UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MÉXICO

FACULTAD DE ECONOMÍA

Relaciones Económicas Internacionales

Unidad de aprendizaje: TEORÍA DE DECISIONES

Título del material:

Toma de decisiones en condiciones de certidumbre.

Elaborado por: Marlen Rocío Reyes Hernández

Guión explicativo de uso

Las siguientes diapositivas se refieren a l desarrollo de los temas sobre la Unidad II de la unidad de aprendizaje de teoría de decisiones. Prácticamente, se presenta los distintos modelos cuantitativos que se ocupan de la toma de decisiones en condiciones de certidumbre

Se presentan las bases del conocimiento para dar solución a problemáticas particulares, así como las herramientas de apoyo para el procesamiento de datos y cálculo.

Objetivo de la Unidad de Aprendizaje:

Aplicar de manera adecuada los modelos de teoría de decisiones para resolver situaciones que requieran la elección de una solución óptima en el ámbito de la profesión en Relaciones Económicas Internacionales.

Unidad de Competencia II
Toma de decisiones en condiciones de certidumbre

2.1. Introducción.

2.2. Criterios de decisión de certidumbre.

2.3. Criterios de maximización y minimización.

2.4. Características de problemas de programación lineal.

Objetivos de la Unidad II:

- Aplicar la optimización a través de programación lineal.
- Resolver problemas de maximización a través del método gráfico y simplex.
- Resolver problemas de minimización a través del método dual.
- Resolver problemas de minimización utilizando modelos de transporte.

Contenido temático

Introducción

Decisiones en condiciones de certidumbre

Criterios de maximización y minimización

Programación lineal

- Modelo de programación lineal
- Suposición de la programación lineal
- Variables de decisión
- Función objetivo
- Restricciones

Método gráfico

- Procedimiento
- Determinación de la región no factible
- Tipos de soluciones

Método Simplex

- Procedimiento

Problema de Transporte

- Planteamiento
- Representación en red del problema de transporte
- Propiedad de soluciones factibles.
- Solución a problemas de transporte
- Método de la esquina noroccidental
- Método de Vogel.
- Método de Russel.
- Prueba de optimalidad

Bibliografía

Introducción

La certidumbre es la condición en que los individuos son plenamente informados sobre un problema, las soluciones alternativas son obvias, y son claros los posibles resultados de cada decisión.

En condiciones de certidumbre, la gente puede al menos prever (si no es que controlar) los hechos y sus resultados.

El grado de información disponible (estados de la naturaleza)

Certidumbre

Riesgo

Incertidumbre

PARÁMETROS EN LA TOMA DE DECISIONES

DECISIONES EN CONDICIONES DE CERTIDUMBRE

- Se tiene conocimiento total sobre el problema, las alternativas de solución que se planteen van a causar siempre resultados conocidos e invariables. Al tomar la decisión solo se debe pensar en la alternativa que genere mayor beneficio.

- La información con la que se cuenta para solucionar el problema es completa, es decir, se conoce el problema, se conocen las posibles soluciones, pero no se conoce con certeza los resultados que pueden arrojar.

- En este tipo de decisiones, las posibles alternativas de solución tienen cierta probabilidad conocida de generar un resultado. Se pueden usar **modelos matemáticos** o también se puede hacer uso de la probabilidad objetiva o subjetiva para estimar el posible resultado.

Probabilidad Objetiva → Se basa en hechos concretos

Probabilidad Subjetiva → Se basa en opiniones o juicios personales.

CRITERIOS DE MAXIMIZACIÓN Y MINIMIZACIÓN

La **optimización**, sirve para encontrar la respuesta que proporciona el mejor resultado, la que logra mayores ganancias, mayor producción o felicidad o la que logra el menor costo, desperdicio o malestar.

Con frecuencia, estos problemas implican utilizar de la manera más eficiente los recursos, tales como dinero, tiempo, maquinaria, personal, existencias, etc.

- La **programación lineal**, aborda el problema de determinar asignaciones óptimas de recursos limitados para cumplir un objetivo dado. El objetivo debe representar la meta del decisor. Los recursos pueden corresponder, por ejemplo, a personas, materiales, dinero o terrenos.

- Entre todas las **asignaciones** de recursos admisibles, queremos encontrar las que **maximizan** o **minimizan** alguna cantidad numérica tal como ganancias o costos.

PROGRAMACIÓN LINEAL

- Se refiere a una técnica matemática que permite asignar recursos limitados.
- Es un método de resolución de problemas destinado a la asignación eficiente de recursos limitados en actividades conocidas para maximizar beneficios o minimizar costos, como es el caso de la formulación de raciones.
- La característica distintiva de los modelos de PL es que las funciones que representan el objetivo y las restricciones son lineales.

La Programación Lineal se considera como un método determinístico que busca captar todas las actividades intervinientes en una situación de decisión y formular un modelo cuantitativo que genere criterios de decisión.

Seleccionar una alternativa conlleva a analizar diferentes criterios al mismo tiempo.

Ejemplo:

Estos criterios se pueden dividir en dos categorías: **Restricciones y Función Objetivo.**

Existen muchas situaciones de decisión que se ajustan al modelo de Programación Lineal, pero la más común de aplicación incluye el problema general de asignar recursos restringidos en forma óptima, es decir, de modo que se cumplan las restricciones y se alcance la meta de la función objetivo.

EJEMPLOS:

Nivel general

El caso de una empresa que planea producir un artículo para el mercado de Bucaramanga.

Función Objetivo: Minimizar el costo.

Las restricciones pueden ser: Gustos y preferencias del mercado meta, tecnología, capacidad de producción, entre otras.

Nivel específico

El director de producción desea agilizar un proceso.

Función objetivo: Minimizar el tiempo de producción.

Las restricciones pueden ser: Número o nivel del personal, capacidad de producción, diseño de productos, entre otros.

Un programa lineal puede ser del tipo de **maximización o minimización**. Las restricciones pueden ser del tipo **<=, = ó >=** y las variables pueden **ser negativas o irrestrictas en signo.**

Podemos utilizar la **Programación Lineal** cuando hay que **maximizar (utilidades)** o **minimizar (costos)** con un solo objetivo. Cuando se trata de varios objetivos se usa la Programación de Metas si la mejor solución para un problema se logra por etapas o períodos, se recomienda la Programación Dinámica.

