

Vázquez Briseño

TEORÍA DE LA PLASTICIDAD

Aplicada a los Procesos de Formado de Metales



Casa abierta al tiempo

**Teoría de la plasticidad
aplicada a los procesos de
formado de metales**

Teoría de la plasticidad aplicada a los procesos de formado de metales



Lucio Vázquez Briseño
Departamento de Materiales

Universidad Autónoma Metropolitana

RECTOR

Dr. Adrián de Garay Sánchez

SECRETARIA

Dra. Sylvie Turpin Marion

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS

Mtro. José Ángel Rocha Martínez

JEFE DEL DEPARTAMENTO DE MATERIALES

Dr. Enrique Rocha Rangel

COORDINADORA GENERAL DE DESARROLLO ACADÉMICO

Dra. Norma Romero López

COORDINADOR DE EXTENSIÓN UNIVERSITARIA

Dr. Jorge Armando Morales Aceves

JEFE DE LA SECCIÓN DE PRODUCCIÓN Y DISTRIBUCIÓN EDITORIALES

DCG Edgar Barbosa Álvarez

UAM-AZCAPOTZALCO

© Doctor Lucio Vázquez Briseño

© Departamento de Materiales
División de Ciencias Básicas e Ingeniería

Portada: Grupo Noriega Editores

Revisión de estilo:
Concepción Asuar

Sección de producción
y distribución editoriales
Tel. 5318 9222 / 9223
Fax.: 5318 9222

Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Azcapotzalco
Av. San Pablo 180
Col. Reynosa Tamaulipas
Delegación Azcapotzalco
C.P. 02200
México, D.F.

Número de registro de obra
ISBN: 978-970-31-0838-1
Primera edición, 2008
Impreso en México

Prólogo

Las motivaciones para la publicación del presente libro son varias:

- Ofrecer una obra que comprenda los temas del curso de Teoría de la Plasticidad para alumnos de las carreras de Ingeniería Metalúrgica, Ingeniería Mecánica, Ingeniería de Materiales e Ingeniería Física con Concentración en Materiales, dado que para abarcar el material del programa era necesario consultar varios libros.
- Presentar un material complejo y abstracto en forma sencilla, y con explicaciones exhaustivas pero que refuerzan el conocimiento aun sin ayuda del profesor.
- Disponer de un libro en español de una materia cuyos libros son escasos en este idioma.
- El libro trata en forma clara y concisa los conocimientos previos necesarios para comenzar el estudio de la Teoría de la Plasticidad, los criterios de cedencia usados en los procesos de formado de metales y los métodos para determinar el esfuerzo o fuerza de forja, laminación, trefilado y extrusión.

En los *Fundamentos teóricos*, revisados en la primera parte, en los primeros dos capítulos se presentan temas relacionados con esfuerzo, deformación y propiedades mecánicas que el alumno ya debe conocer y dominar después de haber seguido algún curso de Elasticidad; sin embargo, se presenta aquí este material para que el lector tenga a su alcance los conocimientos y ecuaciones de estos temas que se necesitan en la Teoría de la Plasticidad.

En el capítulo 3 se revisan las propiedades elásticas y plásticas de los metales. En el capítulo 4 se presentan las ecuaciones constitutivas en plasticidad, tema sobre el que los alumnos pueden tener ya referencia en algún curso introductorio; una de estas ecuaciones, la de Ludwik, es tratada en forma preliminar en el capítulo 3. Se recomienda iniciar el curso de Teoría de la Plasticidad en el capítulo 4 para recordar y profundizar los conocimientos adquiridos en el curso previo a que se hace referencia. El capítulo 5, denominado Criterios de cedencia en materiales metálicos dúctiles, es fundamental para comprender las aplicaciones de la Teoría de la Plasticidad a los procesos de formado de metales. En el capítulo 6 se estudian los fundamentos de fricción aplicables a los procesos de formado.

En la segunda parte se tratan los métodos de la Teoría de la Plasticidad para determinar esfuerzos, presiones, fuerzas, energías y potencias para darle forma a los metales en los procesos de forja, trefilado, laminación y extrusión. Los métodos que se examinan son: el método del trabajo ideal en el capítulo 7, el método del equilibrio de fuerzas en el capítulo 8, así como el método de la disipación de energía en el capítulo 9; en el capítulo 10 se revisan los fundamentos de la teoría de las líneas de corte máximo, y finalmente en el capítulo 11 se examina el método del límite superior. El objetivo de esta segunda parte es darle al alumno una perspectiva general de estos métodos, de cómo se opera con ellos, sus limitaciones y aplicaciones.

Al final de cada tema se presentan problemas resueltos para que el alumno observe la manera de abordarlos; esta forma de trabajo se sigue a lo largo de todo el texto. Al final de cada capítulo se propone un número de ejercicios suficientes con sus respuestas incluidas para que el alumno compruebe si ha adquirido habilidad para resolverlos.

Deseo agradecer a los jóvenes alumnos que en su calidad de asistentes me ayudaron a capturar el material que se presenta en el libro, tanto texto como figuras, ya que sin su colaboración no habría sido posible esta publicación. El libro es el resultado de la colección de notas que sobre la materia reuní por aproximadamente quince años.

Es mi propósito que sea de utilidad en la formación de los futuros ingenieros en materiales, metalúrgicos, mecánicos y físicos y de los alumnos de postgrado que estén interesados en realizar investigación en el campo de los procesos de formado, así como de todos aquellos profesionistas que tienen que ver con estos temas.

LUCIO VÁZQUEZ BRISEÑO

Contenido

Prólogo	5
Factores de conversión de unidades del Sistema Inglés al Sistema Internacional de medidas (SI)	12

PRIMERA PARTE FUNDAMENTOS TEÓRICOS

1. Análisis de esfuerzos	15
1.1. Equilibrio de fuerzas	15
1.2. Componentes cartesianas de esfuerzos	16
1.3. Componentes de esfuerzo en un punto	17
1.4. Determinación de las componentes de esfuerzo en un punto	18
1.5. Componentes normal y tangencial de esfuerzo	19
1.6. Ecuaciones de transformación de esfuerzos. Estado tridimensional	20
1.7. Esfuerzos principales	23
1.8. Esfuerzos cortantes principales	25
1.9. Ecuaciones de transformación de esfuerzos mediante tensores. Estado tridimensional	30
1.10. Ecuaciones de transformación de esfuerzos. Estado bidimensional	35
1.11. Esfuerzos principales. Estado bidimensional de esfuerzos	37
1.12. Esfuerzos cortantes principales. Estado bidimensional de esfuerzos	39
1.13. Círculo de Mohr para esfuerzos bidimensionales	40
1.14. Determinación de las componentes normal y tangencial mediante el círculo de Mohr. Estado tridimensional de esfuerzos	43
1.15. Círculo de Mohr. Estado tridimensional de esfuerzos	48
1.16. Tensores de esfuerzo hidrostático y esfuerzo desviador	49
1.17. Invariantes del tensor del esfuerzo desviador	53
1.18. Ecuaciones de equilibrio de fuerzas en un punto	53
1.18.1. <i>Coordenadas cartesianas. Elemento cúbico</i>	53
1.18.2. <i>Coordenadas cilíndricas o polares</i>	54

1.18.3. <i>Coordenadas esféricas</i>	55
Ejercicios de final de capítulo	56
Apéndice A	58
A.1. Determinación de los esfuerzos normales principales. Método goniométrico	58
A.2. Método corto para resolver la ecuación cúbica	61
A.3. Caso particular. Uno de los esfuerzos normales de un estado de esfuerzos es un esfuerzo normal principal	63
2. Deformación, rapidez de deformación y relaciones constitutivas elásticas	65
2.1. Deformación infinitesimal en un punto	65
2.2. Deformaciones nominales. Representación tensorial y matricial	70
2.3. Rotaciones. Representación tensorial y matricial	73
2.4. Ecuaciones de compatibilidad de deformación	77
2.5. Determinación de deformaciones	82
2.5.1. <i>Deformación normal a un plano oblicuo</i>	82
2.5.2. <i>Ecuaciones de transformación de deformaciones. Estado tridimensional</i>	83
2.5.3. <i>Ecuaciones de transformación de deformaciones. Estado bidimensional</i>	85
2.5.4. <i>Deformaciones principales</i>	86
2.5.5. <i>Deformaciones cortantes principales</i>	87
2.6. Deformaciones hidrostáticas y desviadoras	91
2.7. Deformación nominal y deformación real	93
2.8. Deformaciones uniformes finitas en cuerpos de diferentes geometrías	93
2.9. Dilataciones volumétricas nominal y real	94
2.9.1. <i>Dilatación volumétrica nominal</i>	94
2.9.2. <i>Dilatación volumétrica real</i>	96
2.10. Relaciones de continuidad o de volumen constante	97
2.11. Relaciones constitutivas elásticas	98
2.11.1. <i>Estado tridimensional de deformaciones y esfuerzos</i>	98
2.11.2. <i>Estado bidimensional de deformaciones y esfuerzos</i>	99
2.11.2.1. <i>Deformación bidimensional en un plano XY</i>	99
2.11.2.2. <i>Esfuerzo bidimensional en un plano XY</i>	100
2.11.2.3. <i>Deformación bidimensional en un plano principal</i>	100
2.11.2.4. <i>Esfuerzo bidimensional en un plano principal</i>	101
2.11.3. <i>Deformaciones en un estado unidireccional de esfuerzos</i>	101
2.11.4. <i>Relaciones adicionales entre constantes elásticas</i>	101
2.12. Energía de deformación elástica	102
2.13. Determinación de esfuerzos. Estado bidimensional de deformaciones	103
2.13.1. <i>Determinación de deformaciones. Método algebraico</i>	104
2.13.2. <i>Círculo de Mohr para deformaciones. Roseta rectangular de tres elementos</i>	108
Ejercicios de final de capítulo	110
3. Propiedades elásticas y plásticas	115
3.1. Introducción	115
3.2. Ensayo de tensión	115
3.2.1. <i>Propiedades elásticas nominales de tensión</i>	117
3.2.2. <i>Propiedades plásticas nominales de tensión</i>	124
3.2.3. <i>Propiedades elásticas reales de tensión</i>	129
3.2.4. <i>Curva esfuerzo real versus deformación real</i>	131

3.2.5.	<i>Propiedades plásticas reales de tensión</i>	131
3.2.5.1.	Comparación de curvas nominal y real esfuerzo <i>versus</i> deformación	133
3.3.	Ensayo de compresión	137
3.3.1.	<i>Ensayo de compresión unidireccional</i>	137
3.3.1.1.	Propiedades elásticas nominales de compresión	139
3.3.1.2.	Propiedades plásticas nominales de compresión	139
3.3.1.3.	Propiedades elásticas reales de compresión	141
3.3.1.4.	Propiedades plásticas reales de compresión	141
3.3.2.	<i>Ensayo de compresión en deformación plana</i>	142
3.4.	Ensayo de torsión	143
3.4.1.	<i>Introducción</i>	143
3.4.2.	<i>Esfuerzo y deformación en el ensayo de torsión</i>	145
3.4.2.1.	Especímenes cilíndricos sólidos	145
3.4.2.2.	Especímenes cilíndricos huecos de pared delgada	147
3.4.3.	<i>Propiedades mecánicas elásticas</i>	148
3.4.4.	<i>Propiedades mecánicas plásticas aparentes</i>	151
3.4.5.	<i>Esfuerzos y deformaciones grandes en torsión</i>	155
3.4.5.1.	Propiedades plásticas reales en torsión	158
Ejercicios de final de capítulo		161
4.	Ecuaciones constitutivas en plasticidad	163
4.1.	Desarrollo histórico	163
4.2.	Ecuaciones constitutivas empíricas para materiales isotrópicos y uniformes	164
4.2.1.	<i>Ecuaciones y endurecimiento por deformación</i>	164
4.2.1.1.	La ecuación de Ludwik	164
4.2.1.2.	Inestabilidad en tensión en materiales tipo Ludwik	168
4.2.1.3.	La ecuación de Voce	174
4.3.	Sensibilidad del esfuerzo a la rapidez de deformación	176
4.4.	Efecto de la temperatura sobre el esfuerzo de deformación	179
4.5.	Relaciones rapidez de deformación <i>versus</i> temperatura	181
4.6.	Ecuaciones constitutivas para temperaturas elevadas	182
Ejercicios de final de capítulo		185
5.	Criterios de cedencia en materiales metálicos dúctiles	189
5.1.	Criterios de cedencia para un estado complejo de esfuerzos	189
5.1.1.	<i>Criterio de von Mises o de la energía crítica de distorsión</i>	189
5.1.1.1.	Criterio de von Mises aplicado al ensayo de tensión unidireccional	190
5.1.1.2.	Criterio de von Mises aplicado al ensayo de torsión	191
5.1.2.	<i>Criterio de Tresca o del esfuerzo cortante máximo</i>	192
5.1.2.1.	Criterio de Tresca aplicado al ensayo de tensión unidireccional	193
5.1.2.2.	Criterio de Tresca aplicado al ensayo de torsión	193
5.2.	Superficies de cedencia en los criterios de von Mises y Tresca. Estado tridimensional de esfuerzos	197
5.3.	Criterios de cedencia para un estado bidimensional de esfuerzos	198
5.3.1.	<i>Criterio de von Mises</i>	198
5.3.2.	<i>Criterio de Tresca</i>	198
5.4.	Representación geométrica de los criterios de cedencia para un estado de esfuerzos bidimensional	199

5.5. Fluencia plástica en estados combinados de esfuerzos	200
5.5.1. <i>Caso bidimensional de esfuerzos</i>	200
5.5.2. <i>Un tubo de pared delgada</i>	204
5.5.2.1. <i>Tubo de pared delgada bajo la acción de una carga longitudinal y un momento de torsión</i>	207
5.6. Funciones invariantes de esfuerzo y deformación	210
5.6.1. <i>Esfuerzo y deformación octaédricos</i>	210
5.6.2. <i>Esfuerzo y deformación efectivos</i>	212
5.7. Ecuaciones de Levy-Mises (sólido plástico ideal)	216
5.8. Criterios de von Mises y Tresca para deformación plana	220
5.9. Criterios de cedencia para metales anisotrópicos	222
Ejercicios de final de capítulo	226
Apéndice B	228
B1. Ecuación para estimar la energía de distorsión	228
B2. Ecuaciones para deformación efectiva	230
6. Tribología en el formado de metales	237
6.1. Fricción	237
6.1.1. <i>Características de la interfaz dado-pieza</i>	238
6.1.2. <i>Parámetros de fricción</i>	239
6.2. Adherencia	240
6.3. Desgaste	241
6.4. Lubricación	241
Ejercicios de final de capítulo	244

SEGUNDA PARTE

APLICACIONES A PROCESOS DE FORMADO

7. Método del trabajo ideal	249
7.1. Introducción	249
7.2. Método del trabajo ideal	251
7.2.1. <i>Proceso de estirado versus ensayo de tensión</i>	251
7.2.2. <i>Proceso de extrusión versus ensayo de tensión</i>	254
7.2.3. <i>Forja versus ensayo de compresión unidireccional homogénea, sin fricción</i>	255
7.2.4. <i>Procesos de forja y laminación de formas planas versus ensayo de compresión en deformación plana</i>	256
7.3. Relación entre los valores ideales y los valores reales de esfuerzo, carga y trabajo	258
7.4. Ejercicios tipo	259
Ejercicios de final de capítulo	263
8. Método del equilibrio de fuerzas	265
8.1. Forja de un cilindro	265
8.2. Forja de una placa en deformación plana	273
8.2.1. <i>Coefficiente de fricción</i>	274
8.2.2. <i>Factor de corte</i>	276

8.2.3. <i>Fricción adhesiva</i>	278
8.3. Estirado de una cinta metálica	280
8.4. Trefilado y extrusión	284
8.5. Laminación	291
Ejercicios de final de capítulo	294
9. Método de la disipación de energía	297
9.1. Introducción	297
9.2. Extrusión y estirado en deformación plana	298
9.2.1. <i>Presión de extrusión sin fricción en la superficie de contacto pieza-matriz</i>	299
9.2.2. <i>Presión de extrusión con fricción en la superficie de contacto pieza-matriz</i>	301
9.3. Compresión en la deformación plana de una placa	309
9.4. Presión para endentar un bloque semiinfinito de metal	313
Ejercicios de final de capítulo	316
10. Método de las líneas de corte máximo	321
10.1. Estado de esfuerzos en función de la presión hidrostática y del esfuerzo de cedencia en corte	321
10.2. Lineas de corte máximo	323
10.2.1. <i>Ecuaciones de Hencky</i>	324
10.2.2. <i>Ecuaciones de Geiringer</i>	326
10.3. Ejemplos de aplicación	327
10.3.1. <i>Penetración sin fricción en deformación plana de un bloque de metal</i>	327
10.3.2. <i>Penetración con fricción en deformación plana de un bloque de metal</i>	334
10.3.3. <i>Extrusión sin fricción de una placa por deformación plana. Reducción 50%</i>	336
10.3.4. <i>Extrusión sin fricción de una placa por deformación plana. Reducción 2/3</i>	343
10.3.5. <i>Perforación con un punzón plano. Reducción 50%</i>	347
Ejercicios de final de capítulo	348
11. Método del límite superior	351
11.1. Ecuación de Prager y Hodge	351
11.1.1. <i>Términos de la ecuación de Prager y Hodge</i>	352
11.2. Compresión unidireccional uniforme de un cilindro con fricción cero en la interfaz cilindro-platina	357
11.3. Forja de una cinta metálica en deformación plana	361
11.4. Trefilado de un alambre	365
Ejercicios de final de capítulo	379
Bibliografía	381

**Factores de conversión de unidades del Sistema Inglés
al Sistema Internacional de medidas (SI)**

Cantidad	Para convertir de	a	multiplicar por
Longitud	pulgadas	m	2.54×10^{-2}
	pies	m	3.048×10^{-1}
	micrones	m	1×10^{-6}
Área	pulgada ²	m ²	6.452×10^{-4}
	pie ²	m ²	9.290×10^{-2}
Ángulo	grado	rad	1.745×10^{-2}
Masa	lb	kg	4.536×10^{-1}
	ton métrica	kg	1×10^{-3}
Fuerza	lbf	N	4.448
	kgf	N	9.806
Esfuerzo	psi	Pa	6.895×10^3
	ksi	MPa	6.895
	kg/cm ²	Pa	9.806×10^4
Energía	lb-pie	J	1.356
	cal	J	4.184
Potencia	lb-pie/min	W	2.260×10^{-2}
	hp	W	7.457×10^2
	hp	kW	7.457×10^{-1}
Velocidad	pie/min	m/s	1.356
	rpm	rad/s	1.047×10^{-1}

PRIMERA PARTE

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

CAPÍTULO 1

Análisis de esfuerzos

1.1. Equilibrio de fuerzas

Considere un cuerpo en equilibrio sujeto a un conjunto de fuerzas de superficie F_1, \dots, F_8 (figura 1.1.1). En el presente análisis no se tomarán en cuenta las fuerzas volumétricas de naturaleza magnética, de inercia o de gravedad, que estén actuando sobre el cuerpo debido a que su magnitud es insignificante comparada con la de las fuerzas de superficie.

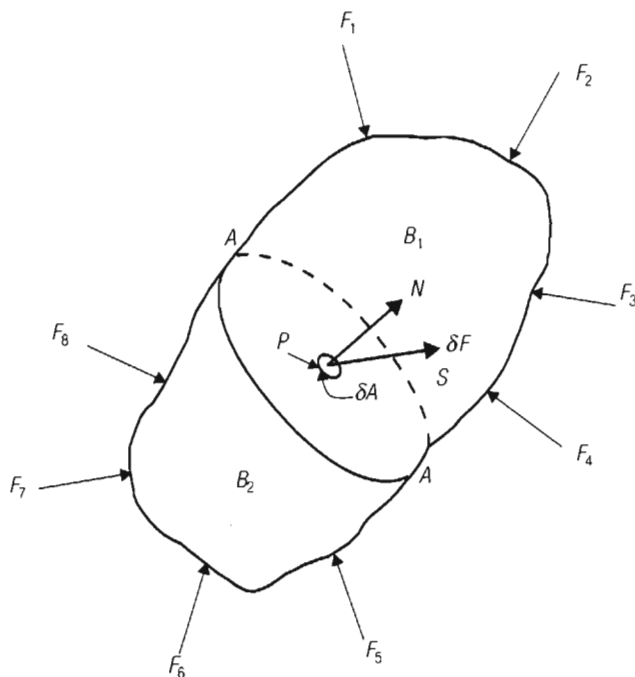


Figura 1.1.1. Cuerpo en condición de equilibrio de fuerzas.

El cuerpo está dividido en dos partes, B_1 y B_2 , por un plano A . Sobre la parte B_1 están actuando fuerzas externas, las cuales se equilibran con las fuerzas internas distribuidas sobre la sección transversal A , las que representan las acciones del material de la parte B_2 sobre el material de la parte B_1 . En el caso más general de la figura 1.1.1, el esfuerzo no está distribuido uniformemente sobre la superficie A . Si se considera una porción pequeña de área de esa superficie, δA , en la cual está contenido un punto P , y que las fuerzas dentro de esa pequeña área oscilan dentro de un intervalo de valores δF , entonces el cociente

$$S = \frac{\delta F}{\delta A} \quad (1.1.1)$$

$$\delta A \rightarrow 0$$

es el esfuerzo promedio en el área δA en cuestión. El valor límite del cociente de la ecuación 1.1.1 es la magnitud del esfuerzo que actúa sobre la sección transversal A en el punto P . En el caso más general, la dirección del esfuerzo está inclinada respecto de la superficie δA y la orientación de δF y S coinciden como se indica en la figura 1.1.1. Para un estado dado de esfuerzos sobre el cuerpo, la dirección y magnitud del esfuerzo resultante S son una función de la posición del punto P en el cuerpo y de la orientación del plano. El plano pasa por el punto en cuestión y es identificado por su normal N . Si el punto P del cuerpo es el mismo, la dirección y magnitud de S varían al cambiar la orientación del plano.

El esfuerzo resultante S se puede descomponer en una componente de esfuerzo normal al plano, σ , y en una componente de esfuerzo cortante, τ , tangencial al plano.

1.2. Componentes cartesianas de esfuerzos

Se pueden obtener componentes cartesianas del esfuerzo resultante S . Con este propósito, considere un elemento cúbico de volumen, un vértice P que está situado a una distancia infinitesimal del origen O del sistema cartesiano x, y, z y sus caras son paralelas a los ejes coordenados (figura 1.2.1). Se designan por σ los esfuerzos normales a las caras del cubo y por τ los esfuerzos tangenciales (cortantes) a las mismas caras. Los planos normales a los ejes x, y, z se designan como planos x, y, z , respectivamente. Los esfuerzos normales a estos planos son los esfuerzos $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$. Los esfuerzos cortantes en cada cara del cubo se resuelven en dos componentes paralelas a los ejes coordenados. Cada esfuerzo cortante tiene dos índices, el primero identifica el plano sobre el que está actuando y el segundo indica la dirección del eje coordenado al cual es paralelo. Por ejemplo, si una componente actúa sobre un plano x y su dirección es paralela al eje y , se representará por τ_{xy} ; y si actúa sobre el mismo plano pero en la dirección z , se tendrá la componente τ_{xz} . Los esfuerzos cortantes en las seis caras del cubo son $\tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zy}, \tau_{zx}, \tau_{xz}$.

El signo de los esfuerzos normales es positivo, si produce tensión; y negativo, si produce compresión sobre el elemento de volumen. Las componentes de esfuerzo cortante son positivas en cualquier cara del cubo, si su dirección coincide con las direcciones positivas de los ejes coordenados y si un esfuerzo de tensión sobre la misma cara tiene la dirección positiva del eje correspondiente. Éste es el caso de los esfuerzos cortantes que actúan sobre las caras visibles del cubo de la figura 1.2.1. Son también positivas las componentes de esfuerzo de corte que coinciden con las

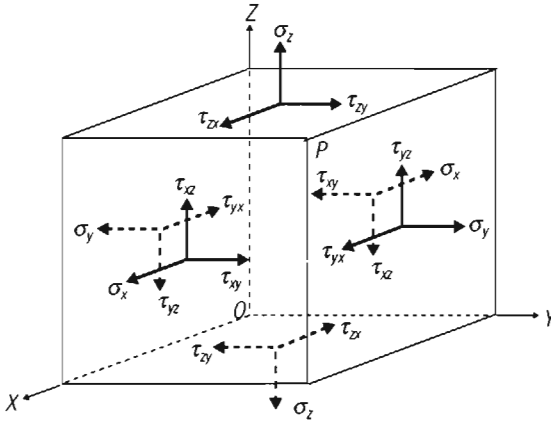


Figura 1.2.1. Estado de esfuerzos en un elemento cúbico de volumen.

direcciones negativas de los ejes coordenados, si el esfuerzo de tracción coincide con la dirección negativa del eje correspondiente. Éste es el caso de los esfuerzos cortantes que actúan sobre las caras ocultas del cubo de la figura 1.2.1.

Las componentes de esfuerzo que actúan en el elemento cúbico se pueden ordenar en una matriz:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

Observe que en la matriz de esfuerzos, las componentes de cada línea representan los esfuerzos que actúan en un mismo plano, por ejemplo, en el plano x actúan los esfuerzos σ_x , τ_{xy} , τ_{xz} ; en tanto que las componentes en cada columna representan los esfuerzos que actúan en la misma dirección, por ejemplo, en la dirección x actúan los esfuerzos σ_x , τ_{yx} , τ_{zx} .

1.3. Componentes de esfuerzo en un punto

La figura 1.2.1 muestra que para las seis caras del cubo son necesarias tres cantidades para denotar los esfuerzos normales σ_x , σ_y , σ_z , y seis cantidades para denotar los esfuerzos cortantes τ_{xy} , τ_{yx} , τ_{yz} , τ_{zy} , τ_{zx} , τ_{xz} . Es fácil demostrar que son suficientes tres cantidades para denotar las componentes cortantes.

Si se proyecta el elemento cúbico de volumen sobre el plano xz , solamente los esfuerzos que aparecen en la figura 1.3.1 pueden producir momentos respecto de una línea E paralela al eje y .

Las fuerzas que actúan sobre las caras de la figura 1.3.1 son el producto del esfuerzo cortante por el área de la cara del cubo. Si las dimensiones del cubo son dx , dy , dz , la ecuación de equilibrio de momentos para este elemento de volumen respecto del eje E es

$$\tau_{xz} dy dz \left(\frac{1}{2} dx \right) = \tau_{zx} dx dy \left(\frac{1}{2} dz \right)$$

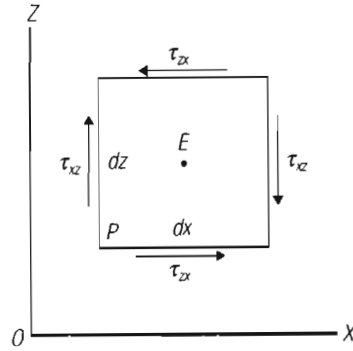


Figura 1.3.1. Momentos de fuerza respecto de la línea *E* paralela al eje *y* (Timoshenko y Goodier, 1988).

De donde resulta

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}$$

En forma similar, proyectando el elemento de volumen sobre el plano *xy* así como sobre el plano *yz*, se obtienen otras dos ecuaciones similares a la anterior. Resumiendo, las tres ecuaciones son

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}; \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad (1.3.1)$$

Las ecuaciones 1.3.1 significan que, para dos caras perpendiculares de un elemento cúbico, las componentes de esfuerzo cortante perpendiculares a la línea de intersección de las caras son iguales.

Las seis cantidades $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$, que reciben el nombre de componentes de esfuerzo, describen en forma suficiente los esfuerzos en el punto que actúan sobre los planos coordenados.

1.4. Determinación de las componentes de esfuerzo en un punto

El esfuerzo resultante *S* de la figura 1.4.1 se puede proyectar sobre los ejes de un sistema cartesiano para obtener las componentes de esfuerzo respectivas. Para hacer más fácil este ejercicio, se va a considerar que un plano inclinado corta a los ejes

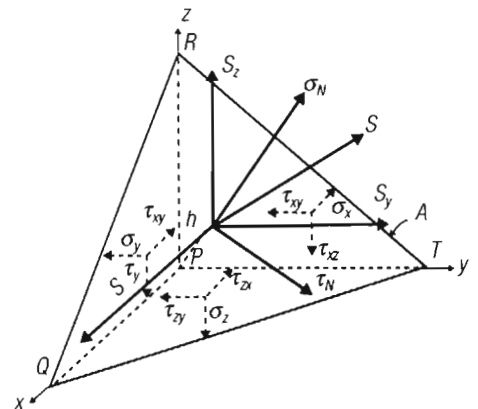


Figura 1.4.1. Esfuerzos en el punto *P* de un elemento infinitesimal tetraédrico (Dally y Riley, 1991).

coordinados en los puntos QRT y forma con los planos xyz un tetraedro; en el origen de los ejes se localiza el punto P (figura 1.4.1). Si el área de la superficie QRT se representa por A y N es la normal a este plano, entonces

$$\cos(N, x) = l; \quad \cos(N, y) = m; \quad \cos(N, z) = n \quad (1.4.1)$$

Estas expresiones se denominan *cosenos directrices*. En paréntesis se representa el ángulo que forma la normal con cada eje coordenado. Las áreas de las otras tres caras del tetraedro son

$$Al; \quad Am; \quad An$$

Las componentes de esfuerzo de S en las direcciones de los ejes coordenados, S_x , S_y y S_z , se obtienen estableciendo ecuaciones de equilibrio de fuerzas en las tres direcciones de los ejes coordenados. Para el eje x , resulta:

$$S_x A - \sigma_x Al - \tau_{yx} Am - \tau_{zx} An = 0$$

Eliminando el factor común A de los términos de la ecuación anterior y despejando S_x :

$$S_x = \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n \quad (1.4.2a)$$

Las ecuaciones de equilibrio para los ejes y , z son

$$S_y = \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n \quad (1.4.2b)$$

$$S_z = \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n \quad (1.4.2c)$$

La magnitud del esfuerzo S se puede determinar una vez que se conocen los valores de S_x , S_y y S_z mediante el teorema de Pitágoras

$$|S| = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2} \quad (1.4.3)$$

La dirección de S la definen los cosenos directrices

$$\cos(S, x) = \frac{S_x}{S}; \quad \cos(S, y) = \frac{S_y}{S}; \quad \cos(S, z) = \frac{S_z}{S} \quad (1.4.4)$$

1.5. Componentes normal y tangencial de esfuerzo

El esfuerzo S se puede descomponer en un esfuerzo normal σ_N que coincide con la normal N al plano QRT y en un esfuerzo cortante τ_N tangencial al mismo plano (figura 1.4.1).

El esfuerzo σ_N usualmente se determina sumando las proyecciones S_x , S_y , S_z sobre la normal N . Por eso

$$\sigma_N = S_x l + S_y m + S_z n \quad (1.5.1)$$

El esfuerzo τ_N se determina entonces mediante el teorema de Pitágoras

$$\tau_N = \sqrt{S^2 - \sigma_N^2} \quad (1.5.2)$$

Un procedimiento alternativo para calcular ambos esfuerzos es mediante funciones trigonométricas

$$\sigma_N = |S| \cos(S, N) \quad (1.5.3)$$

$$\tau_N = |S| \operatorname{sen}(S, N) \quad (1.5.4)$$

El ángulo (S, N) , formado por el esfuerzo S y por la normal al plano N , se determina mediante la relación trigonométrica

$$\cos(S, N) = \cos(S, x)l + \cos(S, y)m + \cos(S, z)n \quad (1.5.5)$$

1.6. Ecuaciones de transformación de esfuerzos. Estado tridimensional

La ecuación 1.4.3 permite determinar el esfuerzo resultante S que actúa en un plano arbitrario definido por la normal N . En ocasiones es necesario determinar S no solamente a partir de las componentes de esfuerzo $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$, que se refieren al sistema coordenado $Oxyz$, sino a partir de las componentes de esfuerzo $\sigma_{x_1}, \sigma_{y_1}, \sigma_{z_1}, \tau_{x_1y_1}, \tau_{y_1z_1}, \tau_{z_1x_1}$, que están referidas a un sistema coordenado $Ox_1y_1z_1$. Se derivan a continuación las ecuaciones para realizar esta transformación.

La figura 1.6.1 presenta un elemento tetraédrico similar al de la figura 1.4.1. El plano inclinado está definido por la normal N_1 , cuya dirección coincide con la dirección de x_1 ; en este plano inclinado yacen dos direcciones mutuamente perpendiculares, N_2 y N_3 , y perpendiculares también a N_1 . El esfuerzo S puede resolverse en componentes a lo largo de las direcciones N_1, N_2, N_3 , para obtener así esfuerzos $\sigma_{N_1}, \tau_{N_1N_2}, \tau_{N_1N_3}$. Estos esfuerzos se obtienen a partir de las componentes de S en la dirección de los ejes cartesianos S_x, S_y, S_z .

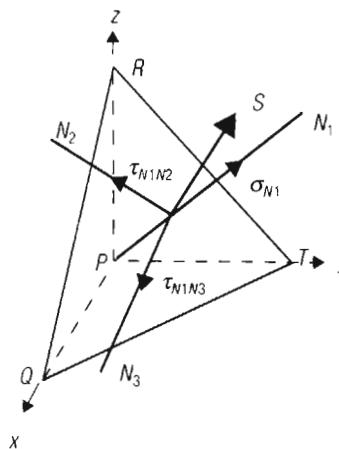


Figura 1.6.1. Direcciones normal, N_1 , y tangenciales, N_2 y N_3 , al plano QRT (Dally y Riley, 1991).

En el desarrollo siguiente, los cosenos directrices l , m , n , dados por la ecuación 1.4.1, se modifican haciendo $N = N_1$:

$$\cos(N_1, x) = l; \quad \cos(N_1, y) = m; \quad \cos(N_1, z) = n \quad (1.4.1a)$$

Por tanto, la ecuación 1.5.1 cambia a:

$$\sigma_{N_1} = S_x \cos(N_1, x) + S_y \cos(N_1, y) + S_z \cos(N_1, z) \quad (1.5.1a)$$

Para los esfuerzos cortantes se cambia N_1 en 1.5.1a por la dirección de éstos: N_2 y N_3 :

$$\tau_{N_1 N_2} = S_x \cos(N_2, x) + S_y \cos(N_2, y) + S_z \cos(N_2, z)$$

$$\tau_{N_1 N_3} = S_x \cos(N_3, x) + S_y \cos(N_3, y) + S_z \cos(N_3, z)$$

Se aplican las expresiones 1.4.2 para S_x , S_y y S_z en las ecuaciones anteriores:

$$\begin{aligned} \sigma_{N_1} = & \sigma_x \cos^2(N_1, x) + \sigma_y \cos^2(N_1, y) + \sigma_z \cos^2(N_1, z) + 2\tau_{xy} \cos(N_1, x) \cos(N_1, y) + \\ & + 2\tau_{yz} \cos(N_1, y) \cos(N_1, z) + 2\tau_{zx} \cos(N_1, x) \cos(N_1, z) \end{aligned} \quad (1.6.1a)$$

$$\begin{aligned} \tau_{N_1 N_2} = & \sigma_x \cos(N_1, x) \cos(N_2, x) + \sigma_y \cos(N_1, y) \cos(N_2, y) + \sigma_z \cos(N_1, z) \cos(N_2, z) + \\ & + \tau_{xy} [\cos(N_1, x) \cos(N_2, y) + \cos(N_1, y) \cos(N_2, x)] + \\ & + \tau_{yz} [\cos(N_1, y) \cos(N_2, z) + \cos(N_1, z) \cos(N_2, y)] + \\ & + \tau_{zx} [\cos(N_1, z) \cos(N_2, x) + \cos(N_1, x) \cos(N_2, z)] \end{aligned} \quad (1.6.1b)$$

$$\begin{aligned} \tau_{N_1 N_3} = & \sigma_x \cos(N_1, x) \cos(N_3, x) + \sigma_y \cos(N_1, y) \cos(N_3, y) + \sigma_z \cos(N_1, z) \cos(N_3, z) + \\ & + \tau_{xy} [\cos(N_1, x) \cos(N_3, y) + \cos(N_1, y) \cos(N_3, x)] + \\ & + \tau_{yz} [\cos(N_1, y) \cos(N_3, z) + \cos(N_1, z) \cos(N_3, y)] + \\ & + \tau_{zx} [\cos(N_1, z) \cos(N_3, x) + \cos(N_1, x) \cos(N_3, z)] \end{aligned} \quad (1.6.1c)$$

Las expresiones 1.6.1 permiten derivar las ecuaciones para determinar los esfuerzos normales y cortantes respecto de los ejes $x_1 y_1 z_1$.

Para determinar σ_{x_1} se selecciona un plano que corte al eje x_1 (plano x_1) de manera que la normal a este plano, N_1 , coincida con el eje x_1 . La ecuación para determinar el esfuerzo normal asociado a este plano se obtiene sustituyendo en la ecuación 1.6.1a N_1 por x_1 .

$$\begin{aligned} \sigma_{x_1} = & \sigma_x \cos^2(x_1, x) + \sigma_y \cos^2(x_1, y) + \sigma_z \cos^2(x_1, z) + 2\tau_{xy} \cos(x_1, x) \cos(x_1, y) + \\ & + 2\tau_{yz} \cos(x_1, y) \cos(x_1, z) + 2\tau_{zx} \cos(x_1, z) \cos(x_1, x) \end{aligned} \quad (1.6.2a)$$

Los esfuerzos normales σ_{y_1} y σ_{z_1} se obtienen sustituyendo en la ecuación 1.6.1a N_1 por y_1 , z_1 , respectivamente

$$\begin{aligned}\sigma_{y_1} = & \sigma_x \cos^2(y_1, x) + \sigma_y \cos^2(y_1, y) + \sigma_z \cos^2(y_1, z) + 2\tau_{xy} \cos(y_1, x) \cos(y_1, y) + \\ & + 2\tau_{yz} \cos(y_1, y) \cos(y_1, z) + 2\tau_{zx} \cos(y_1, z) \cos(y_1, x)\end{aligned}\quad (1.6.2b)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{z_1} = & \sigma_x \cos^2(z_1, x) + \sigma_y \cos^2(z_1, y) + \sigma_z \cos^2(z_1, z) + 2\tau_{xy} \cos(z_1, x) \cos(z_1, y) + \\ & + 2\tau_{yz} \cos(z_1, y) \cos(z_1, z) + 2\tau_{zx} \cos(z_1, z) \cos(z_1, x)\end{aligned}\quad (1.6.2c)$$

Las ecuaciones para determinar las componentes de esfuerzo cortantes se obtienen haciendo coincidir la dirección de la normal N_2 contenida en el plano x_1 , definido anteriormente, con la dirección y_1 . Se sustituye en la ecuación 1.6.1b N_1 por x_1 , así como N_2 por y_1 .

$$\begin{aligned}\tau_{x_1 y_1} = & \sigma_x \cos(x_1, x) \cos(y_1, x) + \sigma_y \cos(x_1, y) \cos(y_1, y) + \sigma_z \cos(x_1, z) \cos(y_1, z) + \\ & + \tau_{xy} [\cos(x_1, x) \cos(y_1, y) + \cos(x_1, y) \cos(y_1, x)] + \\ & + \tau_{yz} [\cos(x_1, y) \cos(y_1, z) + \cos(x_1, z) \cos(y_1, y)] + \\ & + \tau_{zx} [\cos(x_1, z) \cos(y_1, x) + \cos(x_1, x) \cos(y_1, z)]\end{aligned}\quad (1.6.2d)$$

lo cual hace coincidir la dirección N_3 que yace en el plano x_1 con la dirección z_1 . Se sustituye en la ecuación 1.6.1c N_1 por y_1 tanto en el índice del primer miembro como en los cosenos directrices l, m, n (referirse a la ecuación 1.4.1a), así como N_3 por z_1 ; se obtiene:

$$\begin{aligned}\tau_{y_1 z_1} = & \sigma_x \cos(y_1, x) \cos(z_1, x) + \sigma_y \cos(y_1, y) \cos(z_1, y) + \sigma_z \cos(y_1, z) \cos(z_1, z) + \\ & + \tau_{xy} [\cos(y_1, x) \cos(z_1, y) + \cos(y_1, y) \cos(z_1, x)] + \\ & + \tau_{yz} [\cos(y_1, y) \cos(z_1, z) + \cos(y_1, z) \cos(z_1, y)] + \\ & + \tau_{zx} [\cos(y_1, z) \cos(z_1, x) + \cos(y_1, x) \cos(z_1, z)]\end{aligned}\quad (1.6.2e)$$

Finalmente, para obtener la ecuación para determinar el esfuerzo cortante $\tau_{z_1 x_1}$ se propone sustituir en la ecuación anterior y_1 por z_1 , así como z_1 por x_1 [se puede obtener el mismo resultado si en la ecuación 1.6.2d se sustituye x_1 por z_1 , así como y_1 por x_1]; entonces:

$$\begin{aligned}\tau_{z_1 x_1} = & \sigma_x \cos(z_1, x) \cos(x_1, x) + \sigma_y \cos(z_1, y) \cos(x_1, y) + \sigma_z \cos(z_1, z) \cos(x_1, z) + \\ & + \tau_{xy} [\cos(z_1, x) \cos(x_1, y) + \cos(z_1, y) \cos(x_1, x)] + \\ & + \tau_{yz} [\cos(z_1, y) \cos(x_1, z) + \cos(z_1, z) \cos(x_1, y)] +\end{aligned}$$

$$+\tau_{zx}[\cos(z_1, z)\cos(x_1, x) + \cos(z_1, x)\cos(x_1, z)] \quad (1.6.2f)$$

Las ecuaciones 1.12 permiten transformar las seis componentes del esfuerzo S en el sistema coordenado $Oxyz$, en las componentes cartesianas del esfuerzo S_1 , en el sistema cartesiano $O_1x_1y_1z_1$.

1.7. Esfuerzos principales

El valor del esfuerzo resultante S en un punto P depende de la elección del plano sobre el que actúa el esfuerzo. Suponga que el plano QRT gira alrededor del punto P hasta que alcanza una posición en la cual los esfuerzos cortantes se desvanecen. Para un estado de esfuerzos dado, siempre es posible encontrar tres planos mutuamente perpendiculares en los cuales los esfuerzos cortantes valen cero; los esfuerzos resultantes son perpendiculares a los planos sobre los que actúan y reciben el nombre de *esfuerzos principales*. Los planos se denominan *planos principales* y las direcciones normales a estos planos son los *ejes principales*. El estado de esfuerzos en un punto está completamente definido cuando se conocen las magnitudes y las direcciones de los tres esfuerzos principales.

Suponga que en la figura 1.7.1, el plano QRT es un plano principal de esfuerzos, y por tanto el esfuerzo resultante, σ_N , es normal al plano. Las componentes sobre los ejes coordenados xyz se determinan a partir de la geometría de la figura 1.7.1 como sigue:

$$S_x = \sigma_N l; \quad S_y = \sigma_N m; \quad S_z = \sigma_N n \quad (i)$$

donde

$$S = \sigma_N$$

Utilizando las ecuaciones i en las ecuaciones 1.4.2a, 1.4.2b y 1.4.2c resulta

$$\begin{aligned} \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n &= \sigma_N l \\ \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n &= \sigma_N m \\ \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n &= \sigma_N n \end{aligned} \quad (ii)$$

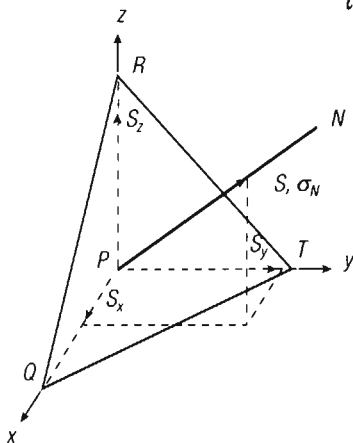


Figura 1.7.1. Las direcciones de los esfuerzos σ_N y S coinciden.

Reordenando las ecuaciones ii se obtiene

$$\begin{aligned} (\sigma_N - \sigma_x)l - \tau_{yx}m - \tau_{zx}n &= 0 \\ -\tau_{xy}l + (\sigma_N - \sigma_y)m - \tau_{zy}n &= 0 \\ -\tau_{xz}l - \tau_{yz}m + (\sigma_N - \sigma_z)n &= 0 \end{aligned} \quad (\text{iii})$$

Resolviendo las ecuaciones iii para uno de los cosenos directrices, por ejemplo l , resulta:

$$l = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -\tau_{yx} & -\tau_{zx} \\ 0 & (\sigma_N - \sigma_y) & -\tau_{zy} \\ 0 & -\tau_{yz} & (\sigma_N - \sigma_z) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (\sigma_N - \sigma_x) & -\tau_{yx} & -\tau_{zx} \\ -\tau_{xy} & (\sigma_N - \sigma_y) & -\tau_{zy} \\ -\tau_{xz} & -\tau_{yz} & (\sigma_N - \sigma_z) \end{vmatrix}}$$

Las únicas soluciones no triviales son las que se pueden obtener igualando el determinante de los coeficientes de los cosenos directrices con cero

$$\begin{vmatrix} (\sigma_N - \sigma_x) & -\tau_{yx} & -\tau_{zx} \\ -\tau_{xy} & (\sigma_N - \sigma_y) & -\tau_{zy} \\ -\tau_{xz} & -\tau_{yz} & (\sigma_N - \sigma_z) \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante, eliminando el índice N del esfuerzo σ y aplicando las ecuaciones 1.3.1, se obtiene

$$\begin{aligned} \sigma^3 - (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\sigma^2 + (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2)\sigma - \\ - (\sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2) = 0 \end{aligned} \quad (1.7.1)$$

Las soluciones de esta ecuación cúbica son los tres esfuerzos principales $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. En el apéndice A de este capítulo se muestra con un ejemplo el procedimiento para determinar los valores de los esfuerzos principales. Para determinar la dirección en que actúa cada uno de los esfuerzos principales en relación con los ejes originales x, y, z , es necesario sustituir σ_N en las tres ecuaciones ii por cada uno de los esfuerzos $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, al mismo tiempo, y resolver en forma simultánea para l, m, n con el auxilio de la relación $l^2 + m^2 + n^2 = 1$.

Se observa en la ecuación 1.7.1 que los coeficientes de la ecuación cúbica son combinaciones de las componentes de esfuerzo. Para un estado determinado de esfuerzos, los valores de los esfuerzos $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ son independientes del sistema coordenado empleado; por eso, los coeficientes formados por las componentes de esfuerzo deben ser invariantes o independientes del sistema coordenado. En consecuencia es posible escribir las expresiones siguientes

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_{x_1} + \sigma_{y_1} + \sigma_{z_1} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \quad (1.7.2a)$$

$$I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - [\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2]$$

$$I_2 = \sigma_{x_1} \sigma_{y_1} + \sigma_{y_1} \sigma_{z_1} + \sigma_{z_1} \sigma_{x_1} - [\tau_{x_1 y_1}^2 + \tau_{y_1 z_1}^2 + \tau_{z_1 x_1}^2] = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1 \quad (1.7.2b)$$

$$I_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - [\sigma_x \tau_{yz}^2 + \sigma_y \tau_{zx}^2 + \sigma_z \tau_{xy}^2]$$

$$I_3 = \sigma_{x_1} \sigma_{y_1} \sigma_{z_1} + 2\tau_{x_1 y_1} \tau_{y_1 z_1} \tau_{z_1 x_1} - [\sigma_{x_1} \tau_{y_1 z_1}^2 + \sigma_{y_1} \tau_{z_1 x_1}^2 + \sigma_{z_1} \tau_{x_1 y_1}^2] = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \quad (1.7.2c)$$

Si se escribe el determinante

$$\begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

la primera invariante de esfuerzo I_1 es igual a la traza de la matriz; la segunda invariante I_2 es igual a la suma de los menores principales:

$$I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

y la tercera invariante I_3 es igual al determinante de la matriz.

1.8. Esfuerzos cortantes principales

En el desarrollo de las ecuaciones para determinar los esfuerzos cortantes principales se van a utilizar las direcciones principales de esfuerzo en las cuales $\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$. En la ecuación 1.5.2, se eleva al cuadrado:

$$\tau_N^2 = S^2 - \sigma_N^2 \quad (i)$$

La resultante de esfuerzo S en un plano oblicuo se determina mediante la ecuación 1.4.3. Se eleva al cuadrado:

$$S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 \quad (ii)$$

A continuación se aplican las expresiones 1.4.2 a ii para las componentes cartesianas de S tomando en cuenta que los esfuerzos cortantes valen cero y la equivalencia $\sigma_x = \sigma_1$; $\sigma_y = \sigma_2$; $\sigma_z = \sigma_3$; por eso:

$$S^2 = \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 \quad (1.8.1)$$

El esfuerzo normal σ_N en un plano oblicuo dado por la ecuación 1.6.1a con esfuerzos cortantes igual a cero es

$$\sigma_N = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2 \quad (1.8.2)$$

Aplicando 1.8.1 y 1.8.2 a i

$$\tau_N^2 = \left[\sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 \right] - \left[\sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2 \right]^2 \quad (1.8.3)$$

Si se grafica τ_N en función de l, m, n , se podrá observar que existen planos en los cuales τ_N alcanza valores máximos y mínimos. Por eso, para obtener estos valores máximos y mínimos se deriva la ecuación 1.8.3 respecto de cada uno de los cosenos directrices l, m, n y cada una de las ecuaciones resultantes se iguala a cero. Se detalla a continuación el procedimiento; se empleará como apoyo la ecuación

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1 \quad (iii)$$

Se elimina uno de los cosenos directrices en iii, por ejemplo, n :

$$n^2 = 1 - (l^2 + m^2) \quad (iv)$$

Se aplica iv a 1.8.3:

$$\tau_N^2 = \left\{ \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 \left[1 - (l^2 + m^2) \right] \right\} - \left\{ \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 \left[1 - (l^2 + m^2) \right] \right\}^2$$

Desarrollando y agrupando términos:

$$\tau_N^2 = \left\{ (\sigma_1^2 - \sigma_3^2) l^2 + (\sigma_2^2 - \sigma_3^2) m^2 + \sigma_3^2 \right\} - \left\{ (\sigma_1 - \sigma_3) l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3) m^2 + \sigma_3 \right\}^2 \quad (v)$$

Derivando parcialmente τ_N con respecto a l e igualando a cero en la ecuación v

$$\frac{\partial \tau_N}{\partial l} = 2(\sigma_1^2 - \sigma_3^2)l - 2\left[(\sigma_1 - \sigma_3)l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)m^2 + \sigma_3 \right] 2l(\sigma_1 - \sigma_3) = 0$$

Eliminando el factor común 2 y desarrollando en sus factores el producto $(\sigma_1^2 - \sigma_3^2)$:

$$\frac{\partial \tau_N}{\partial l} = (\sigma_1 - \sigma_3)(\sigma_1 + \sigma_3)l - \left[(\sigma_1 - \sigma_3)l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)m^2 + \sigma_3 \right] 2l(\sigma_1 - \sigma_3) = 0$$

Eliminando el factor común $(\sigma_1 - \sigma_3)$:

$$\frac{\partial \tau_N}{\partial l} = (\sigma_1 + \sigma_3)l - \left[(\sigma_1 - \sigma_3)l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)m^2 + \sigma_3 \right] 2l = 0$$

Efectuando el producto σ_3 por $2l$ y sacándolo del paréntesis:

$$\frac{\partial \tau_N}{\partial l} = \sigma_1 l + \sigma_3 l - 2\sigma_3 l - 2l \left[(\sigma_1 - \sigma_3)l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)m^2 \right] = 0$$

Simplificando $\sigma_3 l - 2\sigma_3 l$:

$$\frac{\partial \tau_N}{\partial l} = (\sigma_1 - \sigma_3)l - 2l \left[(\sigma_1 - \sigma_3)l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)m^2 \right] = 0$$

Factorizando $2l$, eliminando el factor 2 y manteniendo como factor común l :

$$\frac{\partial \tau_N}{\partial l} = l \left[\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) - (\sigma_1 - \sigma_3)l^2 - (\sigma_2 - \sigma_3)m^2 \right] = 0 \quad (vi)$$

Igualmente, derivando parcialmente τ_N con respecto a m e igualando a cero, en la ecuación v resulta:

$$\frac{\partial \tau_N}{\partial m} = m \left[\frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3) - (\sigma_1 - \sigma_3)l^2 - (\sigma_2 - \sigma_3)m^2 \right] = 0 \quad (\text{vii})$$

Se va a eliminar ahora l de la ecuación iii:

$$l^2 = 1 - (m^2 + n^2)$$

Como se procedió en la obtención de las ecuaciones vi y vii, se aplica la ecuación anterior en 1.8.3; se simplifica la ecuación resultante y se deriva parcialmente τ_N con respecto a m ; se obtiene así:

$$\frac{\partial \tau_N}{\partial m} = m \left[\frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1) - (\sigma_2 - \sigma_1)m^2 - (\sigma_3 - \sigma_1)n^2 \right] = 0 \quad (\text{viii})$$

Se van a hacer cuatro intentos de solución.

1. Una primera aproximación es la siguiente: las ecuaciones vi y vii se satisfacen cuando los factores $l = 0$ y $m = 0$. Al utilizar estos valores en la ecuación iii resulta $n = \pm 1$. Cuando se aplican estos tres valores a la ecuación 1.8.3 se obtiene un valor $\tau_N = 0$, es decir, estas soluciones corresponden a un plano principal de esfuerzo.
2. Una segunda aproximación de solución se obtiene al utilizar $m = 0$ en la ecuación vi; resulta en esta forma un valor $l = \pm(1/2)^{1/2}$. Aplicando este par de valores en iii se obtiene $n = \pm(1/2)^{1/2}$. Se aplican estos tres valores en la ecuación 1.8.3 y se obtiene:

$$\tau_N^2 = \left(\frac{\sigma_1^2}{2} + 0 + \frac{\sigma_3^2}{2} \right) - \left(\frac{\sigma_1}{2} + 0 + \frac{\sigma_3}{2} \right)^2 = \left(\frac{\sigma_1^2}{2} + \frac{\sigma_3^2}{2} \right) - \left(\frac{\sigma_1^2}{4} + \frac{\sigma_1\sigma_3}{2} + \frac{\sigma_3^2}{4} \right)$$

Finalmente:

$$\tau_N = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (1.8.4a)$$

3. Se ensaya ahora una tercera solución: se aplica $l = 0$ a la ecuación vii y resulta $m = \pm(1/2)^{1/2}$. Aplicando estos dos valores a la ecuación iii se obtiene $n = \pm(1/2)^{1/2}$. Al utilizar estos tres valores en la ecuación 1.8.3 se obtiene:

$$\tau_N = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \quad (1.8.4b)$$

4. En la cuarta solución se asigna un valor $n = 0$ a la ecuación viii, y resulta $m = \pm(1/2)^{1/2}$. Utilizando estos dos valores en iii se obtiene $l = \pm(1/2)^{1/2}$. Aplicando los tres valores a la ecuación 1.8.3 resulta:

$$\tau_N = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad (1.8.4c)$$

σ_1 y σ_3 son los esfuerzos normales principales máximo y mínimo, respectivamente, por eso la ecuación 1.8.4a representa al esfuerzo cortante máximo $\tau_{\text{máx}}$:

$$\tau_{\text{máx}} = \tau_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (1.8.5a)$$

Es costumbre que al esfuerzo cortante principal se le asigne el índice complementario (en la serie 1, 2, 3) a los índices de los esfuerzos normales principales; observe la ecuación 1.8.5a. Asimismo,

$$\tau_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \quad (1.8.5b)$$

$$\tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad (1.8.5c)$$

Los esfuerzos normales principales se ordenan en la forma decreciente $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

Un resumen de los resultados anteriores se presenta en la tabla siguiente.

l	m	n	τ
$\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$	0	$\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\tau_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$
0	$\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\tau_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$
$\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$	0	$\tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$

Los esfuerzos cortantes actúan sobre planos que bisecan los ángulos que forman las direcciones principales de esfuerzo, como se aprecia en la figura 1.8.1.

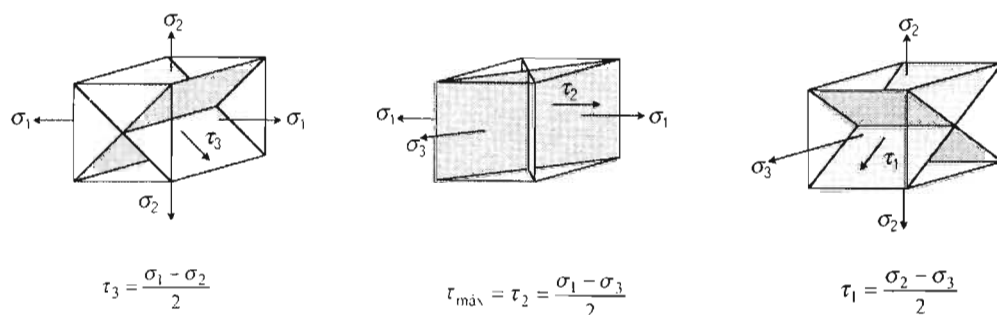


Figura 1.8.1. Planos principales de esfuerzos normales y esfuerzos cortantes (Dieter, 1988).

Ejercicio 1.8.1

1

Un punto de un cuerpo está sujeto al siguiente estado de esfuerzos: $\sigma_x = 70$ MPa, $\sigma_y = 65$ MPa, $\sigma_z = 55$ MPa, $\tau_{xy} = 30$ MPa, $\tau_{yz} = -30$ MPa, $\tau_{zx} = 25$ MPa.

Determine: a) la resultante S de estas componentes cartesianas; b) los esfuerzos normal σ_N y de corte τ_N sobre un plano cuya normal tiene los siguientes cosenos directrices: $\cos(N,x) = 0.480$, $\cos(N,y) = 0.600$ y

Ejercicio 1.8.1 (continuación)

2

$\cos(N,z) = 0.640$; c) los ángulos que forma S con los ejes cartesianos; d) el ángulo que forma S con la normal N .

Respuestas: a) resultante S .

De las ecuaciones 1.4.2

$$S_x = 70(0.48) + 30(0.6) + 25(0.64) = 33.6 + 18 + 16 = 67.6 \text{ MPa}$$

$$S_y = 30(0.48) + 65(0.6) + (-30)(0.64) = 14.4 + 39 - 19.2 = 34.2 \text{ MPa}$$

$$S_z = 25(0.48) + (-30)(0.6) + 55(0.64) = 12 - 18 + 35.2 = 29.2 \text{ MPa}$$

Aplicando la ecuación 1.4.3:

$$S = \sqrt{(67.6)^2 + (34.2)^2 + (29.2)^2} = \sqrt{4569.76 + 1169.64 + 852.64} = \sqrt{6592.04} = 81.2 \text{ MPa}$$

b) Los esfuerzos normal σ_N y de corte τ_N .

Utilizando la ecuación 1.5.1

$$\sigma_N = 67.6(0.48) + 34.2(0.6) + 29.2(0.64) = 32.45 + 20.52 + 18.69 = 71.7 \text{ MPa}$$

De la ecuación 1.5.2:

$$\tau_N = \sqrt{(81.2)^2 - (71.7)^2} = \sqrt{6593.44 - 5140.89} = \sqrt{1452.55} = 38.2 \text{ MPa}$$

c) Ángulos que forma S con los ejes cartesianos.

Empleando las ecuaciones 1.4.4

$$\cos(S,x) = \frac{S_x}{S} = \frac{67.6}{81.2} = 0.8325$$

$$(S,x) = 33.6^\circ$$

$$\cos(S,y) = \frac{34.2}{81.2} = 0.4212$$

$$(S,y) = 65.1^\circ$$

$$\cos(S,z) = \frac{29.2}{81.2} = 0.3596$$

$$(S,z) = 68.9^\circ$$

d) Ángulo que forma S con la normal.

Aplicando la ecuación 1.5.5

$$\cos(S,N) = (0.8325)(0.48) + (0.4212)(0.60) + (0.3596)(0.64) = 0.3996 + 0.2527 + 0.2301$$

$$\cos(S,N) = 0.8824$$

$$(S,N) = 28^\circ$$

1.9. Ecuaciones de transformación de esfuerzos mediante tensores. Estado tridimensional

Las técnicas del cálculo tensorial facilitan la transformación de esfuerzos de un sistema de coordenadas cartesianas a otro.

El ejemplo más sencillo es la transformación de un vector. El vector V tiene componentes V_1, V_2, V_3 sobre los ejes cartesianos x_1, x_2, x_3 . $V = V_1 i_1 + V_2 i_2 + V_3 i_3$, donde i_1, i_2, i_3 son vectores unitarios. La tarea es encontrar las componentes de V referidas a los ejes x'_1, x'_2, x'_3 . Se derivará la ecuación para realizar la transformación considerando que el nuevo sistema coordenado es el resultado de girar el sistema coordenado inicial respecto del eje x_3 (figura 1.9.1). Un caso más general implicaría un giro del sistema coordenado inicial con respecto al origen O ; el grado de dificultad es similar.

Las componentes cartesianas de V sobre los ejes x'_1, x'_2, x'_3 se obtienen sumando las proyecciones de V_1, V_2, V_3 , sobre cada uno de los nuevos ejes, en esta forma:

$$V'_1 = \cos(x'_1 x_1) V_1 + \cos(x'_1 x_2) V_2 + \cos(x'_1 x_3) V_3$$

En esta ecuación los cosenos directrices se van a identificar con la letra α , por lo que resulta:

$$\alpha_{11} = \cos(x'_1 x_1)$$

$$\alpha_{12} = \cos(x'_1 x_2)$$

$$\alpha_{13} = \cos(x'_1 x_3)$$

Utilizando esta notación en la ecuación anterior

$$V'_1 = \alpha_{11} V_1 + \alpha_{12} V_2 + \alpha_{13} V_3 \quad (a1)$$

$$V'_2 = \alpha_{21} V_1 + \alpha_{22} V_2 + \alpha_{23} V_3 \quad (a2)$$

$$V'_3 = \alpha_{31} V_1 + \alpha_{32} V_2 + \alpha_{33} V_3 \quad (a3)$$

Observe que el primer índice de α identifica al nuevo eje coordenado sobre el cual se encuentra la componente V' , en tanto que el segundo índice de α corresponde a los ejes iniciales desde donde se proyectan las componentes V_1, V_2, V_3 . Siguiendo el mismo procedimiento se encuentran las componentes V'_2 y V'_3 en los nuevos ejes coordenados.

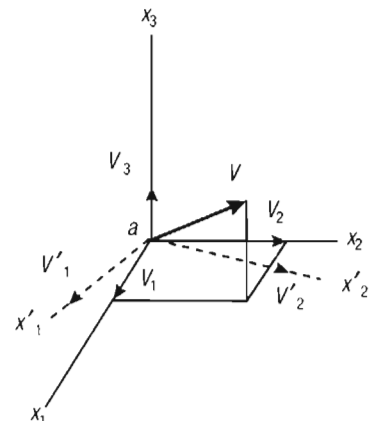


Figura 1.9.1. Transformación de ejes para un vector mediante tensores (Dieter, 1988).

En las ecuaciones $a1$, $a2$ y $a3$, el primer índice de los coeficientes α es el mismo en cada ecuación e igual al índice de la componente V' , el segundo índice de los coeficientes α es diferente en cada término e igual al índice de la componente V . Cada una de las ecuaciones $a1$, $a2$ y $a3$ se puede abreviar como sigue:

$$V'_1 = \sum_{j=1}^3 \alpha_{1j} V_j$$

$$V'_2 = \sum_{j=1}^3 \alpha_{2j} V_j$$

$$V'_3 = \sum_{j=1}^3 \alpha_{3j} V_j$$

Las tres ecuaciones anteriores se pueden resumir en una sola:

$$V'_i = \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} V_j \quad (i=1,2,3) = \alpha_{i1} V_1 + \alpha_{i2} V_2 + \alpha_{i3} V_3 \quad (b)$$

La ecuación b se puede compactar aún más:

$$V'_i = \alpha_{ij} V_j \quad (c)$$

La forma compacta de representar las componentes de un vector, ecuación c , es la notación tensorial.

En la notación tensorial, cuando un índice aparece dos veces en un mismo término, como es el caso de j que se encuentra en α y también en V , significa que existen j términos en la ecuación que se suman incrementando j en una unidad de un término al siguiente desde 1 hasta 3, como se observa en la ecuación extendida (b) ; j recibe el nombre de índice nominal.

En esta notación, el sufijo i aparece una sola vez en un mismo término, en α , lo cual significa que existe una ecuación para cada valor de i al desdoblarse la notación tensorial; i recibe el nombre de *índice fijo*.

Se pueden utilizar diferentes letras como índices y el significado no cambia, por ejemplo:

$$V'_s = \alpha_{sp} V_p$$

El número de componentes que son necesarias para determinar un tensor es igual a 3^n , donde n es el orden del tensor. Un escalar es un tensor de orden cero y tiene una sola componente; un vector es de orden 1 y tiene tres componentes; un esfuerzo tiene nueve componentes, como se observa en el elemento cúbico de la figura 1.2.1, y es un tensor de orden 2. Las constantes elásticas que relacionan el esfuerzo con la deformación son un tensor de orden 4 y totalizan 81 componentes.

El desarrollo de la notación compacta, ecuación c , en ecuaciones extendidas [ecuaciones $a1$, $a2$ y $a3$] no debe representar dificultad alguna si se siguen las reglas de los índices expuestas con anterioridad.

Dos ejercicios permitirán un mejor dominio de las técnicas de compactación y extensión de ecuaciones y de transformación de tensores por cambio de ejes.

Suponga que se multiplica el vector P por el vector Q ; el producto resultante es un tensor de segundo orden R :

$$R_{ik} = \begin{vmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Q_1 & Q_2 & Q_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P_1 Q_1 & P_1 Q_2 & P_1 Q_3 \\ P_2 Q_1 & P_2 Q_2 & P_2 Q_3 \\ P_3 Q_1 & P_3 Q_2 & P_3 Q_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix} \quad (d)$$

Se van a transformar los vectores P y Q , que están referidos a los ejes x_1, y_2, z_3 , en vectores P' y Q' , en nuevos ejes x_1', y_2', z_3' , y el producto de los vectores se transforma de R_{ik} a R_{jl}' . Las componentes en los nuevos ejes son ahora P_1', P_2', P_3' y Q_1', Q_2', Q_3' . Conforme a las reglas de los índices:

$$P_j' = \alpha_{ji} P_i; \quad Q_l' = \alpha_{lk} Q_k$$

Al multiplicar estos dos vectores resulta:

$$P_j' Q_l' = (\alpha_{ji} P_i) (\alpha_{lk} Q_k) \\ R_{jl}' = \alpha_{ji} \alpha_{lk} R_{ik} \quad (e)$$

Observe que los índices fijos de los coeficientes jl de α son los índices de R' en los nuevos ejes y que los índices nominales ik son los índices de R .

En este ejemplo suponga que un tensor de esfuerzos σ_{pq} por transformación de ejes cambia a σ_{rs} ; una vez realizada la transformación se va a extender la ecuación tensorial. El tensor de esfuerzos inicial en forma matricial es

$$\sigma_{pq} = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix}$$

Al realizarse la transformación de ejes, de acuerdo con la ecuación e

$$\sigma_{rs} = \alpha_{rp} \alpha_{sq} \sigma_{pq} \quad (f)$$

f es la ecuación de transformación del tensor de esfuerzos por cambio de ejes. Como se dijo anteriormente, los índices nominales pq indican sumatoria de términos en la misma ecuación, y los esfuerzos fijos rs indican el número de ecuación. Se expande la ecuación con respecto a $q = 1, 2, 3$:

$$\sigma_{rs} = \alpha_{rp} \alpha_{s1} \sigma_{p1} + \alpha_{rp} \alpha_{s2} \sigma_{p2} + \alpha_{rp} \alpha_{s3} \sigma_{p3}$$

Se expande ahora la ecuación con respecto a $p = 1, 2, 3$:

$$\sigma_{rs} = \alpha_{r1} \alpha_{s1} \sigma_{11} + \alpha_{r1} \alpha_{s2} \sigma_{12} + \alpha_{r1} \alpha_{s3} \sigma_{13} + \\ + \alpha_{r2} \alpha_{s1} \sigma_{21} + \alpha_{r2} \alpha_{s2} \sigma_{22} + \alpha_{r2} \alpha_{s3} \sigma_{23} + \\ + \alpha_{r3} \alpha_{s1} \sigma_{31} + \alpha_{r3} \alpha_{s2} \sigma_{32} + \alpha_{r3} \alpha_{s3} \sigma_{33} \quad (g)$$

La ecuación para determinar el esfuerzo normal en el eje x_1' se obtiene aplicando $r = 1$ y $s = 1$ en g .

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = & \alpha_{11}\alpha_{11}\sigma_{11} + \alpha_{11}\alpha_{12}\sigma_{12} + \alpha_{12}\alpha_{13}\sigma_{13} + \\ & + \alpha_{12}\alpha_{11}\sigma_{21} + \alpha_{12}\alpha_{12}\sigma_{22} + \alpha_{12}\alpha_{13}\sigma_{23} + \\ & + \alpha_{13}\alpha_{11}\sigma_{31} + \alpha_{13}\alpha_{12}\sigma_{32} + \alpha_{13}\alpha_{13}\sigma_{33} \end{aligned}$$

Se desea determinar ahora el esfuerzo cortante en el plano x_2' y dirección x_1' ; entonces se requiere aplicar $r = 2, s = 1$ en la ecuación g:

$$\begin{aligned} \sigma_{21} = & \alpha_{21}\alpha_{11}\sigma_{11} + \alpha_{21}\alpha_{12}\sigma_{12} + \alpha_{21}\alpha_{13}\sigma_{13} + \\ & + \alpha_{22}\alpha_{11}\sigma_{21} + \alpha_{22}\alpha_{12}\sigma_{22} + \alpha_{22}\alpha_{13}\sigma_{23} + \\ & + \alpha_{23}\alpha_{11}\sigma_{31} + \alpha_{23}\alpha_{12}\sigma_{32} + \alpha_{23}\alpha_{13}\sigma_{33} \end{aligned}$$

Es importante enfatizar que en los cosenos directrices representados por los coeficientes α , los índices fijos representan los nuevos ejes, en tanto que los índices nominales identifican los ejes iniciales. Los esfuerzos en el segundo miembro de la ecuación son los esfuerzos del sistema coordinado inicial, y el esfuerzo, en el primer miembro, es por supuesto el esfuerzo en los nuevos ejes.

En este punto no debe implicar mayor dificultad para el lector establecer la ecuación de transformación de un tensor de tercer orden

$$T_{pqr} = \alpha_{ps}\alpha_{qt}\alpha_{ru}T_{stu}$$

y la ecuación de transformación de un tensor de cuarto orden es:

$$T_{pqrs} = \alpha_{pt}\alpha_{qu}\alpha_{rv}\alpha_{sw}T_{tuvw}$$

Observe que el orden del tensor es igual al número de coeficientes α .

Ejercicio 1.9.1

1

Un punto de un cuerpo está sujeto al siguiente estado de esfuerzos: $\sigma_x = 80$ MPa, $\sigma_y = 40$ MPa; $\sigma_z = 50$ MPa, $\tau_{xy} = -30$ MPa, $\tau_{yz} = -40$ MPa, $\tau_{zx} = 60$ MPa. Transforme este conjunto de componentes cartesianas de esfuerzo en el sistema $Oxyz$ a un nuevo conjunto de componentes cartesianas de esfuerzo en el sistema $Ox_1y_1z_1$. Los ejes coordenados de los dos sistemas guardan las relaciones angulares $xx_1 = 45^\circ$; $yy_1 = 45^\circ$; $zz_1 = 0^\circ$.

Con los datos del ejemplo se elabora una tabla con todos los ángulos que forman entre sí los ejes:

	x	y	z
x_1	45°	45°	90°
y_1	135°	45°	90°
z_1	90°	90°	0°

Ejercicio 1.9.1 (continuación)

Aplicando los datos en la ecuación para σ_{x_1} :

$$\sigma_{x_1} = \left[80\cos^2(45) + 40\cos^2(45) + 50\cos^2(90) + 2(-30)\cos(45)\cos(45) + \right. \\ \left. + 2(-40)\cos(45)\cos(90) + 2(60)\cos(90)\cos(45) \right]$$

$$\sigma_{x_1} = 40 + 20 + 0 - 30 + 0 + 0$$

$$\sigma_{x_1} = 30 \text{ MPa}$$

Determinación de σ_{y_1} :

$$\sigma_{y_1} = \left[80\cos^2(135) + 40\cos^2(45) + 50\cos^2(90) + 2(-30)\cos(135)\cos(45) + \right. \\ \left. + 2(-40)\cos(45)\cos(90) + 2(60)\cos(90)\cos(135) \right]$$

$$\sigma_{y_1} = 40 + 20 + 0 + 30 + 0 + 0$$

$$\sigma_{y_1} = 90 \text{ MPa}$$

De σ_{z_1} :

$$\sigma_{z_1} = \left[80\cos^2(90) + 40\cos^2(90) + 50\cos^2(0) + 2(-30)\cos(90)\cos(90) + \right. \\ \left. + 2(-40)\cos(90)\cos(0) + 2(60)\cos(90)\cos(0) \right]$$

$$\sigma_{z_1} = 0 + 0 + 50 + 0 + 0 + 0$$

$$\sigma_{z_1} = 50 \text{ MPa}$$

De $\tau_{x_1y_1}$:

$$\tau_{x_1y_1} = \left[80\cos(45)\cos(135) + 40\cos(45)\cos(45) + 50\cos(90)\cos(90) + \right. \\ \left. + (-30)[\cos(45)\cos(45) + \cos(45)\cos(135)] + \right. \\ \left. + (-40)[\cos(45)\cos(90) + \cos(90)\cos(45)] + \right. \\ \left. + (60)[\cos(90)\cos(135) + \cos(45)\cos(90)] \right]$$

$$\tau_{x_1y_1} = -40 + 20 + 0 + 0 + 0$$

$$\tau_{x_1y_1} = -20 \text{ MPa}$$

De $\tau_{y_1z_1}$:

$$\tau_{y_1z_1} = \left[80\cos(135)\cos(90) + 40\cos(45)\cos(90) + 50\cos(90)\cos(0) + \right. \\ \left. + (-30)[\cos(135)\cos(90) + \cos(45)\cos(90)] + \right. \\ \left. + (-40)[\cos(45)\cos(0) + \cos(90)\cos(90)] + \right. \\ \left. + (60)[\cos(90)\cos(90) + \cos(135)\cos(0)] \right]$$

Ejercicio 1.9.1 (continuación)

3

$$\tau_{y,z_1} = 0 + 0 + 0 + 0 - 28.28 - 42.42$$

$$\tau_{y,z_1} = -70.7 \text{ MPa}$$

Y de τ_{z_1,x_1} :

$$\tau_{z_1,x_1} = \left[\begin{aligned} &80 \cos(90) \cos(45) + 40 \cos(90) \cos(45) + 50 \cos(0) \cos(90) + \\ &+ (-30) [\cos(90) \cos(45) + \cos(90) \cos(45)] + \\ &+ (-40) [\cos(90) \cos(90) + \cos(0) \cos(45)] + \\ &+ (60) [\cos(0) \cos(45) + \cos(90) \cos(90)] \end{aligned} \right]$$

$$\tau_{z_1,x_1} = 0 + 0 + 0 + 0 - 28.28 + 42.42$$

$$\tau_{z_1,x_1} = 14.14 \text{ MPa}$$

1.10. Ecuaciones de transformación de esfuerzos. Estado bidimensional

A partir de un estado tridimensional de esfuerzos se pueden derivar las ecuaciones para un estado bidimensional de esfuerzos. En este estado, una dimensión de un cuerpo es relativamente pequeña en comparación con las otras dimensiones. Si en el tetraedro de la figura 1.4.1 se corta una sección de un espesor pequeño a través de un plano paralelo a la cara QPT , resulta una placa triangular como la que se muestra en la figura 1.10.1. En esta placa las fuerzas actúan paralelas al plano de la placa y están distribuidas uniformemente en todo su espesor; las componentes de esfuerzo σ_z , τ_{yz} , τ_{zx} tienen un valor cero en la dirección perpendicular al plano de la placa.

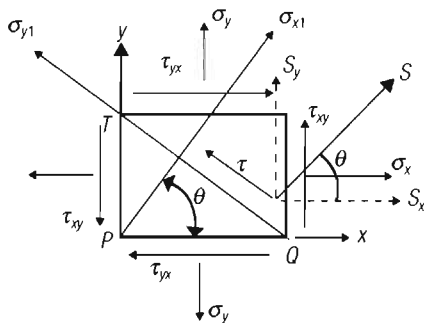


Figura 1.10.1. Transformación de esfuerzos por rotación de eje. Esfuerzo plano.

En este caso, el sistema de esfuerzos que actúa sobre la placa está formado únicamente por los esfuerzos normales σ_x , σ_y , τ_{xy} . A esta condición en la que en una de las direcciones primarias el esfuerzo vale cero, se le llama *esfuerzo plano*.

Para efectuar la transformación de ejes de un sistema coordenado Oxy a otro Ox_1y_1 , se supondrá que los ejes xy giran respecto del eje z de manera que los ejes z , así como z_1 , normales al plano del papel, coinciden. A los ángulos $(x_1, x) = (y_1, y)$ se les designa como θ ; en consecuencia $(y_1, x) = (\theta + \pi/2)$, $(x_1, y) = (\pi/2 - \theta)$ y las ecuaciones de 1.6.2a a 1.6.2f se transforman para el estado bidimensional de esfuerzos en:

$$\sigma_{x_1} = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) + 2\tau_{xy} \cos \theta \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)$$

$$\sigma_{x_1} = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \quad (1.10.1a)$$

$$\sigma_{y_1} = \sigma_x \cos^2 \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) + \sigma_y \cos^2 (\theta) + 2\tau_{xy} \cos \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) \cos (\theta) =$$

$$= \sigma_x \sin^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \theta - 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \quad (1.10.1b)$$

$$\tau_{x_1y_1} = \sigma_x \cos (\theta) \cos \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) + \sigma_y \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \cos (\theta) +$$

$$+ \tau_{xy} \left[\cos (\theta) \cos (\theta) + \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \cos \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) \right]$$

$$\tau_{x_1y_1} = (\sigma_y - \sigma_x) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \quad (1.10.1c)$$

$$\sigma_{z_1} = \tau_{z_1x_1} = \tau_{z_1y_1} = 0 \quad (1.10.1d)$$

Es ventajoso para propósitos de cómputo el uso del ángulo doble 2θ ; para transformar las ecuaciones anteriores en términos del ángulo doble se utilizan las identidades

$$\cos^2 \theta = \frac{\cos 2\theta + 1}{2}$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

$$2\sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta$$

$$\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos 2\theta$$

Aplicando estas identidades en las ecuaciones de 1.10.1a a 1.10.1c resulta:

$$\sigma_{x_1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (1.10.2a)$$

$$\sigma_{y_1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (1.10.2b)$$

$$\tau_{x_1y_1} = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \quad (1.10.2c)$$

Ejercicio 1.10.1

1

Sobre una placa de espesor muy pequeño, en la cual el plano xy coincide con el plano de la placa y el eje z es normal al espesor de la placa, están actuando los esfuerzos $\sigma_x = 50$ MPa, $\sigma_y = 40$ MPa, $\tau_{xy} = 30$ MPa. Determine los valores de esfuerzo σ_{x_1} , σ_{y_1} , $\tau_{x_1y_1}$, que actúan sobre el plano x_1y_1 , el cual está definido por una rotación de 30° sobre el plano xy alrededor del eje z en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj.

Respuesta: sustituyendo en las ecuaciones 1.10.2, resultan los siguientes valores:

$$\sigma_{x_1} = \frac{50+40}{2} + \frac{50-40}{2} \cos 60 + 30 \sin 60 = 45 + 5(0.5) + 30(0.866) = 73.5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{y_1} = \frac{50+40}{2} - \frac{50-40}{2} \cos 60 - 30 \sin 60 = 45 - 5(0.5) - 30(0.866) = 16.5 \text{ MPa}$$

$$\tau_{x_1y_1} = \frac{40-50}{2} \sin 60 + 30 \cos 60 = -5(0.866) + 30(0.5) = 10.7 \text{ MPa}$$

1.11. Esfuerzos principales. Estado bidimensional de esfuerzos

En el estado tridimensional de esfuerzos se puede girar el plano QRT de la figura 1.4.1 alrededor del punto P hasta que alcance una posición en la cual los esfuerzos cortantes se desvanecen. Para cualquier estado bidimensional de esfuerzos es posible encontrar dos planos mutuamente perpendiculares en los cuales los esfuerzos cortantes valen cero. Los esfuerzos resultantes son normales a los planos sobre los que actúan y reciben el nombre de *esfuerzos principales*. El estado de esfuerzos bidireccional está completamente definido cuando se conocen las magnitudes y direcciones de los dos esfuerzos principales.

Mediante el uso de las ecuaciones 1.10.2 se puede definir un sistema coordinado con ejes perpendiculares a los planos principales en los cuales el esfuerzo cortante vale cero y los esfuerzos normales alcanzan un valor máximo y un valor mínimo. Utilizando la condición $\tau_{x_1y_1} = 0$, en la ecuación 1.10.2c, se van a definir las direcciones de los planos principales y con estas direcciones y la ecuación 1.10.2a se van a determinar los valores de los esfuerzos principales; entonces

$$\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta = 0$$

De esta ecuación resulta:

$$\tan 2\theta_N = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (1.11.1)$$

Con esta ecuación y haciendo uso de un triángulo rectángulo en el cual τ_{xy} representa el cateto opuesto y $(\sigma_x - \sigma_y)/2$ el cateto adyacente del ángulo 2θ , mediante el teorema de Pitágoras se obtiene:

$$\operatorname{sen}2\theta_N = \pm \frac{\tau_{xy}}{\left[\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 \right]^{1/2}}$$

$$\operatorname{cos}2\theta_N = \pm \frac{(\sigma_x - \sigma_y)/2}{\left[\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 \right]^{1/2}}$$

Al utilizar estas dos expresiones en las ecuaciones 1.10.2a y 1.10.2b se obtienen los esfuerzos normales principales máximo y mínimo

$$\sigma_{\text{máx}} = \sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \left[\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 \right]^{1/2} \quad (1.11.2a)$$

$$\sigma_{\text{mín}} = \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \left[\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 \right]^{1/2} \quad (1.11.2b)$$

En la ecuación 1.11.1, el índice N indica la dirección de los esfuerzos normales principales. La figura 1.11.1 permite definir en forma intuitiva la dirección del esfuerzo principal mayor.

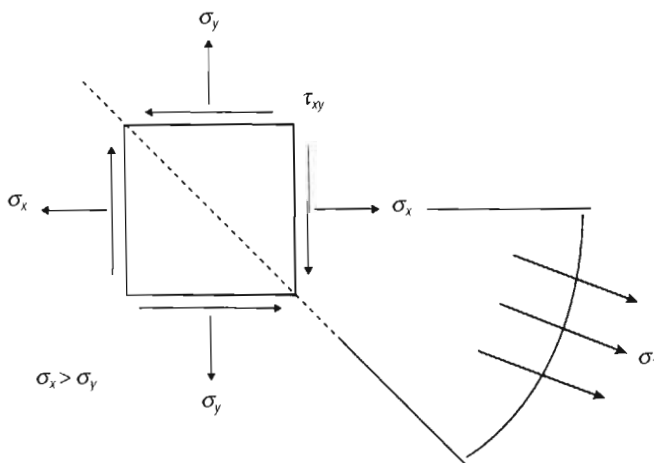


Figura 1.11.1. Definición de la dirección del esfuerzo principal (Dieter, 1988).

Son tres las situaciones que se pueden observar en la figura 1.11.1.

- Si en el elemento, σ_x es el esfuerzo algebraicamente mayor y no existe esfuerzo de corte alguno actuando en el plano x , entonces: $\sigma_x = \sigma_1$.
- Si sobre el plano x actúa solamente un esfuerzo de corte, entonces existirá un esfuerzo normal principal en la dirección de la diagonal al elemento.

- Si sobre el plano x actúan tanto un esfuerzo normal, σ_x , como un esfuerzo cortante, τ_{xy} , entonces el esfuerzo normal principal σ_1 tiene una dirección comprendida entre la dirección x y la diagonal.

Ejercicio 1.11.1**1**

En el estado de esfuerzos del ejemplo 1.10.1, determine los valores de los esfuerzos principales y las direcciones de éstos respecto del eje x .

Respuesta: aplicando los valores de esfuerzo en las ecuaciones 1.11.1 y 1.11.2 resultan los valores de esfuerzo y de dirección del esfuerzo σ_1 respecto del plano x .

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 = \frac{50+40}{2} + \left[\left(\frac{50-40}{2} \right)^2 + 30^2 \right]^{1/2} = 45 + 30.4 = 75.4 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_2 = \frac{50+40}{2} - \left[\left(\frac{50-40}{2} \right)^2 + 30^2 \right]^{1/2} = 45 - 30.4 = 14.6$$

$$\tan 2\theta_N = \frac{2(30)}{50-40} = 6$$

$$2\theta_N = 80.54^\circ$$

La orientación de σ_{\max} respecto del eje x es: $\theta_N = 40.27^\circ$

y la de σ_{\min} : $\theta_N = \theta_N + \pi/2 = 40.27 + 90 = 130.27^\circ$

1.12. Esfuerzos cortantes principales. Estado bidimensional de esfuerzos

Los esfuerzos cortantes principales se determinan derivando la ecuación 1.10.2c respecto de θ e igualando a cero:

$$\frac{\partial \tau_{x_i y_i}}{\partial \theta} = (\sigma_y - \sigma_x) \cos 2\theta - 2\tau_{xy} \sin 2\theta = 0$$

de donde

$$\frac{\sin 2\theta_s}{\cos 2\theta_s} = \tan 2\theta_s = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \quad (1.12.1)$$

El índice s en θ_s indica la dirección de los esfuerzos cortantes principales. Cuando se compara la expresión para $\tan 2\theta_s$, ecuación 1.12.1, con la correspondiente para $\tan 2\theta_N$, ecuación 1.11.1, se observa que una expresión es recíproca negativa de la otra, lo que significa que $2\theta_s$ y $2\theta_N$ son direcciones mutuamente perpendiculares y por tanto θ_s y θ_N forman un ángulo de 45° .

Los esfuerzos cortantes principales se determinan aplicando la ecuación 1.12.1 en la ecuación 1.10.2c; considerando que en 1.12.1, $-(\sigma_x - \sigma_y)/2$ es el cateto opuesto y que τ_{xy} es el cateto adyacente de un triángulo rectángulo, se determina la hipo-

tenusa del triángulo rectángulo aplicando el teorema de Pitágoras. Se pueden obtener así ecuaciones para $\sin 2\theta$ y $\cos 2\theta$, las cuales se aplican en la ecuación 1.10.2c y se obtiene de esta forma la ecuación de los esfuerzos cortante máximo y mínimo.

$$\tau_{\text{máx,mín}} = \pm \left[\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 \right]^{1/2} \quad (1.12.2)$$

Ejercicio 1.12.1**1**

En el estado de esfuerzos del ejemplo 1.10.1, determine los esfuerzos cortantes principales y su dirección respecto del eje x .

Respuesta: aplicando valores en la ecuación 1.12.2:

$$\tau_{\text{máx,mín}} = \pm \left[\left(\frac{50-40}{2} \right)^2 + 30^2 \right]^{1/2} = \pm 30.4 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\text{máx}} = 30.4 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\text{mín}} = -30.4 \text{ MPa}$$

La dirección con respecto al sistema coordenado x, y es obtenida mediante la ecuación 1.12.1:

$$\tan 2\theta_s = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} = -\frac{50-40}{2(30)} = -0.1666$$

El ángulo que forma el esfuerzo cortante principal con el eje x es entonces:

$$2\theta_s = 170.54^\circ$$

$$\theta_s = 85.27^\circ$$

Como τ_{xy} tiene dos raíces, el esfuerzo cortante mínimo tiene una orientación:

$$\theta_s = \theta_s + \pi/2 = 85.27 + 90 = 175.27^\circ$$

1.13. Círculo de Mohr para esfuerzos bidimensionales

La localización del centro del círculo de Mohr respecto de los ejes cartesianos y el radio del círculo, se obtienen de las ecuaciones 1.10.2a y 1.10.2c, las cuales se arreglan en la forma siguiente:

$$\sigma_{x_1} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau_{x_1 y_1} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

Se elevan al cuadrado las dos ecuaciones anteriores y se suman miembro a miembro.

$$\left(\sigma_{x_1} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{x_1 y_1}^2 = \left[\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta\right]^2 + \left[-\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta\right]^2$$

Se desarrollan los binomios del segundo miembro:

$$\left[\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 \cos^2(2\theta) + (\sigma_x - \sigma_y) \cos(2\theta) \tau_{xy} \sin(2\theta) + \tau_{xy}^2 \sin^2(2\theta)\right] +$$

$$+ \left[\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 \sin^2(2\theta) - (\sigma_x - \sigma_y) \cos(2\theta) \tau_{xy} \sin(2\theta) + \tau_{xy}^2 \cos^2(2\theta)\right]$$

Se simplifican los términos dentro de los paréntesis:

$$\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 \left[\sin^2(2\theta) + \cos^2(2\theta)\right] + \tau_{xy}^2 \left[\sin^2(2\theta) + \cos^2(2\theta)\right]$$

Finalmente se obtiene la expresión:

$$\left(\sigma_{x_1} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{x_1 y_1}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 \quad (1.13.1)$$

La ecuación 1.13.1 tiene la estructura de $(x - h)^2 + y^2 = r^2$, que es la ecuación de un círculo cuyo centro está desplazado del origen, sobre el eje x , una distancia $h = (\sigma_x + \sigma_y)/2$ y cuyo radio elevado al cuadrado está representado por el segundo miembro de esta ecuación.

Por convención en el trazo del círculo de Mohr, los valores de los esfuerzos normales se representan en el eje de las abscisas y los valores de los esfuerzos cortantes en las ordenadas. La comparación de los segundos miembros de las ecuaciones 1.12.2 y 1.13.1 muestra que el radio del círculo representa $\tau_{\text{máx}}$. Se va a trazar a continuación el círculo de Mohr para los valores de esfuerzos y orientaciones calculados en los ejercicios 1.10.1, 1.11.1 y 1.12.1.

Ejercicio 1.13.1

1

Represente en el círculo de Mohr el estado de esfuerzos referido a los ejes coordenados xy , así como $x_1 y_1$, del ejemplo 1.10.1; también represente los esfuerzos principales normales y de corte, determinados en los ejemplos 1.11.1 y 1.12.1.

Son importantes algunas observaciones para hacer más sencillo el trazo del círculo de Mohr:

La suma de esfuerzos $\sigma_x + \sigma_y = \sigma_{x_1} + \sigma_{y_1} = \sigma_1 + \sigma_2$ es una cantidad invariante. Esta característica permite determinar el centro del círculo sobre el eje de las abscisas de varias formas alternativas.

Ejercicio 1.13.1 (continuación)

2

$$\text{Centro del círculo} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_{x_1} + \sigma_{y_1}}{2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \quad (1.13.2)$$

El centro en este ejercicio es igual a 45 MPa. Se utiliza una escala conveniente para trazar la gráfica, por ejemplo 1 MPa = 1 mm.

El radio del círculo de Mohr se puede calcular a partir de los esfuerzos en cualquier sistema coordenado xy , x_1y_1 o a partir de los esfuerzos normales principales.

$$\text{Radio} = \tau_{\text{máx}} = \left[\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 \right]^{1/2} = \left[\left(\frac{\sigma_{x_1} - \sigma_{y_1}}{2} \right)^2 + \tau_{x_1y_1}^2 \right]^{1/2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad (1.13.3)$$

Al aplicar los valores de esfuerzo se obtiene un radio igual a 30.4 MPa. Estos dos valores son suficientes para trazar el círculo de la figura 1.13.1.

Cualquier punto sobre el círculo de Mohr define la magnitud y dirección de un esfuerzo normal y de un esfuerzo cortante en el plano del elemento físico. Para el estado de esfuerzos del ejemplo 1.10.1 se define un punto A ($\sigma_x = 50$ MPa, $-\tau_{xy} = 30$ MPa), abajo del eje de las abscisas y un punto B ($\sigma_y = 40$ MPa, $\tau_{xy} = 30$ MPa) arriba de este eje; el esfuerzo cortante es positivo y se localiza arriba del eje de las abscisas si en el elemento físico produce una rotación alrededor del punto P en el sentido contrario al de las manecillas del reloj.

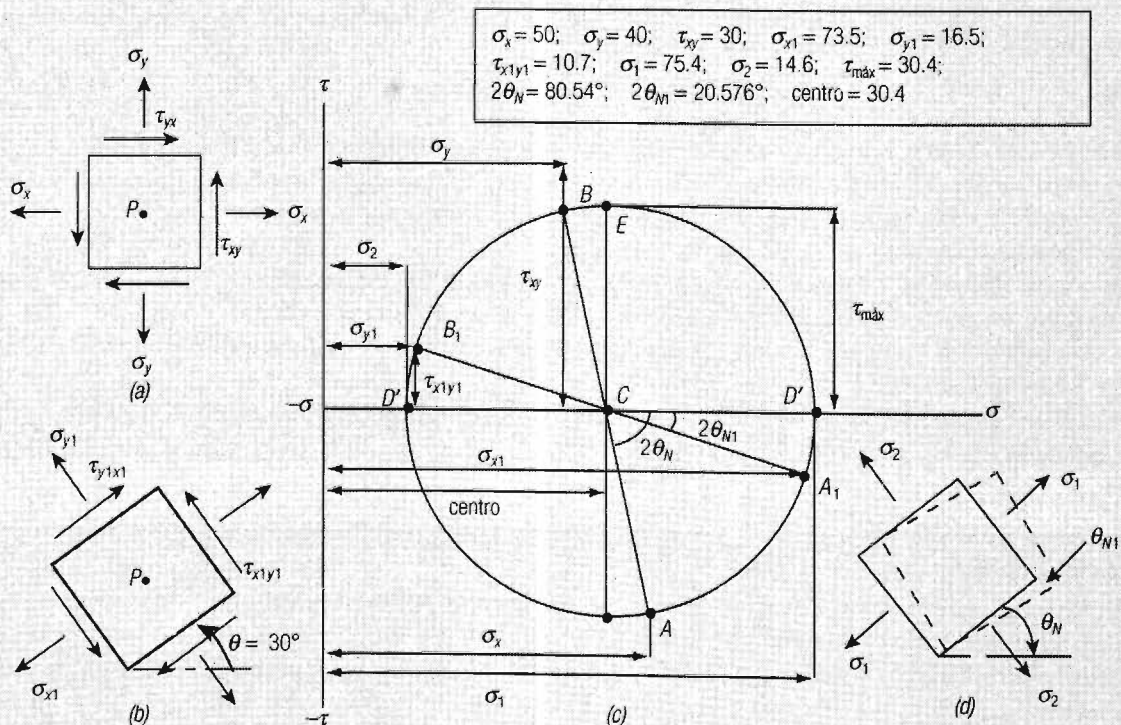


Figura 1.13.1. a) Elemento de una placa sujeto a esfuerzos σ_x , σ_y y τ_{xy} ; b) elemento de la misma placa que forma un ángulo de 30° con el eje x ; c) representación en el círculo de Mohr de los esfuerzos que actúan sobre los elementos a y b; d) esfuerzos principales que actúan sobre los elementos en (a), línea continua, elemento en (b), línea segmentada. Todos los esfuerzos están en MPa.

Ejercicio 1.13.1 (continuación)

3

Los puntos $D(\sigma_1 = 75.4 \text{ MPa}, 0)$ y $D'(14.6 \text{ MPa}, 0)$ definen los esfuerzos normales principales sobre el eje de las abscisas. El esfuerzo cortante máximo, como se dijo anteriormente, es igual al radio del círculo y está definido por el radio representado verticalmente, punto E , figura 1.13.1c.

Se unen con una línea recta los puntos AB , el ángulo que describe el segmento CA al girar en el sentido contrario a las manecillas del reloj hasta coincidir con el eje de las abscisas es el ángulo $2\theta_N = 80.54^\circ$. En el cuerpo físico, figura 1.13.1d, el ángulo que describe el eje x al girar en la dirección contraria a las manecillas del reloj, es la mitad del ángulo en el círculo de Mohr, es decir, $\theta_N = 40.27^\circ$.

Los esfuerzos σ_{x_1} , σ_{y_1} , $\tau_{x_1y_1}$ que están actuando sobre el elemento físico de la figura 1.13.1b se representan en el círculo de Mohr de la figura 1.13.1c mediante los puntos A_1 y B_1 . El ángulo que describe el segmento CA_1 al girar en sentido contrario a las manecillas del reloj hasta coincidir con el eje de las abscisas, es el ángulo $2\theta_{N_1}$. En el elemento físico, el ángulo que forma el eje con la dirección del esfuerzo principal es θ_{N_1} . El ángulo θ_{N_1} se calcula, como se hizo anteriormente, mediante la ecuación 1.11.1.

$$\tan 2\theta_{N_1} = \frac{2\tau_{x_1y_1}}{\sigma_{x_1} - \sigma_{y_1}} = \frac{2(10.7)}{73.5 - 16.5} = 0.3754$$

$$2\theta_{N_1} = 20.54^\circ$$

y también

$$\theta_{N_1} = 10.27^\circ$$

La orientación de $\sigma_{\min} = \sigma_{N_2}$ es:

$$\theta_{N_2} = 100.27^\circ$$

Observe en la figura 1.13.1d que el ángulo θ_{N_1} es el formado entre el eje x_1 y la dirección del esfuerzo principal. El eje x_1 a su vez forma un ángulo de 30° con el sentido positivo del eje de las x .

1.14. Determinación de las componentes normal y tangencial mediante el círculo de Mohr. Estado tridimensional de esfuerzos

Los esfuerzos σ_N y τ_N se determinaron, en la sección 1.5, mediante las ecuaciones 1.5.1 y 1.5.2; la figura 1.4.1 muestra estas componentes del esfuerzo S . Se van a derivar primero las ecuaciones de los círculos de Mohr, cuyas intersecciones permiten determinar σ_N , así como τ_N .

La tarea es hallar las ecuaciones de los círculos de Mohr y a la vez las coordenadas de sus centros y sus radios respectivos.

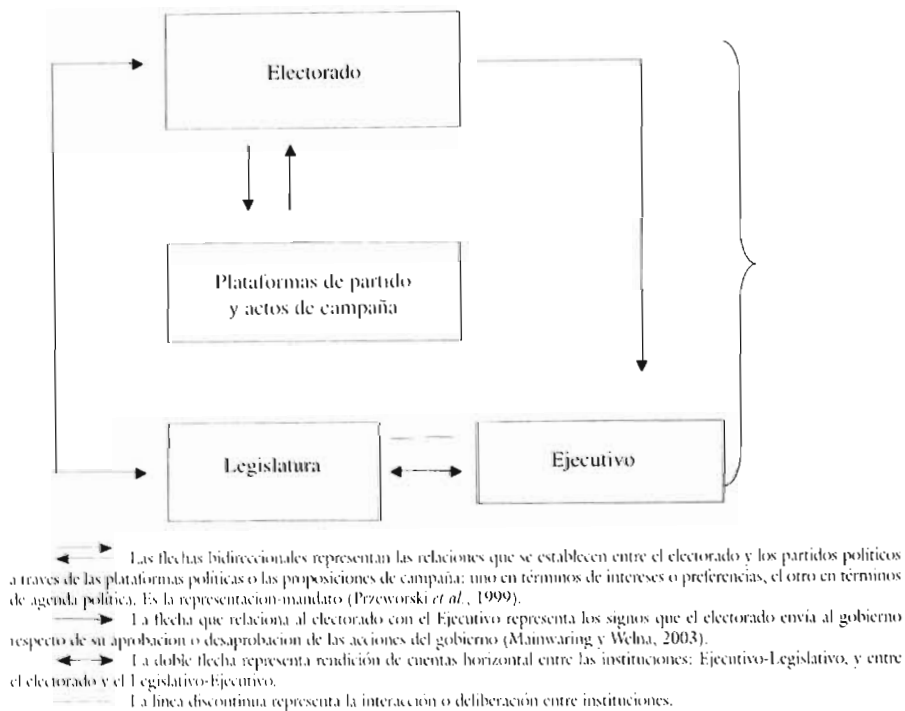
Se inicia la derivación a partir de las ecuaciones 1.8.2 y 1.8.3.

$$\sigma_N = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2 \quad (1.8.2)$$

$$\tau_N^2 = \left[\sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 \right] - \left[\sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2 \right]^2 \quad (1.8.3)$$

zonal, la que se manifiesta entre los actores políticos en un proceso electoral, por un lado, y la que se manifiesta entre las instituciones, por el otro; c) la que se da entre los electores y los poderes Ejecutivo y Legislativo que conocemos como responsabilidad o rendición de cuentas. Veámoslo según la figura 2 que presento a continuación.

FIGURA 2
RELACIONES ELECTORADO-PARTIDOS Y ELECTORADO-LEGISLATIVO-EJECUTIVO



Si regresamos a la idea de la representación como acto de imaginación enunciada anteriormente, la representación se vuelve entonces una construcción mental que hace posible la función pragmática; es la función pragmática que me posibilita converger con la representación en la ciencia política.

Es, pues, dentro de la perspectiva pragmática que los procesos de identificación acontecen entre los actores políticos y otros actores. Este proceso es una

y también

$$n^2 = \frac{\tau_N^2 + (\sigma_1 - \sigma_N)(\sigma_2 - \sigma_N)}{(\sigma_1 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_3)} \tag{1.14.3}$$

Las ecuaciones 1.14.1, 1.14.2 y 1.14.3 se pueden ordenar como sigue:

$$\left(\sigma_N - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)^2 + \tau_N^2 = l^2(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3) + \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2 \tag{1.14.4}$$

$$\left(\sigma_N - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right)^2 + \tau_N^2 = m^2(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_2 - \sigma_3) + \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2 \tag{1.14.5}$$

$$\left(\sigma_N - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 + \tau_N^2 = n^2(\sigma_1 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_3) + \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 \tag{1.14.6}$$

Estas tres ecuaciones representan los círculos de Mohr en función de l y de los esfuerzos principales (ecuación 1.14.4), en función de m y de los esfuerzos principales (ecuación 1.14.5) y en función de n y de los esfuerzos principales (ecuación 1.14.6). La semisuma de esfuerzos del primer término de cada ecuación representa la abscisa de los centros de los círculos y el segundo miembro de la ecuación representa el radio al cuadrado de cada círculo.

El procedimiento para determinar los esfuerzos σ_N , así como τ_N , se describe a continuación al mismo tiempo que se construye el círculo de Mohr de la figura 1.14.1.

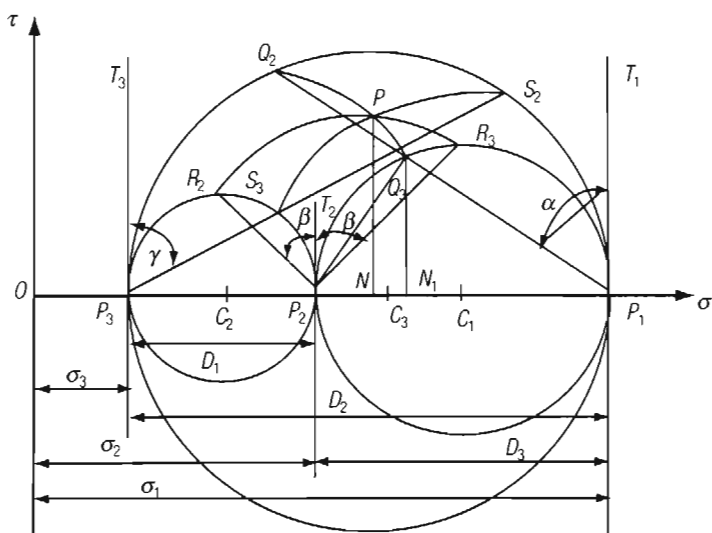


Figura 1.14.1. Círculo de Mohr para un estado tridimensional de esfuerzos (Johnson y Mellor, 1973).

1. Como es usual, en el eje de las abscisas se representan los valores de esfuerzo normal y en el eje de las ordenadas los valores de esfuerzo cortante.
2. Con $OP_1 = \sigma_1$; $OP_2 = \sigma_2$; $OP_3 = \sigma_3$, se marcan los puntos P_1, P_2, P_3 sobre el eje de las abscisas.

3. Se marca el centro, C_1 , del círculo de Mohr para la ecuación 1.14.6:

$$[(\sigma_1 + \sigma_2)/2, 0],$$

el centro C_2 , para la ecuación 1.14.4:

$$[(\sigma_2 + \sigma_3)/2, 0]$$

y el centro, C_3 , del círculo de Mohr para la ecuación 1.14.5:

$$[(\sigma_1 + \sigma_3)/2, 0]$$

4. Se dibujan los círculos que tienen como radios:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)/2 \text{ con centro en } C_1;$$

$$(\sigma_2 - \sigma_3)/2 \text{ con centro en } C_2;$$

$$(\sigma_1 - \sigma_3)/2 \text{ con centro en } C_3$$

5. Se trazan líneas P_1T_1, P_2T_2, P_3T_3 , paralelas al eje de las ordenadas. A partir de P_1 se traza una línea que forme un ángulo α con la línea P_1T_1 ; el ángulo α resulta del coseno directriz $l = \cos\alpha$. Esta línea corta los círculos con centros en C_1 y C_3 en Q_3 y Q_2 , respectivamente.
6. Se calcula la longitud C_2Q_3 , que representa la hipotenusa del triángulo $C_2Q_3N_1$, por el teorema de Pitágoras, de acuerdo con la figura 1.14.1:

El valor de la expresión $(\sigma_1 - \sigma_2)\cos\alpha$ es igual a la longitud del segmento de recta P_2Q_3 . Este segmento forma un ángulo α con el eje horizontal. La longitud N_1P_2 es obtenida proyectando P_2Q_3 sobre el eje horizontal:

$$N_1P_2 = (\sigma_1 - \sigma_2)\cos^2 \alpha$$

de donde:

$$C_2N_1 = N_1P_2 + C_2P_2 = (\sigma_1 - \sigma_2)\cos^2 \alpha + \frac{(\sigma_2 - \sigma_3)}{2}$$

De acuerdo con la figura 1.14.1:

$$(\sigma_1 - \sigma_2) = P_1P_2;$$

P_1Q_3 es la proyección de P_1P_2 sobre la línea P_1Q_2 , por eso:

$$P_1Q_3 = P_1P_2\sin\alpha;$$

N_1Q_3 es la proyección vertical del segmento de recta P_1Q_3 , por eso:

$$N_1Q_3 = (\sigma_1 - \sigma_2)\cos\alpha \operatorname{sen}\alpha.$$

Los catetos del triángulo rectángulo $C_2N_1Q_3$ son:

$$\left[(\sigma_1 - \sigma_2)\cos^2\alpha + (\sigma_2 - \sigma_3)/2, (\sigma_1 - \sigma_2)\cos\alpha \operatorname{sen}\alpha \right]$$

Por tanto:

$$(C_2Q_3)^2 = \left[(\sigma_1 - \sigma_2)l^2 + \frac{(\sigma_2 - \sigma_3)}{2} \right]^2 + \left[(\sigma_1 - \sigma_2)l(1-l^2)^{1/2} \right]^2$$

elevando al cuadrado los términos del lado derecho y simplificando:

$$(C_2Q_3)^2 = \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 l^4 + (\sigma_1 - \sigma_2)l^2(\sigma_2 - \sigma_3) + \left(\frac{(\sigma_2 - \sigma_3)}{2} \right)^2 \right] + \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 (l^2 - l^4) \right]$$

$$(C_2Q_3)^2 = \left\{ \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 l^4 - (\sigma_1 - \sigma_2)l^4 + \left[(\sigma_1 - \sigma_2)l^2(\sigma_2 - \sigma_3) + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 l^2 \right] \right\}$$

$$(C_2Q_3)^2 = \left\{ \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)^2 + (\sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2^2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1^2 - 2\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2) l^2 \right\}$$

$$(C_2Q_3)^2 = \left[\left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)^2 + (\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3) l^2 \right]$$

Finalmente:

$$(C_2Q_3)^2 = \left[\left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3) l^2 \right]$$

expresión que es igual al cuadrado del radio del círculo definido por la ecuación 1.14.4.

En la figura 1.14.1 se observa que $C_2Q_2 = C_2Q_3$.

Siguiendo una secuencia similar en las ecuaciones para m^2 y n^2 , a partir de P_2 se trazan dos líneas rectas a ambos lados de la línea P_2T_2 , que forman con ésta un ángulo β , siendo $m = \cos\beta$. Las líneas así trazadas cortan a los círculos con centros en C_1 y C_2 , en R_3 y R_2 , respectivamente. Se traza un círculo con centro en C_3 y radio $C_3R_3 = C_3R_2$.

7. A partir de P_3 , se traza una línea recta que forma un ángulo γ con la línea P_3T_3 ; el ángulo γ define $n = \cos\gamma$. La línea trazada corta a los círculos con centros en C_2 y C_3 , en S_3 y S_2 , respectivamente. Se traza un círculo con centro en C_1 y radio $C_1S_3 = C_1S_2$.
8. Se traza PN perpendicular al eje σ . El esfuerzo normal σ al plano inclinado está representado por la línea ON y el esfuerzo cortante total τ por PN .

Los esfuerzos σ , así como τ , son entonces definidos unívocamente por el punto de intersección P de los arcos Q_2Q_3 , R_2R_3 y S_2S_3 . Éste es el método gráfico para determinar los esfuerzos normal y cortante cuyos cosenos directrices son l, m, n con respecto a las direcciones de los esfuerzos principales $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Ejercicio 1.14.1

1

Mediante el trazo de un círculo de Mohr similar al de la figura 1.14.1, determine las componentes normal y cortante de un esfuerzo S sobre un plano oblicuo con cosenos directrices $l = 0.577, m = 0.577, n = 0.577$, con las direcciones principales de esfuerzo. Las componentes de esfuerzo de S a lo largo de estos ejes son $\sigma_1 = 30$ MPa; $\sigma_2 = 22.1$ MPa; $\sigma_3 = 8$ MPa.

Respuesta: construyendo el círculo de Mohr, se encuentra que $\sigma = 20$ MPa y que $\tau = 83.5$ MPa.

1.15. Círculo de Mohr. Estado tridimensional de esfuerzos

En la sección anterior se mostró el procedimiento para determinar las componentes de esfuerzo normal y tangencial de la resultante S de un estado de esfuerzo tridimensional mediante el círculo de Mohr. No es posible encontrar mediante el círculo de Mohr los tres esfuerzos principales y sus orientaciones a partir de las seis componentes de esfuerzo en un sistema coordenado xyz , ni tampoco transformar las seis componentes en este sistema a otro sistema $x_1y_1z_1$. Sin embargo, si se calculan los esfuerzos principales mediante el

procedimiento goniométrico descrito en el apéndice A, se pueden representar los valores obtenidos en el círculo de Mohr y obtener conclusiones interesantes. La figura 1.15.1 se utiliza para mostrar esta forma de uso de esta herramienta.

