)$ (X_p 表示 $\mathscr{X}(p)$) 满足如下条件：

(RN_1) $X_p=\theta$ ($GL(\mu, R)$ 中零元) $\Leftrightarrow p=\theta$ (S 中零元)；

(RN_2) $X_{\alpha p}=|\alpha| X_p$, $\forall \alpha\in K, p\in S$；

(RN_3) $X_{p+q}\leqslant_L X_p+X_q$, $\forall p, q\in S$,

那么称有序对 $(S, \mathscr{X})$ 为数域 K 上以测度空间 $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ 为基的随机赋范空间(简记为 RN 空间)；$\mathscr{X}$ 称为随机范数；若 $\mathscr{X}$ 仅满足(RN_2)及(RN_3)，则称为随机半范数；若 $\mathscr{X}$: $S\to GL(\mu, R)$ 满足(RN_3)及 $X_{\alpha p}=\alpha\circ X_p$ ($\forall \alpha\geqslant 0, p\in S$)，则称为随机次线性泛函．若 $(S, \mathscr{X})$ 为 RN 空间且存在另一映象 $*$: $GL(\mu, K)\times S\to S$ 满足如下条件：

(RNM_1) $(S, *)$ 为代数 $GL(\mu, K)$ 上的左模；

(RNM_2) $X_{\xi * p}=|\xi|\circ X_p$, $\forall \xi=(\xi_A)\in GL(\mu, K)$, $p\in S$, 其中 $|\xi|=(|\xi_A|)\in GL^{+}(\mu, R)$，则称 $(S, \mathscr{X}, *)$ 为以 $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ 为基的随机赋范模(简记为 RN 模)．

注 2.1 代数 $GL(\mu, K)$ 中单位元 $e=(I_A)_{A\in\mathscr{F}(\mathscr{A})}$，由($RNM_1$)知，$(\alpha\circ e) * p=\alpha(e * p)=\alpha\circ p$, $\forall \alpha\in K, p\in S$，从而可视 α 为 αe，因此 $*$ 可视为 S 上数乘运算的自然扩张，故可简写 $(S, \mathscr{X}, *)$ 为 $(S, \mathscr{X})$，$\xi * p$ 为 $\xi\circ p$．因 $L(\mu, K)$ 可视为 $GL(\mu, K)$ 的子代数，因此对任意 $\xi\in L(\mu, K)$, $p\in S$, $\xi * p$ 有意义．两个同一数域上以同一测度空间为基的 RN 模称为等距同构，若它们之间存在一保随机范数的模同构．

定理 2.1 设 $(S, \mathscr{X})$ 为数域 K 上以 $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ 为基的 RN 空间．记 $\mathscr{F}_{+}(\mathscr{A})=\{A\in\mathscr{F}(\mathscr{A})|\ \mu(A)>0\}$．对任一 $A\in\mathscr{F}_{+}(\mathscr{A})$, $\varepsilon>0$, $0<\lambda<\mu(A)$，记 $\mathscr{U}_\theta(A, \varepsilon, \lambda)=\{p\in S|\ \mu(\{\omega\in A|\ (X_p)_A(\omega)<\varepsilon\})>\mu(A)-\lambda\}$，那么 $\mathscr{U}_\theta=\{\mathscr{U}_\theta(A, \varepsilon, \lambda)|\ A\in\mathscr{F}_{+}(\mathscr{A}), \varepsilon>0, 0<\lambda<\mu(A)\}$ 构成 S 上某个 Hausdorff 线性拓扑(称为由 $\mathscr{X}$ 决定的 (ε, λ)-拓扑)的局部基(本文恒使用该拓扑)；当 $(S, \mathscr{X})$ 为 RN 模时，由于 $GL(\mu, K)$ 也为 RN 模，故 S 为拓扑代数 $GL(\mu, K)$ 上的拓扑模，即 $*$: $GL(\mu, K)\times S\to S$ 是联合连续的．

例 2.1 $GL(\mu, B)$ 与 $GL(\mu, B', \omega^*)$ 在随机范数 $\mathscr{X}$: $GL(\mu, B)\to GL^{+}(\mu, R)$ 及 $\mathscr{X}^*$: $GL(\mu, B', \omega^*)\to GL^{+}(\mu, R)$ 之下都成为 RN 模，其中 $X_p=(\|p_A\|)_{A\in\mathscr{F}(\mathscr{A})}$, $X_q^*=(\eta_A)_{A\in\mathscr{F}(\mathscr{A})}$，这里，$\eta_A=\bigvee\{|\langle b, q_A\rangle|\ |\ b\in B, \|b\|\leqslant 1\}$, $\forall A\in\mathscr{F}(\mathscr{A})$．