El modelo de Programación Lineal comprende un proceso de optimización donde se seleccionan valores no reactivos para un conjunto de variables de decisión X1, X2, ..., Xn, de forma que se maximice (o minimice) una función objetivo de la forma:

Maximizar (minimizar)

$$Z = C1X1 + C2X2 + \ldots + CnXn$$

Sujeta a restricciones de recursos de la forma :

$$A_{11}X_1 + A_{12}X_2 + ... + A_{1n}X_n <= B_1$$
$$A_{21}X_1 + A_{22}X_2 + ... + A_{2n}X_n <= B_2$$
$$A_{m1}X_1 + A_{m2}X_2 + ... + A_{mn}X_n <= B_m$$

- Donde Cj, Aij y Bi son constantes
- Dependiendo del problema, también pueden plantearse las restricciones con signos de igualdad (=) o signos de mayor o igual (>=).
- Las Xi son variables de decisión, llamadas también acciones.
- Las restricciones pueden ser de un solo tipo.
- Las Cj son coeficientes que representan la contribución por unidad de la variable Xj al valor de la función objetivo Z.
- Las aij son los coeficientes tecnológicos, representan la cantidad del recurso i que es “ consumido “ por una unidad de la variable Xj.
- Las bi representan la disponibilidad total de los recursos, es cualquier valor numérico en el lado derecho de las restricciones.
- $b_i >= 0$, para toda i.
- $x_j >= 0$, para toda j.

SUPOSICIÓN DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL

Deben existir cinco condiciones principales para que pueda aplicarse la Programación Lineal a un problema:

1

Restricciones: Limitación de las cantidades producidas con los recursos existentes.
Los recursos deben ser limitados (por ejemplo: los trabajadores, el equipo, el capital, la materia prima, los terrenos), de lo contrario no habría problema.

2

Un solo objetivo: No se necesita ocuparnos de un objetivo más a la vez.
Debe existir un objetivo que se pueda especificar (maximizar utilidades, minimizar costos).

3

Proporcionalidad: El empleo de factores productivos para la función objetivo y las restricciones deben ser proporcionales. (por ejemplo : si fabricar un artículo requiere 3 horas, fabricar 10 artículos requiere 30 horas).

4

Homogeneidad: Los recursos y los productos deben ser homogéneos (Los productos que se obtienen de una máquina deben ser de idénticas características) .

5

No negatividad de los productos: No es posible utilizar cantidades negativas de producto o de factores.
En la Programación Lineal normal los productos y los recursos deben ser fraccionarios y no negativos, si no es posible realizar esta subdivisión debe utilizarse la Programación Entera, (por ejemplo: el número de operarios no puede ser de 4,3 en cuanto a recursos o volar medio avión).

EJEMPLO

Manufacturas “SOLO CUERO” ha decidido entrar en el negocio de billeteras para hombre y billeteras para mujer. Una investigación cuidadosa de las etapas necesarias para fabricar estos productos determina que se requieren de 4 operaciones.

Corte y teñido para dar un color especial al cuero.
Cosido de las partes.
Ensamble de los herrajes.
Inspección y embalaje.

El jefe de manufactura ha analizado cada una de las operaciones y concluye que…

Por cada modelo de billetera para **hombre** se requieren:

42 minutos en el taller de **corte y teñido,**
30 minutos en el taller de **costura**,
60 minutos en la sección de **terminado** y
6 minutos en **inspección y embalaje**.

Por cada modelo de billetera para **mujer** se requieren:

60 minutos en **corte y teñido**,
50 minutos para **costura**,
40 minutos para **terminado**,
15 minutos para **inspección y ensamble.**

El salario de cada operario es de $ 1200 por hora, el costo de la materia prima y equipo es de $ 4240 para cada billetera para hombre y $ 4700 para cada billetera para mujer. El precio de venta tanto de la billetera para hombre como para mujer es de $ 17000.

Después de estudiar las cargas de trabajo de las diferentes secciones se estima que para la producción de estos 2 artículos en los 3 meses siguientes, habrá disponibles 37800 minutos de tiempo de corte y teñido, 36000 minutos de costura, 42480 minutos de acabado y 8100 minutos de inspección y embalaje.

Producto	Etapa 1	Etapa 2	Etapa 3	Etapa 4	Salario	Costo MP	Precio
Billetera H	42 min	30 min	60 min	6 min	$ 1.200 /h	$ 4.240	$ 17.000
Billetera M	60 min	50 min	40 min	15 min	$ 1.200/h	$ 4.700	$ 17.000

Etapas	Tiempo disponible
Etapa 1	37.800 min
Etapa 2	36.000 min
Etapa 3	42.480 min
Etapa 4	8.100 min

El problema para “SOLO CUERO“ es determinar cuántas billeteras para hombre y para mujer deben fabricarse para maximizar la contribución a las utilidades.

LA FUNCIÓN OBJETIVO

Todo problema de Programación Lineal cuenta con un objetivo de maximización o minimización. En este problema nuestro objetivo será maximizar las utilidades. Para plantear este objetivo en forma matemática se tiene en cuenta:

X1 = Número de billeteras para hombre

X2 = Número de billeteras para mujer

Supongamos que C1 es la contribución a las utilidades por cada billetera para hombre, luego la contribución total será C1X1 y C2 la contribución por cada billetera para mujer, lo cual daría una utilidad de C2X2.

Denotando como Z la contribución total a las utilidades, tenemos:

Contribución a las utilidades totales:
Z = C1X1 + C2X2

Para calcular C1 debemos tener en cuenta lo siguiente:

Costo de Mano de Obra: considerando $1 200 de salario por hora = 1200/60=20 por minuto

Costo de operación de corte y teñido	42 x 20 =$ 840
Costo de operación costura	30 x 20 = $ 600
Costo de operación de ensamble de herrajes	60 x 20 =$1,200
Costo de operación inspección y embalaje	6 x 20 = $ 120
Costo unitario de materia prima y herramienta	$ 4,240
COSTO TOTAL DE FABRICACIÓN BILLETERA PARA HOMBRE	**$ 7,000**

Como el precio de venta por cada billetera para hombre es de $ 17.000 la contribución a la utilidad es $17.000 - $ 7.000 = $10.000 / unidad.