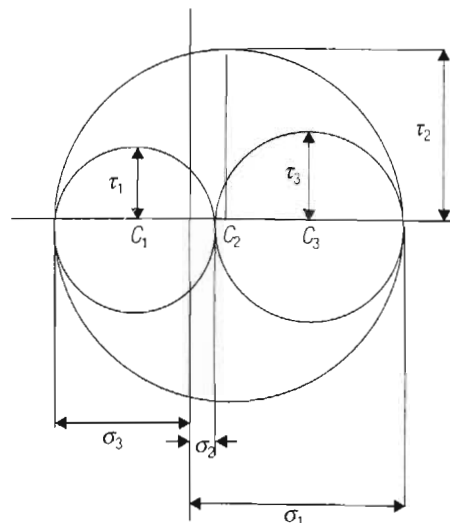


Figura 1.15.1. Representación de un estado tridimensional de esfuerzos en el círculo de Mohr.

Los centros de los círculos de Mohr se localizan sobre el eje de las abscisas a una distancia del origen igual a la semisuma de dos de los esfuerzos principales.

$$C_1 = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}; C_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}; C_3 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \quad (1.15.1)$$

Los radios de los círculos de Mohr son todas las semidiferencias posibles entre dos esfuerzos principales y, como lo demuestran las ecuaciones 1.8.5, son iguales a los esfuerzos cortantes principales. Para mayor claridad, se presentan estas ecuaciones a continuación:

$$\tau_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}; \tau_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}; \tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad (1.8.5)$$

El círculo de Mohr es una herramienta útil para visualizar rápidamente el estado de esfuerzos sobre un cuerpo y el efecto que puede tener sobre éste; aunque el mismo análisis se puede realizar mediante las ecuaciones, es más cómodo usar el círculo de Mohr. De la Teoría de la Mecánica de Fractura se sabe que los esfuerzos de tensión favorecen la fractura frágil en tanto que los esfuerzos cortantes promueven la deformación plástica.

Si los esfuerzos principales son de tensión y tienen un mismo valor, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, el estado de esfuerzos estará representado por un punto sobre el eje de las abscisas localizado a una distancia del origen igual a la semisuma de esfuerzos calculada mediante cualquiera de las ecuaciones 1.15.1. Si se aplica un esfuerzo de tensión σ_1 de un valor determinado, los valores de los esfuerzos cortantes principales se van a ir haciendo cada vez más pequeños a medida que los valores de los esfuerzos normales principales σ_2, σ_3 crecen y se aproximan al valor de σ_1 , y, según las ecuaciones 1.8.5, los radios de los círculos de Mohr se van a ir haciendo más pequeños, condiciones éstas que favorecen la fractura frágil. Si ahora se aplica al cuerpo el mismo valor positivo de σ_1 , a medida que los esfuerzos normales principales σ_2, σ_3 disminuyen y se vuelven más negativos, los radios de los círculos de Mohr crecen, ecuaciones 1.8.5, es decir, los valores de τ_1, τ_2, τ_3 crecen y se favorecerá la deformación plástica.

1.16. Tensores de esfuerzo hidrostático y esfuerzo desviador

El tensor de esfuerzos σ_{ij} está constituido por dos componentes: una componente hidrostática de esfuerzo o tensor de esfuerzo medio, la cual produce esfuerzos de tensión pura o compresión pura, y un tensor de esfuerzo desviador σ'_{ij} que representa esfuerzos de corte puro. La componente hidrostática de esfuerzos produce únicamente cambios de volumen, no causa deformación plástica; se ha demostrado experimentalmente que el esfuerzo de cedencia es independiente de esta componente; sin embargo, influye fuertemente la deformación para la fractura. El esfuerzo desviador implica solamente esfuerzos de corte y causa la deformación plástica.

El tensor total de esfuerzos se puede definir como la suma de los tensores de sus componentes

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} + \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk} \quad (1.16.1)$$



En esta ecuación el segundo término es la componente hidrostática de esfuerzos, δ_{ij} es la delta de Kronecker y

$$\frac{1}{3}\sigma_{kk} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \sigma_m \quad (1.16.2)$$

Representando el tensor total de esfuerzos en forma matricial resulta:

$$\sigma_{ij} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} \quad (1.16.3a)$$

o empleando esfuerzos principales, se obtiene:

$$\sigma_{ij} = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix} \quad (1.16.3b)$$

La componente hidrostática de esfuerzos es representada por la matriz:

$$\sigma_m \delta_{ij} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} \delta_{ij} = \begin{vmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{vmatrix} \quad (1.16.4a)$$

y para esfuerzos principales:

$$\sigma_m \delta_{ij} = \frac{1}{3}\sigma_{kk} \delta_{ij} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{vmatrix} \quad (1.16.4b)$$

El tensor del esfuerzo desviador se obtiene de la ecuación 1.16.1:

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_m \delta_{ij} \quad (1.16.5)$$

en forma matricial:

$$\sigma'_{ij} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{vmatrix}$$

Para esfuerzos principales:

$$\sigma'_{ij} = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{vmatrix}$$

Efectuando la sustracción:

$$\sigma'_{ij} = \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_m \end{vmatrix} \quad (1.16.6a)$$

Para esfuerzos principales:

$$\sigma'_{ij} = \begin{vmatrix} \sigma_1 - \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - \sigma_m \end{vmatrix} \quad (1.16.6b)$$

Utilizando el valor de σ_m de la ecuación 1.16.2 en 1.16.6a y en 1.16.6b:

$$\sigma'_{ij} = \begin{vmatrix} \frac{2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z}{3} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \frac{2\sigma_y - \sigma_x - \sigma_z}{3} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \frac{2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y}{3} \end{vmatrix} \quad (1.16.7a)$$

Para esfuerzos principales:

$$\sigma'_{ij} = \begin{vmatrix} \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2}{3} \end{vmatrix} \quad (1.16.7b)$$

La ecuación 1.16.7a se puede representar en la siguiente forma:

$$\sigma'_{ij} = \begin{vmatrix} \sigma'_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma'_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma'_z \end{vmatrix} \quad (1.16.8a)$$

y la 1.16.7b como sigue:

$$\sigma'_{ij} = \begin{vmatrix} \sigma'_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma'_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma'_3 \end{vmatrix} \quad (1.16.8b)$$

Se observa en las expresiones 1.16.8a y 1.16.8b que el tensor del esfuerzo desviador está compuesto, solamente, de esfuerzos cortantes τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{zx} , así como de compo-

nentes de esfuerzo desviador: $(\sigma_x - \sigma_m) = \sigma'_x$, $(\sigma_y - \sigma_m) = \sigma'_y$, $(\sigma_z - \sigma_m) = \sigma'_z$ o, en el caso de esfuerzos normales principales, $(\sigma_1 - \sigma_m) = \sigma'_1$, $(\sigma_2 - \sigma_m) = \sigma'_2$, $(\sigma_3 - \sigma_m) = \sigma'_3$.

Los términos de la traza de la matriz son esfuerzos de corte puro. Se demuestra la afirmación anterior para el término σ'_1 en un sistema de esfuerzos normales principales:

$$\sigma'_1 = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{3} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2) + (\sigma_1 - \sigma_3)}{3}$$

Haciendo algunos arreglos a la ecuación anterior:

$$\sigma'_1 = \frac{2}{3} \left[\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right] = \frac{2}{3} [\tau_3 + \tau_2] \quad (1.16.9)$$

Los dos términos dentro del corchete son semidiferencias de esfuerzos normales principales que, como se observa en la figura 1.8.1, son esfuerzos cortantes.

Ejercicio 1.16.1

1

Dado el tensor de esfuerzos

$$\begin{vmatrix} 10 & 3 & -2 \\ 3 & 8 & 4 \\ -2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

encuentre las componentes hidrostática y desviadora.

Componente hidrostática

Aplicando valores en la ecuación 1.16.4a:

$$\sigma_m \delta_{ij} = \frac{10+8+6}{3} \delta_{ij} = \begin{vmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix}$$

Componente desviadora de esfuerzos

Aplicando valores en la ecuación 1.16.6a

$$\sigma'_{ij} = \begin{vmatrix} 10-8 & 3 & -2 \\ 3 & 8-8 & 4 \\ -2 & 4 & 6-8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & 4 \\ -2 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

1.17. Invariantes del tensor del esfuerzo desviador

La solución del determinante de la ecuación 1.16.8a o su equivalente, la ecuación 1.16.8b, produce la ecuación cúbica:

$$(\sigma')^3 - J_1(\sigma')^2 + J_2\sigma' - J_3 = 0 \quad (1.17.1)$$

donde J_1, J_2, J_3 representan las invariantes del tensor de esfuerzo desviador. En forma similar al tensor de esfuerzos, J_1 es igual a la traza de la matriz; J_2 es la suma de los menores principales y J_3 es el determinante de la matriz. Para la ecuación 1.16.6a:

$$J_1 = (\sigma_x - \sigma_m) + (\sigma_y - \sigma_m) + (\sigma_z - \sigma_m) \quad (1.17.2a)$$

Para la ecuación 1.16.6b:

$$J_1 = (\sigma_1 - \sigma_m) + (\sigma_2 - \sigma_m) + (\sigma_3 - \sigma_m) \quad (1.17.2b)$$

Para J_2 :

$$J_2 = \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_m & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_m \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y - \sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_y - \sigma_m \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_m & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z - \sigma_m \end{vmatrix}$$

De donde:

$$J_2 = \frac{1}{6} \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2) \right] \quad (1.17.3a)$$

Y ahora, para esfuerzos principales:

$$J_2 = \begin{vmatrix} \sigma_1 - \sigma_m & 0 \\ 0 & \sigma_2 - \sigma_m \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_2 - \sigma_m & 0 \\ 0 & \sigma_3 - \sigma_m \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_1 - \sigma_m & 0 \\ 0 & \sigma_3 - \sigma_m \end{vmatrix}$$

$$J_2 = \frac{1}{6} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right] \quad (1.17.3b)$$

1.18. Ecuaciones de equilibrio de fuerzas en un punto

1.18.1. Coordenadas cartesianas. Elemento cúbico

Las ecuaciones de equilibrio de fuerzas en un punto son de importancia en los estudios de procesos de formado. Para el presente análisis se va a utilizar el elemento cúbico de volumen de la figura 1.18.1.

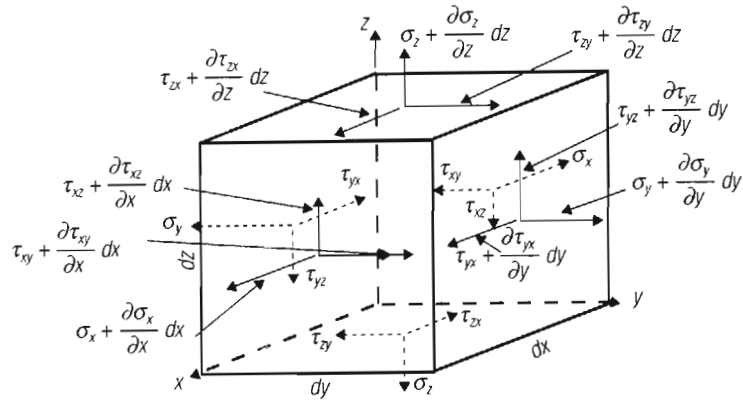


Figura 1.18.1. Equilibrio de fuerzas en un elemento cúbico de volumen (Saada, 1974).

La suma de fuerzas en las seis caras del cubo en la dirección del eje x produce la siguiente ecuación:

$$\left[\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) - \sigma_x \right] dydz + \left[\left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \right) - \tau_{xy} \right] dx dz + \left[\left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) - \tau_{zx} \right] dx dy = 0$$

Simplificando resulta:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0 \quad (1.18.1a)$$

Una ecuación similar se obtiene de la suma de fuerzas en la dirección del eje y

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \quad (1.18.1b)$$

así como en la dirección z

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \quad (1.18.1c)$$

1.18.2. Coordenadas cilíndricas o polares

Las ecuaciones de equilibrio en un sistema de coordenadas cilíndricas se obtienen haciendo uso de la figura 1.18.2. Las coordenadas son r , θ , z . Se debe tomar en consideración que los esfuerzos normales al plano θ están inclinados con respecto al eje r y que las caras normales al plano z tienen dos lados curvados.

Utilizando el procedimiento para coordenadas cartesianas se obtienen las ecuaciones:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (1.18.2a)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} = 0 \quad (1.18.2b)$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\tau_{rz}}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} = 0 \quad (1.18.2c)$$

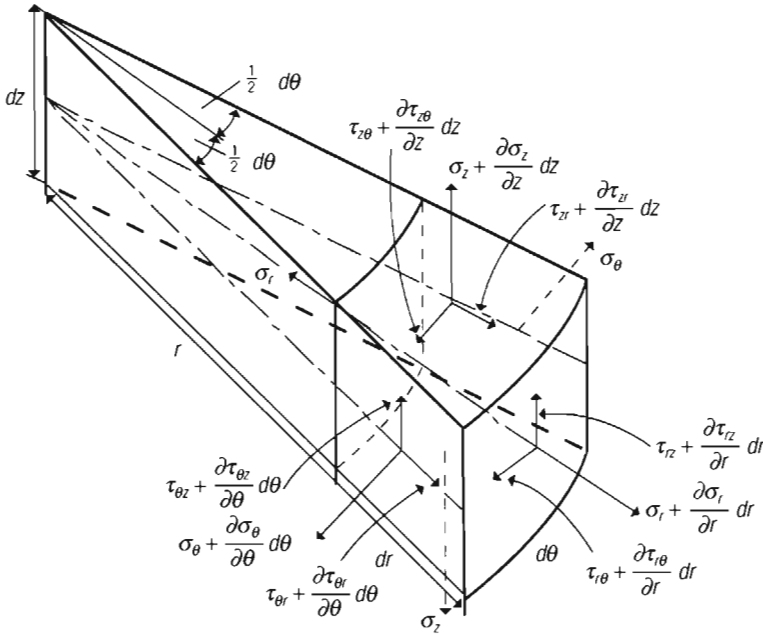


Figura 1.18.2. Equilibrio de fuerzas en un elemento cilíndrico (Saada, 1974).

1.18.3. Coordenadas esféricas

Las ecuaciones de equilibrio de fuerzas en un punto con coordenadas esféricas se refieren a las coordenadas (r, θ, ϕ) , figura 1.18.3. Se derivan en forma similar a como se obtuvieron las ecuaciones de equilibrio para coordenadas cartesianas y cilíndricas:

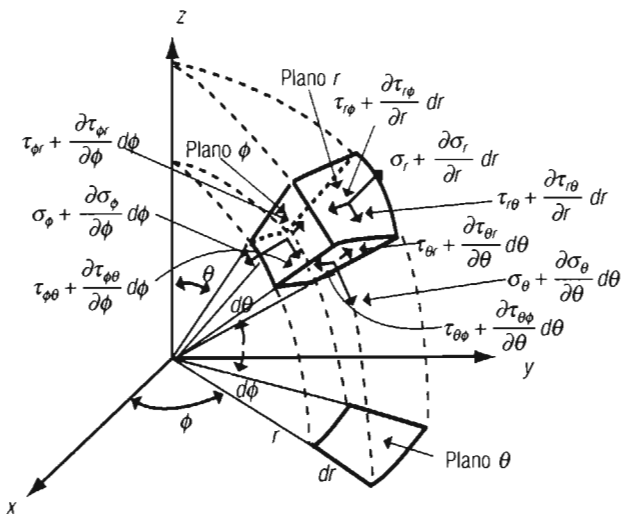


Figura 1.18.3. Equilibrio de fuerzas en un punto. Coordenadas esféricas (Saada, 1974).

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{r\phi}}{\partial \phi} + \frac{2\sigma_r - \sigma_\phi - \sigma_\theta - \tau_{r\theta} \cot \theta}{r} = 0 \quad (1.18.3a)$$

$$\frac{\partial \tau_{r\phi}}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_\phi}{\partial \phi} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\phi\theta}}{\partial \theta} = 0 \quad (1.18.3b)$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\phi\theta}}{\partial \phi} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{3\sigma_{r\theta} + (\sigma_\theta - \sigma_\phi) \cot \theta}{r} = 0 \quad (1.18.3c)$$

Ejercicios de final de capítulo

1

1. Un punto de un cuerpo está sujeto al siguiente estado de esfuerzos: $\sigma_x = 70$ MPa, $\sigma_y = -50$ MPa, $\sigma_z = 25$ MPa, $\tau_{xy} = -50$ MPa, $\tau_{yz} = 30$ MPa, $\tau_{zx} = 40$ MPa.

Determine: a) la resultante S de estas componentes cartesianas; b) los esfuerzos normal σ_N y de corte τ_N sobre un plano cuya normal tiene los siguientes cosenos directrices: $\cos(N,x) = 0.3420$, $\cos(N,y) = 0.500$, $\cos(N,z) = 0.7071$; c) los ángulos que forma S con los ejes cartesianos; d) el ángulo que forma S con la normal N .

Respuestas: a) $S = 57.7$ MPa; b) $\sigma_N = 31.6$ MPa, $\tau_N = 48.2$ MPa; c) $(S,x) = 61.8^\circ$, $(S,y) = 111.2^\circ$, $(S,z) = 36.5^\circ$; d) $(S,N) = 56.7^\circ$.

2. Un punto de un cuerpo está sujeto al siguiente estado de esfuerzos: $\sigma_x = 0$ MPa, $\sigma_y = 0$ MPa, $\sigma_z = 0$ MPa, $\tau_{xy} = 75$ MPa, $\tau_{yz} = 0$ MPa, $\tau_{zx} = 100$ MPa.

Determine: a) la resultante S de estas componentes cartesianas; b) los esfuerzos normal σ_N y de corte τ_N sobre un plano cuya normal forma ángulos iguales con los ejes xyz ; c) los ángulos que forma S con los ejes cartesianos; d) el ángulo que forma S con la normal. *Ayuda:* el ángulo que forma la normal con cada uno de los ejes es de 54.735° .

Respuestas: a) $S = 124.1$ MPa; b) $\sigma_N = 116.3$ MPa, $\tau_N = 42.5$ MPa; c) $(S,x) = 35.5^\circ$, $(S,y) = 69.6^\circ$, $(S,z) = 62.3^\circ$; d) $(S,N) = 20^\circ$.

3. Un punto de un cuerpo está sujeto al siguiente estado de esfuerzos: $\sigma_x = 70$ MPa, $\sigma_y = 50$ MPa; $\sigma_z = -40$ MPa, $\tau_{xy} = 30$ MPa, $\tau_{yz} = -40$ MPa, $\tau_{zx} = 60$ MPa. Transforme este conjunto de componentes cartesianas de esfuerzo en el sistema $Oxyz$ a un nuevo conjunto de componentes cartesianas de esfuerzo en el sistema $Ox_1y_1z_1$. Los ejes coordenados de los dos sistemas están relacionados conforme a los cosenos directrices de la tabla siguiente:

	x	y	z
x_1	$-1/3$	$2/3$	$2/3$
y_1	$-2/3$	$1/3$	$-2/3$
z_1	$2/3$	$2/3$	$-1/3$

Ejercicios de final de capítulo (continuación)

2

Respuestas: $\sigma_{x_1} = -63.3$ MPa; $\sigma_{y_1} = 76.7$ MPa; $\sigma_{z_1} = 66.7$ MPa; $\tau_{x_1y_1} = 23.3$ MPa; $\tau_{y_1z_1} = -26.7$ MPa; $\tau_{z_1x_1} = 46.7$ MPa.

4. Determine, para el estado de esfuerzos mostrado abajo, los esfuerzos principales normales y cortantes.

$$\begin{vmatrix} 15 & 3 & 0 \\ 3 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} \text{ MPa}$$

Respuestas: $\sigma_1 = 16.4$ MPa; $\sigma_2 = 8.6$ MPa; $\sigma_3 = 5.0$ MPa; $\tau_1 = 1.8$ MPa; $\tau_2 = 5.7$ MPa; $\tau_3 = 3.9$ MPa.

5. Determine, para el estado de esfuerzos mostrado abajo, los esfuerzos principales normales y cortantes.

$$\begin{vmatrix} 10 & -5 & 0 \\ -5 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{vmatrix} \text{ MPa}$$

Respuestas: $\sigma_1 = 30.0$ MPa; $\sigma_2 = 22.1$ MPa; $\sigma_3 = 8.0$ MPa; $\tau_1 = 7.1$ MPa; $\tau_2 = 11.0$ MPa; $\tau_3 = 4.0$ MPa.

6. Determine para el estado de esfuerzos mostrado abajo los esfuerzos principales normales y cortantes.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 300 \\ 0 & -400 & 0 \\ 300 & 0 & -800 \end{vmatrix} \text{ MPa}$$

Respuestas: $\sigma_1 = 100$ MPa; $\sigma_2 = -400$ MPa; $\sigma_3 = -900$ MPa; $\tau_1 = 250$ MPa; $\tau_2 = 500$ MPa; $\tau_3 = 250$ MPa.

7. Sobre una placa de espesor muy pequeño en la cual el plano xy coincide con el plano de la placa y el eje z es normal al plano de la placa, están actuando los esfuerzos $\sigma_x = 90$ MPa, $\sigma_y = 40$ MPa, $\tau_{xy} = -20$ MPa. Determine los valores de esfuerzo $\sigma_{x_1}, \sigma_{y_1}, \tau_{x_1y_1}$ que actúan sobre el plano x_1y_1 , el cual está definido por una rotación de 40° sobre el plano xy alrededor del eje z , en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj.

Respuestas: $\sigma_{x_1} = 49.6$ MPa; $\sigma_{y_1} = 80.4$ MPa; $\tau_{x_1y_1} = -28.1$ MPa.

8. En el estado de esfuerzos del ejercicio 7, determine los esfuerzos principales y la dirección de los esfuerzos principales respecto del eje x .

Respuestas: $\sigma_1 = 97$ MPa; $\sigma_2 = 33$ MPa; $\theta_{N1} = -19.3^\circ$; $\theta_{N2} = 25.7^\circ$

9. En el estado de esfuerzos del ejercicio 7 determine los esfuerzos cortantes principales y su dirección respecto del eje x .

Respuestas: $\tau_{\text{máx}} = 32$ MPa; $\tau_{\text{mín}} = -32$ MPa; $\theta_S = 25.7^\circ$.

Ejercicios de final de capítulo (continuación)

3

10. Dado el tensor de esfuerzos

$$\begin{vmatrix} 80 & 20 & -40 \\ 20 & -30 & 30 \\ -40 & 30 & 50 \end{vmatrix}$$

encuentre las componentes hidrostática y desviadora.

Respuestas:

$$\text{Componente hidrostática: } \sigma_m \delta_{ij} = \begin{vmatrix} 33.33 & 0 & 0 \\ 0 & 33.33 & 0 \\ 0 & 0 & 33.33 \end{vmatrix}$$

$$\text{Componente desviadora: } \sigma'_{ij} = \begin{vmatrix} 46.67 & 20 & -40 \\ 20 & -63.33 & 30 \\ -40 & 30 & 16.67 \end{vmatrix}$$

11. Dibuje el círculo de Mohr para el estado de esfuerzos referido a los ejes coordenados xy del ejercicio 8. Determine mediante esta gráfica los esfuerzos con respecto a los ejes coordenados x_1y_1 y los esfuerzos principales normales y de corte y compruebe los resultados con los obtenidos en los ejercicios 7, 8 y 9.

APÉNDICE A

A.1. Determinación de los esfuerzos normales principales. Método goniométrico (Johnson y Mellor, 1973)

Como se demostró en la sección 1.7, un estado tridimensional de esfuerzos $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ que está actuando sobre un elemento de volumen, es equivalente a un estado de esfuerzos principales $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Los valores de estos esfuerzos principales son las soluciones de la ecuación cúbica:

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0 \quad (\text{A.1.1})$$

I_1, I_2, I_3 son las invariantes de esfuerzo y están relacionadas con los esfuerzos referidos a los ejes xyz por las relaciones:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$I_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2$$

$$I_3 = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2$$

El método se va a ilustrar con un ejemplo. Suponga que se tiene un estado de esfuerzos actuando sobre un elemento de volumen como se muestra en la figura A.1.1. Los esfuerzos están en MPa, o en cualquier dimensión apropiada para esfuerzos.

Las invariantes de esfuerzo son:

$$I_1 = 8 + 6 + 4 = 18$$

$$I_2 = (8)(6) + (6)(4) + (4)(8) - (3^2 + 4^2 + 5^2) = (104) - (50) = 54$$

$$I_3 = (8)(6)(4) + (2)(3)(4)(5) - (8)(4^2) + (6)(5^2) + (4)(3^2) = (312) - (314) = -2$$

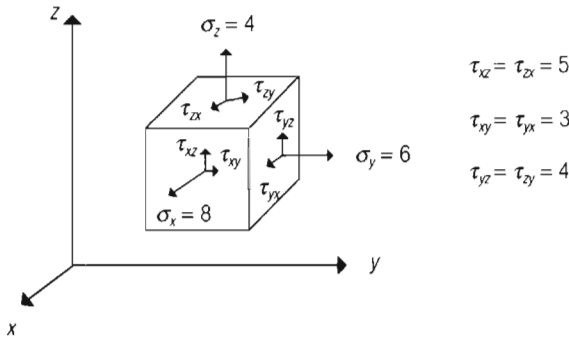


Figura A.1.1. Estado de esfuerzos en el elemento cúbico.

Al utilizar las invariantes de esfuerzo en la ecuación A.1.1 resulta la ecuación cúbica:

$$\sigma^3 - 18\sigma^2 + 54\sigma + 2 = 0 \tag{A.1.2}$$

Se plantea la igualdad:

$$\sigma = \sigma' + \frac{I_1}{3}$$

en este ejemplo:

$$\sigma = \sigma' + 6 \tag{i}$$

Se aplica *i* en A.1.2:

$$(\sigma' + 6)^3 - 18(\sigma' + 6)^2 + 54(\sigma' + 6) + 2 = 0 \tag{ii}$$

Se desarrolla ii

$$\left[\sigma'^3 + 18\sigma'^2 + 108\sigma' + 216 \right] - \left[18\sigma'^2 + 216\sigma' + 648 \right] + \left[54\sigma' + 324 \right] + 2 = 0 \tag{iii}$$

reduciendo términos semejantes en iii

$$\sigma'^3 - 54\sigma' - 106 = 0 \tag{iv}$$

Se hace uso de la identidad:

$$\cos 3\theta = 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta \tag{v}$$

La ecuación v se ordena en la forma:

$$\cos^3 \theta - \frac{3}{4} \cos \theta - \frac{1}{4} \cos 3\theta = 0 \quad (\text{vi})$$

Se aplica la expresión:

$$\sigma' = r \cos \theta \quad (\text{vii})$$

en la ecuación iv:

$$r^3 \cos^3 \theta - 54r \cos \theta - 106 = 0 \quad (\text{viii})$$

Al ordenar la ecuación viii para que se asemeje a la ecuación vi resulta:

$$\cos^3 \theta - \frac{54}{r^2} \cos \theta - \frac{106}{r^3} = 0 \quad (\text{ix})$$

Las ecuaciones ix y vi son idénticas si se satisface primero la identidad

$$\frac{3}{4} = \frac{54}{r^2}$$

es decir, si

$$r = \left[\frac{54 \times 4}{3} \right]^{1/2}$$

de donde

$$r = 8.4853$$

y, segundo, la identidad:

$$\frac{106}{r^3} = \frac{1}{4} \cos 3\theta$$

de donde resulta:

$$\cos 3\theta = \frac{4 \times 106}{(8.4853)^3} = \frac{424}{610.9443}$$

$$\cos 3\theta = 0.6940$$

Por tanto:

$$3\theta_1 = 46.0524^\circ$$

$$\theta_1 = 15.35^\circ$$

Se obtienen otras dos soluciones a partir de la expresión:

$$\theta_{2,3} = \frac{360 \pm 3\theta_1}{3}$$

entonces

$$\theta_2 = \frac{360 - 46.0524}{3} = \frac{313.9476}{3}$$

$$\theta_2 = 104.649^\circ$$

y también

$$\theta_3 = \frac{360 + 46.0524}{3} = \frac{406.0524}{3}$$

$$\theta_3 = 135.35^\circ$$

La utilización de los valores de r , θ_1 , θ_2 , θ_3 en la ecuación vii y de los valores resultantes en i permite estimar los valores de σ_1 , σ_2 , σ_3 ; haciendo esto se obtiene sucesivamente:

$$\sigma_1 = \sigma' + 6 = r \cos \theta_1 + 6 = 8.4853 \cos(15.35) + 6$$

$$\sigma_1 = 14.182$$

Igualmente para σ_2 :

$$\sigma_2 = r \cos \theta_2 + 6 = 8.4853 \cos(104.649) + 6$$

$$\sigma_2 = 3.8541$$

para σ_3 :

$$\sigma_3 = r \cos \theta_3 + 6 = 8.4853 \cos(135.35) + 6$$

$$\sigma_3 = -0.03655$$

La comprobación de las soluciones σ_1 , σ_2 , σ_3 , de la ecuación A.1.2, se realiza simplemente aplicando en esta ecuación cada uno de los valores calculados, los cuales la deben satisfacer.

A.2. Método corto para resolver la ecuación cúbica

El procedimiento para obtener la ecuación cúbica es el mismo utilizado en A.1; por esta razón no se repite. Ahora bien,

$$\sigma^3 - 18\sigma^2 + 54\sigma + 2 = 0 \quad (\text{A.1.2})$$

se puede resolver utilizando las siguientes ecuaciones:

$$\cos 3\theta = \frac{2I_1^3 - 9I_1I_2 + 27I_3}{2\left[I_1^2 - 3I_2\right]^{3/2}} \quad (a)$$

$$\theta_2 = \frac{360 - 3\theta_1}{3} \quad (b)$$

$$\theta_3 = \frac{360 + 3\theta_1}{3} \quad (c)$$

$$r = \frac{2(I_1^2 - 3I_2)^{1/2}}{3} \quad (d)$$

$$\sigma = r \cos \theta_i + \frac{I_1}{3} \quad (e)$$

En el ejemplo anterior:

$$I_1 = 18$$

$$I_2 = 54$$

$$I_3 = -2$$

Aplicando valores en a

$$\cos 3\theta_1 = \frac{2(18)^3 - 9(18)(54) + 27(-2)}{2[18^2 + 3(54)]^{3/2}}$$

$$\cos 3\theta_1 = 0.694$$

$$3\theta_1 = 46.05^\circ$$

$$\theta_1 = 15.35^\circ$$

$$\theta_2 = \frac{360 - 3(15.35)}{3}$$

$$\theta_2 = 104.65^\circ$$

$$\theta_3 = \frac{360 + 3(15.35)}{3}$$

$$\theta_3 = 135.35^\circ$$

El valor de r se determina mediante la ecuación d :

$$r = \frac{2[(18)^2 - 3(54)]^{1/2}}{3}$$

$$r = 8.4853$$

Los valores de los esfuerzos normales principales se calculan empleando la ecuación e ; los valores de θ_1 y de r son muy aproximados a los estimados por el procedimiento largo, por lo que se hace innecesario repetir el cálculo de los tres esfuerzos σ_i .

A.3. Caso particular. Uno de los esfuerzos normales de un estado de esfuerzos es un esfuerzo normal principal

Este caso particular se puede resolver también por el método goniométrico; sin embargo, se puede acortar el procedimiento de estimación utilizando el método alternativo que se ilustra a continuación mediante un ejemplo. Determinar los esfuerzos normales principales del siguiente estado de esfuerzos:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} \text{ kPa}$$

La ecuación cúbica para este estado de esfuerzos es

$$\begin{aligned} I_1 &= 2 + 0 + 5 = 7 \\ I_2 &= (2)(0) + (0)(5) + (5)(2) - (1)^2 - (0)^2 - (0)^2 = 9 \\ I_3 &= (2)(0)(5) + (2)(1)(0)(0) - (2)(0)^2 - (0)(0)^2 - (5)(1)^2 = -5 \end{aligned}$$

Aplicando valores en la ecuación A.1.2:

$$\sigma^3 - 7\sigma^2 + 9\sigma + 5 = 0 \tag{A.3.1}$$

En este estado de esfuerzos, los esfuerzos cortantes en el plano z valen cero, es decir, $\tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$; por lo tanto, el esfuerzo $\sigma_z = \sigma = 5$ es un esfuerzo normal principal y es por eso una solución para la ecuación cúbica A.3.1. Se puede dividir la ecuación A.3.1 entre $\sigma - 5$ para encontrar una ecuación cuadrática cuya solución produzca las otras dos soluciones de A.3.1.

$$\frac{\sigma^3 - 7\sigma^2 + 9\sigma + 5}{\sigma - 5} = \sigma^2 - 2\sigma - 1$$

La ecuación A.3.1 se puede escribir como el producto de dos factores:

$$(\sigma - 5)(\sigma^2 - 2\sigma - 1) = 0$$

Esta ecuación se satisface si cualquiera de los dos factores vale cero, por eso:

$$\sigma^2 - 2\sigma - 1 = 0$$

Las soluciones de esta ecuación son las soluciones faltantes de la ecuación cúbica

$$\sigma_{2,3} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-1)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2}$$

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= 2.4142 \text{ kPa} = 2414.2 \text{ Pa} \\ \sigma_3 &= -0.4142 \text{ kPa} = -414.2 \text{ Pa} \\ \sigma_1 &= 5 \text{ kPa} = 5000 \text{ Pa} \end{aligned}$$

CAPÍTULO 2

Deformación, rapidez de deformación y relaciones constitutivas elásticas

2.1. Deformación infinitesimal en un punto

Cuando al moverse un cuerpo continuo se produce un cambio en la posición relativa de dos puntos del cuerpo, se dice que el cuerpo sufrió una deformación. Si por el contrario, en este movimiento, la distancia entre cualquier par de puntos del cuerpo permanece constante, se dice que el cuerpo es rígido y los desplazamientos que experimenta el cuerpo rígido pueden ser de translación o de rotación. La deformación es una cantidad que depende de los movimientos relativos de dos o tres puntos en el cuerpo y, por esta razón, está relacionada únicamente con los desplazamientos de deformación. La deformación puede ser de naturaleza elástica o plástica.

Para el análisis de la deformación se consideran los puntos P y Q (figura 2.1.1), separados una distancia infinitesimal del cuerpo sin deformar. Al deformarse el cuerpo, estos puntos experimentan desplazamientos PP' y QQ' , respectivamente; sus nuevas posiciones son P' y Q' , figura 2.1.1. La definición de deformación supone que las distancias PQ y $P'Q'$ son diferentes, es decir, que hay un desplazamiento relativo de Q con respecto a P .

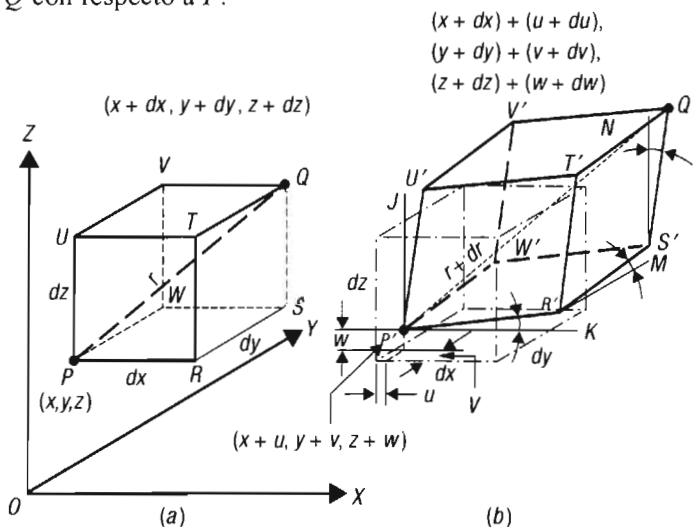


Figura 2.1.1. Deformación de un elemento de volumen de un cuerpo (Slater, 1977).

Para un elemento de volumen tan pequeño como el mostrado en la figura 2.1.1, puede considerarse que la deformación es homogénea. La suposición anterior implica que líneas rectas paralelas continuarán siendo rectas y paralelas, que superficies planas continuarán siendo planas y también que, en el caso de líneas rectas con la misma orientación, la relación del cambio de longitud a la longitud original es la misma; por tanto, dos líneas rectas paralelas de la misma longitud serán alargadas o serán contraídas la misma magnitud.

DESPLAZAMIENTO DEL PUNTO P

El análisis de la deformación se inicia considerando que las coordenadas cartesianas del punto P son x, y, z ; y las de P' después de la deformación son $x + u, y + v, z + w$; u, v, w son las proyecciones del desplazamiento PP' sobre los planos xoz, xoy, yoz , paralelas, respectivamente, a los ejes ox, oy, oz . Los desplazamientos son de carácter infinitesimal y son funciones continuas de las coordenadas x, y, z .

DESPLAZAMIENTOS DEL PUNTO Q Y TENSOR DE DESPLAZAMIENTOS RELATIVOS

Al moverse el punto P hacia P' , la arista PR del elemento de volumen se alarga a $P'R'$ y experimenta un movimiento angular $KP'R'$. La arista RS se alarga a $R'S'$ y tiene un movimiento angular $MR'S'$, y la arista SQ se alarga a $S'Q'$ con un movimiento angular $NS'Q'$. Debido a que la deformación es homogénea, los lados WS, PW, WV experimentan alargamientos y movimientos angulares de la misma intensidad que los lados paralelos correspondientes, $WS//PR, PW//RS, WV//SQ$.

Cada una de las seis aristas del paralelepípedo experimenta, además del alargamiento, dos movimientos angulares; se puede observar, por ejemplo, que la arista PR tiene una componente angular $KP'R'$ paralela al plano xoz (figura 2.1.2), y una componente angular $IU'T'$ paralela al plano xoy (figura 2.1.4). El desplazamiento del punto Q respecto de P está compuesto de los mismos movimientos.

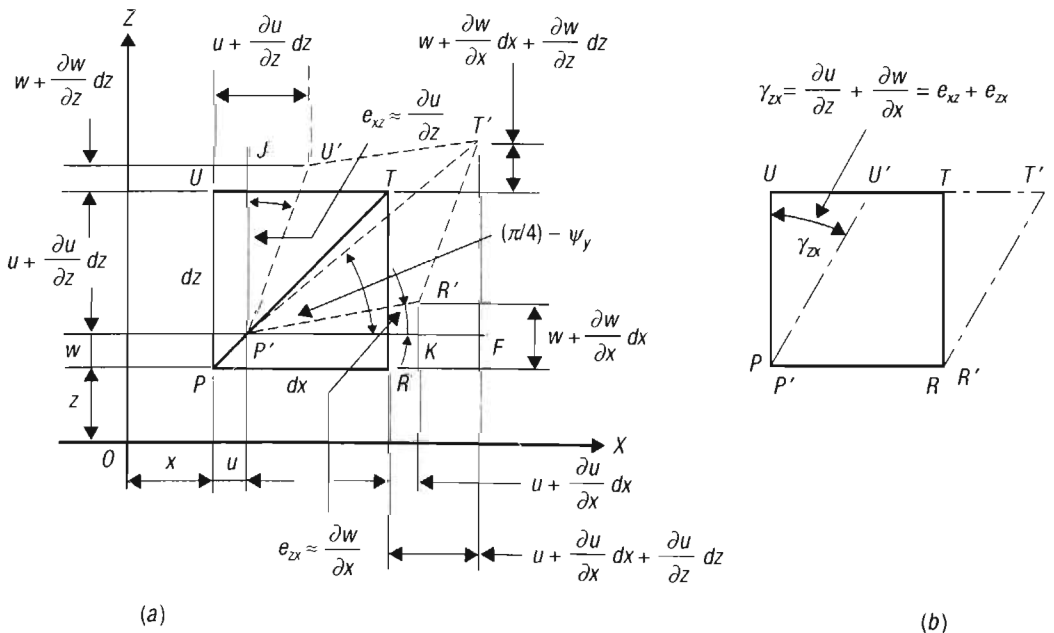


Figura 2.1.2. Deformaciones lineal y de corte y rotación en el plano xoz (Slater, 1977).

Antes de la deformación, las coordenadas de Q son $(x + dx)$, $(y + dy)$, $(z + dz)$; después de la deformación son $\{(x + dx) + (u + \partial u)\}$, $\{(y + dy) + (v + \partial v)\}$, $\{(z + dz) + (w + \partial w)\}$; en forma similar a los desplazamientos de P , los desplazamientos ∂u , ∂v , ∂w son las proyecciones de los desplazamientos de Q respecto de P sobre los planos xoz , xoy , $yozy$, paralelas, respectivamente, a los ejes ox , oy , oz .

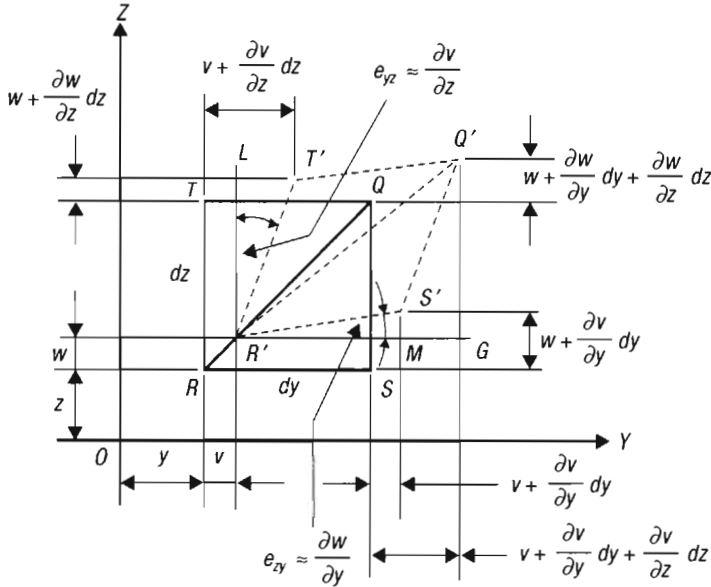


Figura 2.1.3. Deformaciones lineal y de corte en el plano $yozy$ (Slater, 1977).

Así como los desplazamientos de P , u, v, w son funciones continuas de x, y, z ; $(u + \partial u)$, $(v + \partial v)$, $(w + \partial w)$ son funciones continuas de $(x + dx)$, $(y + dy)$, $(z + dz)$. Expresando lo anterior en forma matemática para el desplazamiento u :

$$\text{si } u = f(x, y, z), \text{ entonces } (u + \partial u) = f\{(x + dx), (y + dy), (z + dz)\}$$

Esta expresión se puede desarrollar mediante el teorema de Taylor:

$$u + \partial u = f(x, y, z) + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz + \text{términos con potencias } \partial x, \partial y, \partial z \text{ superiores a uno.}$$

Debido a que $u = f(x, y, z)$ es una cantidad sumamente pequeña, los términos con potencias más altas de uno pueden ser despreciados. Simplificando, la expresión anterior se reduce a:

$$\partial u = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \tag{2.1.1a}$$

ANÁLISIS DE LOS TÉRMINOS DE LA ECUACIÓN 2.1.1a

El segundo miembro de la ecuación expresa que ∂u está formada por tres componentes; el primero es función exclusiva de ∂x ; el segundo lo es de ∂y y el tercero de ∂z . El término $(\partial u / \partial x)dx$ es la proyección del desplazamiento de R en relación con P sobre el plano oxz , paralela al eje ox (figura 2.1.2). El término $(\partial u / \partial y)dy$ es la com-

ponente de desplazamiento de Q medido paralelo al eje ox , producto del movimiento angular de RS sobre el plano xoy (figura 2.1.4). El último término $(\partial u / \partial z)dz$ es la componente de desplazamiento de Q paralelo a ox , resultado del movimiento angular de SQ sobre el plano xoz (figura 2.1.2a). En la ecuación $\partial u / \partial x$ es la deformación lineal en P en la dirección ox , y se denota por e_x .

Se interpreta esta deformación lineal como la tasa de movimiento en la dirección ox de un punto sobre una línea paralela a ox en P ; $\partial u / \partial y$ es la tasa de corte de planos paralelos a ox y perpendiculares a oy , es la deformación angular de RS en el plano xo y se designa por e_{xy} ; $\partial u / \partial z$ es la deformación angular de SQ en el plano xoz y se identifica por e_{xz} .

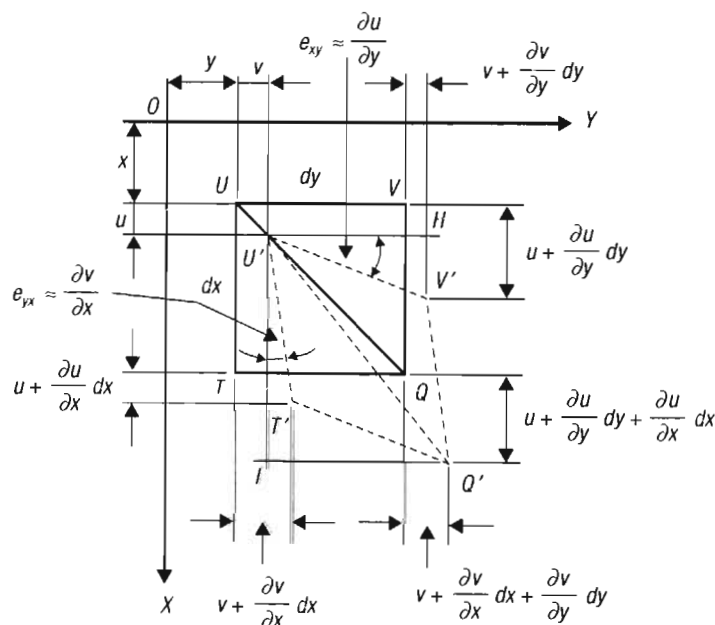


Figura 2.1.4. Deformaciones lineal y de corte en el plano xoy (Slater, 1977).

Las ecuaciones para los desplazamientos relativos ∂v , en el plano xoy paralelo al eje oy , así como para ∂w , en el plano yoz paralelo al eje oz , se obtienen en la misma forma como se derivó la ecuación 2.1.1a para ∂u :

$$\partial v = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz \quad (2.1.1b)$$

$$\partial w = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz \quad (2.1.1c)$$

En notación tensorial las ecuaciones 2.1.1 se pueden representar por

$$\partial u_i = e_{ij} \partial x_j$$

DESPLAZAMIENTOS RELATIVOS EN EL PLANO xoz CON RESPECTO AL EJE oy

El lado PR del paralelepípedo se mueve hacia $P'R'$, y el movimiento produce un ángulo $KP'R' = \alpha_{zx}$; la proyección de este ángulo sobre el plano xoz es $\partial w / \partial x$. El

lado PU se mueve hacia $P'U'$ y el lado SQ se mueve hacia $S'Q'$. En ambos movimientos se origina un ángulo que, debido al carácter homogéneo de la deformación, es igual; es decir, $\alpha_{xz} = JP'U' = NS'Q'$; la proyección de este ángulo sobre el plano xoz es igual a $\partial u / \partial z$.

Se demuestra a continuación la igualdad entre el ángulo y las proyecciones para estos movimientos.

Se van a derivar las ecuaciones para los desplazamientos relativos mediante las figuras de 2.1.2 a 2.1.4.

Conforme a la figura 2.1.2a:

$$\alpha_{zx} \approx \tan \alpha_{zx} = \frac{R'K}{P'K} = \frac{\frac{\partial w}{\partial x} dx}{dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx}$$

debido a que el ángulo $\alpha_{zx} \rightarrow 0$, entonces $\tan \alpha_{zx} \rightarrow \alpha_{zx}$.

$$\text{Dividiendo la ecuación anterior entre } dx \text{ resulta: } \alpha_{zx} \approx \tan \alpha_{zx} = \frac{\frac{\partial w}{\partial x}}{1 + \frac{\partial u}{\partial x}}$$

como $\frac{\partial u}{\partial x}$ tiene un valor muy pequeño en relación con 1, se puede aproximar:

$$\alpha_{zx} \approx \frac{\partial w}{\partial x} = e_{zx}$$

En la misma forma:

$$\alpha_{xz} \approx \tan \alpha_{xz} = \frac{U'J}{P'J} = \frac{\frac{\partial u}{\partial z} dz}{dz + \frac{\partial w}{\partial z} dz}$$

Dividiendo entre dz :

$$\alpha_{xz} \approx \tan \alpha_{xz} = \frac{\frac{\partial u}{\partial z}}{1 + \frac{\partial w}{\partial z}}$$

A causa de que $\frac{\partial w}{\partial z}$ es muy pequeña en relación con 1:

$$\alpha_{xz} \approx \frac{\partial u}{\partial z} = e_{xz}$$

Utilizando la figura 2.1.3 se deducen expresiones para las deformaciones de corte en el plano yoz con respecto al eje ox :

$$\frac{\partial v}{\partial z} = e_{yz}; \frac{\partial w}{\partial y} = e_{zy}$$

La figura 2.1.4 es útil para derivar expresiones para las deformaciones de corte en el plano xoy con respecto al eje oz . Así:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e_{xy}; \frac{\partial v}{\partial x} = e_{yx}$$

Se pueden representar los desplazamientos relativos en forma tensorial. La representación tensorial de los desplazamientos relativos (los coeficientes de dx , dy , dz en las ecuaciones 2.1.1) es designada como el tensor de desplazamientos relativos (e_{ij}):

$$e_{ij} = \begin{vmatrix} e_x & e_{xy} & e_{yz} \\ e_{yx} & e_y & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{zy} & e_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} \quad (2.1.2)$$

El tensor no es simétrico con respecto a su diagonal principal; esto es debido a que en general los desplazamientos producen tanto deformaciones como rotaciones del cuerpo rígido. Se derivan ahora el tensor de deformación y el tensor de rotación que produce el desplazamiento.

La teoría de tensores establece que cada tensor de segundo orden se puede descomponer en un tensor simétrico y en un tensor antisimétrico; el tensor simétrico representa deformación pura, en tanto que el tensor antisimétrico representa rotación como un cuerpo rígido. Matemáticamente:

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} + \bar{\omega}_{ij} \quad (2.1.3)$$

ε_{ij} es el tensor de deformación y $\bar{\omega}_{ij}$ es el tensor de rotación.

2.2. Deformaciones nominales. Representación tensorial y matricial

La deformación que experimenta el ángulo UPR al convertirse en el ángulo $U'P'R'$ es la denominada *deformación nominal en corte* y queda expresada por γ_{zx} , figura 2.1.2b; conforme al análisis anterior:

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = e_{xz} + e_{zx} \quad (2.2.1a)$$

ésta es la deformación nominal en corte, en el plano xoz , figura 2.1.2b.

La deformación nominal en corte paralela al plano $yozy$, figura 2.1.3, es:

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = e_{zy} + e_{yz} \quad (2.2.1b)$$

y en el plano xoy (figura 2.1.4), resulta:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = e_{yx} + e_{xy} \quad (2.2.1c)$$

Las deformaciones normales del paralelepípedo de la figura 2.1.1 son:

$$e_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.2.1d)$$

$$e_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.2.1e)$$

$$e_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.2.1f)$$

Se concluye que la deformación infinitesimal de un paralelepípedo en un punto P está definida por tres componentes de deformación de corte y por tres componentes normales.

Ejercicio 2.2.1

1

Dado el campo de desplazamiento del punto P de la figura 2.1.1:

$$u = (4x^3 + 2x^3y^2 + xz^2 + y^2z^2 + 5)(10^{-3})$$

$$v = (2xy^3 + 3x^2y^4 + 2y^3z^3 + 3z^2 + 4)(10^{-3})$$

$$w = (xz^3 + 2x^2y^3 + 3xz + 4yz^2 + 2)(10^{-3})$$

determine las deformaciones correspondientes al punto (1.1.1) conforme a las ecuaciones 2.2.1. Todos los desplazamientos están expresados en mm.

Respuesta:

Deformaciones normales

$$e_x = \frac{\partial u}{\partial x} = [12x^2 + 6x^2y^2 + z^2] (10^{-3})$$

Aplicando las coordenadas del punto

$$e_x = [12(1)^2 + 6(1)^2(1)^2 + (1)^2] (10^{-3})$$

$$e_x = 19 (10^{-3})$$

$$e_y = \frac{\partial v}{\partial y} = [6xy^2 + 12x^2y^3 + 6y^2z^3] (10^{-3})$$

$$e_y = [6(1)(1)^2 + 12(1)^2(1)^3 + 6(1)^2(1)^3] (10^{-3})$$

$$e_y = 24 (10^{-3})$$

Ejercicio 2.2.1 (continuación)

2

$$e_z = \frac{\partial w}{\partial z} = [3xz^2 + 3x + 8yz] (10^{-3})$$

$$e_z = [3(1)(1)^2 + 3(1) + 8(1)(1)] (10^{-3})$$

$$e_z = 14 (10^{-3})$$

Deformaciones tangenciales

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = [2y^3 + 6xy^4] (10^{-3}) + [4x^3y + 2yz^2] (10^{-3})$$

$$\gamma_{xy} = [2(1)^3 + 6(1)(1)^4] (10^{-3}) + [4(1)^3(1) + 2(1)(1)^2] (10^{-3})$$

$$\gamma_{xy} = [8] (10^{-3}) + [6] (10^{-3})$$

$$\gamma_{xy} = 14 (10^{-3})$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = [6x^2y^2 + 4z^2] (10^{-3}) + [6y^3z^2 + 6z] (10^{-3})$$

$$\gamma_{yz} = [6(1)^2(1)^2 + 4(1)^2] (10^{-3}) + [6(1)^3(1)^2 + 6(1)] (10^{-3})$$

$$\gamma_{yz} = [10] (10^{-3}) + [12] (10^{-3})$$

$$\gamma_{yz} = 22 (10^{-3})$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = [2xz + 2y^2z] (10^{-3}) + [z^3 + 4xy^3 + 3z] (10^{-3})$$

$$\gamma_{zx} = [2(1)(1) + 2(1)^2(1)] (10^{-3}) + [(1)^3 + 4(1)(1)^3 + 3(1)] (10^{-3})$$

$$\gamma_{zx} = [4] (10^{-3}) + [8] (10^{-3})$$

$$\gamma_{zx} = 12 (10^{-3})$$

Para representar las deformaciones nominales en forma de un tensor simétrico, se hacen algunas consideraciones. Los términos de deformación normal del tensor e_{ij} , se relacionan con la mitad de las deformaciones nominales tangenciales γ_{ij} :

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (\gamma_{ij}) \quad (2.2.2)$$

Los términos del tensor son:

$$e_{zx} = e_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (2.2.2a)$$

$$e_{yz} = e_{zy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (2.2.2b)$$

$$e_{xy} = e_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (2.2.2c)$$

Las deformaciones nominales normales son iguales a los desplazamientos relativos:

$$e_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.2.2d)$$

$$e_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.2.2e)$$

$$e_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.2.2f)$$

La representación tensorial y matricial es entonces:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \begin{vmatrix} e_{xx} & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & e_{yy} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & e_{zz} \end{vmatrix}$$

$$e_{ij} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} \quad (2.2.3)$$

e_{ij} es un tensor simétrico porque $e_{ij} = e_{ji}$ y representa la componente de deformación pura del tensor de deformación.

2.3. Rotaciones. Representación tensorial y matricial

Para derivar las ecuaciones que permiten determinar las rotaciones, se deben hacer algunas consideraciones. Se analiza un elemento cúbico en el punto P , cuyas dimensiones son $dx = dy = dz$; las deformaciones normales son igual a cero, es decir, $e_x = e_y = e_z = 0$. Se considera que la línea PT , la cual forma un ángulo de 45° con el eje ox en la figura 2.1.2a, experimenta una rotación, ψ_y , igual a un ángulo positivo alrededor del eje oy , en el sentido de las manecillas del reloj; esto quiere decir que

PT gira en la dirección de las manecillas del reloj cuando un observador se encuentra en el origen O y dirige su mirada a lo largo de la dirección positiva del eje oy , hasta tomar la posición deformada $P'T'$. De la geometría de la figura 2.1.2a:

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \psi_y\right) = \frac{T'F}{P'F} = \frac{dz + \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial z} dz}{dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial z} dz}$$

Dividiendo entre dx :

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \psi_y\right) = \frac{1 + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}}{1 + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}}$$

Observe que:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dx}{dx} = 1$$

Como

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e_x = \frac{\partial v}{\partial y} = e_y = \frac{\partial w}{\partial z} = e_z = 0$$

entonces

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \psi_y\right) = \frac{1 + \frac{\partial w}{\partial x}}{1 + \frac{\partial u}{\partial z}} = \frac{1 + \frac{\partial w}{\partial x}}{1 - \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2} \approx \frac{1 + \frac{\partial w}{\partial x}}{1 - \frac{\partial u}{\partial z}} = \left(1 + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \left(1 - \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

la expresión $\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$ se desprecia por tener un valor muy pequeño.

Desarrollando el producto de los dos binomios y despreciando el producto de derivadas por ser muy pequeño, resulta:

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \psi_y\right) \approx 1 + \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \quad (a)$$

Tomando la tangente de la diferencia de los ángulos $\left(\frac{\pi}{4} - \psi_y\right)$:

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \psi_y\right) = \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan \psi_y}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \tan \psi_y} = \frac{1 - \tan \psi_y}{1 + \tan \psi_y}$$

Puesto que $\tan \psi_y \rightarrow \psi_y$ cuando $\psi_y \rightarrow 0$:

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \psi_y\right) \approx \frac{1 - \psi_y}{1 + \psi_y} \quad (b)$$

Sustituyendo por los valores de la ecuación a en la b y despejando $(1 - \psi_y)$ resulta:

$$1 - \psi_y \approx (1 + \psi_y) \left(1 + \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right) = 1 + \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} + \psi_y \left(1 + \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

Realizando varios pasos algebraicos, se obtiene la ecuación para la rotación ψ_y :

$$\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = \psi_y \left(2 + \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

de donde:

$$\psi_y \approx \frac{\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}}{2 + \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}}$$

En esta ecuación se desprecia la diferencia $\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}$ porque su valor es pequeño en comparación con el 2 del denominador, por eso:

$$\psi_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} (e_{xz} - e_{zx})$$

Siguiendo el mismo procedimiento se pueden obtener las rotaciones alrededor de los ejes ox , así como oz . Las rotaciones ψ_x y ψ_y serán positivas si la rotación tiene lugar en el sentido de las manecillas del reloj cuando el observador se encuentra en el origen y mira a lo largo de las direcciones positivas de los ejes ox y oz , respectivamente. Resumiendo:

$$\psi_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} (e_{zy} - e_{yz}) \quad (2.3.1a)$$

$$\psi_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} (e_{xz} - e_{zx}) \quad (2.3.1b)$$

$$\psi_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} (e_{yx} - e_{xy}) \quad (2.3.1c)$$

La figura 2.3.1 muestra en forma esquemática que el desplazamiento de un punto de un cuerpo puede considerarse como constituido por una deformación cortante (ecuación 2.2.1) y por una rotación de cuerpo rígido (ecuación 2.3.1), tal como lo establece la teoría de tensores.

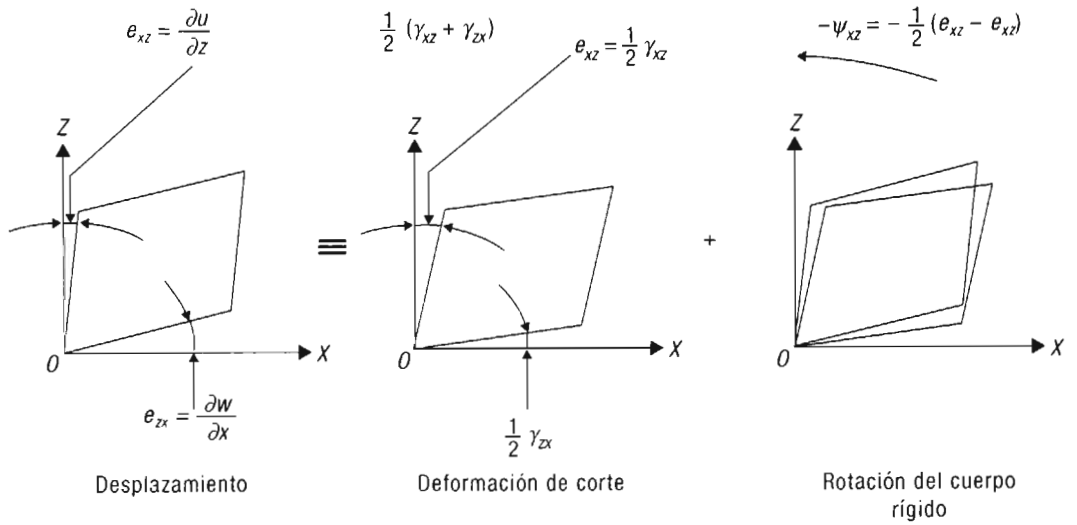


Figura 2.3.1. Componentes de corte y de rotación del desplazamiento.

La rotación se representa en notación tensorial y matricial:

$$\psi_y = \frac{1}{2}(e_{ij} - e_{ji}) = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) & 0 \end{vmatrix}$$

$$\psi_y = \begin{vmatrix} 0 & -\psi_z & \psi_y \\ \psi_z & 0 & -\psi_x \\ -\psi_y & \psi_x & 0 \end{vmatrix} \quad (2.3.2)$$

ψ_{ij} es un tensor antisimétrico porque $\psi_{ij} = -\psi_{ji}$; representa la componente de rotación del tensor de deformación y por esta razón se le designa también *tensor rotacional*.

Es conveniente diferenciar entre deformación por corte puro y deformación por corte simple. En el primer tipo de corte, el cambio de forma es producido por desplazamientos en corte de dos conjuntos de planos mutuamente perpendiculares; la figura 2.3.2a presenta este tipo de deformación; la ecuación para estimar la deformación por corte puro es:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = e_{xy} + e_{yx} \quad (2.3.3a)$$

En la deformación de corte simple, el cambio de forma es producido por el desplazamiento de un solo conjunto de planos paralelos, como lo ilustra la figura 2.3.2b. La ecuación 2.3.3a se modifica porque $e_{yx} = 0$; entonces:

$$\gamma_{xy} = e_{xy} \quad (2.3.3b)$$

En página 76, la figura correcta es:

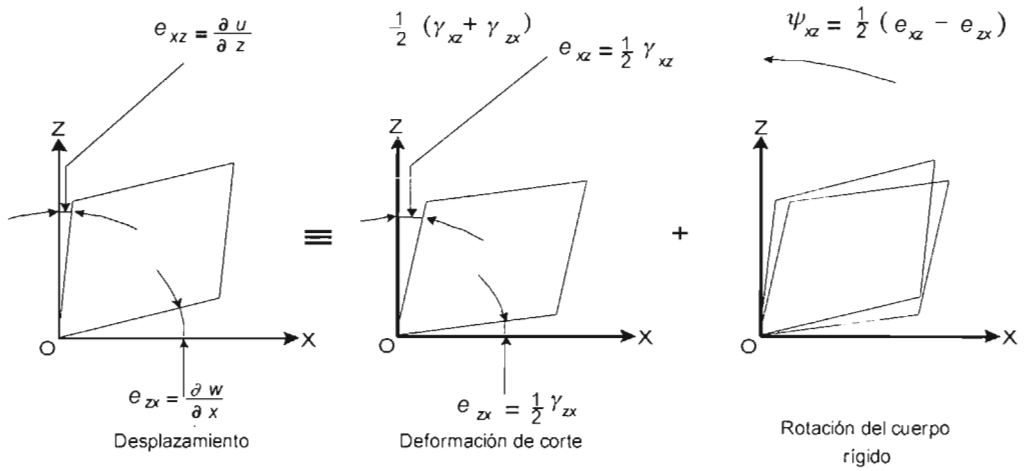


Figura 2.3.1. Componentes de corte y de rotación del desplazamiento

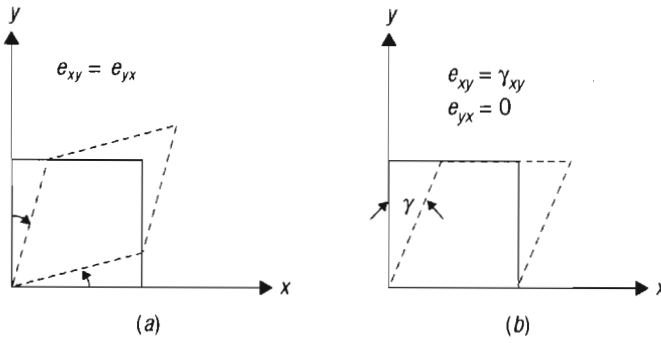


Figura 2.3.2. Deformación en corte puro (a); deformación en corte simple (b).

2.4. Ecuaciones de compatibilidad de deformación

Suponga que se tiene un cuerpo bidimensional, una placa metálica por ejemplo, la cual está constituida como si fuera un rompecabezas de pequeñas piezas cuadradas; se deforma la placa de manera que cada pieza experimente cambios en la longitud de sus aristas y cambios angulares; si se mide la magnitud de estos cambios, se podrá determinar la deformación que experimenta cada elemento de la placa mediante las ecuaciones anteriormente estudiadas. La tarea ahora es ensamblar todas las piezas deformadas de manera que la placa resulte continua sin hueco alguno.

En lugar de realizar físicamente la tarea de ensamble para verificar si los elementos son compatibles, es decir, si su ensamble para restituir la placa no produce huecos, se determina si las ecuaciones de compatibilidad se satisfacen. Existen dos tipos de ecuaciones de compatibilidad, las cuales se derivan a continuación.

De la ecuación 2.2.1a,

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \tag{a}$$

y de la ecuación 2.3.1b,

$$2\psi_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \tag{b}$$

Sumando miembro a miembro las ecuaciones a y b:

$$\gamma_{zx} + 2\psi_y = 2 \frac{\partial u}{\partial z} \tag{c}$$

Restando la ecuación b de la a

$$\gamma_{zx} - 2\psi_y = 2 \frac{\partial w}{\partial x} \tag{d}$$

Derivando c con respecto a x:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\gamma_{zx} + 2\psi_y) = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 2 \frac{\partial e_x}{\partial z} \tag{e}$$

Derivando d con respecto a z :

$$\frac{\partial}{\partial z}(\gamma_{zx} - 2\psi_y) = 2 \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} = 2 \frac{\partial e_z}{\partial x} \quad (f)$$

En las ecuaciones e y f se utilizaron $e_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, así como $e_z = \frac{\partial w}{\partial z}$, respectivamente.

Efectuando las derivaciones que están indicadas en las ecuaciones e, f :

$$\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial x} + 2 \frac{\partial \psi_y}{\partial x} = 2 \frac{\partial e_x}{\partial z} \quad (g)$$

$$\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial z} - 2 \frac{\partial \psi_y}{\partial z} = 2 \frac{\partial e_z}{\partial x} \quad (h)$$

Reordenando las ecuaciones g, h :

$$2 \frac{\psi_y}{\partial x} = 2 \frac{\partial e_x}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial x} \quad (i)$$

$$2 \frac{\partial \psi_y}{\partial z} = \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial z} - 2 \frac{\partial e_z}{\partial x} \quad (j)$$

Derivando la ecuación i con respecto a z y la ecuación j con respecto a x :

$$2 \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(2 \frac{\partial e_x}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial^2 e_x}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial x \partial z} \quad (k)$$

$$2 \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial z} - 2 \frac{\partial e_z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial x \partial z} - 2 \frac{\partial^2 e_z}{\partial x^2} \quad (l)$$

Igualando los segundos miembros de k y de l :

$$\frac{\partial^2 e_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 e_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial x \partial z}$$

La ecuación anterior es una ecuación de compatibilidad del primer tipo. Se pueden derivar otras dos ecuaciones de este tipo a partir de las ecuaciones 2.2.1 y 2.3.1, empleando el mismo procedimiento.

Resumen de ecuaciones de compatibilidad del primer tipo

$$\frac{\partial^2 e_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} \quad (2.4.1a)$$

$$\frac{\partial^2 e_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (2.4.1b)$$

$$\frac{\partial^2 e_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 e_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \quad (2.4.1c)$$

Las ecuaciones de compatibilidad del segundo tipo se derivan a continuación.

De la ecuación b se obtiene:

$$2\psi_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}$$

Derivando esta ecuación con respecto a y :

$$2 \frac{\partial \psi_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

Sumando y restando al segundo miembro de esta ecuación el término $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z}$, resulta:

$$2 \frac{\partial \psi_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

Aplicando en esta ecuación las ecuaciones 2.2.1b y 2.2.1c, resulta:

$$2 \frac{\partial \psi_y}{\partial y} = \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \quad (m)$$

Reordenando la ecuación g se obtiene:

$$2 \frac{\partial \psi_y}{\partial x} = -\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial x} + 2 \frac{\partial e_x}{\partial z}$$

Derivando esta ecuación con respecto a y resulta:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(2 \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(2 \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial x} + 2 \frac{\partial e_x}{\partial z} \right) \quad (n)$$

Aplicando la ecuación m en n , tendremos

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial x} + 2 \frac{\partial e_x}{\partial z} \right)$$

Y reordenando esta ecuación:

$$2 \frac{\partial^2 e_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right)$$

La ecuación anterior es una ecuación de compatibilidad del segundo tipo. Se pueden derivar otras dos ecuaciones de este tipo a partir de las ecuaciones 2.2.1 y 2.3.1 empleando el procedimiento seguido anteriormente.

Resumen de ecuaciones de compatibilidad del segundo tipo

$$2 \frac{\partial^2 e_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) \quad (2.4.1d)$$

$$2 \frac{\partial^2 e_y}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) \quad (2.4.1e)$$

$$2 \frac{\partial^2 e_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \quad (2.4.1f)$$

Ejercicio 2.4.1

1

Determinar si los siguientes campos de deformación son compatibles:

$$e_x = 2x^2 + 4y^2 + z$$

$$e_y = x^2 + 3z$$

$$e_z = 3x + 2y + z^2$$

$$\gamma_{xy} = 10xy$$

$$\gamma_{yz} = 0$$

$$\gamma_{zx} = 0$$

Respuestas:

Primera ecuación de compatibilidad (ecuación 2.4.1b):

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 e_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_y}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} = 10y; \quad \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 10$$

$$\frac{\partial e_x}{\partial y} = 8y; \quad \frac{\partial^2 e_x}{\partial y^2} = 8$$

$$\frac{\partial e_y}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial^2 e_y}{\partial x^2} = 2$$

Aplicando valores en la primera ecuación de compatibilidad:

$$10 = 8 + 2 = 10$$

Segunda ecuación de compatibilidad (ecuación 2.4.1c):

$$\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 e_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 e_z}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} = 0$$

$$\frac{\partial e_y}{\partial z} = 3; \quad \frac{\partial^2 e_y}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{\partial e_z}{\partial y} = 2; \quad \frac{\partial^2 e_z}{\partial y^2} = 0$$

Aplicando valores en la segunda ecuación de compatibilidad:

$$0 = 0 + 0$$

Ejercicio 2.4.1 (continuación)

2

Tercera ecuación de compatibilidad (ecuación 2.4.1a):

$$\frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 e_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_x}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} = 0$$

$$\frac{\partial e_z}{\partial x} = 3; \quad \frac{\partial^2 e_x}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial e_x}{\partial z} = 1; \quad \frac{\partial^2 e_x}{\partial z^2} = 0$$

Aplicando valores en la tercera ecuación de compatibilidad:

$$0 = 0 + 0$$

Cuarta ecuación de compatibilidad (ecuación 2.4.1d):

$$2 \frac{\partial^2 e_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\partial e_x}{\partial y} = 8y; \quad \frac{\partial^2 e_x}{\partial y \partial z} = 0; \quad 2 \frac{\partial^2 e_x}{\partial y \partial z} = 0$$

$$-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} = 0$$

Aplicando valores en la cuarta ecuación de compatibilidad:

$$0 = 0 + 0 + 0$$

Quinta ecuación de compatibilidad (ecuación 2.4.1e):

$$2 \frac{\partial^2 e_y}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\partial e_y}{\partial z} = 3; \quad \frac{\partial^2 e_y}{\partial z \partial x} = 0; \quad 2 \frac{\partial^2 e_y}{\partial z \partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} = 0; \quad -\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} = 0$$

Aplicando valores en la quinta ecuación de compatibilidad:

$$0 = 0$$

Ejercicio 2.4.1 (continuación)

3

Sexta ecuación de compatibilidad (ecuación 2.4.1f):

$$2 \frac{\partial^2 e_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\partial e_z}{\partial x} = 3; \quad \frac{\partial^2 e_z}{\partial x \partial y} = 0; \quad 2 \frac{\partial^2 e_z}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} = 0; \quad -\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} = 0$$

Aplicando valores en la sexta ecuación de compatibilidad:

$$0 = 0$$

Conclusión: todos los campos de deformación son compatibles.

2.5. Determinación de deformaciones

Las ecuaciones de esfuerzo del capítulo 1 son utilizadas para derivar las ecuaciones análogas de deformación; para este efecto se sustituyen los esfuerzos normales σ por las deformaciones normales ε , los esfuerzos cortantes τ por la deformación cortante dividida entre 2, $\gamma/2$, es decir:

$$\sigma_x \leftrightarrow \varepsilon_x; \tau_{xy} \leftrightarrow \frac{1}{2} \gamma_{xy}; \quad \sigma_y \leftrightarrow \varepsilon_y; \tau_{yz} \leftrightarrow \frac{1}{2} \gamma_{yz}; \quad \sigma_z \leftrightarrow \varepsilon_z; \tau_{zx} \leftrightarrow \frac{1}{2} \gamma_{zx} \quad (2.5.1a)$$

y, en el caso de esfuerzos y deformaciones principales,

$$\sigma_1 \leftrightarrow \varepsilon_1; \quad \sigma_2 \leftrightarrow \varepsilon_2; \quad \sigma_3 \leftrightarrow \varepsilon_3 \quad (2.5.1b)$$

Las flechas indican que se pueden intercambiar los símbolos de esfuerzo por los símbolos de deformación en las ecuaciones de esfuerzo para obtener las ecuaciones equivalentes de deformación y viceversa.

2.5.1. Deformación normal a un plano oblicuo

La ecuación de esfuerzo (1.6.1a), combinada con las ecuaciones 1.4.1a y 2.5.1a, se transforma en

$$\varepsilon_N = \varepsilon_x l^2 + \varepsilon_y m^2 + \varepsilon_z n^2 + \gamma_{xy} lm + \gamma_{yz} mn + \gamma_{zx} nl \quad (2.5.2)$$

La deformación normal se obtiene a partir de las ecuaciones 1.8.2 y 2.5.1b o de la ecuación 2.5.2, con deformaciones cortantes igual a cero.

$$\varepsilon_N = \varepsilon_1 l^2 + \varepsilon_2 m^2 + \varepsilon_3 n^2 \quad (2.5.3)$$

La deformación cortante principal sobre un plano oblicuo se obtiene combinando las ecuaciones 1.8.3 y 2.5.1b:

$$\gamma_N^2 = \left[\varepsilon_1^2 l^2 + \varepsilon_2^2 m^2 + \varepsilon_3^2 n^2 \right] - \left[\varepsilon_1 l^2 + \varepsilon_2 m^2 + \varepsilon_3 n^2 \right]^2 \quad (2.5.4)$$

2.5.2. Ecuaciones de transformación de deformaciones. Estado tridimensional

Utilizando las deformaciones en lugar de los esfuerzos de acuerdo con las ecuaciones 1.6.2, resulta:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x_1} = & \varepsilon_x \cos^2(x_1, x) + \varepsilon_y \cos^2(x_1, y) + \varepsilon_z \cos^2(x_1, z) + \gamma_{xy} \cos(x_1, x) \cos(x_1, y) + \\ & + \gamma_{yz} \cos(x_1, y) \cos(x_1, z) + \gamma_{zx} \cos(x_1, z) \cos(x_1, x) \end{aligned} \quad (2.5.5a)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{y_1} = & \varepsilon_x \cos^2(y_1, x) + \varepsilon_y \cos^2(y_1, y) + \varepsilon_z \cos^2(y_1, z) + \gamma_{xy} \cos(y_1, x) \cos(y_1, y) + \\ & + \gamma_{yz} \cos(y_1, y) \cos(y_1, z) + \gamma_{zx} \cos(y_1, z) \cos(y_1, x) \end{aligned} \quad (2.5.5b)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{z_1} = & \varepsilon_x \cos^2(z_1, x) + \varepsilon_y \cos^2(z_1, y) + \varepsilon_z \cos^2(z_1, z) + \gamma_{xy} \cos(z_1, x) \cos(z_1, y) + \\ & + \gamma_{yz} \cos(z_1, y) \cos(z_1, z) + \gamma_{zx} \cos(z_1, z) \cos(z_1, x) \end{aligned} \quad (2.5.5c)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{x_1 y_1} = & 2\varepsilon_x \cos(x_1, x) \cos(y_1, x) + 2\varepsilon_y \cos(x_1, y) \cos(y_1, y) + 2\varepsilon_z \cos(x_1, z) \cos(y_1, z) + \\ & + \gamma_{xy} [\cos(x_1, x) \cos(y_1, y) + \cos(x_1, y) \cos(y_1, x)] + \\ & + \gamma_{yz} [\cos(x_1, y) \cos(y_1, z) + \cos(x_1, z) \cos(y_1, y)] + \\ & + \gamma_{zx} [\cos(x_1, z) \cos(y_1, x) + \cos(x_1, x) \cos(y_1, z)] \end{aligned} \quad (2.5.5d)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{y_1 z_1} = & 2\varepsilon_x \cos(y_1, x) \cos(z_1, x) + 2\varepsilon_y \cos(y_1, y) \cos(z_1, y) + 2\varepsilon_z \cos(y_1, z) \cos(z_1, z) + \\ & + \gamma_{xy} [\cos(y_1, x) \cos(z_1, y) + \cos(y_1, y) \cos(z_1, x)] + \\ & + \gamma_{yz} [\cos(y_1, y) \cos(z_1, z) + \cos(y_1, z) \cos(z_1, y)] + \\ & + \gamma_{zx} [\cos(y_1, z) \cos(z_1, x) + \cos(y_1, x) \cos(z_1, z)] \end{aligned} \quad (2.5.5e)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{z_1 x_1} = & 2\varepsilon_x \cos(z_1, x) \cos(x_1, x) + 2\varepsilon_y \cos(z_1, y) \cos(x_1, y) + 2\varepsilon_z \cos(z_1, z) \cos(x_1, z) + \\ & + \gamma_{xy} [\cos(z_1, x) \cos(x_1, y) + \cos(z_1, y) \cos(x_1, x)] + \\ & + \gamma_{yz} [\cos(z_1, y) \cos(x_1, z) + \cos(z_1, z) \cos(x_1, y)] + \\ & + \gamma_{zx} [\cos(z_1, z) \cos(x_1, x) + \cos(z_1, x) \cos(x_1, z)] \end{aligned} \quad (2.5.5f)$$

Ejercicio 2.5.1

1

Transforme el conjunto de componentes cartesianos de deformación en el sistema $Oxyz$:

$$\varepsilon_x = 3 \left(10^{-4} \right); \quad \varepsilon_y = 2 \left(10^{-4} \right); \quad \varepsilon_z = (1) \left(10^{-4} \right); \quad \gamma_{xy} = (1) \left(10^{-4} \right); \quad \gamma_{yz} = 2 \left(10^{-4} \right); \quad \gamma_{zx} = 3 \left(10^{-4} \right)$$

Ejercicio 2.5.1 (continuación)

2

al conjunto de componentes cartesianos de deformación en el sistema $Ox_1y_1z_1$. Este último sistema fue obtenido girando un ángulo $\pi/4$, en el sentido contrario de las manecillas del reloj, los ejes xy , alrededor del eje z .

Respuesta: puesto que los ejes x_1 y y_1 forman un ángulo $\pi/4$ con los ejes x , y , los cosenos directrices de los ejes tienen los siguientes valores:

	x	y	z
x_1	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	0
y_1	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	0
z_1	0	0	1

Aplicando valores en las ecuaciones 2.5.5 resulta:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x_1} &= \left\{ 3 \left(1/\sqrt{2} \right)^2 \right\} (10^{-4}) + \left\{ 2 \left(1/\sqrt{2} \right)^2 \right\} (10^{-4}) + \left\{ (1)(0)^2 \right\} (10^{-4}) + \\ &\quad + \left\{ 1 \left(1/\sqrt{2} \right) \left(1/\sqrt{2} \right) \right\} (10^{-4}) + \left\{ 2 \left(1/\sqrt{2} \right) (0) \right\} (10^{-4}) + \left\{ 3 \left((0) \left(1/\sqrt{2} \right) \right) \right\} (10^{-4}) \\ \varepsilon_{x_1} &= 3 (10^{-4}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{y_1} &= \left\{ 3 \left(1/\sqrt{2} \right)^2 \right\} (10^{-4}) + \left\{ 2 \left(1/\sqrt{2} \right)^2 \right\} (10^{-4}) + \left\{ (1)(0)^2 \right\} (10^{-4}) + \\ &\quad + \left\{ 1 \left(1/\sqrt{2} \right) \left(1/\sqrt{2} \right) \right\} (10^{-4}) + \left\{ 2 \left(1/\sqrt{2} \right) (0) \right\} (10^{-4}) + \left\{ 3 \left((0) \left(1/\sqrt{2} \right) \right) \right\} (10^{-4}) \\ \varepsilon_{y_1} &= 3 (10^{-4}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{z_1} &= \left\{ 3(0)^2 \right\} (10^{-4}) + \left\{ 2(0)^2 \right\} (10^{-4}) + \left\{ (1)(1)^2 \right\} (10^{-4}) + \\ &\quad + \left\{ 1(0)(0) \right\} (10^{-4}) + \left\{ 2(0)(1) \right\} (10^{-4}) + \left\{ 3(1)(0) \right\} (10^{-4}) \\ \varepsilon_{z_1} &= 1 (10^{-4}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{x_1y_1} &= \left\{ 2(3) \left(1/\sqrt{2} \right) \left(1/\sqrt{2} \right) \right\} (10^{-4}) + \left\{ 2(2) \left(1/\sqrt{2} \right) \left(1/\sqrt{2} \right) \right\} (10^{-4}) + \left\{ 2(1)(0)(0) \right\} (10^{-4}) + \\ &\quad + \left\{ 1 \left[\left(1/\sqrt{2} \right) \left(1/\sqrt{2} \right) + \left(1/\sqrt{2} \right) \left(1/\sqrt{2} \right) \right] \right\} (10^{-4}) + \left\{ 2 \left[\left(1/\sqrt{2} \right) (0) + \left(1/\sqrt{2} \right) (0) \right] \right\} (10^{-4}) + \\ &\quad + \left\{ 3 \left[(0) \left(1/\sqrt{2} \right) + (0) \left(1/\sqrt{2} \right) \right] \right\} (10^{-4}) \\ \gamma_{x_1y_1} &= 6 (10^{-4}) \end{aligned}$$

Ejercicio 2.5.1 (continuación)**3**

$$\begin{aligned} \gamma_{y_1 z_1} = & \left\{ 2(3)(1/\sqrt{2})(0) \right\} (10^{-4}) + \left\{ 2(2)(1/\sqrt{2})(0) \right\} (10^{-4}) + \left\{ 2(0)(1) \right\} (10^{-4}) + \\ & + \left\{ 1 \left[(1/\sqrt{2})(0) + (0) \right] (1/\sqrt{2}) \right\} (10^{-4}) + \left\{ 2(1/\sqrt{2})(1) + (0)(0) \right\} (10^{-4}) + \\ & + \left\{ 3(0)(0) + (1)(1/\sqrt{2}) \right\} (10^{-4}) \end{aligned}$$

$$\gamma_{y_1 z_1} = (5/\sqrt{2}) (10^{-4})$$

$$\begin{aligned} \gamma_{z_1 x_1} = & \left\{ 2(3)(0)(1/\sqrt{2}) \right\} (10^{-4}) + \left\{ 2(2)(0)(1/\sqrt{2}) \right\} (10^{-4}) + \left\{ 1(1)(1)(0) \right\} (10^{-4}) + \\ & + \left\{ 1 \left[(0)(1/\sqrt{2}) + (1/\sqrt{2})(0) \right] \right\} (10^{-4}) + \left\{ 2 \left[(0)(0) + (1/\sqrt{2})(1) \right] \right\} (10^{-4}) + \\ & + \left\{ 3 \left[(1)(1/\sqrt{2}) + (0)(0) \right] \right\} (10^{-4}) \end{aligned}$$

$$\gamma_{z_1 x_1} = (5/\sqrt{2}) (10^{-4})$$

2.5.3. Ecuaciones de transformación de deformaciones. Estado bidimensional

Las ecuaciones para la transformación de deformaciones referidas a un sistema coordenado cartesiano x, y a otro sistema coordenado cartesiano x_1, y_1 , que forma un ángulo θ con respecto al primer sistema, se derivan utilizando las ecuaciones 2.5.1a en las ecuaciones 1.10.1, tomando en cuenta que $\epsilon_{z_1} = \gamma_{z_1 x_1} = \gamma_{z_1 y_1} = 0$.

$$\epsilon_{x_1} = \epsilon_x \cos^2 \theta + \epsilon_y \operatorname{sen}^2 \theta + \gamma_{xy} \operatorname{sen} \theta \cos \theta \quad (2.5.6a)$$

$$\epsilon_{y_1} = \epsilon_x \operatorname{sen}^2 \theta + \epsilon_y \cos^2 \theta - \gamma_{xy} \operatorname{sen} \theta \cos \theta \quad (2.5.6b)$$

$$\gamma_{x_1 y_1} = 2(\epsilon_y - \epsilon_x) \operatorname{sen} \theta \cos \theta + \gamma_{xy} (\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta) \quad (2.5.6d)$$

Ejercicio 2.5.2**1**

Transforme las componentes de deformación con respecto al sistema coordenado cartesiano bidimensional Oxy ,

$$\epsilon_x = 400 \text{ MPa}; \quad \epsilon_y = 200 \text{ MPa}; \quad \tau_{xy} = -300 \text{ MPa}$$

a las componentes respecto del sistema coordenado cartesiano bidireccional Ox_1y_1 . Los ángulos (x, x_1) y (y, y_1) tienen un valor igual a 30° .

Ejercicio 2.5.2 (continuación)

2

Respuesta: aplicando valores a las ecuaciones 2.5.6,

$$\varepsilon_{x_1} = 400 \cos^2(30) + 200 \operatorname{sen}^2(30) - 300 \operatorname{sen}(30) \cos(30)$$

$$\varepsilon_{x_1} = 400(0.75) + 200(0.25) - 300(0.5)(0.866)$$

$$\varepsilon_{x_1} = 220.1 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon_{y_1} = 400 \operatorname{sen}^2(30) + 200 \cos^2(30) + 300(0.5)(0.866)$$

$$\varepsilon_{y_1} = 400(0.25) + 200(0.75) + 129.9$$

$$\varepsilon_{y_1} = 379.9 \text{ MPa}$$

$$\gamma_{x_1 y_1} = 2(200 - 400) \operatorname{sen} 30 \cos 30 - 300(\cos^2 30 - \operatorname{sen}^2 30)$$

$$\gamma_{x_1 y_1} = -400(0.5)(0.866) - 300(0.75 - 0.25)$$

$$\gamma_{x_1 y_1} = -323.2 \text{ MPa}$$

2.5.4. Deformaciones principales

Se supone un cuerpo de un material isotrópico, por eso los ejes principales de esfuerzo y deformación coinciden. Un elemento de línea que se encuentre a lo largo de las direcciones principales de deformación experimentará únicamente alargamiento o acortamiento libre de deformación cortante o rotación. Al utilizar deformaciones en la ecuación 1.7.1 para esfuerzo principal resulta

$$\varepsilon^3 - I_1 \varepsilon^2 + I_2 \varepsilon - I_3 = 0 \quad (2.5.7)$$

Las deformaciones normales principales son las raíces de la ecuación cúbica 2.5.7. A partir de la matriz de deformación:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{zx} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{vmatrix}$$

Se definen las invariantes de deformación en la forma como se definieron las invariantes de esfuerzo en la sección 1.7.

$$I_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

$$I_2 = \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_z \varepsilon_x - \frac{1}{4} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)$$

$$I_3 = \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z + \frac{1}{4} \gamma_{xy} \gamma_{yz} \gamma_{zx} - \frac{1}{4} (\varepsilon_x \gamma_{yz}^2 + \varepsilon_y \gamma_{zx}^2 + \varepsilon_z \gamma_{xy}^2)$$

Las raíces de la ecuación cúbica se obtienen mediante los procedimientos detallados en el apéndice A (capítulo I).

2.5.5. Deformaciones cortantes principales

Las ecuaciones de esfuerzo cortante 1.8.5 se transforman en

$$\gamma_1 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3 \quad (2.5.8a)$$

$$\gamma_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_3 \quad (2.5.8b)$$

$$\gamma_3 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \quad (2.5.8c)$$

Como en el caso de esfuerzos, la deformación principal mayor es ε_1 y la deformación principal menor es ε_3 ; ε_2 representa la deformación intermedia. Por eso la deformación cortante máxima es γ_2 .

Ejercicio 2.5.3

1

En un punto de un cuerpo sujeto a esfuerzos, las componentes cartesianas de deformación son

$$\begin{vmatrix} 40 & 15 & 10 \\ 15 & 30 & 12 \\ 10 & 12 & 20 \end{vmatrix} (10^{-5})$$

Calcule las tres deformaciones principales y la deformación cortante máxima en el punto.

Respuestas:

Las deformaciones principales son las raíces de la ecuación

$$\varepsilon^3 - I_1\varepsilon^2 + I_2\varepsilon - I_3 = 0$$

Para hacer más fácil la determinación de las raíces se toman únicamente los valores enteros dentro de la matriz y al final se multiplican las soluciones por el factor 10^{-5} .

Las invariantes de deformación son

$$I_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 40 + 30 + 20 = 90$$

$$I_2 = \varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y\varepsilon_z + \varepsilon_z\varepsilon_x - \frac{1}{4}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)$$

$$I_2 = (40)(30) + (30)(20) + (20)(40) - \frac{1}{4}(15^2 + 12^2 + 10^2)$$

$$I_2 = 1200 + 600 + 800 - \frac{1}{4}(225 + 144 + 100)$$

$$I_2 = 2600 - 117.25$$

$$I_2 = 2482.75$$

Ejercicio 2.5.3 (continuación)

2

$$I_3 = \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z + \frac{1}{4} \gamma_{xy} \gamma_{yz} \gamma_{zx} - \frac{1}{4} (\varepsilon_x \gamma_{yz}^2 + \varepsilon_y \gamma_{zx}^2 + \varepsilon_z \gamma_{xy}^2)$$

$$I_3 = (40)(30)(20) + \frac{1}{4}(15)(12)(10) - \frac{1}{4} [(40)(12)^2 + (30)(10)^2 + (20)(15)^2]$$

$$I_3 = 24000 + 450 - 3315$$

$$I_3 = 21135$$

La ecuación cúbica toma la forma:

$$\varepsilon^3 - 90\varepsilon^2 + 2482.75\varepsilon - 21135 = 0$$

Por el método corto del apéndice A2:

$$\cos 3\theta_1 = \frac{2I_1^3 - 9I_1I_2 + 27I_3}{2[I_1^2 - 3I_2]^{3/2}}$$

Aplicando valores

$$\cos 3\theta_1 = \frac{2(90)^3 - 9(90)(2482.75) + 27(21135)}{2[90^2 - 3(2482.75)]^{3/2}}$$

$$\cos 3\theta_1 = \frac{17617.5}{2[651.75]^{3/2}} = \frac{17617.5}{33277.566}$$

$$\cos 3\theta_1 = 0.5294$$

$$3\theta_1 = 58.035^\circ$$

$$\theta_1 = 19.345^\circ$$

$$\theta_2 = \frac{360 - 3\theta_1}{3} = \frac{360 - 58.035}{3}$$

$$\theta_2 = 100.655^\circ$$

$$\theta_3 = \frac{360 + 58.035}{3}$$

$$\theta_3 = 139.345^\circ$$

$$r = \frac{2(I_1^2 - 3I_2)^{1/2}}{3}$$

$$r = \frac{2((90^2) - 3(2482.75))^{1/2}}{3}$$

$$r = 17.0196$$

Ejercicio 2.5.3 (continuación)

3

$$\varepsilon_1 = \left[r \cos \theta_1 + \frac{I_1}{3} \right] (10^{-5}) = \left[17.0196 \cos 19.345^\circ + \frac{90}{3} \right] (10^{-5})$$

$$\varepsilon_1 = 46.058 (10^{-5})$$

$$\varepsilon_2 = \left[17.0196 \cos 100.655^\circ + \frac{90}{3} \right] (10^{-5})$$

$$\varepsilon_2 = 26.853 (10^{-5})$$

$$\varepsilon_3 = \left[17.0196 \cos 139.345^\circ + \frac{90}{3} \right] (10^{-5})$$

$$\varepsilon_3 = 17.09 (10^{-5})$$

La deformación cortante máxima es

$$\gamma_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_3 = (46.06 - 17.09) (10^{-5})$$

$$\gamma_2 = 28.97 (10^{-5})$$

Ejercicio 2.5.4

1

Las componentes cartesianas de deformación en un punto de un cuerpo sujeto a esfuerzos están dadas por la matriz

$$\begin{vmatrix} 25 & 18 & 0 \\ 18 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{vmatrix} (10^{-4})$$

Calcule las tres deformaciones principales y la deformación cortante máxima en el punto.

Respuestas:

El plano z es un plano principal porque $\gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0$; por lo tanto, ε_z es una deformación principal.

Para hacer más fácil la determinación de las raíces, se toman únicamente los valores enteros dentro de la matriz y al final se multiplican las soluciones por el factor 10^{-4} .

Las invariantes de deformación son:

$$I_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 25 + 20 + 15 = 60$$

$$I_2 = \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_z \varepsilon_x - \frac{1}{4} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)$$

$$I_2 = (25)(20) + (20)(15) + (25)(15) - \frac{1}{4} (18^2 + 0^2 + 0^2)$$

$$I_2 = 500 + 300 + 375 - 81$$

$$I_2 = 1094$$

Ejercicio 2.5.4 (continuación)

2

$$I_3 = \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z + \frac{1}{4} \gamma_{xy} \gamma_{yz} \gamma_{zx} - \frac{1}{4} (\varepsilon_x \gamma_{yz}^2 + \varepsilon_y \gamma_{zx}^2 + \varepsilon_z \gamma_{xy}^2)$$

$$I_3 = (25)(20)(15) + \frac{1}{4}(18)(0)(0) - \frac{1}{4} [(25)(0)^2 + (20)(0)^2 + (15)(18)^2]$$

$$I_3 = 7500 - 1215$$

$$I_3 = 6285$$

La ecuación cúbica:

$$\varepsilon^3 - 60\varepsilon^2 + 1094\varepsilon - 6285 = 0$$

Una de las raíces de la ecuación es $\varepsilon_2 = 15$. Dividiendo la ecuación cúbica entre $\varepsilon - 15$ se encuentra la ecuación cuadrática de la que se obtienen las otras dos raíces de la ecuación cúbica:

$$\frac{\varepsilon^3 - 60\varepsilon^2 + 1094\varepsilon - 6285}{\varepsilon - 15} = \varepsilon^2 - 45\varepsilon + 419$$

Escribiendo la ecuación cúbica como el producto de dos factores:

$$(\varepsilon^2 - 45\varepsilon + 419)(\varepsilon - 15) = 0$$

Las raíces de la ecuación:

$$\varepsilon^2 - 45\varepsilon + 419 = 0$$

Son las dos soluciones faltantes de la ecuación cúbica:

$$\varepsilon = \frac{45 \pm \sqrt{(-45)^2 - 4(1)(419)}}{2(1)} = \frac{45 \pm \sqrt{349}}{2}$$

$$\varepsilon = \frac{45 \pm 18.68}{2}$$

$$\varepsilon_1 = 31.84 (10^{-4})$$

$$\varepsilon_3 = 13.16 (10^{-4})$$

$$\varepsilon_2 = 15 (10^{-4})$$

$$\gamma_{\text{máx}} = \varepsilon_1 - \varepsilon_3 = (31.84 - 13.16) (10^{-4})$$

$$\gamma_{\text{máx}} = 18.68 (10^{-4})$$

2.6. Deformaciones hidrostáticas y desviadoras

Como el tensor de esfuerzos, el tensor de deformación, ϵ_{ij} , está constituido por dos componentes: una componente hidrostática, $\epsilon_m \delta_{ij}$, de la cual dependen los cambios de volumen, y una componente desviadora, ϵ'_{ij} , que tiene que ver con los cambios de forma.

El tensor de deformación se puede definir como la suma de los tensores de sus componentes:

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_m \delta_{ij} + \epsilon'_{ij} \quad (a)$$

En esta ecuación, ϵ_m es la deformación media:

$$\epsilon_m = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z}{3} = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3}{3} \quad (2.6.1)$$

En notación matricial la componente hidrostática de deformación se representa como

$$\epsilon_m \delta_{ij} = \begin{vmatrix} \epsilon_m & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_m & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_m \end{vmatrix} \quad (b)$$

El tensor de deformación se representa en ejes cartesianos xyz o en ejes principales 1, 2, 3, como sigue

$$\epsilon_{ij} = \begin{vmatrix} \epsilon_x & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_y & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{vmatrix} \quad (c)$$

El tensor desviador de deformación se obtiene despejando ϵ'_{ij} en la ecuación a y aplicando en la ecuación resultante las ecuaciones b y c en ejes xyz :

$$\epsilon'_{ij} = \begin{vmatrix} (\epsilon_x - \epsilon_m) & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & (\epsilon_y - \epsilon_m) & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & (\epsilon_z - \epsilon_m) \end{vmatrix}$$

Sustituyendo ϵ_m por la expresión 2.6.1 y desarrollando:

$$\epsilon'_{ij} = \begin{vmatrix} \frac{2\epsilon_x - \epsilon_y - \epsilon_z}{3} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \frac{2\epsilon_y - \epsilon_x - \epsilon_z}{3} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \frac{2\epsilon_z - \epsilon_y - \epsilon_x}{3} \end{vmatrix} \quad (d1)$$

y en ejes principales, el tensor desviador de deformación es

$$\epsilon_{ij} = \begin{vmatrix} (\epsilon_1 - \epsilon_m) & 0 & 0 \\ 0 & (\epsilon_2 - \epsilon_m) & 0 \\ 0 & 0 & (\epsilon_3 - \epsilon_m) \end{vmatrix}$$

Desarrollando:

$$\varepsilon'_{ij} = \begin{vmatrix} \frac{2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_3}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\varepsilon_3 - \varepsilon_2 - \varepsilon_1}{3} \end{vmatrix} \quad (d2)$$

Ejercicio 2.6.1

1

Determine las componentes hidrostática y desviadora del tensor de deformación siguiente:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{vmatrix} 600 & 300 & 100 \\ 300 & 400 & 500 \\ 100 & 500 & 200 \end{vmatrix} (10^{-6})$$

Respuestas:

Deformación media:

$$\varepsilon_m = \left[\frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3} \right] = \left[\frac{600 + 400 + 200}{3} \right] (10^{-6})$$

$$\varepsilon_m = 400 (10^{-6})$$

Componente hidrostática de deformación:

$$\varepsilon_m \delta_{ij} = \begin{vmatrix} 400 & 0 & 0 \\ 0 & 400 & 0 \\ 0 & 0 & 400 \end{vmatrix} (10^{-6})$$

Componente desviadora de deformación:

$$\varepsilon'_{ij} = \begin{vmatrix} 600 - 400 & 300 & 100 \\ 300 & 400 - 400 & 500 \\ 100 & 500 & 200 - 400 \end{vmatrix} (10^{-6})$$

$$\varepsilon'_{ij} = \begin{vmatrix} 200 & 300 & 100 \\ 300 & 0 & 500 \\ 100 & 500 & -200 \end{vmatrix} (10^{-6})$$

2.7. Deformación nominal y deformación real

Existen dos tipos de deformaciones: *a*) la nominal y *b*) la logarítmica o real. En un espécimen de tensión o compresión se identifican la longitud inicial por l_0 y la longitud del espécimen deformado por l .

La deformación nominal (e) se define como el incremento de longitud producida durante la deformación por unidad de longitud inicial, es decir:

$$e = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{(l - l_0)}{l_0} = \left(\frac{l}{l_0} \right) - 1 \quad (2.7.1)$$

La deformación real (ε) se define como el logaritmo natural de la relación de la longitud del espécimen deformado entre la longitud inicial.

$$\varepsilon = \ln \left(\frac{l}{l_0} \right) \quad (2.7.2)$$

Es conveniente en ocasiones utilizar incrementos de las deformaciones normal y real; los incrementos se expresan mediante las ecuaciones:

$$de = \frac{dl}{l_0} \quad (2.7.3)$$

$$d\varepsilon = \frac{dl}{l} \quad (2.7.4)$$

Se observa que la integración de 2.7.4 entre los límites l y l_0 produce la ecuación 2.7.2. Se puede expresar ε en función de la deformación nominal y viceversa. Despejando (l/l_0) en la ecuación 2.7.1 y aplicando el resultado a la 2.7.2:

$$\varepsilon = \ln(1 + e) \quad (2.7.5)$$

Se puede despejar e de la ecuación 2.7.5:

$$e = \exp(\varepsilon) - 1 \quad (2.7.6)$$

Para deformaciones pequeñas, las deformaciones nominal y real pueden ser iguales o aproximadamente iguales.

2.8. Deformaciones uniformes finitas en cuerpos de diferentes geometrías

Las deformaciones uniformes finitas pueden ser determinadas a partir de las dimensiones inicial y final de la pieza. Las deformaciones finitas para cuerpos de diferente geometría se calculan mediante las siguientes ecuaciones:

Deformación de un prisma de sección transversal rectangular:

$$\varepsilon_h = \ln \left(\frac{h}{h_0} \right) \quad (2.8.1a)$$

$$\varepsilon_b = \ln\left(\frac{b}{b_0}\right) \quad (2.8.1b)$$

$$\varepsilon_l = \ln\left(\frac{l}{l_0}\right) \quad (2.8.1c)$$

Donde h_0 , b_0 , l_0 son los valores de espesor, ancho y longitud del prisma antes de la deformación; h , b , l son las longitudes de las aristas del prisma después de la deformación.

Deformación de una barra de sección transversal circular:

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_r = \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \quad (2.8.2a)$$

$$\varepsilon_l = \ln\left(\frac{l}{l_0}\right) \quad (2.8.2b)$$

Donde r_0 , l_0 son el radio inicial y la longitud inicial de la barra; r , l son los valores correspondientes a la barra deformada.

Deformación de un tubo de sección circular:

$$\varepsilon_h = \ln\left(\frac{h}{h_0}\right) \quad (2.8.3a)$$

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_r = \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \quad (2.8.3b)$$

$$\varepsilon_l = \ln\left(\frac{l}{l_0}\right) \quad (2.8.3c)$$

Aquí, h_0 , r_0 , l_0 son los valores de espesor, radio exterior (o radio interior) y longitud del tubo antes de la deformación; h , r , l son las dimensiones después de la deformación.

2.9. Dilataciones volumétricas nominal y real

2.9.1. Dilatación volumétrica nominal

Para derivar la ecuación que permite determinar la dilatación volumétrica nominal Δ producida por deformación, imaginemos un prisma cuadrangular infinitesimal de un volumen inicial $V = dx dy dz$, antes de ser deformado.

Se ha demostrado que cambios de volumen debidos a deformación plástica son despreciables, puesto que los esfuerzos cortantes son los responsables de la deformación plástica; entonces, este tipo de esfuerzos no produce un cambio significativo de volumen.

El cambio de volumen lo producen los esfuerzos de compresión y tensión, los cuales dan lugar a alargamientos y acortamientos de naturaleza elástica de las aristas dx , dy , dz .

El prisma experimenta después de la deformación elástica un incremento de volumen dV , por eso:

$$V + dV = [dx(1 + e_x)][dy(1 + e_y)][dz(1 + e_z)] = dxdydz(1 + e_x)(1 + e_y)(1 + e_z) \quad (a)$$

donde e_j son deformaciones lineales nominales.

Desarrollando la expresión

$$V + dV = dxdydz(1 + e_x + e_y + e_z + e_x e_y + e_y e_z + e_z e_x + e_x e_y e_z) \quad (b)$$

Debido a que las deformaciones son muy pequeñas, se desprecian en la última expresión los productos entre deformaciones pues son cantidades de segundo y tercer orden:

$$V + dV = dxdydz(1 + e_x + e_y + e_z) \quad (c)$$

La dilatación volumétrica, Δ , es el incremento de volumen por unidad de volumen inicial; se obtiene dividiendo entre el volumen $V = dxdydz$:

$$\frac{V + dV}{V} = 1 + \frac{dV}{V} = 1 + \Delta = 1 + e_x + e_y + e_z$$

de donde resulta que

$$\Delta = e_x + e_y + e_z = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = I_1 \quad (2.9.1a)$$

Cuando las aristas del prisma coinciden con las direcciones principales de deformación, la ecuación 2.9.1a se transforma en

$$\Delta = e_1 + e_2 + e_3 = I_1 \quad (2.9.1b)$$

Cuando las deformaciones son grandes, la ecuación 2.9.1b no es válida. En este caso, para determinar la dilatación volumétrica nominal se utiliza la ecuación 2.7.6 en la ecuación *a* para cada una de las deformaciones en las direcciones principales

$$\begin{aligned} \Delta &= [1 + \exp(\varepsilon_1) - 1][1 + \exp(\varepsilon_2) - 1][1 + \exp(\varepsilon_3) - 1] - 1 \\ \Delta &= \exp(\varepsilon_1)\exp(\varepsilon_2)\exp(\varepsilon_3) - 1 \end{aligned} \quad (2.9.1c)$$

Ejercicio 2.9.1

1

Una barra sólida de acero de sección transversal cuadrada, de 150 mm por lado y una longitud de prueba de 1000 mm, se sujeta a una carga que produce un incremento de longitud de 0.311 mm y una disminución en los lados de 0.014 mm. Calcule la dilatación cúbica nominal debida a deformación elástica.

Respuesta:

Deformación longitudinal

$$e_x = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{0.311}{1000} = 3.11 \left(10^{-4}\right)$$

$$e_y = e_z = -\frac{\Delta y}{y} = -\frac{\Delta z}{z} = -\frac{0.014}{150} = -0.933333 \left(10^{-4}\right)$$

La dilatación cúbica es:

$$\Delta = e_x + e_y + e_z = (3.11) \left(10^{-4}\right) - (0.933333) \left(10^{-4}\right) - (0.933333) \left(10^{-4}\right)$$

$$\Delta = 1.25 \left(10^{-4}\right)$$

2.9.2. Dilatación volumétrica real

Para derivar la ecuación para la dilatación elástica volumétrica real se emplea la ecuación 2.9.1c; para este propósito, se despeja la suma de las deformaciones reales, suma que define $\Delta_{(\text{real})} = \Delta_r$, por tanto

$$\Delta_r = \ln(1 + \Delta) = \ln[\exp(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)] = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = I_1 \quad (2.9.2)$$

Para deformaciones pequeñas: $\Delta \approx \Delta_r$,

Ejercicio 2.9.2

1

Calcule la dilatación volumétrica real con los datos del ejercicio 2.9.1.

Suponiendo que las aristas son direcciones principales de deformación, se puede utilizar la ecuación 2.9.2. Para hacer uso de la ecuación 2.9.2 es necesario calcular primero las deformaciones reales. Aplicando datos en las ecuaciones 2.8.1:

$$\varepsilon_l = \varepsilon_1 = \ln\left(\frac{l}{l_0}\right) = \ln\left(\frac{1000.314}{1000}\right) = 3.1395 \left(10^{-4}\right)$$

$$\varepsilon_b = \varepsilon_h = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\ln\left(\frac{h_0}{h}\right) = -\ln\left(\frac{150}{149.986}\right) = -0.93333764 \left(10^{-4}\right)$$

$$\Delta_r = 3.1395 \left(10^{-4}\right) - 0.93333764 \left(10^{-4}\right) - 0.93333764 \left(10^{-4}\right)$$

$$\Delta_r = 1.273 \left(10^{-4}\right)$$

La dilatación volumétrica real es ligeramente mayor que la nominal.

2.10. Relaciones de continuidad o de volumen constante

Cuando un cuerpo sólido es deformado elásticamente, tiene lugar una dilatación, Δ , como se definió en la sección 2.9. Si el cuerpo es deformado plásticamente, el volumen permanece constante, no hay dilatación, $\Delta = 0$, por tanto:

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0 \quad (2.10.1)$$

Relación que también es válida para la rapidez de deformación, es decir, para las deformaciones que experimenta un cuerpo en una unidad de tiempo:

$$\dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_y + \dot{\varepsilon}_z = \dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2 + \dot{\varepsilon}_3 = 0 \quad (2.10.2)$$

Las ecuaciones 2.10.1 y 2.10.2 se denominan *relaciones de continuidad*.

Ejercicio 2.10.1

1

Se lamina una chapa de acero de 2 m de largo, 0.5 m de ancho y 2.2 cm de espesor, conservando el ancho constante hasta una longitud de 2.5 metros. Calcule: a) las deformaciones principales, y b) las dimensiones de la placa después de la deformación.

Respuestas:

a) Deformaciones principales.

Suponiendo que la dirección de las deformaciones principales coincide con la dirección de las aristas de la chapa y aplicando las ecuaciones 2.8.1:

$$\varepsilon_l = \ln\left(\frac{2.5}{2.0}\right) = 0.2231$$

$$\varepsilon_b = \ln\left(\frac{b}{b_0}\right) = 0$$

Debido a que el comportamiento plástico se caracteriza porque el volumen del cuerpo deformado permanece constante:

$$\varepsilon_l + \varepsilon_b + \varepsilon_h = 0$$

Por tanto:

$$\varepsilon_l = -\varepsilon_h$$

$$\varepsilon_h = -0.2231$$

(b) Dimensiones de la placa.

Por la propiedad de volumen constante:

$$l_0 b_0 h_0 = l b h$$

Ejercicio 2.10.1 (continuación)

2

Como $b_0 = b = 0.5$ m, $l_0 = 2$ m, $l = 2.5$ m, resulta que:

$$h = h_0 \frac{l_0}{l} = 2.2 \frac{2}{2.5}$$

$$h = 1.76 \text{ cm}$$

Las dimensiones de la placa al final de la deformación son entonces: $l = 2.5$ m, $b = 0.5$ m y $h = 1.76$ cm.