定理 2.2 设 $(S, \mathscr{X})$ 同定义 2.1. f: $S\to GL(\mu, K)$ 称为几乎处处有界的随机线性泛函，若 f 为线性且存在 $\xi\in GL^{+}(\mu, R)$，使得 $|f(p)|\leqslant_L \xi\circ X_p$, $\forall p\in S$．记所有这样的 f 的全体为 S^* 并定义 $\mathscr{X}^*$: $S^*\to GL^{+}(\mu, R)$ 为 $X_f^*=\bigwedge_L\{\xi\in GL^{+}(\mu, R)|\ |f(p)|\leqslant_L \xi\circ X_p, \forall p\in S\}$．由于 $GL(\mu, K)$ 为自身上的左模，从而 S^* 自然也构成代数 $GL(\mu, K)$ 上的左模，进一步 $(S^*, \mathscr{X}^*)$ 构成一 RN 模，X_f^* 称为 f 的随机范数．

下面 3 个命题可由广义 μ-可测函数的定义，按坐标处理，再由基为有限测度空间的 RN 空间上的相应结果[12]推出．

命题 2.1 设 S 为实(复)线性空间，$(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ 为任一测度空间，$M\subset S$ 为子空间，f: $M\to GL(\mu, R)$ ($GL(\mu, C)$) 为线性映象，$\mathscr{X}$: $S\to GL(\mu, R)$ ($GL^{+}(\mu, R)$) 为随机次线性泛函(随机半范)且 $f(p)\leqslant_L X_p$ ($|f(p)|\leqslant_L X_p$), $\forall p\in M$，那么存在 f 的线性扩张 F，使得 $F(p)\leqslant_L X_p$ ($|F(p)|\leqslant X_p$), $\forall p\in S$．由此保证了 RN 空间的任意子空间上任一几乎处处有界随机线性泛函必有保随机范数的扩张．

命题 2.2　设$(S,\mathscr{X})$为域K上的 RN 模．$f\in S^*$的充要条件为f是S到$GL(\mu,K)$中的连续模同态．

命题 2.3　设$(S,\mathscr{X})$同命题 2.2，$f\in S^*$，那么，$X_f^*=\bigvee_L\{|f(p)|\mid p\in S(1)\}$，其中$S(1)=\{p\in S\mid X_p\leqslant_L 1((X_p)_A\leqslant 1,\ \forall A\in\mathscr{F}(\mathscr{A}))\}$．特别地，若$S=GL(\mu,B)$，那么$X_f^*=\bigvee_L\{|f(j(b))|\mid b\in B,\ \|b\|\leqslant 1\}$，其中$j:L(\mu,B)\to GL(\mu,B)$为嵌入映象，即$j(p)=(I_A\circ p)_{A\in\mathscr{F}(\mathscr{A})}$．

在本文以下部分，设$(S,\mathscr{X})$为数域K上以任一测度空间$(\Omega,\mathscr{A},\mu)$为基的 RN 模；对任一$A\in\mathscr{F}(\mathscr{A})$，记$S_A=I_A\circ S=\{I_A\circ p\mid p\in S\}$，$\mathscr{X}_A$为$\mathscr{X}$在$S_A$上的限制，由于$(I_A\circ GL(\mu,R),\leqslant_L)$与$(L_A(\mu,R),\leqslant)$格同构，从而$(S_A,\mathscr{X}_A)$可视为以$(A,A\cap\mathscr{A},\mu_A)$为基的 RN 模，$(S_A^*,\mathscr{X}_A^*)$为$(S_A,\mathscr{X}_A)$的随机共轭空间．

定理 2.3　对任意$E,F\in\mathscr{F}(\mathscr{A})$，$E\subset F$，线性映射$u_{EF}:S_F^*\to S_E^*$，记$u_{EF}(f_F)$为$f_F$在$S_E$上的限制，$\forall f_F\in S_F^*$．易知$\{S_E^*\mid E\in\mathscr{F}(\mathscr{A})\}$关于线性映射族$\{u_{EF}\mid E,F\in\mathscr{F}(\mathscr{A}),\ E\subset F\}$构成线性投影系($(\mathscr{F}(\mathscr{A}),\subset)$为一定向集)，记$S_*$为此线性投影系的投影极限，那么，