De la misma forma podemos calcular C2:

Costo de Mano de Obra:

Costo de operación de corte y teñido	60 x 20 =$ 1,200
Costo de operación costura	50 x 20 =$ 1,000
Costo de operación de ensamble de herrajes	40 x 20 = $ 800
Costo de operación inspección y embalaje	15 x 20 = $ 300
Costo unitario de materia prima y herramienta	$ 4,700
COSTO TOTAL DE FABRICACIÓN BILLETERA PARA MUJER	**$ 8,000**

Como el precio de venta por cada billetera para mujer es de $ 17,000 la contribución a la utilidad es $17,000 - $8,000 = $9,000 / unidad.

La función objetivo es:

$$Z = 10{,}000\ X1 + 9{,}000\ X2$$

Donde X1 es el número de billeteras para hombre y X2 es el número de billeteras para mujer.

El problema de la empresa “SOLO CUERO” es como elegir los valores de las variables X1 y X2 que producen el mayor valor posible de Z. En términos de Programación Lineal a X1 y X2 las denominamos Variables de Decisión. Como el objetivo, maximizar la contribución total a las utilidades, es función de esas variables decisorias, a 10.000 X1 + 9.000 X2 la denominamos **Función Objetivo.**

$$\text{Max } Z = 10{,}000\ X1 + 9{,}000\ X2$$

Cualquier combinación específica de fabricación de billeteras para hombre y de billeteras para mujer las designamos **Solución del Problema.**

Únicamente las soluciones que satisfacen todas las restricciones las llamamos **Soluciones Factibles.**

La combinación factible específica (solución factible) que da como resultado la mayor aportación a las utilidades la llamamos Combinación óptima de producción, es decir, **Solución Óptima.**

RESTRICCIONES

Cada billetera para hombre que la empresa fabrique utilizará 42 minutos en corte y teñido. Por ello, el número total de minutos para la primera operación que se utiliza en la fabricación de X1 billeteras para hombre será 42 X1. Cada billetera para mujer que se fabrique requerirá de 60 minutos para corte y teñido; por consiguiente las billeteras para mujer utilizarán 60 X2 de tal operación. El tiempo total de corte y teñido que se requiere para la fabricación de X1 billeteras para hombre y X2 billeteras para mujer está dado por:

Tiempo total de corte y teñido que se requiere = 42 X1 + 60 X2

Como se dispone de cuando mucho 37.800 minutos para el corte y teñido, concluimos que la combinación de productos que se seleccione debe satisfacer el requisito.

$$42 X1 + 60 X2 \leq 37.800$$

A esta relación denominamos desigualdad y denota que el número total de minutos que se utilizan para las operaciones de corte y teñido en la fabricación de X1 billeteras para hombre y X2 billeteras para mujer, debe ser menor que o igual a la cantidad máxima de tiempo disponible para corte y teñido.

Sabemos que cada billetera para hombre que se fabrique requerirá de 30 minutos de costura, y que cada billetera para mujer necesita de 50 minutos de costura.

Como hay disponibles 36.000 minutos de tiempo de corte, tenemos:

30 X1 + 50 X2 <= 36.000

La restricción para la capacidad de terminado es:

60 X1 + 40 X2 <= 42.480

y que la restricción para la capacidad de inspección y embalaje es:

6 X1 + 15X2 <= 8.100

Después de especificar las relaciones matemáticas de las restricciones para las cuatro operaciones de producción debemos añadir 2 restricciones más con el objeto de evitar que las variables de decisión X1 y X2 asuman valores negativos así:

$$X1 >= 0 \; ; \; X2 >= 0$$

Estas restricciones las denominamos **Restricciones de No Negatividad** y son una característica general de todos los problemas de Programación Lineal escribiéndose en forma abreviada así:

$$X1, X2 >= 0$$

PLANTEAMIENTO MATEMÁTICO

El modelo matemático para el problema es:

$$\text{Max } Z = 10{,}000\, X_1 + 9{,}000\, X_2$$

Sujeto a:

$42 X_1 + 60 X_2 <= 37{,}800$ Corte y teñido

$30 X_1 + 50 X_2 <= 36{,}000$ Costura

$60 X_1 + 40 X_2 <= 42{,}480$ Terminado

$6 X_1 + 15 X_2 <= 8{,}100$ **I**nspección y embalaje

$X_1, X_2 >= 0$

Las funciones matemáticas en las que todas las variables aparecen en un término a parte y están elevadas a la primera potencia, reciben el nombre de Funciones Lineales. La función objetivo (10.000 X1 + 9.000 X2) es lineal porque todas las variables de decisión aparecen en un término diferente y tienen exponente de uno.

De esta manera podemos afirmar que la palabra Programación significa “elegir un curso de acción”. La Programación Lineal implica seleccionar un camino de acción cuando el modelo matemático del problema contiene sólo funciones lineales.

- Método Gráfico
- Método Simplex
- Problema de Transporte

Método Gráfico

Paso 1°: determinar *el objetivo*, definir *las variables* y escribir la *función objetivo* .

El objetivo es: halla cuántos bidones de cada tipo hay que almacenar para "maximizar los gastos". Suponemos que tal objetivo se consigue almacenado x bidones de aceite de girasol e y de aceite de oliva.

Cómo cada bidón de aceite de girasol cuesta almacenarlo 1 unidad monetaria y lo mismo para uno de aceite, los gastos serán $x + y$

Luego, la función objetivo es:

$$\text{Max } Z = f(x,y) = x + y$$

Paso 2°: *reordenar los datos del problema* y a partir de las cantidades decididas, x e y, *escribir* el sistema de inecuaciones que determinan *las restricciones*.