Un procedimiento alternativo para estimar h consiste en utilizar la deformación en la dirección del espesor:

$$\varepsilon_h = \ln\left(\frac{h}{h_0}\right) = -0.2231$$

$$h = h_0 \exp(\varepsilon_h) = 2.2 \exp(-0.2231)$$

$$h = 1.76 \text{ cm}$$

2.11. Relaciones constitutivas elásticas*2.11.1. Estado tridimensional de deformaciones y esfuerzos*

Hasta este momento, se han estudiado las ecuaciones de esfuerzo y deformación aplicadas a un sólido continuo sin considerar las propiedades mecánicas del material. Las ecuaciones constitutivas relacionan el tensor de esfuerzos con el tensor de deformación. Se deben introducir algunas restricciones para derivar las ecuaciones esfuerzo–deformación; el material debe ser un sólido elástico y por eso las relaciones entre estas dos cantidades deben ser lineales. Las relaciones entre esfuerzo–deformación contienen 36 constantes elásticas, las cuales se pueden reducir a 21 con base en consideraciones de la energía de deformación. Se puede reducir el número de constantes elásticas a 2 si se consideran únicamente materiales isotrópicos. Las constantes elásticas son el par E, ν , así como el par G, λ , que corresponden, respectivamente, al módulo de Young, al módulo de Poisson, así como al módulo de corte y a la relación de Lamé. Estas constantes elásticas están relacionadas por las ecuaciones:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (2.11.1)$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.11.2)$$

Las formas más usuales de las ecuaciones esfuerzo–deformación son:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad (2.11.3a)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \quad (2.11.3b)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} \left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y) \right] \quad (2.11.3c)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (2.11.3d)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad (2.11.3e)$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} \quad (2.11.3f)$$

Se pueden obtener a partir de estas ecuaciones las correspondientes de esfuerzo en función de las deformaciones

$$\sigma_x = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_x + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \quad (2.11.4a)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_y + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \quad (2.11.4b)$$

$$\sigma_z = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_z + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \quad (2.11.4c)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \quad (2.11.4d)$$

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz} \quad (2.11.4e)$$

$$\tau_{zx} = G\gamma_{zx} \quad (2.11.4f)$$

Las ecuaciones para deformaciones y esfuerzos en las direcciones principales de esfuerzo son obtenidas a partir de las ecuaciones 2.11.3 y 2.11.4 cambiando los subíndices de esfuerzos y deformaciones en la siguiente forma: $x = 1, y = 2, z = 3$, y considerando que, en los planos principales, los esfuerzos cortantes tienen un valor cero.

2.11.2. Estado bidimensional de deformaciones y esfuerzos

2.11.2.1. Deformación bidimensional en un plano XY

En este caso, $\varepsilon_z = 0$ y la ecuación 2.11.3c se transforma en:

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} \left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y) \right] = 0$$

de donde resulta que:

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$$

La utilización de esta ecuación en las ecuaciones 2.11.3a y 2.11.3b produce las expresiones para estimar las deformaciones normales en las direcciones xy .

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \left[\sigma_x (1 - \nu^2) - \nu(1 + \nu) \sigma_y \right] \quad (2.11.5a)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \left[\sigma_y (1 - \nu^2) - \nu(1 + \nu) \sigma_x \right] \quad (2.11.5b)$$

$$\varepsilon_z = 0 \quad (2.11.5c)$$

Las deformaciones cortantes tienen los valores: $\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$, así como también

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (2.11.5d)$$

2.11.2.2. Esfuerzo bidimensional en un plano XY

Para un estado bidimensional de esfuerzos, se aplica la expresión $\sigma_z = 0$ en las ecuaciones 2.11.3a y 2.11.3b, y se resuelven simultáneamente las ecuaciones resultantes, primero para σ_x y después para σ_y , con lo cual se obtienen las expresiones para los esfuerzos normales:

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} \left[\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y \right] \quad (2.11.6a)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \nu^2} \left[\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x \right] \quad (2.11.6b)$$

$$\sigma_z = 0 \quad (2.11.6c)$$

Los esfuerzos cortantes tienen los valores $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$, así como también:

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy} \quad (2.11.6d)$$

2.11.2.3. Deformación bidimensional en un plano principal

Haciendo la conversión de subíndices para esfuerzos y deformaciones, indicada en la sección 2.12.1, en las ecuaciones 2.11.5a y 2.11.5b, y tomando en cuenta que los esfuerzos cortantes valen cero:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} \left[\sigma_1 (1 - \nu^2) - \nu(1 + \nu) \sigma_2 \right] \quad (2.11.7a)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} \left[\sigma_2 (1 - \nu^2) - \nu(1 + \nu) \sigma_1 \right] \quad (2.11.7b)$$

$$\varepsilon_3 = 0 \quad (2.11.7c)$$

2.11.2.4. Esfuerzo bidimensional en un plano principal

Cambiando subíndices para esfuerzos y deformaciones en las ecuaciones 2.11.6, y considerando que los esfuerzos cortantes en este plano tienen un valor cero:

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2) \quad (2.11.8a)$$

$$\sigma_2 = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1) \quad (2.11.8b)$$

$$\sigma_3 = 0 \quad (2.11.8c)$$

2.11.3. Deformaciones en un estado unidireccional de esfuerzos

Cuando una sola fuerza está actuando sobre un cuerpo a lo largo del eje x , por ejemplo sobre una barra cilíndrica de metal, se genera un esfuerzo σ_x . Este esfuerzo produce deformaciones a lo largo de las direcciones x , y , z . Experimentalmente se ha encontrado que existe una relación entre estas deformaciones. Puede encontrarse dicha relación sustituyendo en las ecuaciones 2.11.3 por la condición $\sigma_y = \sigma_z = 0$, σ_x .

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad (2.11.9a)$$

$$\varepsilon_y = -\frac{\nu\sigma_x}{E} \quad (2.11.9b)$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu\sigma_x}{E} \quad (2.11.9c)$$

La deformación longitudinal en la dirección x representa un alargamiento, en tanto que las deformaciones transversales en las direcciones z , y representan una contracción; la relación ε_y con ε_x por un lado y la de ε_z con ε_x por el otro, es la relación de Poisson:

$$-\nu = \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x} \quad (2.11.10)$$

En los cálculos es utilizado el valor absoluto de la relación de Poisson.

2.11.4. Relaciones adicionales entre constantes elásticas

La relación de la presión hidrostática a la dilatación volumétrica es el módulo volumétrico de elasticidad, K , por eso

$$K = \frac{\sigma_m}{\Delta} \quad (2.11.11)$$

Sumando miembro a miembro las ecuaciones 2.11.3a, 2.11.3b y 2.11.3c se obtiene

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (2.11.12)$$

En la ecuación anterior, el lado izquierdo representa la dilatación volumétrica y la suma de esfuerzos es igual a tres veces el esfuerzo medio, por tanto

$$\Delta = \frac{1-2\nu}{E} 3\sigma_m \quad (2.11.13)$$

Otras relaciones que se pueden obtener mediante la combinación de las cinco constantes elásticas G , E , Δ , ν , K son las siguientes:

$$\nu = \frac{3K - 2G}{2(3K + G)} \quad (2.11.14)$$

$$\nu = \frac{3K - E}{6K} \quad (2.11.15)$$

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (2.11.16)$$

$$K = \frac{GE}{3(3G - E)} \quad (2.11.17)$$

$$E = 3K(1-2\nu) \quad (2.11.18)$$

$$E = \frac{9GK}{G + 3K} \quad (2.11.19)$$

$$G = \frac{3EK}{9K - E} \quad (2.11.20)$$

$$G = \frac{3K(1-2\nu)}{2(1+\nu)} \quad (2.11.21)$$

2.12. Energía de deformación elástica

Al deformar elásticamente un cuerpo, en caso de que todo el trabajo de deformación sea absorbido por el cuerpo, cuando se descarga éste, libera toda la energía absorbida. Debido a la deformación elástica, las dimensiones del cuerpo aumentan o disminuyen al aplicar cargas de compresión o de tensión. Se supondrá que se va a deformar en tensión un cubo cuyas aristas tienen una longitud dx . Cuando la deformación es elástica, el incremento infinitesimal de longitud du es proporcional a la fuerza aplicada, F . El trabajo realizado, dW , es

$$dW = \frac{1}{2} F du \quad (a)$$

La ecuación a es el área del triángulo formado por la recta F versus du , el eje de las fuerzas y el eje de los desplazamientos.

De la definición de deformación

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} \quad (b)$$

Resolviendo b para du y aplicando el resultado junto con la relación $F = A\sigma_x$ en la ecuación a , resulta:

$$dW = \frac{1}{2}(A\sigma_x)(\epsilon_x dx) = \frac{1}{2}(\sigma_x \epsilon_x)(Adx) \quad (c)$$

dW es la energía total absorbida por el elemento de volumen (Adx) al extenderse una longitud du . Por eso, la energía de deformación elástica W por unidad de volumen se obtiene dividiendo la ecuación c entre (Adx), tomando en cuenta también la ecuación 2.11.9a.

$$W = \frac{1}{2}\sigma_x \epsilon_x = \frac{1}{2}\frac{\sigma_x^2}{E} = \frac{1}{2}\epsilon_x^2 E \quad (2.12.1)$$

Las deformaciones laterales que acompañan al alargamiento longitudinal del espécimen de tensión no contribuyen a la energía de deformación porque no existe fuerza transversal alguna actuando en la dirección de las deformaciones laterales.

Similarmemente, la energía de deformación por unidad de volumen de un elemento sujeto a corte se puede representar por:

$$W_{\text{corte}} = \frac{1}{2}\tau_{xy}\gamma_{xy} = \frac{1}{2}\frac{\tau_{xy}^2}{G} = \frac{1}{2}\gamma_{xy}^2 G \quad (2.12.2)$$

La energía de deformación elástica para un estado tridimensional de esfuerzos es obtenida por superposición, por eso

$$W = \frac{1}{2}[\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z] + [\tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\epsilon_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx}] \quad (2.12.3)$$

y en notación tensorial

$$W = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\epsilon_{ij} \quad (2.12.4)$$

Como en el caso unidimensional, la energía de deformación elástica para el estado tridimensional de esfuerzos se puede expresar en función de esfuerzos y de las constantes elásticas o de deformaciones y de las constantes elásticas.

En función de esfuerzos, aplicando 2.11.3 en 2.12.3:

$$W = \frac{1}{2E}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E}(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x) + \frac{1}{G}(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \quad (2.12.5)$$

2.13. Determinación de esfuerzos. Estado bidimensional de deformaciones

Es muy difícil determinar, directamente, los esfuerzos a que se encuentra sujeto un cuerpo. En la mayoría de los casos se miden la magnitud y orientación de las deformaciones que experimenta el cuerpo en un punto de su superficie, para lo cual se emplean sensores de deformación, aprovechando que, en los materiales con que se construyen los sensores, alguna propiedad, por ejemplo su resistencia, aumenta linealmente con la deformación.

Finalmente, mediante las relaciones de Hooke se determinan los esfuerzos.

A partir de las deformaciones medidas en tres direcciones arbitrarias mediante sensores de deformación se pueden determinar: *a*) la magnitud y dirección de las deformaciones con respecto a ejes no principales xy ; y *b*) la magnitud y dirección de las deformaciones principales.

La magnitud y orientación de las deformaciones se pueden determinar a partir de las relaciones matemáticas derivadas anteriormente o alternativamente mediante el círculo de Mohr.

2.13.1. Determinación de deformaciones. Método algebraico

Se examinan primero las deformaciones con respecto a ejes no principales. Suponga que tres sensores de deformación se colocan alineadas a lo largo de los ejes ABC , por lo que se van a medir las deformaciones $\epsilon_A, \epsilon_B, \epsilon_C$; se desea conocer los valores de las deformaciones $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$ (figura 2.13.1). La ecuación que relaciona las deformaciones $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$ con las deformaciones $\epsilon_A, \epsilon_B, \epsilon_C$ es la 2.5.6a; entonces, aplicando la ecuación 2.5.6a para el cálculo de ϵ_{x_1} en el cálculo de ϵ_A, ϵ_B y ϵ_C , resulta:

$$\epsilon_{x_1} = \epsilon_x \cos^2 \theta + \epsilon_y \sin^2 \theta + \gamma_{xy} \sin \theta \cos \theta \tag{2.5.6a}$$

$$\epsilon_A = \epsilon_x \cos^2 \theta_A + \epsilon_y \sin^2 \theta_A + \gamma_{xy} \sin \theta_A \cos \theta_A \tag{2.13.1a}$$

$$\epsilon_B = \epsilon_x \cos^2 \theta_B + \epsilon_y \sin^2 \theta_B + \gamma_{xy} \sin \theta_B \cos \theta_B \tag{2.13.1b}$$

$$\epsilon_C = \epsilon_x \cos^2 \theta_C + \epsilon_y \sin^2 \theta_C + \gamma_{xy} \sin \theta_C \cos \theta_C \tag{2.13.1c}$$

Las componentes cartesianas de deformación $\epsilon_x, \epsilon_y, \tau_{xy}$ con el eje x , formando ángulos $\theta_A, \theta_B, \theta_C$ con los ejes $A B C$, se determinan por la solución simultánea del sistema de ecuaciones 2.13.1.

Para la determinación de las magnitudes y direcciones de las deformaciones principales, se aplican las ecuaciones de conversión de esfuerzos a deformación (2.5.1a y 2.5.1b) en las ecuaciones de esfuerzos principales (1.11.2a y 1.11.2b), y en la ecuación 1.11.1 para definir la orientación; de ello resulta:

$$\epsilon_1 = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{1}{2} \left[(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2 \right]^{1/2} \tag{2.13.2a}$$

$$\epsilon_2 = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} - \frac{1}{2} \left[(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2 \right]^{1/2} \tag{2.13.2b}$$

$$\tan 2\theta = \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y} \tag{2.13.2c}$$

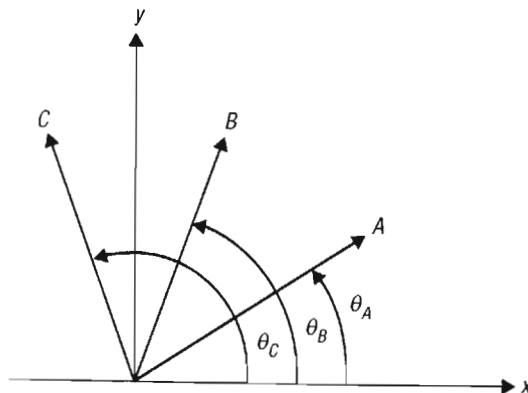


Figura 2.13.1. Sensores de deformación A, B, C que forman ángulos arbitrarios con el eje x .

En estas ecuaciones ε_x , ε_y , γ_{xy} son los valores resultantes de la solución de las ecuaciones 2.13.1 y θ es el ángulo que forma la dirección de la deformación principal ε_1 con el eje x .

Conocidas las deformaciones, se pueden aplicar sus valores en las ecuaciones 2.11.8a y 2.11.8b para calcular los esfuerzos principales.

La disposición geométrica de los sensores de deformación recibe el nombre de *roseta*; se emplean varios tipos de rosetas. Se va a mostrar el uso de la roseta rectangular de tres elementos (figura 2.13.2) para la determinación de las componentes cartesianas de deformación y de las deformaciones principales. Utilizando los ángulos que forman los sensores con el eje x en las ecuaciones 2.13.1, se obtienen las componentes cartesianas en función de las deformaciones ε_A , ε_B , ε_C :

$$\varepsilon_A = \varepsilon_x; \quad \varepsilon_B = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \gamma_{xy}); \quad \varepsilon_C = \varepsilon_y; \quad \gamma_{xy} = 2\varepsilon_B - \varepsilon_A - \varepsilon_C \quad (2.13.3)$$

La ecuación 2.13.3 para ε_B resulta de aplicar el valor $\cos^2 \theta_B = \sin^2 \theta_B = \sin \theta_B \cos \theta_B = 1/2$ en la ecuación 2.13.1b aprovechando que el sensor B forma un ángulo $\theta_B = 45^\circ$ con los ejes xy . La ecuación 2.13.3 para determinar γ_{xy} se obtiene a partir de las otras expresiones 2.3.13: se despeja primero γ_{xy} de la ecuación para ε_B , resulta así una expresión en función de ε_B , ε_x , ε_y , se aplican después a ésta las relaciones $\varepsilon_A = \varepsilon_x$ y $\varepsilon_C = \varepsilon_y$.

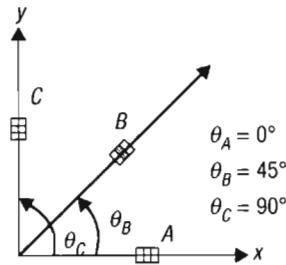


Figura 2.13.2. Roseta rectangular de tres elementos.

Las magnitudes y orientación de las deformaciones principales ε_1 , ε_2 , en función de las deformaciones ε_A , ε_B , ε_C , se obtienen aplicando 2.13.3 en 2.13.2:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2}(\varepsilon_A + \varepsilon_C) + \frac{1}{2} \left[(\varepsilon_A - \varepsilon_C)^2 + (2\varepsilon_B - \varepsilon_A - \varepsilon_C)^2 \right]^{1/2} \quad (2.13.4a)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2}(\varepsilon_A + \varepsilon_C) - \frac{1}{2} \left[(\varepsilon_A - \varepsilon_C)^2 + (2\varepsilon_B - \varepsilon_A - \varepsilon_C)^2 \right]^{1/2} \quad (2.13.4b)$$

$$\tan(2\theta) = \frac{2\varepsilon_B - \varepsilon_A - \varepsilon_C}{\varepsilon_A - \varepsilon_C} \quad (2.13.4c)$$

La solución de la ecuación 2.13.4c produce dos valores para el ángulo θ : θ_1 y también θ_2 ; $2\theta_1$ es el ángulo que forma el eje x con el eje de la deformación principal máxima, y $2\theta_2$ es el ángulo que forma el eje x con el eje de la deformación principal mínima. Estos ángulos se muestran en el círculo de Mohr de la figura 2.13.3.

La posición del ángulo θ_1 se fija mediante algunas reglas sencillas:

$$\text{Cuando } \varepsilon_B > \frac{1}{2}(\varepsilon_A + \varepsilon_C) \quad 0 < \theta_1 < 90^\circ$$

$$\text{Cuando } \varepsilon_B < \frac{1}{2}(\varepsilon_A + \varepsilon_C) \quad -90^\circ < \theta_1 < 0^\circ$$

$$\text{Cuando } \varepsilon_A > \varepsilon_C \quad \text{y} \quad \varepsilon_A = \varepsilon_1 \quad \theta_1 = 0^\circ$$

$$\text{Cuando } \varepsilon_A < \varepsilon_C \quad \text{y} \quad \varepsilon_A = \varepsilon_2 \quad \theta_1 = \pm 90^\circ$$

Definida la posición de θ_1 , θ_2 es el ángulo comprendido entre el eje x y el eje de deformación principal mínima.

Los esfuerzos principales que producen las deformaciones de las ecuaciones 2.13.4a y 2.13.4b se calculan aplicando éstas en las ecuaciones 2.11.8a y 2.11.8b:

$$\sigma_1 = E \left\{ \frac{\varepsilon_A + \varepsilon_C}{2(1-\nu)} + \frac{1}{2(1+\nu)} \left[(\varepsilon_A - \varepsilon_C)^2 + (2\varepsilon_B - \varepsilon_A - \varepsilon_C)^2 \right]^{1/2} \right\} \quad (2.13.5a)$$

$$\sigma_2 = E \left\{ \frac{\varepsilon_A + \varepsilon_C}{2(1-\nu)} - \frac{1}{2(1+\nu)} \left[(\varepsilon_A - \varepsilon_C)^2 + (2\varepsilon_B - \varepsilon_A - \varepsilon_C)^2 \right]^{1/2} \right\} \quad (2.13.5b)$$

Ejercicio 2.13.1

1

Se colocaron sensores de deformación en un punto de una estructura de acero conforme a la configuración de la figura 2.13.2 y se midieron los valores de deformación siguientes: para 0° : $\varepsilon_A = 470 (10^{-6})$; para 45° : $\varepsilon_B = 400 (10^{-6})$, y para 90° : $\varepsilon_C = 130 (10^{-6})$.

Determine las deformaciones normales máxima y mínima, así como la deformación cortante máxima. Las especificaciones del diseño establecen que la deformación normal máxima no debe exceder de $500 (10^{-6})$ y que la deformación cortante máxima no debe ser mayor que $400 (10^{-6})$. ¿Se encuentran los valores máximos de deformación dentro de los límites especificados?

Respuestas: para este arreglo de sensores, por las ecuaciones 2.13.3:

$$\varepsilon_A = \varepsilon_x = 470 (10^{-6})$$

$$\varepsilon_C = \varepsilon_y = 130 (10^{-6})$$

$$\varepsilon_B = 400 (10^{-6}) = \frac{1}{2} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \gamma_{xy})$$

Por lo tanto:

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_B - \varepsilon_A - \varepsilon_C = 2 [(400) - 470 - 130] (10^{-6})$$

$$\gamma_{xy} = 200 (10^{-6})$$

Ahora, las deformaciones normales máxima y mínima:

De las ecuaciones 2.13.4a y 2.13.4b,

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2} (470 + 130) (10^{-6}) + \frac{1}{2} \left[(470 - 130)^2 (10^{-12}) + (2(400) - 470 - 130)^2 (10^{-12}) \right]^{1/2}$$

$$\varepsilon_1 = (300) (10^{-6}) + (197) (10^{-6})$$

Ejercicio 2.13.1 (continuación)

2

$$\varepsilon_1 = 497 \left(10^{-6}\right)$$

$$\varepsilon_2 = (300) \left(10^{-6}\right) - (197) \left(10^{-6}\right)$$

$$\varepsilon_2 = 103 \left(10^{-6}\right)$$

Y la deformación cortante máxima:

$$\gamma_{\text{máx}} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = [497 - 103] \left(10^{-6}\right)$$

$$\gamma_{\text{máx}} = 394 \left(10^{-6}\right)$$

Luego entonces, las deformaciones normal máxima y cortante máxima sí están debajo de los límites especificados.

Las direcciones de las deformaciones principales respecto del eje x son determinadas mediante la ecuación 2.13.4c:

$$\tan 2\theta = \frac{[2(400) - 470 - 130] \left(10^{-6}\right)}{(470 - 130) \left(10^{-6}\right)} = \frac{200}{340}$$

$$\tan 2\theta = 0.5882$$

$$2\theta_1 = 30.46^\circ$$

De los valores de deformación medidos resulta que:

$$\varepsilon_B > \frac{1}{2}(\varepsilon_A + \varepsilon_C)$$

$$400 \left(10^{-6}\right) > \frac{1}{2} (470 + 130) \left(10^{-6}\right) = 300 \left(10^{-6}\right)$$

Entonces $0 < \theta_1 < 90^\circ$.

La dirección de ε_1 forma un ángulo $2\theta_1 = 30.46^\circ$ con el eje x del círculo de Mohr; la dirección de ε_2 forma con este mismo eje el siguiente ángulo:

$$2\theta_2 = 180 - 30.46 = 149.54^\circ$$

Ejercicio 2.13.2

1

Determine los esfuerzos principales máximo y mínimo, así como el esfuerzo cortante máximo, en el problema 2.13.1.

El módulo de Young y la relación de Poisson para el material son $200 (10^9)$ MPa y 0.29, respectivamente.

Ejercicio 2.13.2 (continuación)

2

Respuestas:

Esfuerzos normales máximo y mínimo

De las ecuaciones 2.13.5a y 2.13.5b:

$$\sigma_1 = 200 (10^9) \left\{ \frac{(470 + 130) (10^{-6})}{2(1 - 0.29)} + \frac{1}{2(1 + 0.29)} \left\{ (470 - 130)^2 (10^{-12}) + [2(400) - 470 - 130]^2 (10^{-12}) \right\}^{1/2} \right\}$$

$$\sigma_1 = 200 (10^9) \left\{ (422.5) (10^{-6}) + 0.3875 \left[115\,600 (10^{-12}) + 40\,000 (10^{-12}) \right]^{1/2} \right\}$$

$$\sigma_1 = 200 (10^9) \left[(422.5) (10^{-6}) + (152.85) (10^{-6}) \right] = 200 (10^9) (575.35) (10^{-6})$$

$$\sigma_1 = 115 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = (200) (10^9) \left[(422.5) (10^{-6}) - (152.85) (10^{-6}) \right] = (200) (10^9) (269.65) (10^{-6})$$

$$\sigma_2 = 53.9 \text{ MPa}$$

Esfuerzo cortante máximo

De la ecuación 1.8.5a:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{115 - 53.9}{2}$$

$$\tau_{\text{máx}} = 30.6 \text{ MPa}$$

2.13.2. Círculo de Mohr para deformaciones. Roseta rectangular de tres elementos

Para trazar el círculo de Mohr en el eje de las abscisas, se representan las deformaciones normales (ϵ); los semivalores de las deformaciones cortantes se localizan sobre el eje de las ordenadas ($\gamma/2$). Las tres deformaciones experimentales, ϵ_A , ϵ_B , ϵ_C , se representan como puntos en el eje de las abscisas. Se trazan líneas verticales que pasen por estos puntos. Se calcula γ_{xy} mediante la ecuación 2.13.3; a continuación se grafica el valor de $\gamma_{xy}/2$ sobre la línea vertical que pasa por ϵ_A ; si la deformación cortante es positiva, se grafica abajo del eje de las abscisas; si es negativa, se grafica

hacia arriba. Se define así, sobre la línea vertical, el punto A . Se grafica $\gamma_{xy}/2$ sobre la línea vertical que pasa por ε_C , si el signo de la deformación cortante es positivo, se grafica hacia arriba del eje de las abscisas, y si es negativo, se grafica hacia abajo. Se define así el punto C .

El diámetro del círculo de Mohr es la distancia entre los puntos A y C ; la intersección del diámetro con el eje de las abscisas es el centro del círculo; este centro se localiza a una distancia $1/2[\varepsilon_A + \varepsilon_C]$ del origen de las coordenadas. De acuerdo con la ecuación 2.13.3, ε_A y ε_C son iguales que ε_x y ε_y , respectivamente. Se traza el círculo de Mohr con los elementos geométricos conocidos: el centro, el diámetro y los puntos A y C del círculo (figura 2.13.3):

El círculo intercepta a la línea vertical que pasa por ε_B , en el punto B . Las intersecciones del círculo de Mohr con el eje de las abscisas corresponden a los valores de las deformaciones principales ε_1 , ε_2 . El ángulo formado por los ejes ε_x y ε_1 , $2\theta_1$, es negativo si el punto A se localiza arriba del eje ε . Éste es el caso de la figura 2.13.3 (el ángulo se mide del eje ε_x hacia el eje ε , en el sentido de las manecillas del reloj). El ángulo formado por los ejes ε_x y ε_2 , $2\theta_2$, es positivo si el punto A se localiza arriba del eje x . La figura 2.13.3 ilustra este caso. La deformación cortante máxima $\gamma_{m\acute{a}x}$ se determina a partir de la intersección del círculo de Mohr con la vertical que pasa por el centro del círculo; la ordenada de intersección es igual a $\gamma_{m\acute{a}x}/2$. Los esfuerzos principales se pueden determinar aplicando las deformaciones principales obtenidas mediante el círculo de Mohr en las ecuaciones 2.11.8a y 2.11.8b.

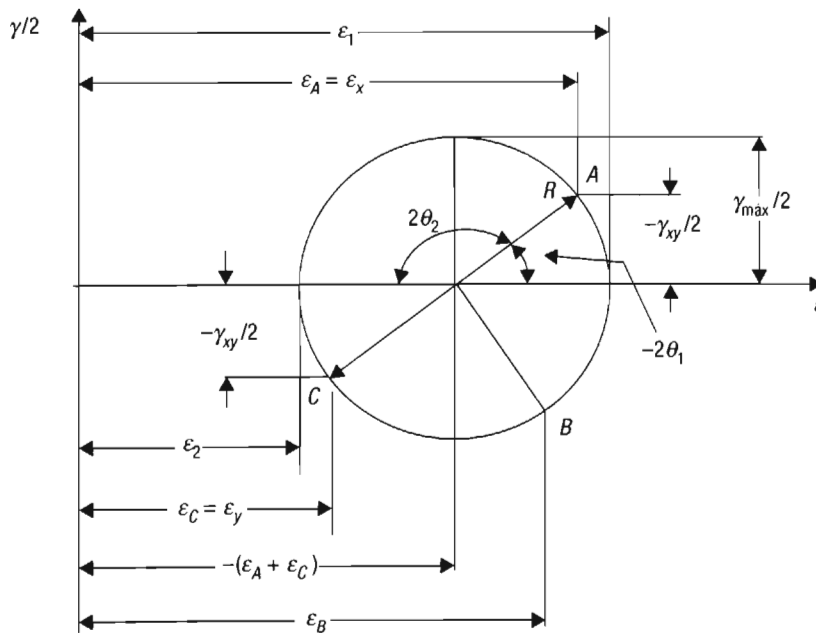


Figura 2.13.3. Determinación por círculo de Mohr de las magnitudes y direcciones de las deformaciones cartesianas y principales (Dally y Riley, 1991).

Ejercicio 2.13.3

1

Determine, haciendo uso del círculo de Mohr, la deformación normal máxima y la deformación cortante máxima con los datos ε_A , ε_B , ε_C del ejercicio 2.13.1.

Respuesta: la figura 2.13.4 muestra el círculo de Mohr. Se puede observar que los resultados son los mismos obtenidos en el ejercicio 2.13.1.

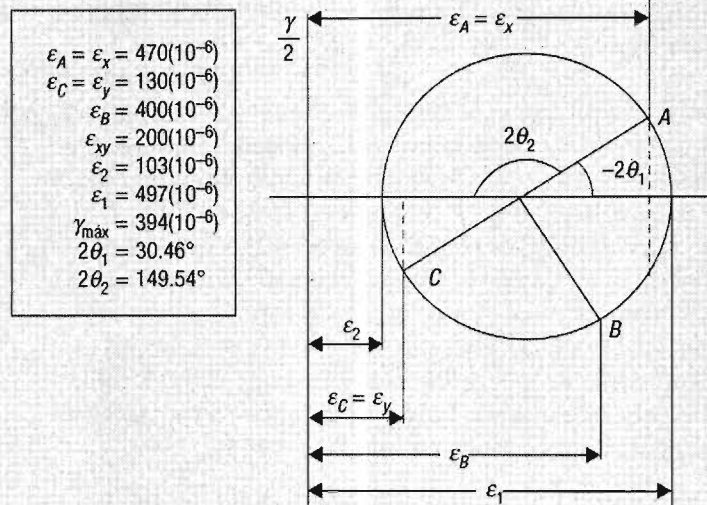


Figura 2.13.4. Resolución del ejercicio 2.13.1 usando el círculo de Mohr.

Ejercicios de final de capítulo

1

1. Dado el campo de desplazamiento del punto P de la figura 2.1.1

$$u = (x^3 + y^2 + xy + yz^2 + z)(10^{-3})$$

$$v = (xy^2 + x^2y + xz^3 + z^2)(10^{-3})$$

$$w = (y^3 + yz^3 + z^3)(10^{-3})$$

determine las deformaciones correspondientes al punto (2.2.2), conforme a las ecuaciones 2.2.1.

Respuesta:

$$\varepsilon_x = 14(10^{-3}); \quad \varepsilon_y = 12(10^{-3}); \quad \varepsilon_z = 36(10^{-3}); \quad \gamma_{xy} = 30(10^{-3})$$

$$\gamma_{yz} = 48(10^{-3}); \quad \gamma_{zx} = 9(10^{-3})$$

Ejercicios de final de capítulo (continuación)

2

2. En un punto de un cuerpo sujeto a esfuerzos, las componentes cartesianas de deformación son

$$\varepsilon_x = 200(10^{-5}); \quad \varepsilon_y = 400(10^{-5}); \quad \varepsilon_z = 200(10^{-5}); \quad \gamma_{xy} = 500(10^{-5})$$

$$\gamma_{yz} = 300(10^{-5}); \quad \gamma_{zx} = 400(10^{-5})$$

Transforme este conjunto de componentes cartesianas de deformación en el sistema $Oxyz$ a un conjunto de componentes cartesianas de deformación $Ox_1y_1z_1$.

Las relaciones angulares entre los ejes de ambos sistemas coordenados están dadas por los siguientes cosenos directrices.

	x	y	z
x_1	$1/3$	$1/3$	$-2/3$
y_1	$-1/3$	$2/3$	$-1/3$
z_1	$-2/3$	$1/3$	$1/3$

Respuestas:

$$\varepsilon_{x_1} = 55.5(10^{-5}); \quad \varepsilon_{y_1} = 88.9(10^{-5}); \quad \varepsilon_{z_1} = -11.1(10^{-5})$$

$$\gamma_{x_1y_1} = 155.6(10^{-5}); \quad \gamma_{y_1z_1} = 22.1(10^{-5}); \quad \gamma_{z_1x_1} = 44.4(10^{-5})$$

3. Transforme las componentes de deformación con respecto al sistema coordenado cartesiano bidireccional Oxy ,

$$\varepsilon_x = 250(10)^{-5}, \quad \varepsilon_y = 150(10)^{-5}; \quad \gamma_{xy} = 100(10)^{-5}$$

a las componentes respecto del sistema coordenado cartesiano bidireccional Ox_1y_1 . Los ángulos (x, x_1) y (y, y_1) tienen un valor igual a 60° .

Respuestas:

$$\varepsilon_{x_1} = 218.3(10)^{-5}; \quad \varepsilon_{y_1} = 181.7(10)^{-5}; \quad \gamma_{x_1y_1} = -136.5(10)^{-5}$$

4. En un punto de un cuerpo sujeto a esfuerzos, las componentes cartesianas de deformación son

$$\begin{vmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} (10^{-4})$$

Calcule las tres deformaciones principales y la deformación cortante máxima en el punto. Las deformaciones principales son las raíces de la ecuación cúbica.

Ejercicios de final de capítulo (continuación)

3

Respuestas:

$$\varepsilon_1 = 7.38 (10^{-4}); \varepsilon_2 = 4.32 (10^{-4}); \varepsilon_3 = 3.30 (10^{-4}); \gamma_{\max} = 4.08 (10^{-4})$$

5. Las componentes cartesianas de deformación en un punto de un cuerpo sujeto a esfuerzos están dadas por la matriz

$$\begin{vmatrix} 0.001 & 0.00050 & 0 \\ 0.00050 & 0.00075 & 0 \\ 0 & 0 & 0.00060 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 5 & 0 \\ 5 & 7.5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} (10^{-4})$$

Calcule las tres deformaciones principales y la deformación cortante máxima en el punto. Observe que el plano z es un plano principal porque $\gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0$; por lo tanto, ε_z es una deformación principal.

Respuestas:

$$\varepsilon_1 = 11.54 (10^{-4}); \varepsilon_2 = 6 (10^{-4}); \varepsilon_3 = 5.96 (10^{-4}); \gamma_{\max} = 5.58 (10^{-4})$$

6. Determine la componente hidrostática y desviadora del tensor de deformación siguiente:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{vmatrix} 300 & 0 & 0 \\ 0 & 200 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{vmatrix} (10^{-6})$$

Respuestas:

Componente hidrostática

$$\varepsilon_m S_{ij} = \begin{vmatrix} 200 & 0 & 0 \\ 0 & 200 & 0 \\ 0 & 0 & 200 \end{vmatrix} (10^{-6})$$

Componente desviadora

$$\varepsilon'_{ij} = \begin{vmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -100 \end{vmatrix} (10)^{-6}$$

7. Una barra sólida de acero de sección transversal cuadrada de 100 mm de lado y una longitud de prueba de 500 mm se sujeta a una carga que produce un incremento de longitud de 0.134 mm y una disminución en los lados de 0.008 mm. Calcule la dilatación cúbica nominal debida a deformación elástica.

Respuesta:

$$\Delta = 1.08 (10^{-4})$$

Ejercicios de final de capítulo (continuación)

4

8. Una barra cilíndrica metálica de 0.5 metros de largo y con un diámetro de 15 cm es estirada uniformemente hasta un diámetro de 10 cm.

Calcule las deformaciones: a) radial real y b) longitudinal real.

Respuestas:

$$a) \epsilon_r = -0.40556; \quad b) \epsilon_l = 0.8111, \quad l = 1.125 \text{ m}$$

9. Los valores de deformación medidos en un punto de una estructura de acero por sensores colocados formando una roseta rectangular son: para 0° , $\epsilon_A = 500 (10^{-6})$; para 45° , $\epsilon_B = 400 (10^{-6})$, y para 90° $\epsilon_C = 130 (10^{-6})$.

Determine: a) la deformación normal máxima; b) la deformación normal mínima, y c) la deformación cortante máxima.

Respuestas:

$$a) \epsilon_{\max} = 518.6 (10^{-6}); \quad b) \epsilon_{\min} = 111.4 (10^{-6}); \quad c) \gamma_{\max} = 407.2 (10^{-6}).$$

10. Determine: a) los esfuerzos principales máximo y mínimo, y b) el esfuerzo cortante máximo en el ejercicio anterior.

El módulo de Young y la relación de Poisson para el material son

$$E = 206 (10^9) \text{ MPa y } 0.30 \text{ respectivamente.}$$

Respuestas:

$$a) \sigma_{\max} = 124.9 \text{ MPa}; \quad \sigma_{\min} = 60.4 \text{ MPa}; \quad b) \tau_{\max} = 32.2 \text{ MPa}$$

11. Dibuje el círculo de Mohr para los valores de deformación medidos en el ejercicio 9. Determine mediante esta gráfica las deformaciones normales máxima y mínima y la deformación cortante máxima.

Compare los resultados gráficos con los analíticos del ejercicio 9.

CAPÍTULO 3

Propiedades elásticas y plásticas

3.1. Introducción

Las propiedades elásticas y plásticas de los materiales se obtienen mediante ensayos de tensión, compresión o torsión. Se inicia este capítulo con la descripción de estos ensayos, con las definiciones de esfuerzo nominal y deformación nominal, las propiedades elásticas y plásticas en función de parámetros nominales, y las ecuaciones para determinarlas. Se continúa con las definiciones de esfuerzo real y deformación real, con las propiedades elásticas y plásticas en términos de parámetros reales y las ecuaciones para determinar sus valores. Se presentan las relaciones entre esfuerzos y deformaciones nominales y reales.

3.2. Ensayo de tensión

La figura 3.2.1 muestra la geometría del espécimen utilizado en el ensayo de tensión; las dimensiones de los especímenes de tensión están establecidas en la norma ASTM E-8 para obtener reproducibilidad de resultados con especímenes de diferente tamaño. Se le aplican cargas de tensión crecientes (P) y se miden al mismo tiempo los alargamientos (Δl) correspondientes, durante el ensayo. Es usual convertir los valores de carga en esfuerzo nominal (S) y el alargamiento en deformación nominal (e). El esfuerzo nominal se define como la carga por unidad de área de sección transversal. El esfuerzo nominal se determina, por eso, dividiendo la carga entre el área de la sección transversal inicial, A_0 .

$$S = \frac{P}{A_0} \quad (3.2.1)$$

El esfuerzo tiene unidades de N/m^2 , kg/mm^2 o múltiplos de estas unidades.

La deformación nominal se definió en la sección 2.7; para facilitar su uso, se reescribe aquí su expresión matemática:

$$e = \frac{\Delta l}{l_0} \quad (2.7.1)$$

donde Δl y l_0 representan el incremento en longitud producido por la deformación y la longitud de prueba inicial, respectivamente. La deformación es adimensional o tiene unidades de longitud/longitud.

Los esfuerzos y deformaciones nominales determinados en el ensayo de tensión se emplean para trazar la curva nominal de esfuerzo y deformación; una curva típica S versus e se ilustra en la figura 3.2.2.

Al aplicar un esfuerzo de tensión, las dimensiones cambian continuamente, esto es, el área de la sección transversal disminuye y la longitud de prueba aumenta. En la región elástica, el esfuerzo es una función lineal de la deformación; esta región está delimitada por el esfuerzo de cedencia, punto P_{cd} . Cuando el nivel de carga sobrepasa el punto de cedencia, el espécimen se deforma plásticamente: el esfuerzo en la región plástica es una función no lineal de la deformación.

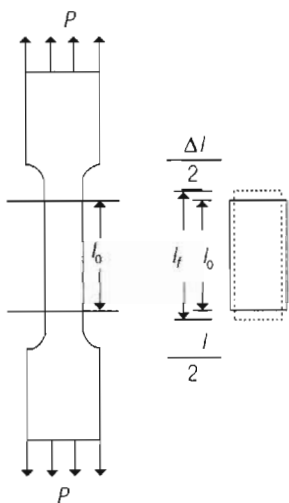


Figura 3.2.1. Especimen para ensayo de tensión.

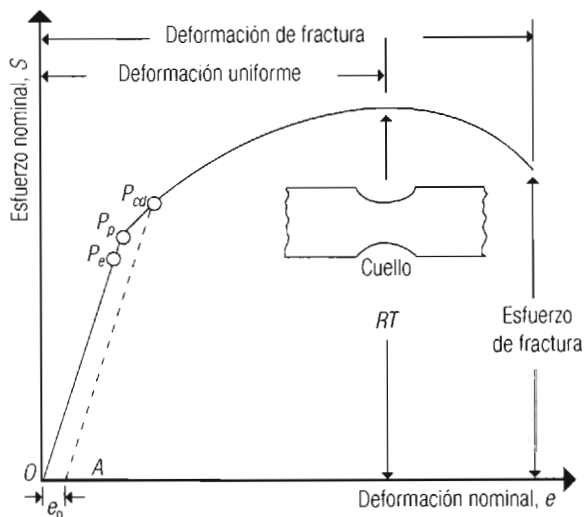


Figura 3.2.2. Curva esfuerzo nominal versus deformación nominal.

Al producirse deformación plástica, el esfuerzo aumenta con la deformación, es decir, el metal endurece por deformación. Este endurecimiento compensa la pérdida en capacidad de carga del metal por la reducción en el área de la sección transversal del espécimen. Al continuar la deformación, se alcanza una condición en la cual la pérdida de capacidad de carga por la reducción de área es igual al incremento en la capacidad de carga debido a endurecimiento por deformación; esta condición coincide con la obtención del valor máximo de carga. Al alcanzarse este valor, en algún punto de la longitud de prueba, usualmente en algún defecto metalúrgico (en una inclusión, por ejemplo) o mecánico (en alguna señal de herramienta), se concentran los esfuerzos y se produce un cuello, el cual hace que disminuya el área resistente, que disminuya el valor de la carga y que caiga la curva S versus e , ya que, como se dijo anteriormente, en la curva nominal el esfuerzo se determina dividiendo la carga entre el área original (figura 3.2.2).

3.2.1. Propiedades elásticas nominales de tensión

La resistencia elástica es un esfuerzo crítico, el cual inicia la deformación plástica. La mayoría de los metales no presentan un valor de resistencia elástica bien definido. Una familia de aleaciones que sí presenta un valor definido de resistencia elástica es la de los aceros bajo carbono; la mayoría de los metales exhiben un comportamiento esfuerzo-deformación elástico no lineal o una zona de transición elástica-plástica que separa la región elástica de la región plástica. Por esta razón se han establecido diversos criterios para definir la resistencia elástica; se examinarán los más usuales. La figura 3.2.2 identifica la resistencia elástica conforme a algunos de estos criterios.

LÍMITE PROPORCIONAL

El límite proporcional S_p (figura 3.2.2) es el valor de esfuerzo arriba del cual los valores de esfuerzo pierden la proporcionalidad en relación con los valores de deformación. Se determina mediante la ecuación:

$$S_p = \frac{P_p}{A_0} \quad (3.2.2)$$

donde P_p es la carga del límite proporcional.

LÍMITE ELÁSTICO

El límite elástico S_{el} (figura 3.2.2) es el esfuerzo máximo que puede resistir el material sin que se produzca una deformación permanente. Matemáticamente se define por la relación:

$$S_{el} = \frac{P_e}{A_0} \quad (3.2.3)$$

donde P_e es la carga correspondiente al límite elástico.

ESFUERZO DE CEDENCIA

El esfuerzo de cedencia es el valor del esfuerzo donde la deformación plástica o deformación permanente ha alcanzado un valor arbitrario, OA en la figura 3.2.2. La deformación permanente más común es $OA = 0.002$ o una deformación del 0.2%. Este valor de resistencia elástica es el más utilizado en ingeniería; el procedimiento para determinarlo está establecido en la norma ASTM E-8. La expresión para calcular el esfuerzo de cedencia S_0 es:

$$S_0 = \frac{P_{cd}}{A_0} \quad (3.2.4)$$

donde P_{cd} es la carga de cedencia.

PUNTOS DE CEDENCIA SUPERIOR E INFERIOR

Existe un grupo de materiales que exhiben una curva esfuerzo-deformación como la mostrada en la figura 3.2.3. Un miembro notable de este grupo es el acero de bajo carbono.

La curva presenta un punto de cedencia superior y un punto de cedencia inferior. El valor de esfuerzo promedio del punto de cedencia inferior se usa para definir la resistencia elástica debido a que este esfuerzo promedio es influenciado en menor proporción por las variables del ensayo que el valor de esfuerzo correspondiente al punto de cedencia superior. La ecuación para calcular la resistencia elástica es:

$$S_{ci} = \frac{P_{ci}}{A_0} \quad (3.2.5)$$

donde P_{ci} representa la carga promedio del punto de cedencia inferior.

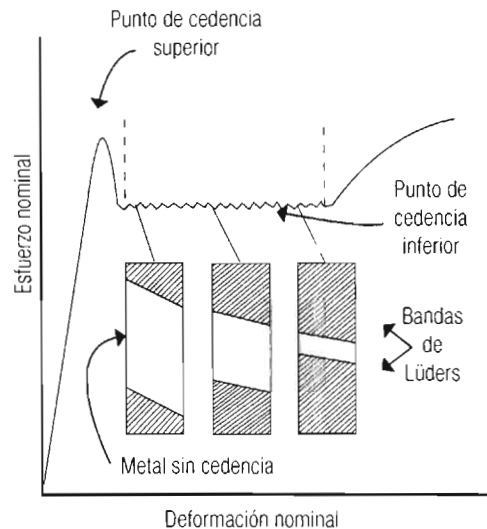


Figura 3.2.3. Curva esfuerzo-deformación de un acero de bajo carbono.

El segmento en zigzag de la curva de la figura 3.2.3, que caracteriza el punto de cedencia inferior, es debido a envejecimiento por deformación; durante el proceso de deformación, aumenta la densidad de dislocaciones, la velocidad de difusión de los átomos de carbono es mayor que la velocidad de las dislocaciones; por esta razón, los átomos de carbono difunden a las dislocaciones y las anclan; entonces, debido a esto, se debe aumentar la carga para proseguir la deformación plástica; cuando las dislocaciones son separadas de los átomos de carbono, la carga disminuye; este proceso se repite varias veces hasta que se inicia la deformación plástica macroscópica, sección parabólica de la curva en la figura 3.2.3. A este fenómeno se le conoce como el efecto *Portevin-LeChatelier*.

RIGIDEZ

La rigidez es la relación del esfuerzo a la deformación que produce, en la región elástica. Si se deforman dos metales distintos una misma cantidad, en tensión e , el mate-

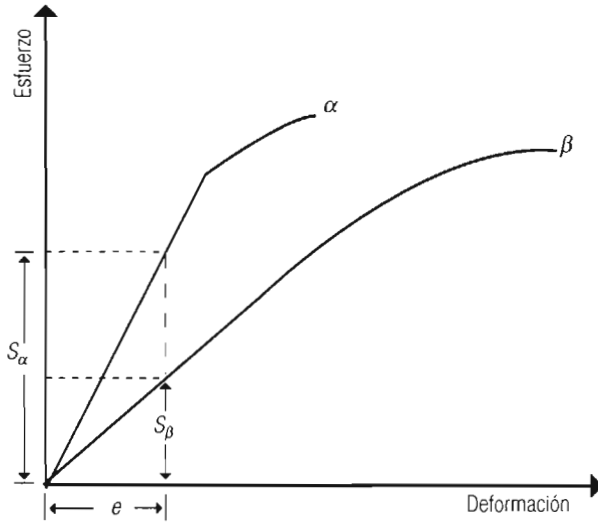


Figura 3.2.4. Comparación de dos metales de diferente rigidez (Marin, 1962).

rial que requiera un mayor esfuerzo para producir la misma deformación es el más rígido. Se observa que la definición de rigidez corresponde a la del módulo de Young; por lo tanto, este parámetro es una medida de la rigidez. La figura 3.2.4 compara dos metales, α , β , de diferente rigidez; evidentemente el metal α es más rígido que el β . La tabla 3.2.1 presenta una lista de materiales con sus módulos de Young.

Tabla 3.2.1. Constantes elásticas de materiales a temperatura ambiente.

Material	Módulo de Young (GPa)	Módulo de corte (GPa)	Relación de Poisson
Hierro gris	103	39.4	0.26
Acero bajo carbono	200	76.0	0.33
Acero inoxidable austenítico	194	65.9	0.28
Aluminio	68.6	26.0	0.31
Aleaciones de magnesio	44.8	17.1	0.27
Titanio	117	44.8	0.31
Cobre	110	41.4	0.33
Latón (70: 30)	114	43.8	0.32
Inconel	213.7	81.8	0.29

RELACIÓN DE POISSON

La figura 3.2.5 representa un cubo de dimensiones unitarias. Al aplicar un esfuerzo de tensión S , normal a dos caras paralelas del cubo, de una magnitud inferior o igual que la resistencia elástica, el elemento experimenta una deformación en tensión e en la dirección de S y, al mismo tiempo, sufre una deformación compresiva e' en la sección transversal perpendicular a la dirección de S . La relación de Poisson (μ) se define como la razón entre estas dos deformaciones:

$$\mu = -e'/e = -(\Delta l)' / \Delta l \quad (3.2.6)$$

El signo negativo (-) se debe a que e , la deformación en tensión, aumenta; en tanto que e' , la deformación en compresión, disminuye.

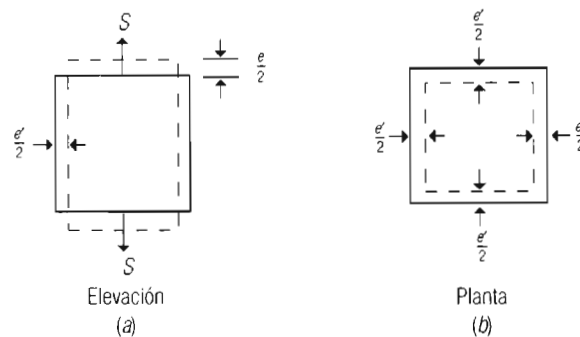


Figura 3.2.5. a) Vista en elevación de la deformación en tensión e . b) Vista en planta de la deformación en compresión de un cubo de dimensiones unitarias (Marin, 1962).

La relación de Poisson es una medida de la rigidez del material en dirección normal a la dirección del esfuerzo unidireccional S ; μ oscila entre 0.25 y 0.35 para la mayoría de los metales.

La tabla 3.2.1 presenta valores de esta relación para diversos metales y aleaciones. Los valores típicos de μ para diferentes materiales no metálicos son los siguientes: hule, 0.45; materiales compuestos de boro/resina epóxica, 0.17; grafito alta resistencia/resina epóxica, 0.28; fibra de vidrio/resina epóxica, 0.23; concreto, de 0.17 a 0.20.

RESILIENCIA

La resiliencia de un metal es su capacidad para absorber energía en el rango elástico. Para definir la resiliencia es necesario establecer el esfuerzo máximo al cual el material todavía responde elásticamente. Es práctica generalizada utilizar el esfuerzo de cedencia, S_0 , como el valor que define el fin de la región elástica. De esta forma la resiliencia se determina como la energía de deformación elástica absorbida por unidad de volumen de metal hasta que alcanza el valor del esfuerzo de cedencia. Las unidades de resiliencia son J/m^3 . Si se considera que el área bajo la curva comprendida entre los puntos OAB de la figura 3.2.6 es la de un triángulo rectángulo de altura S_0 y base e_0 , la resiliencia, u_0 , se calcula mediante la ecuación:

$$u_0 = \frac{1}{2} S_0 e_0 \quad (3.2.7)$$

Puesto que el módulo de Young está dado por:

$$E = \frac{S_0}{e_0} \quad (3.2.8)$$

despejando e_0 en esta ecuación y utilizando la expresión resultante en 3.2.7, se obtiene:

$$u_0 = \frac{1}{2} \frac{S_0^2}{E} \quad (3.2.9)$$

donde u_0 recibe el nombre de *módulo de resiliencia*.

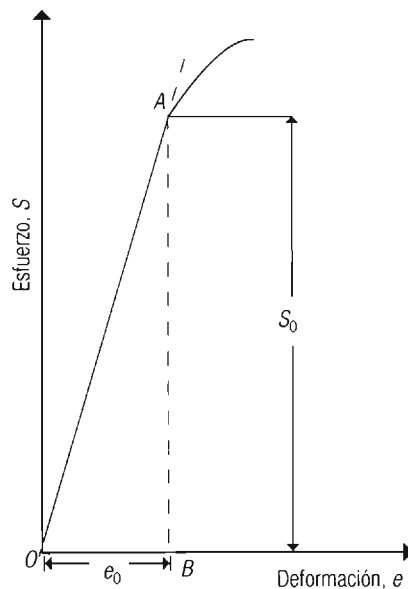


Figura 3.2.6. Módulo de resiliencia elástica.

Ejercicio 3.2.1

1

Una componente de una estructura de acero de sección rectangular tiene la geometría y dimensiones mostradas en la figura 3.2.7. El espesor del material es de 6 mm.

Si la componente está sujeta a una carga de tensión P , calcule: a) la carga máxima que puede transmitir esta componente, si el incremento máximo de longitud que puede experimentar la componente para que todavía sea funcional es $\Delta l_T = 0.45$ mm; b) el incremento de longitud que experimentan las secciones más anchas (Δl_1), consideradas como una sola sección, así como el correspondiente incremento en longitud que registra

Ejercicio 3.2.1 (continuación)

2

la sección angosta (Δl_2); por último, *c*) determine la resiliencia de las secciones de 50 mm de ancho, consideradas como una sola sección y la resiliencia de la sección de 25 mm de ancho y la resiliencia total.

Las deformaciones son de naturaleza elástica. La rigidez para el acero estructural es de 207 GPa.

Respuestas:

a) Carga máxima

Las áreas de las secciones transversales 1 y 2 se determinan a partir de las dimensiones de la figura anexa:

$$A_1 = (50)(6) = 300 \text{ mm}^2; A_2 = (25)(6) = 150 \text{ mm}^2; l_1 = 100 + 100 = 200 \text{ mm}; l_2 = 200 \text{ mm}$$

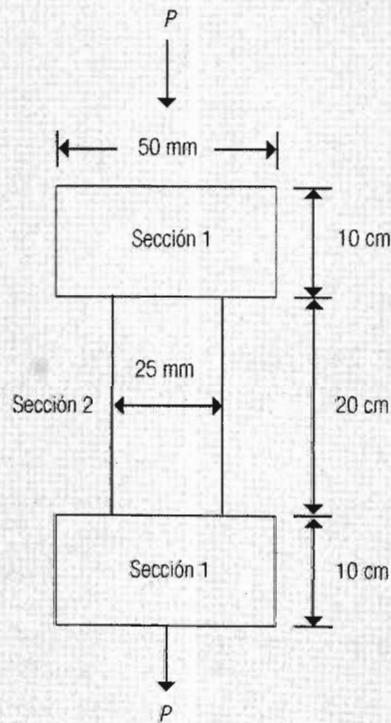


Figura 3.2.7. Geometría de la estructura.

Los dos elementos deben transmitir el mismo valor de carga, independientemente de sus dimensiones; el módulo de Young tiene el mismo valor para los dos elementos puesto que se trata del mismo material. Por tanto:

$$E = P/(A_1 e_1) = P/(A_2 e_2) \quad (i)$$

Entonces

$$A_1 e_1 = A_2 e_2$$

Ejercicio 3.2.1 (continuación)**3**

de donde

$$e_2 = 2e_1 \quad \text{(ii)}$$

El incremento de longitud total es igual a la suma de los incrementos de las secciones 1 y 2:

$$\Delta l_T = \Delta l_1 + \Delta l_2 \quad \text{(iii)}$$

Los valores de los incrementos parciales están relacionados con las deformaciones nominales e_1, e_2 :

$$\begin{aligned} e_1 &= \Delta l_1 / l_1 \\ e_2 &= \Delta l_2 / l_2 \end{aligned} \quad \text{(iv)}$$

Despejando $\Delta l_1, \Delta l_2$ en iv, tomando en cuenta la ecuación ii y aplicando las expresiones resultantes a la ecuación iii:

$$\Delta l_T = e_1 l_1 + 2e_1 l_2 = e_1 (l_1 + 2l_2) \quad \text{(v)}$$

De la ecuación v se obtiene e_1 :

$$e_1 = \Delta l_T / (l_1 + 2l_2) = 0.45 / (200 + (2)(200)) = 0.45 / 600$$

$$e_1 = 0.00075$$

De la ecuación ii y del valor calculado para e_1 :

$$e_2 = 2 e_1 = (2)(0.00075)$$

$$e_2 = 0.0015$$

Despejando P de la ecuación i y aplicando valores:

$$P = EA_1 e_1 = (207\,000)(300)(0.00075)$$

$$P = 46\,575 \text{ N}$$

b) Incremento de longitud de las secciones

De las ecuaciones iv:

$$\Delta l_1 = l_1 e_1 = (200)(0.00075)$$

$$\Delta l_1 = 0.15 \text{ mm}$$

$$\Delta l_2 = l_2 e_2 = (200)(0.0015)$$

Ejercicio 3.2.1 (continuación)

4

$$\Delta l_2 = 0.30 \text{ mm}$$

c) Resiliencia de los elementos y resiliencia total:

Esfuerzos nominales:

$$S_1 = Ee_1 = (207\ 000) (0.00075)$$

$$S_1 = 155.25 \text{ MPa}$$

$$S_2 = Ee_2 = (207\ 000) (0.0015)$$

$$S_2 = 310.5 \text{ MPa}$$

Resiliencias de los elementos 1 y 2:

$$u_1 = e_1 S_1 / 2 = [(0.00075) (155.25) (10^6)] / 2$$

$$u_1 = 58.2 \text{ kJ/m}^3$$

$$u_2 = e_2 S_2 / 2 = [(0.0015) (310.5) (10^6)] / 2$$

$$u_2 = 232.8 \text{ kJ/m}^3$$

Resiliencia total:

$$U_T = 58.2 + 232.8 \text{ kJ/m}^3$$

$$U_T = 291 \text{ kJ/m}^3$$

3.2.2. Propiedades plásticas nominales de tensión

RESISTENCIA A LA TENSIÓN

La resistencia a la tensión, RT , o esfuerzo máximo, $S_{\text{máx}}$, es la carga máxima en tensión dividida entre el área de la sección transversal del espécimen antes de ser deformado:

$$RT = S_{\text{máx}} = \frac{P_{\text{máx}}}{A_0} \quad (3.2.10)$$

La resistencia a la tensión es un valor de uso muy extendido para identificar un material; debido a que el ensayo de tensión es fácil de efectuar, la resistencia a la tensión es utilizada para el control de calidad de un material. Se han desarrollado relaciones entre la RT y propiedades como la dureza y la resistencia a la fatiga que son de gran utilidad. La figura 3.2.2 ilustra la resistencia a la tensión.

ESFUERZO DE FRACTURA

La resistencia a la fractura es la carga de fractura dividida entre el área de la sección transversal del espécimen antes de ser deformado.

$$S_f = \frac{P_f}{A_0} \quad (3.2.11)$$

En el caso de materiales frágiles, la resistencia a la tensión coincide con el esfuerzo de fractura. La figura 3.2.8 ilustra el esfuerzo de fractura en un material dúctil, mientras que la figura 3.2.9 ilustra este esfuerzo en un material frágil.

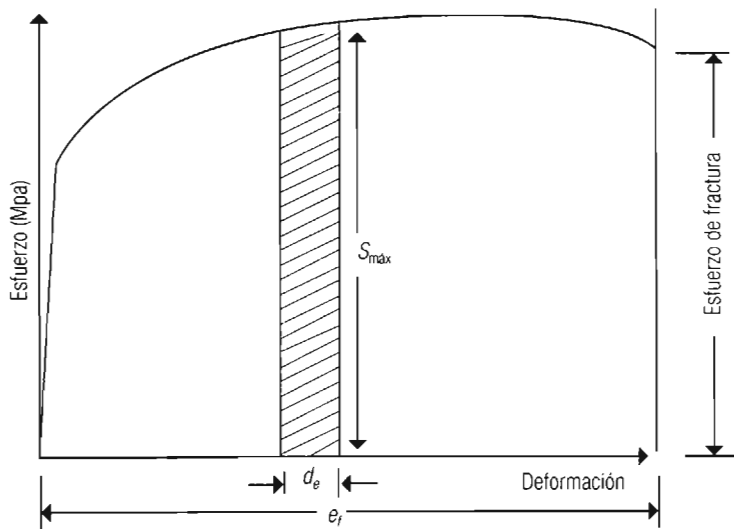


Figura 3.2.8. Tenacidad en un metal dúctil (Marin, 1962).

ALARGAMIENTO

El alargamiento es una medida de la ductilidad de un metal y se define como la deformación nominal hasta fractura e_f . Para determinar esta propiedad, se marca la longitud de prueba l_0 con dos líneas tenues (figura 3.2.1), se ensaya el espécimen hasta fracturarlo, se unen cuidadosamente las dos partes fracturadas del espécimen y se mide la longitud entre las dos líneas, l_f ; el alargamiento se determina mediante la ecuación:

$$e_f = \frac{l_f - l_0}{l_0} \quad (3.2.12)$$

El alargamiento es usualmente reportado como un porcentaje, $e_f \times 100$, indicando la longitud de prueba. Las definiciones de deformación nominal y alargamiento dadas por las ecuaciones 2.9.1 y 3.2.12 son similares, excepto que la primera ecuación se refiere a deformación elástica y a deformación uniforme, y la segunda ecuación

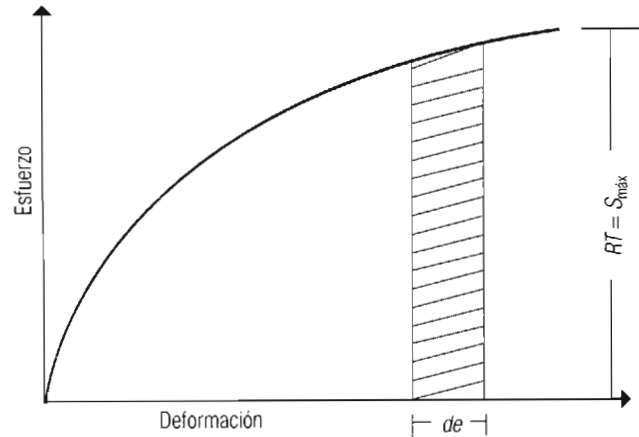


Figura 3.2.9. Tenacidad en un metal frágil (Marin, 1962).

se refiere a deformación plástica y a deformaciones plásticas tanto uniformes como no uniformes. El alargamiento tiene las mismas unidades que la deformación.

REDUCCIÓN DE ÁREA

La reducción de área es también una medida de la ductilidad de un metal. Se define como el cociente que resulta de dividir la disminución de área que experimenta la sección transversal del espécimen al ensayarse hasta fractura entre el área inicial del espécimen:

$$r = \frac{A_0 - A_f}{A_0} \quad (3.2.13)$$

Como en el caso del alargamiento, se unen las dos partes fracturadas y se mide el diámetro del cuello del espécimen. La reducción de área se reporta usualmente como un porcentaje, $r \times 100$. La reducción de área, al ser una relación de áreas, es adimensional.

TENACIDAD

La tenacidad es la cantidad de energía absorbida por unidad de volumen al deformar el metal hasta fractura; esa cantidad es denominada *módulo de tenacidad*, se expresa en J/m^3 y se representa por T_0 . En la figura 3.2.8, el área bajo la curva, S versus e , representa el módulo de tenacidad; se puede obtener mediante la integración del elemento de área Sde entre los límites de deformación, por eso:

$$T_0 = \int_0^{e_f} Sde \quad (3.2.14)$$

Debido a que no se ha encontrado una expresión para S en función de e , se han ideado varios métodos para determinar el área bajo la curva. El área se puede medir con

un planímetro o se puede calcular fácilmente conociendo dos datos: el peso por unidad de área de papel donde se encuentra dibujada la curva y el peso de la porción de papel con la silueta de la curva recortada cuidadosamente. Un método práctico para medir la tenacidad consiste en determinar en forma aproximada el área bajo la curva, para lo cual se multiplica el esfuerzo máximo por la deformación de fractura. Esta medida aproximada de la tenacidad recibe el nombre de *índice de tenacidad*, T_i .

$$T_i = S_{\text{máx}} e_f \quad (3.2.15)$$

En ocasiones se utiliza en esta ecuación, en lugar de $S_{\text{máx}}$, el promedio de este esfuerzo máximo y el esfuerzo de cedencia; entonces:

$$T_i = \frac{S_0 + S_{\text{máx}}}{2} e_f \quad (3.2.16)$$

Se obtiene así un valor de área bajo la curva más cercano al real.

Algunos materiales frágiles presentan una curva parabólica, S versus e (figura 3.2.9); en este caso el valor de T_i determinado utilizando la ecuación 3.2.15 resulta demasiado grande en relación con el valor real del área bajo la curva; para esta condición, el índice de tenacidad se determina mediante la ecuación:

$$T_i = \frac{2}{3} S_{\text{máx}} e_f \quad (3.2.17)$$

Ejercicio 3.2.2

1

Se ensaya en tensión un espécimen de acero de bajo carbono, de una longitud de prueba de 50.8 mm y diámetro de 12.8 mm. La carga en el punto de cedencia inferior fue de 35 kN. La carga máxima fue de 60 kN. La de fractura, de 40 kN. La longitud de prueba y el diámetro del cuello después de fractura midieron 65 mm y 9 mm, respectivamente. A una carga de 15 kN, el incremento de la longitud del espécimen fue de 0.029 mm. La curva S versus e inicia en el cero del sistema coordenado.

Determine: a) la resistencia elástica correspondiente a la carga en el punto de cedencia inferior; b) el módulo de elasticidad; c) el módulo de resiliencia elástica; d) la resistencia a la tensión; e) el esfuerzo de fractura; f) el alargamiento por ciento; g) la reducción de área por ciento, y h) el índice de tenacidad.

El área inicial es

$$A_0 = \left(\frac{\pi}{4} \right) (12.8)^2 = 128.6 \text{ mm}^2$$

El área en el cuello después de fractura es

$$A_f = \left(\frac{\pi}{4} \right) (9)^2 = 63.6 \text{ mm}^2$$

Ejercicio 3.2.2 (continuación)

2

Respuestas:

a) Resistencia elástica

$$S_{cd} = \frac{P_{ci}}{A_0} = \frac{(35)(10^3)}{128.6} = 272 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 272 \text{ MPa}$$

b) Módulo de elasticidad

$$E = \frac{S}{e} = \frac{Pl_0}{A_0 \Delta l} = \frac{(15)(10^3)(50.8)}{(128.6)(0.029)} = 204322 \text{ MPa} = 204 \text{ GPa}$$

c) Módulo de resiliencia elástica

$$u_0 = \frac{1}{2} \frac{S_{cd}^2}{E} = \frac{1}{2} \frac{((272)(10^6))^2}{(204)(10^9)} = 181 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3}$$

d) Resistencia a la tensión

$$S_{\text{máx}} = \frac{P_{\text{máx}}}{A_0} = \frac{(60)(10^3)}{128.6} = 466 \text{ MPa}$$

e) Esfuerzo de fractura

$$S_f = \frac{P_f}{A_0} = \frac{(40)(10^3)}{128.6} = 311 \text{ MPa}$$

f) Alargamiento por ciento

$$e_f(100) = \left(\frac{l_f - l_0}{l_0} \right) (100) = \left(\frac{65 - 50.8}{50.8} \right) (100) = 27.9\%$$

g) Reducción de área por ciento

$$r(100) = \left(\frac{A_0 - A_f}{A_0} \right) (100) = \left(\frac{128.6 - 63.6}{128.6} \right) (100) = 50.6\%$$

h) El índice de tenacidad

$$T_i = S_{\text{máx}} e_f = (466)(10^6)(0.279) = \left[(130)(10^6) \left(\frac{\text{Nm}}{\text{m}^3} \right) \right] = 130\,000 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3}$$

3.2.3. Propiedades elásticas reales de tensión

El esfuerzo real (σ) se define como la carga (P) que actúa por unidad de área instantánea de la sección transversal del espécimen (A):

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad (3.2.18)$$

La deformación real (ϵ) se definió en la sección 2.7; para facilitar su uso se reescribe aquí se expresión matemática:

$$\epsilon = \ln\left(\frac{l}{l_0}\right) \quad (2.7.2)$$

donde l es la longitud instantánea del espécimen. La ecuación 2.7.2 es aplicable a deformaciones elásticas y a deformaciones plásticas uniformes, es decir, hasta una deformación igual o inferior a la necesaria para la formación del cuello.

Los metales, al deformarse elásticamente, experimentan un incremento de volumen insignificante; se puede considerar que el volumen es constante, por tanto:

$$V = A_0 l_0 = A l = \text{constante} \quad (3.2.19)$$

De 3.2.19 resulta

$$\frac{l}{l_0} = \frac{A_0}{A} \quad (3.2.20)$$

Aplicando 3.2.20 a 2.7.2 resulta:

$$\epsilon = \ln \frac{A_0}{A} \quad (3.2.21)$$

En el caso de especímenes de sección circular:

$$\epsilon = \ln\left(\frac{\pi D_0^2}{\pi D^2}\right) = \ln\left(\frac{D_0}{D}\right)^2 = 2 \ln\left(\frac{D_0}{D}\right) \quad (3.2.22)$$

En el intervalo elástico, las deformaciones son muy pequeñas, tanto para los metales dúctiles como para los metales frágiles; por esta razón los valores de esfuerzo y deformación estimados a partir de sus dimensiones originales son aproximadamente iguales a los valores de esfuerzo real y deformación real.

Ejercicio 3.2.3

1

Suponga que un espécimen de una longitud de prueba de 25 mm y 12.7 mm de diámetro, al sujetarse a una carga elástica de tensión de 9000 N, experimenta un incremento de longitud de 0.05 mm. Demuestre que las deformaciones real y nominal son aproximadamente iguales; realice la misma demostración para los esfuerzos real y nominal.

Ejercicio 3.2.3 (continuación)

Respuestas:

Deformación nominal, ecuación 2.7.1:

$$e = \frac{0.05}{25} = 0.002$$

Deformación real, ecuación 2.7.2:

$$\epsilon = \ln\left(\frac{25.05}{25}\right) = 0.001998$$

Área inicial

$$A_0 = \left(\frac{\pi}{4}\right)(12.7)^2 = 126.61 \text{ mm}^2 = (126.61)(10^{-6}) \text{ m}^2$$

Haciendo uso de la ecuación 3.2.20 se obtiene el área de la sección transversal del espécimen después de deformar

$$A = A_0 \frac{l_0}{l} = (126.61)(10^{-6}) \frac{25}{25.05} = (126.36)(10^{-6}) \text{ m}^2$$

Esfuerzo nominal

$$S = \frac{P}{A_0} = \frac{9000}{(126.61)(10^{-6})} = 71.08 \text{ MPa}$$

Esfuerzo real

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{9000}{(126.36)(10^{-6})} = 71.22 \text{ MPa}$$

Las diferencias entre los valores nominales y reales de esfuerzo y deformación son insignificantes; por esta razón, los valores de las propiedades elásticas, resistencia elástica, rigidez, relación de Poisson y resiliencia determinados a partir de los valores nominales y reales de esfuerzo y deformación, son aproximadamente iguales.

3.2.4. Curva esfuerzo real versus deformación real

Si la deformación se calcula a partir de las dimensiones instantáneas del espécimen, se puede trazar la curva esfuerzo real *versus* deformación real también denominada *curva de flujo* (figura 3.2.10). La razón de designar como curva de flujo a la curva esfuerzo real *versus* deformación real es la siguiente: el esfuerzo de cedencia se considera como el esfuerzo necesario para que se inicie el flujo plástico del metal original (el cual puede estar inicialmente en condición recocida); si se deforma el espécimen en el ensayo de tensión, en varios pasos de carga y descarga alternadas, el metal al cargarse se comporta elásticamente hasta que el esfuerzo alcanza el valor anterior a la descarga y se reanuda la deformación plástica; por eso, este esfuerzo se puede considerar como el esfuerzo de cedencia del metal deformado. Cada punto de la curva de la figura 3.2.10 representa el esfuerzo de cedencia del metal al volver a cargar; así pues, la curva de flujo se puede definir como el lugar geométrico de los esfuerzos de cedencia que constituyen la curva.

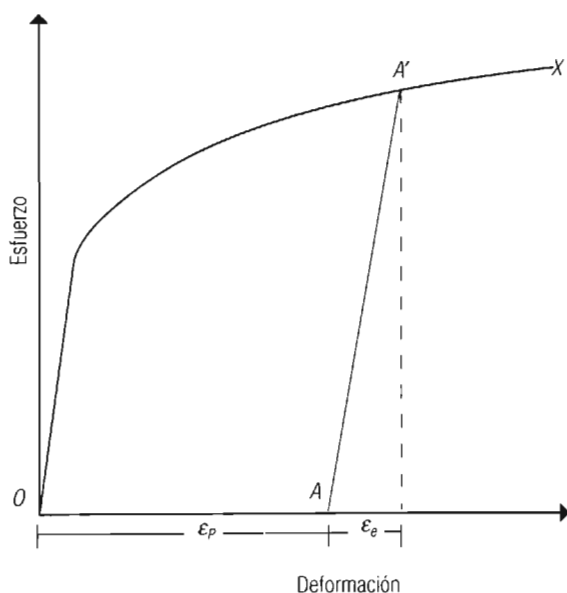


Figura 3.2.10. Curva esfuerzo real *versus* deformación real o curva de flujo.

3.2.5. Propiedades plásticas reales de tensión

ESFUERZO REAL CORRESPONDIENTE A LA RESISTENCIA A LA TENSIÓN

El esfuerzo real (σ_u) correspondiente a la resistencia a la tensión, es el esfuerzo real calculado a partir de la carga máxima; el subíndice u denota que la deformación que experimenta el espécimen bajo este esfuerzo es uniforme, y (A_u) es el área de la sección transversal en el punto de carga máxima:

$$\sigma_u = \frac{P_{\text{máx}}}{A_u} \quad (3.2.23)$$

ESFUERZO REAL DE FRACTURA

El esfuerzo real de fractura es la carga de fractura dividida entre el área de la sección transversal de fractura.

$$\sigma_f = \frac{P_f}{A_f} \quad (3.2.24)$$

DEFORMACIÓN REAL UNIFORME

La deformación real uniforme, ϵ_u , es la deformación real calculada con base en las dimensiones del espécimen en el punto en el que se alcanza la carga máxima; se puede determinar en función de las longitudes l_u y l_0 , donde l_u es la longitud de prueba en el punto de $P_{máx}$.

$$\epsilon_u = \ln \frac{l_u}{l_0} \quad (3.2.25)$$

o de las áreas A_u , A_0 .

$$\epsilon_u = \ln \frac{A_0}{A_u} \quad (3.2.26)$$

Para secciones de sección circular:

$$\epsilon_u = 2 \ln \frac{D_0}{D_u} \quad (3.2.27)$$

DEFORMACIÓN REAL DE FRACTURA

La deformación real de fractura es la deformación real determinada a partir del área original y el área después de fractura.

$$\epsilon_f = \ln \frac{A_0}{A_f} \quad (3.2.28)$$

DEFORMACIÓN LOCAL EN EL CUELLO

La deformación local en el cuello se define como la deformación real que experimenta el espécimen al transitar de la carga máxima hasta la carga de fractura.

$$\epsilon_{lc} = \ln \frac{A_u}{A_f} \quad (3.2.29)$$

TENACIDAD REAL

La tenacidad real, T_u , es la cantidad de energía absorbida por unidad de volumen de metal al deformarlo desde $\epsilon = 0$ hasta la deformación real uniforme ϵ_u ; es igual al área bajo la curva esfuerzo real *versus* deformación real comprendida entre estos límites de deformación.

$$T_u = \int_{\epsilon_0}^{\epsilon_u} \sigma(d\epsilon) \quad (3.2.30)$$

Para poder integrar la ecuación 3.2.30, es necesario expresar σ en función de ϵ ; una ecuación que se utiliza con frecuencia para describir la curva σ versus ϵ , es la ecuación de Ludwik:

$$\sigma = K\epsilon^n \tag{3.2.31}$$

Aplicando 3.2.31 a 3.2.30 e integrando resulta:

$$T_u = \frac{K\epsilon^{n+1}}{n+1} \tag{3.2.32}$$

La figura 3.2.11 ilustra la integración del área bajo la curva.

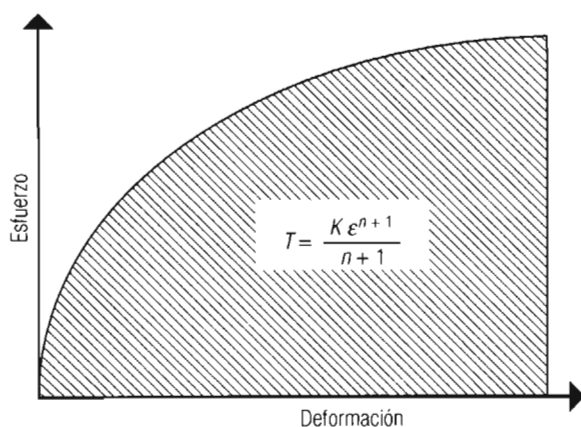


Figura 3.2.11. Tenacidad real.

3.2.5.1. Comparación de curvas nominal y real esfuerzo versus deformación

La figura 3.2.12 permite comparar la forma de los dos tipos de curvas.

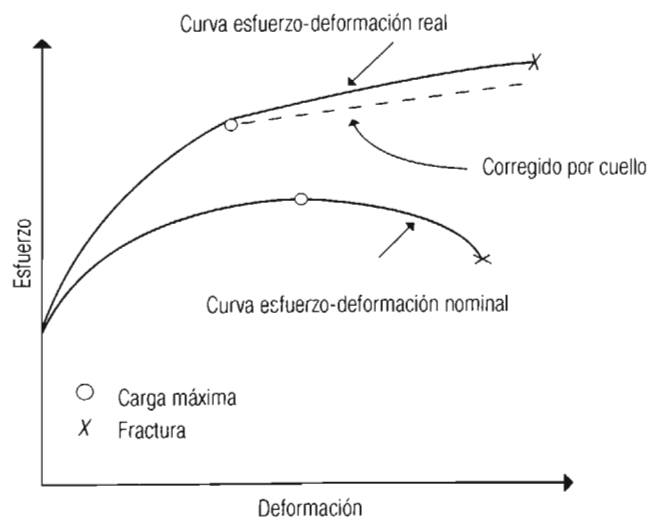


Figura 3.2.12. Comparación de las curvas nominal y real, esfuerzo versus deformación.

Durante el ensayo de tensión, las dimensiones del espécimen cambian a medida que avanza el ensayo: el área de la sección transversal disminuye y la longitud de prueba aumenta; al mismo tiempo se produce una gran cantidad de dislocaciones; cuando la densidad de éstas es alta, unas dislocaciones impiden el movimiento de otras, lo cual hace que la carga necesaria para continuar la deformación aumente.

Puesto que el esfuerzo real se determina dividiendo la carga entre el área instantánea de la sección transversal, el valor de esfuerzo real para una deformación dada es superior al esfuerzo nominal que se calcula con base en el área original. Cuando se alcanza el valor máximo de carga, se produce un cuello en la mayoría de los metales dúctiles. Debido a que el área de la sección transversal disminuye rápidamente una vez formado el cuello, la carga necesaria para proseguir la deformación cae; sin embargo, el esfuerzo continúa aumentando ya que el metal se endurece por deformación durante todo el ensayo hasta que se produce la fractura. El resultado neto es un aumento en el esfuerzo de la curva esfuerzo real *versus* deformación real. Para un valor dado de carga, la deformación real es inferior a la deformación nominal y la diferencia aumenta con la carga.

Cuando la deformación es uniforme, es decir, hasta el punto de inicio de la formación del cuello del espécimen de tensión, se pueden derivar varias relaciones entre las propiedades nominales y reales.

RELACIONES ENTRE DEFORMACIÓN REAL Y DEFORMACIÓN NOMINAL

En la sección 2.7 se mostraron las relaciones entre la deformación nominal y la deformación real, ecuaciones 2.7.5 y 2.7.6:

$$\varepsilon = \ln(1 + e) \quad (2.7.5)$$

$$e = \exp(\varepsilon) - 1 \quad (2.7.6)$$

RELACIONES ENTRE ESFUERZO REAL Y ESFUERZO NOMINAL

Reordenando la ecuación 3.2.19:

$$\frac{1}{A} = \frac{1}{A_0} \frac{l}{l_0} \quad (3.2.33)$$

Aplicando 3.2.33 a 3.2.18 resulta:

$$\sigma = \frac{P}{A} \frac{l}{l_0} \quad (3.2.34)$$

La ecuación 2.7.1 se puede modificar como sigue:

$$e = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{l}{l_0} - 1 \quad (3.2.35)$$

de donde:

$$\frac{l}{l_0} = e + 1 \quad (3.2.36)$$

Utilizando las ecuaciones 3.2.1 y 3.2.36 en la 3.2.34, resulta:

$$\sigma = S(e + 1) \quad (3.2.37)$$

por tanto:

$$S = \frac{\sigma}{e + 1} \quad (3.2.38)$$

RELACIÓN ENTRE RESISTENCIA REAL (σ_u) Y RESISTENCIA A LA TENSIÓN (RT)

La relación entre estos dos esfuerzos se obtiene a partir de las ecuaciones:

$$S_{\text{máx}} = RT = \frac{P_{\text{máx}}}{A_0} \quad (3.2.39)$$

$$\sigma_u = \frac{P_{\text{máx}}}{A_u} \quad (3.2.40)$$

Despejando $P_{\text{máx}}$ en ambas ecuaciones e igualando los resultados se obtiene:

$$\sigma_u = S_{\text{máx}} \frac{A_0}{A_u} \quad (3.2.41)$$

Combinando esta ecuación con la ecuación 3.2.20 y el resultado con la ecuación 3.2.36 y la 2.9.6 resulta:

$$\sigma_u = S_{\text{máx}} \frac{l}{l_0} = S_{\text{máx}} (e + 1) = S_{\text{máx}} \exp(\epsilon) \quad (3.2.42)$$

Por tanto:

$$S_{\text{máx}} = \frac{\sigma_u}{\exp(\epsilon)} \quad (3.2.43)$$

Ejercicio 3.2.4

1

Se ensaya un espécimen de acero en tensión y se grafica la curva S versus e . El valor del esfuerzo máximo de la curva es $S_{\text{máx}} = 600$ Mpa; la deformación para este esfuerzo es $e = 0.3$. Determine los valores reales de esfuerzo y deformación correspondiente a estos valores nominales.

Respuestas:

Esfuerzo real. De la ecuación 3.2.42:

$$\sigma = 600(0.3 + 1) = 780 \text{ MPa}$$

Ejercicio 3.2.4 (continuación)

2

Deformación real. De la ecuación 2.7.5:

$$\varepsilon = \ln(e + 1) = \ln(0.3 + 1) = 0.262$$

Se observa que el esfuerzo real es mayor que el esfuerzo nominal y que la deformación real es menor que la deformación nominal. Este ejercicio demuestra por qué la curva σ versus ε está situada arriba y a la izquierda de la curva S versus e (figura 3.2.12).

Ejercicio 3.2.5

1

Se ensaya en tensión un espécimen de un material frágil hasta fractura; la fractura coincide con el valor de carga máxima. Las dimensiones iniciales del espécimen son: $l_0 = 25$ mm y $D_0 = 12.7$ mm; las finales, $l_f = 28$ mm y $D_f = 12.0$ mm.

- a) Estime la deformación real con base en las longitudes y las áreas.

Respuesta:

Deformación real a partir de las longitudes:

$$\varepsilon = \ln\left(\frac{l_f}{l_0}\right) = \ln\left(\frac{28}{25}\right) = 0.113$$

Estimación de las áreas inicial y final:

$$A_0 = \left(\frac{\pi}{4}\right)(12.7)^2 = 126.6 \text{ mm}^2$$

Por la propiedad de volumen constante:

$$A_f = \frac{l_0}{l_f} A_0 = \left(\frac{25}{28}\right)(126.6) = 113.0 \text{ mm}^2$$

Deformación real a partir de las áreas:

$$\varepsilon = \ln\left(\frac{A_0}{A_f}\right) = \ln\left(\frac{126.6}{113}\right) = 0.113$$

Hasta el valor máximo de carga, es decir, antes de que se inicie el cuello, los valores de las deformaciones son iguales cuando se determinan a partir de las longitudes o de las áreas iniciales y finales.

Ejercicio 3.2.5 (continuación)

2

b) Suponga ahora que se ensaya en tensión un espécimen de un material dúctil de las mismas dimensiones que las del espécimen anterior hasta fractura. Por tratarse de un material dúctil, se produce un cuello. Las dimensiones del espécimen después del ensayo son: $l_f = 35 \text{ mm}$ y $D_f = 4.0 \text{ mm}$. Determine la deformación real con base en las longitudes y áreas antes y después del ensayo.

Respuesta:

Deformación real a partir de las longitudes:

$$\varepsilon = \ln\left(\frac{35}{25}\right) = 0.336$$

El área inicial tiene el mismo valor calculado anteriormente: el área final es:

$$A_f = \left(\frac{\pi}{4}\right)(4)^2 = 12.566 \text{ mm}^2$$

Deformación estimada a partir de las áreas:

$$\varepsilon = \ln\left(\frac{126.6}{12.566}\right) = 2.3$$

Cuando se produce cuello, las deformaciones calculadas a partir de las longitudes y áreas de la sección transversal son diferentes. El valor de deformación calculado a partir de las áreas es el correcto.

3.3. Ensayo de compresión

Dos tipos de ensayos de compresión son usuales. El ensayo de compresión unidireccional, y el ensayo de compresión en deformación plana.

El ensayo de compresión unidireccional consiste en la compresión de un cilindro en su dirección longitudinal (figura 3.3.1). Este ensayo es utilizado para medir el esfuerzo de cedencia o flujo en aplicaciones de formado de metales.

El ensayo de compresión en deformación plana utiliza un espécimen de sección rectangular, la sección transversal a lo largo de la longitud de prueba es más delgada que la sección en los extremos (figura 3.3.2). Este ensayo es adecuado para medir el esfuerzo de flujo para deformaciones en láminas delgadas. Se examinarán en el orden mencionado los dos tipos de ensayo.

3.3.1. Ensayo de compresión unidireccional

Las dimensiones de los especímenes metálicos de compresión no están normadas como es el caso de los especímenes de tensión; sin embargo existen algunas reglas prácticas que se aplican a la geometría de los especímenes. Cuando se comprime el

especímen, el flujo lateral del metal que se encuentra en contacto con las herramientas de compresión origina que se produzcan fuerzas de fricción, las cuales se oponen al flujo del metal, en tanto que el metal que se localiza a la mitad de la altura de la probeta fluye sin restricción alguna. Esta forma no homogénea de deformación conduce a un espécimen deformado en forma de barril (figura 3.3.1c) y a la formación de un cono interno de metal sin deformar sobre cada una de las caras de contacto espécimen–herramienta. Cuando estas zonas sin deformar se traslapan, aumenta la fuerza necesaria para continuar la deformación.

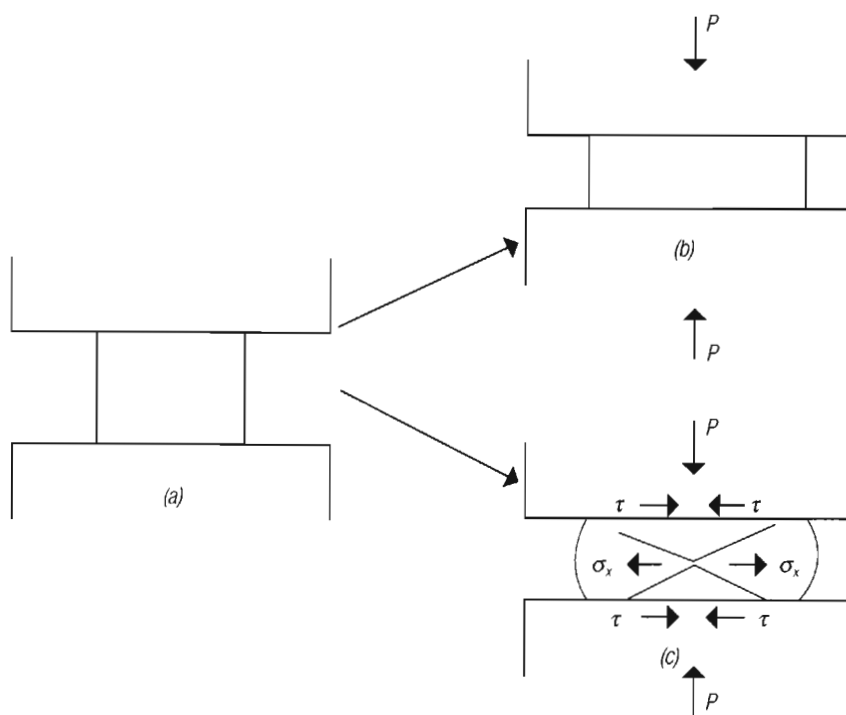


Figura 3.3.1. Especímen de compresión: a) antes de la deformación; b) después de la deformación uniforme, y c) después de la deformación no uniforme.

Para especímenes en los que la relación de las dimensiones iniciales h_0/d_0 es pequeña, se presenta más pronto el incremento en la resistencia a la deformación.

Por otro lado, cuando la relación h_0/d_0 es muy grande, los especímenes experimentan pandeo durante su compresión. Se ha encontrado que la relación h_0/d_0 debe ser igual o menor que 2 para evitar el pandeo.

Se puede disminuir la fricción y eliminar la forma de barril mediante el uso de herramientas de compresión endurecidas, maquinando ranuras concéntricas sobre las superficies circunferenciales de los especímenes para retener el lubricante y mediante el uso de un lubricante efectivo; algunos lubricantes que producen una deformación homogénea son el teflón en compresión, a temperatura ambiente; el grafito en forma de láminas para uso a temperaturas no superiores a 450 °C, y el vidrio en estado pastoso para compresión a temperaturas más altas.

3.3.1.1. Propiedades elásticas nominales de compresión

Las propiedades elásticas de compresión de metales dúctiles y frágiles como resistencia elástica, rigidez y resiliencia pueden determinarse como en el ensayo de tensión. Los materiales frágiles (el hierro gris o el vidrio) se fracturan casi inmediatamente después de que se alcanza el límite proporcional. Algunos materiales frágiles, como el concreto y muchas rocas, producen curvas similares esfuerzo-deformación a las obtenidas para metales dúctiles, aunque las deformaciones más grandes que se obtienen en estos materiales son de aproximadamente 1%. Los módulos de elasticidad y resistencias elásticas en muchos metales y aleaciones, son aproximadamente iguales en tensión y compresión, aunque hay excepciones.

3.3.1.2. Propiedades plásticas nominales de compresión

RESISTENCIA A LA COMPRESIÓN Y ESFUERZO DE FRACTURA EN MATERIALES DÚCTILES

En los metales dúctiles no es posible definir propiedades plásticas debido a que las cargas máxima y de fractura no pueden ser determinadas. En el ensayo de compresión, a medida que la carga aumenta, aumenta la sección transversal. El aumento en la sección transversal tiene dos efectos: 1) aumenta la fricción y con ello se incrementa la carga, 2) disminuye el esfuerzo aplicado y por tanto aumenta la resistencia a soportar más carga hasta que se produce un disco muy delgado y la carga para continuar la deformación tiende a elevarse al infinito.

RESISTENCIA A LA COMPRESIÓN Y ESFUERZO DE FRACTURA EN MATERIALES FRÁGILES

En materiales frágiles después de una deformación lateral muy pequeña, se produce fractura por corte mediante deslizamiento sobre un plano inclinado. La resistencia a la compresión es entonces igual al esfuerzo de fractura. Por eso:

$$S_{\text{máx}} = S_f = \frac{P_f}{A_0} \quad (3.3.1)$$

DEFORMACIÓN NOMINAL POR CIENTO

La deformación nominal por ciento se determina multiplicando por cien la deformación, es decir:

$$e(100) = l(100) = \frac{l_f - l_0}{l_0}(100) \quad (3.3.2)$$

En compresión, se resta la longitud al final del ensayo de la longitud del espécimen antes de deformar; es costumbre tomar la deformación nominal como positiva.

TENACIDAD

La tenacidad, como en el caso de tensión, es el área bajo la curva; se determina mediante las ecuaciones 3.2.15 o 3.2.16. La curva esfuerzo-deformación de materiales frágiles frecuentemente está representada por una parábola: en este caso se utiliza la ecuación 3.2.17.

Ejercicio 3.3.1

1

Se sujeta a una carga de compresión uniformemente distribuida una placa de acero de 30×30 cm y un espesor de 50 mm. El material tiene un esfuerzo de cedencia de 240 MPa, módulo de elasticidad de 206 GPa y una relación de Poisson de 0.28.

Determine: a) la carga correspondiente al esfuerzo de cedencia; b) la contracción de espesor correspondiente al esfuerzo de cedencia; c) el alargamiento lateral a un esfuerzo de 200 MPa; d) el cambio de volumen para un esfuerzo de 200 MPa; y, por último, e) la energía total de deformación correspondiente al esfuerzo de cedencia.

Respuestas:

a) Carga de cedencia

El área de carga de la placa es:

$$A_0 = (0.3)(0.3) = 0.09 \text{ m}^2$$

la carga de cedencia es:

$$P_0 = S_0 A_0 = (240)(10^6)(0.09) = 21.6 \text{ MN}$$

b) Contracción del espesor producido por el esfuerzo de cedencia (Δh)

De las ecuaciones:

$$\Delta h = e' h_0 \qquad E = \frac{S_0}{e'}$$

resulta

$$\Delta h = \frac{S_0 h_0}{E}$$

Aplicando valores:

$$\Delta h = \frac{(240)(10^6)(50)(10^{-3})}{(206)(10^9)} = (58.2)(10^{-6}) \text{ m} = 0.0582 \text{ mm}$$

c) Alargamiento lateral (Δl) para un esfuerzo de 200 MPa

Se vuelve a calcular Δh , pero ahora para 200 MPa:

$$\Delta h = \frac{(200)(10^6)(50)(10^{-3})}{(206)(10^9)} = 0.0485 \text{ mm} = 0.00485 \text{ cm}$$

De donde la deformación unidireccional en el espesor es

$$e' = \frac{\Delta h}{h_0} = \frac{0.0485}{50} = -0.00097$$

Ejercicio 3.3.1 (continuación)

2

En la relación de Poisson:

$$\mu = -\frac{e'}{e}$$

en compresión, la deformación unidireccional e' disminuye y la deformación lateral e aumenta.

$$e = -\frac{e'}{\mu} = -\frac{-0.00097}{0.28} = 0.00346$$

El alargamiento lateral Δl es

$$\Delta l = el_0 = (0.00346)(30) = 0.1038 \text{ cm}$$

El valor de e se toma positivo.

d) Cambio de volumen para 200 MPa

$$\Delta V = V_f - V_0 = (30 + 0.1038)(30 + 0.1038)(5 - 0.00485) - ((30)(30)(5))$$

$$\Delta V = 4526.8 - 4500 = 26.8 \text{ cm}^3$$

e) Energía total de deformación

$$E_T = \frac{S_0^2}{2E} = \frac{[(240)(10^6)]^2}{(2)(206)(10^9)} = 139.8 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3}$$

3.3.1.3. Propiedades elásticas reales de compresión

Como se demostró en el ejercicio 3.2.5 para tensión, en el intervalo elástico, los valores de esfuerzo y deformación estimados a partir de sus dimensiones originales son esencialmente iguales a los valores de esfuerzo y deformación reales. En compresión ocurre la misma situación; por esta razón las propiedades elásticas reales y nominales para materiales dúctiles y frágiles: resistencia elástica, rigidez y resiliencia, tienen aproximadamente el mismo valor.

3.3.1.4. Propiedades plásticas reales de compresión

Las mismas razones que hacen imposible determinar las propiedades plásticas nominales en los metales dúctiles, impiden obtener valores para las propiedades plásticas reales.

RESISTENCIA A LA COMPRESIÓN Y ESFUERZO DE FRACTURA EN MATERIALES FRÁGILES

Las deformaciones hasta fractura son predominantemente elásticas; por eso, como en las propiedades plásticas nominales, la resistencia a la compresión es igual al esfuerzo de fractura. Por tanto:

$$\sigma_{\text{máx}} = \sigma_f = \frac{P_f}{A_f} \approx S_{\text{máx}} \quad (3.3.3)$$

3.3.2. Ensayo de compresión en deformación plana

En el ensayo de compresión en deformación plana, el estado de esfuerzos es similar al que se produce en procesos como laminación de láminas y forja de placas con la deformación restringida en la dirección del ancho. El esfuerzo de cedencia determinado en este ensayo se utiliza para calcular las cargas de laminación y forja de placas. La figura 3.3.2 representa un esquema de las herramientas superior e inferior de compresión y la geometría del espécimen utilizado para este ensayo.

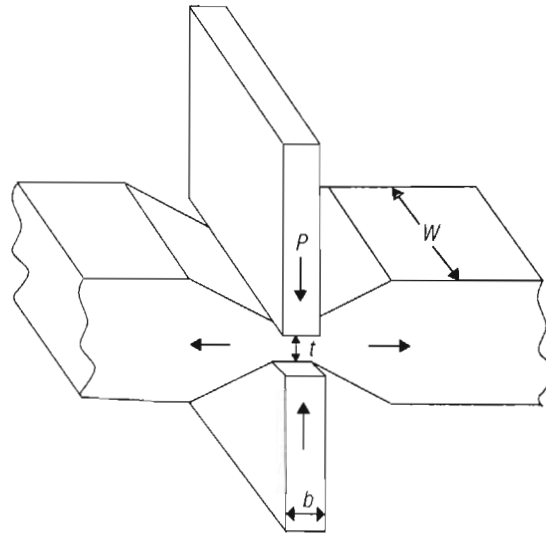


Figura 3.3.2. Esquema del ensayo de compresión en deformación bidireccional.

Como se observa en la figura 3.3.2, las herramientas de compresión son placas de un espesor pequeño (b), de un ancho mayor que el ancho del espécimen; lo comprimen a lo largo de una banda de ancho igual al espesor de las mismas herramientas. Para lograr reproducibilidad de los resultados, es necesario observar algunas relaciones entre las dimensiones: la relación entre el espesor del espécimen (t) y el espesor de herramienta debe conservarse dentro del intervalo:

$$\frac{1}{4} \leq \frac{t}{b} \leq \frac{1}{2}$$

Para que se mantenga la condición de deformación plana se debe satisfacer la relación

$$\frac{w}{b} > 5$$

Los hombros en los extremos del espécimen restringen su deformación en la dirección del ancho. El espécimen al deformarse disminuye su espesor y aumenta su longitud. Este ensayo ofrece varias ventajas con respecto a la compresión unidireccional de un cilindro: elimina el problema de la deformación no uniforme (no se forma el barril) y la fuerza de deformación no se eleva tan rápidamente como en la compresión de un cilindro, debido a que el área de contacto entre el espécimen y las herramientas permanece constante; sin embargo, se formará una zona muerta en la cara de contacto espécimen-herramienta, a menos que la lubricación sea muy efectiva. Para disminuir el efecto de la fricción, este ensayo usualmente se realiza en varios pasos; se deforma una cantidad y se mide el espesor después de la deformación; se vuelve a lubricar antes del siguiente paso de deformación y se repite el proceso hasta que se alcanza el espesor final. El esfuerzo real en deformación plana se determina mediante la ecuación:

$$\sigma_{dp} = P_{dp} = \frac{P}{wb} \quad (3.3.4)$$

donde P es la carga aplicada al final de la deformación o del paso de deformación del ensayo. El producto wb es el área de contacto herramienta-espécimen, área que permanece constante durante el ensayo.

La deformación real se calcula mediante la expresión:

$$\epsilon_{dp} = \ln \frac{t_0}{t} \quad (3.3.5)$$

donde t_0 es el espesor del espécimen antes de ser deformado y t es el espesor después de la deformación.

La relación entre el esfuerzo de cedencia en deformación plana (σ_{0dp}) y el esfuerzo de cedencia en compresión unidireccional (σ_0) es:

$$\sigma_{0dp} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0 = 1.155 \sigma_0 \quad (3.3.6)$$

La relación entre deformación plana (ϵ_{dp}) y deformación unidireccional ϵ es:

$$\epsilon_{dp} = \frac{\sqrt{3}}{2} \epsilon \quad (3.3.7)$$

3.4. Ensayo de torsión

3.4.1. Introducción

El ensayo de torsión no se utiliza en forma rutinaria para el control de las propiedades de los materiales; tiene dos tipos de aplicaciones: 1) en el ensayo de piezas com-

pletas, por ejemplo en flechas, ejes y brocas de perforación para conocer su desempeño en servicio, y 2) en ensayos relacionados con el estudio de flujo plástico y de los mecanismos de ablandamiento y/o endurecimiento durante la deformación como recuperación, recristalización y precipitación dinámicas, e igualmente después de la deformación como recuperación, recristalización y precipitación estáticas. Este ensayo permite efectuar deformaciones muy grandes sin que se produzca la inestabilidad plástica (cuello) que caracteriza al ensayo de tensión, ni ocasione un exceso de fricción que daría lugar a la deformación en forma de barril que se observa en compresión; por eso es muy adecuado el ensayo para simular el proceso de laminación.

La máquina para ensayos de torsión es similar a un torno mecánico: está constituida por dos cabezales. El espécimen se sujeta a los dos cabezales mediante mordazas circulares; uno de los cabezales es giratorio y sirve para aplicar el momento o par de torsión; el otro cabezal es fijo con una celda de carga para medir el momento de torsión; este cabezal contiene además un medidor del ángulo de torsión θ , llamado troptómetro.

Las dimensiones de los especímenes de torsión no están normadas; se han establecido algunos lineamientos para obtener reproducibilidad de resultados. Los especímenes pueden ser cilíndricos sólidos o huecos. Los especímenes cilíndricos sólidos tienen una relación, longitud de prueba (l) / diámetro (D) de 8.0 a 8.5. La sección de sujeción del espécimen es cilíndrica de una longitud $l' = l/4.25$, la cual guarda una relación con el diámetro de esta sección (D') de 1.67 (figura 3.4.1). En la sección transversal de una barra cilíndrica sólida, el esfuerzo, la deformación y rapidez de deformación varían linealmente con el radio del espécimen desde cero en el eje neutro hasta un valor máximo sobre la superficie.

La figura 3.4.2 ilustra esta distribución en el rango elástico.

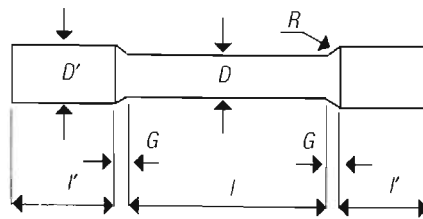


Figura 3.4.1. Especímen de torsión de sección transversal circular.

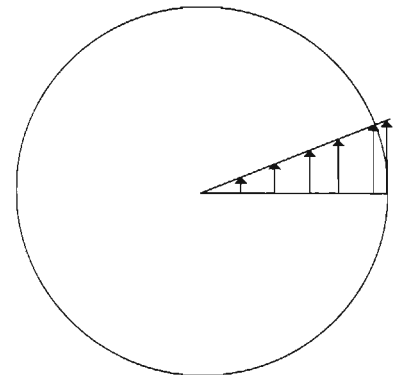


Figura 3.4.2. Distribución de esfuerzos elásticos en una barra sólida de sección transversal circular.

Deformación elástica

Para eliminar los gradientes antes señalados, y obtener valores más precisos en propiedades de corte, se utilizan especímenes tubulares de pared delgada, en los cuales el esfuerzo, la deformación y rapidez de deformación son básicamente uniformes a través de la pared.

Para la determinación de las propiedades elásticas en torsión de especímenes tubulares, se recomienda utilizar especímenes donde la relación de la longitud de la sección de prueba al diámetro exterior sea de 10, y la relación diámetro exterior/espesor varíe de 8 a 10; cuando se utilizan relaciones diámetro exterior/espesor superiores a 10, los especímenes pueden fallar por pandeo.

La figura 3.4.3 muestra las dimensiones de especímenes de torsión para experimentos en la región elástica.

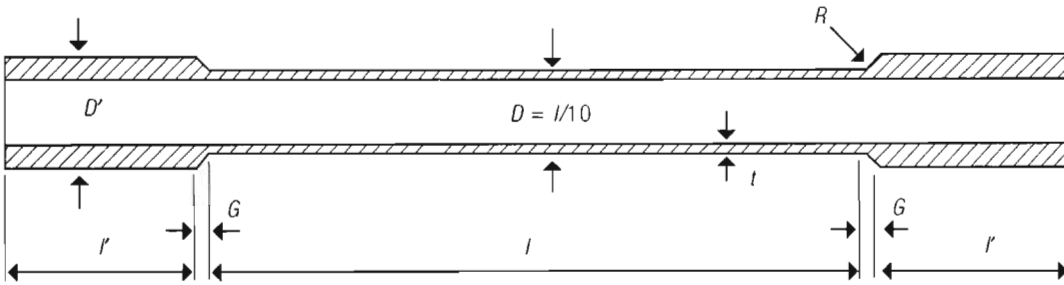


Figura 3.4.3. Especimen cilíndrico hueco de torsión.

3.4.2. Esfuerzo y deformación en el ensayo de torsión

3.4.2.1. Especímenes cilíndricos sólidos

DEFORMACIÓN TANGENCIAL O DE CORTE

La deformación en corte γ es una medida de la distorsión angular que sufre el espécimen durante el ensayo; se determina mediante la tangente del ángulo ϕ , es decir:

$$\gamma = \tan\phi = \frac{\text{arco}}{\text{longitud}} = \frac{r\theta}{l} = \frac{a\theta}{l} = \frac{D\theta}{2l} \quad (3.4.1)$$

La figura 3.4.4 define los términos de esta ecuación. Aquí, θ es el ángulo medido por el troptómetro y se expresa en radianes; r es el radio variable del elemento de área dA y a es el radio del espécimen; ambos se expresan en unidades de longitud; γ , la deformación cortante, no tiene unidades.

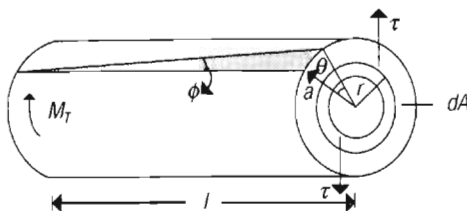


Figura 3.4.4. Ensayo de torsión de un espécimen de sección transversal circular.

ESFUERZO TANGENCIAL O DE CORTE

El esfuerzo cortante se designa por τ ; la ecuación para calcularlo se deriva a partir del equilibrio del momento aplicado y el momento resistente. Si se supone que existe equilibrio de momentos en el elemento de volumen de área transversal dA (figura 3.4.4):

$$M_T = \int_{r=0}^{r=a} \tau r dA, \text{ entonces} \quad (\text{i})$$

τdA es la fuerza que actúa sobre el elemento dA y r es la distancia del centro de la barra al punto de aplicación de la fuerza en dA .

Multiplicando el segundo miembro de la ecuación i por r/r , y suponiendo que τ no es una función de r , por lo que se puede sacar del operador integral, resulta:

$$M_T = \frac{\tau}{r} \int_0^a r^2 dA \quad (\text{ii})$$

En la ecuación ii, la expresión $\int r^2 dA = J$ representa el momento polar de inercia del área diferencial dA con respecto al eje de la barra; se acostumbra denotarlo por la letra J ; al aplicar J a la ecuación ii:

$$M_T = \frac{\tau J}{r} \quad (\text{iii})$$

Se despeja τ de la ecuación iii:

$$\tau = \frac{M_T r}{J} = \frac{M_T D}{2J} \quad (3.4.2)$$

En la ecuación 3.4.2, τ = esfuerzo cortante tiene unidades de MPa, kg/mm²; M_T = momento de torsión, en Nm, kg mm; r = distancia radial en m, mm; por último, J = momento polar de inercia, en m⁴, mm⁴.

MOMENTO POLAR DE INERCIA DE UN ÁREA

El momento polar de inercia de un elemento de área (J) es la integral del producto de ese elemento de área por la distancia al cuadrado a una línea normal al plano donde se encuentra el elemento de área.

DERIVACIÓN DE LA EXPRESIÓN MATEMÁTICA PARA EL MOMENTO POLAR DE INERCIA DE UNA CIRCUNFERENCIA

De la definición de momento polar de inercia de un área y de la figura 3.4.4:

$$J = \int_0^a r^2 dA = \int_0^a r^2 (2\pi r dr) \quad (\text{iv})$$

Integrando:

$$J = 2\pi \int_0^a r^3 dr = \frac{2\pi r^4}{4} \Big|_0^a \quad (v)$$

Tomando límites:

$$J = \frac{\pi a^4}{2} \quad (vi)$$

Si se desea expresar J en función del diámetro de la circunferencia, se sustituye el radio a por el diámetro D :

$$a = \frac{D}{2}$$

Entonces, a partir de la ecuación vi:

$$J = \frac{\pi \left(\frac{D}{2}\right)^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32} \quad (3.4.3)$$

El esfuerzo cortante para una barra cilíndrica sólida se determina utilizando la ecuación 3.4.3 en la ecuación 3.4.2; la última se transforma en:

$$\tau = \frac{M_T D}{\frac{\pi D^4}{32}}$$

Simplificando:

$$\tau = \frac{16M_T}{\pi D^3} \quad (3.4.4)$$

donde D es el diámetro de la barra cilíndrica sólida; por eso el valor del esfuerzo cortante sobre la periferia del cilindro es máximo, como se aprecia en la figura 3.4.4.

3.4.2.2. Especímenes cilíndricos huecos de pared delgada

DEFORMACIÓN TANGENCIAL O DE CORTE

La ecuación para determinar la deformación cortante es la misma que para cilindros sólidos (3.4.1). La figura 3.4.5 define los términos de esta ecuación.

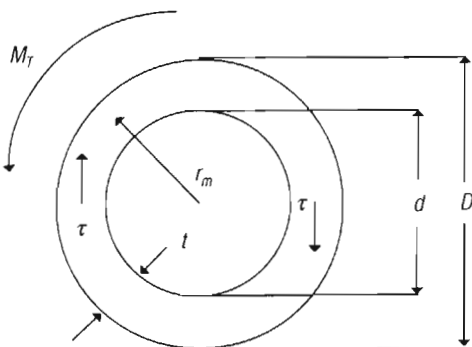


Figura 3.4.5. Esfuerzo cortante para un espécimen circular de torsión de pared delgada.

ESFUERZO TANGENCIAL O DE CORTE EN UN TUBO**Momento polar de inercia de un área circular anular**

El momento polar de inercia de un anillo circular es simplemente la diferencia de los momentos polares de dos circunferencias concéntricas de diámetros D , d , respectivamente;

como $D > d$, resulta $t = \frac{D-d}{2}$, donde t es el espesor del anillo circular.

Entonces:

$$J = \frac{\pi D^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32} \quad (\text{vii})$$

Al utilizar la ecuación para J dada por vii en la ecuación 3.4.2, resulta:

$$\tau = \frac{16M_T D}{\pi(D^4 - d^4)} \quad (3.4.5)$$

MÉTODO ALTERNATIVO PARA DETERMINAR EL ESFUERZO CORTANTE EN TUBOS DE PARED DELGADA

Para tubos de pared delgada es razonable suponer que el esfuerzo cortante se distribuye uniformemente en todo el espesor de pared. Por eso, se puede calcular el esfuerzo cortante a partir del siguiente equilibrio de momentos:

$$M_T = \tau(2\pi r_m)(t)(r_m) \quad (\text{viii})$$

donde r_m es el radio medio de la pared del tubo (figura 3.4.5). De la ecuación viii se despeja τ

$$\tau = \frac{M_T}{2\pi r_m^2 t} \quad (3.4.6)$$

3.4.3. Propiedades mecánicas elásticas**RESISTENCIA ELÁSTICA EN CORTE**

Las dos formas más comunes de definir la resistencia elástica en torsión son el límite proporcional y el esfuerzo de fluencia o cedencia en corte correspondiente a un ángulo de torsión permanente.