(1) 在模乘法$\circ$：$GL(\mu,K)\times S_*\to S_*$，$\xi\circ f=(\xi_A\circ f_A)_{A\in\mathscr{F}(\mathscr{A})}$之下，$S_*$为代数$GL(\mu,K)$上的左模；

(2) 定义$\mathscr{X}_*:S_*\to GL^+(\mu,R)$，$\mathscr{X}_*(f)=(\mathscr{X}_A^*(f_A))$，那么$(S_*,\mathscr{X}_*)$为$K$上以$(\Omega,\mathscr{A},\mu)$为基的 RN 模；

(3) 定义映射$T:(S^*,\mathscr{X}^*)\to(S_*,\mathscr{X}_*)$为$T(f)=(f_A)_{A\in\mathscr{F}(\mathscr{A})}$(其中$f_A$为$f$在$S_A$上的限制)，那么$T$为等距同构．

证　(1) 显然；(2) 由$\mathscr{X}_E^*(f_E)=I_E\circ\mathscr{X}_F^*(f_F)$，$\forall E,F\in\mathscr{F}(\mathscr{A})$，$E\subset F$，从而$\mathscr{X}^*(f)\in GL^+(\mu,R)$，(2)的其他性质也是显然的；(3) 仅需证$T$是满的，对任给的$g=(g_A)\in S_*$，定义$f:S\to GL(\mu,K)$为$f(p)=(g_A(p_A))$，$\forall p\in S$，其中$p_A=I_A\circ p$．由于$g_E(p_E)=g_F(p_E)=g_F(I_E\circ p_F)=I_E\circ g_F(p_F)$，$\forall E,F\in\mathscr{F}(\mathscr{A})$，$E\subset F$，从而$f(p)\in GL(\mu,K)$，又由$g_A\in S_A^*$知$f\in S^*$，且易验证$f_A\doteq f$在$S_A$上的限制$=g_A$，$\forall A\in\mathscr{F}(\mathscr{A})$，即$T(f)=g$．

引理 2.1[10]　设$(\Omega,\mathscr{A},\mu)$为σ-有限，$L_0^\infty(\mu,K)$为所有有界K-值μ-可测函数全体并赋以上确界范数所成的 Banach 代数，$L^\infty(\mu,K)$为所有本质有界的K-值μ-可测函数等价类全体并赋以本质上确界范数所成的 Banach 代数，那么存在一个从$L^\infty(\mu,K)$到$L_0^\infty(\mu,K)$中的 Banach 代数等距同态T，使得

(1) $T(p)\in p$，$\forall p\in L^\infty(\mu,K)$；

(2) $T(p)(\omega)\geqslant 0$，$\forall p\in L^\infty(\mu,K)\cap L^+(\mu,R)$，$\omega\in\Omega$．

引理 2.2　设$(\Omega,\mathscr{A},\mu)$为σ-有限测度空间，那么映象$T:L(\mu,B',\omega^*)\to(L(\mu,B))^*$($\forall q\in L(\mu,B,\omega^*)$，$T_q:L(\mu,B)\to L(\mu,K)$定义为$T_q(p)=\langle p,q\rangle$)为 RN 模意义下的等距同构．

证　由引理 2.1 及文献[10]中定理 3.1 证明的开始部分即得．

定理 2.4　对任一测度空间$(\Omega,\mathscr{A},\mu)$，$T:q\in GL(\mu,B',\omega^*)\to T_q\in(GL(\mu,B))^*$(其中，$T_q(p)=\langle p,q\rangle$，$\forall p\in GL(\mu,B)$，$\langle p,q\rangle=(\langle p_A,q_A\rangle)_{A\in\mathscr{F}(\mathscr{A})}$)为 RN 模意义下的等距同构．

证　在定理 2.3 中，取$S=GL(\mu,B)$，那么从引理 2.2 知S_A^*就是$L_A(\mu,B',\omega^*)$，从而

$(S^*, \mathscr{X}^*)$正是$GL(\mu, B', \omega^*)$, 故 T 为等距同构.