- Un mínimo de 20 bidones de aceite de girasol: x >= 20
- Un mínimo de 40 bidones de aceite de oliva: y >= 40
- El número de bidones de aceite de oliva no debe ser inferior a la mitad del número de bidones de aceite de girasol: y >= x/2
- La capacidad total del almacén es de 150 bidones: x + y <= 150

Además, los números de bidones deben ser cantidades positivas: **x 0 ; y 0**. ← ***No negatividad***

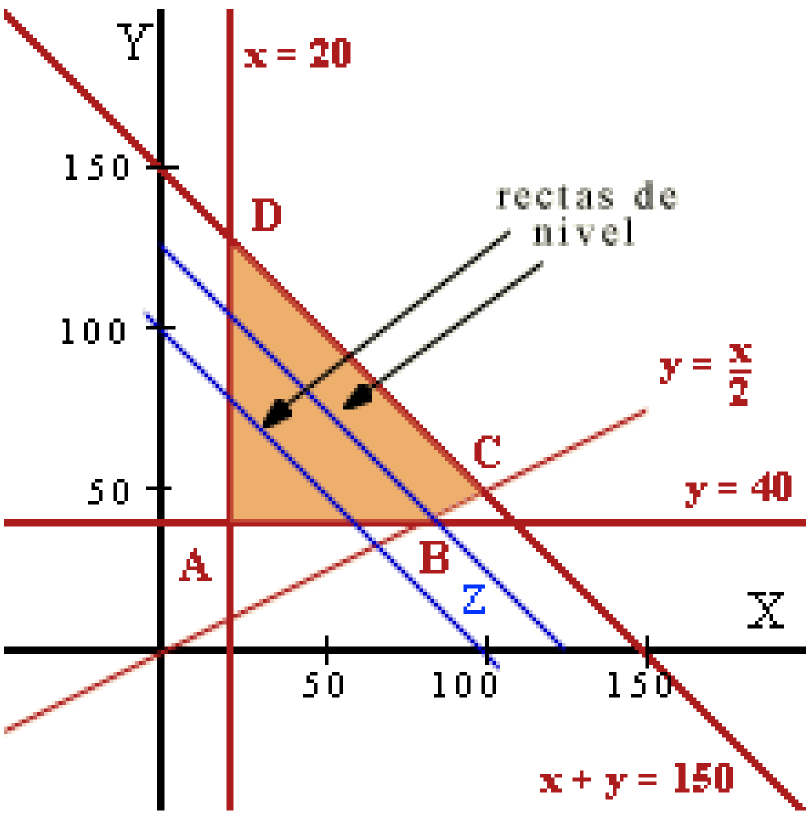
Paso 3º: Expresar el problema en la *forma estándar*.

Maximizar:	$Z = f(x,y) = x + y$
sujeto a:	$x + y$ 150
	y $x/2$
	x 20 ; y 40

(Aquí termina el planteamiento del problema). Para su resolución hay que continuar con :

Paso 4º: *Representar gráficamente las restricciones* y marcar claramente la región factible.

Para las restricciones anteriores debemos representar las rectas: x + y = 150 , y = x/2 , x = 20 e y = 40, obteniéndose la región factible que en la figura se encuentra coloreada.



Paso 5º: *Hallar las coordenadas de los vértices* del polígono obtenido.

Resolviendo los sistemas :

{ $x = 20$, $y = 40$ } ,

{ $y = x/2$, $y = 40$ } ,

{ $y = x/2$, $x + y = 150$} ,

{ $x + y = 150$, $x = 20$};

se obtienen los vértices:

A (20,40)

B (80,40)

C (100, 50)

D (20,130)

Paso 6º: *Sustituir las coordenadas* de esos puntos en la *función objetivo* y hallar el valor máximo o mínimo.

Sustituyendo en f(x,y) = x + y, se tiene:

f(20,40) = 60 ,

f(80,40) = 120 ,

f(100, 50) = 150 ,

f(20,130) = 150

Como el valor máximo se obtiene en los puntos C y D, puede optarse por cualquiera de los dos, o por cualquier punto perteneciente al segmento que los une.

Así, por ejemplo, se obtendría el mismo gasto con 40 bidones de aceite girasol y 110 bidones de aceite de oliva; o 90 y 60 respectivamente.

Paso 7º: También es conveniente *representar las rectas de nivel para comprobar* que *la solución gráfica* coincide con la encontrada. Esta conveniencia se convierte en necesidad cunado la región factible es no acotada.

En nuestro caso, puede comprobarse que las rectas de nivel tienen la misma pendiente que la recta límite de la restricción x + y 150 ; por tanto, hay múltiples soluciones

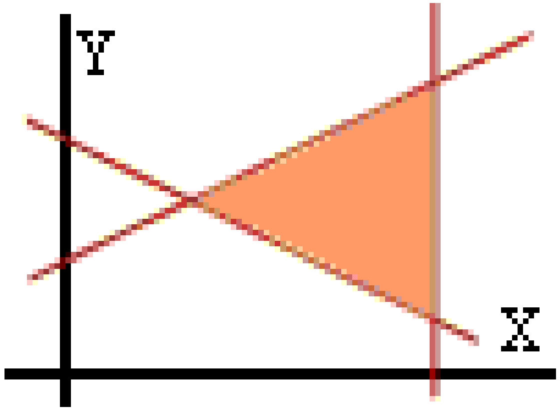
Paso 8º: Por último, como en la resolución de todo problema es necesario criticar la solución: *cerciorarse de que la solución hallada es lógica y correcta*.

En este ejemplo, no todos los puntos del segmento CD son soluciones válidas, ya que no podemos admitir valores de *x* e *y* no enteros , como ocurriría en el punto (90.5,59.5) .

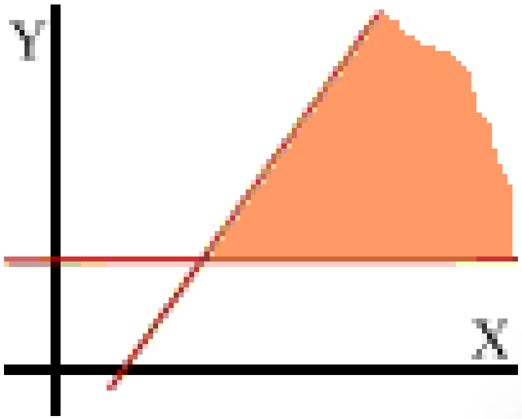
Determinación de la región no factible

La solución de un problema de programación lineal, en el supuesto de que exista, debe estar en la región determinada por las distintas desigualdades. Esta recibe el nombre de **región factible**, y puede estar o no acotada.

Región factible acotada



Región factible no acotada



Tipos de soluciones

Los programas lineales con dos variables suelen clasificarse atendiendo al tipo de solución que presentan. Éstos pueden ser:

Factibles:

- *Con solución única:* La solución es única, y corresponde al vértice para el que la función objetivo toma el valor máximo.