LÍMITE PROPORCIONAL

Es el valor de esfuerzo cortante definido por el valor del momento de torsión más elevado que mantiene una proporcionalidad con el ángulo de torsión. El límite proporcional se calcula utilizando el valor de M_{Tp} (figura 3.4.6), el cual se utiliza en la ecuación 3.4.4 o en la 3.4.5, según la geometría de la probeta. El esfuerzo proporcional se designa por τ_{0p} .

El módulo de resiliencia en corte se utiliza para medir esta propiedad y se define como el trabajo absorbido por unidad de volumen de material cuando éste es deformado en torsión hasta el límite proporcional (τ_{0p}); se designa por u_p .

Si M_{Tp} y θ_p son los valores del momento y del ángulo de torsión correspondientes al límite proporcional, entonces la energía elástica total absorbida por la probeta

es $\frac{M_{Tp}\theta_p}{2}$, que representa el área del triángulo rectángulo delimitado por M_{Tp} , bajo la curva M_T versus θ (figura 3.4.6). El módulo de resiliencia es igual a la energía elástica total dividida entre el volumen del espécimen, es decir:

$$u_p = \frac{M_{Tp}\theta_p}{2} \frac{1}{Al} \quad (3.4.8a)$$

donde u_p está en unidades de Nm/m^3 , kg mm/mm^3 .

Una aproximación aceptable para el valor de u_p se obtiene al utilizar los valores de M_{Ty} y θ_y . La ecuación 3.4.8a se transforma en:

$$u_{Ty} = \frac{M_{Ty}\theta_y}{2} \frac{1}{Al} \quad (3.4.8b)$$

Para barras cilíndricas sólidas es posible obtener, a partir de las ecuaciones 3.4.8a y 3.4.8b, una ecuación más cómoda de utilizar. Se deriva a continuación esta expresión.

Combinando las ecuaciones 3.4.1, 3.4.2 y 3.4.7a, a las que se agregaron los índices p , T_p y 0_p para el propósito del cálculo del módulo de resiliencia, se obtiene sucesivamente:

$$\gamma = \frac{D\theta_p}{2l} \quad (3.4.1)$$

$$\tau_{0p} = \frac{M_{Tp}D}{2J} \quad (3.4.2)$$

$$G = \frac{\tau_{0p}}{\gamma} \quad (3.4.7a)$$

Al utilizar los valores de 3.4.1 y 3.4.2 en 3.4.7a:

$$G = \frac{\frac{M_{Tp}D}{2J}}{\frac{D\theta_p}{2l}} = \frac{M_{Tp}l}{\theta_p J} \quad (i)$$

Despejando θ_p de la ecuación i:

$$\theta_p = \frac{M_{Tp}l}{GJ} \quad (ii)$$

Aplicando ii a 3.4.8a:

$$u_p = \frac{M_{Tp}}{2} \left(\frac{M_{Tp}l}{GJ} \right) \frac{1}{Al} = \frac{M_{Tp}^2 l}{2GJA} \quad (\text{iii})$$

Despejando M_{Tp} de 3.4.2:

$$M_{Tp} = \frac{2J\tau_{0p}}{D} \quad (\text{iv})$$

Aplicando iv a iii y simplificando:

$$u_p = \frac{\left(\frac{2\tau_{0p}J}{D} \right)^2}{2GJA} = \frac{2J\tau_{0p}^2}{GAD^2} \quad (\text{v})$$

Sustituyendo por la expresión para J dada en 3.4.3 y por $A = (\pi/4)D^2$, resulta:

$$u_p = \frac{2 \left(\frac{\pi D^4}{32} \right) \tau_{0p}^2}{G \left(\frac{\pi}{4} D^2 \right) D^2}$$

$$u_p = \frac{\tau_{0p}^2}{4G} \quad (3.4.9)$$

La ecuación 3.4.9 es más sencilla de manejar y no es necesario conocer el ángulo θ_p para poder calcular la resiliencia.

Para derivar la ecuación para calcular el valor de $u_{\bar{y}}$ no es necesario seguir el camino empleado para obtener la expresión 3.4.9 para estimar u_p , es suficiente con sustituir τ_{0y} por τ_{0p} y $u_{\bar{y}}$ por u_p , en 3.4.9.

La ecuación para determinar el módulo de resiliencia en una barra cilíndrica hueca es

$$u_p = \frac{\tau_{0p} \gamma_{0p}}{2} = \frac{\tau_{0p}^2}{2G} \quad (3.4.10)$$

A esta ecuación se aplica la ecuación 3.4.7a.

3.4.4. Propiedades mecánicas plásticas aparentes

RESISTENCIA PLÁSTICA

La resistencia plástica se determina aplicando el valor de momento máximo obtenido en el ensayo de torsión a la ecuación 3.4.4, en el caso de barras cilíndricas sólidas o en las ecuaciones 3.4.5 y 3.4.6 para tubos cilíndricos de pared delgada. Para ambos tipos de especímenes, de la ecuación 3.4.2:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{M_{T\text{máx}} D}{2J} \quad (3.4.11)$$

El valor de resistencia plástica calculado mediante la ecuación 3.4.11 está lejos del valor de la resistencia real debido a que se están utilizando ecuaciones que son desarrolladas para el intervalo elástico; por eso, al valor calculado mediante esta ecuación se le llama *resistencia plástica aparente*. Es útil para seleccionar materiales. Una ecuación que permite obtener un valor más aproximado es presentada en la sección 3.4.5.1, más adelante.

TENACIDAD

Se define como la energía por unidad de volumen absorbida por el material al deformarse hasta fractura. La tenacidad es calculada mediante la siguiente ecuación:

$$T_s = \frac{M_{T_{\text{máx}}} \theta_f}{Al} \quad (3.4.12)$$

En esta ecuación, $M_{T_{\text{máx}}}$ está medido en Nm; θ_f lo está en radianes; A en m^2 ; l en m, y la tenacidad en Nm/m^3 .

Ejercicio 3.4.1

1

En un ensayo de torsión, un espécimen cilíndrico sólido de un diámetro de 12.7 mm y una longitud de prueba de 200 mm, se obtuvieron los siguientes valores: un momento de cedencia de 100 Nm y un momento de torsión máximo de 160 Nm. El ángulo de torsión al cual ocurrió la fractura fue de 450° . Para un momento de 96 Nm en la parte lineal del diagrama momento *versus* ángulo de torsión, el ángulo fue 10° .

Determine: a) resistencia elástica; b) la rigidez o módulo de corte; c) el módulo de resiliencia elástica; d) la resistencia plástica aparente, y e) el módulo aparente de tenacidad.

Respuestas:

a) La resistencia elástica:

$$\tau_0 = \frac{16 M_T}{\pi D^3}$$

$$\tau_0 = \frac{(16)(100)}{\pi [(12.7)(10^{-3})]^3} = (0.248)(10^9) \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$\tau_0 = 248.6 \text{ MPa}$$

b) Rigidez:

$$\gamma = \frac{r \theta}{L} = \frac{D \theta}{2L} = \frac{(12.7)(0.1745)}{(2)(200)} = 0.00554$$

$$\theta = 10^\circ = 0.1745 \text{ rad}$$

$$\tau = \frac{16 M_T}{\pi D^3} = \frac{(16)(96)}{\pi [(12.7)(10^{-3})]^3} = 238.7 \text{ MPa}$$

Ejercicio 3.4.1 (continuación)

2

$$G = \frac{\tau}{\gamma} = \frac{238.7}{0.00554} = 43 \text{ GPa}$$

c) Módulo de resiliencia:

$$u_{0,y} = \frac{\tau_0^2}{4G} = \frac{[(248.6)(10^6)]^2}{(4)(43)(10^9)} = (359)(10^3) \frac{\text{Nm}}{\text{m}^3} = 0.359 \frac{\text{MJ}}{\text{m}^3}$$

d) Resistencia plástica aparente:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{(16)(160)}{\pi[(12.7)(10^{-3})]^3} = 397.8 \text{ MPa}$$

e) Módulo de tenacidad:

$$\theta = 450^\circ = 7.854 \text{ rad}$$

$$T_s = \frac{M_{T\text{máx}}\theta_f}{AL} = \frac{(160)(7.854)}{\frac{\pi}{4}[(12.7)(10^{-3})]^2(200)(10^{-3})}$$

$$T_s = \frac{(1256.64)(10^9)}{25322.53} = (49.6)(10^6) = 49.6 \frac{\text{MJ}}{\text{m}^3}$$

Ejercicio 3.4.2

1

En un ensayo de torsión de una aleación de acero, se utilizó un espécimen tubular de un diámetro externo de 38 mm y un diámetro interno de 32 mm. La longitud de prueba fue de 100 mm. Al momento de torsión de cedencia 616 N-m le correspondió un ángulo de torsión de 0.45°. El momento de torsión máximo fue de 964 N-m y el ángulo de torsión a la fractura fue de 69°.

Determine: a) la resistencia elástica; b) el módulo de corte; c) el módulo de resiliencia; d) la resistencia al corte, y e) el módulo de tenacidad.

Respuestas:

a) Resistencia elástica:

$$\tau = \frac{16M_T D}{\pi(D^4 - d^4)}$$

Ejercicio 3.4.2 (continuación)

2

Sustituyendo valores en la ecuación anterior,

$$\tau_0 = \frac{16(616)(38)10^{-3}}{\pi(38^4 - 32^4)(10^{-3})^4} = \frac{(374528)10^{-3}}{\pi(2085136 - 1048576)10^{-12}}$$

$$\tau_0 = (0.115)10^9 = 115 \text{ MPa}$$

b) Módulo de corte:

$$\theta = 0.45 \frac{\pi}{180} = 0.00785 \text{ rad}$$

y

$$\gamma = \frac{D\theta}{2L} = \frac{(38)(0.00785)}{(2)(100)} = 0.00149$$

por eso:

$$G = \frac{\tau}{\gamma} = \frac{115}{0.00149} = 77 \text{ GPa}$$

c) Módulo de resiliencia

$$u_{Ty} = \frac{\tau_0^2}{2G} = \frac{[(115)10^6]^2}{(2)(77)(10^9)} = 85.8 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3}$$

d) Resistencia al corte

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{16(964)(38)10^{-3}}{\pi(38^4 - 32^4)(10^{-3})^4} = \frac{(586112)10^{-3}}{\pi(1036560)10^{-12}}$$

$$\tau_{\text{máx}} = 180 \text{ MPa}$$

e) Tenacidad:

$$\theta_f = 69 \frac{\pi}{180} = 1.2 \text{ rad}$$

$$T_s = \frac{M_{T\text{máx}}\theta_f}{AL} = \frac{M_{T\text{máx}}\theta_f}{\pi/4[D^2 - d^2]L} = \frac{(964)(1.2)}{\pi/4[(38^2 - 32^2)(10^{-3})^2](100)(10^{-3})}$$

$$T_s = \frac{1156.8}{0.785(1444 - 1024)(100)10^{-9}} = 35 \text{ MJ/m}^3$$

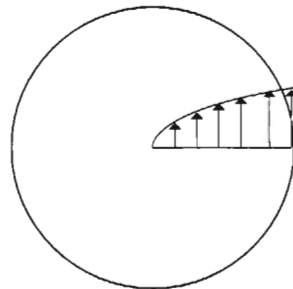
3.4.5. Esfuerzos y deformaciones grandes en torsión

DEFORMACIÓN CORTANTE

La deformación plástica se determina mediante la ecuación 3.4.1.

ESFUERZO CORTANTE

Al aplicar a un espécimen de torsión un esfuerzo cortante de un valor más alto al de la resistencia elástica en torsión, el esfuerzo, la deformación y la rapidez de deformación varían, como en el caso elástico, desde cero en el eje neutro hasta un valor máximo sobre la superficie, pero no son una función lineal del radio del espécimen. La figura 3.4.7 ilustra una posible distribución de esfuerzos.



Deformación plástica

Figura 3.4.7. Distribución de esfuerzos plásticos en una barra sólida de sección transversal circular.

Es necesario derivar una ecuación para determinar el esfuerzo cortante sobre la superficie del espécimen de radio a , para deformación plástica.

Haciendo uso de la figura 3.4.4, se define el ángulo de torsión por unidad de longitud de prueba θ' mediante la ecuación:

$$\theta' = \frac{\theta}{l} \tag{a}$$

Aplicando la ecuación a en la ecuación 3.4.1:

$$\gamma = r\theta' \tag{b}$$

La ecuación i se puede volver a plantear en la siguiente forma:

$$M_T = 2\pi \int_0^a (rdr)(\tau)(r) = 2\pi \int_0^a \tau r^2 dr \tag{c}$$

donde $dA = 2\pi r dr$, el elemento de área del anillo de la figura 3.4.4.

El esfuerzo cortante es una función de la deformación cortante, γ :

$$\tau = f(\gamma) \tag{d}$$

Insertando la ecuación d en la ecuación c :

$$M_T = 2\pi \int_0^a f(\gamma) r^2 dr \quad (e)$$

De la ecuación b se despeja r , se eleva al cuadrado y resulta:

$$r^2 = \frac{\gamma^2}{(\theta')^2} \quad (f)$$

Diferenciando b :

$$d\gamma = \theta' dr \quad (g)$$

donde

$$dr = \frac{d\gamma}{\theta'} \quad (h)$$

Aplicando las ecuaciones f y h en e :

$$M_T = 2\pi \int_0^{\gamma_a} f(\gamma) \frac{(\gamma)^2}{(\theta')^2} \frac{d\gamma}{\theta'} \quad (i)$$

Sacando θ'^3 del operador de integración, ecuación i :

$$M_T(\theta')^3 = 2\pi \int_0^{\gamma_a} f(\gamma) \gamma^2 d\gamma \quad (j)$$

Observe que en las ecuaciones i y j se aplicó la condición frontera: $\gamma = \gamma_a$ cuando $r = a$.
Aplicando esta misma condición frontera a la ecuación b :

$$\gamma_a = a\theta' \quad (k)$$

diferenciando k :

$$d\gamma = a d\theta' \quad (l)$$

Aplicando k y l en j :

$$M_T(\theta')^3 = 2\pi \int_0^{\gamma_a} f(a\theta') a^2 (\theta')^2 (a d\theta') \quad (m)$$

Derivando la ecuación m con respecto a θ' :

$$\frac{d}{d\theta'} \left[M_T(\theta')^3 \right] = 2\pi \frac{d}{d\theta'} \left[\int_0^{\gamma_a} f(a\theta') a^2 (\theta')^2 (a d\theta') \right] \quad (n)$$

En el lado derecho de la ecuación n , $d\theta'$ aparece tanto en el numerador como en el denominador, por lo que se puede eliminar. La ecuación n se reduce entonces a:

$$\frac{d}{d\theta'} \left[M_T (\theta')^3 \right] = 2\pi d \int_0^a f(a\theta') a^3 (\theta')^2 \quad (o)$$

Se eliminan en la ecuación o los operadores diferencial e integral del segundo miembro de la ecuación y se reordena la expresión resultante:

$$\frac{d}{d\theta'} \left[M_T (\theta')^3 \right] = 2\pi a^3 (\theta')^2 f(a\theta') \quad (p)$$

El esfuerzo sobre la superficie del espécimen, donde $r = a$, está dado por la expresión:

$$\tau_a = f(a\theta') \quad (q)$$

Aplicando la ecuación q en la p , resulta:

$$\frac{d}{d\theta'} \left[M_T (\theta')^3 \right] = 2\pi a^3 (\theta')^2 \tau_a \quad (r)$$

Derivando el primer miembro de la ecuación r con respecto a θ' :

$$3M_T (\theta')^2 + (\theta')^3 \frac{dM_T}{d\theta'} = 2\pi a^3 (\theta')^2 \tau_a \quad (s)$$

Despejando τ_a de la ecuación s se obtiene:

$$\tau_a = \frac{1}{2\pi a^3} \left[\theta' \left(\frac{dM_T}{d\theta'} \right) + 3M_T \right] \quad (3.4.13)$$

La derivada $\frac{dM_T}{d\theta'}$ puede obtenerse de la pendiente de una curva M_T versus θ' , tal como se muestra en la figura 3.4.8.

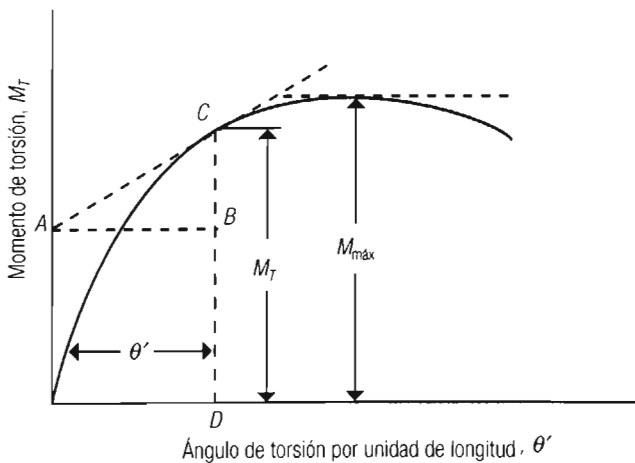


Figura 3.4.8. Método para calcular el esfuerzo cortante a partir de un diagrama momento de torsión versus ángulo de torsión.

Se puede aprovechar la geometría de la figura 3.4.8 para expresar el factor dentro del corchete de la ecuación 3.4.13 como una suma de segmentos, lo que hace más sencilla la estimación del esfuerzo cortante τ_a . La figura 3.4.8 se graficó utilizando valores experimentales de M_T y de θ' . En algún punto de la curva se puede definir un par de valores (M_T, θ') , que son las coordenadas de un punto C . Se traza una línea tangente al punto C , la cual corta al eje de las ordenadas en el punto A . Se traza una línea horizontal que pasa por el punto A y una línea vertical que pasa por el punto C ; en esta forma se define un triángulo rectángulo ABC . En este triángulo $AB = \theta'$ y $\frac{dM_T}{d\theta'} = \frac{BC}{AB}$. Por eso, el producto $\theta' \frac{dM_T}{d\theta'} = AB \frac{BC}{AB} = BC$. Por otro lado, $3M_T = 3CD$, según se aprecia en la figura 3.4.8.

Utilizando estas relaciones en la ecuación 3.4.13 se obtiene:

$$\tau_a = \frac{1}{2\pi a^3} (BC + 3CD) \quad (3.4.14)$$

ESFUERZO CORTANTE MÁXIMO

La ecuación para calcular el esfuerzo cortante máximo que puede soportar el material se puede derivar de la misma figura 3.4.8. Cuando se alcanza el momento de torsión máximo, $M_{\text{máx}}$, la pendiente $\frac{dM_T}{d\theta'} = 0$, por tanto la ecuación 3.4.13 se transforma en:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{3M_{\text{máx}}}{2\pi a^3} \quad (3.4.15)$$

3.4.5.1. Propiedades plásticas reales en torsión

RESISTENCIA AL CORTE

La resistencia plástica en torsión es igual al esfuerzo cortante máximo determinado mediante la ecuación 3.4.15. Cuando el valor de resistencia plástica corresponde con el esfuerzo de ruptura, se le denomina módulo de ruptura.

TENACIDAD A LA FRACTURA

La tenacidad real en torsión se define como el trabajo promedio efectuado por unidad de volumen para fracturar el espécimen. El trabajo promedio es el área bajo la curva momento *versus* ángulo de torsión. Expresado matemáticamente:

$$T_s = \frac{M_{\text{máx}} \theta_f}{Al} \quad (3.4.16)$$

Las unidades de tenacidad son las mismas que las de resiliencia: θ_f está dado en radianes, $M_{\text{máx}}$ en Nm, A en m², l en unidades de longitud; por eso T_s resulta en J/m³.

DETERMINACIÓN DE ESFUERZOS DE TORSIÓN A TEMPERATURAS ALTAS

A temperaturas elevadas el esfuerzo es fuertemente dependiente de la rapidez de deformación. Fields y Backofen (1957) realizaron un análisis que toma en cuenta la fuerte dependencia del esfuerzo de flujo respecto de la rapidez de deformación, resultado del cual es la relación:

$$\frac{dM_T}{d\theta'} = \frac{M_T}{\theta'} (m + n) \quad (3.4.17)$$

En esta ecuación, m es la sensibilidad del esfuerzo a la rapidez de deformación y n es el exponente de endurecimiento debido a deformación. A temperaturas de trabajo en caliente $m \gg n$. Si se aplica la ecuación 3.4.17 en la ecuación 3.4.13 se obtiene:

$$\tau_a = \frac{M_T}{2\pi a^3} (3 + m + n) \quad (3.4.18)$$

que es la ecuación para determinar el esfuerzo cortante en el ensayo de torsión en caliente.

Se puede determinar el esfuerzo normal equivalente haciendo uso de la ecuación 3.4.18 y del criterio de von Mises:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{3} \tau_a$$

Utilizando esta expresión en 3.4.18 resulta:

$$\sigma_{eq} = \frac{\sqrt{3} M_T}{2\pi a^3} (3 + m + n) \quad (3.4.19)$$

La deformación normal equivalente es estimada a partir de la relación de von Mises:

$$\varepsilon_{eq} = \gamma / \sqrt{3}$$

Aplicando en esta ecuación la expresión para γ dada en 3.4.1,

$$\varepsilon_{eq} = \frac{r\theta}{\sqrt{3}l} \quad (3.4.20)$$

En el capítulo 5 se presentan con detalle las relaciones de von Mises aquí utilizadas.

ESTADO DE ESFUERZOS Y FALLAS EN TORSIÓN EN MATERIALES DÚCTILES Y FRÁGILES

El estado de esfuerzos a que queda sometida una barra durante un ensayo de torsión, explica las fallas en metales dúctiles y metales frágiles. Como se observa en la figura 3.4.9a, los esfuerzos cortantes máximos $\tau_{m\acute{a}x}$ se presentan en dirección normal y a lo largo del eje de la barra; la dirección de los esfuerzos principales σ_1 y σ_3 forma un ángulo de 45° con las direcciones de los esfuerzos cortantes máximos.

Debido a esta distribución de esfuerzos, la superficie de fractura que se produce al fallar un material dúctil (por la acción de los esfuerzos cortantes) es normal o para-

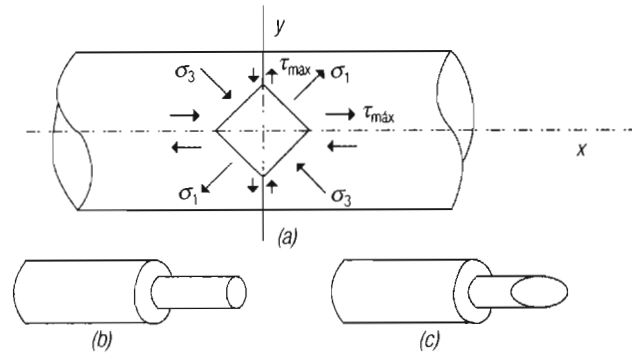


Figura 3.4.9. Fracturas típicas en torsión. a) Estado de esfuerzos. b) Falla por corte (falla dúctil). c) Falla por tracción (falla frágil) (Dieter, 1988).

lela al eje de la barra, predominando la primera orientación; la fractura dúctil se caracteriza por ser opaca (figura 3.4.9b).

La superficie de fractura de un metal frágil forma un ángulo de 45° con el eje longitudinal de la barra; cuando ocurre la fractura en las dos orientaciones normales σ_1 y σ_3 , la fractura es conoide; la superficie de la fractura frágil es brillante (figura 3.4.9c).

Ejercicio 3.4.3

1

Se deforma en torsión una probeta de 25.4 mm de longitud de prueba y 6.35 mm de diámetro a 1100°C . A un ángulo de 4 revoluciones, el momento torsional fue de 0.6 Nm. Calcule el esfuerzo normal equivalente y la deformación normal equivalente, si $n = 0.2$ y si $m = 0.18$.

Respuestas:

Esfuerzo normal equivalente
Aplicando valores en la ecuación 3.4.19

$$\sigma_{eq} = \frac{(\sqrt{3})(0.6)}{(2\pi)(3.175)^3(10^{-3})^3} (3 + 0.18 + 0.2) = 17.4 \text{ MPa}$$

Deformación normal equivalente
Aplicando valores en la ecuación 3.4.19

$$\varepsilon_{eq} = \frac{(3.175)(25.1328)}{(\sqrt{3})(25.4)} = 1.814$$

En esta ecuación $\theta = 4$ revoluciones $= 4 (6.2832) = 25.1328$ rad.

Ejercicios de final de capítulo

1

1. Se va a utilizar una barra cilíndrica sólida de una aleación de aluminio de 25.4 mm de diámetro y 4 m de longitud, como componente de una estructura que estará sujeta a esfuerzos de tensión. El material de la barra tiene un esfuerzo de cedencia a 0.2% de deformación permanente de 125 MPa, una resistencia a la tensión de 260 MPa y un módulo de Young de 70 GPa.

Calcule: a) la carga correspondiente al esfuerzo de cedencia; b) la carga necesaria para producir un aumento en la longitud de 6 mm; c) la carga máxima, y d) el módulo de resiliencia elástica.

Respuestas: a) 63.3 kN; b) 53.2 kN; c) 131.7 kN; d) 111.6 kJ/m³

2. Se sujeta a una carga de compresión uniformemente distribuida una placa de acero de 20 × 20 cm y un espesor de 38.1 mm. El material tiene un esfuerzo de cedencia de 270 MPa, módulo de elasticidad de 200 GPa y una relación de Poisson de 0.30.

Determine: a) la carga correspondiente al esfuerzo de cedencia; b) la contracción axial de espesor y el alargamiento lateral correspondiente al esfuerzo de cedencia; c) la contracción axial de espesor y el alargamiento lateral a un esfuerzo de 180 MPa; d) el cambio de volumen para un esfuerzo de 180 MPa, y e) la energía total de deformación correspondiente al esfuerzo de cedencia.

Respuestas: a) $P_0 = 10.8 \text{ MN}$; b) $\Delta h = -0.0514 \text{ mm}$; $\Delta l = 0.9 \text{ mm}$; c) $\Delta h = -0.0342 \text{ mm}$, $\Delta l = 0.6 \text{ mm}$; d) $\Delta V = 7.8 \text{ cm}^3$; e) $E_T = 121.5 \text{ kJ/m}^3$.

3. En un ensayo de torsión de un espécimen cilíndrico de un diámetro de 38 mm y una longitud de 750 mm, se obtuvieron los siguientes valores: un momento límite proporcional de 560 N-m, al que correspondió un ángulo de torsión de 8°; un momento torsional máximo de 1000 N-m y un ángulo de torsión de 850°.

Determine: a) el esfuerzo de cedencia en corte; b) el módulo de corte; c) el módulo de resiliencia; d) la resistencia a la torsión, y e) el módulo de tenacidad.

Respuestas: a) $\tau_{0p} = 52 \text{ MPa}$; b) $G = 14.7 \text{ GPa}$; c) $u_{Tp} = 46 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3}$;

d) $\tau_{\text{máx}} = 92.8 \text{ MPa}$; e) $T_s = 17.5 \text{ MJ/m}^3$.

4. En un ensayo de torsión de una aleación de aluminio, se utilizó un espécimen tubular de diámetro interno de 25.4 mm y un espesor de pared de 3 mm. La longitud de prueba fue de 50.8 mm. Al aplicar un momento torsional de 98 N-m se midió un ángulo de torsión de 0.00349 rad. El momento de torsión de cedencia fue de 280 N-m. El momento de torsión máximo fue de 510 N-m y el ángulo de torsión a la fractura fue de 1.082 rad.

Determine: a) la resistencia elástica; b) el módulo de corte; c) el módulo de resiliencia; d) la resistencia al corte, y e) el módulo de tenacidad.

Respuestas: a) $\tau_0 = 78.7 \text{ MPa}$; b) $G = 25.6 \text{ GPa}$; c) $u_{Ty} = 121 \text{ kJ/m}^3$;

d) $\tau_{\text{máx}} = 146.7 \text{ MPa}$; e) $T_s = 40.6 \text{ MJ/m}^3$.

5. Se ensayó a 450 °C, en torsión, un espécimen de cobre electrolítico de un diámetro de 6.35 mm y una longitud de prueba de 25.4 mm hasta que se inició el estado estacionario de la curva M_T versus N ; en este

Ejercicios de final de capítulo (continuación)**2**

punto el número de revoluciones fue $N = 2.8$ y al momento torsional correspondió un valor de 3.7 Nm . En ensayos previos con este material se estimaron para m y n valores de 0.15 y 0 , respectivamente.

Determine: a) el esfuerzo cortante; b) el esfuerzo normal equivalente; c) la deformación cortante; d) la deformación normal equivalente.

Respuestas: a) $\tau_a = 57.9 \text{ MPa}$; b) $\sigma_{eq} = 100.3 \text{ MPa}$; c) $\gamma = 2.2$; d) $\varepsilon_{eq} = 1.27$

CAPÍTULO 4

Ecuaciones constitutivas en plasticidad

Las relaciones entre esfuerzo y deformación, en función de la rapidez de deformación, la temperatura y la estructura de un metal, reciben el nombre de *ecuaciones constitutivas*. La estructura, en este contexto, se refiere a características como la red atómica, la densidad de dislocaciones, el arreglo geométrico de éstas (si están en forma de marañas u ordenadas en arreglos de baja energía como celdas o subgranos), el tamaño de grano, su textura, la distribución de átomos de soluto, así como la resistencia de segundas fases. Estas relaciones para la región elástica se establecieron en el capítulo 2. En este capítulo se van a estudiar las ecuaciones constitutivas en la región plástica.

4.1. Desarrollo histórico

De la observación del comportamiento de los gases surgió la idea de establecer, para los metales y sus aleaciones, relaciones esfuerzo-deformación en función de las variables antes enunciadas, es decir, de establecer una ecuación mecánica de estado. La hipótesis es sencilla: si en los gases se puede establecer una relación entre presión, volumen y temperatura del tipo

$$f(P, V, T) = 0 \quad (4.1.1)$$

entonces, parece posible que se pueda establecer una relación de la misma naturaleza entre el esfuerzo, la deformación, la rapidez de deformación, la temperatura y la estructura:

$$f(\sigma, \epsilon, \dot{\epsilon}, T, \xi) = 0 \quad (4.1.2)$$

donde ξ representa la estructura del metal; las otras variables ya fueron definidas con anterioridad.

4.2. Ecuaciones constitutivas empíricas para materiales isotrópicos y uniformes

Un material isotrópico es aquel que presenta las mismas propiedades en cualquiera de los ejes x, y, z , de un sistema cartesiano imaginario, arbitrario y cuyo origen se puede localizar en cualquier punto de la pieza de material. Un material uniforme, referido al mismo sistema cartesiano, es aquel cuyas propiedades, a lo largo de un eje cualquiera, no varían de un punto de material a otro sobre el mismo eje.

4.2.1. Ecuaciones y endurecimiento por deformación

4.2.1.1. La ecuación de Ludwik

La figura 4.2.1 muestra curvas esfuerzo *versus* deformación obtenidas por ensayo de aluminio en tensión, las cuales son típicas del comportamiento plástico de un material, recocido, dúctil, y son representativas de muchos metales y aleaciones.

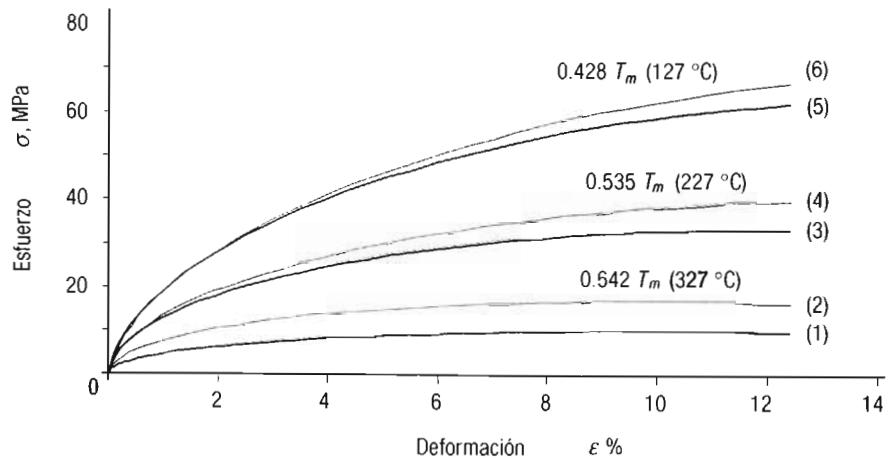


Figura 4.2.1. Curvas experimentales típicas de un material dúctil a tres temperaturas y dos diferentes valores de rapidez de deformación. Curvas de trazo fino = $\dot{\epsilon}_1$; curvas de trazo grueso = $\dot{\epsilon}_2$; $\dot{\epsilon}_1 = 100 \dot{\epsilon}_2$ (adaptación de Kocks, 1976).

Las curvas de la figura 4.2.1 presentan cuatro características:

1. El material recocido exhibe un esfuerzo de cedencia de un valor finito.
2. El endurecimiento por deformación (pendiente de la curva), inicial, es insensible a la temperatura y rapidez de deformación, como lo demuestra la proximidad entre curvas, sin importar la temperatura o rapidez de deformación a que fueron realizados los experimentos.
3. En deformaciones grandes, el esfuerzo depende fuertemente de la rapidez de deformación, y esta dependencia se incrementa con la temperatura. La separación entre curvas ensayadas a la misma temperatura, pero diferente rapidez, crece con la deformación. La separación es más pronunciada a la temperatura de experimentación más alta.

4. En deformaciones grandes, todas las curvas se aproximan a un esfuerzo constante, es decir, se vuelven asintóticas respecto del eje de las deformaciones. Este esfuerzo constante recibe el nombre de *esfuerzo de saturación*, σ_s .

Estas curvas no son descritas adecuadamente por la ecuación que Ludwik publicó en 1909:

$$\sigma = K\varepsilon^n \Big|_{\varepsilon, T} \quad (4.2.1)$$

La ecuación 4.2.1 expresa la dependencia del esfuerzo de flujo respecto de la deformación, a rapidez de deformación y temperatura constantes.

En esta expresión, K es el coeficiente de resistencia en unidades de esfuerzo y tiene valores en el intervalo $E(10^{-1}) > K > E(10^{-3})$; n es el exponente de endurecimiento y adopta valores entre 0.1 y 0.5.

Las curvas $\sigma-\varepsilon$ de la figura 4.2.2 son la representación gráfica de esta ecuación para varios valores de n y un valor constante de K .

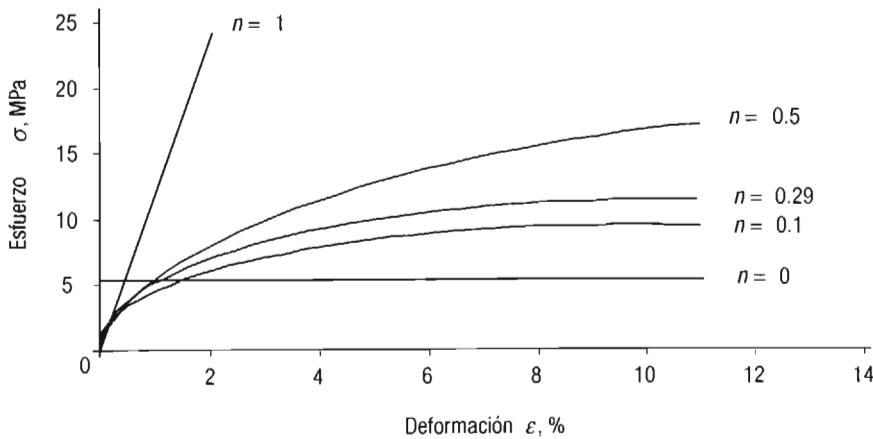


Figura 4.2.2. Representación gráfica de la ecuación de Ludwik para varios valores de n .

Se puede observar que la curva de Ludwik no describe ninguna de las características de las curvas experimentales de los metales: algunas desviaciones de la ecuación respecto del comportamiento $\sigma-\varepsilon$ real de un metal son las siguientes:

- La ecuación 4.2.1 predice una tasa de endurecimiento por deformación $\theta = d\sigma/d\varepsilon$ infinita al inicio de la deformación, tendencia que se aprecia en las curvas $\sigma-\varepsilon$ de la figura 4.2.2, con excepción de las curvas para $n = 0$ y para $n = 1$.

Esta tendencia se puede demostrar en forma muy sencilla: derivando la ecuación 4.2.1 con respecto a la deformación resulta:

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = nK\varepsilon^{n-1} = n \frac{K\varepsilon^n}{\varepsilon}$$

Utilizando la ecuación 4.2.1 en la ecuación anterior

$$\theta = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = n \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad (4.2.2)$$

Cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, la ecuación anterior se transforma en

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} \rightarrow \infty$$

La ecuación 4.2.2 muestra la relación que existe entre la tasa de endurecimiento θ y el exponente de endurecimiento n .

- La curva no exhibe un esfuerzo de cedencia; la deformación plástica se inicia desde el valor cero del sistema coordenado $\sigma - \varepsilon$. Para que la característica (1) de las curvas experimentales sea satisfecha, es necesario añadir una constante al segundo miembro de la ecuación de Ludwik, tomando la forma:

$$\sigma = \sigma_0 + K\varepsilon^n \quad (4.2.3)$$

donde σ_0 es el esfuerzo de cedencia. La curva $\sigma - \varepsilon$ de la figura 4.2.3 representa gráficamente esta ecuación.

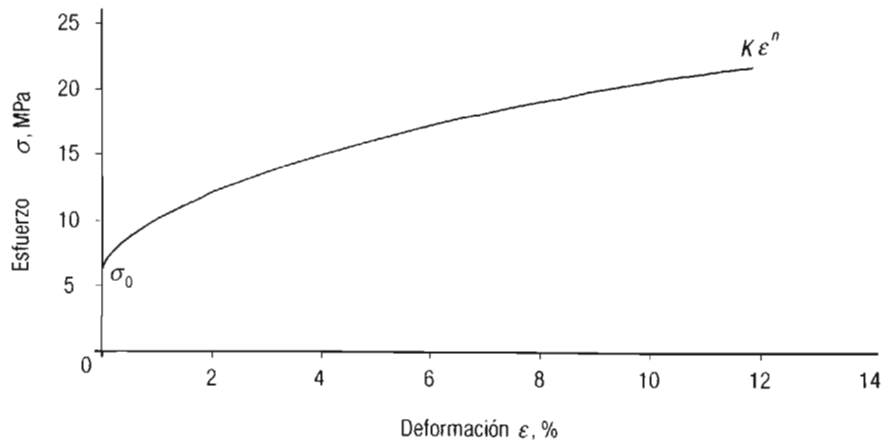


Figura 4.2.3. Representación gráfica de la ecuación 4.2.3.

- En deformaciones grandes, las curvas experimentales se vuelven asintóticas (figura 4.2.1), en tanto que las curvas de Ludwik tienen una pendiente positiva.

Se observa al expresar la ecuación 4.2.1 en forma logarítmica:

$$\log \sigma = \log K + n \log \varepsilon \quad (4.2.4)$$

que es la ecuación de una recta. Cuando se grafica esta ecuación en un sistema coordenado $\log \sigma - \log \varepsilon$, la pendiente de la recta es n y la intersección de la recta con la vertical levantada a un valor $\log \varepsilon = 0$ ($\varepsilon = 1$) es el valor $\log \sigma = \log K$.

La figura 4.2.4 ilustra las líneas que resultan para el mismo valor de K y diversos valores del exponente de endurecimiento. La pendiente n se determina, de acuerdo con la figura 4.2.4, mediante la expresión:

$$n = \frac{d \log \sigma}{d \log \epsilon} \quad (4.2.5)$$

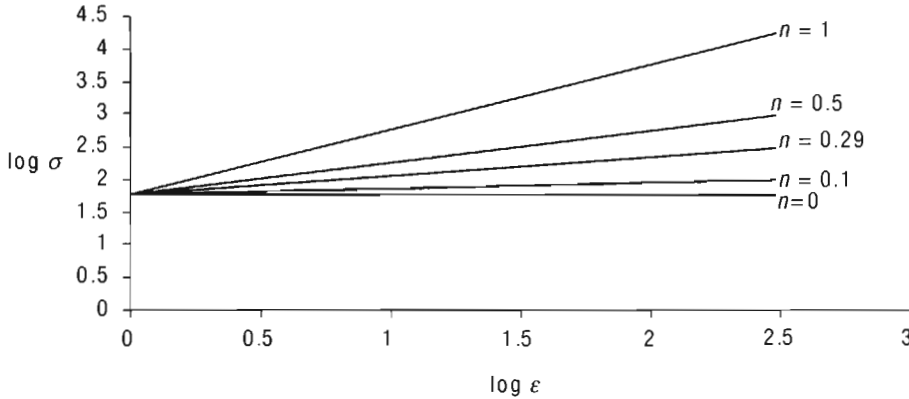


Figura 4.2.4. Representación $\log \sigma$ versus $\log \epsilon$ de la ecuación 4.2.4.

Un valor $n = 1$, aplicado en la ecuación 4.2.1, reproduce la ecuación para un cuerpo perfectamente elástico, en la cual $K = E$ es el módulo de Young. Un valor $n = 0$, en 4.2.1, produce la ecuación de un material rígido plástico perfecto, es decir, uno que no endurece al deformarse; la deformación plástica se produce cuando se alcanza el valor del esfuerzo de cedencia, $\sigma = \sigma_0 = K$ y progresa a este valor constante. Un valor $n = 0.5$ produce un endurecimiento caracterizado porque el esfuerzo crece en forma parabólica con la deformación (figura 4.2.2).

Los valores de n y de K se pueden determinar experimentalmente a partir de los valores de esfuerzo y deformación de dos puntos vecinos próximos sobre cualquiera de las curvas de la figura 4.2.2, obtenidas mediante ensayos a temperatura y rapidez de deformación constante. Tomando logaritmos de estos valores, se calcula n mediante la ecuación 4.2.5, expresada en la forma:

$$n = \frac{\log \sigma_2 - \log \sigma_1}{\log \epsilon_2 - \log \epsilon_1} \quad (4.2.6)$$

Conocido el valor de n , K se puede obtener a partir de la ecuación 4.2.1 o también de la ecuación 4.2.4.

Una ecuación que se utiliza en estudios de formabilidad es la siguiente:

$$\sigma = C(\epsilon_0 + \epsilon)^n \quad (4.2.7)$$

donde C , ϵ_0 son parámetros empíricos; ϵ es la deformación correspondiente al esfuerzo en tensión unidireccional σ ; n tiene el mismo significado definido en la ecuación 4.2.1.

4.2.1.2. Inestabilidad en tensión en materiales tipo Ludwik

En algunos procesos industriales de deformación, tales como el estampado de lámina para producir partes de carrocería de automóvil, es común que ocurra adelgazamiento localizado y aún fractura debido a esfuerzos de tensión.

Este comportamiento es observado en el ensayo de tensión de un espécimen metálico; después de alcanzarse el esfuerzo de cedencia del material, la sección transversal del espécimen disminuye uniformemente. La disminución de la sección ocasiona que aumente el esfuerzo que soporta el material a la vez que aumenta su capacidad de carga debido a endurecimiento por deformación. Cuando se alcanza la carga máxima, se inicia una deformación localizada que se traduce en la formación de un cuello; esta condición tiene lugar debido a que el esfuerzo que soporta el material es tan elevado, que el endurecimiento por deformación no puede compensar la disminución de la sección resistente y la carga disminuye continuamente hasta que se produce la fractura. Un esquema de la formación del cuello al valor de carga máxima está representado en la figura 3.2.2.

El inicio de la inestabilidad geométrica corresponde al punto de carga máxima en la curva P versus Δl , es decir, al punto de pendiente cero, que equivale a la condición matemática:

$$dP = 0 \quad (4.2.8)$$

El punto de inestabilidad en la curva σ versus ϵ es determinado tomando en cuenta que:

$$P = \sigma A$$

Diferenciando esta expresión:

$$dP = \sigma dA + A d\sigma = 0$$

De donde:

$$\frac{d\sigma}{\sigma} = -\frac{dA}{A} \quad (i)$$

Debido a que la deformación plástica no produce cambio de volumen: $dV = 0$

$$V = Al$$

Diferenciando:

$$dV = Adl + ldA = 0$$

por tanto:

$$\frac{dl}{l} = -\frac{dA}{A} = d\epsilon \quad (ii)$$

Igualando i con ii se obtiene el punto de inestabilidad en tensión:

$$\frac{d\sigma}{d\epsilon} = \sigma \quad (4.2.9)$$

El punto de inestabilidad en la curva σ versus ϵ (figura 4.2.5), es obtenido al ubicar el punto en el cual la pendiente de la curva tiene un valor igual a σ dividido entre uno.

$$\frac{d\sigma}{d\epsilon} = \frac{\sigma}{1}$$

Este punto permite determinar la deformación al punto de inicio del cuello, ϵ_u , la deformación uniforme.

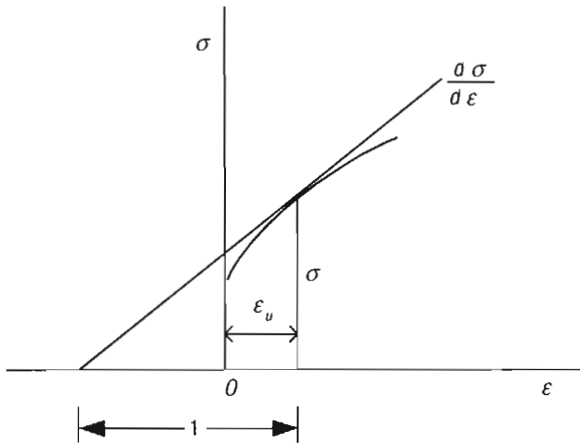


Figura 4.2.5. Punto de inicio de la inestabilidad en la curva σ versus ϵ (Dieter, 1988).

Se puede determinar también el punto de inicio del cuello en la curva σ versus ϵ por medio del traslape de ésta sobre la curva $\frac{d\sigma}{d\epsilon}$ versus ϵ : el eje vertical representa tanto los valores de esfuerzo como los de la pendiente; el eje horizontal, las deformaciones de ambas curvas.

La intersección de las dos curvas muestra la condición de inestabilidad representada en la ecuación 4.2.9 (figura 4.2.6).

La llamada construcción de Considère (figura 4.2.7) hace más sencilla la determinación del punto de carga máxima.

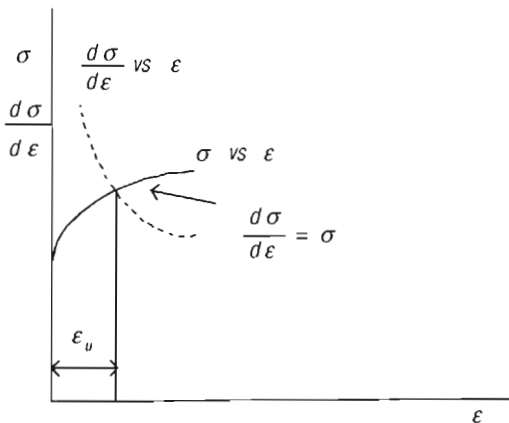


Figura 4.2.6. Punto de inicio del cuello (Dieter, 1988).

Primero se expresa la ecuación 4.2.9 en términos de la deformación nominal e :

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{d\sigma de}{ded\varepsilon} = \frac{d\sigma dl/l_0}{de dl/l} = \frac{d\sigma l}{de l_0} = \frac{d\sigma}{de}(1+e) = \sigma$$

Arreglando la ecuación anterior, la condición de inestabilidad queda representada por la ecuación:

$$\frac{d\sigma}{de} = \frac{\sigma}{1+e} \quad (4.2.10)$$

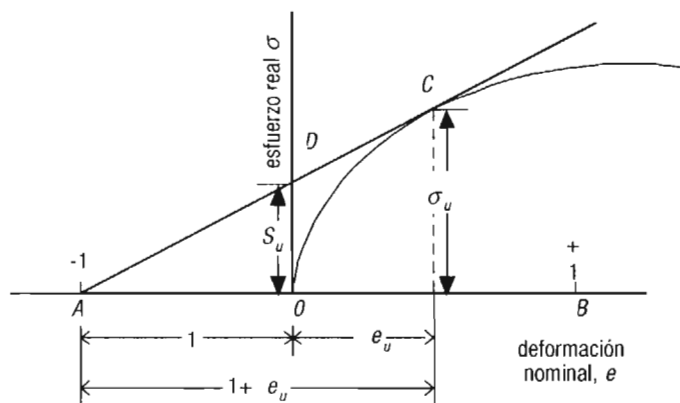


Figura 4.2.7. Construcción de Considère para determinar el punto de inestabilidad (Dieter, 1988).

El punto de inestabilidad en la curva σ versus e es obtenido trazando esta gráfica y localizando un punto A sobre el eje de las deformaciones que corresponda a $e = -1.0$; después se traza una línea recta que pase por el punto A y que sea tangente a la curva σ versus e .

El valor de la pendiente de esta línea recta se puede determinar fácilmente a partir del segundo miembro de la ecuación 4.2.10, como se observa en la figura 4.2.7.

Es muy simple demostrar que el exponente de endurecimiento de un material es igual a la deformación uniforme correspondiente a la carga máxima. Aplicando la ecuación 4.2.2 en la ecuación 4.2.9 resulta

$$\theta = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = n \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad (4.2.2)$$

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \sigma \quad (4.2.9)$$

$$\varepsilon_u = n \quad (4.2.11)$$

Ejercicio 4.2.1

1

Se ensaya en tensión un espécimen de sección transversal circular y diámetro inicial de 9.25 mm, para determinar la curva esfuerzo real versus deformación real de un acero aleado.

En el intervalo plástico, los pares correspondientes de valores de carga y diámetro medidos durante el ensayo son mostrados en la tabla 4.2.1.

Ejercicio 4.2.1 (continuación)

2

Realice las siguientes tareas: a) elabore una tabla de valores esfuerzo real y deformación real; b) trace la curva esfuerzo real *versus* deformación real; c) calcule el coeficiente de resistencia K y el exponente de endurecimiento n , así como d) la carga teórica máxima.

Tabla 4.2.1. Valores experimentales de carga y diámetros

Carga (N)	Diámetro (mm)	Carga (N)	Diámetro (mm)
15 668	8.94	25 798	8.03
19 126	8.89	25 354	7.67
21 350	8.81	24 909	7.37
23 018	8.74	23 574	6.86
24 019	8.64	22 462	6.60
25 131	8.48	22 018	6.48
25 687	8.23	20 683	5.97

Respuestas:

La tabla es obtenida haciendo uso de las ecuaciones: $\sigma = \frac{P}{A}$ y también $\epsilon = 2 \ln \left(\frac{D_0}{D} \right)$.

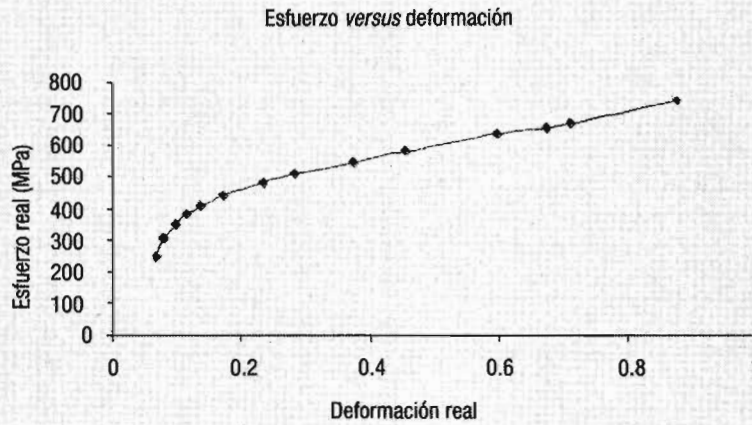
a) Tabla de esfuerzos reales y deformaciones reales:

Esfuerzo real (MPa)	Deformación real	Esfuerzo real (MPa)	Deformación real
250	0.067	510	0.283
308	0.078	549	0.373
351	0.096	584	0.455
384	0.113	638	0.597
410	0.136	657	0.673
445	0.172	668	0.712
483	0.233	739	0.875

Ejercicio 4.2.1 (continuación)

3

b) Curva esfuerzo real *versus* deformación real:



c) Exponente de endurecimiento (n) y coeficiente de resistencia (K):

Determinando los logaritmos de los valores de esfuerzo real *versus* deformación real de la tabla de la respuesta *a*, se obtiene una nueva tabla:

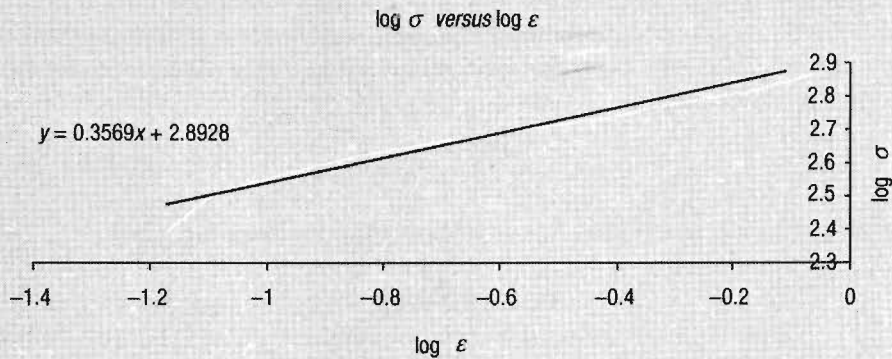
Valores de $\log \sigma$ *versus* $\log \epsilon$.

$\log \sigma$ real	$\log \epsilon$ real	$\log \sigma$ real	$\log \epsilon$ real
2.3979	-1.174	2.7076	-0.548
2.4885	-1.108	2.7396	-0.428
2.5453	-1.018	2.7664	-0.342
2.5843	-0.947	2.8048	-0.224
2.6128	-0.866	2.8176	-0.172
2.6484	-0.764	2.8248	-0.148
2.6839	-0.633	2.8686	-0.058

Al trazar los valores $\log \sigma$ *versus* $\log \epsilon$, se obtiene la recta:

Ejercicio 4.2.1 (continuación)

4



La ecuación de la recta es: $y = 0.3569x + 2.8928$

Comparando esta ecuación con la forma logarítmica

$$\log \sigma = n \log \epsilon + \log K$$

resulta

$$n = 0.3569$$

log de K es igual al valor de log σ correspondiente a log $\epsilon = 0$:

$$\log K = 2.8928$$

de donde

$$K = 781 \text{ MPa}$$

d) Carga teórica máxima:

En la expresión $\sigma = K\epsilon^n$, el valor de esfuerzo correspondiente a $P_{\text{máx}}$ es obtenido cuando $\epsilon = n$. Por eso $\sigma = 781(0.3569)^{0.3569} = 540.6$; y como

$$\sigma_u = S_u(1+e)$$

entonces

$$S_u = \frac{\sigma_u}{(1+e)}$$

pero,

$$e + 1 = \exp(\epsilon) = \exp(0.3569) = 1.4289$$

Aplicando valores en la ecuación anterior:

$$S_u = \frac{540.6}{1.4289} = 378.3 \text{ MPa}$$

La $P_{\text{máx}}$ es entonces $P_{\text{máx}} = A_0 S_u = \frac{\pi}{4} (9.25 \cdot 10^{-3})^2 (378.3) (10^6) = 25.4 \text{ kN}$.

Ejercicio 4.2.2

1

Se deforma un espécimen de tensión de 12.7 mm de diámetro de un acero 1040 recocido, hasta una deformación nominal $e = 0.18$. La ecuación de endurecimiento por deformación de este material es $\sigma = 732e^{0.26}$.

¿Qué deformación adicional debe experimentar el material para que se alcance el valor máximo de carga?
¿Cuál es este valor máximo de carga?

Respuestas:

El valor de la deformación real correspondiente al valor máximo de carga es

$$\varepsilon = n = 0.26$$

Esta deformación real equivale a un valor nominal de deformación

$$e = \exp(n) - 1 = \exp(0.26) - 1 = 0.297$$

La deformación adicional para alcanzar la carga máxima es:

$$\Delta e = 0.297 - 0.18 = 0.117$$

El valor de esfuerzo real correspondiente a la carga máxima es

$$\sigma = Kn^n = 732(0.26)^{0.26} = 515.7 \text{ MPa}$$

La resistencia a la tensión es

$$S_{\text{máx}} = \frac{\sigma}{1+e} = \frac{515.7}{1.297} = 397.6 \text{ MPa}$$

La carga máxima es

$$P_{\text{máx}} = (397.6)(10)^6 \left(\frac{\pi}{4}\right) \left(12.7(10^{-3})\right)^2 = 50.3 \text{ kN}$$

4.2.1.3. La ecuación de Voce

Una ecuación que es muy adecuada para predecir el comportamiento esfuerzo-deformación de materiales muy dúctiles y superplásticos, es la ecuación de Voce:

$$\frac{\sigma_s - \sigma}{\sigma_s - \sigma_0} = \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\varepsilon_c}\right) \quad (4.2.12)$$

donde σ es el esfuerzo que produce la deformación ε ; σ_s es el esfuerzo cuando la curva σ versus ε se vuelve asintótica, llamado *esfuerzo de saturación*; σ_0 es el esfuerzo de cedencia del material y, por último, ε_c es un parámetro empírico.

La ecuación de Voce es representada usualmente en una forma más sencilla. Despejando σ de la ecuación 4.2.12:

$$\sigma = \sigma_s - (\sigma_s - \sigma_0) \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\varepsilon_c}\right)$$

factorizando σ_s

$$\sigma = \sigma_s \left[1 - \frac{(\sigma_s - \sigma_0)}{\sigma_s} \exp\left(-\frac{\epsilon}{\epsilon_c}\right) \right]$$

Aplicando en la ecuación anterior los siguientes valores:

$$C = \sigma_s \quad (a); \quad m = \frac{\sigma_s - \sigma_0}{\sigma_s} \quad (b); \quad n = \frac{1}{\epsilon_c} \quad (c)$$

resulta:

$$\sigma = C(1 - me^{-n\epsilon}) = \sigma_s(1 - me^{-n\epsilon}) \quad (4.2.13)$$

La ecuación 4.2.13 es la forma usual de representar la ecuación de Voce.

Las curvas de la figura 4.2.8 son representaciones de esta ecuación para $m = 0.5$ y diferentes valores de n . El esfuerzo de cedencia, conforme a las ecuaciones (b) y 4.2.13, es el esfuerzo que resulta cuando la deformación tiene un valor $\epsilon = 0$, es decir,

$$\sigma = \sigma_0 = C(1 - m) \quad (4.2.14)$$

La tasa de endurecimiento θ es una función del esfuerzo, como se demuestra derivando la ecuación 4.2.13 con respecto a la deformación:

$$\theta = \frac{d\sigma}{d\epsilon} = Cmne^{-n\epsilon}$$

Aplicando 4.2.13 a la ecuación anterior:

$$\theta = \frac{d\sigma}{d\epsilon} = n(C - \sigma) \quad (4.2.15)$$

Esta ecuación predice un valor finito para la tasa de endurecimiento, cuyo valor va a ir disminuyendo conforme aumenta el valor de σ , cuando $\sigma = \sigma_s = C$, $\theta = 0$ y la curva se vuelve asintótica.

Ejercicio 4.2.3

1

Trace una serie de curvas σ/σ_0 versus ϵ que se extiendan desde $\epsilon = 0$ hasta $\epsilon = 0.80$ en intervalos de $\epsilon = 0.05$. Deben satisfacerse las condiciones siguientes: todas las curvas deben tener el mismo valor $m = 0.5$, y a cada curva debe corresponder un valor individual $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ y 10 .

Para determinar los puntos de la curva, es conveniente disponer de una ecuación de σ/σ_0 en función de ϵ .

Respuesta:

De la ecuación

$$m = \frac{\sigma_s - \sigma_0}{\sigma_s}$$

se puede derivar una expresión para σ_s en función de σ_0 con $m = 0.5$.

Por eso,
$$m = 1 - \frac{\sigma_0}{\sigma_s}, \quad \sigma_s = \frac{\sigma_0}{1 - m} = \frac{\sigma_0}{0.5} = 2\sigma_0$$

Ejercicio 4.2.3 (continuación)

2

Utilizando esta expresión para σ_s en la ecuación 4.2.13 resulta:

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = 2 \left(1 - m e^{-n\varepsilon} \right)$$

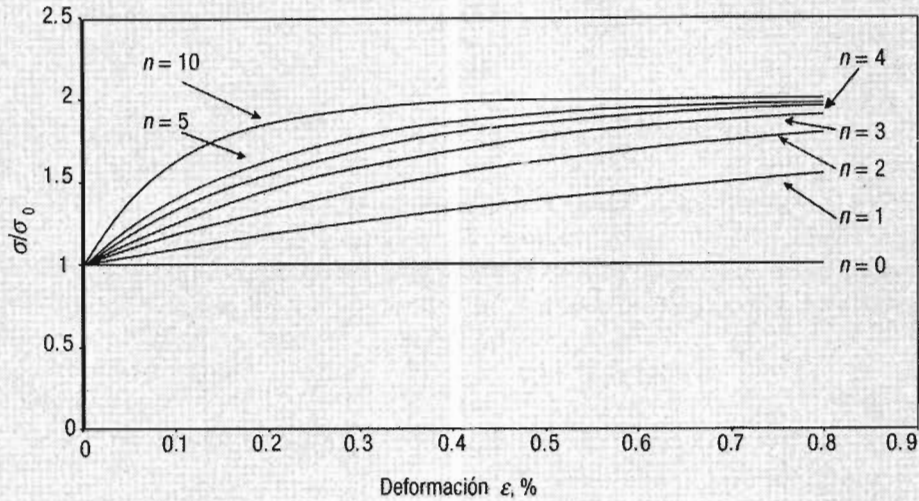


Figura 4.2.8. Curvas de Voce para $m = 0.5$ y diferentes valores del exponente n .

Con esta ecuación, la determinación de las coordenadas de los puntos $(\sigma/\sigma_0, \varepsilon)$, así como el trazo de la curva σ/σ_0 versus ε son tarea sencilla.

El primer punto de todas las curvas tiene como coordenadas $\varepsilon = 0$; al hacer la sustitución en la ecuación anterior produce el valor de $\sigma/\sigma_0 = 1$.

Los demás puntos de cada curva son obtenidos al aplicar el valor particular de n y los valores de ε en el intervalo especificado.

4.3. Sensibilidad del esfuerzo a la rapidez de deformación

Como se observa en la figura 4.2.1, el esfuerzo de flujo depende de la rapidez de deformación real: aumenta con la rapidez de deformación; además, la dependencia es mayor a medida que la temperatura de deformación es más alta. La figura 4.3.1 muestra gráficas $\log \sigma$ versus $\log \dot{\varepsilon}$ de datos obtenidos en ensayos de tensión de aluminio 99.9% y cobre electrolítico, a temperatura constante de 473 K y una misma deformación $\varepsilon = 1.0\%$, pero realizados a diferentes valores de rapidez de deformación; se observa que la relación entre $\log \sigma$ y $\log \dot{\varepsilon}$ es lineal. Por eso:

$$\log \sigma = \log C_1 + m \log \dot{\varepsilon} \quad (4.3.1)$$

La relación logarítmica de la ecuación 4.3.1 se puede presentar en la forma

$$\sigma = C_1 \dot{\varepsilon}^m \Big|_{\varepsilon, T} \quad (4.3.2)$$

donde m es la sensibilidad del esfuerzo de flujo a la rapidez de deformación y C_1 es una constante empírica que tiene unidades de esfuerzo. El valor de m se puede obtener de la pendiente de la curva de la figura 4.3.1 (cada punto de esta curva corresponde a un ensayo de tensión a deformación y temperatura constante) mediante la relación

$$m = \frac{\log \sigma_1 - \log \sigma_2}{\log \dot{\epsilon}_1 - \log \dot{\epsilon}_2} = \frac{\Delta \log \sigma}{\Delta \log \dot{\epsilon}} \quad (4.3.3)$$

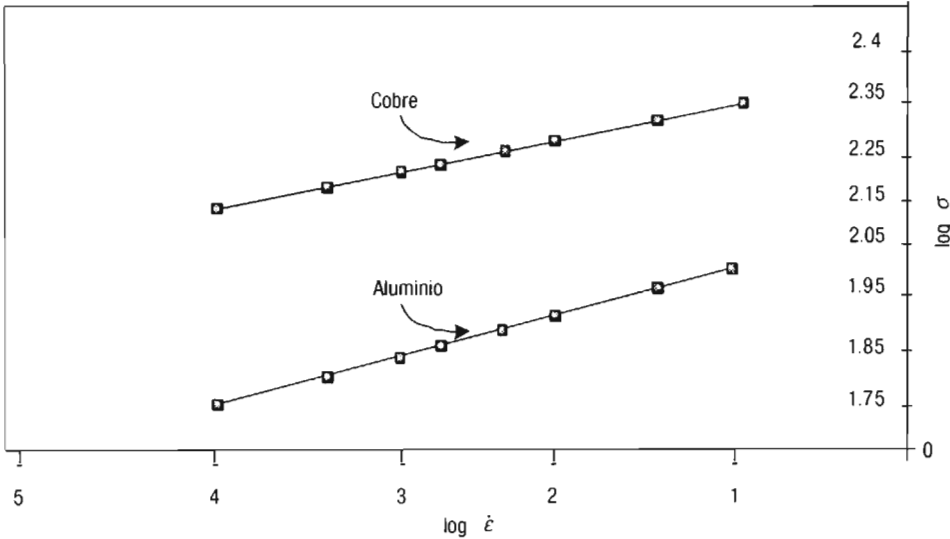


Figura 4.3.1. Representación de la recta $\log \sigma$ versus $\log \dot{\epsilon}$.

Una forma alternativa de obtener m consiste en realizar un ensayo a una rapidez de deformación $\dot{\epsilon}_1$ y, una vez alcanzada la deformación deseada, medir el esfuerzo de flujo, cambiar súbitamente la rapidez de la máquina a $\dot{\epsilon}_2$ y medir el esfuerzo a la nueva rapidez de deformación.

En esta forma se conocen dos pares de valores de esfuerzo de flujo y de rapidez de deformación con los cuales se pueden plantear dos ecuaciones que permiten determinar m y C_1 . La figura 4.3.2 describe el ensayo anterior.

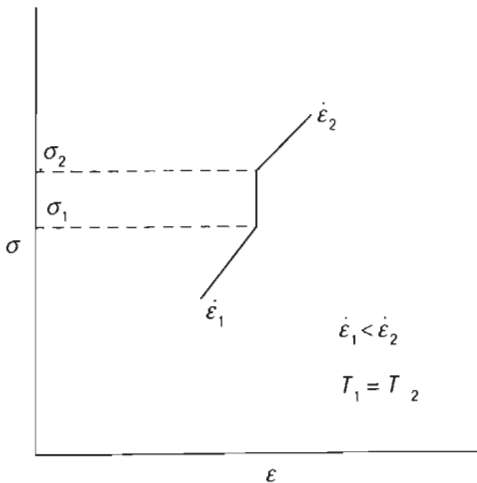


Figura 4.3.2. Determinación de m por cambio súbito de $\dot{\epsilon}$.

$$\log \sigma_1 = \log C_1 + m \log \dot{\epsilon}_1$$

$$\log \sigma_2 = \log C_1 + m \log \dot{\epsilon}_2$$

Conocido el valor de m , se puede calcular C_1 utilizando la ecuación 4.3.1 o la ecuación 4.3.2.

Los valores de m varían usualmente entre 0.1 y 0.2, a temperaturas arriba de la mitad de la temperatura de fusión, T_f .

A temperatura ambiente los valores de m son inferiores a 0.1.

Materiales no metálicos como el vidrio al estado pastoso exhiben un comportamiento superplástico caracterizado por la ecuación que postuló Newton para un sólido viscoso

$$\sigma = \eta \dot{\epsilon} \quad (4.3.4)$$

Esta expresión es una forma particular de la ecuación 4.3.2, donde $\eta = C_1$ es el coeficiente de viscosidad dinámica en Nsm^{-2} y $m = 1$. Existe un grupo de metales y aleaciones que presentan un comportamiento superplástico que permite estirar un espécimen de tensión más de 100% y se caracterizan por tener una m próxima a uno y un tamaño de grano cristalino muy fino, de alrededor de un micrómetro. En condiciones de termofluencia, es decir, a valores bajos de rapidez de deformación y temperaturas elevadas, se acentúa el comportamiento superplástico de estos metales.

Como se demostró anteriormente para los metales y aleaciones normales (no superplásticos) ensayados en tensión, la formación de un cuello es evitada por endurecimiento debido a la deformación, en tanto que la tasa de endurecimiento θ sea superior a σ . En los materiales superplásticos la formación del cuello se demora debido al fenómeno de endurecimiento por rapidez de deformación, que permite mantener una relación $\theta > \sigma$.

Ejercicio 4.3.1

1

Se ensaya en tensión a una rapidez de deformación real constante una varilla cilíndrica de una aleación Zn-Cu-Al de las dimensiones siguientes: longitud de prueba inicial 50 mm, diámetro inicial 12.7 mm. En un momento, en el transcurso del ensayo se midieron los valores instantáneos de carga y diámetro y se encontraron los siguientes valores: $P = 200 \text{ N}$, $D = 8 \text{ mm}$.

Determine: a) si se conoce que el material obedece a la ecuación $\sigma = \dot{\epsilon}^{0.8} \text{ MPa}$, ¿a qué rapidez de deformación se efectuó el experimento?; b) ¿cuánto tiempo duró el ensayo?

Respuestas:

a) Rapidez de deformación:

El área del espécimen en el instante en que se realizaron las mediciones es

$$A = \pi/4(8)^2 = 50.2 \text{ mm}^2$$

El esfuerzo en el instante de medición fue

$$\sigma = P / A = 200 / 50.2 = 3.98 \text{ MPa}$$

Ejercicio 4.3.1 (continuación)

2

Utilizando este valor de esfuerzo instantáneo en la ecuación del material $\sigma = \dot{\epsilon}^{0.8}$, entonces:

$$\dot{\epsilon} = (3.98)^{1/0.8} = (3.98)^{1.25} = 5.6 \text{ s}^{-1}$$

b) Duración del ensayo:

La deformación que sufrió el material durante el ensayo fue

$$\epsilon = 2 \ln(12.7/8) = 0.9243$$

El tiempo que duró el experimento es

$$t = \epsilon / \dot{\epsilon} = 0.9243 / 5.6 = 0.16 \text{ s}$$

4.4. Efecto de la temperatura sobre el esfuerzo de deformación

El esfuerzo de cedencia, en general, disminuye al aumentar la temperatura a la cual se realiza la deformación. La deformación plástica a temperatura elevada es activada térmicamente. Aun en aleaciones o metales en los cuales no hay cambios estructurales, la temperatura aumenta la movilidad de los átomos y por eso activa procesos controlados por difusión de átomos y vacancias, como es el salto de dislocaciones, disminuyendo así el esfuerzo de cedencia para producir la deformación plástica.

En algunos metales y aleaciones metálicas pueden producirse cambios estructurales a temperaturas elevadas, como la recristalización o cambios alotrópicos que disminuyen el esfuerzo necesario para la deformación, pero también pueden ocurrir fenómenos de precipitación de segundas fases que incrementen el esfuerzo de deformación.

Los mecanismos activos de deformación dependen de la temperatura a la que se realice la deformación. La temperatura homóloga es utilizada para definir la barrera entre deformación en frío y deformación en caliente, así como para comparar las propiedades mecánicas de diferentes metales. La temperatura homóloga es la relación entre las temperaturas absolutas en grados Kelvin de deformación y de fusión: T/T_f . Esta relación permite definir la deformación en frío y la deformación en caliente.

Cuando $T/T_f \leq 0.6$, tiene lugar deformación en frío.

Si $T/T_f > 0.6$, se realiza deformación en caliente.

La dependencia del esfuerzo de deformación respecto de la temperatura, a valores constantes de rapidez de deformación y deformación, está dada por la relación empírica:

$$\sigma = C_2 \exp(Q/RT) \Big|_{\epsilon, \dot{\epsilon}} \quad (4.4.1)$$

En esta expresión, Q es la energía de activación del mecanismo de deformación en Jmol^{-1} ; R es la constante universal de los gases y tiene el valor $8.314 \text{ Jmol}^{-1}\text{K}^{-1}$; y, por último, T es la temperatura absoluta a la que se realiza la deformación en K.

Experimentalmente se puede determinar la energía de activación deformando dos especímenes a diferente temperatura, a la misma rapidez de deformación hasta una deformación determinada, y midiendo el esfuerzo en ambos especímenes. La ecuación 4.4.1 se puede representar en forma logarítmica, así:

$$\ln \sigma = \ln C_2 + Q / RT \tag{4.4.2}$$

que es la ecuación de una recta. Los resultados de la deformación de los dos especímenes permiten obtener dos ecuaciones del tipo de la ecuación 4.4.2. Mediante arreglo matemático de estas dos ecuaciones resulta la expresión:

$$Q = R \ln \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right) \frac{T_1 T_2}{T_2 - T_1} \tag{4.4.3}$$

Un procedimiento alternativo, que utiliza únicamente un espécimen, consiste en deformar éste a una temperatura y rapidez de deformación hasta una deformación determinada, medir el esfuerzo de deformación y a continuación súbitamente cambiar a una segunda temperatura manteniendo constantes el resto de las condiciones experimentales, medir de nuevo el esfuerzo, pero ahora a la última temperatura. La figura 4.4.1 ilustra este procedimiento.

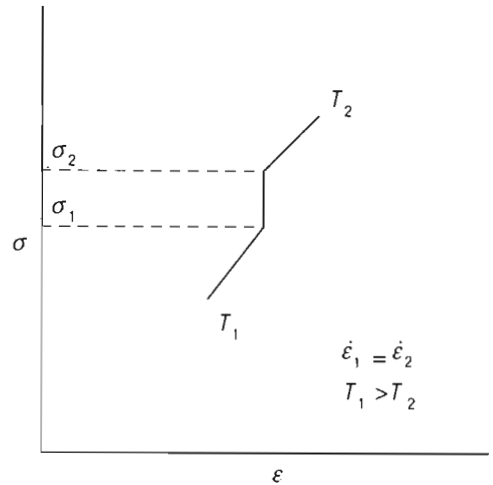


Figura 4.4.1. Deformación de un espécimen a las temperaturas $T_1 > T_2$ y a valores constantes de $\epsilon, \dot{\epsilon}$.

Ejercicio 4.4.1

1

Se deforman en tensión dos especímenes de aluminio de las mismas dimensiones, 99.9% de pureza, a la misma rapidez de deformación, hasta 10% de reducción de área. Uno de ellos a 600 K y el otro a 500 K; se obtienen así los valores de esfuerzo de 35 kPa y de 18.2 MPa, respectivamente.

Determine la energía de activación para el mecanismo de deformación en este material.

Respuesta: la energía de activación se determina sustituyendo por los valores de esfuerzo y temperatura en la ecuación 4.4.3. Utilizando los datos del problema:

Ejercicio 4.4.1 (continuación)

2

$$\sigma_1 = 18.2 \text{ MPa}; T_1 = 500 \text{ K}; \sigma_2 = 0.035 \text{ MPa}; T_2 = 600 \text{ K}$$

$$Q = 8.314 \ln \left(\frac{18.2}{0.035} \right) \left[\frac{(600)(500)}{600 - 500} \right]$$

$$Q = 156 \text{ kJmol}^{-1}$$

4.5. Relaciones rapidez de deformación versus temperatura

Zener y Hollomon (1944) demostraron que en materiales que no presentan cambios de fase durante el proceso de deformación (ablandamiento debido a recristalización o endurecimiento debido a precipitación, etc.), el esfuerzo de flujo depende de los valores instantáneos de deformación, rapidez de deformación y temperatura. Entonces, para un material de ese tipo, estos autores establecieron el parámetro que lleva el nombre de *Zener-Hollomon*, también descrito como *rapidez de deformación modificada por temperatura* y denotado por Z . El parámetro Z es expresado como sigue:

$$Z = \dot{\epsilon} \exp(Q/RT) \quad (4.5.1)$$

Cuando un material se ensaya a un valor constante de Z , es posible obtener curvas experimentales σ versus ϵ muy semejantes (con la misma energía de deformación). Esta circunstancia permite efectuar estudios de cinética de recristalización y precipitación estáticas a partir de especímenes que tengan una misma energía de deformación, aunque se hayan deformado a diferentes valores de rapidez de deformación y temperatura, pero con la condición de que la Z sea la misma.

Ejercicio 4.5.1

1

Se realizó un ensayo de compresión en un espécimen cilíndrico de cobre electrolítico de un diámetro de 8.7 mm y una altura de 13.1 mm.

Se comprimió el espécimen hasta una $\epsilon_1 = 0.15$; la temperatura del ensayo fue $T_1 = 450^\circ\text{C}$, y la rapidez de deformación real fue

$$\dot{\epsilon}_1 = 1.8(10^{-3}) \text{ s}^{-1}$$

Se sabe por experimentos anteriores que la constante de Zener-Hollomon para estas condiciones experimentales es $Z_1 = 1.41(10^{13}) \text{ s}^{-1}$.

Determine la energía de activación del proceso de deformación en kJmol^{-1} , $R = 8.314 \text{ Jmol}^{-1}\text{K}^{-1}$.

Respuesta: despejando Q de la ecuación 4.5.1 y aplicando los datos del problema, $T = 450 + 273 = 723 \text{ K}$, resulta:

$$Q = RT \ln \left(\frac{Z}{\dot{\epsilon}} \right) = (8.314)(723)(\ln 7.833)(10^{15})$$

$$Q = 220 \text{ kJmol}^{-1}$$

4.6. Ecuaciones constitutivas para temperaturas elevadas

Sellars y Tegart (1966) propusieron la siguiente relación esfuerzo, deformación y rapidez de deformación para trabajo en caliente de materiales de alta energía de falla de apilamiento que recuperan dinámicamente, es decir, durante la deformación. Ejemplos de metales y aleaciones que restauran mediante este mecanismo son aluminio y sus aleaciones, metales de estructura hexagonal compacta, hierro α , así como, en general, metales de estructura cúbica centrada en el cuerpo

$$\dot{\epsilon} = A(\sinh\alpha\sigma)^{m'} \exp(-Q/RT) \quad (4.6.1)$$

Donde A , α , m' son constantes empíricas; Q tiene un valor muy semejante a la energía de activación para autodifusión. Para valores pequeños de esfuerzo en condiciones $\alpha\sigma < 1$, la ecuación 4.6.1 se reduce a:

$$\dot{\epsilon} = A_1\sigma^{m'} \exp(-Q/RT) \quad (4.6.2)$$

La cual es una ecuación que describe adecuadamente la termofluencia en estado estacionario a valores de rapidez de deformación y esfuerzo bajos. A valores de esfuerzo $\alpha\sigma > 1.2$, la ecuación 4.6.1 se reduce a una relación exponencial.

$$\dot{\epsilon} = A_2 \exp(\beta\sigma) \exp(-Q/RT) \quad (4.6.3)$$

β está relacionada con las constantes m' , α mediante la ecuación $\beta = \alpha m'$.

Jonas y colaboradores (1969) demostraron que la relación de Sellars y Tegart (1966) es válida para diferentes condiciones de deformación como torsión, compresión, termofluencia y extrusión en caliente, y para diferentes niveles de esfuerzo; en su demostración, estos autores combinaron la ecuación 4.6.1 con la ecuación 4.5.1 de Zener-Hollomon (1944) en la forma:

$$\frac{Z}{A} = \left(\frac{\dot{\epsilon} e^{Q/RT}}{A} \right) = (\sinh\alpha\sigma)^{m'}$$

Tomando logaritmos de ambos miembros:

$$\log \frac{Z}{A} = \log \left(\frac{\dot{\epsilon} e^{Q/RT}}{A} \right) = m' \log(\sinh\alpha\sigma) \quad (4.6.4)$$

La tabla 4.6.1 presenta valores de los parámetros de esta ecuación para diferentes materiales. Observe que, aun cuando el acero γ pertenece al grupo de metales que recrystalizan dinámicamente durante la deformación en caliente, se obtienen valores de energía de activación que concuerdan con valores publicados por otros autores. Dos materiales que recrystalizan en el sistema hexagonal compacto, el cinc y el circonio α , satisfacen la ecuación 4.6.4. La tabla presenta los valores recíprocos de α .

La representación gráfica de la ecuación 4.6.4 en coordenadas log-log es una recta con pendiente m' (figura 4.6.1). Se observa que la ecuación es válida para diferentes niveles de esfuerzo en el estado estacionario y diferentes tipos de experimentos en un intervalo muy amplio de valores de la expresión sinusoidal.

Tabla 4.6.1. Constantes en las ecuaciones de Sellars y Tegart (Stüwe, 1971).

Material	Q (kJ/mol)	m'	$1/\alpha$ (N/mm ²)	A s ⁻¹	Intervalo de temperaturas °C
Aluminio de alta pureza	156	4.76	22.6	1.4×10^{12}	300-600
Aluminio comercial	156	4.10	22.6	2.35×10^{10}	300-600
Cinc	117	5.55	43.2	5×10^{10}	110-320
Titanio β	172	3.45	37.8	3.8×10^{10}	900-1300
Uranio γ	448	3.57	30.4	1×10^{17}	800-1000
Circonio α	193	6.25	122.6	3.7×10^8	600-850
Circonio β	264	3.03	81.4	1.2×10^{12}	1000-1300
Hierro armco (α , 0.03% C)	276	4.55	58.8	4.47×10^{11}	600-800
Acero al silicio (α , 2.8% Si)	335	4.35	59.8	6.03×10^{13}	650-1000
Acero al carbono (γ , 0.25% C)	306	4.55	63.8	1.5×10^{11}	1100

Ejercicio 4.6.1

1

Se utilizará aluminio de pureza comercial para construir una componente de una estructura que va a estar expuesta a termofluencia a 400 °C. Se va a realizar en el laboratorio un ensayo de termofluencia que simule las condiciones de servicio.

Para esta prueba se maquinó un espécimen de sección transversal rectangular. La componente va a estar sujeta a un esfuerzo de tensión de 15 N/mm² y deja de ser útil cuando se deforma una cantidad igual a $\epsilon = 0.2$.

Calcule el tiempo que se necesitará para que la componente alcance esta deformación. Las constantes en la ecuación de Sellars y Tegart están contenidas en la tabla 4.6.1.

Respuesta: de la tabla 4.6.1

$$\frac{1}{\alpha} = 22.6 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \alpha = 0.044248 \frac{\text{mm}^2}{\text{N}}$$

$$\sigma = 15 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Ejercicio 4.6.1 (continuación)

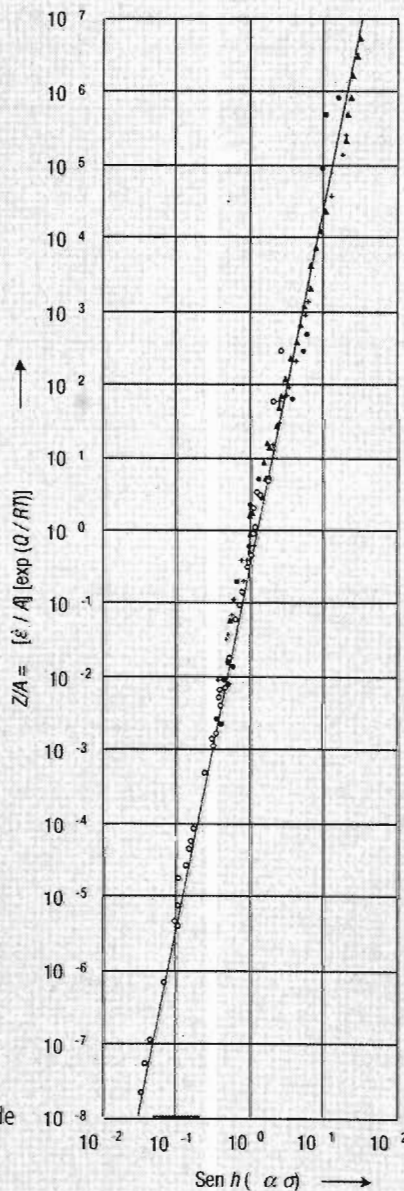
Para los valores:

$$\alpha\sigma = (0.044248)(15) = 0.66372$$

$$\operatorname{senh}(\alpha\sigma) = \operatorname{senh}(0.66372) = 0.714 = 7.14(10^{-1})$$

En la figura 4.6.1 se encuentra la ordenada correspondiente a este valor de abscisa.

$$\frac{Z}{A} = 0.00879 = \left(\frac{\dot{\epsilon} e^{Q/RT}}{A} \right)$$



- Experimentos de torsión (Aluminio de alta pureza) $T = 195 - 550 \text{ }^\circ\text{C}$.
- Experimentos de compresión. (99.21 % Al) $T = 250 - 550 \text{ }^\circ\text{C}$.
- Experimentos de termofluencia (99.9945 % Al) $T = 204 - 593 \text{ }^\circ\text{C}$.
- Experimentos de extrusión en caliente (99.73 % Al) $T = 320 - 616 \text{ }^\circ\text{C}$.

Figura 4.6.1. Recta $\log(Z/A)$ versus $\log[\operatorname{senh}(\alpha\sigma)]$ para aluminio; σ es el esfuerzo estacionario en todos los tipos de experimentos (Jonas *et al*, 1969).

Ejercicio 4.6.1 (continuación)

3

de donde:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{A(0.00879)}{\exp(Q/RT)}$$

Utilizando los valores de las constantes de la tabla 4.6.1:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{2.35(10^{10})(0.00879)}{\exp[156000/8.314(673)]} = \frac{0.02065(10^{10})}{\exp(27.88)} = \frac{0.02065(10^9)}{1.2827(10^{12})}$$

$$\dot{\varepsilon} = 1.6(10^{-4}) \text{ s}^{-1}$$

El tiempo necesario para producir la deformación $\varepsilon = 0.2$ es:

$$t = \frac{\varepsilon}{\dot{\varepsilon}} = \frac{0.2}{1.6(10^{-4})} = \frac{2(10^{-1})}{1.6(10^{-4})}$$

$$t = 1250 \text{ s}$$

Ejercicios de final de capítulo

1

1. Calcule la resistencia a la tensión dado un material dúctil para el cual $\sigma = 455\varepsilon^{0.25}$ MPa.

Respuesta: $RT = 250.5$ MPa

2. Una barra de material tiene una curva esfuerzo real-deformación real $\sigma = 455 \varepsilon^{0.4}$ MPa. Esta barra que había recibido una deformación nominal en tensión de 0.25 va a ser ensayada en tensión, hasta que esté por iniciarse la formación del cuello. ¿Qué cantidad adicional de deformación nominal debe esperarse que sufra la barra para alcanzar el inicio del cuello?

Respuesta: $\Delta e = 0.24$

3. Se demostró que cuando la curva esfuerzo real-deformación real obedece la ecuación $\sigma = K\varepsilon^n$, en el punto correspondiente a la carga máxima, se cumple la ecuación $\varepsilon = n$. Suponga que los datos del ensayo de tracción son representados en una curva esfuerzo real-deformación nominal y se conforman a la ecuación $\sigma = Ce^m$.

- a) Encuentre la relación que existe entre la deformación nominal e y m utilizando un procedimiento análogo al que se siguió para obtener la relación $\sigma = K\varepsilon^n$.
- b) Derive una expresión matemática que relacione n con m .

Ejercicios de final de capítulo (continuación)

2

Respuestas: a) $e = \frac{m}{1-m}$; b) $m = \frac{e}{\exp(n)}$; $n = \ln \frac{e}{m}$

4. Se ensaya en tensión una aleación de níquel con un contenido bajo de carbono a una temperatura de 427 °C hasta una deformación real de 0.8, con una rapidez de deformación real de 1 s^{-1} y el esfuerzo real para esta deformación fue de 130 MPa.

Si, en un segundo experimento, este material se va a deformar a la misma temperatura pero a una rapidez de deformación 10^{-2} s^{-1} , ¿qué esfuerzo será necesario aplicar para lograr la misma deformación si la ecuación que gobierna el comportamiento de este material es del tipo $\sigma = C_1 \dot{\epsilon}^{0.19}$?

Respuesta: 54.2 MPa

5. Se deforma en tensión un espécimen de cobre electrolítico 99.9% a una temperatura de 698 K, una rapidez de deformación de $2(10^{-3}) \text{ s}^{-1}$ hasta una deformación real de 0.6. El esfuerzo real para esta deformación fue de 186 MPa.

Se va a deformar un espécimen idéntico al anterior bajo las mismas condiciones de deformación, excepto que la temperatura de ensayo es de 723 K.

Determine el esfuerzo necesario para obtener la deformación real de 0.6. La energía de activación para este material es de 220 kJ mol^{-1} .

Respuesta: 50.1 MPa

6. Se ensayan en tensión dos especímenes de una aleación de aluminio de pureza comercial a una rapidez de $5(10^{-2})$ hasta una deformación real $\epsilon = 1.0$. Los valores de esfuerzo a 200 y 300 °C fueron 89.7 y 88.6 KPa, respectivamente.

Determine la energía de activación para la deformación plástica de este material.

Respuesta: 156 kJ mol^{-1} .

7. Se comprimieron especímenes cilíndricos de cobre electrolítico de un diámetro de 8.7 mm y una altura de 13.1 mm, a una rapidez de deformación $\dot{\epsilon}_1 = 1.8(10^{-3}) \text{ s}^{-1}$ y una temperatura de 450 °C, hasta una deformación $\epsilon_1 = 0.15$. La constante de Zener-Hollomon para estas condiciones experimentales es $Z_1 = 1.41(10^{13}) \text{ s}^{-1}$.

En un segundo ensayo los especímenes se comprimieron igualmente hasta $\epsilon_2 = \epsilon_1 = 0.15$, pero la constante de Zener-Hollomon se incrementó 100 veces el valor de Z_1 , es decir, $Z_2 = 100Z_1$. Si la temperatura en el segundo experimento se mantuvo a 450 °C, $T_2 = T_1$, ¿a qué rapidez de deformación real se debe realizar la compresión para obtener este valor de Z_2 ?

Respuesta: $\dot{\epsilon} = 1.8(10^{-1}) \text{ s}^{-1}$

Ejercicios de final de capítulo (continuación)

3

8. Se comprime una probeta cilíndrica hasta alcanzar una $\varepsilon = 0.15$, a partir de las dimensiones iniciales de 13.1 mm de altura y 8.7 mm de diámetro, a una rapidez de deformación de $1.8(10^{-3}) \text{ s}^{-1}$ y a una temperatura de 450 °C.

La energía de activación del material a esta temperatura es de 200 kJmol^{-1} . La constante universal de los gases es $R = 8.314 \text{ Jmol}^{-1}\text{K}^{-1}$.

¿A qué rapidez de deformación se debe ensayar la probeta a 540 °C, si se desea que la constante de Zenner-Hollomon tenga el mismo valor en ambos experimentos?

La energía de activación se mantiene constante a estas dos temperaturas.

Respuesta: $7.1(10^{-2}) \text{ s}^{-1}$

9. Se va a efectuar un ensayo de termofluencia en aluminio de alta pureza a una temperatura de 300 °C. Se desea que la rapidez de deformación sea $3(10^{-5}) \text{ s}^{-1}$.

Determine el valor de esfuerzo al cual se debe realizar el ensayo. La energía de activación está dada en la tabla 4.6.1. Utilice las ecuaciones 4.6.4.

Respuesta: $\sigma = 6.8 \text{ MPa}$

CAPÍTULO 5

Criterios de cedencia en materiales metálicos dúctiles

En el capítulo 3 se demostró, en el ensayo de tensión unidireccional, que el paso de un material del comportamiento elástico al plástico no está bien definido; en la mayoría de los metales, la curva esfuerzo-deformación exhibe una zona de transición.

Se han planteado diferentes conceptos que tienen la finalidad de establecer el punto de transición. Así entonces se han propuesto el límite elástico, el límite proporcional y el esfuerzo de cedencia al 0.2% de deformación permanente. Todas estas definiciones, de la resistencia elástica de un material, son criterios para establecer el punto de transición entre el comportamiento elástico y el comportamiento plástico.

5.1. Criterios de cedencia para un estado complejo de esfuerzos

Como se mencionó en la sección anterior, un criterio de fluencia es una hipótesis para definir el límite elástico de un material. Surge una pregunta, ¿cuál es el criterio que permite definir la condición a la que se inicia la deformación plástica cuando está actuando sobre una estructura o componente de una máquina un estado complejo de esfuerzos? Se han propuesto, como en el caso del esfuerzo unidireccional, varios criterios para definir esta transición. Dos de estos criterios son el de von Mises, de uso frecuente en el campo de los procesos de formado de metales, y el de Tresca, que se prefiere usar en ingeniería civil.

5.1.1. Criterio de von Mises o de la energía crítica de distorsión

Von Mises postuló que el punto de transición elástico-plástico de un material ocurre cuando el estado de esfuerzos a que está sujeto satisface la igualdad:

$$k^2 = J_2 \quad (5.1.1a)$$

donde k es una propiedad de resistencia a la deformación del material y J_2 es la segunda invariante del esfuerzo desviador, ya definido en la sección 1.16, y represen-

ta el estado de esfuerzos a que está sujeta la pieza de material. En consecuencia, si el material exhibe comportamiento elástico, se satisface la expresión:

$$k^2 > J_2 \quad (5.1.1b)$$

Si el material exhibe comportamiento plástico, se cumple la desigualdad:

$$k^2 < J_2 \quad (5.1.1c)$$

Utilizando la ecuación 1.17.3a en la ecuación 5.1.1a, se obtiene el criterio de von Mises en función de los esfuerzos en el sistema cartesiano x, y, z :

$$k^2 = \frac{1}{6} \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right] \quad (5.1.2a)$$

o aplicando la 1.17.3b en esa misma ecuación, se obtiene el criterio en función de los esfuerzos principales:

$$k^2 = \frac{1}{6} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right] \quad (5.1.2b)$$

Las ecuaciones 5.1.2a y 5.1.2b significan que si la segunda invariante del esfuerzo desviador que está actuando sobre una estructura o componente de máquina es igual al valor de la propiedad de resistencia, k , al cuadrado, entonces el material de la estructura está a punto de ceder plásticamente.

5.1.1.1. Criterio de von Mises aplicado al ensayo de tensión unidireccional

En el ensayo de tensión, $\sigma_1 = \sigma_0$; $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$. Utilizando estas relaciones en la ecuación 5.1.2b:

$$k^2 = \frac{1}{6} \left[(\sigma_0 - 0)^2 + (0 - 0)^2 + (0 - \sigma_0)^2 \right]$$

de donde:

$$k = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \quad (5.1.3)$$

Aplicando la ecuación 5.1.3 a 5.1.2b y extrayendo raíz cuadrada a la ecuación resultante:

$$\sigma_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]^{1/2} \quad (5.1.4a)$$

La ecuación 5.1.4a es la forma más usual de representar el criterio de von Mises. La fluencia plástica está a punto de ocurrir si los esfuerzos $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, combinados de acuerdo con la ecuación 5.1.4a, son iguales al esfuerzo de fluencia en tensión unidireccional.

Si el estado de esfuerzos consiste en esfuerzos $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ referidos a un sistema de ejes cartesiano x, y, z , la ecuación equivalente a la ecuación 5.1.4a es:

$$\sigma_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right]^{1/2} \quad (5.1.4b)$$

5.1.1.2. Criterio de von Mises aplicado al ensayo de torsión

En un ensayo de torsión, los esfuerzos que están actuando son:

$$\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau_0; \sigma_2 = 0$$

Donde τ_0 es el esfuerzo de cedencia en torsión. Sustituyendo por los valores anteriores en la ecuación 5.1.2b:

$$k^2 = \frac{1}{6} \left[(\sigma_1 - 0)^2 + (0 - (-\sigma_1))^2 + (-\sigma_1 - \sigma_1)^2 \right] = \frac{1}{6} (6\sigma_1^2)$$

de donde:

$$\tau_0^2 = \sigma_1^2 = k^2$$

es decir:

$$\tau_0 = k \quad (5.1.5)$$

Combinando las ecuaciones 5.1.3 y 5.1.5 se encuentra la relación entre los esfuerzos de fluencia en tensión unidireccional y corte:

$$\tau_0 = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \quad (5.1.6)$$

La ecuación 5.1.6 expresa que un material cederá en torsión a un esfuerzo de fluencia menor que en tensión.

VENTAJAS EN EL USO DEL CRITERIO DE VON MISES

Algunas ventajas en el uso de este criterio son las siguientes:

1. Este criterio no depende de algún valor particular de esfuerzo normal o de corte. La fluencia plástica depende de los tres valores principales de esfuerzo de corte.
2. Como se basa en diferencias de esfuerzos normales (es decir, esfuerzos de corte), el criterio es independiente del esfuerzo hidrostático.
3. Al elevar la diferencia de esfuerzos al cuadrado, el resultado es independiente del signo de los esfuerzos individuales, lo que implica que no es necesario saber cuál es el esfuerzo principal mayor o menor.
4. Su simplicidad matemática.

Hencky demostró que el criterio de von Mises es equivalente a suponer que la cedencia plástica tiene lugar cuando la energía de distorsión alcanza un valor crítico. En el apéndice B, al final de este capítulo, se presenta la demostración de Hencky.

Ejercicio 5.1.1**1**

Un elemento cúbico de un miembro estructural está sujeto a los esfuerzos $\sigma_1 = 100$ MPa, $\sigma_2 = 60$ MPa, $\sigma_3 = -40$ MPa. El esfuerzo de cedencia en tensión del material del elemento es 150 MPa.

Determine si se produce cedencia plástica conforme al criterio de von Mises.

Respuesta: utilizando los valores de esfuerzo en el segundo miembro de la ecuación 5.1.4a, se obtiene:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left[(100 - 60)^2 + (60 - (-40))^2 + (-40 - 100)^2 \right]^{1/2} = \left[\frac{1\ 600 + 10\ 000 + 19\ 600}{2} \right]^{1/2} = 125 \text{ MPa}$$

Este valor es inferior al esfuerzo de cedencia del material, por tanto no se produce deformación plástica.

Ejercicio 5.1.2**1**

Suponga que al elemento cúbico del problema anterior se le aplica, adicionalmente a los esfuerzos anteriores, una presión hidrostática de 20 MPa. Determine si se produce cedencia plástica.

Utilizando valores en el segundo miembro de la ecuación 5.1.4a:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ [(100 - 20) - (60 - 20)]^2 + [(60 - 20) - (-40 - 20)]^2 + [(-40 - 20) - (100 - 20)]^2 \right\}^{1/2} = 125 \text{ MPa}$$

El valor del segundo miembro es el mismo calculado en el problema anterior, por lo que se comprueba que la presión hidrostática no contribuye a la deformación plástica.

5.1.2. Criterio de Tresca o del esfuerzo cortante máximo

Este criterio supone que ocurre fluencia plástica cuando el esfuerzo máximo de corte alcanza un valor crítico k . El punto de transición elástica-plástica se presenta cuando:

$$\tau_{\text{máx}} = k \quad (5.1.7a)$$

Se tiene comportamiento elástico cuando:

$$\tau_{\text{máx}} < k \quad (5.1.7b)$$

Se tiene comportamiento plástico cuando:

$$\tau_{\text{máx}} > k \quad (5.1.7c)$$

Como se estableció en la sección 1.8.5:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (1.8.5a)$$

donde σ_1 y σ_3 son los esfuerzos algebraicamente mayor y menor, respectivamente.

5.1.2.1. Criterio de Tresca aplicado al ensayo de tensión unidireccional

Para tensión unidireccional: $\sigma_1 = \sigma_0$; $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$.

Aplicando este estado de esfuerzos en la ecuación 1.8.5a e igualando con k según la ecuación 5.1.7a, el esfuerzo máximo de corte resulta:

$$k = \frac{\sigma_0 - 0}{2} = \frac{\sigma_0}{2} \quad (5.1.8)$$

Utilizando la ecuación 5.1.8 en la ecuación 1.8.5a y haciendo uso de 5.1.7a se obtiene:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_0 = 2k \quad (5.1.9)$$

La ecuación 5.1.9 es la forma más usual del criterio de Tresca.

5.1.2.2. Criterio de Tresca aplicado al ensayo de torsión

Para torsión $\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau_0 = k$, $\sigma_2 = 0$. Sustituyendo en 5.1.9, la fluencia plástica se inicia cuando:

$$\sigma_1 + \sigma_3 = 2\tau_0 = 2k = \sigma_0$$

de donde

$$k = \tau_0 = \frac{\sigma_0}{2} \quad (5.1.10)$$

Ecuación que significa que el metal en torsión empezará a fluir plásticamente a la mitad del esfuerzo de fluencia en tensión.

I) Ventajas más importantes en el uso del criterio de Tresca:

1. Es matemáticamente menos complicado.
2. Predice condiciones de inicio de la cedencia plástica más conservadoras.

II) Tiene algunas desventajas:

1. No toma en cuenta el esfuerzo intermedio principal.
2. Es necesario conocer por adelantado cuáles son el esfuerzo principal mayor y el esfuerzo principal menor.
3. Es aplicable solamente a materiales en los cuales las resistencias elásticas de tensión y compresión tienen el mismo valor.
4. En algunos estados de esfuerzo, resulta muy laborioso determinar los esfuerzos principales máximo y mínimo.

Ejercicio 5.1.3

Se sujeta un elemento cúbico de una componente estructural al siguiente estado de esfuerzos:

$$\begin{vmatrix} 200 & 100 & 0 \\ 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 400 \end{vmatrix} \text{ MPa}$$

El esfuerzo de cedencia en tensión del material de la estructura es de 450 MPa.

Determine si se producirá cedencia plástica conforme al: a) criterio de von Mises, y b) criterio de Tresca.

Respuestas:

a) Von Mises

Aplicando valores en el segundo miembro de la ecuación 5.1.4b:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(200-0)^2 + (0-400)^2 + (400-200)^2 + 6(100)^2 \right]^{1/2} = \\ & = \left[\frac{4(10^4) + 16(10^4) + 4(10^4) + 6(10^4)}{2} \right]^{1/2} = \sqrt{15(10^4)} = 387 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Este valor es inferior al esfuerzo de cedencia del material, por tanto no se produce deformación plástica.

b) Tresca

El plano z es un plano principal porque los esfuerzos cortantes en ese plano valen cero, $\tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$; por eso $\sigma_z = 400$ MPa es un esfuerzo normal principal y es por tanto una solución de la ecuación cúbica:

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0$$

Las invariantes de esfuerzo se obtienen sustituyendo valores de esfuerzo en las ecuaciones 1.7.2:

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 200 + 0 + 400 = 600 \text{ MPa} \\ I_2 &= \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - [\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2] \\ I_2 &= (200)(0) + (0)(400) + (400)(200) - (100)^2 - (0)^2 - (0)^2 \\ I_2 &= 7(10^4) \\ I_3 &= \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - [\sigma_x\tau_{yz}^2 + \sigma_y\tau_{zx}^2 + \sigma_z\tau_{xy}^2] \\ I_3 &= (200)(0)(400) + 2(100)(0)(0) - (200)(0)^2 - (0)(0)^2 - (400)(100)^2 \\ I_3 &= -4(10^6) \end{aligned}$$

La ecuación cúbica es:

$$\sigma^3 - 600\sigma^2 + 70\,000\sigma + 4\,000\,000 = 0$$

Ejercicio 5.1.3 (continuación)

2

Dividiendo entre $(\sigma - 400)$ resulta que el primer miembro de la ecuación es igual al producto:

$$(\sigma - 400)(\sigma^2 - 200\sigma - 10\,000) = 0$$

Resolviendo la ecuación cuadrática:

$$(\sigma^2 - 200\sigma - 10\,000) = 0$$

Se obtienen las dos raíces faltantes de la ecuación cúbica, por eso:

$$\sigma_1 = 400 \text{ MPa}; \quad \sigma_2 = 241.4 \text{ MPa}; \quad \sigma_3 = -41.4 \text{ MPa}$$

Sustituyendo por los valores de esfuerzo normal máximo y mínimo en la ecuación 5.1.9:

$$400 - (-41.4) = 441.4 \text{ MPa}$$

Este valor es inferior al esfuerzo de cedencia de 450 MPa del material, por tanto no se inicia la cedencia plástica.

Se observa que el criterio de cedencia de Tresca es más conservador que el de von Mises, ya que el valor combinado de esfuerzos para producir cedencia plástica es superior y se acerca más al esfuerzo de cedencia del material en el criterio del esfuerzo cortante máximo. Este ejemplo muestra que es más laborioso aplicar el criterio de Tresca que el criterio de von Mises.

Ejercicio 5.1.4

1

Se aplica una carga de compresión de 1000 kN sobre una cara bien lubricada de un cubo de cobre que tiene aristas de una longitud de 100 mm; se encuentra que, con esta carga, se inicia justamente la deformación plástica.

¿Qué carga se necesita aplicar sobre esta misma cara, para que se inicie justamente la deformación plástica si, sobre las otras dos se aplican cargas de compresión de 500 kN y 250 kN, respectivamente? Suponga que la fricción es cero. Utilice el criterio de von Mises.

Respuesta: el esfuerzo de cedencia es $\sigma_0 = \frac{1\,000\,000}{(100)(100)} = 100 \text{ MPa}$

Los esfuerzos son principales debido a que no existen esfuerzos cortantes sobre las caras del cubo. Como no se sabe de antemano cuál es el mayor, el menor y el intermedio, se designarán haciendo referencia a los ejes x , y , z .

En dos de las caras actúan esfuerzos $\sigma_x = \frac{-500\,000}{(100)(100)} = -50 \text{ MPa}$ y $\sigma_y = \frac{-250\,000}{(100)(100)} = -25 \text{ MPa}$

El signo negativo es debido a que son esfuerzos de compresión. La incógnita es σ_z .

Ejercicio 5.1.4 (continuación)

2

Aplicando el criterio de von Mises:

$$\sigma_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 \right]^{1/2}$$

Aplicando valores:

$$100 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ [(-50) - (-25)]^2 + [(-25) - (\sigma_z)]^2 + [\sigma_z - (-50)]^2 \right\}^{1/2}$$

Elevando al cuadrado toda la ecuación, pasando el 2 al primer miembro y desarrollando los binomios cuadráticos, resulta:

$$\begin{aligned} 2(100^2) &= (-25)^2 + (-25)^2 - 2(-25)(\sigma_z) + \sigma_z^2 + \sigma_z^2 - 2(\sigma_z)(-50) + (-50)^2 \\ 20\,000 &= 2\sigma_z^2 + 150\sigma_z + 3\,750 \end{aligned}$$

Dividiendo entre 2 e igualando a cero:

$$\sigma_z^2 + 75\sigma_z - 8\,125 = 0$$

Resolviendo la ecuación cuadrática:

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \frac{-75 \pm \sqrt{(75)^2 - 4(1)(-8\,125)}}{2} = \frac{-75 \pm \sqrt{5\,625 + 32\,500}}{2} \\ \sigma_z &= \frac{-75 \pm \sqrt{38\,125}}{2} = \frac{-75 \pm 195.26}{2} \\ \sigma_z &= -135.1 \text{ MPa} \end{aligned}$$

De las dos soluciones de esta ecuación se toma el valor negativo porque el esfuerzo es de compresión. Conocido el esfuerzo σ_z , se determina la carga de compresión:

$$\begin{aligned} P &= \sigma_z ((100)(100)) = 135.1 \left(\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right) (10^4) (\text{mm}^2) = 1.35(10^6) \text{ N} \\ P &= 1.35 \text{ MN} \end{aligned}$$

Ejercicio 5.1.5

1

Se realizará un experimento con una barra cilíndrica de acero de 101.6 mm de diámetro que tiene un esfuerzo de cedencia en tensión de 400 MPa; se va a sujetar a una presión radial de 140 MPa y, al mismo tiempo, a un esfuerzo longitudinal de tensión. Determine el valor de carga de tensión que permitirá el inicio de la deformación plástica, según los criterios de: a) von Mises, y b) Tresca.

Ejercicio 5.1.5 (continuación)

2

Respuestas:

a) Von Mises

La presión radial actúa sobre la superficie lateral de la barra, por eso:

$$\sigma_2 = \sigma_3 = -140 \text{ MPa}; \quad \sigma_1 = \text{esfuerzo longitudinal de valor desconocido}$$

$$400 = \left\{ \frac{[\sigma_1 - (-140)]^2 + [-140 - (-140)]^2 + [-140 - \sigma_1]^2}{2} \right\}^{1/2}$$

Simplificando:

$$400 = \left[\frac{2(\sigma_1 + 140)^2}{2} \right]^{1/2}$$

$$\sigma_1 = 260 \text{ MPa}$$

$$P = 260(10^6)(\pi/4)(101.6(10^{-3}))^2 = 2.1 \text{ MN}$$

b) Tresca

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_0 = \sigma_1 - (-140) = 400$$

$$\sigma_1 = 400 - 140 = 260 \text{ MPa}$$

$$P = 260(10^6)(\pi/4)(101.6(10^{-3}))^2 = 2.1 \text{ MN}$$

Los dos criterios producen el mismo valor de carga.

5.2. Superficies de cedencia en los criterios de von Mises y Tresca. Estado tridimensional de esfuerzos

La representación geométrica de la ecuación del criterio de von Mises (5.1.4a) es un cilindro, y la de la ecuación del criterio de Tresca (5.1.9) es un prisma hexagonal inscrito en el cilindro, como se muestra en la figura 5.2.1. El eje longitudinal común a ambas figuras forma el mismo ángulo de $54^\circ 44'$ con los ejes σ_1 , σ_2 , σ_3 ; este ángulo corresponde con cosenos directrices $l = m = n = 1/\sqrt{3}$.

Sobre el plano normal a esta dirección, y a lo largo de ella, está actuando un esfuerzo, el que se determina mediante la ecuación 1.8.2 para un esfuerzo normal a un plano:

$$\sigma_N = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2 \quad (1.8.2)$$

Aplicando los valores de los cosenos directrices en la ecuación 1.8.2, resulta

$$\sigma_N = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \quad (5.2.1)$$

Es decir, en la dirección del eje longitudinal actúa la componente hidrostática de esfuerzos; como se mostró anteriormente, esta componente no contribuye a la deformación plástica, por eso la generatriz de las superficies de cedencia es una línea recta paralela al eje longitudinal. El radio del cilindro representa el esfuerzo desviador.

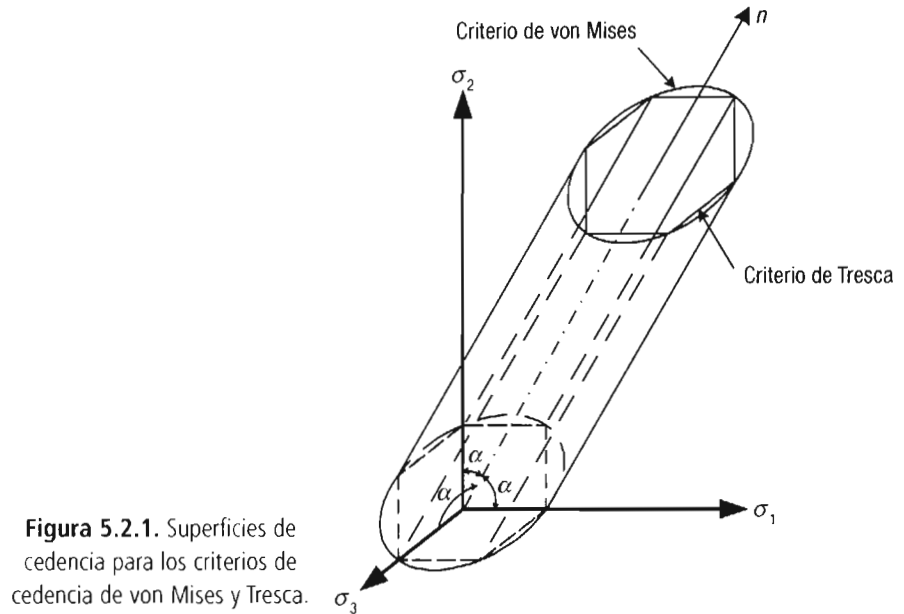


Figura 5.2.1. Superficies de cedencia para los criterios de cedencia de von Mises y Tresca.