定理 2.5 自然嵌入 $i: GL(\mu, B') \to GL(\mu, B', \omega^*)$为 RN 模意义下等距同构的充要条件是 B'关于$(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$具有 RNP; 特别地, 映象 $T: GL(\mu, B') \to (GL(\mu, B))^*(T_q(p) = \langle p, q\rangle)$为等距同构的充要条件为 B'关于$(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$具有 RNP.

证 在$(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$为有限测度空间时, 此即文献[10]中的定理 3.1 与 1.1. 对一般情形由广义 μ-可测函数的定义并按坐标处理即可得证.

3 随机共轭空间与经典共轭空间

本节中, $(S, \mathscr{X})$仍表示数域 K 上以$(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$为基的 RN 模; $1 \leqslant p \leqslant +\infty$与 $1 \leqslant q \leqslant +\infty$为一对共轭数; $\|\cdot\|_p: L(\mu, B) \to [0, +\infty]$ 为通常的 p-范数, 当 $B = K$ 时, 记 $\|\cdot\|_p$ 为$|\cdot|_p$; 定义 $N_p: S \to [0, +\infty]$ 为 $N_p(g) = \sup\{|(X_g)_A|_p \mid A \in \mathscr{F}(\mathscr{A})\}$, 记 $L^p(S) = \{g \in S \mid N_p(g) < +\infty\}$.

引理 3.1 (1) 设 $g \in L^p(S)$且 $1 \leqslant p < +\infty$, 那么 X_g 具有 σ-有限的支撑;

(2) 对 $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, $(L^p(S), N_p)$为赋范空间;

(3) $\bigcup\{S_A \mid A \in \mathscr{F}(\mathscr{A})\}$依$(\varepsilon, \lambda)$-拓扑在 S 中稠;

(4) $\bigcup\{L^p(S_A) \mid A \in \mathscr{F}(\mathscr{A})\}$依$(\varepsilon, \lambda)$-拓扑在 S 中稠$(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$;

(5) 当 $1 \leqslant p < +\infty$时, $\bigcup\{L^p(S_A) \mid A \in \mathscr{F}(\mathscr{A})\}$在 $L^p(S)$中依范数 N_p 稠.

引理 3.2 设 $1 \leqslant p < +\infty$, I 同命题 1.3, I'为I 在 $L^p(GL(\mu, B))$上的限制, 那么 I'为赋范空间 $L^p(GL(\mu, B))$到 $L^p(\mu, B)$的等距同构.

引理 3.3 (1) 定义 $N: L^\wedge(\mu, B', \omega^*) \to L^+(\mu, R) \cap L^\wedge(\mu, R)$为 $N(p) = \bigvee\{|\langle b, p\rangle| \mid b \in B, \|b\| \leqslant 1\}$, 那么 N 具有性质: (N_1) $N(p) \leqslant \|p^0\|'$, 这里 p^0 为 p 的任一代表元且 $\|\cdot\|'$为 $\|\cdot\|$的对偶范数; (N_2) $N(p+q) \leqslant N(p) + N(q)$; (N_3) $N(p) = \theta \Leftrightarrow p = \theta$; (N_4) $N(\alpha p) = |\alpha| N(p)$, $\forall \alpha \in K, p \in L^\wedge(\mu, B', \omega^*)$;

(2) 设 $1 \leqslant p < +\infty$, 记 $L^p(\mu, B', \omega^*) = \{g \in L^\wedge(\mu, B', \omega^*) \mid |N(g)|_p < +\infty\}$, 定义 $\|\cdot\|_p: L^p(\mu, B', \omega^*) \to [0, +\infty)$为 $\|g\|_p = |N(g)|_p$, 仍记 I'为命题 1.3 中 I 在 $L^p(GL(\mu, B', \omega^*))$上的限制, 那么 I'为$(L^p(GL(\mu, B', \omega^*)), N_p)$到$(L^p(\mu, B', \omega^*), \|\cdot\|_p)$上的等距同构.

引理 3.4 设 $1 \leqslant q < +\infty$, 并记 $e: L^q(\mu, B') \to L^q(\mu, B', \omega^*)$为自然嵌入, 那么 e 为等距线性算子, 进一步, e 为等距同构的充要条件为B'关于$(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$具有 RNP.