- *Con solución múltiple:* Hay infinitas soluciones o una solución múltiple, que corresponden a los puntos del segmento situado entre dos vértices de la región factible. En estos casos, la función objetivo es paralela a una de las restricciones.

- *<u>Con solución no acotada</u>:* En este caso no existe un valor extremo para la función objetivo, por lo que puede decirse que el problema carece de solución. Para que suceda esta situación la región factible debe estar no acotada.

No Factibles:

No existe la región factible, ya que las zonas coloreadas que aparecen en la figura son únicamente soluciones de alguna de las inecuaciones .

Por tanto, el conjunto de soluciones del sistema de desigualdades no determina ninguna región factible. Este tipo de problemas carece de solución.

Método Simplex

Es un procedimiento iterativo que permite ir mejorando la solución a cada paso. El proceso concluye cuando no es posible seguir mejorando más dicha solución.

Partiendo del valor de la función objetivo en un vértice cualquiera, el método consiste en buscar sucesivamente otro vértice que mejore al anterior. Cómo el número de vértices (y de aristas) es finito, siempre se podrá encontrar la solución.

El método del simplex se basa en la siguiente propiedad: si la función objetivo, *f*, no toma su valor máximo en el vértice A, entonces hay una arista que parte de A, a lo largo de la cual *f* aumenta.

Ahora resolver:

Maximizar $Z= f(x,y)= 3x + 2y$

sujeto a:

$2x + y \quad 18$

$2x + 3y \quad 42$

$3x + y \quad 24$

$x \; 0 \; , \; y \quad 0$

1. Convertir las desigualdades en igualdades

Se introduce una variable de holgura por cada una de las restricciones, para convertirlas en igualdades, resultando el sistema de ecuaciones lineales:

- $2x + y + h = 18$
- $2x + 3y + s = 42$
- $3x + y + d = 24$

2. Igualar la función objetivo a cero

$- 3x - 2y + Z = 0$

3. Escribir la tabla inicial simplex

En las columnas aparecerán todas las variables del problema y, en las filas, los coeficientes de las igualdades obtenidas, una fila para cada restricción y la última fila con los coeficientes de la función objetivo:

Tabla I. Iteración nº 1						
Base	Variable de decisión		Variable de holgura			Valores solución
	x	y	H	s	d	
h	2	1	1	0	0	18
s	2	3	0	1	0	42
d	3	1	0	0	1	24
Z	-3	-2	0	0	0	0

4. Encontrar la variable de decisión que entra en la base y la variable de holgura que sale de la base

Para escoger la variable de decisión que entra en la base, nos fijamos en la última fila, la de los coeficientes de la función objetivo y escogemos la variable con el coeficiente negativo mayor (en valor absoluto).

En este caso, la variable *x* de coeficiente - 3.

(Si existiesen dos o más coeficientes iguales que cumplan la condición anterior, entonces se elige uno cualquiera de ellos)

La columna de la variable que entra en la base se llama ***columna pivote.***

Para encontrar la variable de holgura, se divide cada término de la última columna por el término correspondiente de la columna pivote, siempre que estos últimos sean mayores que cero. En nuestro caso:

18/2 [=9]

42/2 [=21]

24/3 [=8]

En el caso de que todos los elementos fuesen *menores o iguales a cero*, entonces tendríamos una solución ***no acotada*** y no se puede seguir.

El término de la columna pivote que en la división anterior dé lugar al menor cociente positivo, el 3, ya 8 es el menor, indica la fila de la variable de holgura que sale de la base, *d*. Esta fila se llama ***fila pivote***

5. Encontrar los coeficientes de la nueva tabla.

Los nuevos coeficientes de *x* se obtienen dividiendo todos los coeficientes de la fila *d* por el pivote operacional, 3, que es el que hay que convertir en 1.

A continuación hacemos ceros los restantes términos de su columna, con lo que obtenemos los nuevos coeficientes de las otras filas incluyendo los de la función objetivo *Z*. Utilizamos el siguiente esquema:

Fila del pivote:

- **Nueva fila del pivote= (Vieja fila del pivote) : (Pivote)**

Todas las demás filas:

Nueva fila= (Vieja fila) - (Coeficiente de la vieja fila en la columna de la variable entrante) X (Nueva fila del pivote)

Vieja fila de s	2	3	0	1	0	42
	-	-	-	-	-	-
Coeficiente	2	2	2	2	2	2
	x	x	x	x	x	x
Nueva fila pivote	1	1/3	0	0	1/3	8
	=	=	=	=	=	=
Nueva fila de s	0	7/3	0	1	-2/3	26

Como en los elementos de la última fila hay uno negativo, -1, significa que no hemos llegado todavía a la solución óptima. Hay que repetir el proceso:

Tabla II. Iteración nº 2						
Base	Variable de decisión		Variable de holgura			Valores solución
	x	y	h	s	d	
h	0	1/3	1	0	-2/3	2
s	0	7/3	0	1	-2/3	26
x	1	1/3	0	0	1/3	8
Z	0	-1	0	0	1	24

A. La variable que entra en la base es *y*, por ser la variable que corresponde al coeficiente -1

B. Para calcular la variable que sale, dividimos los términos de la última columna entre los términos correspondientes de la nueva columna pivote: 2:1/3 [=6] , 26:7/3 [=78/7] y 8:1/3 [=8] y como el menor cociente positivo es 6, tenemos que la variable de holgura que sale es *h*.

C. El elemento pivote, que ahora hay que hacer 1, es **1/3**.

Tabla III. Iteración nº 3						
Base	Variable de decisión		Variable de holgura			Valores solución
	x	y	H	s	d	
y	0	1	3	0	-2	6
s	0	0	-7	1	4	12
x	1	0	-1	0	1	6
Z	0	0	3	0	-1	30

Como en los elementos de la última fila hay uno negativo, -1, significa que no hemos llegado todavía a la solución óptima. Hay que repetir el proceso:

A. La variable que entra en la base es *d*, por ser la variable que corresponde al coeficiente -1
B. Para calcular la variable que sale, dividimos los términos de la última columna entre los términos correspondientes de la nueva columna pivote:
   6/(-2) [=-3] , 12/4 [=3], y 6:1 [=6]
   y como el menor cociente positivo es 3, tenemos que la variable de holgura que sale es *s*.
C. El elemento pivote, que ahora hay que hacer 1, es **4**.