5.3. Criterios de cedencia para un estado bidimensional de esfuerzos

5.3.1. Criterio de von Mises

Un estado de esfuerzos frecuentemente encontrado en componentes estructurales, es el estado bidimensional de esfuerzos o de esfuerzo plano, en el cual uno de los esfuerzos principales vale cero y los dos esfuerzos principales restantes pueden ser de tensión, de compresión o una combinación de éstos. Si el esfuerzo con valor cero es, por ejemplo, σ_2 , al aplicar esfuerzos en la ecuación 5.1.4a resulta:

$$\sigma_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\sigma_1 - 0)^2 + (0 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]^{1/2}$$

Simplificando, se obtiene la ecuación para esfuerzo plano

$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_3 + \sigma_3^2 = \sigma_0^2 \quad (5.3.1)$$

donde

$$\sigma_1 \neq 0; \sigma_3 \neq 0$$

5.3.2. Criterio de Tresca

La ecuación para el criterio de Tresca no sufre modificación para el estado bidimensional; se aplica la ecuación 5.1.9:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_0 = 2k \tag{5.1.9}$$

Para el estado bidimensional de esfuerzos se pueden presentar tres situaciones:

- a) Dos de los esfuerzos principales son de signo opuesto y uno de ellos vale cero; en este caso, σ_1 es el esfuerzo de tensión y σ_3 el de compresión.
- b) Dos de los esfuerzos principales son de tensión y uno de ellos vale cero; σ_1 es el esfuerzo algebraicamente mayor y σ_3 es igual a cero.
- c) Dos de los esfuerzos principales son de compresión y uno de ellos vale cero; en este caso, σ_1 es igual a cero y σ_3 es el esfuerzo algebraicamente menor.

5.4. Representación geométrica de los criterios de cedencia para un estado de esfuerzos bidimensional

La representación bidimensional de los criterios de cedencia se obtiene cuando un plano paralelo al plano σ_1, σ_3 corta las superficies de cedencia (figura 5.2.1). Una elipse es la representación del criterio de von Mises; inscrito en la elipse se encuentra un hexágono que representa el criterio de Tresca (figura 5.4.1).

Si las superficies de cedencia se representan en un sistema de ejes coordenados principales, entonces los puntos donde coinciden las superficies de cedencia corresponden a:

- a) Un estado de tensión unidireccional donde uno de los esfuerzos principales es igual a σ_0 y los otros dos esfuerzos tienen un valor cero, puntos *A, D*; o bien a un estado de compresión unidireccional, puntos *C, B*.
- b) Un estado de esfuerzos de tensión bidimensional donde dos de los esfuerzos principales tienen el valor de σ_0 , punto *E*; o bien a un estado de esfuerzos de compresión donde dos de los esfuerzos principales tienen un valor $-\sigma_0$, punto *F*; en estos dos casos, el tercer esfuerzo principal vale cero (figura 5.4.1).

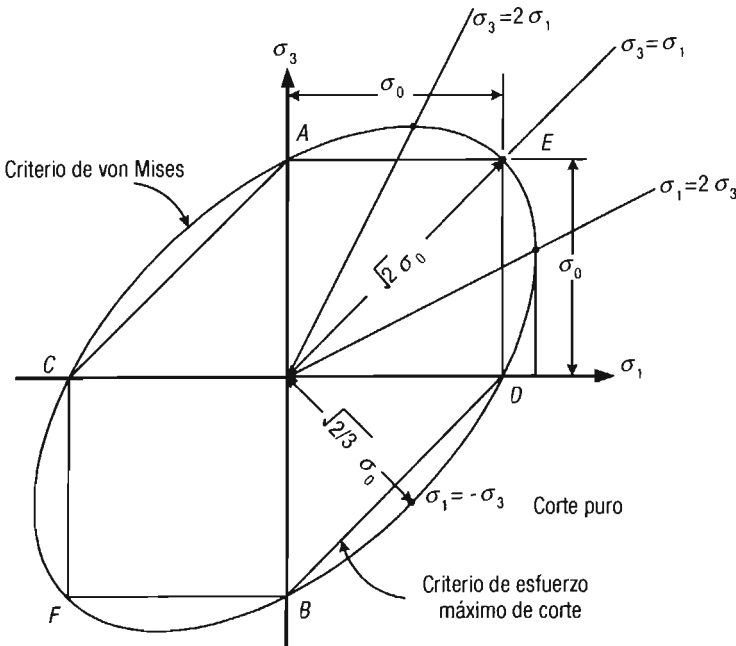


Figura 5.4.1. Representación geométrica de los criterios de cedencia para un estado bidimensional de esfuerzos. Los puntos *A, B, C, D* representan un estado unidireccional de esfuerzos *A* y *D* en tensión, *B* y *C* en compresión. Los puntos *E, F* corresponden a un estado de esfuerzos bidimensional balanceado: *E* en tensión, *F* en compresión.

Es muy sencillo obtener una expresión alterna para el criterio de von Mises en el estado de esfuerzo plano a partir de conocimientos básicos de geometría analítica. Se obtienen primero la magnitud de las diagonales mayor y menor, en función del esfuerzo de cedencia σ_0 :

Semieje mayor de la elipse

De la figura 5.4.1: $\sigma_1 = \sigma_3 = \sigma_0$. El semieje mayor es la hipotenusa de un triángulo rectángulo con catetos igual a σ_0 . Por tanto:

$$\text{Semieje mayor} = \sqrt{\sigma_0^2 + \sigma_0^2} = \sqrt{2\sigma_0^2} = \sqrt{2}\sigma_0$$

Semieje menor de la elipse

De la figura 5.4.1: $\sigma_1 = -\sigma_3$.

Sustituyendo en la ecuación 5.3.1 de von Mises para esfuerzo plano:

$$\sigma_0^2 = \sigma_1^2 - (\sigma_1)(-\sigma_1) + (-\sigma_1)^2 = 3\sigma_1^2$$

De donde:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}; \quad \sigma_3 = -\frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Y semieje menor} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(-\frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_0$$

La ecuación de von Mises para esfuerzo plano con ejes principales de esfuerzo es:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(\frac{\sigma_3}{\sigma_0}\right)^2 = 1 \quad (5.4.1)$$

En esta ecuación los denominadores de los esfuerzos σ_1 y σ_3 (elevados al cuadrado) son las expresiones para la diagonal mayor y diagonal menor al cuadrado, respectivamente.

La representación geométrica de la ecuación de Tresca con uno de los esfuerzos principales igual a cero, por ejemplo σ_2 , es un hexágono como el que se muestra en la figura 5.4.1.

5.5. Fluencia plástica en estados combinados de esfuerzos

En la práctica de la ingeniería es lugar común que muchas estructuras, componentes de máquinas o de equipo (como recipientes a presión, de pared gruesa o delgada, flechas, vigas, placas, etc.) se encuentren sujetas a estados de esfuerzos combinados.

5.5.1. Caso bidimensional de esfuerzos

Considere un recipiente de pared delgada como el que se muestra en la figura 5.5.1.

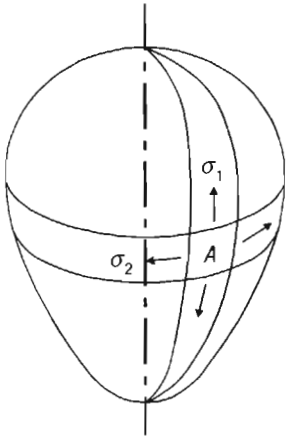


Figura 5.5.1. Recipiente de pared delgada y sujeto a una presión p (Timoshenko y Young, 1968).

Este contenedor se encuentra sujeto a una presión p . El espesor de la pared es muy pequeño comparado con el radio de curvatura principal; por eso, la pared del recipiente funciona como una membrana, la cual tendrá muy poca resistencia a la flexión y los esfuerzos que actúan sobre ella son tangenciales a la superficie imaginaria que se encuentra a la mitad del espesor de pared, y están distribuidos uniformemente a través de su espesor. Para derivar las ecuaciones de los esfuerzos resistentes normales σ_1 , σ_2 , se va a considerar un elemento de pared A que resulta de cortar la pared mediante dos meridianos y dos círculos paralelos (figura 5.5.2).

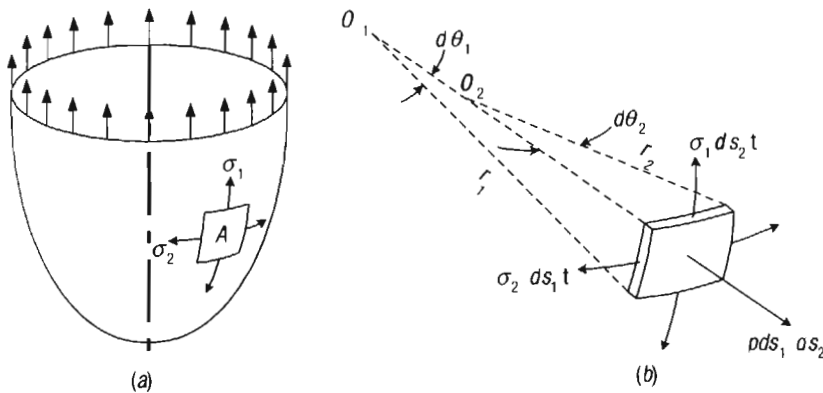


Figura 5.5.2. Esfuerzos sobre el recipiente (Timoshenko y Young, 1968).

La notación utilizada es la siguiente:

- σ_1 = Esfuerzo de tensión en dirección meridional.
- σ_2 = Esfuerzo de tensión en dirección del paralelo.
- r_1 = Radio de curvatura del meridiano en el elemento.
- r_2 = Radio de curvatura del paralelo en el elemento.
- $d\theta_1$ = Ángulo subtendido por el arco del segmento de meridiano que circunscribe al elemento de pared.
- $d\theta_2$ = Ángulo subtendido por el arco del segmento de paralelo que circunscribe al elemento de pared.

$ds_1 = r_1 d\theta_1$ = Longitud del arco del segmento de meridiano que circunscribe al elemento de pared.
 $ds_2 = r_2 d\theta_2$ = Longitud del arco del segmento de paralelo que circunscribe al elemento de pared.

La fuerza que actúa sobre cada uno de los dos planos normales a la dirección meridional se calcula mediante la expresión:

$$F_1 = \sigma_1 ds_2 t$$

En igual forma, la fuerza que actúa sobre cada uno de los dos planos normales a la dirección del paralelo se determina haciendo uso de la ecuación:

$$F_2 = \sigma_2 ds_1 t$$

Las dos fuerzas que actúan sobre los dos planos normales a la dirección meridional tienen una resultante en la dirección normal a la pared del elemento de membrana:

$$F_{1n} = 2\sigma_1 ds_2 t \operatorname{sen} \frac{d\theta_1}{2} = 2\sigma_1 ds_2 t \frac{d\theta_1}{2}$$

$$F_{1n} = \sigma_1 ds_2 t d\theta_1 = \frac{\sigma_1 ds_1 ds_2 t}{r_1} \quad (i)$$

Asimismo, las dos fuerzas que actúan sobre los planos normales a la dirección del paralelo tienen una resultante en la dirección normal a la pared del elemento de membrana:

$$F_{2n} = 2\sigma_2 ds_1 t \operatorname{sen} \frac{d\theta_2}{2} = 2\sigma_2 ds_1 t \frac{d\theta_2}{2}$$

$$F_{2n} = \frac{\sigma_2 ds_1 ds_2 t}{r_2} \quad (ii)$$

La fuerza normal a la pared del elemento debida a la presión en el interior de la superficie del elemento es:

$$F_n = p ds_1 ds_2 \quad (iii)$$

Por equilibrio de fuerzas

$$F_n = F_{1n} + F_{2n} \quad (iv)$$

Utilizando i, ii y iii en iv:

$$\frac{\sigma_1 ds_1 ds_2 t}{r_1} + \frac{\sigma_2 ds_1 ds_2 t}{r_2} = p ds_1 ds_2$$

y ahora simplificando:

$$\frac{p}{t} = \frac{\sigma_1}{r_1} + \frac{\sigma_2}{r_2} \quad (5.5.1)$$

Ejercicio 5.5.1

1

Determine los esfuerzos σ_1 , σ_2 que actúan en la membrana de un recipiente esférico de presión, de pared delgada de radio r y espesor de pared t , si el recipiente es sujeto a una presión interna uniforme p .

Para un recipiente esférico

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \sigma_2, \text{ así como} \\ r_1 &= r_2\end{aligned}$$

Respuesta: aplicando estas condiciones en 5.5.1 resulta:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{pr}{2t} \quad (5.5.2)$$

Ejercicio 5.5.2

1

Un recipiente esférico de presión de pared delgada es construido con acero de una resistencia elástica en tensión de 276 MPa. El recipiente es de un diámetro de 1.25 m y va a sujetarse a una presión interna de 7 MPa.

Determine el espesor de pared con un factor de seguridad de 3, mediante: a) el criterio de von Mises, y b) el criterio de Tresca.

Respuestas:

a) Von Mises

De la ecuación 5.3.1 para esfuerzo plano:

$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_3 + \sigma_3^2 = \sigma_0^2$$

para un recipiente esférico: $\sigma_1 = \sigma_3$; entonces, $\sigma_1 = \sigma_0$

De la ecuación 5.5.2

$$\sigma_1 = \frac{pr}{2t} = \frac{pd}{4t}$$

despejando t :

$$t = \frac{pd}{4\sigma_0} = \frac{(7)(1.25)}{(4)(276)} = 0.007925 \text{ m} = 7.925 \text{ mm}$$

Con un factor de seguridad de 3, el espesor de pared resulta:

$$t = 23.8 \text{ mm}$$

b) Tresca

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_0$$

Como los dos esfuerzos que actúan sobre la pared del recipiente son de tensión:

$$\sigma_1 = \sigma_2; \quad \sigma_3 = 0; \quad \sigma_1 = \frac{pd}{4t}$$

Ejercicio 5.5.2 (continuación)

2

Sustituyendo en la ecuación de Tresca

$$\frac{pd}{4t} - 0 = \sigma_0$$

de donde:

$$t = \frac{pd}{4\sigma_0} = \frac{(7)(1.25)}{(4)(276)} = 0.007925 \text{ m} = 7.925 \text{ mm}$$

con el factor de seguridad de 3:

$$t = 23.8 \text{ mm}$$

Los dos criterios producen el mismo resultado.

5.5.2. Un tubo de pared delgada

Los tubos de pared delgada son muy adecuados para el estudio de la fluencia plástica bajo la acción de esfuerzos combinados. La figura 5.5.3a presenta un tubo que está sujeto simultáneamente a un momento de torsión, M_t ; una presión interna p y una carga longitudinal P . La figura 5.5.3b es un elemento de pared del tubo. Sobre el elemento están actuando: un esfuerzo de corte τ_{xy} , debido al momento de torsión M_t ; un esfuerzo normal circunferencial σ_y , producido por la presión interna p , y un esfuerzo normal longitudinal σ_x producido por la presión interna p y por la carga longitudinal P .

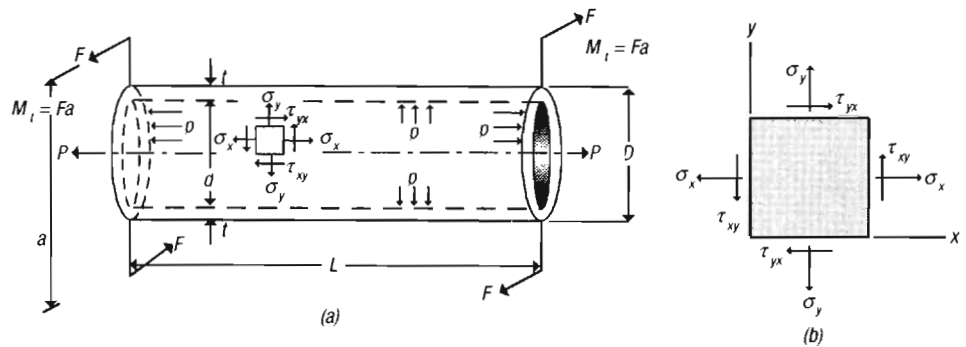


Figura 5.5.3. a) Estado complejo de esfuerzos sobre un tubo de pared delgada. b) Elemento de la pared del tubo (Marin, 1962).

El tubo tiene un espesor t , un diámetro externo D y un diámetro interno d . A partir del equilibrio de fuerzas, se plantean las tres ecuaciones siguientes:

En la dirección longitudinal:

$$\sigma_x(\pi dt) = P + \frac{p\pi d^2}{4} \rightarrow \sigma_x = \frac{P}{\pi dt} + \frac{pd}{4t} \tag{5.5.3}$$

En la dirección normal al eje del tubo:

$$(\sigma_y)(2tL) = pLd \rightarrow \sigma = \frac{pd}{2t} \quad (5.5.4)$$

El equilibrio de momentos:

$$(\tau_{xy}t\pi d)\left(\frac{d}{2}\right) = M_t \rightarrow \tau_{xy} = \frac{2M_t}{t\pi d^2} \quad (5.5.5)$$

Ejercicio 5.5.3

1

Un tubo construido con acero de un esfuerzo de cedencia de 450 MPa tiene un espesor de pared $t = 6.35$ mm y un diámetro interno de 0.508 m.

Determine la presión máxima que puede soportar sin que se produzca fluencia plástica, usando: a) el criterio de Tresca, y b) el criterio de von Mises.

Respuestas:

a) Tresca

La presión produce los esfuerzos de tensión:

$$\sigma_x = \frac{pd}{4t}$$

$$\sigma_y = \frac{pd}{2t}$$

Puesto que no hay esfuerzos cortantes, los esfuerzos normales son esfuerzos principales; el esfuerzo algebraicamente mayor es σ_y , por tanto es igual a σ_1 ; el esfuerzo intermedio es $\sigma_x = \sigma_2$, y el esfuerzo algebraicamente menor es $\sigma_x = 0$. Entonces:

$$\sigma_1 - 0 = \frac{pd}{2t} - 0 = \sigma_0$$

De donde:

$$p = \frac{2t\sigma_0}{d} = \frac{(2)(6.35)(450)}{508} = 11.25 \text{ MPa}$$

b) Von Mises

Sustituyendo en la ecuación 5.3.1:

$$\left(\frac{pd}{2t}\right)^2 - \left(\frac{pd}{2t}\right)\left(\frac{pd}{4t}\right) + \left(\frac{pd}{4t}\right)^2 = \sigma_0^2$$

Simplificando y despejando p :

$$p = \frac{4t\sigma_0}{\sqrt{3}d}$$

Ejercicio 5.5.3 (continuación)

2

Aplicando valores:

$$p = \frac{(4)(6.35)(450)}{\sqrt{3}(508)} = 13 \text{ MPa}$$

El criterio de Tresca pronostica una presión más baja para que se inicie cedencia plástica que el criterio de von Mises. El criterio de Tresca es más conservador.

Ejercicio 5.5.4

1

Se va a construir un recipiente de presión que tiene forma cilíndrica y los extremos hemisféricos (en los hemisferios, el radio del hemisferio y el radio interior del cilindro son de la misma magnitud), de un radio interior de 180 mm con un acero que tiene un esfuerzo de cedencia en corte de 550 MPa. La presión interna máxima es de 40 MPa. Si ninguna sección del recipiente debe exhibir flujo plástico, ¿qué espesor de pared debe especificarse conforme a: a) el criterio de Tresca, y b) el criterio de von Mises?

Respuestas:

El área resistente en los extremos es $A = \pi d^2/4$.

La presión produce los esfuerzos de tensión:

$$\sigma_x = \frac{pd}{4t}$$

$$\sigma_y = \frac{pd}{2t}$$

Es decir, los dos esfuerzos son $2\sigma_x = \sigma_y$. Como no existen esfuerzos cortantes, estos esfuerzos son normales principales: $\sigma_y = \sigma_1$; $\sigma_x = \sigma_2 = 0.5\sigma_1$; $\sigma_3 = 0$.

a) Tresca

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_0$$

Aplicando la expresión para σ_1 y el valor de $\sigma_0 = 2k$:

$$\sigma_1 - 0 = 2k$$

$$\sigma_0 = \sigma_1 = \frac{40(10^6)(360)}{2t} = 2(550)(10^6)$$

$$t = \frac{40(10^6)(360)}{4(550)(10^6)} = 6.5 \text{ mm}$$

b) Von Mises

Para esfuerzo plano aplica la ecuación 5.3.1:

$$\sigma_0^2 = \sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_1^2 - \sigma_1(0.5\sigma_1) + (0.5\sigma_1)^2 = 0.75\sigma_1^2$$

$$\sigma_0 = \sqrt{3}k = \sqrt{0.75}\sigma_1$$

Ejercicio 5.5.4 (continuación)

2

Aplicando la expresión para σ_1 y el valor de $\sigma_0 = \sqrt{3}k$ resulta:

$$k = \frac{\sqrt{0.75}pd}{\sqrt{3}(2t)} = \frac{\sqrt{0.75}(40)(10^6)(360)}{\sqrt{3}(2t)} = 3600(10^6)/t$$

De donde:

$$t = \frac{3600(10^6)}{(550)(10^6)} = 6.5 \text{ mm}$$

Los dos criterios conducen al mismo resultado.

5.5.2.1. Tubo de pared delgada bajo la acción de una carga longitudinal y un momento de torsión

Un estado de esfuerzos en tubos de pared delgada, de interés, es el que se encuentra cuando en el tubo actúan al mismo tiempo un esfuerzo longitudinal con un momento torsional. La figura 5.5.4 ayuda en la derivación de las formas particulares de las ecuaciones de Tresca y von Mises.

En este estado particular de esfuerzos, también $\sigma_y = 0$. Las ecuaciones 1.11.2a y 1.11.2b para esfuerzos normales máximo y mínimo, se transforman en:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x}{2} + \left(\frac{\sigma_x^2}{4} + \tau_{xy}^2 \right)^{1/2} \tag{5.5.6a}$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_x}{2} - \left(\frac{\sigma_x^2}{4} + \tau_{xy}^2 \right)^{1/2} \tag{5.5.6b}$$

El esfuerzo intermedio vale cero:

$$\sigma_2 = 0 \tag{5.5.6c}$$

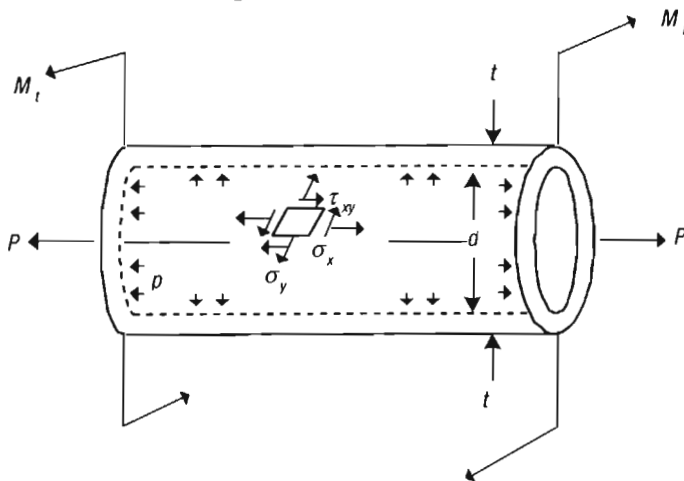


Figura 5.5.4. Esfuerzos de tensión y torsión en un tubo de pared delgada.

Utilizando las ecuaciones 5.5.6a y 5.5.6b en la ecuación de von Mises para esfuerzo plano (5.3.1), que se presentan de nuevo, para mayor claridad:

$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_3 + \sigma_3^2 = \sigma_0^2 \quad (5.3.1)$$

$$\left\{ \frac{\sigma_x}{2} + \left(\frac{\sigma_x^2}{4} + \tau_{xy}^2 \right)^{1/2} \right\}^2 - \left(\frac{\sigma_x}{2} + \left(\frac{\sigma_x^2}{4} + \tau_{xy}^2 \right)^{1/2} \right) \left(\frac{\sigma_x}{2} - \left(\frac{\sigma_x^2}{4} + \tau_{xy}^2 \right)^{1/2} \right) + \left\{ \frac{\sigma_x}{2} - \left(\frac{\sigma_x^2}{4} + \tau_{xy}^2 \right)^{1/2} \right\}^2 = \sigma_0^2$$

Simplificando:

$$\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_0} \right)^2 + 3 \left(\frac{\tau_{xy}}{\sigma_0} \right)^2 = 1 \quad (5.5.7)$$

La ecuación 5.5.7 es similar en el sistema coordenado x, y a la ecuación 5.4.1 en esfuerzos principales y su representación es una elipse.

Aplicando las ecuaciones 5.5.6a y 5.5.6b en la ecuación de Tresca (5.1.9):

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_0 = 2k \quad (5.1.9)$$

$$\left(\frac{\sigma_x}{2} + \left(\frac{\sigma_x^2}{4} + \tau_{xy}^2 \right)^{1/2} \right) - \left(\frac{\sigma_x}{2} - \left(\frac{\sigma_x^2}{4} + \tau_{xy}^2 \right)^{1/2} \right) = \sigma_0$$

Simplificando:

$$\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_0} \right)^2 + 4 \left(\frac{\tau_{xy}}{\sigma_0} \right)^2 = 1 \quad (5.5.8)$$

Ejercicio 5.5.5

1

Se va a fabricar un tubo con acero de un esfuerzo de fluencia en tensión de 350 MPa. La especificación del diámetro interno del tubo es de 25.4 cm. En servicio, el tubo se sujetará a una carga longitudinal de tensión de 700 kN y a un momento de torsión de 1500 Nm.

Determine el espesor mínimo de pared que debe tener el tubo para que no ocurra fluencia plástica, conforme a: a) el criterio de Tresca, y b) el criterio de von Mises.

Respuestas: se calcula primero el esfuerzo longitudinal σ_x y el esfuerzo cortante τ_{xy} mediante las ecuaciones 5.5.3 y 5.5.5:

$$\sigma_x = \frac{P}{t\pi d} = \frac{700(10^3)}{t(\pi)(25.4)(10^{-2})} = \frac{877.2(10^3)}{t}$$

$$\tau_{xy} = \frac{2M_t}{t\pi d^2} = \frac{2(1500)}{t\pi(25.4)^2(10^{-2})^2} = \frac{14.8(10^3)}{t}$$

Ejercicio 5.5.5 (continuación)

2

a) Tresca

La ecuación 5.5.8 es la más conveniente para la solución de este problema.

$$\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_0}\right)^2 + 4\left(\frac{\tau_{xy}}{\sigma_0}\right)^2 = 1 \quad (5.5.8)$$

la que puede representarse en la forma desarrollada:

$$\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2 = \sigma_0^2$$

Aplicando esfuerzos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{877.2(10^3)}{t}\right)^2 + 4\left(\frac{14.8(10^3)}{t}\right)^2 &= (350(10^6))^2 \\ \left(\frac{7.6948(10^{11})}{t^2}\right) + \left(\frac{876.16(10^6)}{t^2}\right) &= 1.225(10^{17}) \end{aligned}$$

Despejando t^2 y extrayendo raíz cuadrada a toda la ecuación:

$$\begin{aligned} t^2 &= \frac{(7.6948)(10^{11}) + (876.16)(10^6)}{(1.225)(10^{17})} \\ t &= \sqrt{6.2886(10^{-6})} = (2.51)(10^{-3}) \text{ m} \\ t &= 2.51 \text{ mm} \end{aligned}$$

b) Von Mises

Haciendo uso de la ecuación 5.5.7:

$$\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_0}\right)^2 + 3\left(\frac{\tau_{xy}}{\sigma_0}\right)^2 = 1$$

o la ecuación equivalente:

$$\sigma_x^2 + 3\tau_x^2 = \sigma_0^2$$

Aplicando esfuerzos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{877.2(10^3)}{t}\right)^2 + 3\left(\frac{14.8(10^3)}{t}\right)^2 &= (350(10^6))^2 \\ \left(\frac{7.6948(10^{11})}{t^2}\right) + \left(\frac{657.12(10^6)}{t^2}\right) &= 1.225(10^{17}) \end{aligned}$$

Ejercicio 5.5.5 (continuación)**3**

Despejando t^2 y extrayendo raíz cuadrada a toda la ecuación:

$$t^2 = \frac{(7.6948)(10^{11}) + (657.12)(10^6)}{(1.225)(10^{17})}$$

$$t = \sqrt{6.2868(10^{-6})} = 2.51(10^{-3}) \text{ m}$$

$$t = 2.51 \text{ mm}$$

5.6. Funciones invariantes de esfuerzo y deformación

Las invariantes de esfuerzo y deformación son funciones de esfuerzo y deformación, respectivamente, cuya representación gráfica, la curva invariante de esfuerzo-invariante de deformación, en un sistema coordenado es la misma sin importar si el estado de esfuerzos es tan simple como el existente en un espécimen sujeto a tensión unidireccional o tan complejo como el de un recipiente tubular de pared delgada expuesto a presión interior, torsión y tensión longitudinal.

Dos de estas funciones son: el esfuerzo octaédrico y la deformación octaédrica (Nadai 1937), así como el esfuerzo efectivo y la deformación efectiva.

5.6.1. Esfuerzo y deformación octaédricos

Los esfuerzos octaédricos son esfuerzos que actúan sobre las caras prismáticas de un prisma octaédrico, el cual tiene la propiedad de que las normales a los planos que constituyen las caras forman ángulos iguales con cada una de las direcciones principales de esfuerzo, o más específicamente, el ángulo que forma la normal a una de las caras con el eje de esfuerzo principal más cercano es de $54^\circ 44'$; este ángulo corresponde a un coseno directriz de un valor igual a $1/\sqrt{3}$.

Por la definición anterior se puede plantear la siguiente ecuación:

$$l = m = n = 1/\sqrt{3} \quad (a)$$

El esfuerzo que actúa sobre cada cara prismática, se puede descomponer en una componente normal octaédrica σ_{oct} y en una componente cortante octaédrica τ_{oct} . La derivación de las ecuaciones para determinar estos esfuerzos se realiza a partir de las ecuaciones 1.8.2 y 1.8.3.

$$\sigma_N = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2 \quad (1.8.2)$$

$$\tau_N^2 = \left[\sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 \right] - \left[\sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2 \right]^2 \quad (1.8.3)$$

Para el esfuerzo normal octaédrico, σ_{oct} , sustituyendo por a en 1.8.2

$$\sigma_{\text{oct}} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \quad (5.6.1)$$

El esfuerzo normal octaédrico es la componente hidrostática de esfuerzo.

El esfuerzo cortante octaédrico se obtiene sustituyendo los cosenos directrices en 1.8.3 por su valor dado en a :

$$\tau_{\text{oct}} = \left[\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}{3} - \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2}{9} \right]^{1/2}$$

Desarrollando el término en paréntesis circulares:

$$\tau_{\text{oct}} = \left[\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}{3} - \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)}{9} \right]^{1/2}$$

Arreglando la expresión en el segundo miembro:

$$\tau_{\text{oct}} = \left[\frac{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - 2(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)}{9} \right]^{1/2}$$

Finalmente el esfuerzo octaédrico en corte es

$$\tau_{\text{oct}} = 1/3 \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]^{1/2} \quad (5.6.2)$$

Si el esfuerzo de corte octaédrico produce justamente cedencia plástica, es decir, el estado de esfuerzos define un punto sobre la superficie de las caras prismáticas, se puede relacionar con el criterio de cedencia de von Mises:

$$\sigma_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_2)^2 \right]^{1/2} \quad (b)$$

Despejando en b y en 5.6.2 el corchete e igualando los miembros resultantes se obtiene:

$$\tau_{\text{oct}} = (\sqrt{2}/3)\sigma_0 \quad (5.6.3)$$

La aplicación de 5.6.3 en 5.6.2 produce la ecuación b de von Mises. Los dos criterios de cedencia producen el mismo resultado.

Para obtener la componente de deformación normal al plano octaédrico, se sustituye por la ecuación a en la 2.5.3.

$$\epsilon_N = \epsilon_1 l^2 + \epsilon_2 m^2 + \epsilon_3 n^2 \quad (2.5.3)$$

$$\epsilon_{\text{oct}} = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3}{3} \quad (5.6.4)$$

La ecuación 5.6.4 es la componente hidrostática de deformación normal.

La componente de deformación cortante contenida en el plano octaédrico se obtiene utilizando la ecuación a en la 2.5.4:

$$\gamma_N^2 = \left[\epsilon_1^2 l^2 + \epsilon_2^2 m^2 + \epsilon_3^2 n^2 \right] - \left[\epsilon_1 l^2 + \epsilon_2 m^2 + \epsilon_3 n^2 \right]^2 \quad (2.5.4)$$

Se obtiene entonces:

$$\begin{aligned}\gamma_{\text{oct}} &= \left[\frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2}{3} - \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)^2}{9} \right]^{1/2} \\ \gamma_{\text{oct}} &= \left[\frac{2(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2)}{9} - \frac{2(\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1)}{9} \right]^{1/2} \\ \gamma_{\text{oct}} &= 1/3 \left[(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2 \right]^{1/2}\end{aligned}\quad (5.6.5)$$

5.6.2. Esfuerzo y deformación efectivos

Los esfuerzos efectivos son esfuerzos que actúan sobre las caras de un cilindro cuyo eje longitudinal forma un ángulo de $54^\circ 44'$ con cada uno de los ejes principales de esfuerzo y corresponde con cosenos directrices $l = m = n = 1/\sqrt{3}$.

El esfuerzo efectivo se calcula mediante la ecuación

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]^{1/2} \quad (5.6.6a)$$

En función de esfuerzos en los ejes xyz :

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right]^{1/2} \quad (5.6.6b)$$

En el caso de que la cara cilíndrica represente una superficie de cedencia como la de la figura 5.2.1:

$$\bar{\sigma} = \sigma_0 \quad (5.6.7a)$$

que es la ecuación del criterio de von Mises.

Si el esfuerzo efectivo no produce cedencia plástica, entonces

$$\bar{\sigma} < \sigma_0 \quad (5.6.7b)$$

La situación cuando el esfuerzo efectivo produce cedencia plástica es representada por la expresión:

$$\bar{\sigma} > \sigma_0 \quad (5.6.7c)$$

Las expresiones 5.6.7 son muy útiles para resolver problemas de cedencia plástica: se calcula el esfuerzo efectivo y se compara el valor con el del esfuerzo de cedencia del material para saber si el estado de esfuerzos produce cedencia plástica.

La deformación efectiva, $\bar{\epsilon}$, en su forma diferencial o total, se calcula mediante alguna de las siguientes ecuaciones:

La deformación efectiva total es:

$$\bar{\epsilon} = \frac{\sqrt{2}}{3} \left[(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + (\epsilon_3 - \epsilon_1)^2 \right]^{1/2} \quad (5.6.8)$$

La ecuación 5.6.8 se puede representar en la forma simplificada:

$$\bar{\epsilon} = \left[\frac{2}{3} (\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2) \right]^{1/2} \quad (5.6.9)$$

o en forma diferencial:

$$d\bar{\epsilon} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[(d\epsilon_1 - d\epsilon_2)^2 + (d\epsilon_2 - d\epsilon_3)^2 + (d\epsilon_3 - d\epsilon_1)^2 \right]^{1/2} \quad (5.6.10)$$

La forma diferencial de la ecuación 5.6.9 es:

$$d\bar{\epsilon} = \left[\frac{2}{3} (d\epsilon_1^2 + d\epsilon_2^2 + d\epsilon_3^2) \right]^{1/2} \quad (5.6.11)$$

La deformación efectiva calculada mediante las ecuaciones de 5.6.8 a 5.6.11 es la porción plástica de la deformación total. Sin embargo, en el formado de metales, la deformación elástica es despreciable, por lo que si se considera en estas ecuaciones la deformación total, el error que se produce es insignificante. La equivalencia entre las ecuaciones 5.6.8, 5.6.9, 5.6.10 y 5.6.11 se demuestra en el apéndice B2.

En el ensayo de tensión, la deformación efectiva es igual a la deformación longitudinal, $\bar{\epsilon} = \epsilon_1$, como se puede demostrar sustituyendo por las relaciones particulares del ensayo de tensión $\epsilon_1 = -2\epsilon_2 = -2\epsilon_3$, en cualquiera de las ecuaciones de 5.6.8 a 5.6.11.

En compresión plana, como ocurre en el proceso de laminación de una placa, la deformación efectiva se expresa por la relación $\bar{\epsilon} = (2/\sqrt{3})\epsilon_1$, siendo ϵ_1 la deformación longitudinal, ϵ_3 la deformación en la dirección del espesor y ϵ_2 la deformación en la dirección del ancho; por eso $\epsilon_1 = -\epsilon_3$ y $\epsilon_2 = 0$.

El lector puede aplicar estas últimas relaciones en alguna de las ecuaciones de 5.6.8 a 5.6.11 para comprobar la expresión para deformación efectiva.

Ejercicio 5.6.1

1

Se lamina una chapa de acero de 1.8 m de largo, 0.6 m de ancho y 2.2 cm de espesor, conservando el ancho constante hasta una longitud de 2.6 m. Calcule la deformación efectiva total: a) haciendo uso de la ecuación 5.6.9, y b) mediante la ecuación 5.6.10.

Ejercicio 5.6.1 (continuación)

2

Respuestas: suponiendo que la dirección de las deformaciones principales coincide con la dirección de las aristas de la chapa y aplicando las ecuaciones 2.8.1:

$$\varepsilon_l = \ln\left(\frac{l}{l_0}\right) = \ln\left(\frac{2.6}{1.8}\right) = 0.3677$$

$$\varepsilon_b = \ln\left(\frac{b}{b_0}\right) = 0$$

Debido a que el comportamiento plástico se caracteriza porque el volumen del cuerpo deformado permanece constante:

$$\varepsilon_l + \varepsilon_b + \varepsilon_h = 0$$

Por tanto, $\varepsilon_l = -\varepsilon_h$, donde

$$\varepsilon_h = -0.3677$$

a) Deformación efectiva total conforme la ecuación 5.6.9

$$\bar{\varepsilon} = \left\{ \frac{2}{3} [\varepsilon_l^2 + \varepsilon_b^2 + \varepsilon_h^2] \right\}^{1/2} = \left\{ \frac{2}{3} [(0.3677)^2 + (0)^2 + (-0.3677)^2] \right\}^{1/2}$$

$$\bar{\varepsilon} = \left\{ \frac{2}{3} [2(0.1352)] \right\}^{1/2} = \left\{ \frac{2}{3} (0.2704) \right\}^{1/2} = \{0.1803\}^{1/2}$$

$$\bar{\varepsilon} = 0.4246$$

b) Deformación efectiva total, ecuación 5.6.10

$$d\bar{\varepsilon} = \frac{\sqrt{2}}{3} \left[(d\varepsilon_l - 0)^2 + (0 - (-d\varepsilon_l))^2 + (-d\varepsilon_l - d\varepsilon_l)^2 \right]^{1/2}$$

$$d\bar{\varepsilon} = \frac{\sqrt{2}}{3} \left[(d\varepsilon_l)^2 + (-d\varepsilon_l)^2 + (-2d\varepsilon_l)^2 \right]^{1/2} = \frac{\sqrt{2}}{3} \left[6(d\varepsilon_l)^2 \right]^{1/2}$$

$$d\bar{\varepsilon} = \frac{2}{\sqrt{3}} (d\varepsilon_l)$$

Integrando entre los límites para ε_l de 0 a 0.3677:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^{0.3677} d\varepsilon_l = \frac{2(0.3677)}{\sqrt{3}}$$

$$\bar{\varepsilon} = 0.4246$$

Se invita al lector para que calcule utilizando las ecuaciones 5.6.8 y 5.6.11.

Ejercicio 5.6.2

1

Para el tensor de deformaciones

$$\varepsilon_{ij} = \begin{vmatrix} 250 & 60 & -40 \\ 60 & 12.5 & 20 \\ -40 & 20 & 750 \end{vmatrix} (10^{-5})$$

Determine: a) la componente de deformación normal octaédrica; b) la deformación cortante octaédrica, y c) la deformación efectiva.

Respuestas: para calcular estas deformaciones, es necesario conocer el tensor ε_{ij} en función de las deformaciones principales. Utilizando el método goniométrico del apéndice A, capítulo 1, se determinó el tensor.

$$\varepsilon_{ij} = \begin{vmatrix} 262.7 & 0 & 0 \\ 0 & 116.25 & 0 \\ 0 & 0 & 73.75 \end{vmatrix} (10^{-5})$$

a) Deformación normal octaédrica:

De la ecuación 5.6.4

$$\varepsilon_{\text{oct}} = \frac{262.7 + 116.25 + 73.75}{3} (10^{-5})$$

$$\varepsilon_{\text{oct}} = 150.9(10^{-5})$$

b) Deformación cortante octaédrica

De la ecuación 5.6.5

$$\gamma_{\text{oct}} = \frac{1}{3} \left[(262.7 - 116.25)^2 + (116.25 - 73.75)^2 + (73.75 - 262.7)^2 \right]^{1/2} (10^{-5})$$

$$\gamma_{\text{oct}} = \frac{1}{3} [21\,447.6 + 1806.25 + 35\,891.3]^{1/2} (10^{-5}) = \frac{1}{3} [59\,145]^{1/2} (10^{-5})$$

$$\gamma_{\text{oct}} = 81(10^{-5})$$

c) Deformación efectiva

De la ecuación 5.6.9:

$$\bar{\varepsilon} = \left[\frac{2}{3} (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2) \right]^{1/2}$$

$$\bar{\varepsilon} = \left[\frac{2}{3} (262.7)^2 + (116.25)^2 + (73.75)^2 \right]^{1/2} (10^{-5})$$

$$\bar{\varepsilon} = \left\{ \frac{2}{3} [69\,011 + 13\,514 + 5\,439] \right\}^{1/2} (10^{-5})$$

$$\bar{\varepsilon} = 242(10^{-5})$$

5.7. Ecuaciones de Levy–Mises (sólido plástico ideal)

Las ecuaciones de Levy-Mises, también llamadas *reglas de flujo*, expresan la relación entre esfuerzo y deformación para un sólido plástico ideal en el que las deformaciones elásticas son despreciables.

Para derivarlas, se considera el ensayo de tensión unidireccional en el que el estado de esfuerzos es $\sigma_1 \neq 0$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$; por tanto, $\sigma_m = \sigma_1/3$. Los componentes del esfuerzo desviador que causan deformación plástica son:

$$\sigma'_1 = \sigma_1 - \sigma_m = \frac{2\sigma_1}{3} \quad (5.7.1a)$$

$$\sigma'_2 = \sigma'_3 = \frac{-\sigma_1}{3} \quad (5.7.1b)$$

De donde
$$\sigma'_1 = -2\sigma'_2 = -2\sigma'_3 \quad (5.7.1c)$$

De la condición de constancia de volumen:

$$d\varepsilon_1 = -2d\varepsilon_2 = -2d\varepsilon_3 \quad (5.7.2)$$

Combinando las relaciones 5.7.1c y 5.7.2:

$$\frac{\sigma'_1}{\sigma'_2} = \frac{d\varepsilon_1}{d\varepsilon_2} = -2$$

La forma generalizada de la ecuación de Levy-Mises es:

$$\frac{d\varepsilon_1}{\sigma'_1} = \frac{d\varepsilon_2}{\sigma'_2} = \frac{d\varepsilon_3}{\sigma'_3} = d\lambda \quad (5.7.3)$$

La ecuación 5.7.3 expresa que, en cualquier instante de la deformación, la relación de los incrementos de deformación plástica a los esfuerzos desviadores es constante.

Las ecuaciones de Levy-Mises para el caso tridimensional se obtienen a partir de las componentes del esfuerzo desviador:

$$\sigma'_1 = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{3}; \quad \sigma'_2 = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{3}; \quad \sigma'_3 = \frac{2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2}{3} \quad (5.7.4)$$

Combinando las ecuaciones 5.7.3 y 5.7.4:

$$d\varepsilon_1 = \sigma'_1 d\lambda = (d\lambda) \frac{2}{3} \left[\sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) \right] \quad (5.7.5a)$$

$$d\varepsilon_2 = \sigma'_2 d\lambda = (d\lambda) \frac{2}{3} \left[\sigma_2 - \frac{1}{2}(\sigma_3 + \sigma_1) \right] \quad (5.7.5b)$$

$$d\varepsilon_3 = \sigma'_3 d\lambda = (d\lambda) \frac{2}{3} \left[\sigma_3 - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \right] \quad (5.7.5c)$$

Observe la similitud que existe entre las ecuaciones para el comportamiento plástico y las ecuaciones para el comportamiento elástico.

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} \left[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \right]; \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{E} \left[\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3) \right]; \quad \varepsilon_3 = \frac{1}{E} \left[\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2) \right] \quad (5.7.6)$$

Las ecuaciones 5.7.5 se pueden expresar en función del esfuerzo efectivo y la deformación efectiva usando la relación:

$$d\bar{\epsilon} = \frac{2}{3} d\lambda \bar{\sigma} \quad (5.7.7)$$

Se despeja $d\lambda$ de la 5.7.7 y se aplica en las ecuaciones 5.7.5:

$$d\epsilon_1 = \frac{d\bar{\epsilon}}{\bar{\sigma}} \left[\sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) \right] \quad (5.7.8a)$$

$$d\epsilon_2 = \frac{d\bar{\epsilon}}{\bar{\sigma}} \left[\sigma_2 - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \right] \quad (5.7.8b)$$

$$d\epsilon_3 = \frac{d\bar{\epsilon}}{\bar{\sigma}} \left[\sigma_3 - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \right] \quad (5.7.8c)$$

Ésta es la forma final de las ecuaciones de Levy-Mises.

La derivación de la ecuación 5.7.7 es muy laboriosa; se presenta a continuación para el lector interesado en conocerla.

Se aplican cada una de las ecuaciones 5.7.5 a la ecuación para la deformación efectiva 5.6.10:

$$d\bar{\epsilon} = \frac{\sqrt{2}}{3} \left[(d\epsilon_1 - d\epsilon_2)^2 + (d\epsilon_2 - d\epsilon_3)^2 + (d\epsilon_3 - d\epsilon_1)^2 \right]^{1/2} \quad (5.6.10)$$

$$\begin{aligned} d\bar{\epsilon} = \frac{\sqrt{2}}{3} \left\{ \left\langle \frac{2}{3} d\lambda \left[\sigma_1 - \frac{1}{2}\sigma_2 - \frac{1}{2}\sigma_3 \right] - \frac{2}{3} d\lambda \left[\sigma_2 - \frac{1}{2}\sigma_1 - \frac{1}{2}\sigma_3 \right] \right\rangle^2 + \right. \\ \left. + \left\langle \frac{2}{3} d\lambda \left[\sigma_2 - \frac{1}{2}\sigma_1 - \frac{1}{2}\sigma_3 \right] - \frac{2}{3} d\lambda \left[\sigma_3 - \frac{1}{2}\sigma_1 - \frac{1}{2}\sigma_2 \right] \right\rangle^2 + \right. \\ \left. + \left\langle \frac{2}{3} d\lambda \left[\sigma_3 - \frac{1}{2}\sigma_1 - \frac{1}{2}\sigma_2 \right] - \frac{2}{3} d\lambda \left[\sigma_1 - \frac{1}{2}\sigma_2 - \frac{1}{2}\sigma_3 \right] \right\rangle^2 \right\}^{1/2} \quad (a) \end{aligned}$$

Simplificando la ecuación anterior:

$$d\bar{\epsilon} = \frac{\sqrt{2}}{3} \left\{ \left\langle \frac{2}{3} d\lambda \left[\frac{3}{2}\sigma_1 - \frac{3}{2}\sigma_2 \right] \right\rangle^2 + \left\langle \frac{2}{3} d\lambda \left[\frac{3}{2}\sigma_2 - \frac{3}{2}\sigma_3 \right] \right\rangle^2 + \left\langle \frac{2}{3} d\lambda \left[\frac{3}{2}\sigma_3 - \frac{3}{2}\sigma_1 \right] \right\rangle^2 \right\}^{1/2} \quad (b)$$

Elevando al cuadrado los binomios en paréntesis angulares y simplificando:

$$d\bar{\epsilon} = \frac{\sqrt{2}}{3} \left\{ (d\lambda)^2 [\sigma_1 - \sigma_2]^2 + (d\lambda)^2 [\sigma_2 - \sigma_3]^2 + (d\lambda)^2 [\sigma_3 - \sigma_1]^2 \right\}^{1/2} \quad (c)$$

$$d\bar{\epsilon} = \frac{\sqrt{2}}{3} (d\lambda) \left\{ [\sigma_1 - \sigma_2]^2 + [\sigma_2 - \sigma_3]^2 + [\sigma_3 - \sigma_1]^2 \right\}^{1/2} \quad (d)$$

A partir de la ecuación para el esfuerzo equivalente:

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]^{1/2} \quad (5.6.6a)$$

Arreglando esta ecuación:

$$\sqrt{2} \bar{\sigma} = \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]^{1/2} \quad (e)$$

Utilizando el primer miembro de la ecuación e en lugar del factor encerrado en llaves de d , se llega a:

$$d\bar{\epsilon} = \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{\sqrt{2}}{1} d\lambda \bar{\sigma} \quad (f)$$

$$d\bar{\epsilon} = \frac{2}{3} d\lambda \bar{\sigma} \quad (5.7.7)$$

que es la ecuación que se deseaba demostrar.

Ejercicio 5.7.1

1

Un tubo de pared delgada, de 30.4 cm de largo, tiene un espesor de pared de 6.35 mm y un radio interior de 10.16 cm. El material endurece conforme a la relación $\bar{\sigma} = 850(\bar{\epsilon})^{1/3}$.

El tubo se sujeta a una carga longitudinal P y un momento torsional M_T de manera que la relación $\frac{\sigma_x}{\tau_{xy}} = 3$ se mantiene durante todo el ensayo.

La deformación se continúa hasta que $\sigma_x = 400$ MPa.

Determine: a) la deformación efectiva al final del proceso de deformación; b) las dimensiones finales del tubo, y también c) la carga final y el momento torsional final.

Respuestas:

a) Deformación efectiva

En este problema, $\sigma_y = \sigma_z = 0$, $\tau_{xy} = \sigma_x/3$.

Se determina primero el esfuerzo efectivo:

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right]^{1/2}$$

Aplicando valores:

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\sigma_x - 0)^2 + (0 - 0)^2 + (0 - \sigma_x)^2 + 6 \left(\left(\frac{\sigma_x}{3} \right)^2 + (0)^2 + (0)^2 \right) \right]^{1/2}$$

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sigma_x^2 + \sigma_x^2 + \frac{2}{3} \sigma_x^2 \right]^{1/2} = \left[\frac{8}{(2)(3)} \sigma_x^2 \right]^{1/2} = \left[1.333 \sigma_x^2 \right]^{1/2}$$

$$\bar{\sigma} = (1.1547)(\sigma_x) = (1.1547)(400) = 461.9 \text{ MPa}$$

De la relación:

Ejercicio 5.7.1 (continuación)

2

$$\bar{\sigma} = 850 \left(\bar{\varepsilon} \right)^{1/3}$$

$$\bar{\varepsilon} = \left(\frac{\bar{\sigma}}{850} \right)^3 = \left(\frac{461.9}{850} \right)^3 = 0.160$$

b) Dimensiones finales del tubo

De las ecuaciones de Levy-Mises:

$$d\varepsilon_x = \frac{d\bar{\varepsilon}}{\bar{\sigma}} \left[\sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_z) \right] = \frac{d\bar{\varepsilon}}{\bar{\sigma}} \left[\sigma_x - \frac{1}{2}(0+0) \right] = \frac{d\bar{\varepsilon}}{\bar{\sigma}} \sigma_x$$

$$d\varepsilon_z = \frac{d\bar{\varepsilon}}{\bar{\sigma}} \left[\sigma_z - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \right] = \frac{d\bar{\varepsilon}}{\bar{\sigma}} \left[0 - \frac{1}{2}(\sigma_x + 0) \right] = -\frac{d\bar{\varepsilon}}{\bar{\sigma}} \frac{\sigma_x}{2}$$

Por integración de las ecuaciones anteriores:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{\bar{\sigma}} \int_0^{0.160} d\bar{\varepsilon} = \frac{\sigma_x}{\bar{\sigma}} \bar{\varepsilon} \Big|_0^{0.160} = \frac{400}{461.9} (0.160) = 0.1386$$

$$\varepsilon_z = -\frac{1}{2} \frac{\sigma_x}{\bar{\sigma}} \int_0^{0.160} d\bar{\varepsilon} = -\frac{1}{2} \frac{\sigma_x}{\bar{\sigma}} \bar{\varepsilon} \Big|_0^{0.160} = -\frac{1}{2} \left(\frac{400}{461.9} \right) (0.160) = -0.0693$$

La deformación ε_y se puede determinar también por integración o aprovechando la propiedad que tienen los metales de mantener constante su volumen durante la deformación plástica.

Siguiendo este último procedimiento.

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0$$

$$\varepsilon_y = -(\varepsilon_x + \varepsilon_z) = -(0.1386 - 0.0693)$$

$$\varepsilon_y = -0.0693$$

De las definiciones de deformación

$$\varepsilon_x = \ln \frac{x}{x_0}; \quad \varepsilon_y = \ln \frac{r}{r_0}; \quad \varepsilon_z = \ln \frac{t}{t_0}$$

se obtienen las dimensiones finales:

Ejercicio 5.7.1 (continuación)

3

$$x = x_0 \exp(\varepsilon_x) = 30.4 \exp(0.1386) = 34.92 \text{ cm}$$

$$r = r_0 \exp(\varepsilon_y) = 10.16 \exp(-0.0693) = 9.48 \text{ cm}$$

$$t = t_0 \exp(\varepsilon_z) = 6.35 \exp(-0.0693) = 5.925 \text{ mm}$$

c) Carga final y momento torsional final

De la ecuación

$$\sigma_x = \frac{P}{\pi d} + \frac{pd}{4t} = \frac{P}{\pi d} + \frac{0(d)}{4t}$$

$$P = \sigma_x (\pi d) = (400) (10^6) \left[5.925(10^{-3}) \pi 18.96(10^{-2}) \right]$$

$$P = 1411.7 \text{ kN}$$

El momento torsional:

$$M_T = \frac{1}{2} (t \pi d^2 \tau_{xy}) = 2 \tau_{xy} \pi r^2 t$$

$$M_T = 2 \left(\frac{400}{3} (10^6) \right) (5.925(10^{-3})) (\pi) (9.48(10^{-2}))^2$$

$$M_T = 44\,609 \text{ Nm} = 44.6 \text{ kNm}$$

5.8. Criterios de von Mises y Tresca para deformación plana

En la figura 5.8.1 se muestra una barra de metal en deformación plana, la altura disminuye en la dirección y ; al mismo tiempo la longitud aumenta en la dirección x (perpendicular al plano del papel), por lo que la deformación ocurre sólo sobre el plano xy .

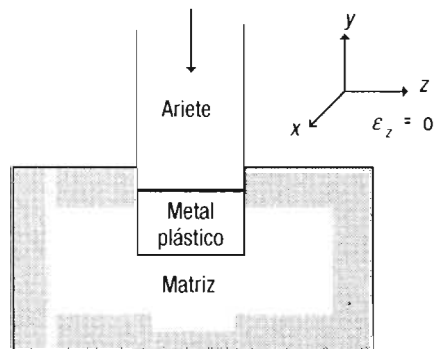


Figura 5.8.1. Deformación plana (Dieter, 1988).

Por lo tanto, $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$; y siendo así, entonces: $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$; puesto que los esfuerzos cortantes en la dirección z valen cero, se concluye que el esfuerzo σ_z es un esfuerzo principal.

Aplicando la ecuación de Levy-Mises:

$$d\varepsilon_z = 0 = \frac{d\bar{\varepsilon}}{\sigma} \left[\sigma_z - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \right] \quad (a)$$

de donde
$$\sigma_z = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad (b)$$

la ecuación anterior puede escribirse en función de los esfuerzos principales, haciendo $\sigma_z = \sigma_2$:

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \quad (c)$$

a) Criterio de von Mises

La ecuación de von Mises (5.1.4a) se puede expresar en la forma:

$$2\sigma_0^2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2$$

Al utilizar la ecuación c en esta expresión, resulta:

$$2\sigma_0^2 = \left(\sigma_1 - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \sigma_3 \right)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2$$

Desarrollando y simplificando:

$$2\frac{\sigma_0^2}{\sqrt{3}} = \sigma_1 - \sigma_3 \quad (d)$$

Del criterio de von Mises se derivó $k = \sigma_0 / \sqrt{3}$; sustituyendo en la ecuación d , se obtiene:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2k \quad (5.8.1)$$

b) Criterio de Tresca

Según el criterio de Tresca, el esfuerzo intermedio no afecta la deformación plástica, por tanto la ecuación de Tresca permanece sin cambio para la situación de deformación plana; por eso:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_0 = 2k \quad (5.8.2)$$

Es decir, que las ecuaciones de von Mises y Tresca conducen a la misma expresión para el criterio de cedencia en deformación plana; la única diferencia en las ecuaciones 5.8.1 y 5.8.2 es la definición de k en función de σ_0 .

Ejercicio 5.8.1

1

Se va a laminar una cinta de latón de 50 cm de ancho y 6.35 mm de espesor, aplicándole, además de la presión de los rodillos, una fuerza de tensión en el plano de laminación de 20 toneladas. El esfuerzo de cedencia en tensión del material es de 290 MPa.

Determine la presión de rodillos que se necesita aplicar para justamente iniciar la deformación plástica de acuerdo con: a) von Mises, y b) Tresca.

Respuestas:

a) Von Mises

Sustituyendo en la ecuación 5.8.1:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2k = 2 \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} = 1.155\sigma_0$$

Tomando el esfuerzo de tensión en el plano de laminación como σ_1 y la presión de los rodillos como $\sigma_3 = -p$ y sustituyendo en la ecuación de von Mises:

$$\sigma_1 = (20\,000) (9.81) [(50) (10^{-2}) (6.35) (10^{-3})] = 61.8 \text{ MPa}$$

$$61.8 - (-p) = 1.155(290)$$

$$p = 334.9 - 61.8 = 273.1 \text{ MPa}$$

b) Tresca

De la ecuación 5.8.2 con $2k = \sigma_0$:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_0$$

Aplicamos valores y tenemos que:

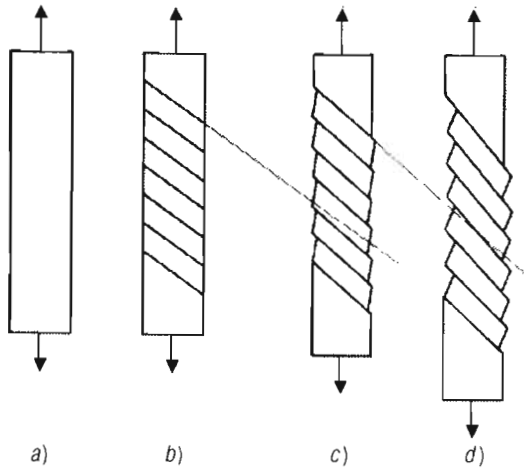
$$61.8 - (-p) = 290$$

$$p = 290 - 61.8$$

$$p = 228.2 \text{ MPa}$$

5.9. Criterios de cedencia para metales anisotrópicos

Cuando un metal es deformado plásticamente y el material es limitado en su deslizamiento por restricciones geométricas, el cristal sufre una rotación de red. La rotación de red se ilustra en la figura 5.9.1, para el caso de la deformación en tensión de un monocristal, durante la cual los extremos del espécimen son constreñidos para que permanezcan alineados y los planos de deslizamiento tienden a rotar hacia la dirección de la deformación principal.



5.9.1. Etapas de deformación en la tensión de un monocristal; las partes superior e inferior del espécimen son constreñidas para permanecer alineadas. *a)* Deformación elástica. *b)* Deformación plástica al inicio. *c)* y *d)* Deformación plástica en proceso (Reed-Hill, 1973).

Los granos cristalinos individuales, en un agregado policristalino, no pueden rotar libremente debido a constricciones mutuas entre granos y a que el desarrollo de una orientación preferida en un policristal es complejo; de todas maneras, los planos cristalinos tienden a rotar hacia la dirección de la deformación principal mayor.

Como resultado de la deformación plástica, un material inicialmente isotrópico se vuelve anisotrópico. La resistencia elástica en la dirección del trabajo mecánico puede ser mayor o menor que en la dirección transversal. En una lámina de latón laminada en frío, el esfuerzo de cedencia en tensión en dirección transversal a la dirección de laminado puede ser considerablemente más alto que el esfuerzo de cedencia en la dirección de laminado.

Un caso muy importante de anisotropía lo constituyen los materiales ortotrópicos. En un cuerpo ortotrópico, las propiedades del material son diferentes en tres direcciones mutuamente perpendiculares en un punto en el cuerpo; por esta razón existen tres planos mutuamente perpendiculares de material, simétrico en propiedades. Una cinta metálica laminada es un ejemplo de un material ortotrópico (figura 5.9.2).

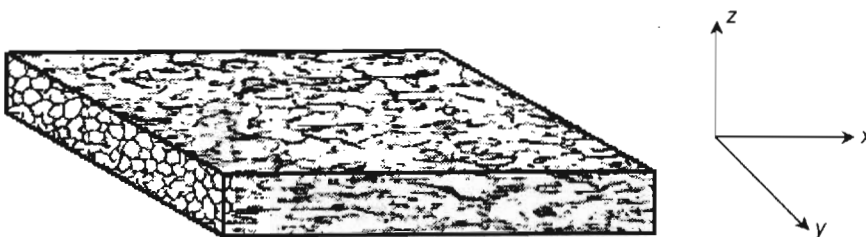


Figura 5.9.2. Sección de una lámina delgada de metal con anisotropía ortotrópica.

En el segmento de lámina mostrado, los ejes x , y , z son paralelos a las aristas de la sección de lámina.

A lo largo de cada eje, las propiedades mecánicas del material son constantes pero diferentes a las propiedades en los otros dos ejes. En los materiales compuestos se encuentran con frecuencia ejemplos de cuerpos ortotrópicos. La figura 5.9.3 ilustra una lámina ortotrópica de un material compuesto.

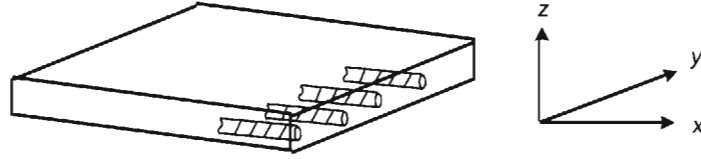


Figura 5.9.3. Lámina de un material compuesto con anisotropía ortotrópica.

Hill modificó el criterio de cedencia de von Mises para extender su aplicación a materiales anisotrópicos. La ecuación de cedencia plástica de Hill es:

$$F(\sigma_y - \sigma_z)^2 + G(\sigma_z - \sigma_x)^2 + H(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 2L\tau_{yz}^2 + 2M\tau_{zx}^2 + 2N\tau_{xy}^2 = 1 \quad (5.9.1)$$

donde F , G , H , L , M y N son parámetros que definen el grado de anisotropía. El criterio de cedencia de Hill no es afectado por el esfuerzo hidrostático debido a que intervienen diferencias de esfuerzos normales, como se demostró en el ejercicio 5.1.2. Para ejes principales de simetría ortotrópica:

$$F(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + G(\sigma_3 - \sigma_1)^2 + H(\sigma_1 - \sigma_2)^2 = 1 \quad (5.9.2)$$

Las dimensiones de los parámetros en la ecuación 5.9.2 se pueden evaluar, si se permite que X , Y , Z representen los esfuerzos de cedencia unidireccionales en las direcciones principales de anisotropía ortotrópica, y si los parámetros y las resistencias elásticas están relacionadas mediante las ecuaciones:

$$G + H = \frac{1}{X^2} \quad (a); \quad H + F = \frac{1}{Y^2} \quad (b); \quad F + G = \frac{1}{Z^2} \quad (c) \quad (5.9.3)$$

Para el caso de esfuerzo plano como el representado por la lámina metálica de la figura 5.9.2, o la lámina de un material compuesto de la figura 5.9.3, el esfuerzo normal en la dirección z de la lámina, σ_3 , es despreciable y la ecuación 5.9.2 se transforma en

$$F\sigma_2^2 + G\sigma_1^2 + H(\sigma_1^2 - 2\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2) = 1 \quad (5.9.4a)$$

Una alternativa de presentación de la ecuación 5.9.4a es:

$$(G + H)\sigma_1^2 + (F + H)\sigma_2^2 - 2H\sigma_1\sigma_2 = 1 \quad (5.9.4b)$$

Introduciendo las relaciones 5.9.3 en la ecuación 5.9.4b, resulta

$$\left(\frac{\sigma_1}{X}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{Y}\right)^2 - 2HXY\left(\frac{\sigma_1}{X}\frac{\sigma_2}{Y}\right) = 1 \quad (5.9.5)$$

Si se supone, para hacer más fácil el tratamiento, que los esfuerzos de cedencia en las direcciones longitudinal y transversal son iguales, es decir, $X = Y$, se obtiene en 5.9.5:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2HY^2\sigma_1\sigma_2 = Y^2 \quad (5.9.6)$$

El criterio de Hill-Mises se puede presentar en una forma más amable que la representada por la ecuación 5.9.6, haciendo algunos cambios.

Con $X = Y$, las ecuaciones 5.9.3a y 5.9.3b conducen a la igualdad:

$$G = F \quad (5.9.7)$$

Arreglando la ecuación 5.9.3b:

$$HY^2 = 1 - FY^2 \quad (5.9.8)$$

Por la ecuación 5.9.7, se utiliza F en lugar de G en 5.9.3c; despejando F resulta:

$$F = \frac{1}{2} \frac{1}{Z^2} \quad (5.9.9)$$

Utilizando 5.9.9 en 5.9.8 y el resultado en 5.9.6:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2 \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{Y}{Z} \right)^2 \right] \sigma_1\sigma_2 = Y^2 \quad (5.9.10)$$

El problema con el uso de esta ecuación es que el valor del esfuerzo de cedencia, Z , en la dirección normal al espesor, es difícil de medir experimentalmente; por eso se le va a dar forma a esta ecuación para hacer frente a este problema. De la ley de Hooke:

$$Y = E \ln \left(\frac{w_0}{w} \right) \quad (5.9.11)$$

y también

$$Z = E \ln \left(\frac{t_0}{t} \right) \quad (5.9.12)$$

E es el módulo de Young, el cual tiene aproximadamente el mismo valor en las direcciones del ancho y del espesor de la placa; w_0, t_0 son los valores iniciales de ancho y espesor antes de la deformación; w, t son los valores de ancho y espesor al momento de interrumpir la prueba; las expresiones logarítmicas son deformaciones reales en la dirección del ancho y del espesor del espécimen. La relación de estas deformaciones, R , es una medida de anisotropía. Dividiendo 5.9.11 entre 5.9.12, resulta:

$$R = \frac{Y}{Z} = \frac{\ln(w_0/w)}{\ln(t_0/t)} \quad (5.9.13)$$

De la relación:

$$\left(\frac{Z}{Y} \right)^2 = \frac{1+R}{2} \quad (5.9.14)$$

resulta:

$$\left(\frac{Y}{Z}\right)^2 = \frac{2}{1+R} \quad (5.9.15)$$

Utilizando 5.9.15 en 5.9.10:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \frac{2R}{1+R}\sigma_1\sigma_2 = Y^2 \quad (5.9.16)$$

R puede determinarse en función de la deformación en la dirección del ancho y de la deformación en dirección de la longitud de la placa, aprovechando que el material, al deformarse plásticamente, mantiene su volumen constante.

$$R = \frac{\varepsilon_w}{\varepsilon_l} = \frac{\varepsilon_w}{-(\varepsilon_w + \varepsilon_l)} = \frac{\ln(w_0/w)}{-\ln(w_0l_0/wl)} = \frac{\ln(w_0/w)}{\ln(wl/w_0l_0)}$$

Así, se evita realizar mediciones en la dirección del espesor.

Ejercicios de final de capítulo

1

1. Una componente de una estructura de acero estará sujeta al siguiente estado de esfuerzos:

$$\begin{vmatrix} 0 & 200 & 0 \\ 200 & -100 & 0 \\ 0 & 0 & -150 \end{vmatrix} \text{ MPa}$$

Determine de acuerdo con: a) el criterio de Tresca, y b) el criterio de Von Mises, si ocurrirá cedencia plástica. El acero tiene un esfuerzo de cedencia en tensión de 350 MPa.

Respuestas: a) Tresca: $\sigma_1 - \sigma_3 = 412.4 \text{ MPa} > \sigma_0$

b) Von Mises: $\bar{\sigma} = 370.8 \text{ MPa} > \sigma_0$

Se produce cedencia plástica de acuerdo con los dos criterios.

2. Se va a fabricar un tubo de acero que tiene un esfuerzo de cedencia en tensión de 700 MPa. El diámetro interno del tubo será de 101.2 mm. En servicio, el tubo se sujetará a una carga longitudinal de tensión de 600 kN y a un momento de torsión de 1000 Nm.

Determine el espesor mínimo de pared que debe tener el tubo para que no ocurra fluencia plástica, conforme a: a) el criterio de Tresca, y b) el criterio de von Mises.

Respuestas: a) $t = 2.7 \text{ mm}$; b) $t = 2.7 \text{ mm}$

Los dos criterios producen el mismo valor de espesor de pared.

3. Un tubo de pared delgada, cerrado en los extremos, estará sujeto en servicio a una presión interna de 70 MPa y a una carga longitudinal de tensión de 8 kN. El radio interior del tubo es de 100 mm; la especificación del tubo establece que no debe tener lugar cedencia plástica en región alguna de la pared del tubo.

Si el espesor de pared es de 22 mm, ¿qué esfuerzo de cedencia en tensión debe tener el material con el que se construirá el tubo, conforme al criterio de: a) von Mises, y b) Tresca?

Respuestas: a) $\sigma_0 = 275.6 \text{ MPa}$, y b) $\sigma_0 = 318.2 \text{ MPa}$

Ejercicios de final de capítulo (continuación)

2

4. Un tubo de acero, de un esfuerzo de cedencia en tensión de 500 MPa, de pared delgada de sección transversal circular, tiene un diámetro interno de 140 mm y un espesor de pared de 3.2 mm. Se sujeta el tubo a una presión interna de 3.5 MPa.

Determine el momento de torsión que junto con la presión producirá cedencia plástica conforme a los criterios de: a) von Mises, y b) Tresca.

Respuestas: a) $M_T = 28.2$ kNm, y b) $M_T = 24.6$ kNm

5. Un cilindro de pared delgada construido con acero, de un esfuerzo de cedencia en tensión de 450 MPa, tiene un diámetro interno de 305 mm y un espesor de pared de 6.35 mm; durante el servicio estará sujeto a una presión interna de 6 MPa, a una carga en tensión longitudinal de 90 kN y a un momento de torsión.

Determine el momento máximo de torsión que se puede aplicar al tubo sin que se produzca fluencia plástica conforme a los criterios de: a) von Mises, y b) Tresca.

Respuestas: a) $M_T = 231.5$ kNm, y b) $M_T = 207.2$ kNm

6. Se va a construir un recipiente esférico de presión de 600 mm de radio interno, de un acero que tiene un esfuerzo de cedencia en tensión de 550 MPa. La presión interna a que se sujetará el recipiente durante su uso es de 30 MPa.

Si se desea que ninguna parte de la pared ceda plásticamente, determine el espesor mínimo de pared que debe tener la esfera de acuerdo con: a) von Mises, y b) Tresca.

Respuestas: a) 16 mm, y b) 16 mm

Los dos criterios producen el mismo resultado.

7. Una barra de 7.62 mm de diámetro se sujeta a una carga longitudinal de tensión de 4 kN y a un esfuerzo de compresión radial de 160 MPa.

Si el esfuerzo de cedencia en tensión y compresión es de 350 MPa, determine el momento de torsión que producirá cedencia plástica conforme al criterio de von Mises.

Respuesta: $M_T = 12.6$ Nm

8. Un tubo de pared delgada de 30 cm de largo tiene un espesor de pared de 3 mm y un radio exterior de

76.2 mm. El material endurece conforme a la ecuación $\bar{\sigma} = 1200 \left(\bar{\epsilon} \right)^{0.5}$ MPa.

El tubo se sujeta a una presión interna, una carga de tensión en la dirección longitudinal del tubo P y un momento torsional M_T ; durante todo el ensayo se mantienen constantes las relaciones $\frac{\sigma_\theta}{\sigma_x} = \frac{1}{4}$, $\frac{\tau_{x\theta}}{\sigma_x} = \frac{1}{2}$, hasta que al final se alcanza un valor $\sigma_x = 400$ MPa.

Determine: a) la deformación efectiva total; b) las dimensiones finales del tubo, así como c) los valores p , P , M_T al final del ensayo.

Respuestas: a) $\bar{\epsilon} = 0.1736$; b) $l = 33.876$ cm, $r = 69.86$ mm, $t = 2.8976$ mm; c) $p = 4.15$ MPa, $P = 459$ kN, $M_T = 17.8$ kNm.

APÉNDICE B

B.1. Ecuación para estimar la energía de distorsión

La energía de deformación total se puede dividir en un término que depende del cambio de volumen y en otro término que depende del cambio de forma. Se derivará primero la ecuación que permite calcular la energía de deformación total.

Al inicio de la aplicación de una carga a un cuerpo, éste se deforma linealmente. La energía suministrada al material es igual a la fuerza multiplicada por el incremento de la longitud del cuerpo, la cual es almacenada por el material del cuerpo como energía elástica.

En el interior del cuerpo los átomos que lo constituyen se encuentran en posición meta-estable.

La energía por unidad de volumen del material, U , es igual al área bajo la curva carga (P) versus desplazamiento (δ), es decir:

$$U = \frac{1}{2} P\delta \quad (a)$$

En el caso de un cubo de material cuyas aristas tengan una longitud dx , dy , dz , al aplicársele una carga unidireccional de tensión en la dirección x , la energía elástica de deformación se calcula mediante la expresión:

$$dU = \frac{1}{2} Pd\delta_x = \frac{1}{2} (\sigma_x A) (\epsilon_x dx)$$

donde:
$$\epsilon_x = \frac{d\delta_x}{dx}$$

es decir:
$$dU = \frac{1}{2} (\sigma_x \epsilon_x) (A dx) \quad (b)$$

La ecuación b describe la energía elástica total que recibe el elemento. Ya que $A dx$ es el volumen dV del elemento, entonces la energía de deformación por unidad de volumen o densidad de energía de deformación es:

$$U_0 = \frac{1}{2} \sigma_x \epsilon_x = \frac{1}{2} \frac{\sigma_x^2}{E} = \frac{1}{2} \epsilon_x^2 E \quad (c)$$

La ecuación c no incluye las deformaciones laterales, porque no hay fuerzas laterales; por tanto no hay energía de deformación.

CASO TRIDIMENSIONAL

La energía de deformación elástica para un estado tridimensional de esfuerzos se obtiene por superposición:

$$U_0 = \frac{1}{2} \left[\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{xz} \gamma_{xz} \right] \quad (d)$$

Aplicando las ecuaciones de la ley de Hooke:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} \left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z) \right] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z) \right] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y) \right]\end{aligned}$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

por tanto,

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

Igualmente,

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

y también

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}$$

en la ecuación *d*:

$$U_0 = \frac{1}{2E} \left[(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - 2\nu(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z) + \frac{2E}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) \right] \quad (e)$$

o cuando los esfuerzos normales están a lo largo de direcciones principales:

$$U_0 = \frac{1}{2E} \left[(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3) \right] \quad (B.1.1)$$

La ecuación B.1.1 se puede expresar en función de las invariantes del tensor de esfuerzos:

$$U_0 = \frac{1}{2E} \left[I_1^2 - 2I_2(1+\nu) \right] \quad (B.1.2)$$

La ecuación B.1.2 puede representarse en función del módulo de volumen *K* y del módulo de corte *G*, si se aplican en ésta la relación de Poisson ν y el módulo de Young *E* dados por las ecuaciones 2.11.14 y 2.11.19:

$$\nu = \frac{3K - 2G}{6K + 2G} \quad (2.11.14)$$

$$E = \frac{9GK}{G + 3K} \quad (2.11.19)$$

Se realizan estas sustituciones a continuación y se hacen algunos arreglos:

$$\begin{aligned}U_0 &= \frac{3K + G}{2(9GK)} \left[I_1^2 - I_2 \left(2 + \frac{2(3K - 2G)}{6K + 2G} \right) \right] \\ U_0 &= \frac{3K + G}{(18GK)} \left[I_1^2 - I_2 \left(\frac{(12K + 4G + 6K - 4G)}{6K + 2G} \right) \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U_0 &= \frac{3K}{18GK} I_1^2 + \frac{G}{18GK} I_1^2 - I_2 \left[\frac{3K+G}{18GK} \right] \left[\frac{18K}{6K+2G} \right] \\
 U_0 &= \frac{I_1^2}{6G} + \frac{I_1^2}{18K} - I_2 \left[\frac{6K+2G}{18GK} \right] \left[\frac{9K}{6K+2G} \right] \\
 U_0 &= \frac{I_1^2}{6G} + \frac{I_1^2}{18K} - I_2 \frac{3}{6G} \\
 U_0 &= \frac{I_1^2}{18K} + \frac{1}{6G} (I_1^2 - 3I_2) \tag{B.1.3}
 \end{aligned}$$

El primer término del segundo miembro de la ecuación B.1.3 es el término de energía debido a cambio de volumen; el segundo término, del mismo miembro, es el término de energía debido a distorsión.

Utilizando las expresiones para la primera y segunda invariante de esfuerzo en el segundo término de la ecuación B.1.3:

$$\begin{aligned}
 U_{\text{distorsión}} &= \frac{1}{6G} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3) \\
 U_{\text{distorsión}} &= \frac{1}{12G} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right] \tag{B.1.4}
 \end{aligned}$$

CASO DE TENSIÓN UNIDIRECCIONAL

Para tensión unidireccional:

$$\sigma_1 = \sigma_0; \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0$$

Utilizando estos valores en la ecuación B.1.4:

$$U_{\text{distorsión}} = \frac{1}{12G} 2\sigma_0^2 \tag{B.1.5}$$

Aplicando la ecuación B.1.5 a la B.1.4:

$$\sigma_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]^{1/2} \tag{B.1.6}$$

Se observa que la ecuación B.1.6 es la expresión matemática del criterio de von Mises.

B.2. Ecuaciones para deformación efectiva

El trabajo diferencial por unidad de volumen, en función del esfuerzo y deformación efectivos, se puede expresar mediante la ecuación.

$$dw = \bar{\sigma} d\bar{\epsilon} = \sigma_1 d\epsilon_1 + \sigma_2 d\epsilon_2 + \sigma_3 d\epsilon_3 \tag{B.2.1}$$

Se va a considerar el caso de esfuerzo plano con $\sigma_3 = 0$; para hacer más fácil la derivación, la ecuación B.2.1 se transforma en:

$$\bar{\sigma} d\bar{\epsilon} = \sigma_1 d\epsilon_1 + \sigma_2 d\epsilon_2 \quad (\text{B.2.2})$$

se hace uso de las relaciones:

$$\alpha = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \quad (\text{B.2.3})$$

y también

$$\rho = \frac{d\epsilon_2}{d\epsilon_1} \quad (\text{B.2.4})$$

las cuales aplicamos en el segundo término del miembro derecho de la ecuación B.2.2:

$$\bar{\sigma} d\bar{\epsilon} = \sigma_1 d\epsilon_1 (1 + \alpha\rho) \quad (\text{B.2.5})$$

despejando $d\bar{\epsilon}$

$$d\bar{\epsilon} = d\epsilon_1 \left(\frac{\sigma_1}{\bar{\sigma}} \right) (1 + \alpha\rho) \quad (\text{B.2.6})$$

Tomando en cuenta las relaciones de Levy-Mises con $\sigma_3 = 0$:

$$d\epsilon_1 = \frac{d\bar{\epsilon}}{\bar{\sigma}} \left[\sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) \right] = \frac{d\bar{\epsilon}}{\bar{\sigma}} \left[\sigma_1 - \frac{1}{2}\sigma_2 \right] \quad (\text{B.2.7})$$

$$d\epsilon_2 = \frac{d\bar{\epsilon}}{\bar{\sigma}} \left[\sigma_2 - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \right] = \frac{d\bar{\epsilon}}{\bar{\sigma}} \left[\sigma_2 - \frac{1}{2}\sigma_1 \right] \quad (\text{B.2.8})$$

se aplican los segundos miembros de B.2.7 y de B.2.8 en B.2.4:

$$\rho = \frac{d\epsilon_2}{d\epsilon_1} = \frac{\sigma_2 - \sigma_1/2}{\sigma_1 - \sigma_2/2} = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1}{2\sigma_1 - \sigma_2} = \frac{\frac{2\sigma_2}{\sigma_1} - \frac{\sigma_1}{\sigma_1}}{\frac{2\sigma_1}{\sigma_1} - \frac{\sigma_2}{\sigma_1}} = \frac{2\alpha - 1}{2 - \alpha} \quad (\text{B.2.9})$$

despejando α de B.2.9:

$$\begin{aligned} \rho(2 - \alpha) &= 2\alpha - 1 \\ 2\rho - \rho\alpha &= 2\alpha - 1 \\ 2\rho + 1 &= 2\alpha + \rho\alpha = \alpha(2 + \rho) \\ \alpha &= \frac{2\rho + 1}{2 + \rho} \end{aligned} \quad (\text{B.2.10})$$

Utilizando B.2.10 en B.2.6:

$$d\bar{\varepsilon} = d\varepsilon_1 \left(\frac{\sigma_1}{\bar{\sigma}} \right) \left(1 + \frac{2\rho+1}{2+\rho} \rho \right) = d\varepsilon_1 \left(\frac{\sigma_1}{\bar{\sigma}} \right) \left(\frac{2+\rho+2\rho^2+\rho}{2+\rho} \right)$$

$$d\bar{\varepsilon} = d\varepsilon_1 \left(\frac{\sigma_1}{\bar{\sigma}} \right) \frac{2(1+\rho+\rho^2)}{2+\rho} \quad (\text{B.2.11})$$

para el caso de $\sigma_3 = 0$, la ecuación para el esfuerzo equivalente es:

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - 0)^2 + (0 - \sigma_1)^2 \right]^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sigma_1^2 - 2\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 + \sigma_2^2 + \sigma_1^2 \right]^{1/2}$$

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2) \right]^{1/2}$$

$$\bar{\sigma} = \left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 \right]^{1/2} \quad (\text{B.2.12})$$

El segundo miembro de la ecuación B.2.12 se multiplica y divide por σ_1 y se utiliza la relación B.2.3

$$\bar{\sigma} = \sigma_1 \left[\frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} - \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2} \right]^{1/2} = \sigma_1 \left[1 + \alpha^2 - \alpha \right]^{1/2}$$

$$\bar{\sigma} = \sigma_1 \left[1 - \alpha + \alpha^2 \right]^{1/2} \quad (\text{B.2.13})$$

Aplicando B.2.10 en B.2.13:

$$\bar{\sigma} = \sigma_1 \left[1 - \frac{2\rho+1}{2+\rho} + \left(\frac{2\rho+1}{2+\rho} \right)^2 \right]^{1/2} = \sigma_1 \left[\frac{(2+\rho)^2 - (2\rho+1)(2+\rho) + (2\rho+1)^2}{(2+\rho)^2} \right]^{1/2}$$

Desarrollando

$$\bar{\sigma} = \sigma_1 \left[\frac{4 + 4\rho + \rho^2 - 4\rho - 2\rho^2 - 2 - \rho + 4\rho^2 + 4\rho + 1}{(2+\rho)^2} \right]^{1/2}$$

$$\bar{\sigma} = \sigma_1 \left[\frac{3\rho^2 + 3\rho + 3}{(2+\rho)^2} \right]^{1/2} = \frac{\sqrt{3}\sigma_1(\rho^2 + \rho + 1)}{2+\rho}$$

$$\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_1} = \frac{\sqrt{3}}{2+\rho} (\rho^2 + \rho + 1)^{1/2}$$

Invirtiendo toda la ecuación

$$\frac{\sigma_1}{\sigma} = \frac{2+\rho}{\sqrt{3}} \left[\frac{1}{\rho^2 + \rho + 1} \right]^{1/2} \quad (\text{B.2.14})$$

Utilizando la ecuación B.2.14 en la B.2.11:

$$d\bar{\epsilon} = d\epsilon_1 \left[\frac{2+\rho}{\sqrt{3}} \left[\frac{1}{\rho^2 + \rho + 1} \right]^{1/2} \left[\frac{2(\rho^2 + \rho + 1)}{2+\rho} \right] \right]$$

$$d\bar{\epsilon} = \frac{2d\epsilon_1}{\sqrt{3}} (1 + \rho + \rho^2)^{1/2} \quad (\text{B.2.15})$$

Empleando la ecuación B.2.4 en la B.2.15:

$$d\bar{\epsilon} = \frac{2d\epsilon_1}{\sqrt{3}} \left[1 + \frac{d\epsilon_2}{d\epsilon_1} + \left(\frac{d\epsilon_2}{d\epsilon_1} \right)^2 \right]^{1/2}$$

Introduciendo $d\epsilon_1$ al interior del corchete:

$$d\bar{\epsilon} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[d\epsilon_1^2 + d\epsilon_1 d\epsilon_2 + d\epsilon_2^2 \right]^{1/2} \quad (\text{B.2.16})$$

Debido a que el volumen del material permanece constante durante la deformación plástica:

$$d\epsilon_1 + d\epsilon_2 + d\epsilon_3 = 0 \quad (\text{B.2.17})$$

entonces:

$$d\epsilon_3 = (-d\epsilon_1 - d\epsilon_2) \quad (\text{B.2.18})$$

La ecuación B.2.18 se aplica al desarrollo siguiente:

$$d\epsilon_1^2 + d\epsilon_2^2 + d\epsilon_3^2 = d\epsilon_1^2 + d\epsilon_2^2 + (-d\epsilon_1 - d\epsilon_2)^2 = d\epsilon_1^2 + d\epsilon_2^2 + d\epsilon_1^2 + 2d\epsilon_1 d\epsilon_2 + d\epsilon_2^2$$

$$d\epsilon_1^2 + d\epsilon_2^2 + d\epsilon_3^2 = 2(d\epsilon_1^2 + d\epsilon_1 d\epsilon_2 + d\epsilon_2^2) \quad (\text{B.2.19})$$

Aplicando B.2.19 en B.2.16:

$$d\bar{\epsilon} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\frac{d\epsilon_1^2 + d\epsilon_2^2 + d\epsilon_3^2}{2} \right]^{1/2}$$

introduciendo $\frac{2}{\sqrt{3}}$ en el corchete:

$$d\bar{\epsilon} = \left[\frac{2}{3} (d\epsilon_1^2 + d\epsilon_2^2 + d\epsilon_3^2) \right]^{1/2} \quad (\text{B.2.20})$$

Esta última ecuación es idéntica a la ecuación 5.6.11.

La segunda ecuación diferencial de la deformación efectiva se deriva a partir de la ecuación B.2.20 y de la condición de volumen constante que hace posible las relaciones:

$$d\varepsilon_1 = -d\varepsilon_2 - d\varepsilon_3 \quad (\text{B.2.21.1})$$

$$d\varepsilon_2 = -d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3 \quad (\text{B.2.21.2})$$

$$d\varepsilon_3 = -d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2 \quad (\text{B.2.21.3})$$

Aplicando estas relaciones a la expresión B.2.20:

$$\begin{aligned} d\varepsilon_1^2 + d\varepsilon_2^2 + d\varepsilon_3^2 &= (-d\varepsilon_2 - d\varepsilon_3)^2 + (-d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3)^2 + (-d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2)^2 \\ d\varepsilon_1^2 + d\varepsilon_2^2 + d\varepsilon_3^2 &= (d\varepsilon_2^2 + 2d\varepsilon_2d\varepsilon_3 + d\varepsilon_3^2) + (d\varepsilon_1^2 + 2d\varepsilon_1d\varepsilon_3 + d\varepsilon_3^2) \\ &\quad + (d\varepsilon_1^2 + 2d\varepsilon_1d\varepsilon_2 + d\varepsilon_2^2) \end{aligned}$$

Agrupando términos:

$$d\varepsilon_1^2 + d\varepsilon_2^2 + d\varepsilon_3^2 = 2(d\varepsilon_1^2 + d\varepsilon_2^2 + d\varepsilon_3^2) + 2(d\varepsilon_2d\varepsilon_3 + d\varepsilon_1d\varepsilon_3 + d\varepsilon_1d\varepsilon_2)$$

Simplificando

$$-(d\varepsilon_1^2 + d\varepsilon_2^2 + d\varepsilon_3^2) = 2(d\varepsilon_2d\varepsilon_3 + d\varepsilon_1d\varepsilon_3 + d\varepsilon_1d\varepsilon_2) \quad (\text{B.2.22})$$

La expresión dentro de los corchetes del segundo miembro de la ecuación B.2.20 se multiplica y divide entre tres:

$$d\bar{\varepsilon} = \left\{ \frac{2}{9} \left[3(d\varepsilon_1^2 + d\varepsilon_2^2 + d\varepsilon_3^2) \right] \right\}^{1/2} = \left\{ \frac{2}{9} \left[2(d\varepsilon_1^2 + d\varepsilon_2^2 + d\varepsilon_3^2) + (d\varepsilon_1^2 + d\varepsilon_2^2 + d\varepsilon_3^2) \right] \right\}^{1/2} \quad (\text{B.2.23})$$

Aplicando la ecuación B.2.22 a la B.2.23:

$$\begin{aligned} d\bar{\varepsilon} &= \left\{ \frac{2}{9} \left[2(d\varepsilon_1^2 + d\varepsilon_2^2 + d\varepsilon_3^2) - 2(d\varepsilon_2d\varepsilon_3 + d\varepsilon_1d\varepsilon_3 + d\varepsilon_1d\varepsilon_2) \right] \right\}^{1/2} \\ d\bar{\varepsilon} &= \left\{ \frac{2}{9} \left[(d\varepsilon_1^2 - 2d\varepsilon_1d\varepsilon_2 + d\varepsilon_2^2) + (d\varepsilon_2^2 - 2d\varepsilon_2d\varepsilon_3 + d\varepsilon_3^2) + (d\varepsilon_3^2 - 2d\varepsilon_1d\varepsilon_3 + d\varepsilon_1^2) \right] \right\}^{1/2} \\ d\bar{\varepsilon} &= \left\{ \frac{2}{9} \left[(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2)^2 + (d\varepsilon_2 - d\varepsilon_3)^2 + (d\varepsilon_3 - d\varepsilon_1)^2 \right] \right\}^{1/2} \end{aligned}$$

Sacando 2/9 fuera de las llaves:

$$d\bar{\varepsilon} = \frac{\sqrt{2}}{3} \left[(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2) + (d\varepsilon_2 - d\varepsilon_3)^2 + (d\varepsilon_3 - d\varepsilon_1)^2 \right]^{1/2} \quad (\text{B.2.24})$$

La ecuación B.2.24 es idéntica a la ecuación 5.6.10.

La ecuación B.2.20 se puede expresar en función de los valores de deformación total:

$$\bar{\varepsilon} = \left[\frac{2}{3} (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2) \right]^{1/2} \quad (\text{B.2.25})$$

La ecuación B.2.25 es idéntica a la ecuación 5.6.9.

La ecuación 5.6.8 es obtenida a partir de la ecuación B.2.25 mediante una secuencia análoga a la seguida para obtener la ecuación B.2.24 desde la B.2.20. Se presenta esta derivación, aunque puede parecer trivial.

De la condición de volumen constante:

$$\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 - \varepsilon_3 \quad (\text{B.2.26.1})$$

$$\varepsilon_2 = -\varepsilon_1 - \varepsilon_3 \quad (\text{B.2.26.2})$$

$$\varepsilon_3 = -\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \quad (\text{B.2.26.3})$$

Aplicando estas relaciones a la expresión B.2.25:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 &= (-\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (-\varepsilon_1 - \varepsilon_3)^2 + (-\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 \\ \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 &= (\varepsilon_2^2 + 2\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3^2) + (\varepsilon_1^2 + 2\varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_3^2) + (\varepsilon_1^2 + 2\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2^2) \end{aligned}$$

Agrupando términos:

$$\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 = 2(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2) + 2(\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_2)$$

Simplificando:

$$-(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2) = 2(\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_2) \quad (\text{B.2.27})$$

La expresión dentro de los corchetes del segundo miembro de la ecuación B.2.25 se multiplica y divide entre tres:

$$\bar{\varepsilon} = \left\{ \frac{2}{9} \left[3(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2) \right] \right\}^{1/2} = \left\{ \frac{2}{9} \left[2(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2) + (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2) \right] \right\}^{1/2} \quad (\text{B.2.28})$$

Aplicando la ecuación B.2.27 a la B.2.28:

$$\bar{\varepsilon} = \left\{ \frac{2}{9} \left[2(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2) - 2(\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_2) \right] \right\}^{1/2}$$

Agrupando los términos dentro de los paréntesis circulares:

$$\bar{\varepsilon} = \left\{ \frac{2}{9} \left[(\varepsilon_1^2 - 2\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2^2) + (\varepsilon_2^2 - 2\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3^2) + (\varepsilon_3^2 - 2\varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_1^2) \right] \right\}^{1/2}$$

$$\bar{\varepsilon} = \left\{ \frac{2}{9} \left[(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2 \right] \right\}^{1/2}$$

Sacando 2/9 fuera de las llaves:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sqrt{2}}{3} \left[(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2 \right]^{1/2} \quad (\text{B.2.29})$$

La ecuación B.2.29 es idéntica a la ecuación 5.6.8.

CAPÍTULO 6

Tribología en el formado de metales

En los procesos de formado de metales, tres componentes contribuyen a la fuerza, energía y potencia necesarias para darle forma a una pieza de metal: la deformación, la fricción y la distorsión. En los capítulos del 7 al 11 se estudiarán los métodos para calcular la fuerza, energía y potencia de deformación. En el capítulo 7 se examinará la distorsión. En este capítulo se examinan la fricción y los factores que la aumentan o disminuyen.

En ingeniería mecánica es sabido que, cuando dos cuerpos están en contacto y existe un movimiento relativo entre ellos, inmediatamente surge una resistencia al movimiento por la fricción que se establece en la superficie de contacto entre los dos cuerpos; esta resistencia es medida por un esfuerzo cortante. En cada proceso de formado de metales, es posible observar este fenómeno. En la forja de un cilindro, el metal del cilindro, al ser comprimido, se mueve sobre la superficie de la herramienta de compresión en dirección normal a la dirección del movimiento de la herramienta, por efecto de la deformación del metal del cilindro; se produce, entonces, una diferencia de velocidades. En el proceso de estirado de alambre, al salir éste del dado, se enrolla en un cilindro de acero que gira a gran velocidad y obliga al alambre a pasar a través de una matriz inmóvil, por lo que la diferencia de velocidad entre alambre y matriz es muy grande.

Durante el contacto frecuente entre pieza y matriz, se puede producir no sólo fricción sino también adherencia y desgaste. Para disminuir estos efectos, se utiliza lubricante. El lubricante disminuye así la fricción, el desgaste, y en general mejora la calidad de la pieza.

6.1. Fricción

La fricción es la resistencia al movimiento cuando un cuerpo se desliza sobre otro. En el formado de metales, los cuerpos son la pieza y la matriz. Es práctica generalizada utilizar el término dado para designar una matriz; por esta razón, en el texto se usarán ambos términos indistintamente.

6.1.1. Características de la interfaz dado-pieza

Para comprender el fenómeno de la fricción, es necesario analizar algunas características de la interfaz dado-pieza en proceso de deformación. En un acercamiento preliminar, se observa que la interfaz tiene una macrogeometría bien definida (figura 6.1.1). En el trabajo en frío de los metales técnicamente importantes, la temperatura de la matriz T_m y de la pieza T_p están próximas a la temperatura ambiente, aunque el trabajo de deformación plástica y la fricción pueden elevar la temperatura varios cientos de grados Celsius. En el formado en caliente, la condición más frecuente es una T_m mucho mayor que la T_p . En el caso de que se deformen metales que son afectados por cambios bruscos de temperatura, se realiza trabajo isotérmico, es decir, $T_m = T_p$.

La presión normal, p , en el dado puede ser una fracción del esfuerzo de flujo σ_0 , pero a veces alcanza un valor múltiplo de σ_0 en procesos masivos de deformación (como en forja cerrada y en la extrusión).

Al movimiento relativo entre pieza y dado se opone la fricción, la que puede ser descrita por una resistencia al corte promedio de la interfaz τ_{FR} . Cuando este valor alcanza el de la resistencia de flujo en corte k del material de la pieza, es energéticamente más favorable efectuar la deformación por corte interno en el cuerpo de la pieza. En este caso, cesa el movimiento en la interfaz y se presenta la llamada fricción adhesiva, aunque no necesariamente implique adherencia del material de la pieza a la matriz.

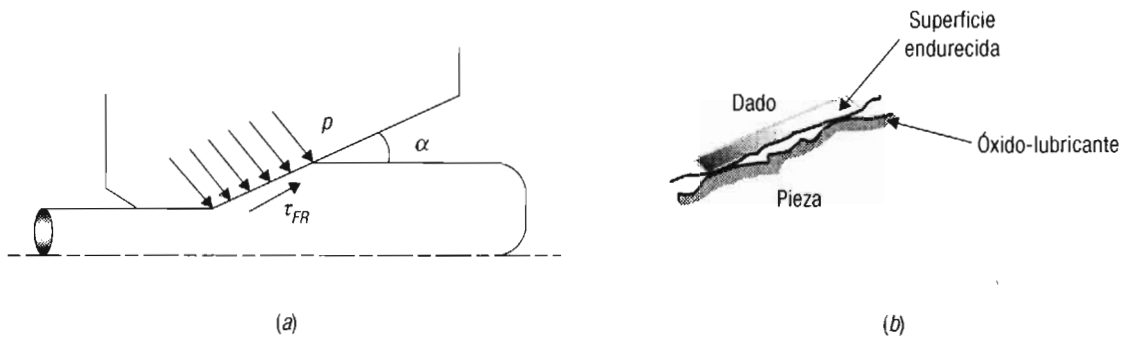


Figura 6.1.1. Cara de contacto pieza-dado: a) nivel macroscópico, α es el ángulo de mordida del dado; b) nivel microscópico.

Si se desean entender las fuentes de la fricción y los mecanismos de lubricación, el punto de vista macroscópico es inadecuado. En la escala microscópica, tanto el dado como la pieza presentan picos y valles. La magnitud y la dirección de esta microgeometría son importantes en la creación de la fricción y también en el establecimiento y sostén de películas de lubricante orientadas a disminuir la fricción.

La figura 6.1.1b muestra que también son importantes los factores metalúrgicos. La pieza y el dado son descritos usualmente por su composición química. Sin embargo, son también muy importantes la clase de fases y su distribución. La composición química de las superficies puede diferir de la del interior, ya sea porque intencionalmente se tratan térmicamente las superficies, o por efectos de difusión en el material.

Los metales puros raramente existen; por razones termodinámicas, la superficie metálica se combina con el oxígeno del aire, con la humedad atmosférica o con la humedad contenida en los lubricantes, por lo que la superficie se cubre inmediatamente con productos de la reacción. Estos productos de oxidación pueden combinarse con el lubricante y producir una capa superficial o sustrato.

6.1.2. Parámetros de fricción

Se debe conocer la magnitud de τ_{FR} para poder predecir las presiones interfaciales, las fuerzas de deformación y las necesidades de energía y potencia. Sin embargo, es conveniente expresar el efecto de la fricción por un parámetro adimensional en lugar de usar τ_{FR} . En la actualidad, han encontrado amplia aceptación dos parámetros:

- Uno de ellos definido por la ley de Coulomb, es el coeficiente de fricción μ . La ley establece que la relación de la fuerza de fricción F_{FR} y la fuerza normal F_n (o lo que es equivalente, la relación del esfuerzo de fricción y el esfuerzo normal, p , es decir, la presión del dado) es constante y se expresa por:

$$\mu = F_{FR}/F_n = F_{FR}/A_{FR} / F_n / A_{FR} = \tau_{FR}/p \quad (6.1.1)$$

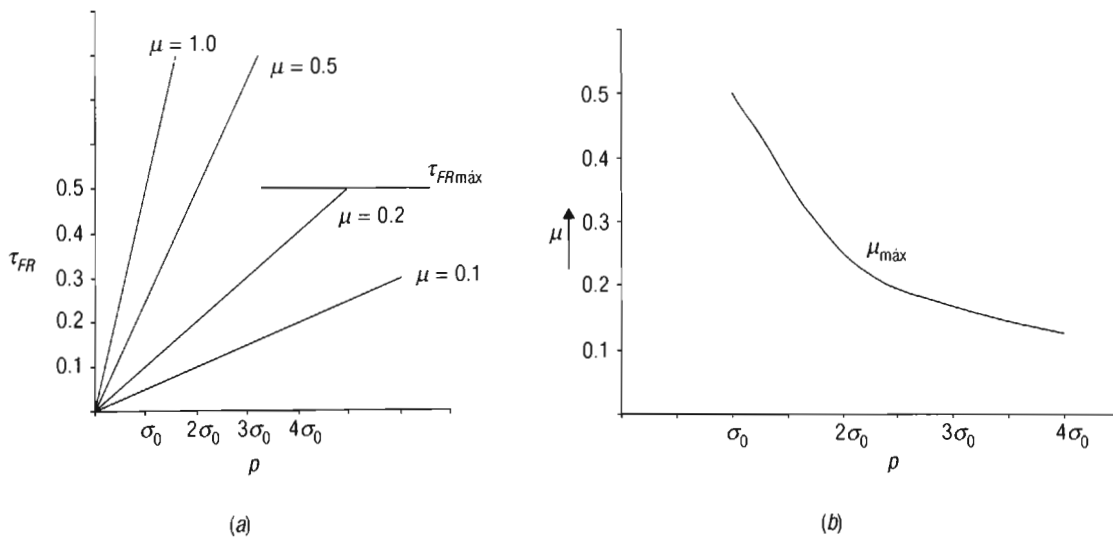


Figura 6.1.2. a) Variación de la resistencia al corte en la cara de contacto.
b) Variación de μ con la presión (Schey, 1983).

La satisfacción de la relación 6.1.1 significa que debe haber un valor constante de μ por cada proceso para las condiciones dadas de aspereza superficial y lubricación del mismo, figura 6.1.2a.

Éste es el caso del embutido profundo de una sección de lámina. Sin embargo, en algunos procesos, por ejemplo en procesos masivos de deformación, es necesario aplicar presiones muy elevadas para poder efectuar la deformación; para que la ecuación 6.1.1 sea satisfecha se requiere que el valor de τ_{FR} crezca. Esto solamente puede suceder en el intervalo de valores de τ_{FR} : $\tau_{FR} = \mu p \leq k$. Cuando el esfuerzo cortante de fricción alcanza el valor

máximo, μ debe descender cuando crece p para que se conserve la igualdad $\mu p = k$.

Conforme al criterio de Tresca, $k = 0.5\sigma_0$, cuando la presión $p = \sigma_0$, $\mu_{\text{máx}} = 0.5$, como lo muestra la figura 6.1.2b. Por eso se dice que el coeficiente de fricción no tiene ningún significado en las condiciones de deformación donde $\mu p > k$, ya que no habría en esta situación deslizamiento alguno en la interfaz.

- Cuando se presenta la condición $\mu p > k$ es conveniente introducir, para condiciones donde no se satisface la ley de Coulomb, el factor de corte por fricción m , el cual se define por la expresión:

$$\tau_{FR} = mk \quad (6.1.2)$$

Puesto que τ_{FR} está relacionada con la propiedad del material de la pieza k , la cual se conoce de antemano, en lugar de utilizar p (la cual habría de ser calculada), el uso de m simplifica mucho las operaciones.

6.2. Adherencia

Las fuentes de fricción son múltiples. En el enfoque más sencillo, para que el deslizamiento tenga lugar, las asperezas se deben deformar elástica y/o plásticamente. Las asperezas del material duro del dado pueden arañar el material de la pieza y se produciría de esta forma fricción adhesiva. Debido al íntimo contacto que se establece durante la deformación, los átomos del dado y de la pieza se aproximan lo suficiente para que se puedan desarrollar fuerzas interatómicas. En la ausencia de películas de contaminantes o lubricante, estas fuerzas pueden ser medidas en el momento en que se separan el dado y la pieza, al aplicar presión y forzar el deslizamiento. A este pegado entre dado y pieza se le llama adherencia.

En el formado de metales es indeseable que exista adherencia en la interfaz debido a que, si el metal se adhiere a la herramienta, el material siguiente que sea procesado por ésta va a resultar con daño superficial. Es importante que el material de la matriz tenga una adherencia baja con el material de la pieza.

Los factores que favorecen la adherencia son una elevada solubilidad del material de la pieza en el material de la matriz y viceversa, una temperatura de proceso alta, un contacto prolongado o repetido entre pieza y matriz, y un valor de módulo de Young del metal de la herramienta bajo. Estos factores interactúan entre sí. La adherencia es promovida si ello significa una disminución de la energía superficial; por ejemplo, si al difundirse, los átomos se alojan en las dislocaciones. La solubilidad al estado sólido a la temperatura de deformación y el contacto prolongado, promueven la difusión de los átomos; por eso favorecen la adherencia. Para un par dado de metales, la adherencia es más pronunciada a la temperatura de conformado en caliente que hace posible una gran movilidad atómica.

Un módulo elástico alto en el material del dado, permite la separación de la pieza sin adherencia. Esta propiedad explica las diferencias en adherencia entre materiales de diferente estructura cristalográfica u orientación. Debido a que la dureza de la matriz del dado y, por tanto, su resistencia al desgaste se deben a la presencia de una estructura de fases múltiples en la cual las fases intermetálicas duras están embebidas en la matriz metálica, puede predecirse su resistencia a la adherencia de un material particular, si se conoce la naturaleza del material.

La adherencia a cualquier material puede reducirse recubriendo la superficie de la matriz con una película dura de módulo de elasticidad elevado; por ejemplo, con un depósito de cromo, como es el caso de los rodillos cromados que se utilizan en la laminación de aluminio. El boro es otro metal utilizado en el recubrimiento de matrices. La eficiencia del lubricante puede ser afectada negativamente cuando se utilizan recubrimientos duros debido a que se pueden impedir reacciones beneficiosas entre el lubricante y la matriz.

6.3. Desgaste

Las causas principales del desgaste de la matriz son adherencia, abrasión, corrosión y fatiga térmica.

Como se indicó antes, la adherencia origina una transferencia de material al dado o de éste al material. La unión originada por deformación intensa es usualmente más fuerte que el material de la pieza. Por eso, se desprende un fragmento de la pieza en el deslizamiento posterior dando lugar a la formación de partículas de desgaste. Ocasionalmente se puede desprender alguna parte del dado también. El volumen desgastado aumenta con la presión normal y con la distancia deslizada y disminuye con la dureza del dado.

La presencia de partículas duras (como óxidos o pedazos de material desprendidos por desgaste) acelera el desgaste por abrasión. Siendo así, la remoción de la costra de óxido formada durante el calentamiento (por ejemplo mediante agua a presión o por descascaramiento mecánico) es importante en la forja y laminación en caliente del acero.

La filtración es una necesidad en todos los sistemas de enfriamiento de lubricante. La adherencia y el desgaste por abrasión pueden evitarse manteniendo una película de lubricante suficientemente gruesa entre la matriz y la pieza en proceso. Sin embargo, además de ser difícil mantener una película gruesa durante el proceso de deformación, esa película produce una rugosidad indeseable en muchos productos que requieren un acabado liso. Por ello, en la mayoría de las operaciones de formado de metales tiene lugar algún contacto entre asperezas, y el movimiento relativo de las superficies puede resultar en una pérdida de material del dado y/o de la pieza. Para una determinada población y tamaño de partículas de abrasivo, una pieza con superficie rugosa y una película de lubricante gruesa permiten alojar más fácilmente las partículas duras y evitar que produzcan algún daño en comparación con una superficie tersa.

Los efectos de la corrosión química se combinan con otros mecanismos de desgaste para generar desgaste acelerado por la corrosión. Esto sucede cuando se incorpora al lubricante un aditivo agresivo químicamente. Puede atacar no solamente a la pieza sino al dado.

Los ciclos térmicos típicos de muchas operaciones de trabajo en caliente representan esfuerzos adicionales sobre el material del dado e inducen fatiga térmica. Pueden conducir a un desgaste rápido cuando se combinan con mecanismos adhesivos abrasivos y corrosivos.

6.4. Lubricación

La fricción, adherencia y desgaste pueden controlarse mediante el uso de lubricantes. Los lubricantes deben tener cuatro características para que funcionen efectiva-

mente: 1) formar una película continua; 2) que ésta sea lo suficientemente gruesa para separar las superficies de matriz y metal en proceso; 3) extenderse en la misma proporción que el metal para no dejarlo desprotegido, y 4) satisfacer la condición $\tau_c < k$.

Los lubricantes pueden ser líquidos o sólidos. Los lubricantes líquidos más importantes son: a) los derivados de la destilación del petróleo crudo, y b) las suspensiones de aceite en agua; lubricantes sintéticos elaborados a partir de polímeros son utilizados cada vez con más frecuencia. Los lubricantes que forman una película sólida son: algunos óxidos metálicos, metales blandos, polímeros, lubricantes que forman capas reticulares, lubricantes de presión extrema y lubricantes de película límite. La selección del lubricante depende del proceso de conformado.

LUBRICANTES LÍQUIDOS

Lubricantes a base de aceite

Estos lubricantes son muy adecuados para establecer una lubricación hidrodinámica si las condiciones del proceso de conformado lo permiten; para este tipo de lubricación se selecciona, para las condiciones de presión y temperatura a que se realiza la deformación, un lubricante de una viscosidad alta, un ángulo de mordida pequeño (figura 6.1.1), que permita una velocidad relativa alta entre pieza y dado; es conveniente también que el esfuerzo de cedencia del metal en proceso sea bajo.

Para evitar el contacto metal-metal en la interfaz pieza-dado para el caso de que el espesor de película de lubricante se adelgace por las condiciones de proceso, se agregan al aceite aditivos de presión extrema (PE) o de película límite. Los aditivos de PE son compuestos orgánicos que tienen en su molécula átomos de cloro y/o azufre y/o fósforo. Existen varios tipos de compuestos orgánicos que se desempeñan adecuadamente como lubricantes de película límite: ácidos grasos, jabones, alcoholes o aminas. La selección de un aditivo de PE o de película límite para una aplicación específica depende de su reactividad con el metal de la pieza o del dado.