证 e 显然为等距线性. e 为等距同构当且仅当 $L_A(\mu, B')$与 $L_A(\mu, B', \omega^*)$作为 RN 模为等距同构(对每个 $A \in \mathscr{F}(\mathscr{A})$), 当且仅当 B'关于每个$(A, A \cap \mathscr{A}, \mu_A)$具有 RNP[10].

定义 3.1 设 B 为 Banach 空间且 I'同引理 3.2. 对任一 $A \in \mathscr{A}$, $g \in L^1(GL(\mu, B))$, 定义 g 在 A 上的 Bochner 积分$\left(\text{记作}\int_A g\,\mathrm{d}\mu\right)$为通常的$\mu$-可测函数$I'(g) \in L^1(\mu, B)$的 Bochner 积分. 显然 $\left\|\int_\Omega g\,\mathrm{d}\mu\right\| \leqslant N_1(g)(\forall g \in L^1(GL(\mu, B)))$且具有通常 Bochner 积分的一切性质[2].

定理 3.1 $T: f \in L^q(S^*) \to T_f \in (L^p(S))'\left(T_f(g) = \int_\Omega f(g)\,\mathrm{d}\mu, \ \forall g \in L^p(S)\right)$为等距

同构，即 $(\mathrm{L}^p(S))' \cong \mathrm{L}^q(S^*)$ $(1\leqslant p<+\infty)$.

证　当 $(\Omega,\mathscr{A},\mu)$ 为有限测度空间时，即文献[11]的定理 1. 对一般情形，首先 T 是等距的. 事实上，由 $|f(g)|\leqslant_{\mathrm{L}} X_f^*\circ X_g$ 知 $N_1(f(g))\leqslant N_q(f)\circ N_p(g)$，从而 $f(g)\in \mathrm{L}^1(\mathrm{GL}(\mu,K))$ 且 $\|T_f\|\leqslant N_q(f)$；另一方面，对任意 $f\in \mathrm{L}^q(S^*)$，$A\in\mathscr{F}(\mathscr{A})$，记 f_A 为 f 在 S_A 上的限制，那么 $\mathrm{L}^p(S_A)$ 正是 $\mathcal{I}_A\circ \mathrm{L}^p(S)=\{\mathcal{I}_A\circ g\,|\,g\in \mathrm{L}^p(S)\}$，从而对任一 $g_A\in \mathrm{L}^p(S_A)$，有 $T_f^A(g_A)$（这里 T_f^A 为 T_f 在 $\mathrm{L}^p(S_A)$ 上的限制）$=T_f(g_A)=\int_\Omega f_A(g_A)\mathrm{d}\mu=\int_\Omega f_A(\mathcal{I}_A\circ g_A)\mathrm{d}\mu=\int_A f_A(g_A)\mathrm{d}\mu$，由于 $(A,A\cap\mathscr{A},\mu_A)$ 为有限测度空间，故从文献[11]的定理 1 知 $f_A\in \mathrm{L}^q(S_A^*)$ 且 $N_q(f_A)=|\mathscr{X}_A^*(f_A)|_q=\|T_f^A\|\leqslant\|T_f\|$，从而也有 $N_q(f)=\sup\{|\mathscr{X}_A^*(f_A)|_q\,|\,A\in\mathscr{F}(\mathscr{A})\}\leqslant\|T_f\|$，总之，$\|T_f\|=N_q(f)$.

其次，T 亦是满的. 设 $Q\in(\mathrm{L}^p(S))'$，$\forall A\in\mathscr{F}(\mathscr{A})$，记 Q^A 为 Q 在 $\mathrm{L}^p(S_A)$ 上的限制，那么 $Q^A\in(\mathrm{L}^p(S_A))'$，且由文献[11]的定理 1 知存在一 $h_A\in \mathrm{L}^q(S_A^*)$，使得 $N_q(h_A)=\|Q^A\|$ 及 $Q^A(g_A)=\int_A h_A(g_A)\mathrm{d}\mu_A=\int_\Omega \mathcal{I}_A\circ h_A(g_A)\mathrm{d}\mu=\int_\Omega h_A(\mathcal{I}_A\circ g_A)\mathrm{d}\mu=\int_\Omega h_A(g_A)\mathrm{d}\mu$，$\forall g_A\in \mathrm{L}^p(S_A)$. 可断言 $(h_A)_{A\in\mathscr{F}(\mathscr{A})}\in S^*$，事实上，对任意 $E,F\in\mathscr{F}(\mathscr{A})$ 且 $E\subset F$，任意 $D\in E\cap\mathscr{A}$，$g_E\in \mathrm{L}^p(S_E)$，一方面，

$$Q^E(\mathcal{I}_D\circ g_E)=Q^F(\mathcal{I}_D\circ g_E)=\int_\Omega h_F(\mathcal{I}_D\circ g_E)\mathrm{d}\mu=\int_\Omega \mathcal{I}_D\circ h_F(g_E)\mathrm{d}\mu=\int_D h_F(g_E)\mathrm{d}\mu;$$