Como todos los coeficientes de la fila de la función objetivo son positivos, hemos llegado a la solución óptima.

La solución óptima viene dada por el valor de Z en la columna de los valores solución, en nuestro caso: **33.**

Tabla IV . Final del proceso						
Base	Variable de decisión		Variable de holgura			Valores solución
	x	y	H	s	d	
y	0	1	-1/2	1/2	0	12
d	0	0	-7/4	1/4	1	3
x	1	0	¾	-1/4	0	3
Z	0	0	5/4	1/4	0	**33**

Problema de Transporte

El problema del transporte se refiere a la distribución de cualquier bien, desde cualquier grupo de centros de abastecimiento, llamados orígenes (ofertas), a cualquier grupo de centros de recepción llamados destinos (demandas).

$i = 1,2,\ldots\ldots,m.$

Se dispone de S_i unidades para distribuir.

$j=1,2,\ldots\ldots,n.$

Se tiene una demanda de D_j unidades.

Si S_i y D_j son enteros positivos, toda solución básica factible tiene valores enteros.

Planteamiento

Uno de los productos más importantes de la P & T Company son los chícharos enlatados.

Los chícharos se preparan en 3 enlatadoras:

- Bellingham (Washington).
- Eugene (Oregon).
- Albert Lea (Minessota).

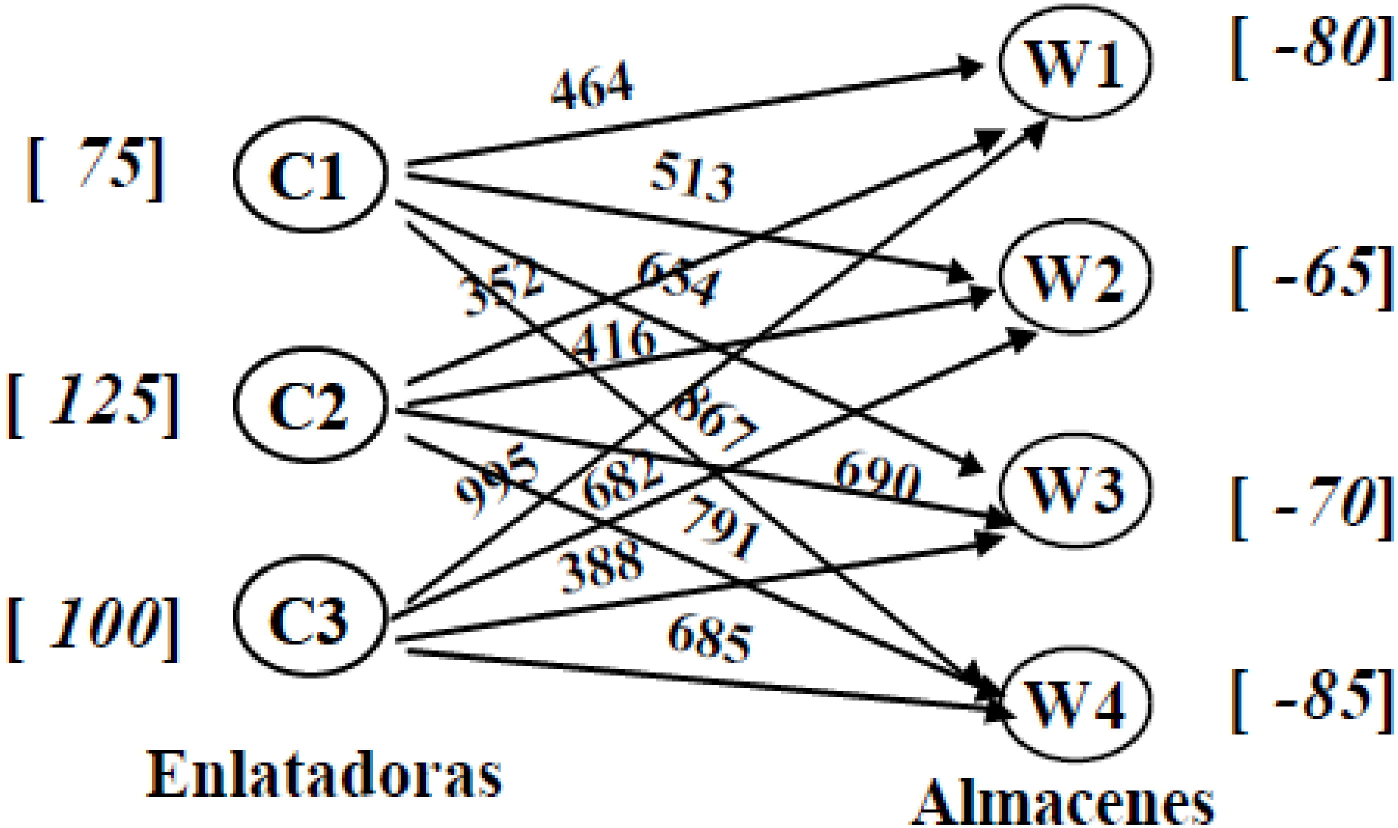
Luego se mandan por camión a 4 almacenes de distribución:

- Sacramento (California).
- Salt Lake City (Utah).
- Rapid City (South Dakota).
- Alburqueque (Nuevo México).

Los costos de embarque constituyen un gasto importante y se representan en la siguiente tabla:

		Costo de embarque ($) por carga				Producción
		Almacén				
		1	2	3	4	
Enlatadora	1	464	513	654	867	75
	2	352	416	690	791	125
	3	995	682	388	685	100
Asignación		80	65	70	85	

Representación en red del problema de transporte



Variables de decisión:

- *Xij* : Número de cargas de camión que se mandan de la enlatadora i al almacén j. [*carga*]

i = 1,2,3 j=1,2,3,4.

Medida de eficiencia (función objetivo):

Z : Costo total de transporte (en miles de Dólares).