Soluciones acuosas

Las soluciones acuosas tienen una composición general que consiste en agua con aceite disperso en ella mediante emulsificantes; contienen algunos compuestos químicos para proteger a los materiales de pieza y dado contra la corrosión. El agua sirve como transportador de la fase aceite, la que se separa y forma una película sobre la pieza en la interfaz pieza-dado y se desempeña entonces como un lubricante a base de aceite.

LUBRICANTES SÓLIDOS

Óxidos metálicos

Son muy pocos los óxidos metálicos que satisfacen las condiciones de un lubricante; el óxido de hierro formado en caliente protege adecuadamente al acero durante el proceso de laminación en caliente debido a que el óxido es blando y a que el proceso permite, por los contactos repetidos entre la pieza de trabajo y el dado, la restauración de la película de óxido. En la laminación en caliente de cobre o latón, el óxido de cobre se desempeña marginalmente como lubricante. En la extrusión de acero, cobre o latón, sus óxidos no funcionan adecuadamente como lubricantes y es necesario añadir un lubricante. El óxido de aluminio es muy duro y no funciona como lubricante del aluminio o sus aleaciones ni en frío ni en caliente.

Metales blandos

Los metales blandos y dúctiles depositados sobre la pieza de trabajo, son lubricantes muy efectivos. La resistencia de corte al flujo del recubrimiento es la resistencia al corte de la interfaz. Los recubrimientos metálicos deben tener además de una ductilidad alta, buena adherencia al metal base, poca adhesión al dado y buena reactividad con el lubricante. Algunos ejemplos de recubrimientos metálicos son cobre en acero inoxidable y estaño en lámina de acero al carbono.

Polímeros

Algunos polímeros funcionan adecuadamente como lubricantes; se pueden colocar en la interfaz en forma de una lámina delgada o aplicarse con un atomizador como si fuera esmalte. Ejemplos de polímeros que satisfacen las condiciones de un lubricante son: teflón, polietileno y PVC.

Compuestos que forman una capa reticular

El grafito y el bisulfuro de molibdeno constituyen esta familia de lubricantes. Los dos materiales están constituidos de capas de átomos unidos mediante enlaces covalentes, en tanto que las capas están unidas entre sí por enlaces débiles tipo Van der Waals. Un problema en el uso de estos compuestos es lograr un depósito de una película continua y uniforme; una suspensión de polvo de lubricante en agua o en algún solvente o laca se puede aplicar con un atomizador o una brocha.

Lubricantes de presión extrema

Estos lubricantes reaccionan con el óxido del metal o con el metal y forman una película firmemente adherida a la superficie de la pieza con una resistencia al corte inferior al esfuerzo de cedencia en corte del metal de la pieza. El proceso debe reunir algunas condiciones para que el uso de estos lubricantes sea exitoso: temperaturas altas para que la reacción tenga lugar a una velocidad razonable, tiempo de contacto pieza-dado repetido o suficientemente grande para permitir la reacción. La formación de superficies nuevas como resultado de la deformación, aumenta la reactividad de la superficie y hace posible la continuidad de la película de lubricante.

Lubricantes de película límite

Los lubricantes que forman una película límite son compuestos orgánicos polares que se adhieren instantáneamente por atracción electrostática a la superficie del metal o de su óxido, también pueden reaccionar químicamente; son básicamente ácidos grasos que forman una capa superficial alineada con los metales no reactivos y una película de jabón con los metales reactivos. Los ácidos grasos de cadena larga son más adecuados porque su punto de fusión es alto haciendo posible que las moléculas de ácido o jabón permanezcan alineadas y conserven por eso una eficiencia elevada como lubricante.

La tabla 6.1.1 muestra lubricantes empleados para la laminación en frío y en caliente, y los valores típicos del coeficiente de fricción.

Tabla 6.1.1. Lubricantes y coeficientes de fricción típicos en laminación en caliente y en frío (Lange, 1985).

<i>Material</i>	<i>En caliente</i>		<i>En frío</i>	
	<i>Lubricante</i>	<i>Coefficiente de fricción μ</i>	<i>Lubricante</i>	<i>Coefficiente de fricción μ</i>
<i>Acero</i>	Ninguno (suspensión de GR) (AM-AG-EM)	Fricción adhesiva 0.2 0.2	AG AG-EM (AG-AM)	0.03 0.07 0.05
<i>Acero inoxidable base níquel</i>	Ninguno (suspensión de GR) (AM-AG-EM)	Fricción adhesiva 0.2 0.2	PC-AM PC-AG-EM	0.07 0.1
<i>Titanio</i>	Ninguno (suspensión de GR) (AM-AG-EM)	Fricción adhesiva 0.2 0.2	AG-AM AM en la superficie oxidada JB	0.1 0.1 0.1
<i>Cobre, latón</i>	AM-AG-EM	0.2	AG-AM(10-50) AG-AM-EM	0.03 0.07
<i>Aluminio, magnesio</i>	AM-AG-EM	0.2	1-5% AG-AM (5-20) (AM o sintético)	0.03

GR = grafito; AM = aceite mineral; AG = ácidos grasos, alcoholes, aminas y ésteres; EM = emulsión, PC = parafina clorada; JB = jabón.

Ejercicios de final de capítulo**1**

1. Explique cómo se produce la fricción indicando los factores relacionados con la naturaleza de las superficies y con el proceso de formado que aumentan la fricción.
2. Explique las limitaciones de la ley de Coulomb; sugiera una alternativa al coeficiente de fricción.
3. Determine los valores máximos que puede tener μ cuando la presión p adopta los valores de: a) σ_0 ; b) $2\sigma_0$, y c) $3\sigma_0$.
4. ¿Qué características de la microgeometría de una superficie contribuyen en la generación de fricción y también en el establecimiento y sostén de películas de lubricante que disminuyen la fricción?
5. ¿Qué factores relacionados: a) con la naturaleza del material, y b) con las condiciones del proceso de formado, contribuyen a producir la adherencia del metal de la pieza al dado? Indique algunas sugerencias para disminuir o evitar la adherencia.

Ejercicios de final de capítulo (continuación)**2**

6. Indique las causas de que se produzca desgaste de la pieza y del dado. Sugiera algunas medidas para disminuirlo.
7. ¿Qué características deben tener los lubricantes para que funcionen efectivamente?
8. ¿Qué condiciones favorecen el establecimiento de lubricación hidrodinámica?
9. ¿Qué composición tiene una solución acuosa y que función desempeña cada componente?
10. ¿Bajo qué condiciones los óxidos metálicos funcionan adecuadamente como lubricantes? Mencione algún ejemplo en donde el óxido del metal funciona efectivamente y uno en donde no sucede así.
11. Indique algunos ejemplos donde metales blandos son utilizados como lubricantes.
12. Investigue en la bibliografía los materiales poliméricos que son lubricantes efectivos.
13. Explique por qué las sustancias reticulares funcionan como lubricantes.
14. Indique las condiciones que deben existir en un proceso de formado para que los lubricantes de presión extrema funcionen adecuadamente. Investigue en la literatura algunos lubricantes que funcionen en estas condiciones.
15. ¿Qué sustancias se utilizan en la lubricación de película límite? Explique cómo se adhieren a la superficie metálica.

SEGUNDA PARTE

APLICACIONES A PROCESOS DE FORMADO

CAPÍTULO 7

Método del trabajo ideal

7.1. Introducción

Existen varios métodos que utilizan los principios de la teoría de la plasticidad para predecir el esfuerzo, la deformación y rapidez de deformación, energía y potencia para darle forma útil a un metal. Diversos factores concurren durante el formado de una pieza que hacen muy difícil predecir con exactitud las necesidades de esfuerzo para alcanzar la forma deseada; algunos de estos factores son: la fricción entre pieza y matriz, el trabajo redundante, la geometría de la pieza, el endurecimiento por deformación del material, y fenómenos de ablandamiento que se producen en el formado a temperatura elevada, como son la recuperación y la recristalización dinámicas.

Los métodos para calcular el esfuerzo para producir la deformación plástica deseada se pueden clasificar en tres grupos: métodos que predicen un esfuerzo inferior al valor real, métodos que estiman un valor superior al real y aquellos que permiten calcular un valor muy próximo al real, llamados por este motivo *métodos exactos*.

Estos métodos no permiten predecir las propiedades mecánicas del metal deformado, ni la deformación que debe sufrir la pieza antes de fracturarse o las variaciones en el esfuerzo de fricción.

Los métodos por orden de complejidad se clasifican como sigue:

1. *Método del trabajo ideal o método de la energía uniforme.*
2. *Método del equilibrio de fuerzas o del elemento de volumen.*
3. *Método de la disipación de energía.*
4. *Teoría del campo de las líneas de corte máximo.*
5. *Método del límite superior.*
6. *Método del elemento finito.*

El *método del trabajo ideal* permite determinar el esfuerzo o fuerza de deformación a partir de la energía de deformación, sin considerar la fricción o trabajo redundante; por eso el valor de esfuerzo estimado es inferior al real.

Drucker y Greenberg (1952) establecieron lo que se llama *el análisis límite*; éste comprende los teoremas de límite inferior y límite superior.

El teorema del límite inferior establece que, si en cualquier punto de un cuerpo el estado de esfuerzos satisface las condiciones de equilibrio de esfuerzos y las condiciones frontera de esfuerzo, y el esfuerzo no excede los valores de cedencia plástica, entonces el cuerpo no cederá plásticamente. Al campo de esfuerzos que satisface estos criterios se le conoce como un estado de esfuerzos estáticamente admisible. El *método del equilibrio de fuerzas* es de límite inferior.

El teorema del límite superior postula que el esfuerzo para producir la deformación deseada en un metal, calculado al igualar la energía disipada internamente por unidad de tiempo con el trabajo por unidad de tiempo realizado externamente, es igual o superior al esfuerzo exacto necesario para producir la deformación. La validez del teorema está condicionada a que el campo de deformación cumpla todas las condiciones de frontera de desplazamiento y que sea cinemáticamente admisible, es decir, no se deben producir durante la deformación cavidades o traslapes de material. Un campo de deformación que cumpla con estas condiciones se llama un campo de deformación cinemáticamente admisible. Este teorema no toma en cuenta el equilibrio de fuerzas. *El método de la disipación de energía* es uno de límite superior.

Resumiendo, una solución de límite inferior es un valor igual o menor al valor exacto de esfuerzo necesario para producir la deformación plástica deseada. Una solución de límite superior es un valor igual o mayor que el valor exacto de esfuerzo necesario para producir la deformación plástica deseada.

La teoría de las líneas de corte máximo se aplica exclusivamente a condiciones de deformación plana de un material isotrópico, homogéneo y rígido plástico ideal; esta última condición implica que el material no endurece por deformación. En esta clase de deformación, un estado general de esfuerzos se puede descomponer en un esfuerzo hidrostático p , un esfuerzo de corte puro k , donde k es una propiedad del material que permanece constante durante la deformación; la magnitud de p varía de un punto a otro. Por eso, el estado de esfuerzos en un punto del material está completamente determinado si se conocen la magnitud de p y la dirección de k .

Las líneas de esfuerzo cortante máximo tienen la propiedad de que la deformación cortante (γ) tiene un valor máximo, en tanto que la deformación lineal (ϵ) tiene un valor cero, a lo largo de ellas. Las líneas de esfuerzo cortante máximo, llamadas α , β son ortogonales entre sí. La presión hidrostática es perpendicular a las líneas α , β ; los cambios en la magnitud de la presión hidrostática dependen del cambio en la orientación de la línea de corte máximo.

A las líneas de corte máximo, algunos autores las llaman *líneas de deslizamiento*; sin embargo, esta denominación lleva a confusión; confunde especialmente a los ingenieros metalúrgicos, porque estos profesionistas definen como líneas de deslizamiento las que se presentan en la deformación plástica de un metal en los planos y direcciones más compactos.

Las ecuaciones que permiten determinar los esfuerzos para producir la deformación plástica se derivan de las relaciones entre p y k , así como de los esfuerzos que actúan en un cuerpo físico en un sistema de ejes cartesianos xy . La variación de la magnitud de p con el cambio en la orientación de las líneas de corte máximo es determinada mediante las ecuaciones de Hencky.

En el método de las líneas de corte máximo es necesario el trazo de una hodografía, o diagrama de vectores de desplazamiento por unidad de tiempo, para asegurar que el campo de deformación es cinemáticamente admisible y para predecir la trayectoria de las partículas de material a medida que avanzan en la zona de defor-

mación. Una herramienta de gran utilidad en el trazo de la hodografía son las ecuaciones de Geiringer.

El teorema de los principios extremos es debido a W. Prager y P.G. Hodge, quienes lo presentaron en su libro *Theory of Perfect Plastic Solids*, en 1951; establece que de todos los campos de velocidad de deformación cinemáticamente admisibles, el campo real que permite el establecimiento de una ecuación entre la potencia real suministrada externamente y la suma de las potencias consumida en la deformación, las pérdidas de potencia por discontinuidades de velocidad y fricción, más la potencia utilizada para vencer la potencia anterior o posterior, limita el valor de la potencia consumida en el proceso de deformación al valor de la potencia suministrada externamente:

$$j^* = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0 \int_V \sqrt{1/2 \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}} dV + \int_S \tau |u| ds - \int_T T_i \dot{V}_i ds \quad (7.1.1)$$

La ecuación 7.1.1 significa que la suma de potencias calculadas del segundo miembro de la ecuación nunca es menor a la potencia real proporcionada externamente j^* .

El estudio del *método del elemento finito* requiere un entrenamiento en la matemática del elemento finito, por esta razón sale del ámbito de este texto.

7.2. Método del trabajo ideal

Este método tiene como fundamento que la energía consumida o trabajo desarrollado al aplicar una carga externa a un metal para darle la forma deseada es igual a la energía de deformación. El método no toma en cuenta el trabajo empleado para vencer la fricción o para realizar trabajo redundante debido a distorsión, es decir, la deformación no uniforme, de aquí el nombre de método del trabajo ideal. El valor de carga o esfuerzo determinados mediante este procedimiento es inferior al valor real necesario para darle la forma deseada al metal. Este método es uno de límite inferior. El esfuerzo o la carga de deformación son obtenidos a partir de la igualdad del trabajo externo con la energía ideal de deformación.

La energía de deformación ideal se obtiene realizando un ensayo mecánico que produce, mediante una deformación uniforme y una fricción cero o próxima a cero, la forma que se generaría mediante un proceso industrial. El problema ahora es encontrar un ensayo mecánico que produzca la misma forma obtenida mediante un proceso industrial específico.

Se presentan a continuación, para la generación de geometrías simples, varios ejemplos de pares ensayo mecánico-proceso industrial, que satisfacen esta condición:

- 1) Proceso de estirado–ensayo de tensión.
- 2) Proceso de extrusión–ensayo de tensión.
- 3) Forja–ensayo de compresión unidireccional sin fricción.
- 4) Procesos de forja y laminación–ensayo de compresión en deformación plana.

7.2.1. Proceso de estirado versus ensayo de tensión

En el proceso de estirado, se reduce la sección transversal de un alambre de sección transversal circular obligándolo a pasar a través de una matriz o dado de carburo de tungsteno o diamante, mediante la aplicación de una fuerza de tensión, P_t (figura 7.2.1).

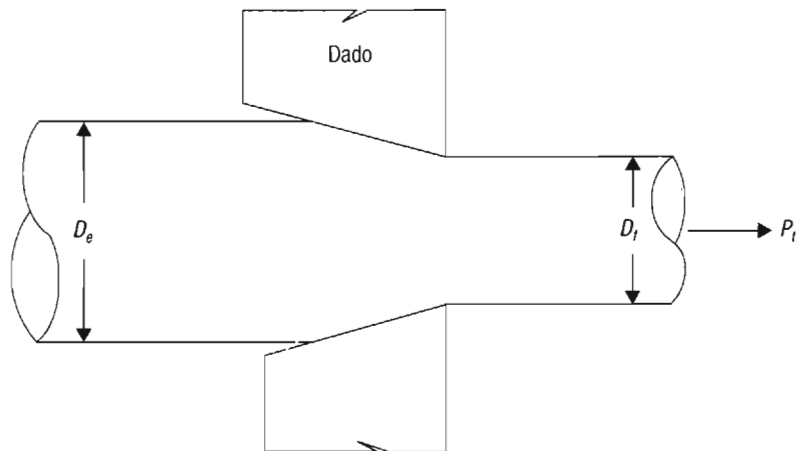


Figura 7.2.1. Estirado de un alambre de sección circular (Hosford y Caddell, 1983).

La misma reducción de sección se puede realizar mediante un ensayo de tensión del alambre, presumiendo condiciones de fricción cero y deformación uniforme. Se demostró en la sección 3.2.5 que, en el ensayo de tensión, el área bajo la curva esfuerzo real *versus* deformación real representa la cantidad de trabajo realizado para producir, por unidad de volumen de material, esta cantidad de deformación; equivalentemente, es la energía absorbida por el material por unidad de volumen deformado, una cantidad $\varepsilon \leq \varepsilon_u$. En lenguaje matemático:

$$w_i = \int_0^{\varepsilon} \sigma d\varepsilon \quad (7.2.1)$$

La ecuación 7.2.1 es aplicable solamente cuando la deformación ε es uniforme; para poder determinar w_i , σ debe ser una función conocida de ε o ser independiente de la deformación, como es el caso de un material rígido plástico ideal. Este último comportamiento es similar al que se presenta en la deformación en caliente o en la deformación en frío de material que ha sido severamente deformado en frío antes de volver a ser nuevamente deformado en frío.

Suponiendo que el material obedece a la ecuación de endurecimiento por deformación:

$$\sigma = K\varepsilon^n \Big|_{\varepsilon, T} \quad (4.2.1)$$

En esta ecuación, ε no tiene unidades o bien tiene unidades de longitud/longitud; n no tiene unidades, y por tanto K tiene unidades de esfuerzo. Aplicando la ecuación 4.2.1 en 7.2.1 e integrando se obtiene la expresión para el trabajo ideal:

$$w_i = \frac{K\varepsilon^{n+1}}{n+1} \quad (7.2.2)$$

A partir de esta ecuación se puede determinar un esfuerzo de cedencia promedio. La figura 7.2.2 ilustra en una gráfica σ *versus* ε , la relación entre w_i y $\bar{\sigma}_0$. En esta gráfica se observa un rectángulo de un área igual al área medida debajo de la curva σ *versus* ε , delimitada por los ejes coordenados, la línea vertical levantada desde ε , la

deformación correspondiente a $P_{\text{máx}}$ y la línea horizontal punteada. La altura del rectángulo es el esfuerzo de cedencia promedio, $\bar{\sigma}_0$.

$$\bar{\sigma}_0 = \frac{w_i}{\varepsilon} = \frac{K\varepsilon^n}{n+1} \quad (7.2.3)$$

Entonces el trabajo de tensión y por tanto el trabajo de estirado ideal se pueden estimar por la expresión:

$$w_i = \bar{\sigma}_0 \varepsilon \quad (7.2.4)$$

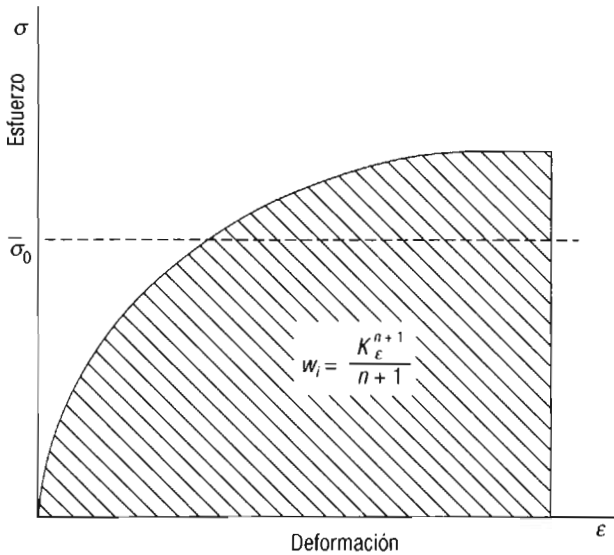


Figura 7.2.2. Representación del trabajo ideal y del esfuerzo de cedencia promedio.

En el caso de un material rígido plástico ideal, σ es constante, por lo que se puede sacar del operador de integración en 7.2.1; para esta clase de material, el trabajo ideal, y, por eso el esfuerzo ideal de estirado, está mejor representado por la ecuación:

$$w_i = \sigma_0 \varepsilon \quad (7.2.5)$$

donde σ_0 es el esfuerzo constante bajo el cual se produce la deformación ε . Las ecuaciones 7.2.4 y 7.2.5 indican que el trabajo de estirado es obtenido multiplicando la resistencia elástica del material a ser deformado por el grado de deformación.

El esfuerzo real empleado en el trefilado de una varilla o alambre, σ_p , se puede determinar midiendo la fuerza necesaria para producir la reducción deseada, como se representa en la figura 7.2.1, y dividiéndola entre el área de la sección transversal a la salida del dado:

$$\sigma_t = \frac{P_t}{A_s} \quad (7.2.6)$$

La fuerza medida incluye: la fuerza utilizada para producir la deformación del material, la fuerza necesaria para vencer la fricción y la fuerza consumida en la deformación no uniforme o distorsión.

Por supuesto el esfuerzo de trefilado determinado a partir de los valores medidos de fuerza y área de la sección transversal del alambre, es superior al esfuerzo calculado a partir del trabajo ideal:

$$\sigma_t > \sigma_0, \text{ para un material plástico ideal, o bien}$$

$$\sigma_t > \bar{\sigma}_0, \text{ para un material que endurece por deformación.}$$

7.2.2. Proceso de extrusión versus ensayo de tensión

En el proceso de extrusión, el material es comprimido en una cámara de extrusión para reducir la sección transversal del material; por razones de sencillez geométrica, se supone aquí que las secciones transversales del material antes de extrusión y del producto son circulares (figura 7.2.3).

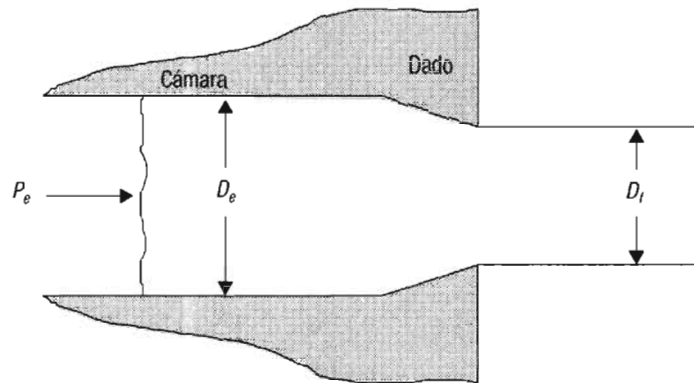


Figura 7.2.3. Extrusión a través de un orificio circular (Hosford y Caddell, 1983).

Después de un periodo de ajuste entre la cámara y el material, la extrusión tiene lugar a un valor de presión aproximadamente constante, p_e . La figura 7.2.4 ilustra una curva presión *versus* desplazamiento del ariete; la meseta de esta curva corresponde a la condición de deformación a presión constante.

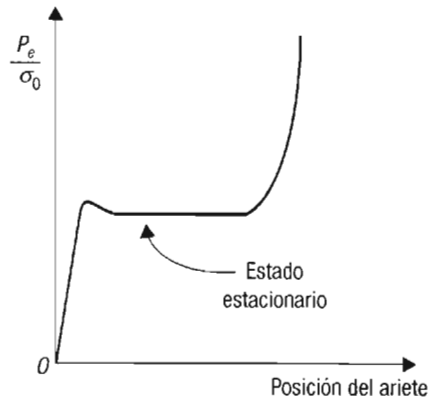


Figura 7.2.4. Meseta de la curva que corresponde a la etapa estacionaria de la extrusión (Avitzur, 1968).

La presión de extrusión ideal promedio se determina, para un material que endurece potencialmente con la deformación, mediante la ecuación 7.2.3 utilizando el símbolo de presión.

$$p_i = \frac{K\varepsilon^n}{n+1} \quad (7.2.7)$$

La presión de extrusión ideal, p_i , para un material rígido plástico ideal puede obtenerse despejando σ_0 de la ecuación 7.2.5, entonces: $p_i = \sigma_0$.

La fuerza de extrusión ideal es obtenida mediante la expresión:

$$P_i = p_i A_e \quad (7.2.8)$$

Donde A_e es el área de la sección transversal del material antes de entrar al dado.

La presión real empleada en la extrusión, p_e , se puede determinar midiendo la fuerza necesaria para producir la reducción deseada, como se representa en la figura 7.2.3, y dividiéndola entre el área de la sección transversal a la entrada del dado:

$$p_e = \frac{P_e}{A_e} \quad (7.2.9)$$

Como en el caso de trefilado, la fuerza medida incluye: la fuerza utilizada para producir la reducción del material, la fuerza necesaria para vencer la fricción y la fuerza consumida en la distorsión.

La presión de extrusión determinada a partir de los valores medidos de fuerza y área de la sección transversal del alambre, es superior al esfuerzo calculado a partir del trabajo ideal:

$p_e > p_i = \sigma_0$, para un material rígido plástico ideal, o bien,

$p_e > p_i = \bar{\sigma}_0$, para un material que endurece por deformación.

7.2.3. Forja versus ensayo de compresión unidireccional homogénea, sin fricción

La carga necesaria para forjar una pieza de geometría compleja se puede determinar considerando que componen la pieza secciones cilíndricas y planas (placa). Se examina primero la compresión homogénea, sin fricción, de un espécimen cilíndrico, como se ilustra en la figura 3.3.1c. Más adelante, en la sección 7.2.4, se estudia la compresión de una placa.

Se aplican las mismas ecuaciones utilizadas en los dos ensayos anteriores, para determinar la energía ideal por unidad de volumen a partir de este valor se puede calcular la presión de compresión ideal, $p_i = \sigma_0$ (ecuación 7.2.5), para un material rígido plástico ideal; o bien, ecuación 7.2.7, $p_i = \bar{\sigma}_0$, para un material que endurece potencialmente con la deformación.

La altura disminuye en el proceso de compresión; por eso la ecuación para calcular ε se modifica a fin de que resulte un valor positivo:

$$\varepsilon = \ln \frac{h_0}{h_f} \quad (7.2.10)$$

h_0 y h_f representan las alturas inicial y final del cilindro.

La carga de compresión ideal es determinada mediante la ecuación:

$$P_i = p_i A_f \quad (7.2.11)$$

El área de contacto aumenta al comprimirse el cilindro, por eso la carga es determinada utilizando el área final de la sección transversal.

La energía ideal total de compresión se determina haciendo uso de la ecuación:

$$W_i = w_i V \quad (7.2.12)$$

donde w_i es la energía ideal por unidad de volumen y V es el volumen total del cilindro.

La presión de compresión verdadera, p_c , se puede determinar midiendo la fuerza necesaria para producir la reducción de altura deseada, y dividiéndola entre el área de la sección transversal al final de la compresión:

$$p_c = \frac{P_c}{A_f} \quad (7.2.13)$$

Como en los casos anteriores, la fuerza medida incluye: la fuerza utilizada para producir la reducción de altura del material, la fuerza necesaria para vencer la fricción y la fuerza consumida en la distorsión.

La presión de compresión real determinada a partir de los valores medidos de fuerza y área de la sección transversal del cilindro, es superior al esfuerzo calculado a partir del trabajo ideal:

$$\begin{aligned} p_c &> p_i = \sigma_0, \text{ para un material rígido plástico ideal, o bien,} \\ p_c &> p_i = \bar{\sigma}_0, \text{ para un material que endurece por deformación.} \end{aligned}$$

7.2.4. *Procesos de forja y laminación de formas planas versus ensayo de compresión en deformación plana*

El estado de esfuerzos que ocurre en el ensayo de compresión con deformación plana, es semejante al que se produce en procesos como la laminación de formas planas, tales como placas y láminas, y la forja de placas; en estos casos la deformación es restringida en la dirección del ancho. El esfuerzo de cedencia promedio determinado en este ensayo, $\bar{\sigma}_{0dp}$, se utiliza para calcular las cargas de laminación y forja de placas, el que, como se estableció en la sección 3.3.2 de acuerdo con el criterio de cedencia de von Mises, tiene un valor 15.5% superior al esfuerzo en compresión unidireccional; expresado en lenguaje matemático:

$$\bar{\sigma}_{0dp} = \frac{2}{\sqrt{3}} \bar{\sigma}_0 \quad (7.2.14)$$

En esta ecuación, $\bar{\sigma}_0$ es el esfuerzo de cedencia promedio en compresión unidireccional, valor que se determina mediante la ecuación 7.2.3. El valor ideal de la presión en deformación plana es obtenido mediante la ecuación:

$$\bar{\sigma}_{0dp} = p_{0dp} = \frac{2}{\sqrt{3}} \bar{\sigma}_0 = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{K \varepsilon^n}{n+1} \quad (7.2.15)$$

La figura 3.3.2 presenta un esquema de las herramientas superior e inferior y la geometría del espécimen utilizados en el ensayo de compresión con deformación plana. Con lubricación apropiada, la compresión se puede realizar prácticamente con fricción cero.

La presión ideal en deformación plana es igual a la presión en deformación plana; conforme a la figura 3.3.2, se puede obtener mediante la ecuación:

$$\sigma_{dp} = p_{dp} = \frac{P}{wb} \quad (7.2.16)$$

donde P es la carga aplicada en cualquier instante durante el ensayo. El producto wb es el área de contacto herramienta-espécimen, área que permanece constante durante el ensayo.

La deformación instantánea en deformación plana se calcula mediante la expresión:

$$\varepsilon_{dp} = \ln \frac{t_0}{t} \quad (7.2.17)$$

donde t_0 es el espesor de la placa antes de la deformación y t es el espesor de la placa en cualquier instante durante el ensayo.

Con los valores de esfuerzo y deformación que se obtienen de las ecuaciones 7.2.16 y 7.2.17, se puede trazar una gráfica p_{dp} versus ε_{dp} . A partir de esta gráfica se puede determinar el valor del esfuerzo de cedencia promedio $\bar{\sigma}_{0dp}$ de la misma manera como se obtuvo el esfuerzo de cedencia promedio en tensión o compresión unidireccional (figura 7.2.2).

La energía ideal de deformación por unidad de volumen es determinada mediante la ecuación:

$$w_i = \bar{\sigma}_{0dp} \varepsilon_{dp} \quad (7.2.18)$$

En el caso de la deformación plana de placas, la carga ideal es determinada mediante la ecuación:

$$P_{idp} = \bar{\sigma}_{0dp} A_c = p_{dp} A_c \quad (7.2.19)$$

donde A_c es el área de contacto entre herramienta de compresión y placa, la cual es constante.

En el proceso de laminación, el área de la superficie de contacto en condiciones de deformación plana es bL_p , donde b es el ancho de la lámina y L_p es la longitud proyectada del arco de contacto. L_p es definida en la sección 8.5, del capítulo 8, y se determina mediante la ecuación 8.5.2:

$$L_p = \left[R(h_0 - h_f) \right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{R\Delta h} \quad (8.5.2)$$

La carga de laminación se determina mediante la ecuación:

$$P = p_{dp} b L_p = p_{dp} b \sqrt{R(h_0 - h_f)} \quad (7.2.20)$$

7.3. Relación entre los valores ideales y los valores reales de esfuerzo, carga y trabajo

El reto ahora es la determinación de los valores reales de esfuerzo, carga y trabajo a partir de los valores ideales. Se observa que se está designando como reales a los valores medidos en el proceso industrial; se debe tener cuidado de no confundir estos valores experimentales con los valores de esfuerzo real, σ y deformación real, ϵ , calculados a partir de los valores instantáneos de carga y alargamiento o reducción de área. El trabajo real, w_R , para producir la deformación de un material metálico, tiene tres componentes: el trabajo ideal de deformación, w_i ; el trabajo que se debe realizar para vencer la fricción en la superficie de contacto entre el metal en proceso de deformación y la herramienta empleada para producir la deformación, w_f ; y finalmente el trabajo redundante, w_r , que se emplea para producir una distorsión interna en exceso de la necesaria para producir la forma deseada. En la figura 7.3.1 se comparan dos cilindros comprimidos en forma homogénea (a) y en forma no homogénea (b).

El experimento de compresión, correspondiente a la figura 7.3.1, se realizó de la siguiente manera: dos cilindros fueron cortados longitudinalmente por la mitad; sobre cada superficie de corte se trazó una cuadrícula; se unieron las dos mitades y se comprimieron; uno de los cilindros fue lubricado cuidadosamente, cilindro (a); en tanto que el segundo cilindro se comprimió sin lubricación, cilindro (b).

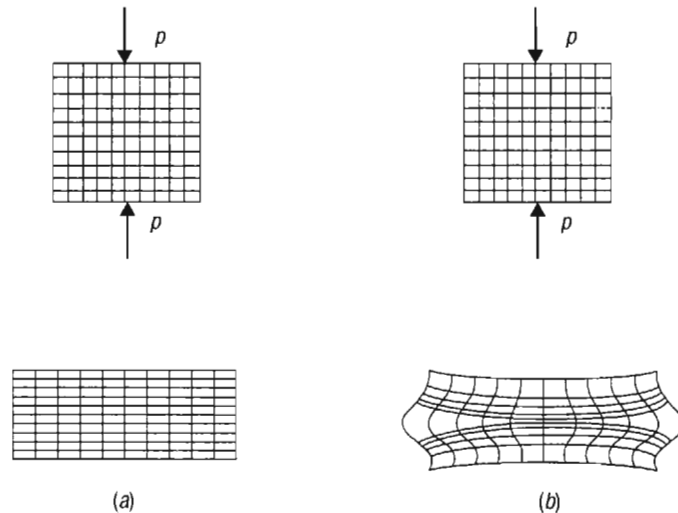


Figura 7.3.1. Cilindros con compresión: a) homogénea, y b) no homogénea.

La distorsión que sufrieron las líneas de la cuadrícula en el cilindro b es evidente. El trabajo real consumido en la compresión de este último cilindro fue mayor que el trabajo empleado en la compresión del cilindro a; esto se debe al trabajo de fricción y al trabajo redundante. Expresada esta situación en términos de trabajo por unidad de volumen, resulta la ecuación:

$$w_R = w_i + w_f + w_r \quad (7.3.1)$$

No es posible separar las componentes de trabajo de fricción y de trabajo redundante, ya que ambas son interdependientes. Es una práctica generalizada utilizar el concepto de eficiencia, que es la relación entre w_i y w_R , por eso:

$$\eta = \frac{w_i}{w_R} \quad (7.3.2)$$

La relación 7.3.2 permite calcular el trabajo real a partir del trabajo ideal, si es conocida la eficiencia.

El trabajo real por unidad de volumen se obtiene a partir de 7.3.2:

$$w_R = \frac{w_i}{\eta} \quad (7.3.3)$$

Los valores de carga real y esfuerzo real son obtenidos igualmente dividiendo los valores ideales correspondientes entre η . La eficiencia varía dependiendo del tipo de proceso de deformación, de la rugosidad de las superficies de contacto metal en proceso-matriz, de la eficiencia de la lubricación, del grado de reducción en cada paso, y de la geometría de la matriz. En general, la eficiencia, η , oscila entre 0.5 y 0.65.

A partir de los valores promedio de carga o fuerza real de deformación se puede determinar el trabajo real de deformación, W_{TR} , mediante la ecuación:

$$W_{TR} = \bar{P}\Delta h \quad (7.3.4)$$

donde Δh es la distancia recorrida por la herramienta de compresión después de hacer contacto con el material que está en proceso de deformación.

7.4. Ejercicios tipo

Ejercicio 7.4.1

1

Se planea trefilar en un solo paso un alambre recocido de acero medio carbono de un diámetro inicial de 6.35 mm a un diámetro final de 5.68 mm. El material endurece por deformación en frío según la expresión $\sigma = 960\varepsilon^{0.25}$ MPa. Determine: a) el esfuerzo real de trefilado considerando el esfuerzo de cedencia promedio en sus cálculos, y b) la fuerza real de trefilado. Suponga una eficiencia en la operación de 0.6.

Respuestas:

El alambre va a deformarse en una cantidad:

$$\varepsilon = 2 \ln \frac{6.35}{5.68} = 0.2229$$

El esfuerzo de cedencia promedio es obtenido de la ecuación 7.2.3.

$$\bar{\sigma}_0 = \frac{K\varepsilon^n}{(n+1)} = \frac{960(0.2229)^{0.25}}{(0.25+1)} = 528 \text{ MPa}$$

Ejercicio 7.4.1 (continuación)

2

Para un material que endurece por deformación, este valor es también igual al esfuerzo ideal de trefilado

a) El esfuerzo real de trefilado es

$$\bar{\sigma}_{ir} = \frac{\bar{\sigma}_0}{\eta} = \frac{528}{0.6} = 880 \text{ MPa} = 880 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

b) La fuerza real de trefilado es

$$P_{ir} = \bar{\sigma}_{ir} A_f = 880 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \left(\frac{\pi}{4} 5.68^2 \right) \text{mm}^2 = 22.3 \text{ kN}$$

Ejercicio 7.4.2

1

Se fabrica por extrusión una varilla de 6.35 mm de diámetro a partir de una barra de 9.5 mm de diámetro, de una aleación de cobre que endurece por deformación conforme a la ecuación $\sigma = 320\varepsilon^{0.5}$ MPa. Determine:

a) el esfuerzo real de extrusión, considerando el esfuerzo de cedencia promedio en sus cálculos, y b) la fuerza real de extrusión. Suponga una eficiencia de 0.6 y que la extrusión se realiza en estado estacionario.

Respuestas:

La deformación real es

$$\varepsilon = 2 \ln \frac{9.52}{6.35} = 0.8099$$

El esfuerzo de cedencia promedio es obtenido de la ecuación 7.2.4.

$$\bar{\sigma}_0 = \frac{K\varepsilon^n}{(n+1)} = \frac{320(0.8099)^{0.5}}{(0.5+1)} = 192 \text{ MPa} = 192 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

La presión ideal de extrusión es igual al esfuerzo de cedencia promedio:

$$p_i = 192 \text{ MPa}$$

a) La presión real de extrusión es

$$p_{er} = \frac{p_i}{\eta} = \frac{192}{0.6} = 320 \text{ MPa} = 320 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

b) La fuerza verdadera de extrusión es

$$P_{er} = p_{er} A_e = 320 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \left(\frac{\pi}{4} 9.5^2 \right) \text{mm}^2 = 22.7 \text{ kN}$$

Ejercicio 7.4.3

1

Se va a forjar en frío un cilindro recocido de una aleación de acero 4340, de 40 mm de diámetro y 50 mm de altura, con una prensa de forja. Determine la carga real necesaria para reducir el cilindro hasta la mitad de su altura con base en el esfuerzo de cedencia promedio, si el material endurece por deformación conforme a la expresión $\sigma = 640\varepsilon^{0.15}$ MPa. Suponga una eficiencia del proceso de 0.55 por pérdidas en fricción y trabajo redundante.

Respuesta:

La deformación real es

$$\varepsilon = \ln \frac{h_0}{h_f} = \ln \frac{50}{25} = 0.6931$$

El esfuerzo de cedencia promedio es

$$\bar{\sigma}_0 = \frac{640(0.6931)^{0.15}}{(0.15+1)} = 527 \text{ MPa}$$

La presión ideal para efectuar la compresión es igual al esfuerzo de cedencia promedio.

$$p_i = 527 \text{ MPa}$$

La presión real para la compresión es

$$p_{cr} = \frac{p_i}{\eta} = \frac{527}{0.55} = 958 \text{ MPa} = 958 \text{ N/mm}^2$$

Para determinar la carga de forja es necesario calcular primero A_f . Por la propiedad de volumen constante:

$$A_f = A_0 \frac{h_0}{h_f} = \left(\frac{\pi}{4} 40^2 \right) \frac{50}{25} = 2512 \text{ mm}^2$$

La carga real de forja es entonces

$$P_r = 958(2512) = 2.4 \text{ MN}$$

Ejercicio 7.4.4

1

Se va a forjar, a la temperatura ambiente en una prensa hidráulica, una placa de aluminio de pureza comercial 1100-0 de dimensiones iniciales 100×100 mm y de un espesor de 50 mm, de manera que una de las dimensiones de 100 mm permanece constante. Si se va a reducir en un paso 50% de espesor, calcule: a) la carga real que es necesario aplicar al final de la forja, y b) la energía total de deformación correspondiente. Se realizaron ensayos de compresión unidireccional y se encontró que el material endurece por deformación

Ejercicio 7.4.4 (continuación)

2

conforme a la ecuación $\sigma = 200\varepsilon^{0.352}$ MPa. Suponga que la eficiencia del proceso es 0.7 en razón de la fricción y la deformación no homogénea. Utilice el esfuerzo de cedencia promedio en sus estimaciones.

Respuestas:

La deformación que experimenta el material es

$$\varepsilon = \ln \frac{t_0}{t} = \ln \frac{50}{25} = 0.6931$$

El esfuerzo de cedencia promedio en deformación plana es

$$\bar{\sigma}_{0dp} = p_{0dp} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{K\varepsilon^n}{(n+1)} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{200(0.6931)^{0.352}}{(0.352+1)} = 150 \text{ MPa}$$

La presión real de forja en deformación plana es

$$p_{fr} = \frac{p_{0dp}}{\eta} = \frac{150}{0.7} = 214.3 \text{ MPa}$$

A partir de la propiedad de volumen constante:

$$A_f = 100(200) = 20\,000 \text{ mm}^2$$

a) La carga real promedio de forja es

$$\bar{P}_r = 214.3(20\,000) = 4.29 \text{ MN}$$

b) Energía real total de forja:

$$W_{fr} = \bar{P} \Delta t = 4.29(10)^6(0.025) = 107 \text{ kJ}$$

Ejercicio 7.4.5

1

Calcule la fuerza de laminación para reducir en frío una placa de latón 85Cu15Zn, de 1 m de ancho, de un espesor inicial de 2 mm a un espesor final de 1.6 mm. Los rodillos son de acero, de un diámetro de 300 mm. Mediante ensayos de compresión unidireccional, se determinó que el material endurece por deformación conforme a la ecuación $\sigma = 635\varepsilon^{0.397}$ MPa. Suponga una eficiencia de 60%. Utilice el esfuerzo de cedencia promedio en deformación plana.

Respuestas:

La deformación real a que se sujeta el material es

$$\varepsilon = \ln \frac{2}{1.6} = 0.2231$$

Ejercicio 7.4.5 (continuación)

2

La presión de laminación es calculada aplicando valores en la ecuación 7.2.15.

$$p_{0dp} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{K\varepsilon^n}{(n+1)} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{635(0.2231)^{0.397}}{(0.397+1)} = 289 \text{ MPa}$$

La presión real de laminación:

$$p_r = \frac{p_{0dp}}{\eta} = \frac{289}{0.6} = 481.7 \text{ MPa} = 481.7 \text{ N/mm}^2$$

Aplicando valores en la ecuación 7.2.20:

$$P = 481.7(1000)\sqrt{150(2-1.6)} = 3.73 \text{ MN}$$

Ejercicios de final de capítulo

1

1. Un alambre de titanio recocido, de alta pureza, se va a reducir por trefilado en un solo paso de un diámetro inicial de 3.2 mm a un diámetro final de 2.86 mm. El material endurece por deformación en frío según la expresión $\sigma = 404\varepsilon^{0.416}$ MPa. Determine: a) el esfuerzo real de trefilado, y b) la fuerza de trefilado. Suponga una eficiencia de 0.55.

Respuestas:

$$a) \sigma_r = 278.5 \text{ MPa}; \quad b) F_t = 1788 \text{ N}$$

2. Se fabrica en caliente, por extrusión libre, una varilla de aluminio 6061 de 9.5 mm de diámetro a partir de una barra de 101.6 mm de diámetro; el material a esta temperatura exhibe un comportamiento similar a un sólido rígido, plástica ideal, con un esfuerzo de cedencia constante e igual a 60 MPa. Determine: a) la presión real de extrusión, y b) la fuerza real de extrusión. Suponga una eficiencia de 0.5 y que la extrusión se realiza en estado estacionario.

Respuestas:

$$a) P_{er} = 120 \text{ MPa}; \quad b) P_{er} = 972.4 \text{ kN}$$

3. Se va a forjar en frío un cilindro de una aleación de aluminio 6061-6T de 30 mm de diámetro y 40 mm de altura con una prensa de forja. Determine: a) la presión real necesaria para reducir el cilindro hasta la mitad de su altura con base en el esfuerzo de cedencia promedio si el material endurece por deformación conforme a la expresión $\sigma = 425\varepsilon^{0.085}$ MPa, y también b) la carga real necesaria para hacer la reducción. Suponga una eficiencia del proceso de 0.65.

Respuestas:

$$a) P_{fr} = 405 \text{ MPa}; \quad b) P_{fr} = 572.3 \text{ kN}$$

Ejercicios de final de capítulo (continuación)

2

4. Se va a forjar en caliente, en una prensa hidráulica, una placa de acero inoxidable austenítico de un ancho de 100 mm, una longitud de 150 mm y un espesor de 50 mm, de manera que el ancho permanezca constante. Si se va a reducir en un paso hasta un espesor de 40 mm, calcule: a) la carga real que es necesario aplicar al final de la forja, así como b) la energía total de deformación correspondiente.

En ensayos anteriores de compresión en deformación plana, se encontró que el material presenta a la temperatura de forja un esfuerzo de cedencia promedio en deformación plana de 80 MPa. Suponga que la eficiencia del proceso es 0.6.

Respuestas:

$$a) P_{fr} = 2.5 \text{ MN}; \quad b) W_{Tr} = 25 \text{ kJ}$$

5. Calcule la fuerza de laminación para reducir en caliente una placa de acero AISI 1018, de 80 cm de ancho, de un espesor inicial de 5 mm a un espesor final de 3.5 mm. Los rodillos son de acero de un diámetro de 350 mm. Mediante ensayos de compresión en deformación plana, se determinó que el material tiene un esfuerzo de cedencia promedio en deformación plana de 150 MPa. Suponga una eficiencia de 60%.

Respuesta:

$$P = 3.24 \text{ MN}$$

CAPÍTULO 8

Método del equilibrio de fuerzas

Este método es uno de límite inferior. Se supone que el metal se deforma uniformemente, es decir, no toma en consideración el trabajo redundante. Por eso una red de cuadrados localizada en la zona de deformación se transforma en una red de elementos rectangulares, después de la deformación. Se ilustra en este capítulo el método mediante aplicaciones a varios procesos de formado de metales.

8.1. Forja de un cilindro

Se hacen varias consideraciones para derivar la ecuación con el fin de calcular la presión de deformación: existe fricción en la interfaz del cilindro y la herramienta de compresión; a pesar de esta fricción, el disco se deforma uniformemente y no toma forma de barril, es decir, no hay distorsión; además, dado que el espesor es lo suficientemente pequeño, el esfuerzo compresivo σ_z se mantiene constante en todo el espesor. La figura 3.3.1 muestra un cilindro con deformación uniforme y otro con deformación no uniforme.

Al comprimir el cilindro se origina una resistencia al flujo lateral del metal debida a fricción. Esta resistencia τ crece desde ambos bordes hacia el centro en las interfaces superior e inferior del cilindro, por lo tanto es necesario aplicar una presión mayor para vencerla. Por comodidad se emplearán coordenadas cilíndricas: r , θ , z .

Tomando el equilibrio de fuerzas sobre un elemento de volumen del cilindro (figura 8.1.1), tendremos lo siguiente:

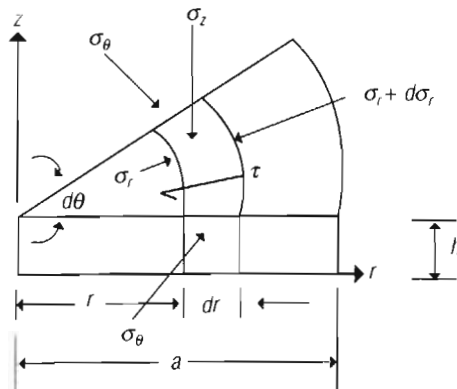


Figura 8.1.1. Compresión unidireccional de un disco (Dieter, 1988).

FUERZAS EN LA DIRECCIÓN RADIAL

Sobre las caras que cortan al eje r en r y en $(r + dr)$ están actuando esfuerzos σ_r , $(\sigma_r + d\sigma_r)$; el incremento $d\sigma_r$ se debe a la fricción. Estos esfuerzos originan las siguientes fuerzas:

$$\sigma_r h r d\theta$$

$$(\sigma_r + d\sigma_r) h (r + dr)d\theta$$

Los dos esfuerzos σ_θ , que están actuando sobre las caras $h dr$, al proyectarse en la dirección r , producen dos fuerzas de la misma magnitud y dirección.

$$2\sigma_\theta \text{sen}\left(\frac{d\theta}{2}\right) h dr$$

Los dos esfuerzos τ que actúan sobre la interfaz superior e inferior producen la fuerza:

$$2\tau r d\theta dr$$

La suma de fuerzas en la dirección radial es cero. Se toman como positivas las fuerzas que se alejan del centro, como negativas las que se aproximan al centro.

La ecuación de equilibrio de fuerzas es:

$$\sigma_r h r d\theta - (\sigma_r + d\sigma_r) h (r + dr) d\theta + 2\sigma_\theta h dr \text{sen}\left(\frac{d\theta}{2}\right) - 2\tau r d\theta dr = 0 \quad (i)$$

Desarrollando:

$$\sigma_r h r d\theta - \sigma_r h r d\theta - \sigma_r h dr d\theta - h d\sigma_r r d\theta - h d\sigma_r dr d\theta + 2\sigma_\theta h dr \text{sen}\left(\frac{d\theta}{2}\right) - 2\tau r d\theta dr = 0$$

Haciendo las siguientes simplificaciones: para ángulos pequeños $\text{sen}(d\theta/2) = d\theta/2$; eliminando los primeros términos por ser iguales y de signo contrario, dividiendo todos los términos entre $d\theta$, eliminando el quinto término por contener el producto de dos diferenciales (después de dividir entre $d\theta$), lo que hace su valor despreciable; eliminando en el sexto término el número 2 que divide y multiplica, y multiplicando por (-1) los términos remanentes,

$$\sigma_r h dr + h r d\sigma_r - \sigma_\theta h dr + 2\tau r dr = 0 \quad (ii)$$

Se puede simplificar aún más la ecuación ii, teniendo en cuenta lo siguiente:

1. Para que el cilindro continúe siendo simétrico con respecto a su eje vertical, es necesario que

$$d\varepsilon_r = d\varepsilon_\theta \quad (iii)$$

2. De la ecuación de Levy-Mises, suponiendo que los ejes coordenados son ejes principales, es decir, haciendo $r = 1$; $\theta = 2$; $z = 3$, en las ecuaciones 5.7.5:

$$d\varepsilon_r = \frac{2}{3}d\lambda \left[\sigma_r - \frac{1}{2}(\sigma_\theta + \sigma_z) \right]$$

$$d\varepsilon_\theta = \frac{2}{3}d\lambda \left[\sigma_\theta - \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_z) \right]$$

de donde

$$\sigma_r - \frac{1}{2}(\sigma_\theta + \sigma_z) = \sigma_\theta - \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_z)$$

$$\sigma_r - \frac{1}{2}\sigma_\theta - \frac{1}{2}\sigma_z = \sigma_\theta - \frac{1}{2}\sigma_r - \frac{1}{2}\sigma_z$$

$$\frac{3}{2}\sigma_r = \frac{3}{2}\sigma_\theta$$

$$\sigma_r = \sigma_\theta \quad (\text{iv})$$

Aplicando iv en ii:

$$\sigma_r h dr + h d\sigma_r - \sigma_r h dr + 2\tau r dr = 0$$

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{2\tau}{h} = 0 \quad (\text{v})$$

FRICCIÓN GOBERNADA POR EL COEFICIENTE DE FRICCIÓN

De la ley de Coulomb: $\tau = \mu p = \mu \sigma_z$, la ecuación v se transforma en:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{2\mu\sigma_z}{h} = 0 \quad (\text{vi})$$

Para integrar la ecuación vi es necesario hacer algunas modificaciones. Se supuso anteriormente que r, θ, z son direcciones principales. Aplicando la ecuación iv en la ecuación del criterio de Von Mises, se obtiene la siguiente relación:

$$2\sigma_0^2 = (\sigma_r - \sigma_r)^2 + (\sigma_r - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2$$

$$2\sigma_0^2 = 2(\sigma_r - \sigma_z)^2$$

$$\sigma_0 = \sigma_r - \sigma_z \quad (\text{vii})$$

Si se define como positiva la presión normal p a la cara de contacto, entonces:

$$p = -\sigma_z \quad (\text{viii})$$

Utilizando viii en vii,

$$\sigma_0 = \sigma_r + p$$

por tanto

$$d\sigma_r = -dp \quad (\text{ix})$$

Utilizando viii y ix en vi:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{2\mu dr}{h} \quad (\text{x})$$

Integrando la ecuación x:

$$\ln p = -\frac{2\mu r}{h} + C \quad (\text{xi})$$

Aplicando las condiciones frontera: en la periferia del disco $r = a$; $p = \sigma_0$; por tanto:

$$\ln \sigma_0 = -\frac{2\mu a}{h} + C$$

de donde:

$$C = \ln \sigma_0 + \frac{2\mu a}{h} \quad (\text{xii})$$

Utilizando xii en xi:

$$\ln p = -\frac{2\mu r}{h} + \ln \sigma_0 + \frac{2\mu a}{h}$$

$$\ln \frac{p}{\sigma_0} = \frac{2\mu}{h}(a - r)$$

es decir:

$$p = \sigma_0 \exp\left[\frac{2\mu}{h}(a - r)\right] \quad (8.1.1)$$

La ecuación 8.1.1 se puede graficar en un sistema coordenado p versus r . La figura 8.1.2 muestra esta representación. Se observa que la presión alcanza un máximo en el eje vertical del cilindro y disminuye exponencialmente hasta un valor mínimo en el borde del cilindro.

Debido a la forma como se distribuye la presión a esta gráfica, se le llama colina de fricción.

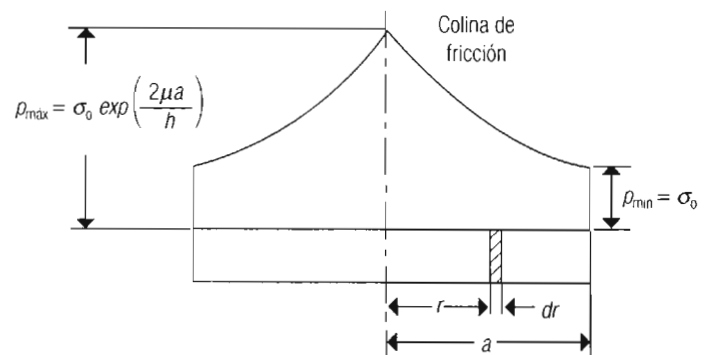


Figura 8.1.2. Representación de la ecuación para la deformación de un disco. Se observa la colina de fricción.

PRESIÓN PROMEDIO

La presión promedio se calcula integrando la fuerza sobre la superficie de contacto y dividiendo entre el área del disco:

$$\bar{p} = \frac{\int_0^a p 2\pi r dr}{\pi a^2} \quad (\text{xiii})$$

Aplicando 8.1.1 en xiii, integrando y simplificando:

$$\bar{p} = \frac{\sigma_0}{2} \left(\frac{h}{\mu a} \right)^2 \left[e^{\frac{2\mu a}{h}} - \frac{2\mu a}{h} - 1 \right] \quad (8.1.2)$$

De la ecuación 8.1.1 se puede encontrar $p_{\text{máx}}$, $p_{\text{mín}}$. En el eje vertical de la figura 8.1.2, aplicando $r = 0$; $p = p_{\text{máx}}$:

$$p_{\text{máx}} = \sigma_0 \exp \left[\frac{2\mu a}{h} \right] \quad (8.1.3)$$

En el borde del cilindro, aplicando $r = a$; $p = p_{\text{mín}}$:

$$p_{\text{mín}} = \sigma_0 \quad (8.1.4)$$

FRICCIÓN GOBERNADA POR EL FACTOR DE CORTE

De la relación:

$$m = \frac{\tau}{k} \quad (\text{xiv})$$

resulta:

$$\tau = \mu p = mk = m \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} = m \sigma_z \quad (\text{xv})$$

Despejando μ en esta ecuación

$$\mu = \frac{m \sigma_0}{p \sqrt{3}}$$

y utilizando el resultado en la ecuación x

$$\frac{dp}{p} = -\frac{2m\sigma_0 dr}{p\sqrt{3}h}$$

Simplificando:

$$dp = -\frac{2m\sigma_0}{\sqrt{3}h} dr$$

Integrando:

$$p = -\frac{2m\sigma_0}{\sqrt{3h}}r + C \quad (\text{xvi})$$

Aplicando las condiciones de frontera, cuando $r = a$, $p = \sigma_0$:

$$C = \sigma_0 + \frac{2m\sigma_0 a}{\sqrt{3h}} \quad (\text{xvii})$$

Aplicando xvii en xvi:

$$\begin{aligned} p &= -\frac{2m\sigma_0 r}{\sqrt{3h}} + \sigma_0 + \frac{2m\sigma_0 a}{\sqrt{3h}} \\ p &= \sigma_0 \left[1 + \frac{2m}{\sqrt{3h}}(a - r) \right] \end{aligned} \quad (8.1.5)$$

PRESIÓN PROMEDIO

Se calcula utilizando 8.1.5 en xiii:

$$\bar{p} = \frac{\int_0^a \left[\sigma_0 + \frac{2m\sigma_0 a}{\sqrt{3h}} - \frac{2m\sigma_0 r}{\sqrt{3h}} \right] 2\pi r dr}{\pi a^2}$$

Integrando:

$$\begin{aligned} \bar{p} &= \frac{1}{\pi a^2} \left[\frac{2\pi\sigma_0 r^2}{2} + \frac{2m\sigma_0 a(2\pi)r^2}{2\sqrt{3h}} - \frac{4\pi m\sigma_0 r^3}{3\sqrt{3h}} \right]_0^a \\ \bar{p} &= \frac{1}{a^2} \left[\sigma_0 a^2 + \frac{2m\sigma_0 a^3}{\sqrt{3h}} - \frac{4m\sigma_0 a^3}{3\sqrt{3h}} \right] \\ \bar{p} &= \sigma_0 + \frac{2m\sigma_0 a}{\sqrt{3h}} - \frac{4m\sigma_0 a}{3\sqrt{3h}} \end{aligned} \quad (\text{xix})$$

$$\bar{p} = \sigma_0 \left[1 + \frac{2ma}{3\sqrt{3h}} \right] \quad (8.1.6)$$

A partir de la ecuación 8.1.5 se puede calcular $p_{\text{máx}}$, así como $p_{\text{mín}}$:

En el eje vertical $r = 0$; $p = p_{\text{máx}}$:

$$p_{\text{máx}} = \sigma_0 \left[1 + \frac{2ma}{\sqrt{3h}} \right] \quad (8.1.7)$$

En el borde del cilindro $r = a$; $p = p_{\text{mín}}$:

$$p_{\text{mín}} = \sigma_0 \quad (8.1.8)$$

Fricción adhesiva. Se pueden obtener ecuaciones similares a las ecuaciones de 8.1.5 a 8.1.7 para el caso de fricción adhesiva.

Para fricción adhesiva se aplica el valor $m = 1$ en las ecuaciones 8.1.5 a 8.1.7:

$$p = \sigma_0 \left[1 + \frac{2}{\sqrt{3}h} (a - r) \right] \quad (8.1.9)$$

$$\bar{p} = \sigma_0 \left[1 + \frac{2a}{3\sqrt{3}h} \right] \quad (8.1.10)$$

$$p_{\text{máx}} = \sigma_0 \left[1 + \frac{2a}{\sqrt{3}h} \right] \quad (8.1.11)$$

Ejercicio 8.1.1

1

Se va a forjar en caliente un cilindro de acero de 40 mm de diámetro y 40 mm de altura en forma homogénea con una prensa de forja. El coeficiente de fricción es de 0.1.

Determine: a) la carga necesaria para reducir el cilindro hasta la mitad de su altura, y b) la potencia consumida si la deformación se realizó en tres segundos. El esfuerzo de cedencia en compresión unidireccional es de 80 MPa y permanece constante a la temperatura de forja.

Respuestas:

a) Carga

Las dimensiones al final de la deformación, con la propiedad de volumen constante:

$$V_0 = V_f \Rightarrow D_f = D_0 \sqrt{\frac{h_0}{h_f}}$$

Aplicando los valores del ejercicio:

$$D_f = 40 \sqrt{\frac{40}{20}} = 40(1.414) = 56.56 \text{ mm}$$

$$a_f = 28.28 \text{ mm}$$

$$h_f = 20 \text{ mm}$$

de donde

$$\frac{2\mu a}{h} = \frac{2(0.1)(28.28)}{20} = 0.2828$$

Utilizando valores en la ecuación 8.1.2:

$$\bar{p} = \frac{80}{2} \left(\frac{20}{0.1(28.28)} \right)^2 \left[e^{0.2828} - 0.2828 - 1 \right] = 88.1 \text{ MPa} = 88.1 \text{ N/mm}^2$$

Ejercicio 8.1.1 (continuación)

2

$$P = \bar{p}A = 88.1 \text{ (N/mm}^2\text{)} \left(\frac{\pi}{4} (56.56)^2 \text{ (mm}^2\text{)} \right) = 221.2 \text{ kN}$$

b) Potencia

$$\dot{W} = \frac{P\Delta h}{t} = \frac{221.2(10^3)(0.020)}{3} = 1.47 \text{ kW}$$

Ejercicio 8.1.2

1

El cilindro del ejercicio anterior se va a forjar en las condiciones anteriores, pero se considera la fricción gobernada por un factor de corte $m = 0.2$. *Determine:* a) la carga necesaria para reducir el cilindro hasta la mitad de su altura, y b) la potencia consumida, si la deformación se realiza en tres segundos. El esfuerzo de cedencia en compresión unidireccional tiene el valor anterior y no varía a la temperatura de forja.

Respuestas:

a) Carga

De la ecuación 8.1.6:

$$\bar{p} = 80 \left[1 + \frac{2(0.2)(28.28)}{3\sqrt{3}(20)} \right] = 88.7 \text{ MPa}$$

La carga es:

$$P = 88.7 \left(\frac{\pi}{4} (56.56)^2 \right) = 222.9 \text{ kN}$$

b) Potencia

$$\dot{W} = \frac{P\Delta h}{t} = \frac{222.9(10^3)0.020}{3} = 1.5 \text{ kW}$$

Ejercicio 8.1.3

1

El cilindro del ejercicio anterior se va a forjar en las condiciones anteriores, pero se considera fricción adhesiva. *Determine:* a) la carga necesaria para reducir el cilindro hasta la mitad de su altura, y b) la potencia consumida si la deformación se realiza en tres segundos. El esfuerzo de cedencia en compresión unidireccional tiene el valor anterior y no varía con la temperatura de forja.

Respuestas:

a) Carga

Ejercicio 8.1.3 (continuación)

2

De la ecuación 8.1.10:

$$\bar{p} = 80 \left[1 + \frac{2(28.28)}{3\sqrt{3}(20)} \right] = 123.5 \text{ MPa}$$

La carga es:

$$P = 123.5 \left(\frac{\pi}{4} (56.56)^2 \right) = 310 \text{ kN}$$

b) Potencia

$$\dot{W} = \frac{310(10^3)(0.020)}{3} = 2.07 \text{ kW}$$

8.2. Forja de una placa en deformación plana

Para derivar la ecuación que permite calcular la presión para forjar una placa en condiciones de deformación plana, se va a hacer uso de la figura 8.2.1. Se muestra en esta figura un elemento de volumen de una placa que se deforma en estas condiciones. El eje x coincide con el plano de la base de la prensa; el eje vertical y pasa por el centro de la placa, mientras que el eje z es perpendicular al plano del papel. Al aplicar una presión p , la placa reduce su altura (en la dirección y) y se alarga desde la línea vertical central (línea neutra), en la dirección x , a la izquierda y a la derecha, pero su dimensión en la dirección z permanece constante; esta dimensión se supone de una magnitud unitaria (aunque puede tener cualquier valor) para hacer más fácil la derivación de la ecuación para calcular la presión de forja.

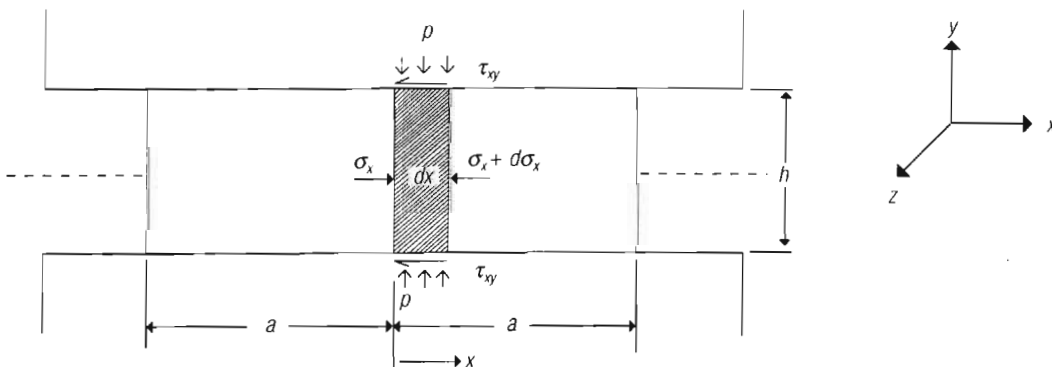


Figura 8.2.1. Forja de una placa en deformación plana (Dieter, 1988).

La cara izquierda del elemento pasa por el origen de los ejes coordenados xy coincidiendo con el eje y ; la presión ejercida sobre la placa hace que sobre esta cara actúe un esfuerzo σ_x . Sobre la cara paralela a ésta, separada una distancia dx a la derecha, el esfuerzo σ_x se incrementa en una cantidad $d\sigma_x$ para contrarrestar el esfuerzo cortante τ_{xy} debido a fricción que actúa sobre la superficie de contacto y está dirigido hacia el centro de la placa. Sobre cada una de las interfaces superior e inferior está actuando un esfuerzo τ_{xy} . Las fuerzas en la dirección positiva del eje x se toman como positivas y las fuerzas en la dirección opuesta como negativas.

Estableciendo la ecuación de equilibrio en la dirección x :

$$\sigma_x h(1) - (\sigma_x + d\sigma_x)h(1) - 2\tau_{xy}dx(1) = 0$$

Desarrollando:

$$\sigma_x h - \sigma_x h - hd\sigma_x - 2\tau_{xy}dx = 0$$

Simplificando y ordenando los términos:

$$\frac{d\sigma_x}{dx} = -\frac{2\tau_{xy}}{h} \quad (i)$$

El criterio de von Mises para deformación plana establece que:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2k = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} = \sigma'_0 \quad (5.8.1)$$

donde σ'_0 es el *esfuerzo de cedencia en deformación plana*. Si se definen p y σ_x como esfuerzos principales de compresión, y se toman como positivos, entonces $p = \sigma_1$ y también $\sigma_x = \sigma_3$:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = p - \sigma_x = \sigma'_0 \quad (ii)$$

Puesto que σ'_0 es una propiedad del material tiene un valor constante, diferenciando ii:

$$dp = d\sigma_x$$

Sustituyendo $d\sigma_x$ por dp en i:

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{2\tau_{xy}}{h} \quad (iii)$$

8.2.1. Coeficiente de fricción

Si la ley de Coulomb gobierna el proceso de fricción en la superficie de contacto placa-herramienta, entonces:

$$\tau_{xy} = \mu p \quad (iv)$$

Aplicando iv en iii:

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{2\mu p}{h}$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{2\mu dx}{h} \quad (\text{v})$$

Integrando v:

$$\ln p = -\frac{2\mu}{h}x + \ln C \quad (\text{vi})$$

La constante de integración es estimada a partir de la condición de frontera en el borde de la placa: $x = a, p = \sigma'_0$

$$\ln C = \frac{2\mu a}{h} + \ln \sigma'_0 \quad (\text{vii})$$

Utilizando vii en vi:

$$\ln p = -\frac{2\mu x}{h} + \frac{2\mu a}{h} + \ln \sigma'_0$$

$$\ln p - \ln \sigma'_0 = \frac{2\mu}{h}(a - x)$$

$$\ln \left(\frac{p}{\sigma'_0} \right) = \frac{2\mu}{h}(a - x)$$

Eliminando logaritmos y despejando p :

$$\frac{p}{\sigma'_0} = \exp \left(\frac{2\mu}{h}(a - x) \right)$$

$$p = \sigma'_0 \exp \left(\frac{2\mu}{h}(a - x) \right) \quad (8.2.1)$$

La figura 8.2.2 muestra en ejes p - x la representación gráfica de la ecuación 8.2.1. La presión p alcanza un máximo en el centro de la placa y disminuye exponencialmente hasta un mínimo en el borde de la misma. En el centro de la placa se encuentra una superficie neutra. Como en el caso de la compresión de un cilindro, la curva de la figura 8.2.2 recibe el nombre de colina de fricción.

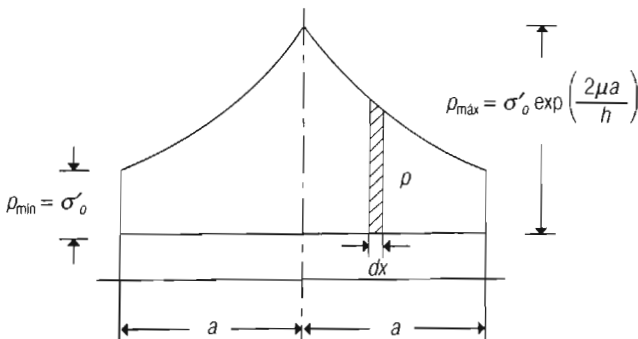


Figura 8.2.2. Distribución de esfuerzos normal y longitudinal en la compresión en deformación plana.

Se puede determinar una presión promedio integrando el área bajo la curva de la figura 8.2.2 y dividiendo este valor entre el área de contacto. Debido a la simetría de la figura con respecto al eje vertical, sólo se considera la mitad de la placa, por eso:

$$\bar{p} = \int_0^a \frac{p dx}{a(1)} \quad (\text{viii})$$

Aplicando 8.2.1 a viii:

$$\bar{p} = \int_0^a \frac{\sigma'_0 \exp\left(\frac{2\mu}{h}(a-x)\right) dx}{a}$$

Integrando:

$$\bar{p} = \frac{\sigma'_0}{2\mu a/h} \left\{ \exp\left(\frac{2\mu a}{h}\right) - 1 \right\} \quad (8.2.2)$$

De la ecuación 8.2.1 se pueden obtener los valores de $p_{\text{máx}}$ y de $p_{\text{mín}}$.

En el centro de la placa $x = 0$; $p = p_{\text{máx}}$

$$p_{\text{máx}} = \sigma'_0 \exp\left(\frac{2\mu a}{h}\right) \quad (8.2.3)$$

En los bordes de la placa $x = a$; $p = p_{\text{mín}}$:

$$p_{\text{mín}} = \sigma'_0 \quad (8.2.4)$$

8.2.2. Factor de corte

$$\tau = \mu p = mk \quad (\text{ix})$$

$$\mu = \frac{mk}{p} \quad (\text{x})$$

Utilizando x en v:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{2mk dx}{ph}$$

Eliminando p , despejando dp y aplicando $k = \sigma_0 \sqrt{3}$, conforme a von Mises:

$$dp = -\frac{m}{h} \left(\frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \right) dx = -\sigma'_0 \frac{m}{h} dx$$

Integrando:

$$p = -\sigma'_0 m \frac{x}{h} + C \quad (\text{xi})$$

Aplicando la condición frontera $x = a, p = \sigma'_0$:

$$C = \sigma'_0 + \sigma'_0 m \frac{a}{h} \quad (\text{xii})$$

Utilizando xii en xi:

$$p = -\sigma'_0 m \frac{x}{h} + \sigma'_0 + \sigma'_0 m \frac{a}{h}$$

Ordenando los términos:

$$p = \sigma'_0 \left[1 + \frac{m}{h} (a - x) \right] \quad (8.2.5)$$

En esta ecuación la presión varía linealmente con x . La colina de fricción en este caso está formada por dos líneas rectas inclinadas (figura 8.2.3).

PRESIÓN PROMEDIO

Se puede determinar una presión promedio integrando el área bajo la curva:

$$\bar{p} = \int_0^a \frac{p dx}{a(1)} \quad (\text{xiii})$$

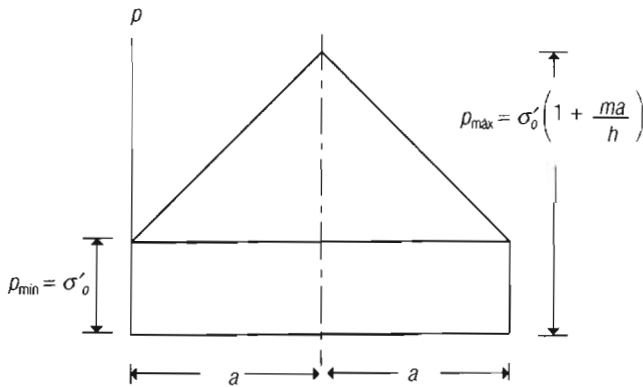


Figura 8.2.3. Colina de fricción en compresión plana con fricción. p promedio

Utilizando 8.2.5 en xiii:

$$\bar{p} = \frac{1}{a} \int_0^a \left[\sigma'_0 + \sigma'_0 \frac{ma}{h} - \sigma'_0 \frac{mx}{h} \right] dx$$

$$\bar{p} = \frac{1}{a} \left[\sigma'_0 x + \sigma'_0 \frac{amx}{h} - \sigma'_0 \frac{mx^2}{2h} \right]_0^a$$

$$\bar{p} = \frac{1}{a} \left[\sigma'_0 a + \sigma'_0 \frac{ma^2}{h} - \sigma'_0 \frac{ma^2}{2h} \right]_0^a$$

$$\bar{p} = \sigma'_0 + \sigma'_0 \frac{ma}{h} - \sigma'_0 \frac{ma}{2h}$$

$$\bar{p} = \sigma'_0 \left[1 + \frac{ma}{2h} \right] \quad (8.2.6)$$

Los valores de $p_{\text{máx}}$, así como de $p_{\text{mín}}$, se obtienen de la ecuación 8.2.5:

$$\text{Para } x = 0; \quad p_{\text{máx}} = \sigma'_0 \left(1 + \frac{ma}{h} \right) \quad (8.2.7)$$

$$\text{Para } x = a \quad p_{\text{mín}} = \sigma'_0 \quad (8.2.8)$$

8.2.3. Fricción adhesiva

Se pueden obtener ecuaciones similares a las 8.2.5, 8.2.6 y 8.2.7 para el caso de fricción adhesiva:

Para $m = 1$:

$$p = \sigma'_0 \left[1 + \frac{a-x}{h} \right] \quad (8.2.9)$$

$$\bar{p} = \sigma'_0 \left[1 + \frac{a}{2h} \right] \quad (8.2.10)$$

$$p_{\text{máx}} = \sigma'_0 \left[1 + \frac{a}{h} \right] \quad (8.2.11)$$

Ejercicio 8.2.1

1

Se va a forjar en frío, en una prensa hidráulica, una placa metálica de las siguientes dimensiones: ancho 0.5 m (en dirección x), profundidad 0.4 m (en dirección z) y una altura de 0.2 m (en dirección y), en condiciones de deformación plana, de manera que la profundidad permanece constante. Si se reducirá 50% de la altura de la placa en un paso, calcule la carga que es necesario aplicar al principio y al final de la forja. El esfuerzo de cedencia en deformación plana al principio de la forja es de 60 MPa y al final de la forja es de 250 MPa. Suponga fricción de Coulomb constante de un valor $\mu = 0.1$. Observe que, como la profundidad permanece constante, el material reduce su espesor mientras aumenta su ancho, y que la colina de fricción se despliega en la dirección del ancho, el cual es igual a $2a$.

Respuesta:

Al principio de la forja, de la ecuación 8.2.2:

$$\frac{2\mu a}{h} = \frac{2(0.1)(0.25)}{0.2} = 0.250$$

$$\bar{p} = \frac{60}{0.250} [\exp(0.250) - 1] = 68.2 \text{ MPa}$$

Ejercicio 8.2.1. (continuación)

2

La carga es entonces:

$$P = \bar{p}A = 68.2(10^6)(0.5)(0.4) = 13.6 \text{ MN}$$

Al final de la forja el espesor se reduce a la mitad, por lo que el ancho aumenta al doble, es decir, a 1 m, y a toma el valor de 0.5 m.

$$\frac{2\mu a}{h} = \frac{2(0.1)(0.5)}{0.1} = 1.0$$

$$\bar{p} = \frac{250}{1.0} [\exp(1.0) - 1] = 429.6 \text{ MPa}$$

La carga es:

$$P = 429.6(10^6)(1.0)(0.4) = 171.8 \text{ MN}$$

Ejercicio 8.2.2

1

Resuelva el problema anterior, pero suponga que la fricción está gobernada por un factor de fricción $m = 0.2$.

Mediante la ecuación 8.2.6, al principio:

$$\bar{p} = \sigma_0 \left[1 + \frac{ma}{2h} \right] = 60 \left[1 + \frac{0.2(0.25)}{2(0.2)} \right] = 67.5 \text{ MPa}$$

La carga es

$$P = \bar{p}A = 67.5(10^6)(0.5)(0.4) = 13.5 \text{ MN}$$

Al final:

$$\bar{p} = 250 \left[1 + \frac{0.2(0.5)}{2(0.1)} \right] = 375 \text{ MPa}$$

La carga es

$$P = 375(10^6)(1.0)(0.4) = 150 \text{ MN}$$

Ejercicio 8.2.3

1

Suponga que la placa del problema anterior se va a deformar en caliente, por eso entre las superficies de contacto se establece fricción adhesiva. En estas condiciones, suponga que el material tiene un comportamiento plástico ideal con un esfuerzo de cedencia en deformación plana al principio y al final de la deformación constante e igual a 50 MPa.

Usando la ecuación 8.2.10, al principio:

$$\bar{p} = \sigma'_0 \left[1 + \frac{a}{2h} \right] = 50 \left[1 + \frac{0.25}{2(0.2)} \right] = 81.25 \text{ MPa}$$

La carga es:

$$P = 81.25(10^6)0.5(0.4) = 16.2 \text{ MN}$$

Al final:

$$\bar{p} = 50 \left[1 + \frac{0.5}{2(0.1)} \right] = 175 \text{ MPa}$$

La carga es

$$P = 175(1.0)(0.4) = 70 \text{ MN}$$

8.3. Estirado de una cinta metálica

Se va a estirar una cinta, de una longitud l_0 , y de un ancho w de una magnitud mucho mayor que su espesor h_0 , haciéndola pasar a través de una matriz formada por dos cuñas que tienen la misma inclinación con respecto al eje longitudinal x de la cinta, mediante la aplicación de un esfuerzo de tensión σ_x . El ángulo de la matriz es igual a 2α . Debido a que el ancho de la cinta es mucho mayor que el espesor, la deformación en la dirección del ancho está restringida y se puede considerar como despreciable; por tanto, se puede considerar que las condiciones son de deformación plana (figura 8.3.1a). Si se extendieran las caras de la matriz, se cortarían en un vértice. Este vértice es el origen del sistema de ejes cartesianos (figura 8.3.1b). Para el análisis de esfuerzos, se va a considerar un elemento de volumen de sección transversal trapezoidal; el espesor del elemento es dx ; la altura de los lados desiguales son h y $(h + dh)$, respectivamente, y el fondo es de una magnitud w . La matriz ejerce una presión p sobre las caras superior e inferior del elemento; esta presión origina un esfuerzo de fricción $\tau = \mu p$ tangencial a la superficie de contacto matriz-elemento. La presión tiene componentes horizontal $p \sin \alpha$ y vertical $p \cos \alpha$. Sobre la cara derecha del elemento está actuando el esfuerzo σ_x , el que en la cara izquierda, debido a la fricción, experimenta un incremento $d\sigma_x$.

En la dirección x están presentes tres componentes; para el equilibrio de fuerzas se toman como positivas las fuerzas que apuntan hacia la derecha.

$$\sigma_x hw - (\sigma_x + d\sigma_x)(h + dh)w - 2p \sin \alpha \left[w \frac{dx}{\cos \alpha} \right] - 2\mu p \cos \alpha \left[w \frac{dx}{\cos \alpha} \right] = 0 \quad (i)$$

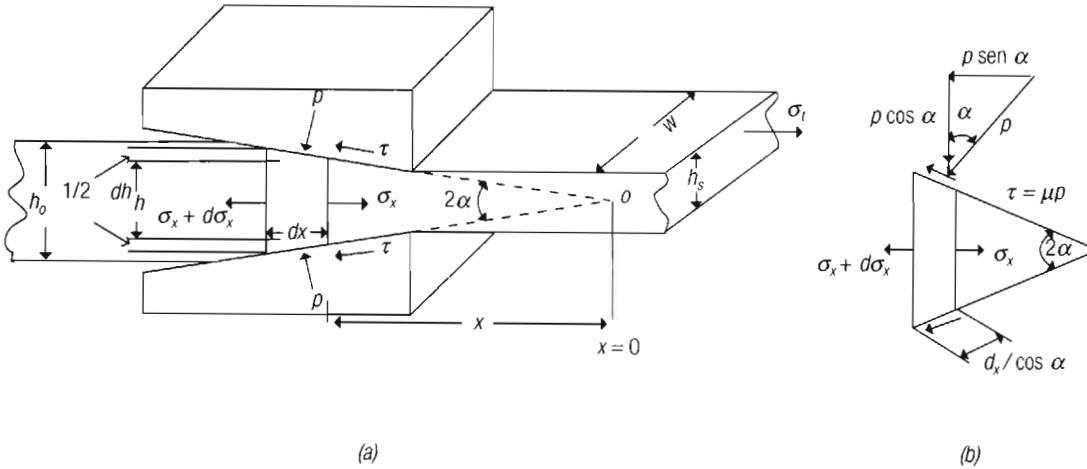


Figura 8.3.1. a) Estirado en deformación plana de una cinta metálica. b) Esfuerzos sobre un elemento de volumen.

En el tercer y cuarto términos de la ecuación i, el factor 2 se refiere a las dos superficies de contacto inclinadas; los términos en corchetes son las áreas de estas superficies.

Simplificando y despreciando diferenciales superiores al primer orden.

$$\sigma_x dh + h d\sigma_x + 2p dx \tan \alpha + 2\mu p dx = 0 \quad (\text{ii})$$

Se va a eliminar h aprovechando la geometría de la figura 8.3.1a:

$$\tan \alpha = \frac{(1/2)h}{x}, \text{ de donde } h = 2x \tan \alpha; dh = 2dx \tan \alpha; 2dx = \frac{dh}{\tan \alpha}$$

Utilizando la última expresión en ii:

$$\sigma_x dh + h d\sigma_x + p dh + \mu p dh \cot \alpha = 0$$

Factorizando dh :

$$h d\sigma_x + [\sigma_x + p(1 + (\mu \cot \alpha))] dh = 0$$

Haciendo $B = \mu \cot \alpha$, resulta:

$$h d\sigma_x + [\sigma_x + p(1 + B)] dh = 0 \quad (\text{iii})$$

Para poder integrar esta ecuación, es necesario obtener una relación entre p y σ_x . Esta relación se obtiene a partir del equilibrio de fuerzas en la dirección y ; las fuerzas con dirección hacia abajo son positivas:

$$\sigma_y w dx + p \cos \alpha \left[w \frac{dx}{\cos \alpha} \right] - \mu p \sin \alpha \left[w \frac{dx}{\cos \alpha} \right] = 0 \quad (\text{iv})$$

Simplificando iv):

$$\sigma_y + p - \mu p \tan \alpha = 0$$

$$\sigma_y = -p(1 - \mu \tan \alpha)$$

En procesos de estirado, α adopta valores muy pequeños, por lo que $\mu \tan \alpha \ll 1$; la ecuación anterior se convierte en:

$$\sigma_y \approx -p$$

Si se supone que los esfuerzos normales en los ejes cartesianos son esfuerzos principales, se cumplen las expresiones siguientes:

$$\sigma_1 = \sigma_x; \quad \sigma_2 = \sigma_z; \quad \sigma_3 = \sigma_y = -p$$

Aplicando los criterios de von Mises y Tresca para deformación plana.

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma'_0 = \sigma_x - (-p)$$

De donde:

$$p = \sigma'_0 - \sigma_x \quad (\text{vi})$$

Utilizando vi en iii y reordenando, resulta:

$$hd\sigma_x + [\sigma_x + (\sigma'_0 - \sigma_x)(1 + B)]dh = 0$$

$$hd\sigma_x + [\sigma_x - \sigma_x - \sigma_x B + \sigma'_0(1 + B)]dh = 0$$

$$\frac{dh}{h} = \frac{d\sigma_x}{\sigma_x B - \sigma'_0(1 + B)}$$

Factorizando B en el denominador y ordenando la ecuación resultante:

$$\frac{dh}{h} = \frac{d\sigma_x}{B \left[\sigma_x - \frac{\sigma'_0(1 + B)}{B} \right]} \quad (\text{vii})$$

Las condiciones frontera para la integración de vii son a la entrada: $h = h_0$, $\sigma_x = 0$; a la salida: $h = h_s$; $\sigma_x = \sigma_t$; σ_t es el esfuerzo de estirado, por tanto:

$$B \int_{h_0}^{h_s} \frac{dh}{h} = \int_{\sigma_x=0}^{\sigma_x=\sigma_t} \frac{d\sigma_x}{\sigma_x - \frac{\sigma'_0(1 + B)}{B}} \quad (\text{viii})$$

La ecuación viii se integra haciendo uso de la variable auxiliar u :

$$u = \sigma_x - \frac{\sigma'_0(1 + B)}{B}$$

de donde

$$du = d\sigma_x$$

Aplicando en viii los límites de integración u_0 y u_f :

$$B \int_{h_0}^{h_s} \frac{dh}{h} = \int_{u_0}^{u_f} \frac{du}{u}$$

$$\ln h^B \Big|_{h_0}^{h_s} = \ln u \Big|_{u_0}^{u_f}$$

Regresando al uso de la variable original σ_x , se obtiene:

$$\ln h^B \Big|_{h_0}^{h_s} = \ln \left[\sigma_x - \frac{\sigma'_0(1+B)}{B} \right]_{\sigma_x=0}^{\sigma_t}$$

Reemplazando los valores de las variables por los valores en la frontera.

$$\ln \left(\frac{h_s}{h_0} \right)^B = \ln \left[\frac{\sigma_t - \frac{\sigma'_0(1+B)}{B}}{0 - \frac{\sigma'_0(1+B)}{B}} \right]$$

Eliminando logaritmos y reordenando:

$$\sigma_t - \frac{\sigma'_0(1+B)}{B} = - \frac{\sigma'_0(1+B)}{B} \left(\frac{h_s}{h_0} \right)^B$$

Despejando σ_t y factorizando:

$$\sigma_t = \frac{\sigma'_0(1+B)}{B} \left[1 - \left(\frac{h_s}{h_0} \right)^B \right] \quad (8.3.1)$$

El esfuerzo de estirado de una cinta metálica se puede determinar también en función de la reducción de área, modificando la ecuación 8.3.1, como se muestra a continuación. Para deformación plana:

$$r = \frac{h_0 - h_s}{h_0} = 1 - \frac{h_s}{h_0}$$

de donde

$$\frac{h_s}{h_0} = 1 - r$$

Utilizando esta expresión en 8.3.1.

$$\sigma_t = \frac{\sigma'_0(1+B)}{B} \left[1 - (1-r)^n \right] \quad (8.3.2)$$

Ejercicio 8.3.1

1

Se va a estirar una cinta metálica de un espesor inicial de 3 mm a un espesor final de 2.4 mm, haciéndola pasar a través de una matriz de caras planas que forman entre sí un ángulo de 8° . El metal de la cinta tiene un esfuerzo de cedencia en tensión unidireccional igual a 200 MPa; el coeficiente de fricción tiene un valor de 0.05. Estime el esfuerzo necesario para hacer esta reducción.

Respuesta:

$$B = \mu \cot \alpha = 0.05(\cot 4^\circ) = 0.05(14.3) = 0.715$$

$$\sigma'_0 = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} = \frac{2(200)}{\sqrt{3}} = 231 \text{ MPa}$$

Aplicando estos valores en la ecuación 8.3.1:

$$\sigma_t = \frac{231(1+0.715)}{0.715} \left[1 - \left(\frac{2.4}{3} \right)^{0.715} \right]$$

$$\sigma_t = 81.7 \text{ MPa}$$

8.4. Trefilado y extrusión

La figura 8.4.1 puede servir para ilustrar al mismo tiempo el proceso de trefilado y el de extrusión. En ambos procesos, el material es obligado a pasar a través del

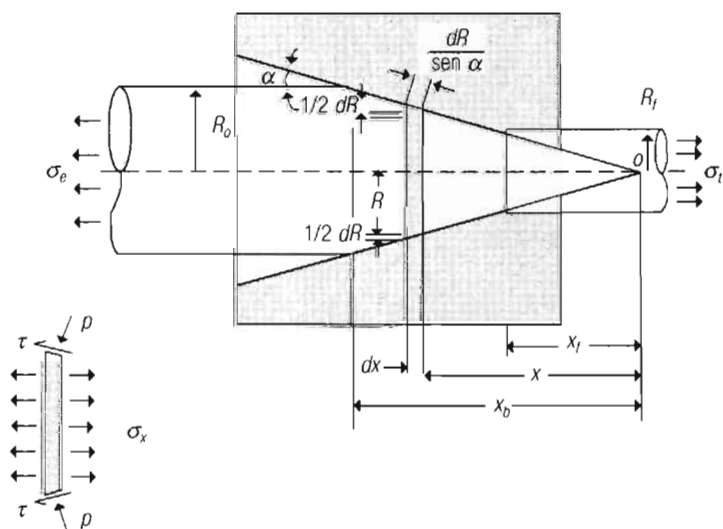


Figura 8.4.1. Trefilado de una varilla o alambre (Avitzur, 1968).

dato aplicando un esfuerzo de tensión en el proceso de trefilado, de compresión en el de extrusión. Para derivar la ecuación que determina el esfuerzo de trefilado o extrusión, se utilizará un elemento de volumen delineado por la superficie cónica del dado y por dos superficies normales al eje de simetría. Una de estas superficies está localizada a una distancia x del vértice del ángulo del dado, la otra a una distancia dx , separada de la primera. Sobre la primera superficie actúa un esfuerzo σ_x , sobre la segunda superficie este esfuerzo se incrementa una cantidad $d\sigma_x$. Sobre la superficie de contacto con el dado cónico actúa una presión p normal a la superficie y un esfuerzo cortante debido a fricción en la superficie de contacto dado-pieza.

La suma de fuerzas que actúan sobre el elemento de volumen debe ser cero.

Las fuerzas en la dirección x debidas a los esfuerzos que actúan sobre las superficies normales al eje longitudinal, se muestran en la primera expresión (a), la que se simplifica en varios pasos:

$$\begin{aligned} (\sigma_x + d\sigma_x) \pi(R + dR)^2 - \sigma_x \pi R^2 &= [\sigma_x + d\sigma_x] \pi[R^2 + 2RdR + (dR)^2] - \sigma_x \pi R^2 = \\ &= [\sigma_x \pi R^2 + 2\pi R dR \sigma_x + \sigma_x \pi (dR)^2] + [\pi R^2 d\sigma_x + 2\pi R dR d\sigma_x + \pi d\sigma_x (dR)^2] - \sigma_x \pi R^2 = \\ &= [\sigma_x \pi R^2 - \sigma_x \pi R^2] + [\sigma_x \pi (dR)^2 + 2\pi R dR d\sigma_x + \pi d\sigma_x (dR)^2] + 2\pi R dR \sigma_x + \pi R^2 d\sigma_x = \\ &= 2\pi R dR \sigma_x + \pi R^2 d\sigma_x \end{aligned} \quad (a)$$

Se eliminaron los términos que contienen factores con diferenciales elevadas a una potencia mayor a 1 o productos de dos diferenciales, porque sus valores son muy pequeños.

Las fuerzas en la dirección x debidas a la presión normal p son:

$$\left[2\pi R \left(\frac{dR}{\text{sen}\alpha} \right) \right] p \text{sen}\alpha = 2\pi p R dR \quad (b)$$

Las fuerzas en la dirección x debidas al esfuerzo cortante son:

$$\left[2\pi R \left(\frac{dR}{\text{sen}\alpha} \right) \right] \tau \cos\alpha = 2\pi \tau \cot\alpha R dR \quad (c)$$

Sumando todas las fuerzas en la dirección x (ecuaciones a, b, c):

$$2\pi R dR \sigma_x + \pi R^2 d\sigma_x + 2\pi p R dR + 2\pi \tau \cot\alpha R dR = 0 \quad (d)$$

Dividiendo entre πR toda la ecuación:

$$2dR\sigma_x + R d\sigma_x + 2dR(p + \tau \cot\alpha) = 0 \quad (e)$$

Suponiendo que la fricción en la cara de contacto está gobernada por la ley de Coulomb:

$$\tau = \mu p \quad (f)$$

Aplicando f en e :

$$R d\sigma_x + 2dR\sigma_x + 2dR(p + \mu p \cot\alpha) = 0 \quad (g)$$

Factorizando p :

$$Rd\sigma_x + 2dR\sigma_x + 2pdR(1 + \mu\cot\alpha) = 0 \quad (h)$$

Suponiendo que la presión p es aproximadamente perpendicular al eje x , y que tanto p como σ_x son esfuerzos principales, entonces, por simetría, la presión sobre toda la cara de contacto dado-elemento de volumen es la misma; por eso el estado de esfuerzos a que está sujeto el elemento, en función de esfuerzos principales es:

$$\sigma_1 = \sigma_x$$

$$-\sigma_2 = p$$

$$-\sigma_3 = p$$

Tomando en cuenta estas relaciones, el criterio de von Mises:

$$2\sigma_0^2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2$$

se puede escribir como:

$$2\sigma_0^2 = (\sigma_x + p)^2 + (-p + p)^2 + (-p - \sigma_x)^2$$

$$2\sigma_0^2 = 2(\sigma_x + p)^2$$

de donde

$$p = \sigma_0 - \sigma_x \quad (i)$$

Se define la relación:

$$B = \mu\cot\alpha \quad (j)$$

Aplicando j en h , dividiendo entre $2dR$ y ordenando la ecuación resultante:

$$\begin{aligned} \sigma_x + p(1 + B) &= -\frac{d\sigma_x R}{2dR} \\ \frac{\sigma_x + p(1 + B)}{-d\sigma_x} &= \frac{R}{2dR} \end{aligned}$$

Invirtiendo esta ecuación:

$$\frac{-d\sigma_x}{\sigma_x + p(1 + B)} = \frac{2dR}{R} \quad (k)$$

Aplicando i en k :

$$\frac{-d\sigma_x}{\sigma_x + (\sigma_0 - \sigma_x)(1 + B)} = \frac{2dR}{R}$$

Desarrollando el denominador del primer miembro de esta ecuación:

$$\frac{-d\sigma_x}{\sigma_x + \sigma_0(1+B) - \sigma_x - \sigma_v B} = \frac{2dR}{R}$$

Simplificando y cambiando el signo al numerador y denominador del primer miembro de la ecuación anterior:

$$\frac{d\sigma_x}{\sigma_x B - \sigma_0(1+B)} = \frac{2dR}{R} \tag{l}$$

Factorizando B y ordenando la ecuación resultante:

$$\frac{d\sigma_x}{B \left[\sigma_x - \frac{\sigma_0(1+B)}{B} \right]} = \frac{2dR}{R}$$

$$\frac{d\sigma_x}{\sigma_x - \frac{\sigma_0(1+B)}{B}} = 2B \frac{dR}{R} \tag{m}$$

Integrando entre las condiciones frontera a la entrada del dado σ_e, R_0 y las condiciones a la salida del dado σ_p, R_f , respectivamente:

$$\int_{\sigma_v}^{\sigma_e} \frac{d\sigma_x}{\sigma_x - \frac{\sigma_0(1+B)}{B}} = 2B \int_{R_0}^{R_f} \frac{dR}{R} \tag{n}$$

En n , σ_e es el esfuerzo de estirado; la integración de la ecuación n se realiza utilizando la variable auxiliar u :

$$u = \sigma_x - \frac{\sigma_0(1+B)}{B}$$

de donde:

$$du = d\sigma_x$$

Utilizando en la ecuación n estas dos expresiones y aplicando los nuevos límites u_0, u_f :

$$\int_{u_0}^{u_f} \frac{du}{u} = 2B \int_{R_0}^{R_f} \frac{dR}{R}$$

Integrando:

$$\ln u \Big|_{u_0}^{u_f} = \ln R^{2B} \Big|_{R_0}^{R_f}$$

Volviendo a la variable original:

$$\ln \left[\sigma_x - \frac{\sigma_0(1+B)}{B} \right]_{\sigma_e}^{\sigma_t} = \ln R^{2B} \Big|_{R_0}^{R_f}$$

Aplicando límites:

$$\ln \left\{ \frac{\sigma_t - \frac{\sigma_0(1+B)}{B}}{\sigma_e - \frac{\sigma_0(1+B)}{B}} \right\} = \ln \left(\frac{R_f}{R_0} \right)^{2B}$$

Eliminando logaritmos y despejando σ_t :

$$\sigma_t - \frac{\sigma_0(1+B)}{B} = \left[\sigma_e - \frac{\sigma_0(1+B)}{B} \right] \left[\frac{R_f}{R_0} \right]^{2B}$$

$$\sigma_t = \left[\frac{R_f}{R_0} \right]^{2B} \left[\sigma_e - \frac{\sigma_0(1+B)}{B} \right] + \left[\frac{\sigma_0(1+B)}{B} \right]$$

Desarrollando:

$$\sigma_t = \left[\frac{R_f}{R_0} \right]^{2B} \sigma_e - \left[\frac{R_f}{R_0} \right]^{2B} \frac{\sigma_0(1+B)}{B} + \frac{\sigma_0(1+B)}{B}$$

Dividiendo entre σ_0 y ordenando todos los términos de la ecuación anterior:

$$\frac{\sigma_t}{\sigma_0} = \frac{1+B}{B} \left[1 - \left(\frac{R_f}{R_0} \right)^{2B} \right] + \frac{\sigma_e}{\sigma_0} \left[\frac{R_f}{R_0} \right]^{2B} \quad (8.4.1)$$

La ecuación 8.4.1 es la ecuación que permite determinar el esfuerzo de trefilado, el esfuerzo σ_e representa el esfuerzo necesario para desenrollar el alambre, el cual generalmente se encuentra embobinado; en caso de no estarlo tiene valor cero.

Se puede modificar la ecuación 8.4.1 para derivar la ecuación del esfuerzo o presión de extrusión libre, sin cámara de extrusión. Para este proceso la ecuación se modifica como sigue:

$$\frac{\sigma_e}{\sigma_0} = \frac{1+B}{B} \left[1 - \left(\frac{R_0}{R_f} \right)^{2B} \right] + \frac{\sigma_t}{\sigma_0} \left[\frac{R_0}{R_f} \right]^{2B} \quad (8.4.2)$$

En la ecuación 8.4.2, σ_t representa el esfuerzo que se aplica al material en caso de que éste sea jalado; σ_e es la presión aplicada por el ariete de extrusión.

FACTOR POR DEFORMACIÓN REDUNDANTE EN LA ECUACIÓN PARA TREFILADO

La ecuación 8.4.1 toma en consideración la energía de deformación y la energía consumida para vencer la fricción en el cálculo del esfuerzo de trefilado. Se puede tomar en cuenta la energía por deformación redundante incluyendo en la ecuación un factor. El factor por energía redundante se define mediante la siguiente relación:

$$\phi = \frac{\epsilon^*}{\epsilon} \quad (8.4.3)$$

La figura 8.4.2 se utilizará para mostrar cómo se obtiene.

El factor ϕ se obtiene experimentalmente. Se ensaya en tensión un segmento de alambre antes de ser estirado y se traza su curva esfuerzo real *versus* deformación real; se ensaya una porción de alambre después de estirado y se traza su curva σ *versus* ϵ en la misma escala que la curva anterior. Se hace coincidir el origen de las dos curvas, se desplaza la curva correspondiente al alambre estirado hacia la derecha una cantidad ϵ igual a la que fue estirado; se observa que la curva del alambre estirado es más alta que la curva del material no estirado. La razón de que la curva del alambre estirado sea más alta que la curva del alambre no estirado, es por el trabajo redundante. Se continúa desplazando la curva del alambre estirado hasta que coincide con la curva del alambre no estirado, se mide la deformación correspondiente al punto de coincidencia de ambas curvas, ϵ^* . El área comprendida entre ϵ y ϵ^* es la energía redundante. Se introduce el factor ϕ en la ecuación 8.4.1, la que toma la forma:

$$\frac{\sigma_f}{\sigma_0} = \phi \left\{ \frac{1+B}{B} \left[1 - \left(\frac{R_f}{R_0} \right)^{2B} \right] + \frac{\sigma_e}{\sigma_0} \left[\frac{R_f}{R_0} \right]^{2B} \right\} \quad (8.4.4)$$

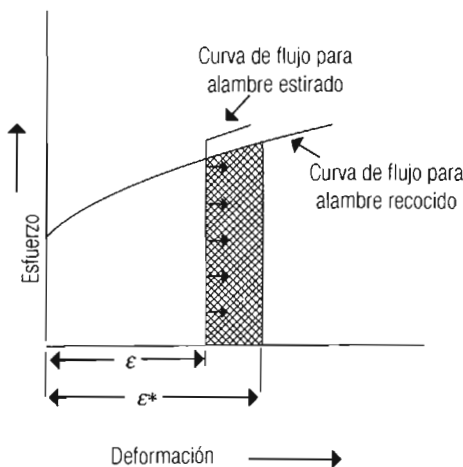


Figura 8.4.2. Procedimiento para determinar trabajo redundante en el trefilado de alambre (Dieter, 1988).

Ejercicio 8.4.1

1

Se planea trefilar en un solo paso un alambre de acero 1040 recocido de un diámetro inicial de 6.5 mm a un diámetro final de 5.8 mm. El material endurece por deformación en frío según la expresión $\sigma = 740\epsilon^{0.26}$ MPa. Si el trefilado se realiza en un dado que tiene un semiángulo $\alpha = 6^\circ$ y el coeficiente de fricción tiene un valor $\mu = 0.06$, determine: a) el esfuerzo de trefilado, y b) la potencia mínima necesaria para realizar el trefilado, en HP, si el alambre abandona el dado a una velocidad de 10 m/s.

Respuestas: para utilizar la ecuación 8.4.1 se necesitan calcular los valores siguientes:

a) Esfuerzo de trefilado

$$B = \mu \cot\alpha = 0.06 \cot 6^\circ = 0.06(9.51436) = 0.5709$$

$$\epsilon = 2 \ln\left(\frac{6.5}{5.8}\right) = 0.2279$$

$$\bar{\sigma}_0 = \frac{740(0.2279)^{0.26}}{1+0.26} = 399.8 \text{ MPa}$$

Aplicando valores

$$\sigma_t = 399.8 \frac{1+0.5709}{0.5709} \left[1 - \left(\frac{2.9}{3.25} \right)^{2(0.5709)} \right] = 134.2 \text{ MPa}$$

b) Potencia

$$\dot{W} = \sigma_t A_f v_f = 134.2 \left[\frac{\pi}{4} (5.8)^2 \right] (10) = 35.4 \text{ kW} = 35.4 / 0.7457 = 47.5 \text{ HP}$$

Ejercicio 8.4.2

1

Se fabrica por extrusión libre, a temperatura ambiente, una varilla de 4.5 mm de radio a partir de una barra de 6.35 mm de radio, de una aleación de aluminio que obedece a la ecuación $\sigma = 334 \epsilon^{0.165}$. Las caras de los dados forman un ángulo de 60° con el eje horizontal y el coeficiente de fricción es de 0.08.

Determine: a) la fuerza de extrusión durante el estado estacionario del proceso de extrusión ($\sigma_e = \text{constante}$), y b) la potencia de extrusión en HP, si el material sale de la matriz a una velocidad de 2 m/min. A la salida de la matriz no se aplica esfuerzo de tensión alguno ($\sigma_t = 0$). Utilice en sus cálculos el esfuerzo de cedencia promedio.

Respuestas:

a) Fuerza de extrusión (P)

Se determinan primero los valores desconocidos en la ecuación 8.4.2.

$$\frac{\sigma_e}{\sigma_0} = \frac{1+B}{B} \left[1 - \left(\frac{R_0}{R_f} \right)^{2B} \right]$$

Ejercicio 8.4.2 (continuación)

2

$$B = \mu \cot \alpha = 0.08 \cot 60^\circ = (0.08)(0.5773) = 0.0462$$

$$\varepsilon = 2 \ln \left(\frac{6.35}{4.5} \right) = 0.68875$$

$$\bar{\sigma}_0 = 334 \frac{(0.68875)^{0.165}}{1 + 0.165} = 269.6 \text{ MPa}$$

$$\sigma_e = 269.6 \frac{1 + 0.0462}{0.0462} \left[1 - \left(\frac{6.35}{4.5} \right)^{2(0.0462)} \right] = -197.4 \text{ MPa}$$

El signo menos es debido a que el esfuerzo es de compresión.

$$P = \sigma_e A_e = 197.4(\pi)(6.35^2) = 25 \text{ kN}$$

b) Potencia

$$\dot{W} = Pv = 25(10^3)(2/60) = 833.3 \text{ W} = 833/745.7 \text{ HP} = 1.1 \text{ HP}$$

8.5. Laminación

La ecuación para determinar la presión de laminación es la misma utilizada para calcular la presión promedio de forja de una placa en deformación plana con fricción deslizante entre el rodillo y el material que está en proceso de laminación (ecuación 8.2.2, sección 8.2).

$$\bar{p} = \frac{\sigma'_0}{2\mu a / h} \left\{ \exp \left(\frac{2\mu a}{h} \right) - 1 \right\} \quad (8.2.2)$$

Durante la laminación, en cualquier punto sobre la superficie de contacto actúan dos fuerzas. En la figura 8.5.1 se identifican la fuerza radial P_R y la fuerza de corte debida a fricción F . La componente vertical de la fuerza radial P_R recibe el nombre de fuerza de laminación P . La fuerza de laminación es la fuerza con la que los rodillos comprimen el metal. En un punto comprendido entre el plano de entrada xx y el plano de salida yy , las velocidades superficiales de rodillos y material en proceso son iguales; a este punto se le denomina punto neutro, N .

En el espacio comprendido entre el plano de entrada xx y el punto neutro, la lámina se mueve más lentamente que la superficie del rodillo y por eso la fuerza de fricción F impulsa el material hacia el interior de la garganta.

En la superficie de contacto comprendida entre el punto neutro y el plano de salida, la lámina se mueve más rápido que la superficie del rodillo, la dirección de la fuerza de fricción se invierte y se opone a que la lámina abandone los rodillos. La

presión de laminación p es el cociente de la fuerza de laminación P dividida entre el área de contacto:

$$p = \frac{P}{bL_p} \tag{8.5.1}$$

donde el área de contacto entre el metal y los rodillos es igual al producto del ancho de la lámina b por la proyección horizontal L_p del arco de contacto. De la figura 8.5.1 se obtiene una expresión para L_p en función del radio R del rodillo.

$$L_p = \left[R^2 - \left(R - \frac{h_0 - h_f}{2} \right)^2 \right]^{1/2} = \left[R^2 - R^2 + R(h_0 - h_f) - \frac{(h_0 - h_f)^2}{4} \right]^{1/2}$$

Simplificando:

$$L_p = \left[R(h_0 - h_f) - \frac{(h_0 - h_f)^2}{4} \right]^{1/2} \approx [R(h_0 - h_f)]^{1/2} = \sqrt{R\Delta h} \tag{8.5.2}$$

El segundo término dentro del corchete se elimina debido a que su valor es muy pequeño.

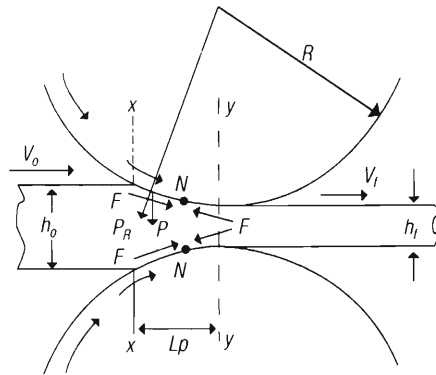


Figura 8.5.1. Laminación en deformación plana.

La fuerza de laminación se calcula multiplicando la presión del rodillo por el área de contacto entre el metal y los rodillos, de la ecuación 8.5.1:

$$P = \bar{p}bL_p \tag{8.5.3}$$

\bar{p} en la ecuación 8.5.3 se determina mediante la ecuación 8.2.2, con las siguientes adaptaciones:

$$2a = L_p; \quad h = \bar{h} = \frac{h_0 + h_f}{2}$$

el coeficiente de fricción μ tiene el mismo significado. La ecuación para la presión de laminación promedio es entonces:

$$\bar{p} = \sigma'_0 \frac{e^{\frac{\mu L_p}{\bar{h}}} - 1}{\mu L_p / \bar{h}} \quad (8.5.4)$$

Aplicando 8.5.2 y 8.5.4 en 8.5.3 resulta la ecuación para la fuerza de laminación.

$$P = \sigma'_0 \left[\frac{e^{\frac{\mu L_p}{\bar{h}}} - 1}{\mu L_p / \bar{h}} \right] b \sqrt{R \Delta h} \quad (8.5.5)$$

en la que σ'_0 , el esfuerzo en deformación plana, se utiliza cuando el ancho de la lámina o placa permanece constante; puede determinarse a partir del esfuerzo de cedencia en tensión unidireccional, mediante la relación de von Mises.

$$\sigma'_0 = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}}$$

Si durante la laminación el ancho de la placa no permanece constante, se debe utilizar el esfuerzo de cedencia unidireccional en compresión, σ_0 . En ambos valores de esfuerzo de cedencia, plano o unidireccional, se puede considerar el endurecimiento por deformación del material, estimando un esfuerzo de cedencia promedio a partir de la ecuación de endurecimiento del material; por ejemplo, considerando:

$$\bar{\sigma}_0 = \frac{1}{\varepsilon_0} \int \sigma d\varepsilon$$

Conocido el valor del esfuerzo de cedencia promedio en tensión unidireccional, se puede utilizar la ecuación de von Mises para evaluar el valor promedio del esfuerzo de cedencia en deformación plana.

Ejercicio 8.5.1

1

Calcule la fuerza de laminación para reducir en frío una lámina de aleación 7075-O de 600 mm de ancho y 20 mm de espesor 20%. Los rodillos son de acero de un diámetro de 600 mm. El material endurece por deformación conforme la ecuación $\sigma = 296.6 \varepsilon^{0.12}$ MPa. Suponga un coeficiente de fricción $\mu = 0.05$.

Respuesta: se determinan primero los factores desconocidos de la ecuación 8.5.5.