另一方面，

$$Q^E(\mathcal{I}_D\circ g_E)=\int_\Omega h_E(\mathcal{I}_D\circ g_E)\mathrm{d}\mu=\int_\Omega \mathcal{I}_D\circ h_E(g_E)\mathrm{d}\mu=\int_D h_E(g_E)\mathrm{d}\mu,$$

从而 $\int_D h_F(g_E)\mathrm{d}\mu=\int_D h_E(g_E)\mathrm{d}\mu$，$\forall D\in E\cap\mathscr{A}$，$g_E\in \mathrm{L}^p(S_E)$，故 $h_F(g_E)=h_E(g_E)$，$\forall g_E\in \mathrm{L}^p(S_E)$，从而由 $\mathrm{L}^p(S_E)$ 在 S_E 中依 (ε,λ)-拓扑稠得 $h_E=h_F$ 在 S_E 上的限制. 再由定理 2.3(3)，存在 $f\in S^*$，使得 f_A（f 在 S_A 上的限制）$=h_A$，$\forall A\in\mathscr{F}(\mathscr{A})$，且 $X_f^*=(\mathscr{X}_A^*(h_A))_{A\in\mathscr{F}(\mathscr{A})}$，从而 $N_q(f)=\sup\{N_q(h_A)\,|\,A\in\mathscr{F}(\mathscr{A})\}=\sup\{|\mathscr{X}_A^*(h_A)|_q\,|\,A\in\mathscr{F}(\mathscr{A})\}=\sup\{\|Q^A\|\,|\,A\in\mathscr{F}(\mathscr{A})\}\leqslant\|Q\|<+\infty$，所以 $f\in \mathrm{L}^q(S^*)$. 最后断言：$T_f=Q$. 事实上，

$$T_f(g_A)=\int_\Omega f(g_A)\mathrm{d}\mu=\int_\Omega f(\mathcal{I}_A\circ g_A)\mathrm{d}\mu=\int_\Omega \mathcal{I}_A\circ f(g_A)\mathrm{d}\mu=\int_A f_A(g_A)\mathrm{d}\mu=$$
$$\int_A h_A(g_A)\mathrm{d}\mu=\int_\Omega h_A(g_A)\mathrm{d}\mu=Q(g_A),\qquad \forall g_A\in \mathrm{L}^p(S_A),\qquad A\in\mathscr{F}(\mathscr{A}),$$

故 T_f 与 Q 在 $\bigcup\{\mathrm{L}^p(S_A)\,|\,A\in\mathscr{F}(\mathscr{A})\}$ 上的限制相等，从而由引理 3.1(5) 可推出 $T_f=Q$.

定理 3.2　设 $1<p<+\infty$ 且 $(\Omega,\mathscr{A},\mu)$ 为任一测度空间，则（本定理中积分作通常理解）

(1) $T:\mathrm{L}^q(\mu,B',\omega^*)\to(\mathrm{L}^p(\mu,B))'$ 是等距同构，其中 T_f（表示 $T(f)$）为 $T_f(g)=\int_\Omega\langle g,f\rangle\mathrm{d}\mu$，$\forall g\in \mathrm{L}^p(\mu,B)$；

(2) $T:\mathrm{L}^q(\mu,B')\to(\mathrm{L}^p(\mu,B))'$ 为等距同构的充要条件是 B' 关于 $(\Omega,\mathscr{A},\mu)$ 具有 RNP，其中 T_f（表示 $T(f)$）为 $T_f(g)=\int_\Omega\langle g,f\rangle\mathrm{d}\mu$，$\forall g\in \mathrm{L}^p(\mu,B)$.