Min Z = $464X_{11} + 513X_{12} + 654X_{13} + 867X_{14} + 352X_{21} + 416X_{22} + 690X_{23} + 792X_{24} + 995X_{31} + 682X_{32} + 388X_{33} + 685X_{34}$

[US$/ carga] * [carga] =[US$]

Restricciones

De producción (enlatadoras):

$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} = 75$

$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} = 125$

$X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} =100$

De Demanda (almacenes):

$X_{11} + X_{21} + X_{31} = 80$

$X_{12} + X_{22} + X_{32} = 65$

$X_{13} + X_{23} + X_{33} = 70$

$X_{14} + X_{24} + X_{34} = 85$

De no negatividad:

$X_{ij} >= 0$

Propiedad de soluciones factibles

Para que el problema de transporte tenga soluciones factibles, debe cumplirse

$$\sum_{i=1}^{m} s_i = \sum_{j=1}^{n} d_j$$

- Si la oferta excede la demanda se introduce un nodo ficticio de demanda .
- Si la demanda excede la oferta se introduce un nodo ficticio de oferta.

Así se garantiza la propiedad de soluciones factibles.

Solución a problemas de transporte

1. **Método de la esquina noroccidental**

Se toma la celda para la variable X_{11} (esquina noroccidental) y se asigna el mínimo entre la oferta y la demanda.

Si X_{ij} fue la última V.B seleccionada, la siguiente elección será $X_{i,j+1}$, si quedan recursos en el origen i. De lo contrario se elige $X_{i+1,j}$.

En caso de que se satisfagan simultáneamente la oferta y la demanda se presenta una solución degenerada y se escoge arbitrariamente.

		Destino						
		1	2	3	4	5	Recursos	U_i
Origen	1	16 / 30	16 / 20	13	22	17	20	
	2	14	14 / 0	13 / 60	19	15	60	
	3	19	19	20 / 10	23 / 30	M / 10	10	
	4(F)	M	0	M	0	0 / 50	50	
Demanda		30	20	10	30	50	Z =2470 + 10M	
V_j								

2. Método de Vogel.

Para cada columna y cada renglón elegible, calcule la diferencia, entendida como la diferencia aritmética entre el menor costo y el que le sigue en orden incremental, en este renglón.

En el renglón o columna, donde exista la mayor diferencia, se selecciona la variable que entra como la de menor costo entre las que quedan. (En caso de empates se elige arbitrariamente).

	Destino					Recursos	Diferencia por renglón
	1	2	3	4	5		
1	16	16	13	22	17	50	3
Origen 2	14	14	13	19	15	60	1
3	19	19	20	23	M	50	0
4(F)	M	0	M	30	0	[redacted]	0
Demanda	30	20	70	~~30~~	60	Seleccionar X_{44}=30	
Diferencia por columna	2	14	0	19	15	Eliminar columna 4	

	Destino				Recursos	Diferencia por renglón
	1	2	3	5		
Origen 1	16	16	13	17	50	3
Origen 2	14	14	13	15	60	1
Origen 3	19	19	20	M	50	0
4(F)	M	0	M	20	~~30~~	0
Demanda	30	20	70	[redacted]	Seleccionar $X_{45}=20$	
Diferencia por columna	2	14	0	15	Eliminar renglón 4(F)	

	Destino				Recursos	Diferencia por renglón
	1	2	3	5		
Origen 1	16	16	50	17	~~50~~	3
Origen 2	14	14	13	15	60	1
Origen 3	19	19	20	M	50	0
Demanda	30	20	[redacted]	40	Seleccionar $X_{13}=50$	
Diferencia por columna	2	2	0	2	Eliminar renglón 1	

	Destino				Recursos	Diferencia por renglón
	1	2	3	5		
Origen 2	14	14	13	40	[redacted]	1
Origen 3	19	19	20	M	50	0
Demanda	30	20	20	~~40~~	Seleccionar $X_{25}=40$ Eliminar columna 5	
Diferencia por columna	5	5	7	M-15		

	Destino			Recursos	Diferencia por renglón
	1	2	3		
Origen 2	14	14	20	~~20~~	1
Origen 3	19	19	20	50	0
Demanda	30	20	[redacted]	Seleccionar $X_{23}=20$ Eliminar renglón 2	
Diferencia por columna	5	5	7		

	Destino			Recursos	Diferencia por renglón
	1	2	3		
Origen 3	30	20	0	50	
Demanda	30	20	0	Seleccionar $X_{31}=30$	
Diferencia por columna				Seleccionar $X_{32}=20$ Seleccionar $X_{33}=0$	

- Solución básica factible inicial:

		Destino					Recur-sos	U_i
		1	2	3	4	5		
Origen	1	16	16	13 50	22	17	50	
	2	14	14	13 20	19	15 40	60	
	3	19 30	19 20	20 0	23	M	50	
	4(F)	M	0	M	0 30	0 20	50	
Demanda		30	20	70	30	60	Z=2460	
V_j								

3. Método de Russel.

Para cada renglón elegible, debe determinarse U_i el mayor costo unitario C_{ij} para el renglón seleccionado i.

Para cada columna elegible j, debe determinarse V_j el mayor costo unitario de los C_{ij} presentes en esa columna.

Para cada variable Xij, que no haya sido seleccionada en estos renglones o columnas se calcula $\Delta_{ij} = C_{ij} - U_i - V_j$.

La variable que entra es la de mayor valor negativo (en términos absolutos).

Iter	$\bar{U}_1$	$\bar{U}_2$	$\bar{U}_3$	$\bar{U}_4$	$\bar{V}_1$	$\bar{V}_2$	$\bar{V}_3$	$\bar{V}_4$	$\bar{V}_5$	Valor mas negativo Δij	Asignado
1	22	19	M	M	M	19	M	23	M	$\Delta_{45}=-2M$	$X_{45}=50$
2	22	19	M		19	19	20	23	M	$\Delta_{15}=-5-M$	$X_{15}=10$
3	22	19	23		19	19	20	23		$\Delta_{13}=-29$	$X_{13}=40$
4		19	23		19	19	20	23		$\Delta_{23}=-26$	$X_{23}=30$
5		19	23		19	19		23		$\Delta_{21}=-24^{*}$	$X_{21}=30$
6										Irrelevante	$X_{31}=0$ $X_{22}=20$ $X_{34}=30$ $Z= 2570$

Prueba de optimalidad

- Una S.B.F es óptima si y sólo si Cij - Ui - Vj ^{33}0 para toda i,j tal que Xij es V.N.B en la iteración actual.