Espesor promedio:

$$h_f = 0.8h_0 = 0.8(20) = 16 \text{ mm}$$

$$\bar{h} = \frac{h_0 + h_f}{2} = \frac{20 + 16}{2} = 18 \text{ mm}$$

Ejercicio 8.5.1 (continuación)

2

Longitud proyectada L_p

$$L_p = \sqrt{R(h_0 - h_f)} = \sqrt{300(20 - 16)} = \sqrt{300(4)} = 34.6 \text{ mm}$$

Esfuerzo de cedencia promedio en deformación plana

$$\varepsilon = \ln \frac{h_0}{h_f} = \ln \frac{20}{16} = 0.2231$$

$$\bar{\sigma}_0 = \frac{K\varepsilon^n}{n+1} = \frac{296.6(0.2231)^{0.12}}{1.12} = 221.2 \text{ MPa}$$

$$\bar{\sigma}'_0 = \frac{2(221.2)}{\sqrt{3}} = 255.4 \text{ MPa}$$

Aplicando valores en la ecuación 8.5.5:

$$P = 255.4 \left[\frac{e^{0.05(34.6)/18} - 1}{0.05(34.6)/18} \right] 600 \sqrt{300(4)} = 255.4(1.050)(600)(34.64)$$

$$P = 5.57 \text{ MN}$$

Ejercicios de final de capítulo

1

- Se va a forjar en frío con una prensa de forja un cilindro de una aleación de aluminio de 40 mm de diámetro y 60 mm de altura en forma homogénea. El coeficiente de fricción es de 0.2. *Determine:* a) la carga necesaria para reducir el cilindro hasta la mitad de su altura con base en el esfuerzo de cedencia promedio, si el material endurece por deformación conforme a la expresión $\sigma = 379\varepsilon^{0.165}$, y b) la potencia consumida si la deformación se realizó en dos segundos.

Respuestas:

$$a) P = 874.9 \text{ kN}; \quad b) \dot{W} = 13.1 \text{ kW}$$

- El cilindro del problema anterior se va a forjar en las mismas condiciones anteriores, pero se considera ahora la fricción gobernada por un factor de corte $m = 0.3$. *Determine:* a) la carga necesaria para reducir el cilindro hasta la mitad de su altura, y b) la potencia consumida si la deformación se realiza en dos segundos.

Respuestas:

$$a) P = 852.6 \text{ kN}; \quad b) \dot{W} = 12.8 \text{ kW}$$

- El cilindro del problema anterior se va a forjar en caliente; considere fricción adhesiva y un comportamiento plástico perfecto con un esfuerzo de cedencia en compresión unidireccional igual a 120 MPa.

Ejercicios de final de capítulo (continuación)

2

Determine: a) la carga necesaria para reducir el cilindro hasta la mitad de su altura, y b) la potencia consumida si la deformación se realiza en dos segundos.

Respuestas:

$$a) P = 410.6 \text{ kN}; \quad b) \dot{W} = 6.2 \text{ kW}$$

4. Se va a forjar a la temperatura ambiente, en una prensa hidráulica, una placa de acero inoxidable martensítico 403 recocido de dimensiones iniciales 250 mm de largo por 100 mm de ancho y de un espesor de 50 mm, de manera que el ancho permanece constante. Si se va a reducir en un paso 50% de su espesor, calcule: a) la carga que es necesario aplicar al final de la forja, y b) la energía total de deformación. El material endurece por deformación conforme a la ecuación $\sigma = 986\epsilon^{0.23}$; el material cede conforme al criterio de von Mises; el coeficiente de fricción es igual a 0.1. Utilice el esfuerzo de cedencia promedio en sus estimaciones.

Respuestas:

$$a) P = 136 \text{ MN}, \quad b) W = 3.4 \text{ MJ}$$

5. La placa del problema se deforma en las mismas condiciones, pero la fricción está gobernada por un factor de fricción $m = 0.3$. *Determine:* a) la carga que es necesario aplicar al final de la forja, y b) la energía total de deformación.

Respuestas:

$$a) P = 106.3 \text{ MN}; \quad b) W = 2.7 \text{ MJ}$$

6. La placa de acero inoxidable martensítico 403 del problema anterior se reduce en caliente a la mitad de su espesor. Suponga esta vez fricción adhesiva. Suponga que el material se comporta como un plástico perfecto el cual cede plásticamente a un valor constante de esfuerzo $\bar{\sigma}'_0 = 250 \text{ MPa}$. *Determine:* a) la carga que es necesario aplicar al final de la forja, así como b) la energía total de deformación.

Respuestas:

$$a) P = 75 \text{ MN}; \quad b) W = 1.875 \text{ MJ}$$

7. Se va a estirar en caliente una placa de cobre de un ancho de 100 mm y un espesor de 10 mm a un espesor final de 5.0 mm, manteniendo el ancho constante, haciéndolo pasar a través de una matriz de caras planas que forman entre sí un ángulo de 30° . En experimentos de tensión unidireccional a la misma temperatura de estirado, se encontró que el material se comporta según la ecuación $\sigma = 230\epsilon^{0.47}$ y el coeficiente de fricción tiene un valor de 0.1. *Estime:* a) el esfuerzo necesario para hacer esta reducción, utilizando el esfuerzo de cedencia promedio en deformación plana; b) la fuerza de estirado.

Respuestas:

$$a) \sigma_f = 127.5 \text{ MPa}; \quad b) P_f = 63.8 \text{ kN}$$

Ejercicios de final de capítulo (continuación)

3

8. Se va a trefilar en un solo paso un alambre de acero 1070 recocido de un diámetro inicial de 6.35 mm a un diámetro final de 5.68 mm. El material endurece por deformación en frío según la expresión $\sigma = 1200\varepsilon^{0.30}$ MPa. Si el trefilado se realiza en un dado que tiene un semiángulo $\alpha = 8^\circ$ y el coeficiente de fricción en la cara de contacto matriz-alambre en proceso es igual a 0.05, *determine*: a) el esfuerzo de trefilado considerando el esfuerzo de cedencia promedio en sus cálculos, y b) la potencia mínima, en HP, necesaria para realizar el trefilado si el alambre abandona el dado a una velocidad de 2 m/s. Este paso de trefilado es el primero de una serie de varios pasos, el alambre no está enrollado en una bobina, por tanto, $\sigma_e = 0$.

Respuestas:

a) $\sigma_t = 171$ MPa; b) $\dot{W} = 11.5$ HP

9. Se fabrica por extrusión libre una varilla de 6.35 mm de diámetro a partir de una barra de 9.5 mm de diámetro de una aleación de cobre que endurece por deformación conforme a la ecuación $\sigma = 875\varepsilon^{0.52}$ MPa. Las caras de los dados forman un ángulo de 70° con el eje horizontal y el coeficiente de fricción es de 0.1. *Determine*: a) la fuerza de extrusión durante el estado estacionario del proceso ($\sigma_e = \text{constante}$), y b) la potencia de extrusión en HP si el material sale de la matriz a una velocidad de 4 m/min. A la salida de la matriz no se aplica esfuerzo de tensión alguno ($\sigma_t = 0$). Utilice en sus cálculos el esfuerzo de cedencia promedio.

Respuestas:

a) $P_e = 30.9$ kN; b) $\dot{W} = 2.76$ HP

10. Calcule la fuerza de laminación para reducir en frío una placa de latón de 1 m de ancho de un espesor inicial de 2 mm a un espesor final de 1.6 mm. Los rodillos son de acero de un diámetro de 300 mm. El esfuerzo de flujo en tensión unidireccional de la aleación es de 105 MPa y aumenta por endurecimiento conforme a la ecuación $\sigma = 900\varepsilon^{0.49}$ MPa. Suponga un coeficiente de fricción $\mu = 0.03$.

Respuesta:

$P = 2.8$ MN

CAPÍTULO 9

Método de la disipación de energía

9.1. Introducción

El método del límite superior junto con el del límite inferior forman parte del análisis límite que fue establecido por D.C. Drucker y sus colaboradores en la década de 1950. El teorema de límite superior es el fundamento del método objeto de estudio del presente capítulo; aplicado a la deformación plástica de los metales, establece que *“la rapidez de trabajo realizado por fuerzas externas sobre el cuerpo es igual o superior a la rapidez de disipación de energía para cualquier deformación plástica compatible”*; por esta razón, al método para el cálculo de esfuerzos o fuerzas para producir deformación plástica, derivado del teorema de límite superior, se le llama de la *disipación de energía*. Deformación plástica compatible significa que no deben ocurrir cavidades o traslapes al producirse la deformación plástica.

El método de la disipación de energía establece que, si los valores de carga o esfuerzo para producir deformación plástica se calculan mediante el procedimiento de igualar la potencia suministrada externamente con la suma de las potencias consumidas: i) en la deformación plástica del cuerpo, ii) en la fricción en la cara de contacto cuerpo-herramienta y iii) en la distorsión del cuerpo, resultarán iguales o mayores a los valores exactos de carga o esfuerzo.

Para que los resultados obtenidos por este método sean válidos, se debe asumir el comportamiento del material y desempeño del proceso de formado siguientes:

- El material debe ser plásticamente ideal, es decir, no endurecer por deformación o rapidez de deformación; si se desea aplicar a un material que endurece por deformación, se debe utilizar en el cálculo del esfuerzo de deformación el esfuerzo de cedencia promedio en deformación plana; de esta manera, la superficie de cedencia queda definida. El comportamiento plástico de los materiales superplásticos y el comportamiento plástico a temperatura elevada de la mayoría de los metales, son cercanos a este comportamiento ideal. Además, el material debe ser isotrópico y homogéneo.
- El proceso de formado debe tener lugar en condiciones de deformación plástica plana, como por ejemplo en laminación, o en condiciones de deformación simétrica respecto del eje longitudinal del producto deformado, como es

el caso de trefilado o extrusión de varilla o alambre de sección circular. Adicionalmente, toda la deformación se produce en unos pocos planos discretos; al interior de las áreas limitadas por estos planos, el material tiene un comportamiento rígido. El campo de deformación plástica está constituido, entonces, por planos de máxima deformación plástica, los cuales limitan áreas de metal rígido. Pueden proponerse muchos campos de deformación plástica; en la medida en que el campo de deformación propuesto se aproxime al campo real de esfuerzo, la predicción de carga del método se acercará más al valor exacto. Finalmente, la fricción caracterizada por el esfuerzo cortante que se genera en la cara de contacto cuerpo-herramienta debe ser cero o tener un valor constante; en este caso, la fricción está gobernada por el factor de corte m , definido por la relación $\tau = mk$.

Si se considera fricción adhesiva $m = 1$, entonces, $\tau = k$.

En consecuencia, para operar con el método de la disipación de energía se debe proponer un campo de deformación que conduzca a la deformación deseada y que además sea geoméricamente autoconsistente. La autoconsistencia es verificada mediante un diagrama de velocidades denominado la *hodografía del campo*. La potencia empleada para producir la deformación es estimada con base en las propiedades de resistencia del material del cuerpo. Las cargas (o esfuerzos) para producir la forma deseada en el cuerpo de material, se calculan igualando la potencia consumida internamente con la potencia suministrada externamente.

9.2. Extrusión y estirado en deformación plana

Un ejemplo sencillo para mostrar el uso del método de la disipación de energía, es la determinación de la presión necesaria para reducir 50% el área de la sección transversal de una placa de espesor unitario (dimensión normal al plano del papel), por extrusión en condiciones de deformación plana; primero con fricción cero en las paredes y segundo con fricción adhesiva.

Una reducción de área de esta magnitud por estirado no es factible, ya que se produciría fractura del material afuera del dado. El ángulo que forma la pared de la matriz con el eje longitudinal, α , se denomina *ángulo de mordida*. La deformación es simétrica, por tanto es suficiente con examinar la mitad del campo de deformación (figura 9.2.1).

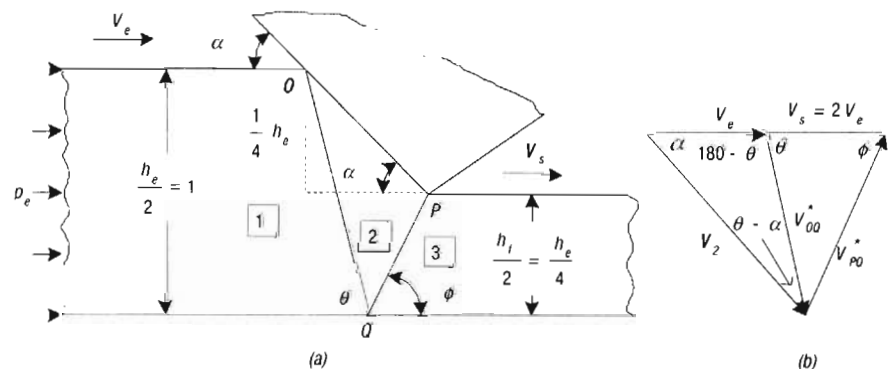


Figura 9.2.1. a) Parte media superior del campo de deformación propuesto para la extrusión en deformación plana. b) Demostración de la autoconsistencia geométrica del campo mediante la hodografía.

9.2.1. Presión de extrusión sin fricción en la superficie de contacto pieza–matriz

Toda la deformación plástica ocurre por corte a lo largo de los planos \overline{OQ} y \overline{PQ} , llamados *planos de discontinuidad de velocidad*; estos planos, junto con la pared de la matriz, plano \overline{OP} , encierran al polígono **2** que está formado por una masa rígida de material sin deformar; masa de material sin deformar es también la identificada con **1**, la cual se mueve a una velocidad V_e a la entrada de la matriz, así como la identificada con **3**, que se mueve a una velocidad V_s a la salida de la matriz.

Al arribar una partícula de material a la línea \overline{OQ} , cambia instantáneamente su velocidad a V_2 , siguiendo una dirección paralela a la pared del dado. Esta velocidad V_2 es la resultante de la velocidad V_e y de la velocidad V_{OQ}^* , como se aprecia en el diagrama de velocidades (figura 9.2.1b).

Las partículas dentro del polígono **2** experimentan una historia de desplazamiento diferente: cerca de la superficie \overline{OP} de la matriz, el desplazamiento es máximo y tiende a cero en partículas localizadas cerca del eje de simetría.

El diagrama de velocidades se construye trazando un vector horizontal V_e de una longitud proporcional a la magnitud de la velocidad de entrada. Al final de este vector se traza el vector de velocidad V_{OQ}^* , paralelo a \overline{OQ} . La magnitud de éste la determina la intersección con el vector V_2 , de dirección paralela a la pared \overline{OP} del dado. Al arribar las partículas que se desplazan en el interior del polígono **2** a la línea \overline{PQ} , a la velocidad de las partículas, V_2 , se suma la velocidad V_{PQ}^* , paralela a la línea y se produce la resultante horizontal, V_s . La magnitud de la velocidad de salida V_s es el doble de la velocidad de entrada V_e , debido a que en este proceso la reducción de área es de 50%.

La propiedad de volumen constante que tienen los materiales al deformarse plásticamente, da como resultado la autoconsistencia geométrica del campo de deformación, la cual se demuestra por el hecho de que la velocidad de salida, V_s , debe ser igual a $V_e(h_e(1)/h_s(1))$, la velocidad de entrada multiplicada por la relación de las áreas de la sección transversal a la entrada y la sección transversal a la salida. En este ejemplo, $h_e(1) = 2h_s(1)$, por lo tanto, $V_s = 2V_e$, lo cual es cierto. En estas expresiones matemáticas, el número uno entre paréntesis representa el ancho unitario de la placa.

POTENCIA CONSUMIDA INTERNAMENTE

Como se estableció anteriormente, la deformación plástica sólo tiene lugar en ciertos planos de corte o planos de discontinuidad de velocidad; la fuerza que produce el corte a lo largo de cualquier plano de discontinuidad de longitud s y espesor unitario, es $F = \tau_0 s(1) = ks$, donde τ_0 es igual al esfuerzo de cedencia en corte k del material, el cual es constante porque no hay endurecimiento.

Para simplificar, en lo sucesivo los planos de discontinuidad cuya dimensión normal al plano del papel sea unitaria, serán referidos como líneas de discontinuidad. La potencia consumida es $\dot{W} = FV^*$, donde V^* es la discontinuidad de velocidad que es paralela a la línea de discontinuidad. La potencia consumida en una sola línea de discontinuidad es:

$$\dot{W} = kV^*s \quad (9.2.1)$$

La potencia interna total por corte, \dot{W}_i , consumida en todas las líneas i de discontinuidad, es igual a la suma de la potencia consumida en cada línea de discontinuidad:

$$\dot{W}_i = \sum_1^i kV_s^* s_i \quad (9.2.2)$$

Cada línea de discontinuidad contribuye con un término ($kV_i^* s_i$) a la sumatoria.

Utilizando la longitud (s_i) de las líneas de discontinuidad y las discontinuidades de velocidad V_i^* de la figura 9.2.1 en la ecuación 9.2.2, se obtiene la potencia interna de deformación, para este ejemplo:

$$\dot{W}_i = k \left[V_{OQ}^* \overline{OQ} + V_{PQ}^* \overline{PQ} \right] \quad (9.2.3)$$

Considerando todo el campo de deformación:

$$\dot{W}_i = 2k \left[V_{OQ}^* \overline{OQ} + V_{PQ}^* \overline{PQ} \right] \quad (9.2.4)$$

POTENCIA EXTERNA DE EXTRUSIÓN Y ESTIRADO

La extrusión se realiza aplicando una presión p_e sobre el área de la sección transversal de material a la entrada de la matriz, $h_e(1)$; la velocidad del material, V_e , es debida a la presión. El estirado tiene lugar por la aplicación de un esfuerzo de tensión σ_t sobre el área de la sección transversal del material a la salida de la matriz, $h_s(1)$; la velocidad del material, V_s , es producida por este esfuerzo.

La potencia externa para cada uno de estos dos procesos es determinada por las ecuaciones siguientes.

$$\dot{W} = p_e h_e V_e \quad (9.2.5)$$

$$\dot{W} = \sigma_t h_s V_s \quad (9.2.6)$$

Por la propiedad que tienen los metales de que su volumen no cambia con la deformación plástica,

$$h_e V_e = h_s V_s$$

Utilizando esta ecuación en 9.2.6:

$$\dot{W} = \sigma_t h_e V_e \quad (9.2.7)$$

Para el caso de extrusión, igualando 9.2.4 y 9.2.5:

$$p_e h_e V_e = 2k \left[V_{OQ}^* \overline{OQ} + V_{PQ}^* \overline{PQ} \right] \quad (9.2.8)$$

Esta ecuación se puede ordenar como sigue:

$$\frac{p_e}{2k} = \frac{1}{h_e V_e} \left[V_{OQ}^* \overline{OQ} + V_{PQ}^* \overline{PQ} \right] \quad (9.2.9)$$

Para el caso de estirado, se igualan las ecuaciones 9.2.4 y 9.2.6 y se reordenan para obtener:

$$\frac{\sigma_t}{2k} = \frac{1}{h_e V_e} \left[V_{OQ}^* \overline{OQ} + V_{PQ}^* \overline{PQ} \right] \quad (9.2.10)$$

Se observa que $2k$, en las ecuaciones 9.2.9 y 9.2.10, es el esfuerzo de cedencia en deformación plana.

Las ecuaciones 9.2.9 y 9.2.10 permiten determinar la presión de extrusión o el esfuerzo de estirado una vez que se conocen las discontinuidades de velocidad y la longitud de las líneas de discontinuidad. Las longitudes \overline{OQ} , \overline{PQ} pueden medirse en la figura 9.2.1a y expresarse como una fracción de h_e ; en la misma forma, las discontinuidades de velocidad pueden determinarse midiendo las longitudes de V_{OQ}^* y V_{PQ}^* en la figura 9.2.1b y expresarse como una fracción de V_e .

Las ecuaciones 9.2.9 y 9.2.10 se pueden expresar por las formas generales

$$\frac{p_e}{2k} = \frac{1}{h_e V_e} \sum_1^i V_i^* s_i \quad (9.2.11)$$

$$\frac{\sigma_t}{2k} = \frac{1}{h_e V_e} \sum_1^i V_i^* s_i \quad (9.2.12)$$

donde i es el número de discontinuidades.

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS PARA DETERMINAR LAS LÍNEAS Y VELOCIDADES DE DISCONTINUIDAD

Un procedimiento alternativo para determinar las líneas y velocidades de discontinuidad es mediante relaciones trigonométricas. $\frac{\overline{OQ}}{h_e}$, $\frac{\overline{PQ}}{h_e}$, $\frac{V_{OQ}^*}{V_e}$, $\frac{V_{PQ}^*}{V_e}$

Es conveniente determinar las relaciones $\frac{\overline{OQ}}{h_e}$, $\frac{\overline{PQ}}{h_e}$, $\frac{V_{OQ}^*}{V_e}$, $\frac{V_{PQ}^*}{V_e}$, para aplicarlas en la ecuación 9.2.9 o en la 9.2.10.

De la figura 9.2.1a:

$$\text{sen } \theta = \frac{h_e / 2}{\overline{OQ}} \Rightarrow \frac{\overline{OQ}}{h_e} = \frac{\text{csc } \theta}{2} \quad (a)$$

$$\text{sen } \phi = \frac{h_e}{4 \overline{PQ}} \Rightarrow \frac{\overline{PQ}}{h_e} = \frac{\text{csc } \phi}{4} \quad (b)$$

De la figura 9.2.1b:

$$\frac{V_{OQ}^*}{\text{sen } \alpha} = \frac{V_e}{\text{sen}(\theta - \alpha)} \Rightarrow \frac{V_{OQ}^*}{V_e} = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen}(\theta - \alpha)} \quad (c)$$

$$\frac{V_{PQ}^*}{\text{sen } \theta} = \frac{V_{OQ}^*}{\text{sen } \phi} \Rightarrow \frac{V_{PQ}^*}{V_e} = (\text{sen } \theta)(\text{csc } \phi) \frac{V_{OQ}^*}{V_e} \quad (d)$$

Para obtener la ecuación d se dividieron los dos miembros de la ecuación entre V_e . Finalmente, utilizamos las ecuaciones a , b , c y d en la ecuación 9.2.9 para obtener p_e ; o bien las aplicamos en la 9.2.10 para calcular σ_t .

Para una reducción dada, el valor de la presión depende del esfuerzo de cedencia en deformación plana, del ángulo α que la pared de la matriz forma con el eje longitudinal de la matriz y del tipo de triángulo, es decir, del valor de los ángulos θ , ϕ .

9.2.2. Presión de extrusión con fricción en la superficie de contacto pieza-matriz

Para un material sólido rígido plástico ideal, de comportamiento similar al que exhibe un metal al deformarse plásticamente en caliente, se puede considerar que la fric-

ción es adhesiva en la interfaz: dado-pieza \overline{OP} ; es decir, el esfuerzo de corte en la cara es igual al esfuerzo de cedencia en corte del material en proceso. A lo largo de esta superficie, el material se mueve con una velocidad $V_{OP}^* = V_2$, mientras que la matriz permanece sin movimiento; por eso, V_2 es la discontinuidad de velocidad y la línea de discontinuidad es \overline{OP} . Para tomar en cuenta la discontinuidad debida a fricción en la cara de contacto, se debe agregar el término $2k(V_2 \overline{OP})$ a la ecuación 9.2.8. Ordenando la ecuación resultante para obtener una ecuación similar a la 9.2.9 para extrusión, resulta:

$$\frac{P_e}{2k} = \frac{1}{h_e V_e} \left[V_2 \overline{OP} + V_{OQ}^* \overline{OQ} + V_{PQ}^* \overline{PQ} \right] \tag{9.2.13}$$

En la medida en que el campo de deformación propuesto se asemeje más al campo real, el valor calculado para la presión de extrusión será más próximo al valor real de presión.

Ejercicio 9.2.1

1

Se reduce 50% en deformación plana, por extrusión en caliente, la sección transversal de una barra de metal que tiene un esfuerzo de cedencia en corte $k = 50$ MPa, utilizando para ello una matriz que tiene un ángulo de mordida $\alpha = 60^\circ$ (figura 9.2.2).

Los ángulos que forman las caras del polígono 2 con el eje longitudinal son $\theta = 81.6^\circ$, $\phi = 70^\circ$. Determine el valor de la presión de extrusión: a) sin fricción, y b) con fricción en la cara de contacto dado-material.

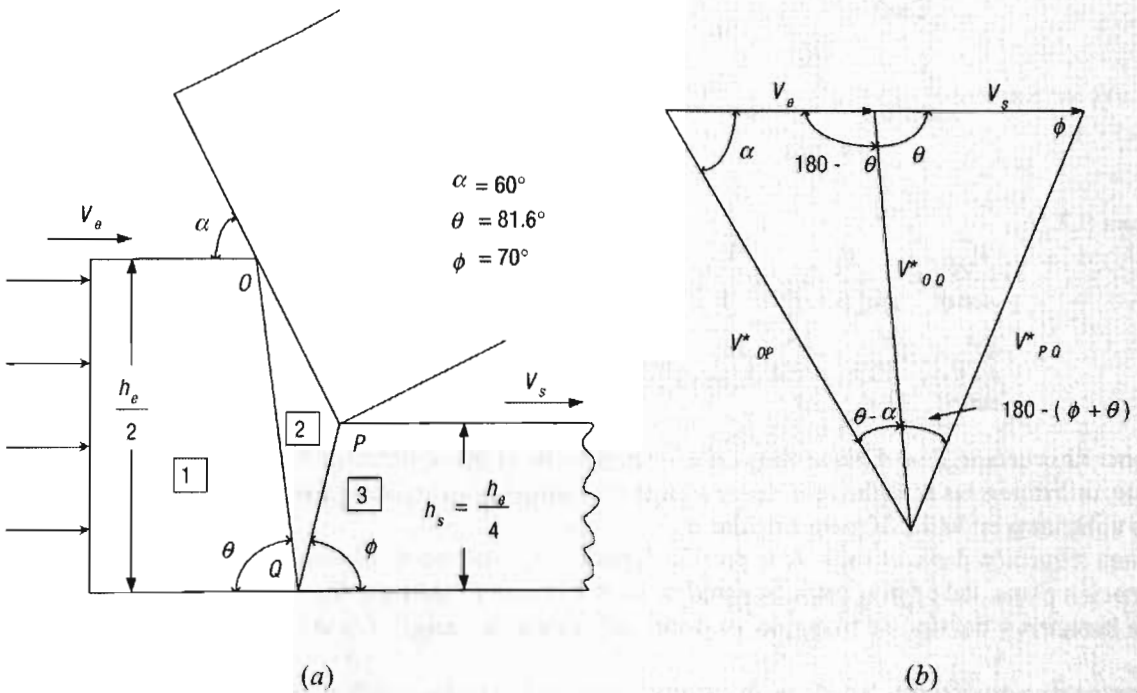


Figura 9.2.2. Extrusión con reducción de área de 50% con los valores de ángulos indicados.
a) Campo de deformación. b) Hodografía.

Ejercicio 9.2.1 (continuación)

2

Respuestas:

a) Sin fricción

Se determinan los términos de la ecuación 9.2.9. Aplicando valores en las ecuaciones de a a d resulta:

$$\frac{\overline{OQ}}{h_e} = \frac{\csc 81.6}{2} = \frac{1.0108}{2} = 0.5054$$

$$\frac{\overline{PQ}}{h_e} = \frac{\csc 70}{4} = \frac{1.0642}{4} = 0.266$$

$$\frac{V_{OQ}^*}{V_e} = \frac{\text{sen}60}{\text{sen}(81.6 - 60)} = \frac{\text{sen}60}{\text{sen}21.6} = \frac{0.866}{0.3681} = 2.3526$$

$$\frac{V_{PQ}^*}{V_e} = (\text{sen}81.6)(\csc 70)(2.3526) = (0.9892)(1.0642)(2.3526) = 2.4766$$

Aplicando valores en la ecuación 9.2.9:

$$\frac{p_e}{2k} = [(2.3526)(0.5054) + (2.4766)(0.266)] = 1.8478$$

de donde resulta que la presión de extrusión es

$$p_e = 184.8 \text{ MPa}$$

b) Con fricción

Para aplicar la ecuación 9.2.13 es necesario derivar las relaciones para calcular $\frac{\overline{OP}}{h_e}$, así como $\frac{V_2}{V_e}$.

De la figura 9.2.2a:

$$\text{sen} \alpha = \frac{h_e/4}{\overline{OP}} \Rightarrow \frac{\overline{OP}}{h_e} = \frac{\csc \alpha}{4} \quad (e)$$

de la figura 9.2.2b:

$$\frac{V_2}{\text{sen}(180 - \theta)} = \frac{V_e}{\text{sen}(\theta - \alpha)} \Rightarrow \frac{V_2}{V_e} = \frac{\text{sen}(180 - \theta)}{\text{sen}(\theta - \alpha)} \quad (f)$$

Aplicando valores:

$$\frac{\overline{OP}}{h_e} = \frac{\csc 60}{4} = 0.2886$$

$$\frac{V_2}{V_e} = \frac{\text{sen}(180 - 81.6)}{\text{sen}(81.6 - 60)} = \frac{0.9893}{0.3681} = 2.6875$$

Ejercicio 9.2.1 (continuación)

3

Aplicando valores en la ecuación 9.2.13:

$$\frac{P_e}{2k} = [(2.6875)(0.2886) + (2.3526)(0.5054) + (2.4766)(0.266)] = 2.623$$

De donde: $p_e = 262.3 \text{ MPa}$

Ejercicio 9.2.2

1

Se reduce en deformación plana, por extrusión en caliente, la sección transversal de una barra del mismo material del problema anterior utilizando esta vez una matriz que tiene un ángulo de mordida $\alpha = 15^\circ$, hasta que $h_s = 0.1h_e$ (figura 9.2.3). Determine el valor de la presión de extrusión con fricción. $k = 50 \text{ MPa}$.

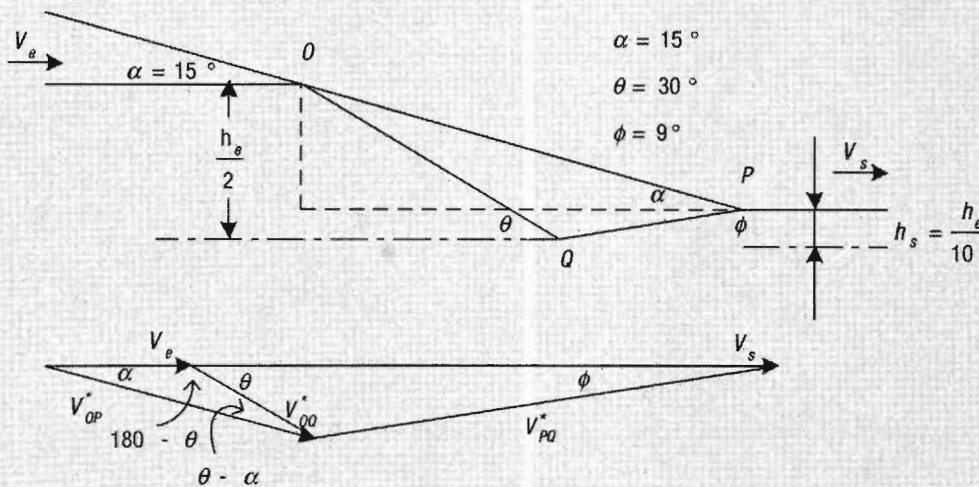


Figura 9.2.3. Reducción de 80% el área de la sección transversal de una barra de metal por extrusión en deformación plana.

Para este ejercicio, las ecuaciones a , c , d , y f no cambian; las ecuaciones b y e sí se modifican debido a que la reducción de área es de 80%, como se observa en la figura 9.2.3, y toman la forma:

$$\frac{PQ}{h_e} = \frac{\csc \phi}{10}$$

$$\frac{OP}{h_e} = \frac{4 \csc \alpha}{10}$$

Aplicando valores en todas las relaciones de las líneas y discontinuidades de velocidad de la ecuación 9.2.13:

Ejercicio 9.2.2 (continuación)

2

$$\frac{\overline{OQ}}{h_e} = \frac{\csc 30}{2} = 1$$

$$\frac{\overline{PQ}}{h_e} = \frac{\csc 9}{10} = 0.6392$$

$$\frac{\overline{OP}}{h_e} = \frac{4 \csc 15}{10} = 1.5455$$

$$\frac{V_2}{V_e} = \frac{V_{OP}^*}{V_e} = \frac{\sin(180-30)}{\sin(30-15)} = 1.932$$

$$\frac{V_{OQ}^*}{V_e} = \frac{\sin 15}{\sin(30-15)} = 1$$

$$\frac{V_{PQ}^*}{V_e} = \sin 30 \csc 9(1) = 3.1962$$

Aplicando valores en 9.2.13:

$$\frac{p_e}{2k} = [(1.932)(1.5455) + (1)(1) + (3.1962)(0.6392)]$$

$$\frac{p_e}{2k} = 9.065$$

$$p_e = 906.5 \text{ MPa}$$

La suma del segundo y tercer términos en corchetes corresponde al caso sin fricción y produce un valor $p_e = 6.086k$. Con fricción el valor de la presión de extrusión es $p_e = 18.13k$, un valor 3 veces mayor que sin fricción; la razón es que en este problema el ángulo α es muy pequeño, por lo que la superficie de contacto pieza-herramienta es muy grande.

Ejercicio 9.2.3

1

Se reduce, en deformación plana por extrusión en caliente, 50% la sección transversal de una placa, con una matriz que tiene un ángulo de mordida $\alpha = 45^\circ$. El campo de deformación tiene la geometría mostrada en la figura 9.2.4. Determine el valor de la presión de extrusión en función de k : a) sin fricción, y b) con fricción.

Una observación que, aunque demasiado obvia, hace más fácil el trazo de la hodografía es la siguiente: los ángulos que forman entre sí las líneas de discontinuidad son iguales a los ángulos que forman entre sí las direcciones de las discontinuidades de velocidad correspondientes; por ejemplo, el ángulo entre \overline{OQ} y \overline{PQ} es igual al ángulo entre V_{OQ}^* y $V_{PQ}^* = 85^\circ$.

Respuestas:

a) Sin fricción

La ecuación para calcular la presión en este caso, de acuerdo con la ecuación general 9.2.2 y la figura 9.2.4, toma la forma:

Ejercicio 9.2.3 (continuación)

$$\frac{P_e}{2k} = \frac{1}{h_e V_e} \left[V_{OQ}^* \overline{OQ} + V_{PQ}^* \overline{PQ} + V_{QR}^* \overline{QR} + V_{PR}^* \overline{PR} \right] \quad (9.2.14)$$

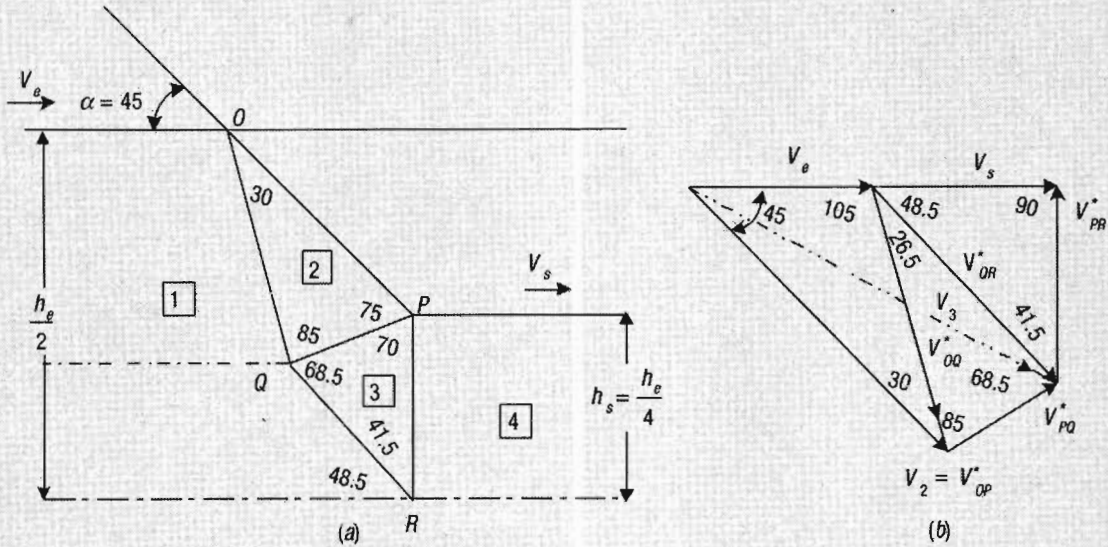


Figura 9.2.4. Reducción por extrusión de 50% del área de la sección transversal de una placa. a) Campo de deformación formado por dos triángulos. b) Holograma de velocidades.

Para determinar las discontinuidades de velocidad, es necesario trazar la hodografía. En este problema las partículas de material siguen dos caminos:

- I) Las que se encuentran localizadas en la región 1 arriba de la línea horizontal que pasa por Q .
- II) Las que se encuentran en la región 1 debajo de la línea horizontal que pasa por Q .

Las partículas arriba de Q , al atravesar la línea de discontinuidad \overline{OQ} , cambian su velocidad de V_e a V_2 que tiene una dirección paralela a la superficie de contacto con la matriz, línea \overline{OP} . Se traza el vector V_e horizontal y, a escala de la velocidad de entrada, a partir del origen de este vector, se traza V_2 paralelo a la línea \overline{OP} . Se traza el vector de discontinuidad de velocidad V_{OQ}^* ; este vector parte del extremo final del vector V_e y se traza paralelo a la línea de discontinuidad \overline{OQ} . La intersección de V_{OQ}^* con V_2 determina la magnitud de estos dos vectores de velocidad.

Observe que V_2 es la resultante de V_e y de V_{OQ}^* (figura 9.2.4b).

Las partículas de material en el polígono 2 al cruzar la línea de discontinuidad \overline{PQ} y entrar al polígono 3 cambian de velocidad. La magnitud y dirección de la velocidad de las partículas en el polígono 3 se determinan trazando un vector paralelo a la línea \overline{PQ} , a partir del extremo del vector V_2 . El camino que siguen las partículas que se encuentran debajo de la línea horizontal que pasa por Q fija la magnitud de V_{PQ}^* . Todas las partículas que se encuentran en esta área al atravesar la línea \overline{QR} entran al triángulo 3, por lo tanto su velocidad es la misma que la de las partículas que al principio de la deformación se encontraban en la parte superior y que atravesaron la línea \overline{PQ} .

Ejercicio 9.2.3 (continuación)

3

Para fijar la velocidad común a ambas partículas, se traza un vector paralelo a \overline{QR} que parte del final de V_e y corta al vector V_{PQ}^* . Al unir este punto de intersección con el origen de V_e , se determina un vector V_3 , el cual representa la magnitud y dirección de las partículas en 3.

Ahora todas las partículas tienen la velocidad V_3 . Al cruzar la línea de discontinuidad, \overline{PR} cambia la dirección de las partículas a V_s . La magnitud y dirección de V_{PR}^* se obtienen simplemente trazando una línea paralela a \overline{PR} que parte del final de V_3 y que al cortar la prolongación de V_e determina su magnitud, así como la del vector de salida, $V_s = 2V_e$.

Las magnitudes de los términos de la ecuación 9.2.14 se pueden determinar ya sea midiendo las líneas de discontinuidad en la figura 9.2.4a y las discontinuidades de velocidad en la figura 9.2.4b, o por un procedimiento trigonométrico, ya que se conocen suficientes datos como para calcular estos elementos.

b) Con fricción

Como se estableció anteriormente, para calcular la presión tomando en cuenta la fricción, se deben incorporar a la ecuación para el cálculo de la presión sin fricción, los factores del producto de la línea de discontinuidad \overline{OP} por la velocidad de discontinuidad V_{OP}^* ; de esta manera resulta la ecuación siguiente:

$$\frac{p_e}{2k} = \frac{1}{h_e V_e} \left[V_2 \overline{OP} + V_{OQ}^* \overline{OQ} + V_{PQ}^* \overline{PQ} + V_{QR}^* \overline{QR} + V_{PR}^* \overline{PR} \right] \quad (9.2.15)$$

Se hacen ahora los cálculos de p_e para las condiciones sin fricción y con fricción.

Sin fricción

Para esta condición se utiliza la ecuación 9.2.14.

Las líneas de discontinuidad son, conforme a la figura 9.2.4a:

$$\overline{PR} = \frac{h_e}{4} \Rightarrow \frac{\overline{PR}}{h_e} = \frac{1}{4}$$

Por la ley de los senos:

$$\frac{\overline{PR}}{\text{sen } 68.5} = \frac{\overline{QR}}{\text{sen } 70} \Rightarrow \overline{QR} = \text{sen } 70 \csc 68.5 \overline{PR} = \text{sen } 70 \csc 68.5 \frac{h_e}{4}$$

$$\frac{\overline{QR}}{h_e} = \frac{\text{sen } 70 \csc 68.5}{4} = \frac{(0.9397)(1.0748)}{4} = 0.2525$$

$$\frac{\overline{PQ}}{\text{sen } 41.5} = \frac{\overline{QR}}{\text{sen } 70} \Rightarrow \overline{PQ} = \text{sen } 41.5 \csc 70 (0.2525) h_e$$

$$\frac{\overline{PQ}}{h_e} = \text{sen } 41.5 \csc 70 (0.2525) = (0.6626)(1.0642)(0.2525) = 0.178$$

$$\frac{\overline{OQ}}{\text{sen } 75} = \frac{\overline{PQ}}{\text{sen } 30} \Rightarrow \frac{\overline{OQ}}{h_e} = \text{sen } 75 \csc 30 \overline{PQ} = (0.9659)(2)(0.178) = 0.3439$$

Ejercicio 9.2.3 (continuación)

Discontinuidades de velocidad

$$\frac{V_{OQ}^*}{\text{sen}45} = \frac{V_e}{\text{sen}30} \Rightarrow \frac{V_{OQ}^*}{V_e} = \text{sen}45 \text{csc}30 = (0.7071)(2) = 1.4142$$

$$\frac{V_{PQ}^*}{\text{sen}26.5} = \frac{V_{OQ}^*}{\text{sen}68.5} \Rightarrow \frac{V_{PQ}^*}{V_e} = \text{sen}26.5 \text{csc}68.5(1.4142)$$

$$\frac{V_{PQ}^*}{V_e} = (0.4462)(1.0748)(1.4142) = 0.6782$$

$$\frac{V_{QR}^*}{\text{sen}85} = \frac{V_{PQ}^*}{\text{sen}26.5} \Rightarrow \frac{V_{QR}^*}{V_e} = \text{sen}85 \text{csc}26.5(0.6782)$$

$$\frac{V_{QR}^*}{V_e} = (0.9962)(2.2411)(0.6782) = 1.5141$$

$$\frac{V_{PR}^*}{\text{sen}48.5} = \frac{V_{QR}^*}{\text{sen}90} \Rightarrow \frac{V_{PR}^*}{V_e} = \text{sen}48.5 \text{csc}90(1.5141)$$

$$\frac{V_{PR}^*}{V_e} = (0.7489)(1)(1.5141) = 1.1339$$

Utilizando estos valores en la ecuación 9.2.14:

$$\frac{P_e}{2k} = [(1.4142)(0.3439) + (0.6782)(0.178) + (1.5141)(0.2525) + (1.1139)(0.25)]$$

$$\frac{P_e}{2k} = [(0.4863) + (0.1207) + (0.3823) + (0.2785)] = 1.268$$

$$\frac{P_e}{2k} = 1.268$$

Con fricción

Para tomar en cuenta la fricción se calcula el término $\frac{V_2 \overline{OP}}{V_e h_e}$. De la figura 9.2.4a:

$$\frac{\overline{OP}}{\text{sen}85} = \frac{\overline{OQ}}{\text{sen}75} \Rightarrow \frac{\overline{OP}}{h_e} = \text{sen}85 \text{csc}75(0.3439)$$

$$\frac{\overline{OP}}{h_e} = (0.9962)(1.0353)(0.3439) = 0.3547$$

De la figura 9.2.4b:

$$\frac{V_2}{\text{sen}105} = \frac{V_e}{\text{sen}30} \Rightarrow \frac{V_2}{V_e} = \text{sen}105 \text{csc}30 = (0.9659)(2) = 1.9318$$

$$\frac{V_2 \overline{OP}}{V_e h_e} = (1.9318)(0.3547) = 0.6852$$

Ejercicio 9.2.3 (continuación)

5

Agregando este término a la ecuación sin fricción:

$$\frac{p_e}{2k} = [0.6852 + 1.268]$$

$$\frac{p_e}{2k} = 1.9532$$

9.3. Compresión en la deformación plana de una placa

El campo de deformación más simple para este proceso es el mostrado en la figura 9.3.1. En ella, dentro de cada uno de los cuatro polígonos **1**, **2**, **3**, **4**, el metal se mueve en forma rígida como un bloque a lo largo de las líneas de discontinuidad \overline{PO} , \overline{QO} , \overline{RO} , \overline{SO} . En particular, los polígonos **1** y **3**, debido a la fricción en la interfaz platina-metal, son zonas de metal muerto que se mueven en la dirección y a la velocidad de las platinas; por eso $V_1 = -V_3 = V_p$.

El metal en los polígonos **2** y **4** se mueve perpendicularmente a la dirección de aplicación de la presión, la velocidad en ambos polígonos es de la misma magnitud en razón de la simetría de deformación pero de sentidos opuestos, $V_2 = -V_4$. La velocidad V_2 es la resultante de V_3 y de la discontinuidad de velocidad V_{OS}^* . La velocidad V_4 lo es de V_3 y de V_{OR}^* (parte superior de la figura 9.3.1b). V_2 y V_4 son también las resultantes de V_1 y de V_{OP}^* y de V_1 y de V_{OQ}^* , respectivamente (parte inferior de la figura 9.3.1b).

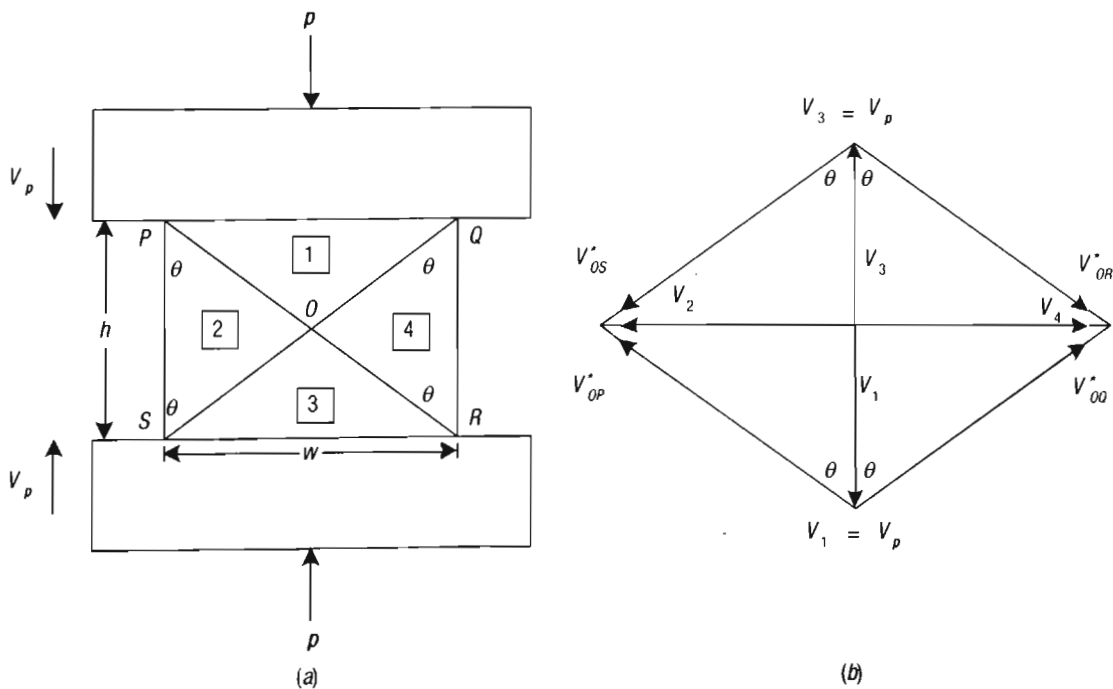


Figura 9.3.1. Compresión en deformación plana de una placa. a) Campo de deformación. b) Hodografía (Caddell y Hosford, 1980).

La energía disipada internamente es:

$$\dot{W}_i = k \left[\overline{OP} V_{OP}^* + \overline{OQ} V_{OQ}^* + \overline{OS} V_{OS}^* + \overline{OR} V_{OR}^* \right]$$

Como las discontinuidades de línea son iguales entre sí y las discontinuidades de velocidad tienen entre sí el mismo valor, entonces:

$$\overline{OP} = \overline{OQ} = \overline{OS} = \overline{OR} \text{ y } V_{OP}^* = V_{OQ}^* = V_{OS}^* = V_{OR}^*$$

$$\dot{W}_i = 4k \overline{OP}(1)V_{OP}^* \quad (i)$$

El trabajo externo por unidad de tiempo es:

$$\dot{W}_e = 2pw(1)V_p \quad (ii)$$

Igualando estas dos expresiones:

$$2pwV_p = 4k \overline{OP} V_{OP}^* \quad (iii)$$

El factor 2 en el primer miembro de iii es debido al número de platinas. El factor (1) en las ecuaciones i y ii es la dimensión de la placa en la dirección normal al plano del papel.

De la geometría de la figura 9.3.1:

$$\overline{OP} = \frac{(h^2 + w^2)^{1/2}}{2} \quad (iv)$$

$$\sec \theta = \frac{\overline{OP}}{h} = \frac{V_{OP}^*}{V_p} = \frac{(h^2 + w^2)^{1/2}}{h}$$

de donde

$$V_{OP}^* = V_p \frac{(h^2 + w^2)^{1/2}}{h} \quad (v)$$

Sustituyendo por iv y por v en iii:

$$2pwV_p = 4kV_p \frac{(h^2 + w^2)^{1/2}}{2} \frac{(h^2 + w^2)^{1/2}}{h} = 4kV_p \frac{h^2 + w^2}{2h}$$

Simplificando:

$$\frac{p}{2k} = \frac{1}{2} \left(\frac{h}{w} + \frac{w}{h} \right) \quad (9.3.1)$$

Ejercicio 9.3.1

1

Una placa metálica, de un espesor de 50 mm (h), un ancho de 100 mm (w) y una longitud de 150 mm, se va a comprimir en deformación plana hasta 50% en su espesor inicial; el largo permanecerá sin deformar. Calcule la presión de extrusión, si el esfuerzo cortante del material es de 50 MPa.

Respuesta: el ancho al final de la deformación va a aumentar a 200 mm debido a que el volumen permanece constante al deformarse plásticamente la placa. Aplicando valores en la ecuación 9.3.1:

$$\frac{p}{2k} = \frac{1}{2} \left(\frac{25}{200} + \frac{200}{25} \right) = 4.063$$

Por lo tanto:

$$p = 406.3 \text{ MPa}$$

Ejercicio 9.3.2

1

Se obtienen valores más bajos de presión para la deformación en compresión plana utilizando un campo de deformación constituido por más de un triángulo en contacto con las platinas de la prensa. El empleo de un número impar de triángulos ofrece la ventaja de que el triángulo central será una zona muerta adherida a las platinas.

Determine la ecuación para calcular la presión utilizando un campo de deformación con tres triángulos (figura 9.3.2). Las líneas de discontinuidad tienen la misma longitud: $\overline{PQ} = \overline{QR} = \overline{RS}$; y el ángulo es $\theta = \pi/4$.

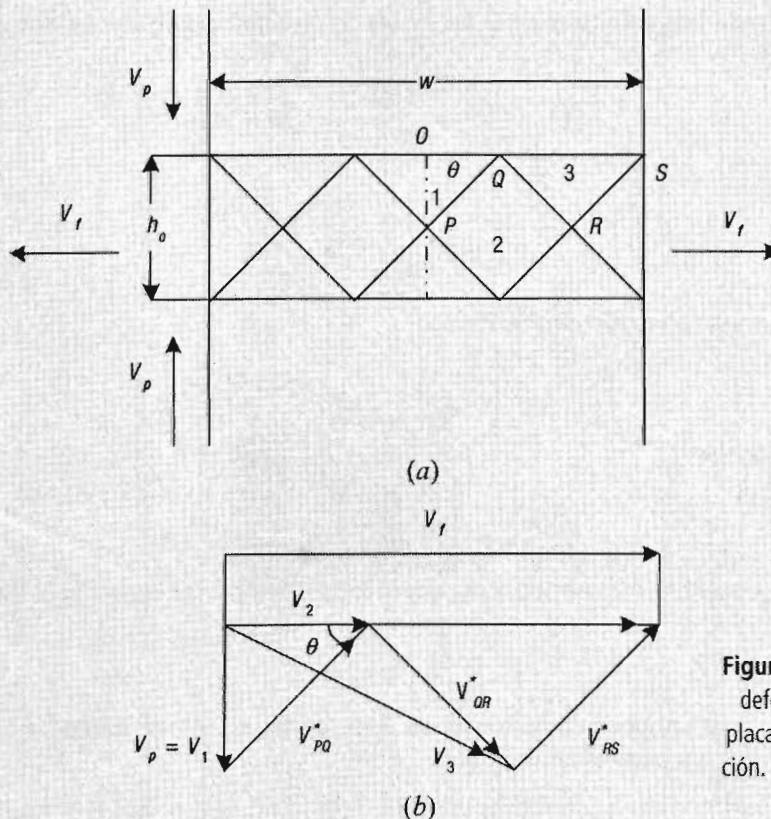


Figura 9.3.2. Compresión en deformación plana de una placa. a) Campo de deformación. b) Hodografía (Backofen, 1972).

Ejercicio 9.3.2 (continuación)

2

Respuesta:

En este ejemplo la zona muerta **1** se mueve a la misma velocidad que la platina superior, por tanto $V_p = V_1$. En la línea de discontinuidad \overline{PQ} , la velocidad V_1 se suma a la discontinuidad de velocidad V_{PQ}^* y la resultante es la velocidad V_2 en el bloque **2**, paralela a la superficie de la platina (figura 9.3.2b).

La velocidad V_2 se suma a la discontinuidad de velocidad V_{QR}^* al alcanzar las partículas de material la línea de discontinuidad \overline{QR} , por eso la velocidad de éstas en el bloque **3**, V_3 , es obtenida uniendo el origen de V_2 con el final de V_{QR}^* .

La velocidad V_3 se suma a la discontinuidad V_{RS}^* para producir la velocidad final V_f .

La autoconsistencia del campo de deformación se satisface si la velocidad final tiene una magnitud:

$$V_f = V_p \frac{w}{h_0}$$

Como en los ejemplos anteriores, la dirección de las discontinuidades de velocidad se traza paralela a las líneas de discontinuidad.

Se puede deducir una ecuación muy sencilla para calcular la presión de compresión aprovechando que en este campo de deformación las líneas de discontinuidad son todas de la misma longitud y que las discontinuidades de velocidad son iguales entre sí: $V_{PQ}^* = V_{QR}^* = V_{RS}^*$. En la ecuación 9.2.9, obtenida para extrusión, la altura h_e se transforma en el ancho w para el caso de compresión (figura 9.3.2).

En la figura 9.3.2a:

$$\overline{OQ} = \frac{w}{2n} \quad (a)$$

Donde n es el número de intersecciones entre las líneas de discontinuidad, tres en este ejemplo. Asimismo, de la figura 9.3.2a:

$$\overline{PQ} = \frac{\overline{OQ}}{\cos\theta} = \frac{w}{2n\cos\theta} = \overline{QR} = \overline{RS} \quad (b)$$

En la figura 9.3.2b:

$$V_{PQ}^* = V_{QR}^* = V_{RS}^* = \frac{V_p}{\sin\theta}$$

La ecuación 9.2.9 para este ejemplo toma la forma:

$$\frac{p}{2k} = \frac{1}{wV_p} \left[V_{PQ}^* \overline{PQ} + V_{QR}^* \overline{QR} + V_{RS}^* \overline{RS} \right] \quad (c)$$

Sustituyendo por a y b en c :

$$\frac{p}{2k} = \frac{1}{wV_p} \left[n \left(\frac{V_p}{\sin\theta} \right) \left(\frac{w}{2n\cos\theta} \right) \right]$$

En esta ecuación, la primera n indica el número de términos iguales en la ecuación c . Simplificando:

$$\frac{p}{2k} = \frac{1}{\sin 2\theta} \quad (9.3.2)$$

La presión para comprimir un metal en deformación plana depende del esfuerzo de cadencia en corte y del ángulo θ . En este ejemplo en particular:

$$\theta = \pi/4; p = 2k$$

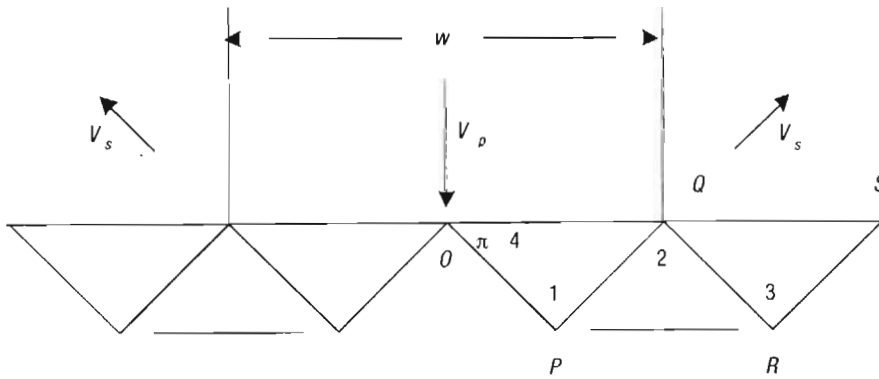
9.4. Presión para endentar un bloque semiinfinito de metal

ENDENTACIÓN SIN FRICCIÓN

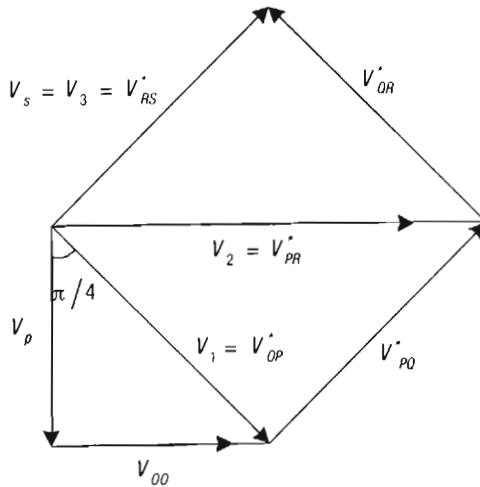
En este caso, el material se desliza sobre la interfaz pieza–endentador, \overline{OQ} . Al sumarse la velocidad V_p del endentador con la discontinuidad de velocidad V_{OQ}^* , da como resultado que las partículas de metal se muevan dentro del bloque 1 a una velocidad V_1 , de dirección paralela a \overline{OP} (figura 9.4.1a). La hodografía de la figura 9.4.1b ilustra esta situación.

La velocidad V_1 de las partículas se suma a la discontinuidad de velocidad V_{PQ}^* y resulta la velocidad en el bloque 2, V_2 , paralela a V_{PR}^* .

Cuando las partículas de metal atraviesan la discontinuidad V_{QR}^* , su velocidad V_2 se suma a la velocidad V_{QR}^* y resulta la velocidad a la que se mueven las partículas en el bloque 3, que es paralela a la discontinuidad V_{RS}^* y que es la velocidad V_3 , a la que son impulsadas las partículas fuera del plano horizontal.



(a)



(b)

Figura 9.4.1. Endentación de un bloque semiinfinito sin fricción.
a) Campo de deformación. b) Hodografía (Backofen, 1972).

La presión de endentación es calculada mediante la forma modificada de la ecuación 9.2.11:

$$p(w/2)V_p = k \left[V_{OP}^* \overline{OP} + V_{PQ}^* \overline{PQ} + V_{PR}^* \overline{PR} + V_{QR}^* \overline{QR} + V_{RS}^* \overline{RS} \right]$$

El primer miembro de esta ecuación es la energía externa que se aplica a la mitad del campo de deformación, por eso w está dividido entre 2.

Se observa en la figura 9.4.2a que:

$$\overline{OP} = \overline{PQ} = \overline{QR} = \overline{RS} = w / (4\cos\pi/4) = (\sqrt{2} / 4)w$$

Entonces, la única discontinuidad que tiene una longitud diferente es $\overline{PR} = 0.5w$.

Cuatro de las discontinuidades de velocidad son de igual magnitud; de la figura 9.4.1b resulta:

$$V_{OP}^* = V_{PQ}^* = V_{QR}^* = V_{RS}^* = V_p \sec\theta = V_p \sec(\pi / 4) = \sqrt{2}V_p$$

De la figura 9.4.1b: $V_{PR}^* = 2V_{OP}^* \cos(\pi / 4) = 2\sqrt{2}V_p \cos(\pi / 4)$

$$V_{PR}^* = 2V_p$$

Sustituyendo por las discontinuidades en la ecuación para la presión de endentación se obtiene:

$$p(w/2)V_p = k \left[4(\sqrt{2} / 4)(w)(\sqrt{2}V_p) + (0.5w)(2V_p) \right]$$

Simplificando:

$$p(w/2)V_p = k \left[2wV_p + wV_p \right]$$

de donde: $\frac{P}{2k} = 3$

ENDENTACIÓN CON FRICCIÓN

En este caso, el triángulo 1 es una zona muerta que está adherida al endentador en la interfaz con la pieza, figura 9.4.2.

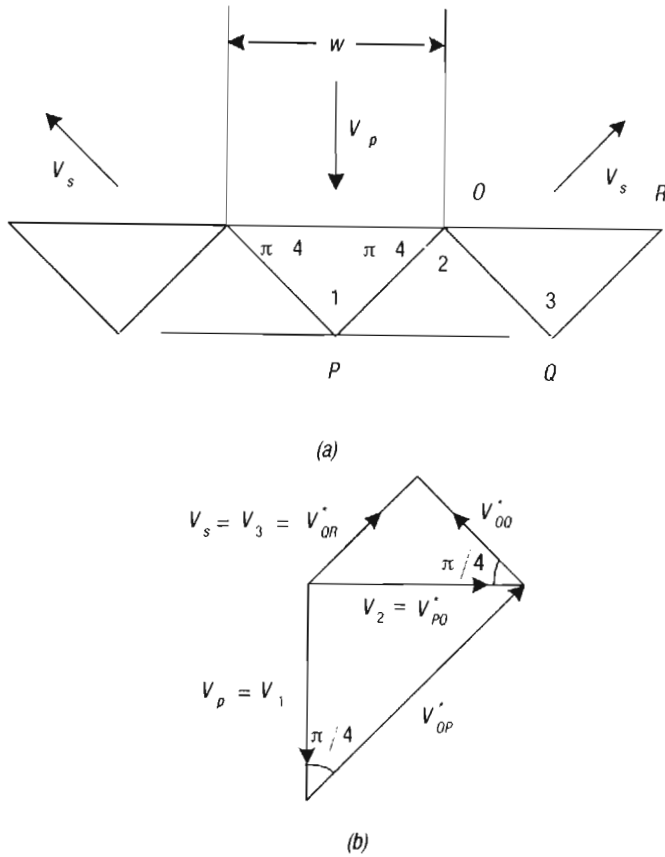


Figura 9.4.2. Material con zona muerta pegada en la interfaz endentador–bloque de metal.
 a) Campo de deformación. b) Hodografía (Backofen, 1972).

La zona **1** se mueve a la velocidad V_p del endentador. Al cruzar las partículas de material la línea de discontinuidad \overline{OP} , V_{OP}^* se suma a la velocidad V_p , por lo que la velocidad de éstas en el bloque **2** es paralela a la línea de discontinuidad V_{PQ}^* .

Cuando las partículas de material cruzan la línea \overline{OQ} , su velocidad V_2 se suma a la velocidad V_{OQ}^* y adquieren la velocidad V_3 , la cual, además de ser la velocidad de éstas en el bloque **3**, es la velocidad V_s a la que son impulsadas las partículas fuera del plano horizontal.

La presión de compresión es calculada mediante la expresión:

$$p(w/2)V_p = k \left[V_{OP}^* \overline{OP} + V_{PQ}^* \overline{PQ} + V_{OQ}^* \overline{OQ} + V_{QR}^* \overline{QR} \right]$$

En la figura 9.4.2a se observa que tres de las líneas de discontinuidad son iguales:

$$\overline{OP} = \overline{OQ} = \overline{QR} = \frac{w}{2 \cos(\pi/4)} = 0.7071w$$

y que una es desigual: $\overline{PQ} = w$

De la figura 9.4.2b se derivan los siguientes valores para las discontinuidades de velocidad:

$$V_{OP}^* = V_p \sec(\pi/4) = 1.4142V_p$$

además:
$$V_{PQ}^* = V_p$$

Dos de las discontinuidades de velocidad son iguales:

$$V_{QR}^* = V_{OQ}^* = \frac{V_{PQ}^*}{2\cos(\pi/4)} = 0.7071V_p$$

Aplicando valores en la ecuación para la presión:

$$p(w/2)V_p = k \left[(1.4142V_p)(0.7071w) + V_p w + 2(0.7071V_p)(0.7071w) \right]$$

$$p(w/2)V_p = k \left[V_p w + V_p w + 2(0.5V_p w) \right]$$

Por eso:
$$\frac{p}{2k} = 3$$

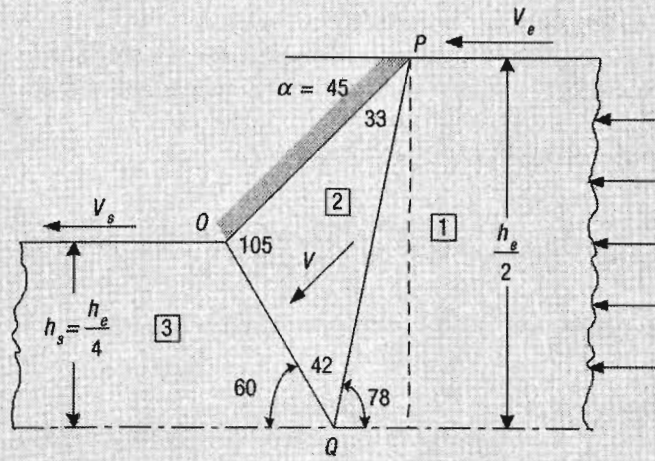
En los dos casos, con fricción y sin fricción, $(p/2k) = 3$. El valor tan alto de presión para la endentación es debido a la restricción que impone el material rígido elástico que rodea la zona de deformación.

Ejercicios de final de capítulo

1

- Determine la presión de extrusión en función del esfuerzo de cedencia en corte k para la geometría y grado de reducción mostrados en la figura 9.E.1; la reducción es de 50%. Calcule los valores de las discontinuidades de velocidad y de las líneas de discontinuidad por medios trigonométricos. Considere la fricción (figuras 9.E.1a, b).

Respuesta: $p_e / 2k = 1.723$



(a)

Figura 9.E.1. a) Campo de velocidad. b) Hodografía. (Continúa)

Ejercicios de final de capítulo (continuación)

3

Estime los valores de las discontinuidades de velocidad y de las líneas de discontinuidad por medios trigonométricos. Considere la fricción. Trace la hodografía.

Respuesta: $p_e / 2k = 1.732$

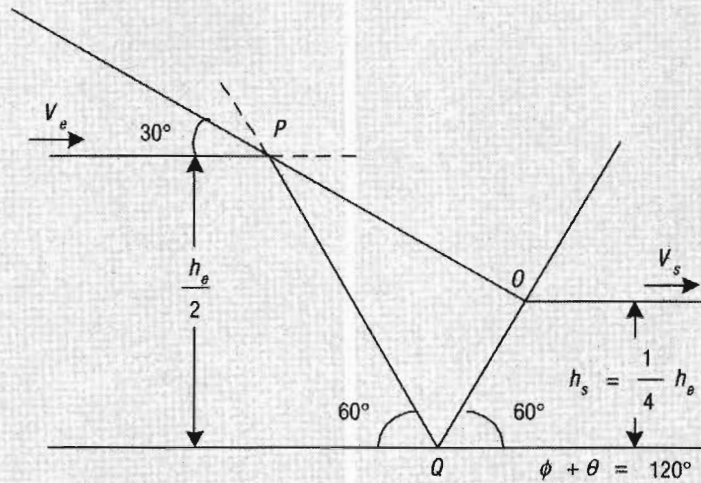


Figura 9.E.3. Campo de velocidad.

4. Determine la presión de extrusión en función del esfuerzo de cedencia en corte k para reducir 50%, en deformación plana, una placa de espesor h_e , conforme al campo de flujo de la figura 9.E.4 y conforme a la hodografía de la figura 9.E.4b. Calcule: a) sin fricción, y b) con fricción.

Respuestas:

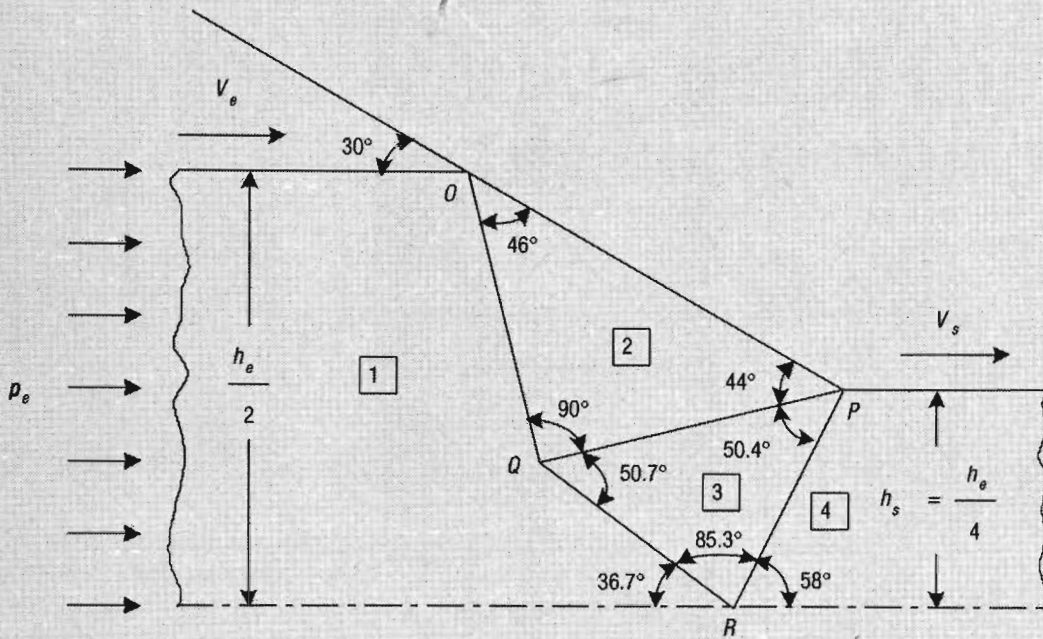
a) Sin fricción: $p_e / 2k = 0.93$. b) Con fricción: $p_e / 2k = 1.65$.

5. Una placa metálica de las dimensiones $h = 40$ mm, $w = 100$ mm y longitud $l = 150$ mm, se comprime en deformación plana hasta $h = 20$ mm, l permanece constante. Calcule la presión de compresión si el esfuerzo cortante del material es de 50 MPa. La compresión tiene lugar conforme a la figura 9.3.1.

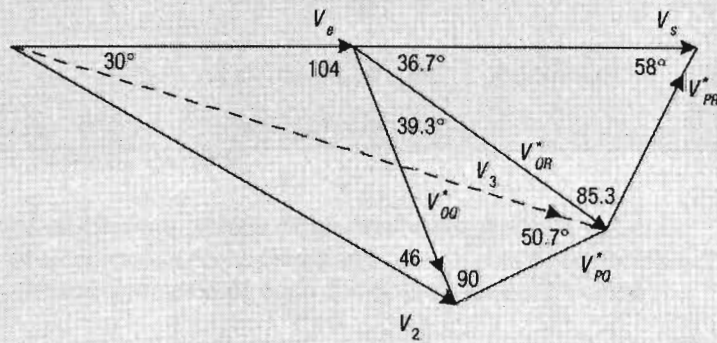
Respuesta: $p = 505$ MPa.

Ejercicios de final de capítulo (continuación)

4



(a)



(b)

Figura 9.E.4. a) Campo de velocidad. b) Hodografía.

6. Calcule la presión para comprimir una placa en deformación plana utilizando el campo de deformación mostrado en la figura 9.E.5. Compare la presión con la obtenida en el problema 9.3.2.

Respuestas: el resultado es el mismo que para el problema 9.3.2: $p = 2k$.

Ejercicios de final de capítulo (continuación)

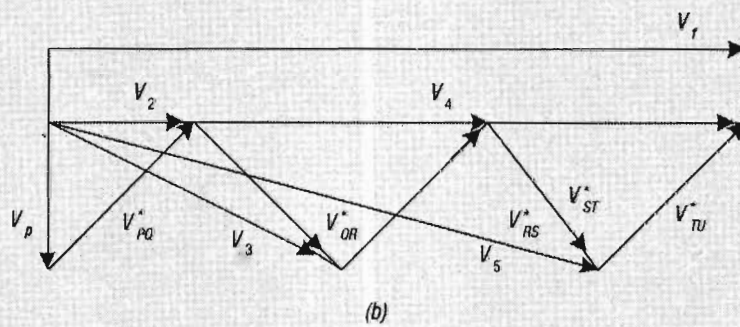
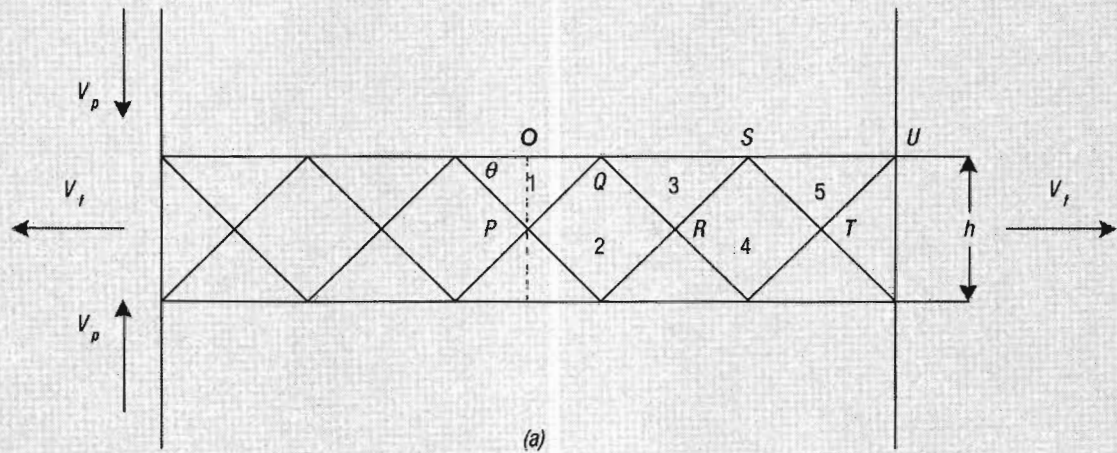


Figura 9.E.5. a) Campo de velocidad. b) Hodografía.

CAPÍTULO 10

Método de las líneas de corte máximo

Este método permite determinar valores muy cercanos a los reales, por eso algunos autores lo refieren como un método exacto; se aplica a un sólido isotrópico, rígido plástico ideal, lo que implica que su módulo de Young debe ser infinito y que una vez alcanzado el valor del esfuerzo de cedencia, se produce fluencia plástica sin que el material endurezca por deformación o por rapidez de deformación.

La condición de isotropía significa lo siguiente: las direcciones de rapidez de deformación máxima por corte coinciden con las direcciones de esfuerzo de cedencia en corte. En cuanto al proceso de deformación, el método sólo se aplica a condiciones de deformación plana. La hodografía permite comprobar que el cambio de forma es geoméricamente autoconsistente.

10.1. Estado de esfuerzos en función de la presión hidrostática y del esfuerzo de cedencia en corte

Se va a suponer que sobre un elemento cúbico de material están actuando esfuerzos principales: un esfuerzo de compresión Q en la dirección 1, un esfuerzo de compresión P en la dirección 3 y un esfuerzo promedio de estos dos en la dirección 2, por eso:

$$\sigma_1 = -Q \quad (10.1.a)$$

$$\sigma_2 = \frac{-Q - P}{2} \quad (10.1.b)$$

$$\sigma_3 = -P \quad (10.1.c)$$

La componente hidrostática de esfuerzos es:

$$-p_h = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = -\frac{1}{3} \left[Q + \frac{Q+P}{2} + P \right] = -\frac{1}{3} \left[\frac{3}{2}Q + \frac{3}{2}P \right] = \left[-\frac{Q+P}{2} \right]$$

el signo menos denota esfuerzo de compresión.

$$p_h = \frac{Q+P}{2} \quad (10.1.2)$$

Para deformación plana se satisface la ecuación:

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \quad (10.1.3)$$

Combinando las ecuaciones 10.1*b*, 10.1.2 y 10.1.3 resulta:

$$\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = -p_h \quad (10.1.4)$$

o bien,

$$\sigma_1 + \sigma_3 = -2p_h \quad (10.1.5a)$$

Del criterio de von Mises para deformación plana:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2k \quad (10.1.5b)$$

Sumando miembro a miembro las ecuaciones 10.1.5:

$$2\sigma_1 = -2p_h + 2k$$

es decir,

$$\sigma_1 = -p_h + k \quad (10.1.6a)$$

Restando la ecuación 10.1.5*b* de la 10.1.5*a*,

$$\sigma_3 = -p_h - k \quad (10.1.6b)$$

Utilizando 10.1.6*a* y 10.1.6*b* en 10.1.3 resulta:

$$\sigma_2 = -p_h \quad (10.1.6c)$$

El estado de esfuerzos de las ecuaciones 10.1.6 se puede representar en un círculo de Mohr, como se muestra en la figura 10.1.1.

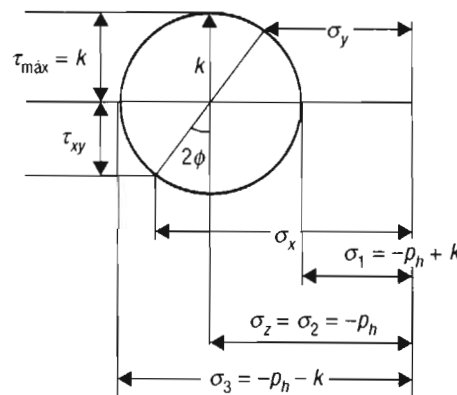


Figura 10.1.1. Representación en el círculo de Mohr del estado de esfuerzos en deformación plana (Dieter, 1988).

En el círculo de Mohr de la figura 10.1.1 también están representados los esfuerzos de compresión σ_x , σ_y , σ_z que están actuando sobre un elemento cúbico de volumen del material; en este elemento, los ejes xyz no coinciden con las direcciones de esfuerzo principal. Las ecuaciones para calcular estos esfuerzos se derivan directamente de esta figura.

$$\sigma_x = -p_h - k \operatorname{sen} 2\phi \quad (10.1.7a)$$

$$\sigma_y = -p_h + k \operatorname{sen} 2\phi \quad (10.1.7b)$$

$$\sigma_z = -p_h \quad (10.1.7c)$$

$$\tau_{xy} = k \cos 2\phi \quad (10.1.7d)$$

Se observa en la figura 10.1.1 y en las ecuaciones 10.1.6 y 10.1.7 que el *estado de esfuerzos, en deformación plana, está totalmente definido si se conoce la magnitud de p_h y la orientación de k .*

El esfuerzo de cedencia en corte, k , es constante en cualquier punto del campo de deformación.

10.2. Líneas de corte máximo

En este método, la deformación plana es representada por un campo de líneas de corte máximo (figura 10.2.1). Las líneas de corte máximo son familias de curvas mutuamente ortogonales, se designan por las letras α , β y se caracterizan porque, tangencialmente a ellas, actúa un esfuerzo cortante de una magnitud igual al esfuerzo de cedencia en corte, k , el cual produce una deformación cortante máxima, γ_{\max} , en tanto que la deformación normal, ϵ , es cero.

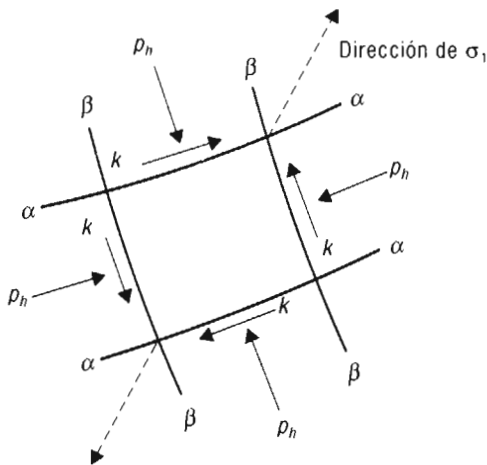


Figura 10.2.1. Identificación de las líneas de corte máximo (Backofen, 1972).

La presión hidrostática p_h actúa normal a las líneas de corte máximo. Las líneas de corte máximo son construcciones geométricas que no coinciden con las líneas de flujo que se producen por deformación plástica y que se observan macroscópicamente sobre la superficie de una pieza metálica macroatacada después de haber sido deformada, aunque existe una relación entre ambos tipos de líneas.

La manera de identificar las líneas α , β se muestra mediante la figura 10.2.1. La punta de un compás se clava en la intersección de ambas líneas, la otra punta corta una de las líneas de corte máximo; si al girar esta última punta en dirección contraria a las manecillas del reloj se encuentra primero con la línea de esfuerzo principal, σ_1 , entonces la segunda punta del compás se encontraba sobre una línea α ; si al girar en sentido contrario a las manecillas del reloj encuentra primero la otra línea de corte máximo antes que la dirección de esfuerzo principal, entonces la segunda punta del compás se encontraba sobre una línea β .

10.2.1. Ecuaciones de Hencky

Para determinar la dirección de k y el valor de la presión, p_h , que está actuando sobre un punto del campo de las líneas de corte máximo, se hace uso de las ecuaciones de equilibrio de momentos de Hencky, las cuales se derivan a continuación. Para este propósito se utilizarán los abanicos de la figura 10.2.2.

ECUACIÓN DE HENCKY PARA LÍNEAS α

Se utilizará la figura 10.2.2a para derivar la ecuación de Hencky para líneas α .

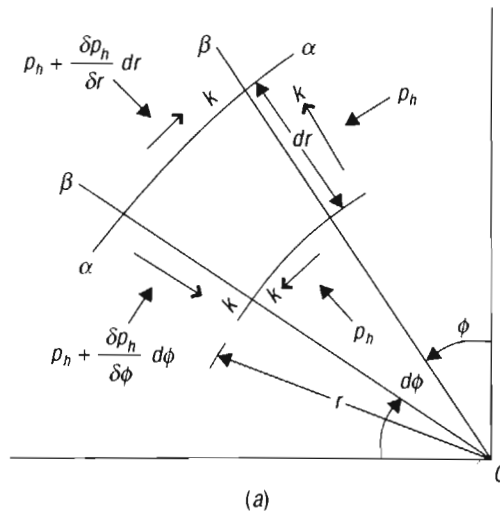


Figura 10.2.2. a) Abanico para líneas α (Backofen, 1972).

Se establece la ecuación de equilibrio de momentos. Los momentos que tienden a hacer girar el sector circular de espesor unitario, formado por la intersección de las curvas α y los radios β , alrededor del punto O en la dirección de las manecillas del reloj, se colocan del lado izquierdo de la ecuación. Los momentos que tienden a hacer girar el sector circular en sentido contrario de las manecillas del reloj, del lado derecho de la ecuación:

$$\left(p_h + \frac{\partial p_h}{\partial \phi} d\phi \right) [dr(1)]r + k[(r + dr)d\phi(1)](r + dr) = k[(rd\phi)(1)]r + p_h[dr(1)]r$$

En esta ecuación el (1) representa el espesor de los sectores circulares y las áreas están encerradas en corchetes.

Desarrollando:

$$p_h r dr + r \frac{\partial p_h}{\partial \phi} dr d\phi + (kr d\phi + kdr d\phi)(r + dr) = p_h r dr + kr^2 d\phi$$

$$p_h r dr + r \frac{\partial p_h}{\partial \phi} dr d\phi + kr^2 d\phi + krdr d\phi + krdr d\phi + k(dr)^2 d\phi = p_h r dr + kr^2 d\phi$$

El término que contiene el factor $(dr)^2$ se elimina porque, al multiplicar por este factor, el resultado es despreciable; se eliminan los términos que son iguales en ambos miembros de la ecuación: $p_h r dr$ y también $kr^2 d\phi$; se suman los términos $krdr d\phi$ porque son iguales y finalmente se dividen los dos términos sobrantes entre $rdr d\phi$; resulta así:

$$\frac{dp_h}{d\phi} = -2k \tag{10.2.1a}$$

Una presentación más adecuada de la ecuación 10.2.1a para la solución de problemas, es la siguiente:

$$dp_h + 2kd\phi = 0 \tag{10.2.1b}$$

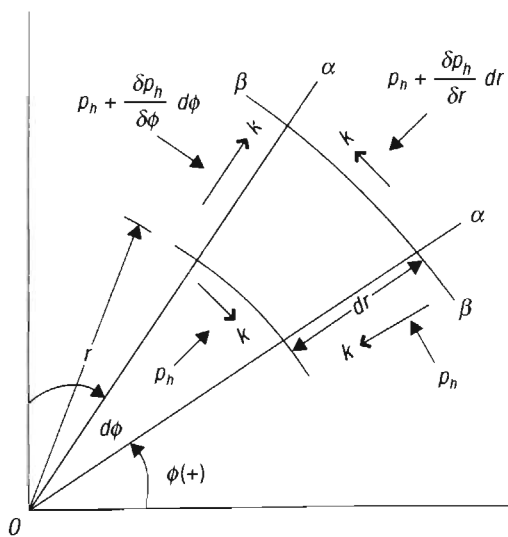
Integrando la ecuación 10.2.1b:

$$p_h + 2k\phi = C_1 \tag{10.2.2}$$

donde C_1 es la constante de integración.

ECUACIÓN DE HENCKY PARA LÍNEAS β

Se utilizará la figura 10.2.2b para derivar la ecuación de Hencky para líneas β .



(b)

Figura 10.2.2. (Continuación) b) Abanico para líneas β (Backofen, 1972).

Para obtener el abanico de la figura 10.2.2b que se utilizará para la derivación de la ecuación de Hencky para líneas β , se gira el abanico de la figura 10.2.2a alrededor de O en el sentido de las manecillas del reloj para que quede situado en el primer cuadrante; ahora los arcos representan las líneas β , en tanto que los radios son las líneas α ; se invierte el sentido de los esfuerzos de corte con respecto al de los esfuerzos de corte en la figura 10.2.2a.

Se establece la ecuación de equilibrio de momentos como en el caso de las líneas α :

$$\left(p_h + \frac{\partial p_h}{\partial \phi} d\phi \right) [dr(1)]r + k[rd\phi(1)]r = p_h[dr(1)]r + k[(r+dr)d\phi(1)](r+dr)$$

Desarrollando:

$$p_h r dr + r \frac{\partial p_h}{\partial \phi} d\phi dr + kr^2 d\phi = p_h r dr + (kr d\phi + kdr d\phi)(r+dr)$$

$$p_h r dr + r \frac{\partial p_h}{\partial \phi} d\phi dr + kr^2 d\phi = p_h r dr + kr^2 d\phi + krdr d\phi + krdr d\phi + k(dr)^2 d\phi$$

Simplificando, como se hizo para las líneas α :

$$\frac{\partial p_h}{d\phi} = 2k \quad (10.2.3a)$$

Una presentación más útil de la ecuación 10.2.3a, para la solución de problemas, es la siguiente:

$$dp_h - 2kd\phi = 0 \quad (10.2.3b)$$

Integrando la ecuación 11.2.3.b:

$$p_h - 2k\phi = C_2 \quad (10.2.4)$$

donde C_2 es la constante de integración.

10.2.2. Ecuaciones de Geiringer

Las ecuaciones de Geiringer son herramientas que ayudan al trazado de la hodografía para comprobar que el cambio de forma es geoméricamente autoconsistente.

En un punto O de intersección de las líneas de esfuerzo cortante máximo α - β , las componentes de velocidad, de una partícula de material, tangenciales a las líneas α , β , son u , v , respectivamente (figura 10.2.3). Al moverse la partícula sobre la línea α desde el punto O hasta A , las direcciones de las componentes de velocidad u , v experimentan una rotación $d\phi'$; esta rotación hace que la componente tangencial de velocidad cambie de u en el punto O a $u + du$ en A . Esta velocidad tangencial en el punto A se puede igualar a la suma de las proyecciones de u y de v sobre la dirección de la componente tangencial $u + du$.

La proyección de u es $u \cos d\phi'$; la de v es $v \sin d\phi'$.

Por eso, y conforme a la figura 10.2.3:

$$u + du = u \cos d\phi' + v \sin d\phi' \quad (i)$$

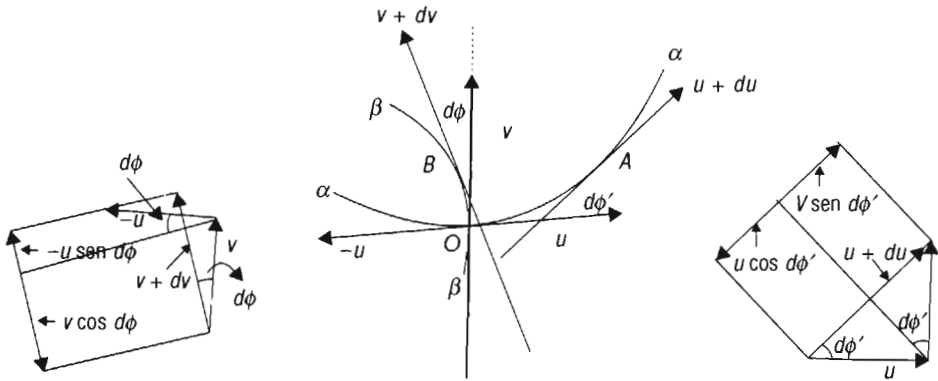


Figura 10.2.3. Velocidades en el campo de líneas de deslizamiento (McQueen, 1981).

para un valor infinitesimal del ángulo $d\phi'$, $\cos d\phi' \rightarrow 1$; mientras que $\text{sen} d\phi' \rightarrow d\phi'$; entonces, la ecuación i se transforma en:

$$\begin{aligned} u + du &= u + v d\phi' \\ du - v d\phi' &= 0 \end{aligned} \quad (10.2.5)$$

Ésta es la ecuación de Geiringer para líneas α .

Al moverse una partícula de material sobre la línea β desde el punto O hasta el punto B , las direcciones de las componentes de velocidad, u , v , giran un ángulo $d\phi$; este giro que experimentan las direcciones de las velocidades u , v hace que la componente tangencial cambie desde v en O hasta $v + dv$ en B . La componente tangencial en el punto B se puede igualar a la suma de las proyecciones de $-u$ y de v , sobre la dirección de la componente tangencial $v + dv$.

La proyección de v es $v \cos d\phi$; la de $-u$ es $-u \text{sen} d\phi$. Por lo tanto, y de acuerdo con la figura 10.2.3:

$$v + dv = v \cos d\phi - u \text{sen} d\phi \quad (\text{ii})$$

Para un valor infinitesimal del ángulo $d\phi$, la ecuación ii se transforma en:

$$\begin{aligned} v + dv &= v - u d\phi \\ dv + u d\phi &= 0 \end{aligned} \quad (10.2.6)$$

La ecuación 10.2.6 es la ecuación de Geiringer para líneas β .

Algunos ejemplos de aplicación del método del campo de las líneas de corte máximo servirán para mostrar la determinación de las presiones necesarias para darle la forma deseada al metal y para adquirir habilidad en el trazo de la hodografía.

10.3. Ejemplos de aplicación

10.3.1. Penetración sin fricción en deformación plana de un bloque de metal

PRESIÓN PARA LA PENETRACIÓN DE UN BLOQUE MEDIANTE UN PENETRADOR PLANO

Se supone en este ejemplo una fricción cero en la superficie de contacto penetrador-bloque. Debido a la simetría, sólo se muestra en la figura 10.3.1 la mitad del penetrador; un abanico representa la mitad de la zona plástica.

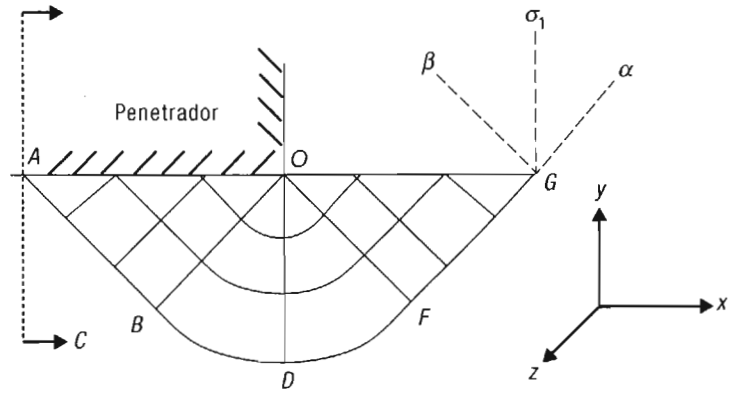


Figura 10.3.1. Penetración en deformación plana de un bloque metálico con un penetrador plano.

El primer paso en la solución de un problema por este método es proponer un campo de líneas de corte máximo.

Se selecciona el campo que se muestra en la figura 10.3.1, en el cual las líneas de corte máximo forman un ángulo $\pi/4$ con la superficie libre (superficie libre de carga). Esta superficie es por eso un plano principal de esfuerzos. Se escoge un punto del campo sobre la superficie libre, tal como el punto G. En la dirección normal a la superficie libre que pasa por G, la presión es cero, por tanto esta dirección es la del esfuerzo principal mayor. El estado de esfuerzos sobre el punto G se puede determinar mediante las ecuaciones 10.1.6 o mediante las ecuaciones 10.1.7 considerando en estas ecuaciones $\phi = 0$. De la ecuación 10.1.6a:

$$\sigma_y = \sigma_1 = 0 = -p_{hG} + k$$

de donde

$$p_{hG} = k$$

Utilizando esta expresión en 10.1.6b:

$$\sigma_x = \sigma_3 = -p_{hG} - k = -2k$$

Y en 10.1.6c:

$$\sigma_z = \sigma_2 = -p_{hG} = -k$$

Se representa el estado de esfuerzos en el punto G mediante el círculo de Mohr de la figura 10.3.2.

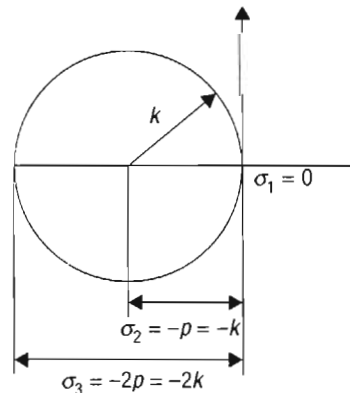


Figura 10.3.2. Estado de esfuerzos en el punto G.

Para la definición de las líneas α , β en el abanico, se clava la punta de un compás en el punto G , de la figura 10.3.1, y la otra punta se hace coincidir con una de las líneas de corte máximo que pasa por este punto (línea punteada); se gira el compás en el sentido contrario a las manecillas del reloj y se encuentra que corta a la dirección del esfuerzo antes que a la otra línea de corte máximo; por lo tanto, los arcos del abanico son líneas α , de acuerdo con la convención de la sección 10.2, mientras que los radios son líneas β . Se va a emplear entonces la ecuación de Hencky (10.2.1) para líneas α .

La dirección de la línea GF sirve de referencia, lo cual significa que el ángulo de esta dirección es $\phi = 0$. El punto F se encuentra sobre la misma dirección que el punto G ; por tanto, el estado de esfuerzos es el mismo en ambos puntos, es decir, en F :

$$p_{hF} = k$$

Para ir del punto F al punto B es necesario un giro $d\phi = -\pi/2$ alrededor de O en el sentido de las manecillas del reloj (de aquí el signo menos). Para obtener la presión en B , a partir de la presión en F , se hace uso de la ecuación de Hencky (10.2.1b) en forma diferencial, por eso:

$$(p_{hB} - p_{hF}) + 2k(-\pi/2 - 0) = 0$$

de donde resulta que la presión en B es:

$$p_{hB} = k(1 + \pi)$$

El punto A se encuentra en la misma dirección que B , por tanto la presión en ambos puntos es la misma:

$$p_{hA} = p_{hB} = k(1 + \pi)$$

Falta determinar ahora el esfuerzo σ_y en A . Se emplea la ecuación 10.1.7b:

$$\sigma_y = -p_{hA} + k \operatorname{sen} 2\phi$$

El ángulo ϕ se mide por convención en sentido contrario de las manecillas del reloj alrededor del punto A , desde la dirección del eje x a la dirección de la línea α ; este ángulo es de $135^\circ = 3\pi/4$. Sustituyendo en esta ecuación p_{hA} por la expresión previa en función de k y aplicando el valor del ángulo ϕ , resulta:

$$\begin{aligned}\sigma_y &= -k(1 + \pi) + k \operatorname{sen} 2(3\pi/4) \\ \sigma_y &= -k - k\pi - k = -2k(1 + \pi/2)\end{aligned}$$

σ_y se puede expresar en función del esfuerzo de cedencia en compresión unidireccional, si se utiliza, en la ecuación anterior, la relación de von Mises:

$$\begin{aligned}k &= \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \\ \sigma_y &= -2 \left(\frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \right) (1 + \pi/2) \\ \sigma_y &= 2.97\sigma_0 \approx 3\sigma_0\end{aligned}$$

La presión tan alta, necesaria para penetrar el bloque metálico, es debida a la restricción que le impone, a la deformación plástica, el material elástico circundante al penetrador.

Los demás esfuerzos que actúan en A se pueden determinar utilizando las ecuaciones 10.1.7:

Para σ_x se utiliza la ecuación 10.1.7a:

$$\sigma_x = -p_{hA} - k \operatorname{sen} 2\phi$$

Aplicando la expresión correspondiente a p_{ha} en función de k y aplicando el valor del ángulo $\phi = 3\pi/4$, resulta:

$$\sigma_x = -k(1 + \pi) - k \operatorname{sen} 2\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$\sigma_x = -k - k\pi + k = -k\pi$$

σ_z se obtiene de la ecuación 10.1.7c:

$$\sigma_z = -p_{hA} = -k(1 + p)$$

El círculo de Mohr para el estado de esfuerzos en el punto A , abajo del centro del penetrador, se representa en la figura 10.3.3.

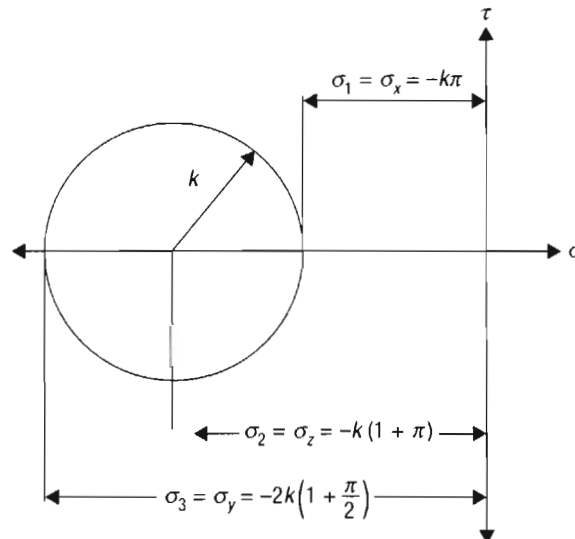


Figura 10.3.3. Círculo de Mohr. Estado de esfuerzos abajo del penetrador.

HODOGRAFÍA

La figura 10.3.4 presenta el campo de velocidad y la hodografía para este ejemplo.

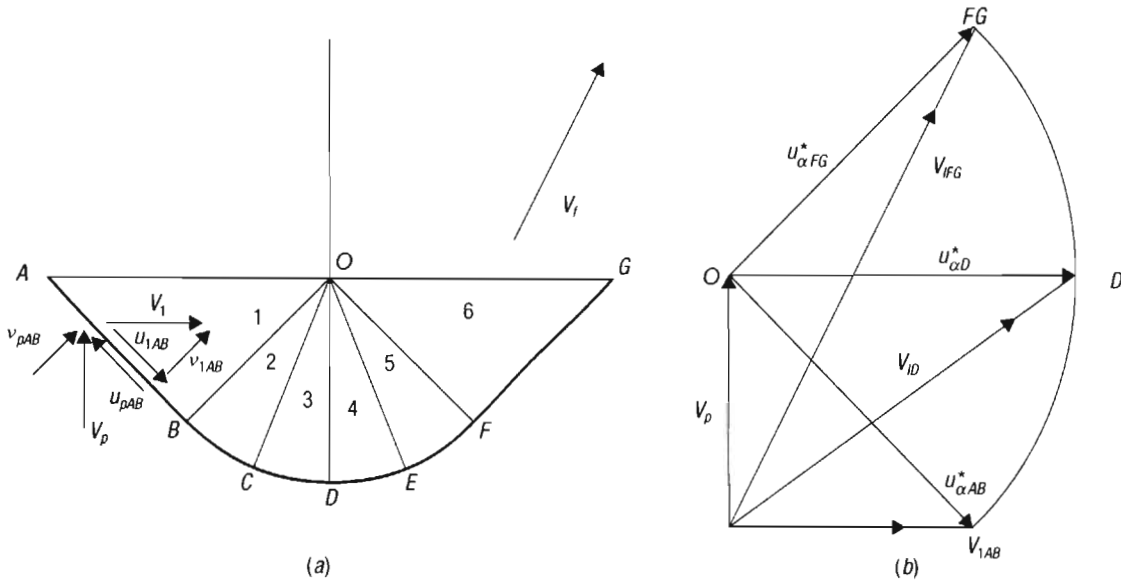


Figura 10.3.4. Hodografía de la penetración de la figura 10.4.1.

DISCONTINUIDAD DE VELOCIDAD EN EL SEGMENTO RECTO AB

El bloque de metal que va a ser penetrado tiene una velocidad V_p , en tanto que el dado permanece inmóvil durante la penetración. La línea gruesa en la figura 10.3.4 es la línea de discontinuidad de velocidad, α . Las partículas de metal del bloque se aproximan al penetrador a una velocidad V_p ; al cruzar la discontinuidad cambian de velocidad, la magnitud y dirección de su velocidad en el interior del abanico de deformación dependen de la geometría de la línea de discontinuidad y del punto por donde atraviesan ésta. Las componentes de V_p , paralela y normal al segmento recto AB de la línea de discontinuidad en la región elástica, son u_{pAB} , v_{pAB} , respectivamente.

Las velocidades tangenciales a la línea de discontinuidad, *esta convención se aplica solamente para líneas α* , se identificarán con la letra u acompañada de subíndices para definir su localización a lo largo del abanico, en tanto que las velocidades normales a la línea de discontinuidad serán referenciadas con la letra v , para corresponder con la ecuación de Geiringer (10.2.5) y con la figura 10.2.3; los sufijos definen su localización. La discontinuidad de velocidad en un punto de la línea α es la diferencia en ese punto de las velocidades tangenciales adentro y afuera de la línea de discontinuidad, se designa con el símbolo u^* , un subíndice identifica su posición en la línea.

Al cruzar la discontinuidad de velocidad a través de cualquier punto del segmento AB , las partículas del material cambian su velocidad de V_p , perpendicular a la superficie del penetrador, a V_1 , paralela a esta superficie. Las componentes de V_1 , paralela y normal a la línea de discontinuidad son u_{1AB} , v_{1AB} , respectivamente, figura 10.3.4. Condiciones indispensables para que no se produzca una cavidad o separación entre partículas durante la deformación plástica son las siguientes: a) las componentes de V_p , así como de V_1 , normales a la discontinuidad de velocidad, v_{pAB} , v_{1AB} , a ambos lados de ésta, deben ser iguales; b) la discontinuidad de velocidad debe ser la misma a todo lo largo del arco que constituye la línea α . Un campo de velocidades que cumple estas condiciones es llamado *un campo de velocidades cinemáticamente admisible*. Una consecuencia de la primera condición es que la discontinuidad de velocidad es también la diferencia vectorial entre V_p y V_1 .

Si se toma como referencia el segmento recto AB de la línea de discontinuidad $\phi' = 0$, el ángulo que forma AB con V_p es $(-\pi/4)$; el signo menos es debido a que la medición del ángulo se realiza de AB hacia V_p , es decir, en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj. El ángulo es positivo cuando se mide en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj. Debido a que el ángulo que forman AB y V_p es $-\pi/4$, y el que forman AB y V_1 es $\pi/4$, las componentes de velocidad de V_p y V_1 , tangentes a la discontinuidad, son de la misma magnitud, pero de sentido contrario, según se observa en la figura 10.3.4.

Por eso:

$$-u_{pAB} = u_{1AB}$$

De la figura 10.3.4a:

$$\begin{aligned} -u_{pAB} &= V_p \cos \phi' = V_p \cos(-\pi/4) = V_p \cos(\pi/4) = V_p / \sqrt{2} \\ u_{1AB} &= V_p / \sqrt{2} \end{aligned}$$

La discontinuidad de velocidad es:

$$\begin{aligned} u_{\alpha AB}^* &= u_{1AB} - u_{pAB} = u_{1AB} - (-u_{1AB}) = 2u_{1AB} = 2V_p / \sqrt{2} \\ u_{\alpha AB}^* &= \sqrt{2}V_p \end{aligned}$$

Para el trazo de la hodografía, se toma en cuenta que la magnitud de la discontinuidad de velocidad, $\sqrt{2}V_p$, es constante en magnitud a todo lo largo del arco, característica que se denota por el sufijo α , y que las velocidades de las partículas de metal en cualquier zona en el interior del abanico son la suma vectorial de la velocidad V_p y la discontinuidad de velocidad u^* .

DISCONTINUIDAD DE VELOCIDAD EN EL PUNTO D

En el punto D , afuera del abanico, el vector de velocidad V_p tiene componentes tangencial y normal a la línea de discontinuidad $u_{pD} = 0$ y $V_p = v_{pD} = v_{1D}$, respectivamente.

La ecuación de Geiringer permite determinar la componente tangencial en el interior del abanico. Los arcos representan líneas α , como se demostró anteriormente; por eso, de la ecuación 10.2.5:

$$du = vd\phi'$$

La tangente a la línea de discontinuidad gira un ángulo $\pi/4$ en el sentido contrario de las manecillas del reloj, de manera que en el punto D , $\phi' = 0$; por eso los límites de integración de la ecuación de Geiringer son $-\pi/4$ y 0 :

$$\int_{-\pi/4}^0 du = \int_{-\pi/4}^0 vd\phi' = V_p \int_{-\pi/4}^0 \cos \phi' d\phi'$$

donde la expresión $v = V_p \cos \phi'$ se obtiene de la geometría de la figura 10.3.4a.

Integrando:

$$u_{1D} - u_{1AB} = V_p \left[\text{sen} 0 - \text{sen}(-\pi/4) \right] = -(-V_p / \sqrt{2})$$

$$u_{1D} = u_{1AB} + V_p / \sqrt{2} = V_p / \sqrt{2} + V_p / \sqrt{2} = 2V_p / \sqrt{2} = \sqrt{2}V_p$$

La discontinuidad de velocidad en el punto D es igual a la diferencia de las velocidades tangenciales u . Debido a que la componente tangencial $u_{pD} = 0$, la discontinuidad de velocidad en D , $u_{\alpha D}^*$, es entonces igual a la componente tangencial u_{1D} :

$$u_{\alpha D}^* = u_{1D} - u_{pD} = \sqrt{2}V_p - 0$$

$$u_{\alpha D}^* = \sqrt{2}V_p$$

DISCONTINUIDAD DE VELOCIDAD EN EL SEGMENTO FG

Fuera del abanico, el segmento FG forma un ángulo $\phi' = \pi/4$; con el vector de velocidad V_p , la componente tangencial de V_p a la discontinuidad, es

$$u_{pFG} = V_p \cos \phi' = V_p \cos(\pi/4)$$

$$u_{pFG} = V_p / \sqrt{2}$$

Dentro del abanico, aplicando la ecuación de Geiringer e integrando entre los límites $-\pi/4$ y $\pi/4$, resulta:

$$\int_{\phi'=-\pi/4}^{\phi'=\pi/4} du = u_{1FG} - u_{1AB} = \int_{\phi'=-\pi/4}^{\phi'=\pi/4} v d\phi'$$

Aplicando $u_{1AB} = V_p / \sqrt{2}$ y $v = V_p \cos \phi'$ a esta ecuación, resulta:

$$u_{1FG} = V_p / \sqrt{2} + V_p \int_{\phi'=-\pi/4}^{\phi'=\pi/4} \cos \phi' d\phi' = V_p / \sqrt{2} + V_p (\text{sen} \phi') \Big|_{-\pi/4}^{\pi/4}$$

$$u_{1FG} = V_p / \sqrt{2} + V_p [\text{sen}(\pi/4) - \text{sen}(-\pi/4)]$$

$$u_{1FG} = V_p / \sqrt{2} + V_p / \sqrt{2} + V_p / \sqrt{2}$$

$$u_{1FG} = \frac{3V_p}{\sqrt{2}}$$

En el segmento FG , la discontinuidad de velocidad es:

$$u_{\alpha FG}^* = u_{1FG} - u_{pFG} = \frac{3V_p}{\sqrt{2}} - \frac{V_p}{\sqrt{2}} = \frac{2V_p}{\sqrt{2}}$$

$$u_{\alpha FG}^* = \sqrt{2}V_p$$

La figura 10.3.5 muestra cómo varían los valores de las componentes tangenciales u , adentro y afuera del abanico de la figura 10.3.4a, y el valor constante de la discontinuidad de velocidad con el ángulo ϕ' .

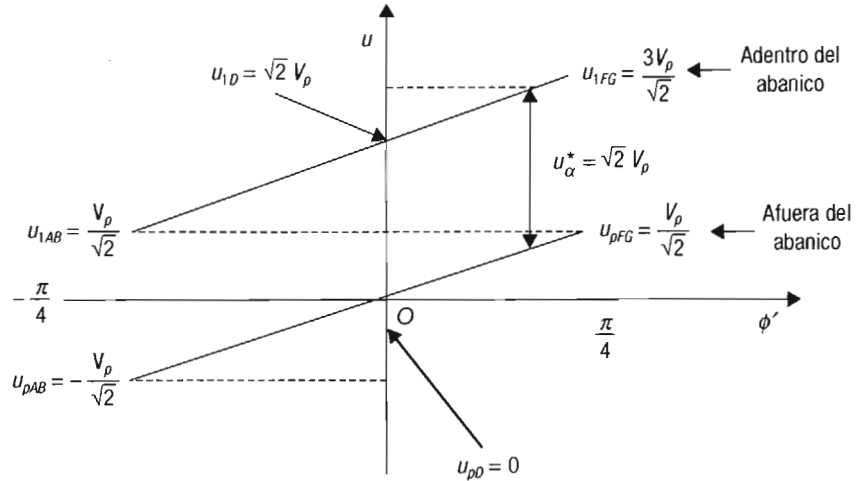


Figura 10.3.5. Discontinuidad de velocidad constante en todo el abanico (Backofen, 1972).

TRAZO DE LA HODOGRAFÍA

La hodografía se traza tomando en consideración que la velocidad de las partículas de material sufre un cambio al atravesar la línea de discontinuidad, línea de trazo grueso de la figura 10.3.4a. Por ejemplo, al ingresar una partícula al abanico a través del segmento *AB*, la velocidad cambia a V_{1AB} , vector que es paralelo a la superficie del penetrador. La velocidad V_{1AB} es la suma de V_p y de la discontinuidad de velocidad $u_{\alpha AB}^*$.