证　(1) 在定理 3.1 中取 $S=\mathrm{GL}(\mu,B)$，那么 $S^*=\mathrm{GL}(\mu,B',\omega^*)$，由引理 3.2 及 3.3 知

$L^p(S)\cong L^p(\mu, B)$及$L^q(S^*)\cong L^q(\mu, B', \omega^*)$，再由$(L^p(S))'\cong L^q(S^*)$及定理3.1中的配对相当于通常的配对可知(1)成立.

(2) 记e同引理3.4，那么$T=T\circ e$，因此T为等距同构当且仅当e为等距同构，当且仅当B'关于$(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$具有RNP.

注3.1　定理3.2(1)相当于文献[9]中的定理8，但这里的证明方法及对$L^q(\mu, B', \omega^*)$引入范数的方式均与文献[9]不同，当然两种引进范数的方式必合而为一，这导得文献[9]中的命题10显然成立(注意到引理3.3)；定理3.2(2)改进了文献[5]中的定理4.3：因B的范数Fréchet可微时B'必具有RNP，从而B'关于任一测度空间$(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$具有RNP.

定理3.3　设$(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$为任一测度空间，那么，

(1) $T: L^\infty(GL(\mu, B', \omega^*))\to(L^1(\mu, B))'$为等距同构，其中，$T_f$(对$f\in L^\infty(GL(\mu, B, \omega^*))$，表示$T(f)$)为$T_f(g)=\int_\Omega\langle j(g), f\rangle d\mu$，$\forall g\in L^1(\mu, B)$，这里$j$同命题2.3且积分同定义3.1；

(2) $T: L^\infty(GL(\mu, B'))\to(L^1(\mu, B))'$为等距同构当且仅当$B'$关于$(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$具有RNP，其中，$T_f$定义为$T_f(g)=\int_\Omega\langle j(g), f\rangle d\mu$，$\forall g\in L^1(\mu, B)(f\in L^\infty(GL(\mu, B')))$，$j$同上.

证　在定理3.1中取$S=GL(\mu, B)$及$p=1$，从而$S^*=GL(\mu, B', \omega^*)$，$L^1(S)\cong L^1(\mu, B)$，故(1)得证．由(1)并注意到定理2.5即得(2).

注3.2　当μ可严格局部化时，由命题1.3知定理3.3(1)退化为文献[7]中的定理2．熟知RN模包括比$GL(\mu, B)$(即使μ为有限测度也对，见文献[13])更广泛的对象与内容，从而定理3.1包括比Lebesgue-Bochner函数空间$L^p(\mu, B)$的对偶表示定理(即定理3.2及3.3)更丰富的内容.

参　考　文　献

1　Diestel J, Uhl Jr J J. Vector Measures. Math Surveys, No 15. Providence: Amer Math Soc, 1977

2　Dunford N, Schwartz J T. Linear Operators (Ⅰ). London: Interscience, 1957. 95～372

3　Bochner S, Taylor A E. Linear functionals on certain spaces of abstractly valued functions. Ann Math, 1938, 39: 913～944

4　Gretsky N E, Uhl Jr J J. Bounded linear operators on Banach functions. Trans Amer Math Soc, 1972, 167: 263～277

5　Leonard I E, Sundaresan K. Smoothness and duality in $L^p(E, \mu)$. J Math Anal Appl, 1974, 46: 513～522

6　Bourbaki N. Integration. Paris: Hermann, 1952～1960. Chap Ⅰ～Ⅴ

7　Ionescu Tulcea A, Ionescu Tulcea C. On the lifting property (Ⅰ). J Math Anal Appl, 1961, 3: 537～546

8　Ionescu Tulcea A, Ionescu Tulcea C. On the lifting property (Ⅱ). J Math Mech, 1962, 11(5): 773～795

9　Hu Zhibo, Lin Bor-Luh. Extremal structure of the unit ball of $L^p(\mu, X)^*$. J Math Anal Appl, 1996, 200: 567～590

10　郭铁信. 共轭空间的RNP与其中弱*-μ-可测函数的弱*-等价性定理. 中国科学, A辑, 1996, 26(7): 604～610

11　郭铁信. 随机赋范模为随机自反的特征. 厦门大学学报(自然科学版), 1997, 26(4): 499～502

12　Guo Tiexin. Extension theorems of continuous random linear operators on random domains. J Math Anal Appl, 1995, 193(1): 15～27

13　Guo Tiexin. Module homomorphisms on random normed modules. Chinese Northeastern Math J, 1996, 12(1): 102～114