- Como el valor de Cij - Ui - Vj debe ser cero si Xij es V.B, Ui y Vj satisfacen el conjunto de ecuaciones Cij = Ui + Vj para cada (i,j) tal que Xij es básica.

- Como se tienen m + n - 1 variables básicas, existirán m + n - 1 ecuaciones. Como Ui y Vj son en total m+n, una de ellas puede hacerse arbitrariamente cero, y el resultado no se modifica. Se selecciona la que tenga el mayor número de asignaciones en un renglón. (hacer Ui = 0)

Para las V.B.

$$U_3 = 0 \longrightarrow U_3 = 0$$

$$U_3 + V_1 = 19 \longrightarrow V_1 = 19$$

$$U_3 + V_2 = 19 \longrightarrow V_2 = 19$$

$$U_3 + V_4 = 23 \longrightarrow V_4 = 23$$

$$U_1 + V_3 = 13 \longrightarrow U_1 = -5$$

$$U_1 + V_5 = 17 \longrightarrow V_5 = 22$$

$$U_2 + V_1 = 14 \longrightarrow U_2 = -5$$

$$U_2 + V_3 = 13 \longrightarrow V_3 = 18$$

$$U_4 + V_5 = 0 \longrightarrow U_4 = -22$$

Origen	Destino 1	Destino 2	Destino 3	Destino 4	Destino 5	Recur-sos	U_i
1	16	16	13 / 40	22	17 / 10	50	-5
2	14 / 30	14	13 / 30	19	15	60	-5
3	19 / 0	19 / 20	20	23 / 30	M	50	0
4(F)	M	0	M	0	0 / 50	50	-22
Demanda	30	20	70	30	60	Z =2570	
V_j	19	19	18	23	22		

Iteraciones

Paso 1:

- Se determina Cij - Ui - Vj para seleccionar la variable que entra a la base.

- Cij - Ui - Vj representa la tasa a la cual cambia la función objetivo si se incrementa la V.N.B Xij .

- La que entra debe tener un Cij - Ui – Vj negativo (se elige el más negativo).

En este caso entra X_{25}

Origen	Destino 1	Destino 2	Destino 3	Destino 4	Destino 5	Recursos	U_i
1	16 / 2	16 / 2	13 / 40	22 / 4	17 / 10	50	-5
2	14 / 30	14 / 0	13 / 30	19 / 1	15 / -2	60	-5
3	19 / 0	19 / 20	20 / 2	23 / 30	M / M-22	50	0
4(F)	M / M+3	0 / 3	M / M+4	0 / -1	0 / 50	50	-22
Demanda	30	20	70	30	60	$Z = 2570$	
V_j	19	19	18	23	22		

Paso 2:

- Al incrementar el valor de una variable (entrarla a la base) , se genera una reacción en cadena, de forma tal que se sigan satisfaciendo las restricciones.
- La primera V.B que disminuya su valor hasta cero será la variable que sale.
- Solamente existe una reacción en cadena que incluye a la V.B entrante, y algunas V.B actuales.
- Existen celdas donadoras y celdas receptoras. Luego para saber en cuanto se puede incrementar la V.B entrante, se escoge el menor valor entre las celdas donadoras y esta es la que sale de la base (en caso de empates se elige arbitrariamente).

La variable de la celda donadora (1,5) sale de la base

		Destino					Recursos	U_i
		1	2	3	4	5		
Origen	1	16 $\boxed{2}$	16 $\boxed{2}$	13 + 50	22 $\boxed{4}$	17	50	-5
	2	14 30	14 $\boxed{0}$	13 − 20	19 $\boxed{1}$	15 + 10	60	-5
	3	19 0	19 20	20 $\boxed{2}$	23 30	M $\boxed{M-22}$	50	0
	4(F)	M $\boxed{M+3}$	0 $\boxed{3}$	M $\boxed{M+4}$	0 $\boxed{-1}$	0 50	50	-22
Demanda		30	20	70	30	60		
V_j		19	19	18	23	22		

Paso 3:

- La nueva S.B.F se identifica, sumando el valor (antes de los cambios) de la V.B que sale a las asignaciones de cada celda receptora, y restando esta misma cantidad de las asignaciones de cada celda donadora.

$$\Delta Z = 10\,(15 - 17 + 13 - 17) = 10\,(-2) = -20$$

$$Z = 2570 - 20 = 2550$$

- Para determinar si la solución es óptima, se debe calcular nuevamente Ui y Vj , y luego para cada V.N.B, Cij - Ui - Vj .
- Se detiene cuando todos los Cij - Ui – Vj para las V.N.B sean positivos.

La variable de la celda donadora (3,4) sale de la base

	Destino 1	2	3	4	5	Recursos	U_i
Origen 1	16 / 2	16 / 2	13 / 50	22 / 4	17 / 2	50	0
2	14 / [redacted]	14 / 0	13 / 20	19 / 1	15 / 40	60	0
3	19 / 30	19 / 20	20 / 2	23 / 0	M / M-20	50	5
4(F)	M / M+1	0 / 1	M / M+2	0 / 30	0 / 20	50	-15
Demanda	30	20	70	30	60	Z = ?	
V_j	14	14	13	18	15		

Bibliografía

- Reault, J. P. (1997). Introducción a la teoría de decisiones con aplicaciones a la administración, Editorial Limusa, México.
- Prawda, J. (1998). Métodos y modelos de investigación de operaciones vol. 1 Modelos determinísticos, Editorial Limusa, México.
- Prawda, J.(1998). Métodos y modelos de investigación de operaciones vol. 2 Modelos estocásticos, Editorial Limusa, México.
- Gass. S.(1985), Programación lineal, Editorial Mc Graw Hill, México.
- Jauffred, F. et. al. (1985). Métodos de optimización, programación lineal-gráficas, Editorial Representaciones y Servicios de Ingeniería, México.
- Liebermann (1999), Investigación de operaciones, Editorial Limusa, México.
- Taha, H. (2012) Investigación de operaciones, 9ª edición, Editorial Pearson, México.
- Winston, W. (2005) Investigación de operaciones, aplicaciones y algoritmos, 4ª edición,
- Arsham, H (1994)Modelos Deterministas, Optimización Lineal.