Se traza un vector vertical a escala de la magnitud de la velocidad V_p ; en el extremo de este vector se traza el vector de discontinuidad de velocidad $u_{\alpha AB}^*$, el cual tiene una dirección paralela a la línea de discontinuidad *AB*; la longitud del vector lo determina su intersección con el vector V_{1AB} que se obtiene trazando una línea horizontal a partir del origen de V_p , como se aprecia en la figura 10.3.4b.

Puesto que todos los vectores que representan las velocidades de las partículas en el interior del abanico son la suma de V_p y de la discontinuidad de velocidad, entonces, con centro en el extremo del vector V_p de la figura 10.3.4b, se traza un arco de radio igual a la longitud de la discontinuidad de velocidad $v_{\alpha AB}^*$, en sentido contrario de las manecillas del reloj, partiendo del extremo de V_{1AB} .

Los vectores que representan las velocidades de las partículas en los puntos *D* y *FG* en el interior del abanico de la figura 10.3.4a y los vectores de discontinuidad de esos mismos puntos, se trazan en la figura 10.3.4b localizando sobre el arco anterior los puntos *D* y *FG*, tomando en cuenta que estos puntos están separados entre sí sobre el arco un ángulo $\pi/4$. Los vectores de discontinuidad se trazan uniendo los puntos *D* y *FG* con el extremo de V_p , en tanto que los vectores que representan las velocidades de las partículas en el interior del abanico, se trazan uniendo estos mismos puntos con el origen de V_p .

10.3.2. Penetración con fricción en deformación plana de un bloque de metal

PRESIÓN ABAJO DEL ENDENTADOR

Este ejemplo es similar al anterior; sin embargo, entre el penetrador y el metal tiene lugar fricción adhesiva, por lo que se forma una zona muerta triangular *CEC'* en la

cara de contacto penetrador-bloque (figura 10.3.6). La existencia de esta zona hace que se presenten dos discontinuidades adicionales, respecto del problema sin fricción, CE en la parte derecha de la zona muerta y $C'E$ en la parte izquierda de esa misma zona, líneas que son las fronteras entre zona muerta y las partes del abanico que exhiben un comportamiento plástico ideal.

El análisis para la determinación de la presión de penetración se inicia en el punto D , sobre la superficie libre, en el cual la componente σ_y tiene un valor cero; las líneas α están representadas por líneas curvas y las líneas β son las líneas radiales; la línea DF es la línea de referencia, es decir, es la línea con $\phi = 0$; la línea tangencial a la línea de discontinuidad α gira un ángulo $\pi/2$ para alcanzar el punto E . Por eso la presión abajo del penetrador es igual que en el ejemplo 10.3.1.

$$\sigma_y = -2k(1 + \pi/2)$$

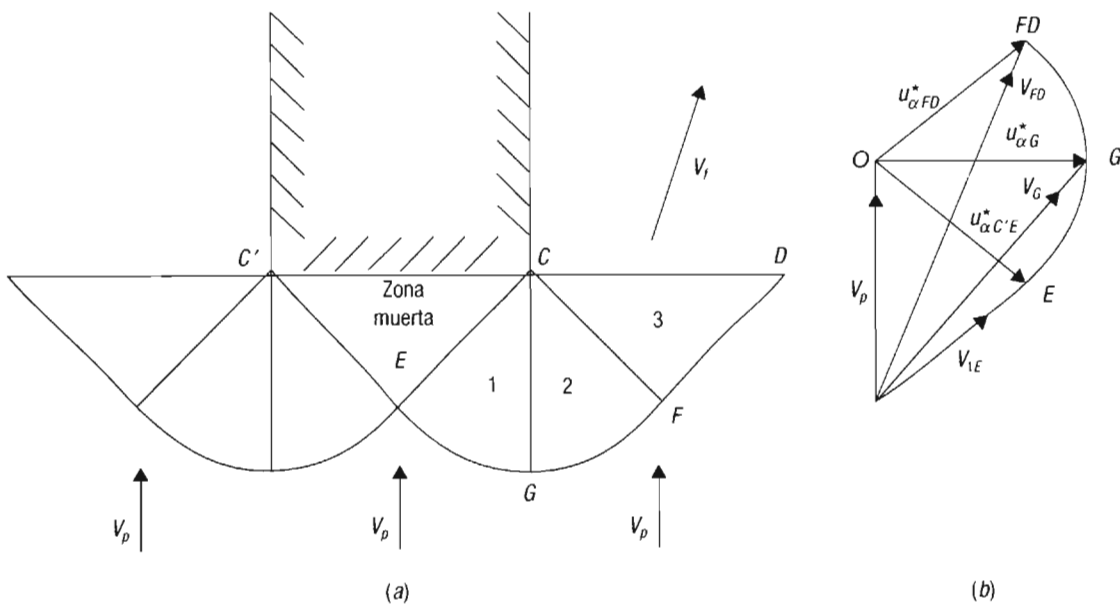


Figura 10.3.6. a) Penetración con fricción; b) hodografía.

HODOGRAFÍA

La velocidad a la que se aproximan las partículas del material del bloque al penetrador es V_p ; sus componentes normal y tangencial a la línea de discontinuidad (línea curvada gruesa) en el punto E son v_{pE} , u_{pE} . La componente tangencial tiene un valor cero debido a la presencia de una zona muerta. Al atravesar una partícula de material la línea de discontinuidad α , su velocidad cambia de V_p a V_{1E} . Esta última, paralela a la discontinuidad radial CE (línea β). V_{1E} es normal a la línea de discontinuidad α en E y por eso, para que no se produzca un hueco en el campo de velocidades $V_{1E} = v_{pE}$. Si $u_{pE} = 0$, entonces la discontinuidad de velocidad es igual a la componente tangencial en E de V_{1E} , u_{1E} . Como en el ejemplo 10.3.1 la magnitud de u_{1E} al inicio del abanico es:

$$u_{\alpha E}^* = u_{1E} - 0 = V_p \cos \pi/4 = V_p / \sqrt{2}$$

DISCONTINUIDAD DE VELOCIDAD EN LOS PUNTOS G, FD

Para un campo de velocidad cinemáticamente admisible, la discontinuidad de velocidad en los puntos G, FD es igual a la del punto E , por eso:

$$u^*_{\alpha E} = u^*_{\alpha G} = u^*_{\alpha FD} = V_p / \sqrt{2}$$

Para trazar la hodografía se traza un vector vertical a escala de la magnitud de la velocidad V_p ; en el extremo de este vector se traza el vector de discontinuidad de velocidad $u^*_{\alpha C'E}$, para lo cual se despliega una línea paralela a la línea de discontinuidad $C'E$; la longitud del vector la determina su intersección con el vector V_{1E} , el cual se obtiene trazando una línea paralela a la línea CE a partir del origen de V_p , como se aprecia en la figura 10.3.6b.

Debido a que la discontinuidad de velocidad es igual en todo el arco de discontinuidad (línea gruesa) y a que la velocidad de cualquier partícula de material adentro del abanico es la resultante de la discontinuidad de velocidad, y de V_p , la velocidad del material afuera del abanico, se traza con centro en el extremo del vector V_p (punto O), figura 10.3.6b, un arco de radio $u^*_{\alpha C'E}$, en sentido contrario de las manecillas del reloj partiendo del extremo del vector $u^*_{\alpha C'E}$. A un ángulo $\pi/4$ de este vector, medido en el sentido contrario de las manecillas del reloj se encuentra el vector $u^*_{\alpha G}$, que une el extremo de V_p con el punto G . A un ángulo $\pi/4$ de $u^*_{\alpha G}$ se le traza $u^*_{\alpha FD}$ que une el extremo de V_p con FD .

Finalmente, se trazan los vectores V_G, V_{FD} de velocidad correspondientes a las velocidades de las partículas de material en el interior del abanico, uniendo el origen de V_p con el punto G y con el punto FD .

10.3.3. Extrusión sin fricción de una placa por deformación plana. Reducción 50%

Se determinará la presión para calcular la extrusión sin fricción en deformación plana de una placa de sección rectangular; el espesor permanece constante durante la extrusión, el ancho disminuye y se incrementa la longitud. El análisis se aplica cuando la extrusión se encuentra en el estado estacionario, que corresponde a la condición en la que el material fluye por el canal de extrusión a presión constante. La matriz forma con las paredes de la cámara un ángulo de 90° , de manera que se genera una zona muerta de material entre la matriz y la cámara de extrusión. Debido a que la extrusión es sin fricción, no hay movimiento relativo entre la placa y la cámara de extrusión, condición que es equivalente a una extrusión indirecta. La figura 10.3.7 ilustra este ejemplo.

Se va a reducir el área 50%. La geometría de la zona de deformación es obtenida, como en el caso de la penetración de la masa de metal del ejemplo 10.3.1, a partir de un análisis de esfuerzos en la zona de deformación. La superficie de contacto entre la zona muerta y la placa en proceso de deformación es una de esfuerzo cortante máximo que para un metal rígido, perfectamente plástico, es igual al esfuerzo de cedencia en corte k , y forma un ángulo $\pi/4$ con la pared de la cámara.

La geometría de la zona de deformación para 50% de reducción de área debe ser simétrica respecto del plano horizontal que divide la placa longitudinalmente a la mitad del ancho de la placa. Se propone una geometría formada por dos abanicos que se tocan en el plano de simetría, el que es un plano principal porque las superficies de esfuerzo cortante máximo forman un ángulo $\pi/4$ con él. Se va a obtener la presión de extrusión y la hodografía haciendo uso de uno solo de los abanicos, el inferior,

debido a que la condición de simetría hace innecesario trabajar con los dos abanicos. El esfuerzo en el punto O de la dirección x tiene un valor cero, es decir, $\sigma_x = \sigma_1 = 0$ (figura 10.3.7). Por eso, es conveniente iniciar la determinación de la presión de extrusión en este punto del abanico.

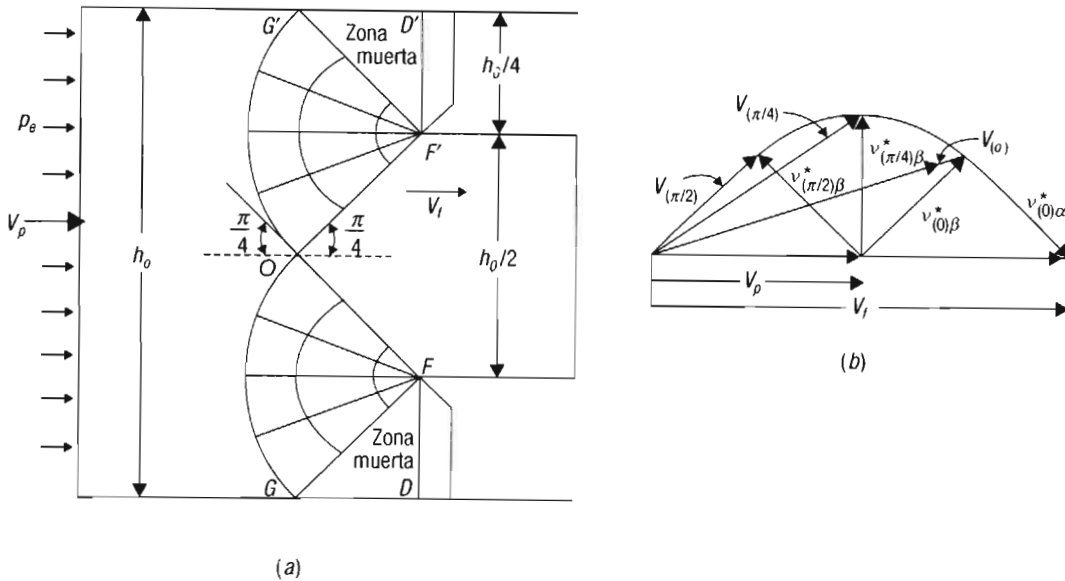


Figura 10.3.7. Campo de líneas de corte en la extrusión indirecta por deformación plana (Backofen, 1972).

De la ecuación 10.1.6a: $\sigma_x = \sigma_1 = 0 = -p_{hO} + k$

Por tanto $p_{hO} = k$

Sustituyendo por este valor en la ecuación 10.1.6b y en la 10.1.6c:

$$\begin{aligned}\sigma_y = \sigma_3 &= -p_{hO} - k = -p_{hO} - p_{hO} = -2p_{hO} \\ \sigma_z = \sigma_2 &= -p_{hO}\end{aligned}$$

El estado de esfuerzos en el punto O es representado por un círculo de Mohr igual al de la figura 10.3.2, del ejemplo 10.3.1. La línea OF se toma como la línea base con ángulo $\phi = 0$. A lo largo de esta línea el estado de esfuerzos es el mismo.

Se deben definir ahora las líneas α, β . La punta del compás se clava en el punto O y la otra punta se hace coincidir con la línea OF ; se gira el compás en sentido contrario de las manecillas del reloj y se encuentra la dirección de σ_1 antes que los arcos del abanico; por tanto, las líneas radiales son las líneas α y los arcos son las líneas β . Para determinar la presión que se debe aplicar a la placa para que el metal fluya por el canal de la matriz, se debe determinar el esfuerzo σ_x que está actuando en el punto G . Para este propósito se debe usar la ecuación de Hencky para líneas β :

$$dp_h - 2k d\phi = 0 \quad (10.2.3b)$$

Para llegar al punto G desde el punto O , la línea OF debe girar un ángulo $\pi/2$ en el sentido contrario de las manecillas del reloj y por eso se considera este ángulo como positivo. La presión hidrostática en G es:

$$(p_{hG} - p_{hO}) - 2k(\pi/2 - 0) = 0$$

de donde

$$p_{hG} = p_{hO} + 2k\left(\frac{\pi}{2}\right) = k + k\pi = k(1 + \pi)$$

El esfuerzo σ_x en el punto G es un esfuerzo principal porque G se alcanzó mediante el giro de un ángulo $\pi/2$; σ_x es ahora el esfuerzo de compresión más negativo, como se observa en el círculo de Mohr de la figura 10.3.8. El esfuerzo $\sigma_x = \sigma_3$ se determina mediante la ecuación 10.1.6b:

$$\sigma_x = \sigma_3 = -p_{hG} - k$$

Sustituyendo por la expresión para p_{hG} :

$$\sigma_x = -k - k\pi - k = -2k\left(1 + \frac{\pi}{2}\right) = -5.14k$$

Para determinar σ_y se emplea la ecuación 10.1.6a:

$$\begin{aligned}\sigma_y &= -p_{hG} + k = -k - k\pi + k \\ \sigma_y &= -k\pi\end{aligned}$$

σ_z es igual a la presión hidrostática, por eso:

$$\sigma_z = \sigma_2 = -k(1 + \pi)$$

La figura 10.3.8 representa el estado de esfuerzos en el punto G .

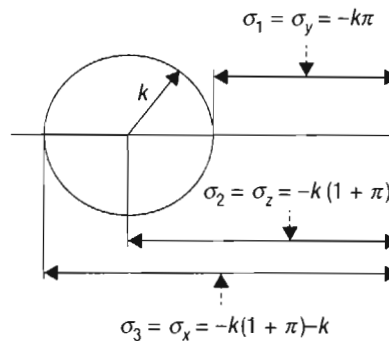


Figura 10.3.8. Círculo de Mohr para el punto G .

La presión de extrusión se determina mediante un equilibrio de fuerzas. La fuerza ejercida sobre la placa a la entrada es igual a la fuerza resistente de la matriz. La fuerza que se ejerce a la entrada sobre una superficie de una altura h_0 y un espesor t_0 es:

$$P_e = p_e(h_0 t_0)$$

A esta fuerza se opone una resistencia de igual magnitud:

$$P_R = \sigma_x (h_0 - h_f) t_0$$

Igualando estas dos ecuaciones resulta:

$$p_e (h_0 t_0) = \sigma_x (h_0 - h_f) t_0$$

La presión de extrusión es:

$$p_e = \frac{h_0 - h_f}{h_0} \sigma_x \quad (10.3.1)$$

Se observa que el coeficiente de σ_x es igual a la reducción de área expresada en forma fraccionaria.

$$r = \frac{h_0 - h_f}{h_0}$$

Sustituyendo $(h_0 - h_f)/h_0$ por r y σ_x por la expresión para el punto G , derivada anteriormente en función de k , en la ecuación para p_e :

$$p_e = r \sigma_x = r(-2k)(1 + \pi/2) \quad (10.3.2)$$

En este ejemplo $r = 1/2$. Sustituyendo por este valor:

$$p_e = \left(\frac{1}{2}\right)(-2k)\left(1 + \frac{\pi}{2}\right) = -k\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$p_e = -2.57k \approx -2.6k$$

El signo menos es debido a que el esfuerzo p_e es de compresión.

HODOGRAFÍA Y AUTOCONSISTENCIA GEOMÉTRICA

Se puede seguir el procedimiento descrito en el ejemplo 10.3.2; sin embargo, se presenta un método alternativo descrito por Backofen (1972) para aumentar el acervo de herramientas que puede usar el lector.

Para identificar el punto por donde las partículas de material cruzan la línea de discontinuidad OG , se toma como referencia la línea OF , la cual tiene un ángulo $\phi = 0$, y las posiciones sobre OG , que forman ángulos con OF $\phi = \pi/4$ y $\pi/2$ (punto G). Las magnitudes de $v_{\phi\beta}$ afuera del abanico se determinan a partir de la relación trigonométrica:

$$v_{\phi\beta} = V_p \text{sen}(\pi/4 - \phi) \quad (a)$$

que se muestra en la figura 10.3.9; mientras que los valores de $v_{\phi\beta}$ en el interior del abanico se estiman mediante la ecuación de Geiringer.

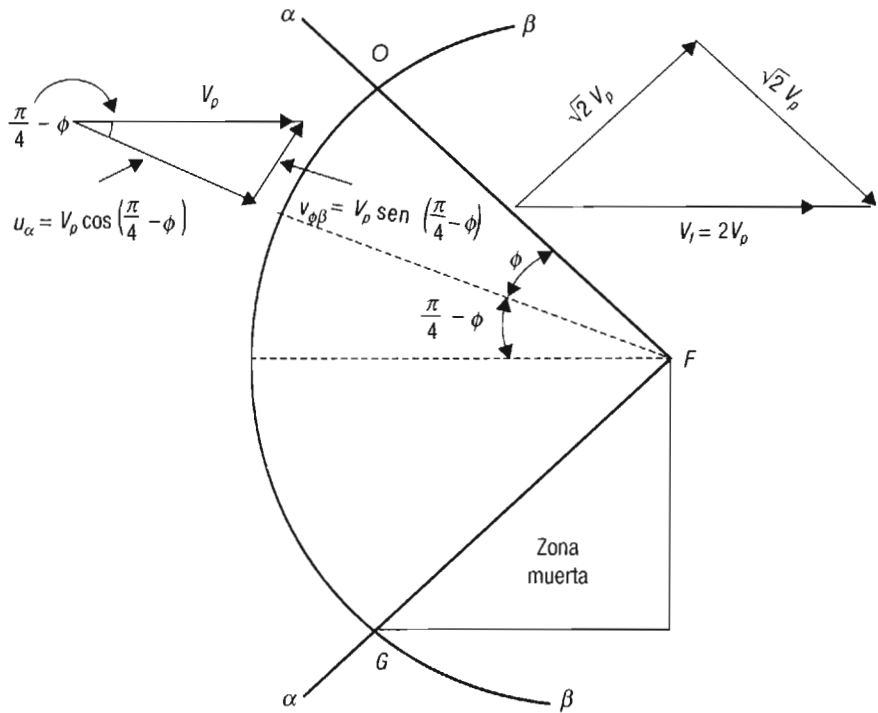


Figura 10.3.9. Campo de velocidades en la deformación plana de la figura 10.3.7, $r = 0.5$ (Backofen, 1972).

Punto $\phi = 0$:

Afuera del abanico:

Para el punto O , donde $\phi = 0$, la ecuación a toma la forma:

$$v_{(0)\beta e} = V_p \text{sen}(\pi / 4) = V_p / \sqrt{2}$$

El sufijo en $v_{(0)\beta e}$ denota la velocidad tangencial a β en el punto O , donde $\phi = 0$, en el exterior del abanico.

Al interior del abanico:

La ecuación de Geiringer para líneas β , $dv_\beta = -u_\alpha d\phi$, se integra entre los límites 0 y ϕ para obtener la forma integrada de la ecuación para cualquier punto sobre OG ; entonces,

$$\int_0^\phi dv_\beta = -\int_0^\phi u_\alpha d\phi$$

$$v_{\phi\beta i} - v_{(0)\beta i} = \int_\phi^0 u_\alpha d\phi$$

El índice en $v_{(0)\beta i}$ denota la velocidad tangencial a β en el punto O en el interior del abanico, donde $\phi = 0$. Conforme a la figura 10.3.9:

$$v_{\phi\beta i} - v_{(0)\beta i} = V_p \int_\phi^0 \cos(\pi / 4 - \phi) d\phi$$

Se recuerda en esta ecuación que las componentes de velocidad normal al abanico tienen el mismo valor adentro y afuera del abanico.

Integrando:

$$v_{\phi\beta i} - v_{(0)\beta i} = V_p \left[-\text{sen}(\pi/4 - \phi) \right]_{\phi}^0$$

Desarrollando la función seno:

$$v_{\phi\beta i} - v_{(0)\beta i} = -V_p \left[\text{sen}(\pi/4)\cos\phi - \text{sen}\phi\cos(\pi/4) \right]_{\phi}^0$$

Tomando límites:

$$v_{\phi\beta i} = v_{(0)\beta i} - V_p \left[\text{sen}(\pi/4) - \text{sen}(\pi/4)\cos\phi + \text{sen}\phi\cos(\pi/4) \right]$$

Simplificando:

$$v_{\phi\beta i} = v_{(0)\beta i} + \frac{V_p}{\sqrt{2}} \left[\cos\phi - \text{sen}\phi - 1 \right] \quad (b)$$

Despejando $v_{(0)\beta i}$:

$$v_{(0)\beta i} = v_{\phi\beta i} - \frac{V_p}{\sqrt{2}} \left[\cos\phi - \text{sen}\phi - 1 \right] \quad (c)$$

Para determinar $v_{(0)\beta i}$ se va a aprovechar la condición de que en el punto G , debido a la presencia de la zona muerta, la velocidad tangencial a β tiene un valor cero. Para llegar al punto G es necesario un giro $\phi = \pi/2$ desde el punto O . Por eso:

$$v_{(\pi/2)\beta i} = 0 \quad (d)$$

Sustituyendo ϕ por $\pi/2$ en c :

$$v_{(0)\beta i} = v_{(\pi/2)\beta i} - \frac{V_p}{\sqrt{2}} \left[\cos(\pi/2) - \text{sen}(\pi/2) - 1 \right]$$

$$v_{(0)\beta i} = v_{(\pi/2)\beta i} + \sqrt{2}V_p$$

Aplicando d en esta ecuación resulta:

$$v_{(0)\beta i} = \sqrt{2}V_p \quad (e)$$

La discontinuidad de velocidad en el punto O es entonces:

$$v_{(0)\beta}^* = v_{(0)\beta i} - v_{(0)\beta e} = \sqrt{2}V_p - V_p/\sqrt{2} = V_p/\sqrt{2}$$

Punto $\phi = \pi/4$:

En el exterior del abanico:

De la ecuación a :

$$v_{(\pi/4)\beta e} = V_p \text{sen}(\pi/4 - \pi/4)$$

$$v_{(\pi/4)\beta e} = 0$$

En el interior del abanico:

De las ecuaciones b y e :

$$v_{(\pi/4)\beta i} = \sqrt{2}V_p + \frac{V_p}{\sqrt{2}} [\cos\phi - \operatorname{sen}\phi - 1] \quad (f)$$

Para $\phi = \pi/4$:

$$v_{(\pi/4)\beta i} = \sqrt{2}V_p + \frac{V_p}{\sqrt{2}} [\cos(\pi/4) - \operatorname{sen}(\pi/4) - 1]$$

$$v_{(\pi/4)\beta i} = \sqrt{2}V_p - V_p / \sqrt{2}$$

$$v_{(\pi/4)\beta i} = V_p / \sqrt{2}$$

La discontinuidad de velocidad en el punto $\pi/4$ es, por tanto:

$$v_{(\pi/4)\beta}^* = v_{(\pi/4)\beta i} - v_{(\pi/4)\beta e} = V_p / \sqrt{2} - 0$$

$$v_{(\pi/4)\beta}^* = V_p / \sqrt{2}$$

Punto $\pi/2$:

Afuera del abanico:

De la ecuación a :

$$v_{(\pi/2)\beta e} = V_p \operatorname{sen}(\pi/4 - \pi/2) = V_p \operatorname{sen}(-\pi/4) = -V_p \operatorname{sen}(\pi/4)$$

$$v_{(\pi/2)\beta e} = -V_p / \sqrt{2}$$

Al interior del abanico:

De las ecuaciones b y e :

$$v_{(\pi/2)\beta i} = \sqrt{2}V_p + \frac{V_p}{\sqrt{2}} [\cos(\pi/2) - \operatorname{sen}(\pi/2) - 1]$$

$$v_{(\pi/2)\beta i} = \sqrt{2}V_p + \frac{V_p}{\sqrt{2}} (-2) = \sqrt{2}V_p - \sqrt{2}V_p = 0$$

La discontinuidad de velocidad en el punto $\pi/2$ es

$$v_{(\pi/2)\beta}^* = v_{(\pi/2)\beta i} - v_{(\pi/2)\beta e} = 0 - (-V_p / \sqrt{2})$$

$$v_{(\pi/2)\beta}^* = V_p / \sqrt{2}$$

Como era de esperarse, la discontinuidad de velocidad tiene el mismo valor en toda la extensión del arco OG .

TRAZO DE LA HODOGRAFÍA

Se traza un vector horizontal a escala de la magnitud de la velocidad V_p . Tomando como centro el final de este vector, se traza un arco de un radio de una longitud que representa a escala el vector de discontinuidad de velocidad, $v_{\phi\beta}^*$.

Se trazan tres vectores de discontinuidad de velocidad, teniendo como origen el extremo del vector V_p y como punto final el arco: uno en dirección vertical $v_{(\pi/4)\beta}^*$, otro formando con este vector un ángulo $\pi/4$, $v_{(\pi/2)\beta}^*$, y otro formando un ángulo $-\pi/4$ con el vector vertical, $v_{(0)\beta}$.

Se trazan los vectores que representan las velocidades de las partículas adentro del abanico, uniendo el origen de V_p con los extremos de los vectores de discontinuidad para obtener la suma de V_p con cada discontinuidad, dando como resultado: $V_{(\pi/2)}$, $V_{(\pi/4)}$, $V_{(0)}$.

Finalmente, las partículas de material cruzan la línea de discontinuidad \overline{OF} y la velocidad de las partículas en el interior del abanico $V_{(0)}$ se suma a la discontinuidad de velocidad en \overline{OF} , $u_{(0)\alpha}^*$, produciendo el vector horizontal V_f . La autoconsistencia del campo de las líneas de esfuerzo cortante máximo propuesto, la proporciona la relación

$$V_f = 2V_p$$

la cual corresponde a una reducción de área de 50%.

10.3.4. *Extrusión sin fricción de una placa por deformación plana.* *Reducción 2/3*

El problema de la determinación de la presión de extrusión sin fricción con deformación plana con una reducción de $2/3 = 0.67$, es similar al caso 10.3.3. Se va a hacer uso de la figura 10.3.10.

Los abanicos del campo de las líneas de corte son idénticos a los de la figura 10.3.7; en este ejemplo no hay zona muerta y los triángulos ABC y $A'B'C'$ son zonas de deformación. El análisis del estado de esfuerzos se inicia en el punto O , donde el esfuerzo principal coincide con la dirección x y tiene un valor cero. Como las relaciones angulares de este campo son iguales a las del caso con fricción, la presión hidrostática sobre la superficie AC es la misma del punto G del ejemplo anterior, es decir,

$$p_h = -k(1 + \pi)$$

Aplicando la expresión anterior para la presión hidrostática a la ecuación 10.1.6b para σ_x se obtiene:

$$\sigma_x = -2k(1 + \pi/2)$$

De la ecuación 10.3.2:

$$p_e = -4/3k(1 + \pi/2)$$

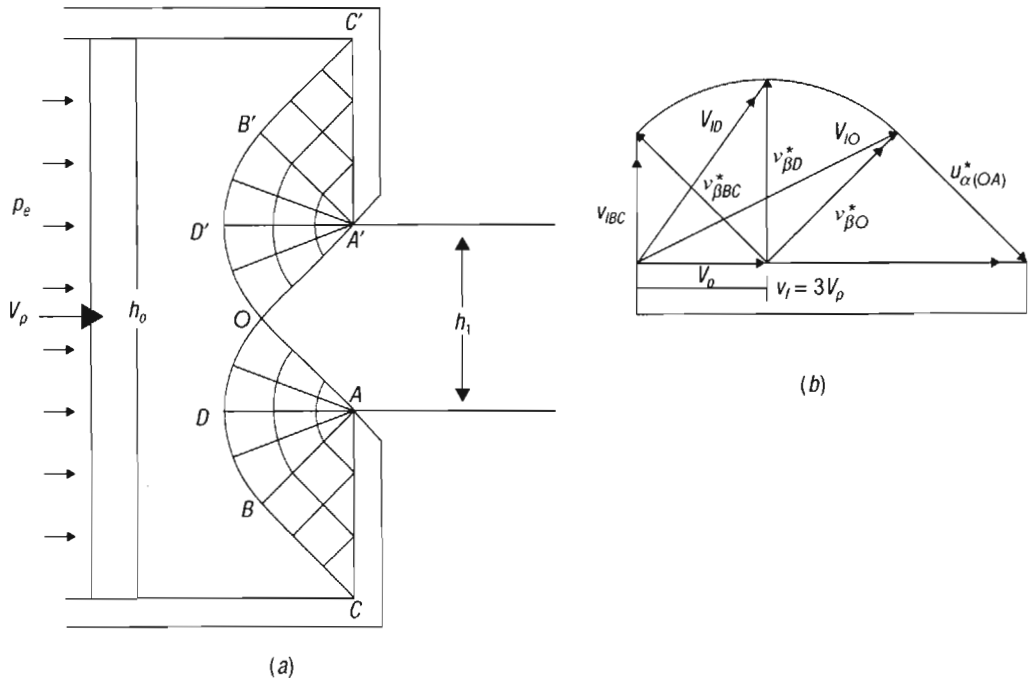


Figura 10.3.10. a) Campo de líneas de corte máximo; b) hodografía (Backofen, 1972).

HODOGRAFÍA Y AUTOCONSISTENCIA GEOMÉTRICA

La figura 10.3.11 presenta el campo de velocidades inferior de la figura 10.3.10. Se puede observar que este campo es idéntico al campo de velocidades de la figura 10.3.4a, por eso el procedimiento para el trazo de la hodografía es igual al utilizado en la figura 10.3.4b. Se nota una diferencia: en el presente caso los arcos son líneas β en tanto que los radios representan líneas α ; por esta razón, en la determinación de las discontinuidades de velocidad, las componentes tangenciales de velocidad se representan por v y las componentes normales por u ; en consecuencia, de conformidad con la figura 10.2.3 se utiliza para el cálculo de las componentes tangenciales en el interior del abanico la ecuación de Geiringer (10.2.6) para líneas β .

Para la determinación de la velocidad de las partículas en la zona de deformación y las discontinuidades de velocidad, se toma como referencia la línea BC , la que tiene un ángulo $\phi = 0$; esta línea forma un ángulo $\pi/4$ con la dirección V_p . De la figura 10.3.11:

$$-v_{pBC} = v_{1BC}$$

también:

$$-v_{pBC} = V_p \cos \phi = V_p \cos(\pi/4) = V_p / \sqrt{2}$$

de donde:

$$v_{1BC} = V_p / \sqrt{2}$$

La discontinuidad de velocidad es:

$$v_{\beta BC}^* = v_{1BC} - v_{pBC} = v_{1BC} - (-v_{1BC}) = V_p / \sqrt{2} - (-V_p / \sqrt{2}) = 2V_p / \sqrt{2}$$

$$v_{\beta BC}^* = \sqrt{2}V_p$$

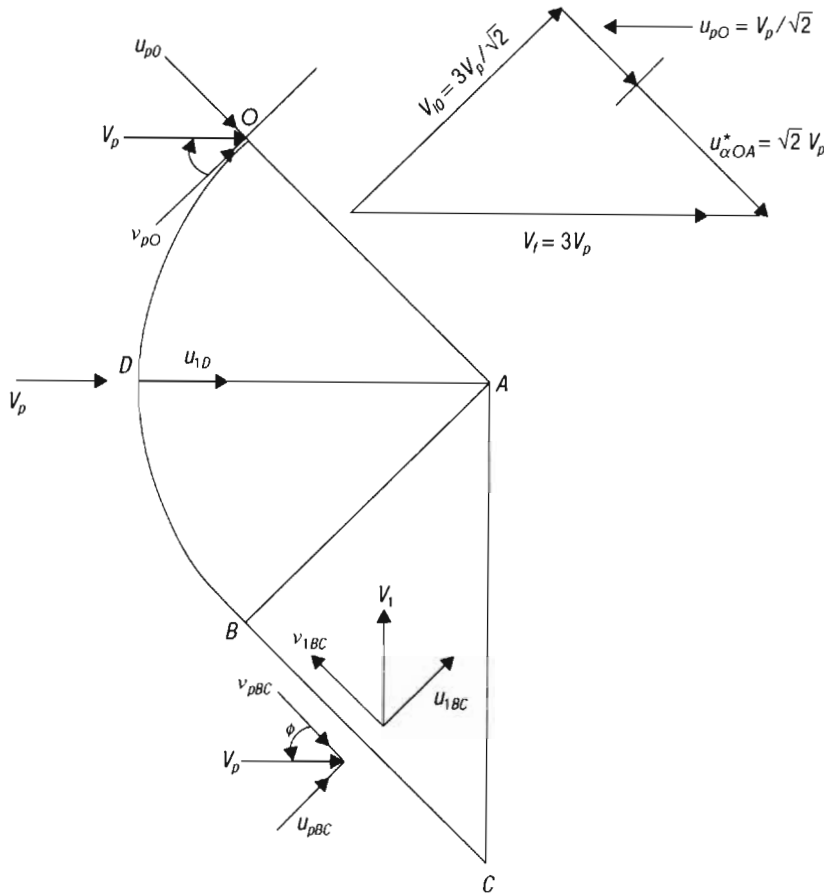


Figura 10.3.11. Campo de velocidades en la deformación plana de la figura 10.3.10, $r = 0.67$ (Backofen, 1972).

DISCONTINUIDAD DE VELOCIDAD EN EL PUNTO *D*

Afuera del abanico:

En el punto *D*, afuera del abanico, el vector de velocidad V_p tiene componentes tangencial y normal a la línea de discontinuidad $v_{pD} = 0$ y $V_p = u_{pD} = u_{1D}$, respectivamente.

Al interior del abanico:

La ecuación de Geiringer (10.2.6) permite determinar la componente tangencial en el interior del abanico:

$$dv = -ud\phi$$

La tangente a la línea de discontinuidad gira un ángulo $\pi/4$ en el sentido de las manecillas del reloj, de manera que en el punto D , $\phi = 0$; por eso los límites de integración de la ecuación de Geiringer son $\pi/4$ y 0 :

$$\int_{\pi/4}^0 dv = - \int_{\pi/4}^0 u d\phi = -V_p \int_{\pi/4}^0 \cos\phi d\phi = V_p \int_0^{\pi/4} \cos\phi d\phi$$

Integrando:

$$v_{ID} - v_{BC} = V_p [\text{sen}(\pi/4) - \text{sen}(0)] = V_p / \sqrt{2}$$

$$v_{ID} = v_{BC} + V_p / \sqrt{2} = V_p / \sqrt{2} + V_p / \sqrt{2} = 2V_p / \sqrt{2} = \sqrt{2}V_p$$

La discontinuidad de velocidad en el punto D es entonces:

$$v_{\beta D}^* = v_{ID} - v_{pD} = \sqrt{2}V_p - 0$$

$$v_{\beta D}^* = \sqrt{2}V_p$$

DISCONTINUIDAD DE VELOCIDAD EN EL PUNTO O

Afuera del abanico:

La tangente al arco β en el punto D debe girar un ángulo $-\pi/4$ (giro en el sentido de las manecillas del reloj) para alcanzar el punto O ; la componente tangencial de V_p a la discontinuidad es

$$v_{pO} = V_p \cos\phi = V_p \cos(-\pi/4) = V_p \cos(\pi/4)$$

$$v_{pO} = V_p / \sqrt{2}$$

Adentro del abanico:

Dentro del abanico, aplicando la ecuación de Geiringer e integrando entre los límites $+\pi/4$ y $-\pi/4$, resulta:

$$\int_{\phi=\pi/4}^{\phi=-\pi/4} dv = v_{IO} - v_{BC} = - \int_{\phi=\pi/4}^{\phi=-\pi/4} u d\phi$$

Aplicando $v_{BC} = V_p / \sqrt{2}$ a esta ecuación resulta:

$$v_{IO} = V_p / \sqrt{2} + V_p \int_{\phi=-\pi/4}^{\phi=\pi/4} \cos\phi d\phi = V_p / \sqrt{2} + V_p (\text{sen}\phi) \Big|_{-\pi/4}^{\pi/4}$$

$$v_{IO} = V_p / \sqrt{2} + V_p [\text{sen}(\pi/4) - \text{sen}(-\pi/4)]$$

$$v_{IO} = V_p / \sqrt{2} + V_p / \sqrt{2} + V_p / \sqrt{2}$$

$$v_{IO} = \frac{3V_p}{\sqrt{2}}$$

En el punto O , la discontinuidad de velocidad es:

$$v_{\beta O}^* = v_{1O} - v_{pO} = \frac{3V_p}{\sqrt{2}} - \frac{V_p}{\sqrt{2}} = \frac{2V_p}{\sqrt{2}}$$

$$v_{\beta O}^* = \sqrt{2}V_p$$

Debido a que los puntos O y A pertenecen a la misma línea recta, las componentes de velocidad a lo largo de la línea OA son las mismas que en el punto O , como se muestra en la figura 10.3.11. La velocidad a la salida del abanico V_f es igual a la suma de la componente normal a la línea α , v_{1O} , y de las componentes paralelas a α : $u_{pO} = V_p / \sqrt{2}$ y la discontinuidad de velocidad $u_{\alpha AO}^*$.

TRAZO DE LA HODOGRAFÍA

Se traza un vector horizontal a escala de la magnitud V_p . Tomando como centro el extremo de este vector se traza un arco de un radio igual a la discontinuidad de velocidad $\sqrt{2}V$. Se trazan tres vectores de discontinuidad de velocidad con origen en el extremo del vector V_p y con punto final en un punto del arco. Cada vector de discontinuidad está separado de los demás por un ángulo de 45° : el correspondiente al punto D , $v_{\beta D}^*$, está en posición vertical, los otros dos vectores forman un ángulo $(\pi/4)$, $v_{\beta BC}^*$, y un ángulo $(-\pi/4)$, $v_{\beta O}^*$, con la dirección vertical. Se trazan vectores que tienen como origen el del vector V_p y como fin el extremo final de los vectores de discontinuidad, representando así a las velocidades de las partículas en el interior del abanico. Finalmente, se suma la discontinuidad de velocidad en la línea OA , $u_{\alpha OA}^* = \sqrt{2}V_p$, a la velocidad de las partículas de material en el interior del abanico V_{1O} para producir la velocidad a la salida de la matriz $V_f = 3V_p$ (figura 10.3.10b), que comprueba la compatibilidad del campo de deformación.

10.3.5. Perforación con un punzón plano. Reducción 50%

Las operaciones de extrusión y perforación con un punzón son similares. El desplazamiento del ariete es equivalente al del punzón. En la figura 10.3.12 se ilustra una perforación con un punzón plano con formación de zona muerta en el frente de la herramienta; la reducción que experimenta el material es de 50%.

PRESIÓN DEL PUNZÓN

El equilibrio de fuerzas planteado en la ecuación 10.3.1 para extrusión es el mismo que para perforación:

$$p_e(h_0 t_0) = \sigma_x(h_0 - h_f)t_0$$

Se eliminan los espesores t_0 de ambos miembros de la ecuación y se iguala la presión del punzón con σ_x , así $p_p = \sigma_x$. Haciendo estos cambios, la ecuación para calcular la presión del punzón es:

$$p_p = p_e \frac{h_0}{h_0 - h_1}$$

de donde

$$p_p = \frac{p_e}{r} \quad (10.3.3)$$

En este ejemplo, $r = 0.5$; aplicando la expresión de la presión de extrusión (sección 10.3.3), $p_e = -k(1 + \pi/2)$, entonces:

$$p_p = -2k(1 + \pi/2) \approx 5.1k$$

Hodografía

La hodografía puede obtenerse siguiendo el procedimiento empleado para endentación y extrusión. El material sale por el espacio comprendido entre el penetrador y la pared de la cámara que contiene el material que va a ser perforado, de manera que la velocidad tiene una dirección horizontal y una magnitud dos veces la velocidad del punzón, debido a que la reducción es $r = 0.5$.

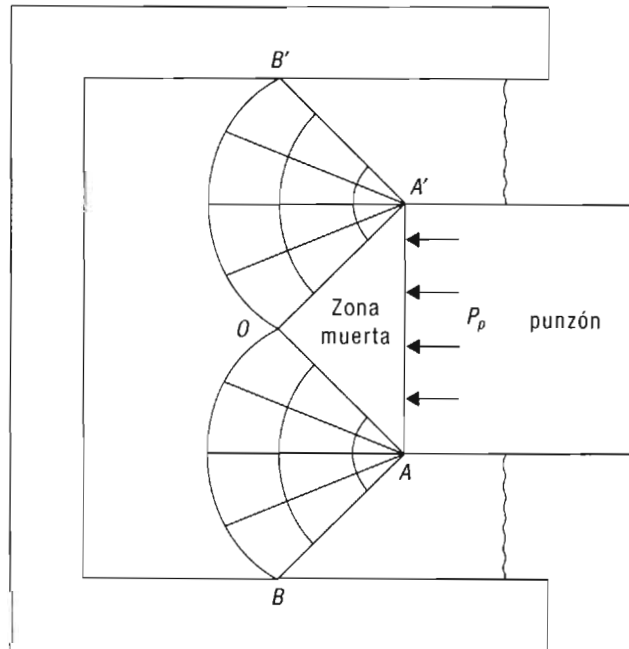


Figura 10.3.12. Perforación con un punzón plano con formación de zona muerta, $r = 0.5$.

Ejercicios de final de capítulo

1

Se presentan tres ejercicios para resolución por parte del lector. En la literatura se encuentran ejemplos de aplicación a varios procesos de deformación. En especial, el libro de Johnson W., R. Sowerby y J.B. Haddow, 1970, es prolífico en ejemplos y en referencias a otras fuentes bibliográficas:

1. Determine con detalle: a) la presión para generar una perforación con un punzón plano y compruebe si el valor obtenido en la sección 10.3.5 es correcto. Las condiciones de deformación son, a saber: se forma zona muerta en la superficie frontal de la herramienta, la reducción de área es $r = 1/2$, no hay fricción

Ejercicios de final de capítulo (continuación)

2

entre el material y la cámara; y *b*) trace la hodografía y verifique si el campo de líneas de corte máximo es compatible. La perforación tiene lugar en deformación plana, utilice la figura 10.3.12.

Respuestas:

a) $p_p = -5.1 k$; *b*) utilice como guía la hodografía de la figura 10.3.6.

2. Calcule: *a*) la presión para producir una perforación con un punzón plano sin formación de zona muerta en la superficie frontal del punzón, la reducción de área que experimenta el material es $r = 2/3$, la fricción entre el material y la cámara es cero; y *b*) compruebe, mediante una hodografía, si el campo de líneas de corte máximo es compatible. La deformación se realiza en condiciones de deformación plana (figura 10.E.1).

Respuestas:

a) $p_p = -5.1 k$; *b*) utilice como guía la hodografía de la figura 10.3.4*b*.

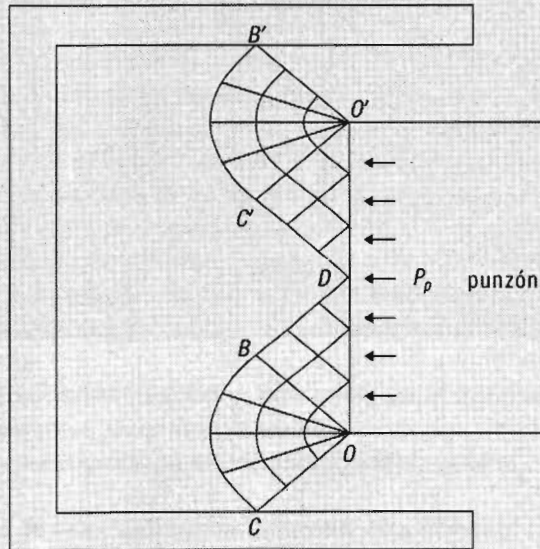


Figura 10.E.1.

3. Estime: *a*) la presión para producir una perforación con un punzón con punta en forma de cincel cuyas caras forman un ángulo $\pi/2$. La fricción es cero tanto entre las caras de contacto de material y punzón, como entre el material y las superficies de la cámara contenedora del material, la reducción de área que experimenta el material es $r = 2/3$; y *b*) compruebe, mediante una hodografía, si el campo de líneas de corte máximo es compatible. La deformación se realiza en condiciones de deformación plana (figura 10.E.2).

Ejercicios de final de capítulo (continuación)

3

Respuestas:

a) $p_e = -5.1 k$; b) utilice como guía la hodografía de la figura 10.3.4b.

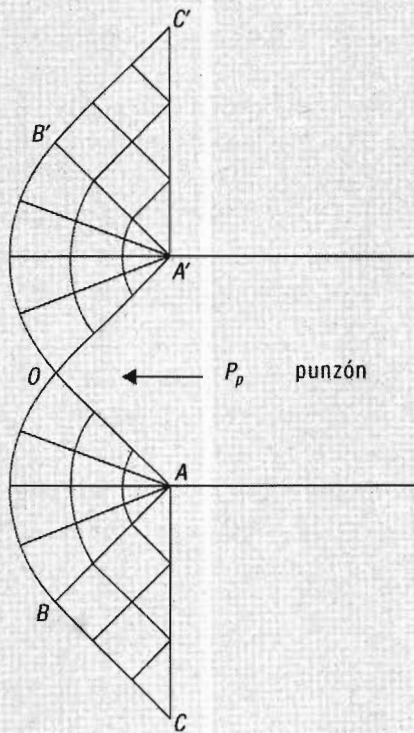


Figura 10.E.2.

CAPÍTULO 11

Método del límite superior

11.1. Ecuación de Prager y Hodge

W. Prager y P.H. Hodge presentaron los fundamentos matemáticos de los principios extremos aplicados a los procesos de deformación en el libro *Theory of Perfect Plastic Solids* publicado en 1951; el equilibrio de fuerzas en un elemento de volumen de material y las condiciones frontera inherentes al proceso de deformación que se presenta en el capítulo 8, constituyen el método de límite inferior. El método de límite superior propuesto por estos autores fue aplicado por B. Avitzur (1968) a un grupo amplio de procesos de formado en su libro *Metal Forming Processes and Analysis*. El presente capítulo está basado en la metodología de estos autores.

Aunque el desarrollo matemático es aplicable sólo a materiales perfectamente plásticos, es decir, a materiales que se deforman a un valor constante de esfuerzo, es posible aplicarlo a materiales industriales que endurecen por deformación utilizando un esfuerzo de cedencia promedio.

Prager y Hodge establecen, como condición para su aplicación, que el material debe satisfacer la ley de von Mises *esfuerzo-rapidez de deformación*. La esencia del método es el segundo teorema de estos autores que lo enuncian de la siguiente manera:

Teorema 2. De todos los campos de velocidad cinemáticamente admisibles, el campo real minimiza la expresión:

$$j^* = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0 \int_V \sqrt{1/2 \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}} dV + \int_S \tau |\Delta u| ds - \int_T T_i \dot{V}_i ds \quad (11.1.1)$$

En esta ecuación, el primer miembro representa la potencia proporcionada externamente. En el segundo miembro, el primer término es la potencia utilizada para producir la deformación plástica, \dot{W}_D . El segundo término es la potencia consumida en las superficies de discontinuidad de velocidad, \dot{W}_d , debida a: a) cambio en la dirección de las partículas de material (distorsión), y b) fricción en la interfaz matriz-pieza. Finalmente, el tercer término es la potencia empleada para vencer la tracción superficial que actúa sobre la pieza, \dot{W}_T .

El teorema significa que la suma de las potencias calculadas que aparecen en el segundo miembro de la ecuación 11.1.1 siempre va a ser igual o mayor a la potencia suministrada externamente. La figura 11.1.1 será utilizada para derivar los términos de esta ecuación.

11.1.1. Términos de la ecuación de Prager y Hodge

POTENCIA EXTERNA

Se utilizará el proceso de trefilado de alambre para mostrar el significado de los términos de la ecuación de Prager y Hodge. La potencia aplicada externamente J^* es calculada mediante la expresión:

$$J^* = \sigma_t A_f \dot{V}_f = \sigma_t (\pi R_f^2) \dot{V}_f \quad (11.1.2)$$

Donde σ_t es el esfuerzo de trefilado que se aplica al alambre a la salida de la matriz; R_f , A_f y \dot{V}_f son, en este orden, el radio y el área de la sección transversal, así como la velocidad a la salida de la matriz (figura 11.1.1).

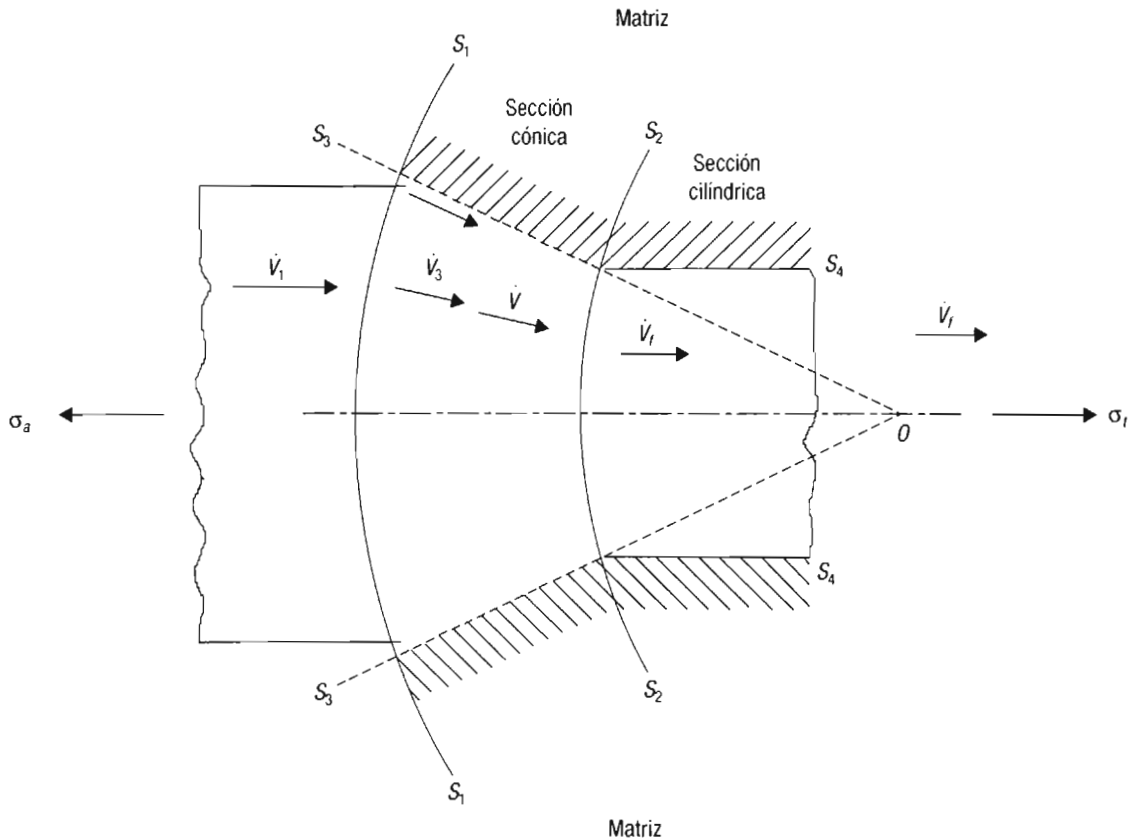


Figura 11.1.1. Representación esquemática del proceso de trefilado de alambre.

POTENCIA DE TRACCIÓN

Es práctica generalizada que el alambre al momento de ser trefilado se desenrolle de una bobina, por lo tanto es necesario aplicar un esfuerzo de tracción σ_a para desenrollarlo; la potencia de tracción es calculada mediante la ecuación:

$$\dot{W}_T = \int_T T_i \dot{V}_i ds = \sigma_a A_1 \dot{V}_1 = \sigma_a A_f \dot{V}_f \tag{11.1.3}$$

A_1 y \dot{V}_1 son el área y velocidad del material a la entrada de la matriz. Debido a la propiedad que tienen los materiales de conservar su volumen al deformarse plásticamente:

$$A_1 \dot{V}_1 = A_f \dot{V}_f$$

POTENCIA DE DEFORMACIÓN

$$\dot{W}_D = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0 \int_V \sqrt{1/2 \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}} dV$$

La cantidad de trabajo realizado para la deformación del material, por unidad de tiempo, por unidad de volumen, por el principio de superposición es

$$\dot{w}_D = \sigma_{11} \dot{\epsilon}_{11} + \sigma_{22} \dot{\epsilon}_{22} + \sigma_{33} \dot{\epsilon}_{33} + 2(\sigma_{12} \dot{\epsilon}_{12} + \sigma_{23} \dot{\epsilon}_{23} + \sigma_{31} \dot{\epsilon}_{31}) = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \tag{i}$$

En esta ecuación, σ_{ij} , $\dot{\epsilon}_{ij}$ son los tensores de esfuerzo y de rapidez de deformación, respectivamente. El tensor de esfuerzos se puede expresar como la suma de sus componentes hidrostática y desviadora; por eso la ecuación i se transforma en:

$$\begin{aligned} \dot{w}_D = & (\sigma'_{11} + \sigma_m \delta_{ij}) \dot{\epsilon}_{11} + (\sigma'_{22} + \sigma_m \delta_{ij}) \dot{\epsilon}_{22} + (\sigma'_{33} + \sigma_m \delta_{ij}) \dot{\epsilon}_{33} + \\ & + 2(\sigma_{12} \dot{\epsilon}_{12} + \sigma_{23} \dot{\epsilon}_{23} + \sigma_{31} \dot{\epsilon}_{31}) \end{aligned} \tag{ii}$$

Donde σ'_{ij} representa el tensor del esfuerzo desviador; $\sigma_m = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3}$; δ_{ij} es el tensor llamado delta de Kronecker (cuando $i = j$, $\delta_{ij} = 1$; cuando $i \neq j$, $\delta_{ij} = 0$).

Agrupando en forma separada las componentes hidrostática y desviadora:

$$\begin{aligned} \dot{w}_D = & \left[\sigma'_{11} \dot{\epsilon}_{11} + \sigma'_{22} \dot{\epsilon}_{22} + \sigma'_{33} \dot{\epsilon}_{33} + 2(\sigma_{12} \dot{\epsilon}_{12} + \sigma_{23} \dot{\epsilon}_{23} + \sigma_{31} \dot{\epsilon}_{31}) \right] + \\ & + \left[(\dot{\epsilon}_{11} + \dot{\epsilon}_{22} + \dot{\epsilon}_{33}) \sigma_m \delta_{kk} \right] \end{aligned} \tag{iii}$$

Por constancia de volumen:

$$\dot{\epsilon}_{11} + \dot{\epsilon}_{22} + \dot{\epsilon}_{33} = 0 \tag{iv}$$

Utilizando iv en iii:

$$\begin{aligned} \dot{w}_D = & \left[\sigma'_{11} \dot{\epsilon}_{11} + \sigma'_{22} \dot{\epsilon}_{22} + \sigma'_{33} \dot{\epsilon}_{33} + 2(\sigma_{12} \dot{\epsilon}_{12} + \sigma_{23} \dot{\epsilon}_{23} + \sigma_{31} \dot{\epsilon}_{31}) \right] \\ \dot{w}_D = & \sigma'_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \end{aligned} \tag{v}$$

Von Mises demostró que la rapidez de deformación varía proporcionalmente con el esfuerzo desviador:

$$\frac{\dot{\epsilon}_{11}}{\sigma'_{11}} = \frac{\dot{\epsilon}_{22}}{\sigma'_{22}} = \frac{\dot{\epsilon}_{33}}{\sigma'_{33}} = \frac{\dot{\epsilon}_{12}}{\sigma'_{12}} = \frac{\dot{\epsilon}_{23}}{\sigma'_{23}} = \frac{\dot{\epsilon}_{31}}{\sigma'_{31}} = \mu \quad (\text{vi})$$

donde μ es una constante de proporcionalidad. La ecuación vi puede presentarse en la forma:

$$\dot{\epsilon}_{11} = \mu\sigma'_{11}; \dot{\epsilon}_{22} = \mu\sigma'_{22}; \dot{\epsilon}_{33} = \mu\sigma'_{33}; \dot{\epsilon}_{12} = \mu\sigma'_{12}; \dot{\epsilon}_{23} = \mu\sigma'_{23}; \dot{\epsilon}_{31} = \mu\sigma'_{31} \quad (\text{vii})$$

En notación tensorial:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \mu\sigma'_{ij} \quad (\text{viii})$$

La ecuación viii es la representación matemática de la ley de von Mises esfuerzo-rapidez de deformación.

Von Mises definió como I al semiproducto tensorial $\dot{\epsilon}_{ij}\dot{\epsilon}_{ij}$:

$$I = \frac{1}{2}\dot{\epsilon}_{ij}\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\dot{\epsilon}_{11}^2 + \dot{\epsilon}_{22}^2 + \dot{\epsilon}_{33}^2) + (\dot{\epsilon}_{12}^2 + \dot{\epsilon}_{23}^2 + \dot{\epsilon}_{31}^2) \quad (\text{ix})$$

Utilizando viii en ix:

$$I = \mu^2 \left[\frac{1}{2}(\sigma'^2_{11} + \sigma'^2_{22} + \sigma'^2_{33}) + (\sigma'^2_{12} + \sigma'^2_{23} + \sigma'^2_{31}) \right] \quad (\text{x})$$

Del criterio de cedencia de von Mises expresado en términos de las componentes del esfuerzo desviador:

$$J_2 = k^2 = \left[\frac{1}{2}(\sigma'^2_{11} + \sigma'^2_{22} + \sigma'^2_{33}) + (\sigma'^2_{12} + \sigma'^2_{23} + \sigma'^2_{31}) \right] = \frac{1}{2}\sigma'_{ij}\sigma'_{ij} \quad (\text{xi})$$

Utilizando xi en x:

$$I = \mu^2 k^2$$

de donde

$$\mu = \pm \frac{\sqrt{I}}{k} \quad (\text{xii})$$

Aplicando xii a vii:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{11} &= \pm \frac{\sqrt{I}}{k} \sigma'_{11}; \dot{\epsilon}_{22} = \pm \frac{\sqrt{I}}{k} \sigma'_{22}; \dot{\epsilon}_{33} = \pm \frac{\sqrt{I}}{k} \sigma'_{33} \\ \dot{\epsilon}_{12} &= \pm \frac{\sqrt{I}}{k} \sigma'_{12}; \dot{\epsilon}_{23} = \pm \frac{\sqrt{I}}{k} \sigma'_{23}; \dot{\epsilon}_{31} = \pm \frac{\sqrt{I}}{k} \sigma'_{31} \end{aligned} \quad (\text{xiii})$$

En notación tensorial:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \pm \frac{\sqrt{I}}{k} \sigma'_{ij} \quad (\text{xiv})$$

Aplicando ix a xiv:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \pm \frac{\sqrt{(1/2)\dot{\epsilon}_{ij}\dot{\epsilon}_{ij}}}{k} \sigma'_{ij} \tag{xv}$$

Sustituyendo el segundo miembro de xv por $\dot{\epsilon}_{ij}$ en v:

$$\dot{w}_D = \pm \frac{\sqrt{(1/2)\dot{\epsilon}_{ij}\dot{\epsilon}_{ij}}}{k} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} \tag{xvi}$$

Utilizando xi en xvi y simplificando:

$$\dot{w}_D = 2k \sqrt{(1/2)\dot{\epsilon}_{ij}\dot{\epsilon}_{ij}} \tag{xvii}$$

Del criterio de cedencia de von Mises:

$$k = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \tag{xviii}$$

Utilizando xviii en xvii:

$$\dot{w}_D = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \sqrt{(1/2)\dot{\epsilon}_{ij}\dot{\epsilon}_{ij}} \tag{xix}$$

La potencia total para el volumen V de material es obtenida por integración de la ecuación xix:

$$\dot{W}_D = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \int_V \sqrt{(1/2)\dot{\epsilon}_{ij}\dot{\epsilon}_{ij}} dV \tag{11.1.4}$$

POTENCIA PARA VENCER LAS DISCONTINUIDADES DE VELOCIDAD

Existen dos clases de discontinuidades: a) las debidas a cambio de dirección de las partículas; y b) las debidas a fricción.

a) Discontinuidades de velocidad debidas a cambio de dirección de las partículas:

$$\dot{W}_d = \int_S \tau |\Delta u| ds \tag{11.1.5}$$

Discontinuidad de velocidad $|\Delta u|$

En la figura 11.1.1 se observan dos superficies: S_1, S_2 , que corresponden al cambio de velocidad de las partículas de \dot{V}_1 a \dot{V} y de \dot{V} a \dot{V}_2 , respectivamente. En la figura 11.1.2 se representa en mayor escala la superficie que separa las zonas 1 y 2, y las velocidades en cada zona designadas como \dot{V}_1, \dot{V}_2 tienen componentes normales v_1, v_2 y paralelas u_1, u_2 a la superficie de discontinuidad S . Las velocidades normales a la superficie de discontinuidad deben ser de la misma magnitud en ambas zonas para que la deformación sea compatible, es decir, para que no se produzcan cavidades o traslapes de material durante la deformación, propiedad que caracteriza a un campo de velocidades cinemáticamente admisible como lo establece el teorema 2 de Prager y Hodge; matemáticamente:

$$v_1 = v_2 \tag{xx}$$

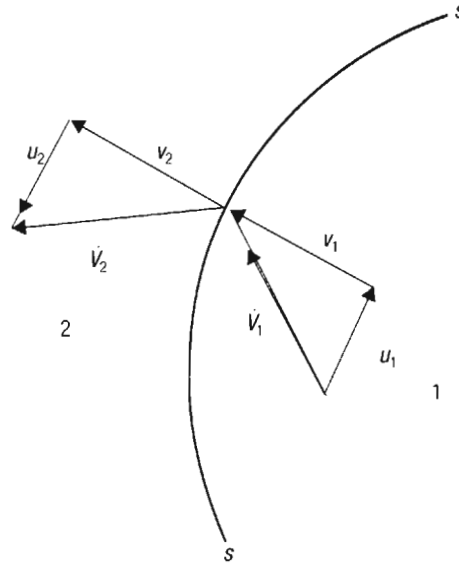


Figura 11.1.2. Superficie de discontinuidad de velocidad entre las zonas 1 y 2 del campo de velocidades.

Las componentes de velocidad paralelas a la superficie de discontinuidad deben ser de diferente magnitud para que se produzca deformación cortante.

$$|\Delta u| = |u_2 - u_1| \quad (\text{xxi})$$

Un material plástico perfecto se deforma plásticamente en condiciones de fricción adhesiva.

Si el factor de corte gobierna la fricción, entonces $m = 1$ y aplica la ecuación:

$$\tau = mk = k \quad (\text{xxii})$$

En términos del esfuerzo de cedencia en tensión unidireccional resulta:

$$\tau = k = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \quad (\text{xxiii})$$

La integración del producto de la discontinuidad de velocidad por el esfuerzo cortante sobre toda la superficie de discontinuidad produce la potencia consumida por cambio de velocidad, obteniéndose así el valor \dot{W}_d de la ecuación 11.1.5:

$$\dot{W}_d = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \int_S |\Delta u| dS \quad (11.1.6)$$

b) Discontinuidades de velocidad debidas a fricción

Ejemplos de discontinuidades de velocidad debidas a fricción son las superficies de contacto, S_3 y S_4 (figura 11.1.1). Las partículas de material se mueven paralelas a las superficies de contacto, por eso las componentes de velocidad normales a las interfaces S_3 , S_4 tienen un valor cero a ambos lados de estas superficies. La discontinuidad de velocidad en cualquiera de estas dos interfaces es igual a la velocidad a que

se mueve el material porque la matriz permanece inmóvil durante el estirado del alambre. Como la fricción está gobernada por el factor de corte:

$$\tau = mk = m \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \quad (\text{xxiv})$$

La ecuación 11.1.5 se transforma en:

$$\dot{W}_d = m \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \int |\Delta u| ds \quad (11.1.7)$$

El esfuerzo para estirar el alambre es obtenido aplicando las ecuaciones 11.1.2, 11.1.3, 11.1.4, 11.1.6, y 11.1.7 en la ecuación 11.1.1 y despejando el esfuerzo de trefilado σ_r . A continuación se resuelven algunos problemas para diferentes procesos de deformación.

11.2. Compresión unidireccional uniforme de un cilindro con fricción cero en la interfaz cilindro-platina

Éste es un ejemplo sencillo que servirá para ilustrar el procedimiento seguido para derivar la ecuación para calcular la presión p o bien la fuerza de compresión P . Se utilizará la figura 11.2.1. El primer paso es encontrar los términos de la ecuación 11.1.1 de Prager y Hodge. Es cómodo utilizar coordenadas cilíndricas r , ϕ , z .

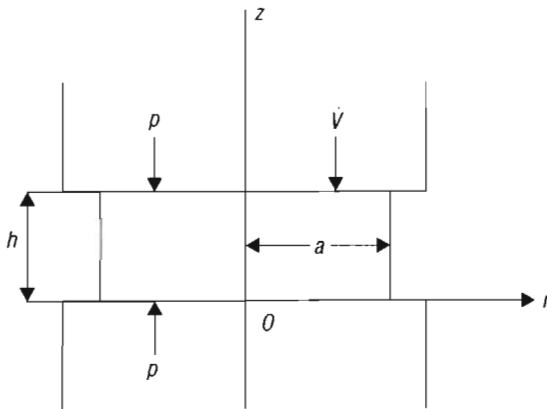


Figura 11.2.1. Compresión de un cilindro (Avitzur, 1968).

POTENCIA EXTERNA

La potencia externa es obtenida de los principios básicos de física:

$$J^* = pA\dot{V} = p\pi a^2\dot{V} \quad (A.a)$$

El valor instantáneo de presión que ejerce la platina es p ; la correspondiente área de contacto es A ; \dot{V} es la velocidad de la platina de la prensa de forja.

POTENCIA DE TRACCIÓN

En este proceso no existe tracción, por lo que este término tiene valor cero.

POTENCIA DE DEFORMACIÓN

Se determina el radicando de la ecuación 11.1.4. Una partícula de material que se mueve en el campo de velocidades de la figura 11.2.1 a una velocidad \dot{V}_i tiene componentes $\dot{V}_r, \dot{V}_\phi, \dot{V}_z$ a lo largo de los ejes coordenados r, ϕ, z . Las componentes del tensor de rapidez de deformación para coordenadas cilíndricas se pueden calcular mediante las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{rr} &= \frac{\partial \dot{V}_r}{\partial r}; \quad \dot{\epsilon}_{\phi\phi} = \frac{\dot{V}_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{V}_\phi}{\partial \phi}; \quad \dot{\epsilon}_{zz} = \frac{\partial \dot{V}_z}{\partial z}; \quad \dot{\epsilon}_{r\phi} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \left(\frac{\partial \dot{V}_r}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial \dot{V}_\phi}{\partial r} - \frac{V_\phi}{r} \right) \\ \dot{\epsilon}_{\phi z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{V}_\phi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{V}_z}{\partial \phi} \right); \quad \dot{\epsilon}_{zr} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{V}_r}{\partial z} + \frac{\partial \dot{V}_z}{\partial r} \right) \end{aligned} \quad (11.2.1)$$

Las expresiones matemáticas para las componentes de velocidad de \dot{V}_i para un cilindro son obtenidas tomando en cuenta algunas consideraciones. La platina inferior de la prensa durante la forja permanece inmóvil en tanto que la platina superior se mueve hacia abajo a una velocidad \dot{V} .

Como la deformación es uniforme, el radio del cilindro aumenta en forma simétrica respecto del eje z a medida que disminuye su altura; la fricción en la interfaz es muy pequeña, por lo que no se produce la forma de barril. Por eso la velocidad radial depende solamente del valor de r . La velocidad de las partículas de metal a lo largo de r es determinada a partir del principio de que la deformación plástica no produce aumento del volumen de la pieza; por eso la suma de la rapidez de incremento de volumen en la dirección z y de la rapidez de incremento de volumen en la dirección circunferencial tiene un valor cero.

$$2\pi r h \dot{V}_r + \pi r^2 \dot{V} = 0$$

Despejando \dot{V}_r :

$$\dot{V}_r = -\frac{1}{2} \frac{r}{h} \dot{V} \quad (1)$$

El signo menos es debido a que conforme aumenta el radio, disminuye \dot{V}_r .

Durante la compresión del cilindro de material, el disco no gira, es decir, las partículas de material mantienen constante el ángulo ϕ que forma su trayectoria con el eje r alrededor del eje z . Por tanto:

$$\dot{V}_\phi = 0 \quad (2)$$

La velocidad a lo largo del eje z se calcula simplemente multiplicando el factor de proporcionalidad de posición z/h por la velocidad de la platina:

$$\dot{V}_z = \frac{z}{h} \dot{V} \quad (3)$$

Es posible comprobar que esta ecuación satisface las condiciones frontera: un punto de material en la interfaz superior tiene $z = h, \dot{V}_z = \dot{V}$; un punto en la interfaz inferior tiene $z = 0, \dot{V}_z = 0$.

Utilizando las ecuaciones 1, 2 y 3 en las ecuaciones 11.2.1, resultan las expresiones para las componentes del tensor de rapidez de deformación.

$$\dot{\epsilon}_{rr} = \dot{\epsilon}_{\phi\phi} = (-1/2)\dot{\epsilon}_{zz} = -\frac{1}{2}\frac{\dot{V}}{h}; \quad \dot{\epsilon}_{r\phi} = \dot{\epsilon}_{\phi z} = \dot{\epsilon}_{zr} = 0 \quad (4)$$

Haciendo la equivalencia de índices $r = 1$, $\phi = 2$, $z = 3$ en la ecuación ix y aplicando la ecuación 4 en la ecuación resultante:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\dot{\epsilon}_{ij}\dot{\epsilon}_{ij} &= \frac{1}{2}(\dot{\epsilon}_{rr}^2 + \dot{\epsilon}_{\phi\phi}^2 + \dot{\epsilon}_{zz}^2) + (\dot{\epsilon}_{r\phi}^2 + \dot{\epsilon}_{\phi z}^2 + \dot{\epsilon}_{zr}^2) = \frac{1}{2}\left[\left(-\frac{1}{2}\dot{\epsilon}_{zz}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\dot{\epsilon}_{zz}\right)^2 + (\dot{\epsilon}_{zz})^2\right] \\ \frac{1}{2}\dot{\epsilon}_{ij}\dot{\epsilon}_{ij} &= \frac{1}{2}\left(\frac{6}{4}\dot{\epsilon}_{zz}^2\right) = \frac{3}{4}\dot{\epsilon}_{zz}^2 \end{aligned} \quad (5)$$

Utilizando la ecuación 5 en la 11.1.4:

$$\dot{W}_D = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \int_V \sqrt{\frac{3}{4}\dot{\epsilon}_{zz}^2} dV = \sigma_0 \dot{\epsilon}_{zz} V$$

En esta ecuación se pusieron fuera del operador de integración el factor constante $(\sqrt{3}/2)$, así como el término $\dot{\epsilon}_{zz}$, este último porque la rapidez de deformación en la dirección z no es función del volumen. Finalmente se integró dV

Aplicando el volumen del cilindro $V = \pi a^2 h$ y $\dot{\epsilon}_{zz} = \frac{\dot{V}}{h}$, resulta:

$$\dot{W}_D = \sigma_0 \left(\frac{\dot{V}}{h}\right) (\pi a^2 h)$$

Simplificando:

$$\dot{W}_D = (\sigma_0)(\pi a^2)\dot{V} \quad (A.b)$$

POTENCIA DEBIDA A LA DISCONTINUIDAD EN LA INTERFAZ

La única discontinuidad presente es la de la interfaz del cilindro en proceso de deformación *versus* platinas. La potencia se calcula mediante la ecuación 11.1.7:

$$\dot{W}_d = m \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \int_S |\Delta u| ds \quad (11.1.7)$$

El esfuerzo cortante $\tau = mk$ (ecuación xxiv) está fuera del operador de integración. La platina no tiene movimiento en la dirección radial; entonces la discontinuidad de velocidad es igual a la velocidad radial del material del cilindro en la interfaz inferior (donde $z = 0$) y en la interfaz superior (donde $z = h$).

$$|\Delta u| = \left| \dot{V}_r \Big|_{z=0,h} - 0 \right| = \left| -\frac{1}{2} \frac{r}{h} \dot{V} \Big|_{z=0,h} - 0 \right| = \frac{1}{2} \frac{r}{h} \dot{V} \quad (6)$$

La diferencial de superficie es la correspondiente a un elemento anular de radio r y ancho dr :

$$ds = 2\pi r dr \quad (7)$$

Aplicando las ecuaciones 6 y 7 en 11.1.7:

$$\dot{W}_d = m \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \int_{r=0}^a \left(\frac{1}{2} \frac{r}{h} \dot{V} \right) (2\pi r dr) = \frac{2\sigma_0 \pi m \dot{V}}{\sqrt{3} h} \int_{r=0}^a r^2 dr$$

Se aplica un factor 2 fuera del operador de integración para tomar en cuenta las dos platinas.

$$\dot{W}_d = \frac{2\sigma_0 \pi m \dot{V}}{3\sqrt{3} h} a^3 \quad (A.c)$$

Utilizando las ecuaciones A.a, A.b y A.c en 11.1.1:

$$p\pi a^2 \dot{V} = (\sigma_0)(\pi a^2) \dot{V} + \frac{2\sigma_0 \pi m \dot{V}}{3\sqrt{3} h} a^3 = \pi a^2 \dot{V} \left(\sigma_0 + \frac{2m\sigma_0 a}{3\sqrt{3}h} \right)$$

Simplificando:

$$p = \sigma_0 \left(1 + \frac{2ma}{3\sqrt{3}h} \right) \quad (11.2.2)$$

La ecuación 11.2.2 es idéntica a la ecuación 8.1.6 para calcular la presión promedio derivada por el método del equilibrio de fuerzas.

La fuerza (carga) de forja es el producto de la presión dada por la ecuación 11.2.2 y el área de la cara de contacto herramienta-pieza al final de la deformación.

$$P = pA = p\pi a^2 \quad (11.2.3)$$

Ejercicio 11.2.1

1

Se va a forjar en caliente un cilindro de acero de 50.8 mm de diámetro y 100 mm de altura en forma homogénea con una prensa de forja. El factor de corte es de 0.2. Determine: a) la carga necesaria para reducir el cilindro hasta la mitad de su altura, y b) la potencia consumida si la deformación se realizó en dos segundos. El esfuerzo de cedencia en compresión unidireccional es de 140 MPa y permanece constante a la temperatura de forja.

Respuestas:

a) Carga

La altura final va a ser de 50 mm. Por constancia de volumen, el radio al final de la forja es:

$$a_f = a_0 \sqrt{\frac{h_0}{h_f}} = 25.4 \sqrt{\frac{100}{50}} = 35.9 \text{ mm}$$

Ejercicio 11.2.1 (continuación)

2

Utilizando valores en la ecuación 11.2.2:

$$p = (140) \left(1 + \frac{2(0.2)(35.9)}{3\sqrt{3}(50)} \right) = 147.7 \text{ MPa}$$

La carga es:

$$P = 147.7\pi(35.9)^2 = 598 \text{ kN}$$

b) Potencia

$$\dot{W} = P \frac{(h_f - h_0)}{t} = 598(10^3) \frac{(50)(10^{-3})}{2} = 14.95 \text{ kW} = 20 \text{ HP}$$

11.3. Forja de una cinta metálica en deformación plana

Para derivar la ecuación para el cálculo de la presión de forja, se supone que la deformación es producida por una prensa en la cual las dos platinas se aproximan en su movimiento una hacia la otra a la misma velocidad: la platina superior hacia abajo, a una velocidad $-\dot{V}$; la platina inferior hacia arriba, a una velocidad \dot{V} . La longitud de la cinta se extiende a lo largo del eje y en dirección perpendicular al plano del papel, además es demasiado grande en comparación con el ancho y el espesor. Para la derivación de la ecuación, es aprovechada la simetría de la deformación: el ancho = $2a$, el espesor = $2h$ (figura 11.3.1). Al disminuir el espesor, aumenta el ancho; sin embargo, estos cambios tienen un efecto despreciable sobre la longitud, de manera que se puede considerar que la deformación tiene lugar en deformación plana. Lateralmente se aplica una presión p_L para controlar la deformación en la dirección del ancho.

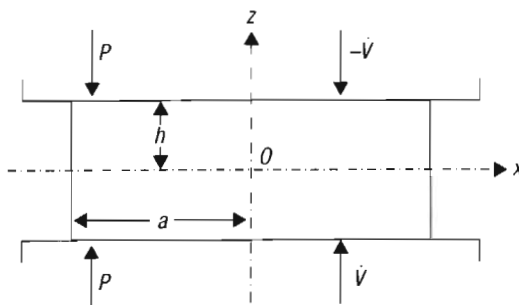


Figura 11.3.1. Forja de una cinta metálica en deformación plana (Avitzur, 1968).

POTENCIA EXTERNA

La potencia aplicada, proporcionada por las dos platinas, para realizar la forja es:

$$J^* = 2p(2a)(1)\dot{V} = 4pa\dot{V} \quad (\text{B.a})$$

Se considera una longitud unitaria (1); la presión que ejerce cada una de las dos platinas es p .

POTENCIA DE DEFORMACIÓN

La velocidad de cualquier partícula de material de la cinta en proceso de deformación plástica es \dot{V}_i con componentes: $\dot{V}_x, \dot{V}_y, \dot{V}_z$.

Las ecuaciones para determinar las componentes de rapidez de deformación de $\dot{\epsilon}_{ij}$ en función de las componentes de la velocidad \dot{V}_i de las partículas, son similares a las ecuaciones para obtener las deformaciones en función de los desplazamientos de las partículas, de 2.2.2a a 2.2.2f, por tanto:

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}_{xx} &= \frac{\partial \dot{V}_x}{\partial x}; \quad \dot{\epsilon}_{yy} = \frac{\partial \dot{V}_y}{\partial y}; \quad \dot{\epsilon}_{zz} = \frac{\partial \dot{V}_z}{\partial z}; \quad \dot{\epsilon}_{xy} = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial \dot{V}_y}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \dot{V}_x}{\partial y} \right) \right) \\ \dot{\epsilon}_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial \dot{V}_z}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial \dot{V}_y}{\partial z} \right) \right); \quad \dot{\epsilon}_{zx} = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial \dot{V}_x}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial \dot{V}_z}{\partial x} \right) \right)\end{aligned}\quad (11.3.1)$$

Las componentes de velocidad de \dot{V}_i son determinadas con base en la geometría de la deformación. La simetría de ésta hace posible examinar solamente la cuarta parte superior derecha de la cinta.

Puesto que la longitud de la cinta es muy grande, al deformarse el material en la dirección del ancho y del espesor, la longitud prácticamente no aumenta; entonces:

$$\dot{V}_y = 0 \quad (a)$$

Aplicando este valor a la ecuación 11.3.1, para $\dot{\epsilon}_{yy}$ resulta:

$$\dot{\epsilon}_{yy} = 0 \quad (b)$$

La velocidad \dot{V}_z de una partícula de material en cualquier punto comprendido entre $0 \leq z \leq h$ es calculada mediante la relación:

$$\dot{V}_z = -\frac{z}{h} \dot{V} \quad (c)$$

El signo negativo (-) es debido al signo de la velocidad de la platina; observe que esta ecuación es similar a la 3 de la sección 11.2. Aplicando esta expresión en la ecuación 11.3.1 para $\dot{\epsilon}_{zz}$:

$$\dot{\epsilon}_{zz} = -\frac{\dot{V}}{h} \quad (d)$$

Debido al principio de constancia de volumen:

$$\dot{\epsilon}_{xx} + \dot{\epsilon}_{yy} + \dot{\epsilon}_{zz} = 0$$

Puesto que $\dot{\epsilon}_{yy} = 0$, entonces:

$$\dot{\epsilon}_{xx} = -\dot{\epsilon}_{zz} = \frac{\dot{V}}{h} = \frac{\partial \dot{V}_x}{\partial x} \quad (e)$$

En la ecuación e se sustituyó por la expresión para $\dot{\epsilon}_{xx}$ dada en 11.3.1. \dot{V}_x es obtenida por integración. De la ecuación e :

$$\dot{V}_x = \int \dot{\epsilon}_{xx} dx = \frac{\dot{V}}{h} x \quad (f)$$

Aplicando las ecuaciones de las componentes de velocidad a , c y f en 11.3.1 y derivando, se obtienen las componentes de rapidez de deformación

$$\dot{\epsilon}_{xx} = -\dot{\epsilon}_{zz} = \frac{\dot{V}}{h}; \quad \dot{\epsilon}_{yy} = \dot{\epsilon}_{xy} = \dot{\epsilon}_{yz} = \dot{\epsilon}_{zx} = 0 \quad (g)$$

Se utilizan las expresiones para la rapidez de deformación (g) en la ecuación de von Mises (ix) que define I , haciendo equivalentes $x = 1, y = 2, z = 3$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} &= \frac{1}{2} (\dot{\epsilon}_{11}^2 + \dot{\epsilon}_{22}^2 + \dot{\epsilon}_{33}^2) + (\dot{\epsilon}_{12}^2 + \dot{\epsilon}_{23}^2 + \dot{\epsilon}_{31}^2) = \frac{1}{2} [(\dot{\epsilon}_{xx})^2 + 0^2 + (-\dot{\epsilon}_{xx})^2] + [0^2 + 0^2 + 0^2] \\ \frac{1}{2} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} &= \dot{\epsilon}_{xx}^2 \end{aligned} \quad (h)$$

La ecuación para estimar la potencia de deformación para una cinta de una longitud unitaria es obtenida de la 11.1.4.

$$\begin{aligned} \dot{W}_D &= \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \int_V \sqrt{(1/2) \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}} dV = (2)(2) \left(\frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \right) \int_{x=0}^a \int_{h=0}^h \sqrt{(1/2) \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}} dV \\ \dot{W}_D &= 4 \left(\frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \right) \int_{x=0}^a \int_{h=0}^h \sqrt{(1/2) \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}} dV \end{aligned} \quad (i)$$

Los factores $(2)(2)$ se incorporaron porque la integración sólo calcula la potencia para deformar un cuarto del volumen de cinta comprendido entre las platinas.

Aplicando la expresión para el radicando conforme a la ecuación h y sustituyendo dV por $dzdx$ (1) , donde (1) indica la longitud unitaria de la cinta, resulta:

$$\dot{W}_D = 4 \left(\frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \right) \int_{x=0}^a \left[\int_{h=0}^h \sqrt{\dot{\epsilon}_{xx}^2} dz \right] dx = 4 \left(\frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \right) \int_{x=0}^a \left[\int_{h=0}^h \dot{\epsilon}_{xx} dz \right] dx$$

Utilizando g en esta ecuación, efectuando la integración de la expresión en corchetes y aplicando los límites de integración:

$$\dot{W}_D = 4 \left(\frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \right) \int_{x=0}^a \frac{\dot{V}}{h} h dx = 4 \left(\frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \right) \dot{V} \int_x^a dx$$

Integrando, tomando límites y simplificando:

$$\dot{W}_D = 4 \left(\frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \right) \dot{V} a \quad (B.b)$$

POTENCIA DEBIDA A COMPRESIÓN LATERAL

Esta potencia corresponde al tercer término de la ecuación 11.1.1; se calcula multiplicando la presión lateral p_L que actúa sobre la superficie libre, situada en $x = \pm a$, por el área sobre la que actúa, es decir, $4(h)(1)$ por la velocidad \dot{V}_x .

El factor 4 se refiere a que existen 4 superficies iguales a $(h)(1)$; el factor (1) en esta expresión implica que la placa tiene una dimensión unitaria en la dirección perpendicular al plano del papel. Por eso:

$$\dot{W}_T = 4(h)(1)p_L\dot{V}_x|_{x=\pm a} = 4hp_L\frac{\dot{V}}{h}a = 4p_L\dot{V}a \quad (\text{B.c})$$

POTENCIA CONSUMIDA POR FRICCIÓN EN LAS INTERFACES SUPERIOR E INFERIOR

Los términos del integrando en la ecuación 11.1.5 son:

$$\tau = m\frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \quad (j)$$

Como las platinas no tienen movimiento en la dirección x , la discontinuidad de velocidad es igual a la velocidad del material en la dirección x , \dot{V}_x . Para $z = h$ y para $0 \leq x \leq a$:

$$|\Delta u| = \dot{V}_x = \frac{x}{h}\dot{V} \quad (k)$$

La superficie del elemento de interfaz es:

$$ds = dx(1) \quad (l)$$

el factor (1) resulta de considerar una cinta de una longitud unitaria. Utilizando j , k y l en 11.1.5:

$$\begin{aligned} \dot{W}_d &= 4 \int_S \tau |\Delta u| ds = 4m\frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}\frac{\dot{V}}{h} \int_{x=0}^a x dx \\ \dot{W}_d &= 2m\frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}\frac{\dot{V}}{h}a^2 \end{aligned} \quad (\text{B.d})$$

Utilizando B.a, B.b, B.c y B.d en 11.1.1:

$$4pa\dot{V} = 4\left(\frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}}\right)\dot{V}a + 4p_L\dot{V}a + 2m\frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}\frac{\dot{V}}{h}a^2$$

Simplificando y factorizando se obtiene la expresión para la presión de forja, p :

$$p = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} + p_L + m\frac{\sigma_0}{2\sqrt{3}}\frac{a}{h} = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \left[1 + \frac{p_L}{(2\sigma_0)/\sqrt{3}} + \frac{ma}{4h} \right] \quad (11.3.2)$$

La carga de forja es obtenida multiplicando la presión por el área de la interfaz: $(2a)(L)$

$$P = p(2aL) \quad (11.3.3)$$

En la ecuación 11.3.3 se incorpora la longitud de la cinta comprimida por la platina (L).

Ejercicio 11.3.1

1

Se van a reducir 200 mm del extremo de una cinta metálica de 200 mm de ancho, 10 mm de espesor y de una longitud de 20 m a un espesor final de 5 mm, con un martillo de contragolpe.

El esfuerzo de cedencia en tensión unidireccional a la temperatura de deformación es de 80 MPa. Sobre las aristas longitudinales se ejercerá una presión constante $p_L=10$ MPa. En estas condiciones, el factor de corte tiene un valor $m = 0.1$. Determine la carga de forja.

Respuesta:

Al deformarse el extremo de la cinta a la mitad de su altura, $h = 5$ mm, el ancho aumenta al doble por el principio de volumen constante; entonces el ancho va a tener un valor de 400 mm, es decir, $a = 200$ mm. Aplicando valores en la ecuación 11.3.2:

$$p = \frac{2(80)}{\sqrt{3}} \left[1 + \frac{10}{(2)(80)/\sqrt{3}} + \frac{0.1(200)}{4(5)} \right] = 92.38[1 + 0.10825 + 1] = 194.8 \text{ MPa}$$

$$P = p(2aL) = (194.8)(2)(200)(20) = 15.6 \text{ MN}$$

En este ejemplo el efecto que tiene sobre el valor de carga la presión lateral es ligeramente mayor que 5%.

11.4. Trefilado de un alambre

Para derivar la ecuación para calcular el esfuerzo para trefilar un alambón o varilla cilíndrica, se empleará el campo de velocidades propuesto por Avitzur. En la figura 11.4.1 se muestra el modelo para este proceso: la matriz está formada por una sección cónica, una sección cilíndrica y un cono a la salida. Al paso del alambre por la sección cónica, a la entrada de la matriz, reduce su radio mediante un ángulo de reducción llamado también *ángulo de mordida*, 2α . En la ecuación es utilizado el semiángulo α . La sección cilíndrica produce las dimensiones finales del producto trefilado. El cono a la salida es llamado *cono de alivio* porque permite que el material se recupere elásticamente y pueda abandonar la matriz fácilmente, sin sufrir daño. El alambre antes de ser deformado entra a la matriz con un radio R_1 a una velocidad \dot{V}_1 .

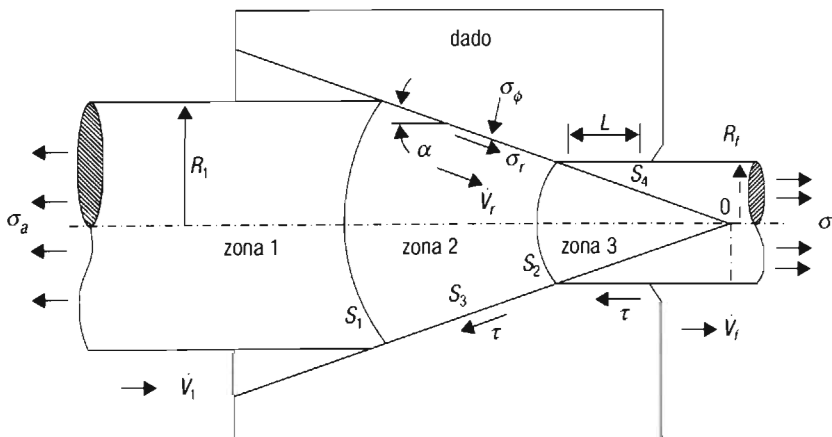


Figura 11.4.1. Campo de velocidades para el trefilado de alambre (Avitzur, 1968).

Al atravesar la línea de discontinuidad S_1 , las partículas de material cambian su dirección a una velocidad \dot{V}_j , la cual crece a medida que se aproxima, en su trayectoria, hacia el vértice del cono; al mismo tiempo el radio R del alambre se reduce continuamente.

Al atravesar el alambre la línea de discontinuidad S_2 , éste alcanza la velocidad \dot{V}_f y el radio toma el valor final R_f . Al alambre se le aplica un esfuerzo σ_t a la salida de la matriz para trefilarlo. Normalmente el alambre se encuentra embobinado en un carrete, por lo que ofrece una resistencia σ_a su desembobinado.

La figura 11.4.2 muestra el campo de velocidades de deformación con más detalle. Las superficies de discontinuidad S_1 , S_2 son casquetes esféricos con centro común en el vértice del cono con radios de curvatura r_1 , r_f , respectivamente. Por supuesto el campo de velocidad es cinemáticamente admisible, es decir, las componentes de velocidad normales a las superficies S_1 , S_2 no cambian de magnitud al cruzar las líneas de discontinuidad. Las componentes de velocidad tangenciales a la línea de discontinuidad en las zonas adyacentes a la línea tienen valores diferentes entre sí: existe una diferencia Δu de velocidad entre ellas. Los términos de la ecuación 11.1.1 son obtenidos a continuación.

POTENCIA EXTERNA

La potencia externa es calculada mediante una ecuación similar a la compresión de un cilindro, pero en este proceso el esfuerzo que produce la deformación es de tensión y se representa por σ_t :

$$J^* = \sigma_t A_f \dot{V}_f = \sigma_t \pi R_f^2 \dot{V}_f \quad (C.a)$$

El área, el radio y la velocidad a la salida de la matriz son A_f , R_f , \dot{V}_f , respectivamente.

POTENCIA DE TRACCIÓN

La potencia de tracción es también una potencia externa que se opone a la potencia J^* y es calculada mediante la ecuación:

$$\dot{W}_T = \sigma_a A_1 \dot{V}_1 = \sigma_a (\pi R_1^2) \dot{V}_1 = \sigma_a (\pi R_f^2) \dot{V}_f \quad (C.b)$$

En esta ecuación, σ_a es el esfuerzo aplicado para desenrollar el alambre del carrete; las otras variables fueron definidas con anterioridad.

Como se establece en la sección 11.1.1, por la propiedad de volumen constante, el producto del área por la velocidad a la entrada de la matriz es igual al producto correspondiente a la salida.

POTENCIA DE DEFORMACIÓN

De la ecuación 11.1.4, la potencia de deformación es

$$\dot{W}_D = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \int_V \sqrt{(1/2)\dot{\epsilon}_{ij}\dot{\epsilon}_{ij}} dV \quad (11.1.4)$$

Para determinar la expresión del radicando para este proceso se hace uso de la ecuación ix.

$$I = \frac{1}{2} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\dot{\epsilon}_{11}^2 + \dot{\epsilon}_{22}^2 + \dot{\epsilon}_{33}^2) + (\dot{\epsilon}_{12}^2 + \dot{\epsilon}_{23}^2 + \dot{\epsilon}_{31}^2) \quad \text{(ix)}$$

En la figura 11.4.1 las superficies de discontinuidad de velocidad S_1, S_2 son esféricas, por eso es conveniente emplear coordenadas esféricas.

La velocidad, \dot{V}_i , de una partícula de material en el campo de velocidades propuesto tiene las componentes:

$$\dot{V}_i (\dot{V}_r, \dot{V}_\phi, \dot{V}_\theta)$$

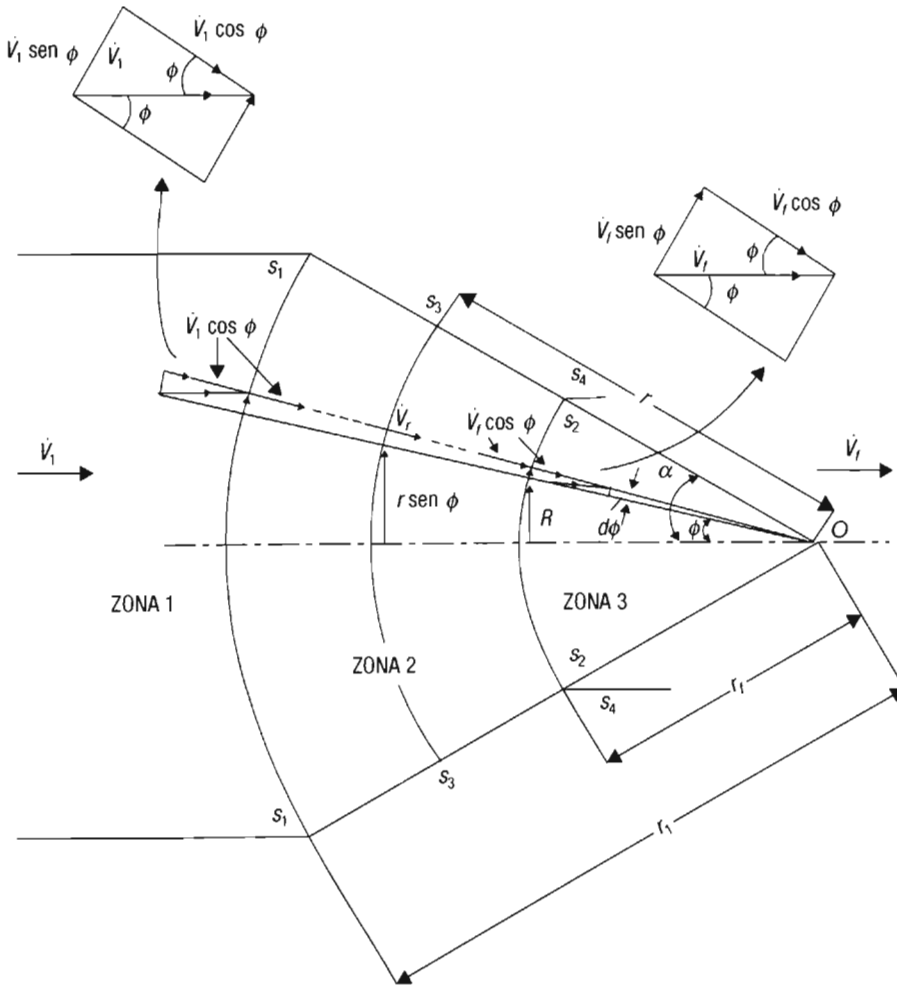


Figura 11.4.2. Detalle del campo de velocidad de la figura 11.4.1 (Avitzur, 1968).

Las componentes de la rapidez de deformación de $\dot{\epsilon}_{ij}$ están dadas en función de las componentes de velocidad:

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}_{rr} &= \frac{\partial \dot{V}_r}{\partial r}; \quad \dot{\epsilon}_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \dot{V}_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{\dot{V}_r}{r}; \quad \dot{\epsilon}_{\phi\phi} = \left(\frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \right) \left(\frac{\partial \dot{V}_\phi}{\partial \phi} \right) + \left[\frac{\dot{V}_r}{r} \right] + \left(\frac{V_\theta}{r} \right) \cot \theta \\ \dot{\epsilon}_{r\phi} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \dot{V}_\phi}{\partial r} - \frac{\dot{V}_\phi}{r} + \left(\frac{1}{r} \right) \left(\frac{\partial \dot{V}_r}{\partial \phi} \right) \right]; \quad \dot{\epsilon}_{\theta\phi} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \right) \left(\frac{\partial \dot{V}_\theta}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \dot{V}_\phi}{\partial \theta} \right) - \left(\frac{\cot \theta}{r} \right) \dot{V}_\phi \right] \\ \dot{\epsilon}_{\theta r} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \dot{V}_\theta}{\partial r} - \frac{\dot{V}_\theta}{r} + \left(\frac{1}{r \operatorname{sen} \phi} \right) \left(\frac{\partial \dot{V}_r}{\partial \theta} \right) \right]\end{aligned}\quad (11.4.1)$$

COMPONENTES DE RAPIDEZ DE DEFORMACIÓN

En las zonas 1 y 3 no tiene lugar deformación alguna, la deformación del alambre tiene lugar en la zona 2. En esta zona, las componentes de velocidad de una partícula que se mueva con trayectoria hacia el vértice O son las siguientes:

$$\dot{V}_r = -\dot{V}_f \cos \phi \frac{r_f^2}{r^2} \quad (a)$$

La ecuación a resulta de la propiedad que los metales tienen de conservar su volumen constante al ser deformados plásticamente. Por eso, el volumen de metal que pasa por unidad de tiempo por el canal limitado por el ángulo $d\phi$, \dot{V} , en la zona 3, es el mismo que pasa por el mismo canal en la zona 2. Se demuestra a continuación la ecuación a .

Zona 3

De la figura 11.4.2:

$$R = r_f \operatorname{sen} \phi$$

diferenciando esta ecuación:

$$dR = r_f \cos \phi d\phi$$

El volumen de metal por unidad de tiempo que fluye por el canal limitado por $d\phi$ al atravesar justamente la superficie S_2 es:

$$\dot{V} = 2\pi R dR \dot{V}_f = 2\pi (r_f \operatorname{sen} \phi) (r_f \cos \phi d\phi) \dot{V}_f \quad (b)$$

Zona 2

De la misma figura:

$$\dot{V} = -2(\pi r \operatorname{sen} \phi) (r d\phi) \dot{V}_r \quad (c)$$

Igualando las ecuaciones b y c y despejando \dot{V}_r :

$$\dot{V}_r = -\dot{V}_f r_f^2 \frac{\cos \phi}{r^2} \quad (d)$$

Se demuestra así la ecuación a .

Puesto que la trayectoria de cada partícula de material permanece fija, no importa cuál trayectoria sea, el alambre no gira durante el trefilado, entonces los ángulos ϕ y θ no cambian, por eso:

$$\dot{V}_\phi = \dot{V}_\theta = 0 \tag{d}$$

Conocidas las tres componentes de velocidad, se pueden determinar las componentes de rapidez de deformación mediante la ecuación 11.4.1:

$$\dot{\epsilon}_{rr} = \frac{\partial \dot{V}_r}{\partial r} = -2\dot{V}_f r_f^2 \frac{\cos \phi}{r^3} \tag{ei}$$

$$\dot{\epsilon}_{\phi\phi} = \dot{\epsilon}_{\theta\theta} = \frac{\dot{V}_r}{r} = \dot{V}_f r_f^2 \frac{\cos \phi}{r^3} \tag{eii}$$

de donde:

$$\dot{\epsilon}_{rr} = -2\dot{\epsilon}_{\phi\phi} = -2\dot{\epsilon}_{\theta\theta} \tag{eiii}$$

$$\dot{\epsilon}_{r\phi} = \frac{1}{2}\dot{V}_f r_f^2 \left(\frac{\text{sen } \phi}{r^3} \right) \tag{eiv}$$

$$\dot{\epsilon}_{\phi\theta} = \dot{\epsilon}_{r\theta} = 0 \tag{ev}$$

Si se consideran como principales las direcciones r, θ, ϕ , aplicando $r = 1, \theta = 2, \phi = 3$, la ecuación ix se transforma en:

$$\frac{1}{2}\dot{\epsilon}_{ij}\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\dot{\epsilon}_{rr}^2 + \dot{\epsilon}_{\phi\phi}^2 + \dot{\epsilon}_{\theta\theta}^2) + (\dot{\epsilon}_{r\phi}^2 + \dot{\epsilon}_{\theta\phi}^2 + \dot{\epsilon}_{r\theta}^2)$$

Teniendo en cuenta eiii en la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\dot{\epsilon}_{ij}\dot{\epsilon}_{ij} &= \frac{1}{2}\left[\dot{\epsilon}_{rr}^2 + \frac{1}{4}\dot{\epsilon}_{rr}^2 + \frac{1}{4}\dot{\epsilon}_{rr}^2\right] + \dot{\epsilon}_{r\phi}^2 \\ \frac{1}{2}\dot{\epsilon}_{ij}\dot{\epsilon}_{ij} &= \frac{1}{2}\left[\frac{6}{4}\dot{\epsilon}_{rr}^2\right] + \dot{\epsilon}_{r\phi}^2 \end{aligned}$$

Y utilizando ei y eiv en la expresión anterior:

$$\frac{1}{2}\dot{\epsilon}_{ij}\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left[\frac{6}{4}\left(-2\dot{V}_f r_f^2 \frac{\cos \phi}{r^3}\right)^2\right] + \left[\frac{1}{2}\dot{V}_f r_f^2 \frac{\text{sen } \phi}{r^3}\right]^2$$

Simplificando:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\dot{\epsilon}_{ij}\dot{\epsilon}_{ij} &= \frac{1}{2}\left[\frac{6}{4}\left(4\dot{V}_f^2 r_f^4 \frac{\cos^2 \phi}{r^6}\right)\right] + \frac{1}{4}\left(\dot{V}_f^2 r_f^4 \frac{\text{sen}^2 \phi}{r^6}\right) \\ \frac{1}{2}\dot{\epsilon}_{ij}\dot{\epsilon}_{ij} &= 3\dot{V}_f^2 r_f^4 \frac{\cos^2 \phi}{r^6} + \frac{1}{4}\dot{V}_f^2 r_f^4 \frac{\text{sen}^2 \phi}{r^6} \end{aligned}$$

Factorizando:

$$\frac{1}{2}\dot{\epsilon}_{ij}\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{\dot{V}_f^2 r_f^4}{r^6} \left[3\cos^2 \phi + \frac{1}{4}\text{sen}^2 \phi \right]$$

Aplicando esta ecuación en 11.1.4:

$$\dot{W}_D = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0 \int_V \sqrt{\frac{\dot{V}_f^2 r_f^4}{r^6} \left[3 \cos^2 \phi + \left(\frac{1}{4} \right) \sin^2 \phi \right]} dV$$

Extrayendo raíz cuadrada al factor común del radicando:

$$\dot{W}_D = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0 \int_V \dot{V}_f r_f^2 \left(\frac{1}{r^3} \right) \sqrt{3 \cos^2 \phi + \frac{1}{4} \sin^2 \phi} dV$$

Sustituyendo $\cos^2 \phi$ por $1 - \sin^2 \phi$ y sacando del operador de integración los factores constantes:

$$\dot{W}_D = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0 \dot{V}_f r_f^2 \int_V \left(\frac{1}{r^3} \right) \sqrt{3(1 - \sin^2 \phi) + \frac{1}{4} \sin^2 \phi} dV$$

Simplificando:

$$\dot{W}_D = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0 \dot{V}_f r_f^2 \int_V \left(\frac{1}{r^3} \right) \sqrt{3 - 3 \sin^2 \phi + \frac{1}{4} \sin^2 \phi} dV$$

$$\dot{W}_D = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0 \dot{V}_f r_f^2 \int_V \left(\frac{1}{r^3} \right) \sqrt{3 - \frac{12}{4} \sin^2 \phi + \frac{1}{4} \sin^2 \phi} dV$$

$$\dot{W}_D = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0 \dot{V}_f r_f^2 \int_V \left(\frac{1}{r^3} \right) \sqrt{3 - \frac{11}{4} \sin^2 \phi} dV$$

$$\dot{W}_D = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0 \dot{V}_f r_f^2 \int_V \left(\frac{1}{r^3} \right) \sqrt{3 \left(1 - \frac{11}{12} \sin^2 \phi \right)} dV$$

$$\dot{W}_D = 2 \sigma_0 \dot{V}_f r_f^2 \int_V \left(\frac{1}{r^3} \right) \sqrt{1 - \left(\frac{11}{12} \right) \sin^2 \phi} dV$$

El volumen dV es el de un anillo de cuatro caras; dos de sus caras planas opuestas son oblicuas dirigidas hacia el vértice O y las otras dos caras tienen una curvatura esférica con centro en O .

El volumen diferencial es $dV = 2\pi r \sin \phi (rd\phi) dr$; utilizando esta expresión en la ecuación anterior, se obtiene:

$$\dot{W}_D = 4\pi \sigma_0 \dot{V}_f r_f^2 \int_{\theta=0}^{\alpha} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{11}{12} \right) \sin^2 \phi} \sin \phi \int_{r=r_f}^{r_1} \frac{dr}{r} \right] d\phi \quad (f)$$

$$\dot{W}_D = 4\pi \sigma_0 \dot{V}_f r_f^2 \ln \left(\frac{r_1}{r_f} \right) \int_{\theta=0}^{\alpha} \sqrt{1 - \left(\frac{11}{12} \right) \sin^2 \phi} \sin \phi d\phi \quad (g)$$

Integrando la ecuación g resulta:

$$\dot{W}_D = 2\pi \sigma_0 \dot{V}_f r_f^2 \left[1 - \cos \alpha \sqrt{1 - \frac{11}{12} \sin^2 \alpha} + \frac{1 - \frac{11}{12}}{\sqrt{11/12}} \ln \frac{1 + \sqrt{11/12}}{\sqrt{11/12} \cos \alpha + \sqrt{1 - \frac{11}{12} \sin^2 \alpha}} \right] \ln \frac{r_1}{r_f} \quad (h)$$

Puesto que $\frac{r_1}{r_f} = \frac{R_1}{R_f}$, y también que $r_f = \frac{R_f}{\sin \alpha}$, en consecuencia, $r_f^2 = \frac{R_f^2}{\sin^2 \alpha}$. Aplicando la primera y la última de estas expresiones en h se obtiene la ecuación siguiente para determinar \dot{W}_d :

$$\dot{W}_D = 2\pi\sigma_0\dot{V}_f R_f^2 f(\alpha) \ln \frac{R_1}{R_f} \quad (\text{C.c1})$$

donde:

$$f(\alpha) = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \left[1 - \cos \alpha \sqrt{1 - 11/12 \sin^2 \alpha} + \frac{1}{\sqrt{11 \cdot 12}} \ln \frac{1 + \sqrt{11/12}}{\sqrt{11/12} \cos \alpha + \sqrt{1 - 11/12 \sin^2 \alpha}} \right] \quad (i)$$

para valores pequeños de α , $f(\alpha)$ tiende hacia la unidad y la ecuación C.c1 se reduce a:

$$\dot{W}_D = 2\pi\sigma_0\dot{V}_f R_f^2 \ln \frac{R_1}{R_f} \quad (\text{C.c2})$$

La función $f(\alpha)$ se encuentra tabulada en la tabla 11.4.1 con intervalos de α de 1° . Las ecuaciones C.c1 y C.c2 expresan la potencia ideal de deformación sin considerar las potencias consumidas en fricción y distorsión.

POTENCIA PARA VENCER LAS DISCONTINUIDADES DE VELOCIDAD

a) Discontinuidades de velocidad S_1, S_2

La ecuación que permite calcular la potencia asociada a cambios de dirección en las superficies de discontinuidad S_1, S_2 es la 11.1.5:

$$\dot{W}_d = \int_S \tau |\Delta u| ds \quad (11.1.5)$$

El esfuerzo cortante para producir cedencia plástica es:

$$\tau = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}$$

La discontinuidad de velocidad en la superficie S_1 conforme a la figura 11.4.2 es:

$$\Delta u = \dot{V}_1 \sin \phi$$

Discontinuidad de velocidad en la superficie S_2 de acuerdo con la misma figura es:

$$\Delta u = \dot{V}_f \sin \phi$$

Elemento de superficie en S_1 :

$$ds = 2\pi R_1 (r_1 d\phi) = 2\pi r_1 \sin \phi r_1 d\phi = 2\pi r_1^2 \sin \phi d\phi$$

Tabla 11.4.1. Valores de $f(\alpha)$ y de $(\alpha/\text{sen}^2 \alpha - \cot \alpha)$ (Avitzur, 1968)

α°	$f(\alpha)$	$\frac{\alpha}{\text{sen}^2 \alpha} - \cot \alpha$	α°	$f(\alpha)$	$\frac{\alpha}{\text{sen}^2 \alpha} - \cot \alpha$	α°	$f(\alpha)$	$\frac{\alpha}{\text{sen}^2 \alpha} - \cot \alpha$
0	1.00000	0						
1	1.00001	0.011636	31	1.00672	0.37539	61	1.03603	0.83746
2	1.00003	0.023275	32	1.00721	0.38854	62	1.03784	0.85632
3	1.00006	0.034920	33	1.00772	0.40180	63	1.03974	0.87549
4	1.00010	0.046573	34	1.00825	0.41516	64	1.04174	0.89500
5	1.00016	0.058237	35	1.00881	0.42864	65	1.04384	0.91484
6	1.00023	0.069915	36	1.00939	0.44224	66	1.04605	0.93503
7	1.00031	0.081611	37	1.01000	0.45596	67	1.04838	0.95559
8	1.00041	0.093327	38	1.01063	0.46981	68	1.05082	0.97653
9	1.00052	0.10507	39	1.01129	0.48380	69	1.05340	0.99787
10	1.00064	0.11683	40	1.01198	0.49792	70	1.05613	1.01961
11	1.00078	0.12862	41	1.01270	0.51218	71	1.05900	1.04178
12	1.00093	0.14045	42	1.01345	0.52660	72	1.06204	1.06438
13	1.00109	0.15231	43	1.01423	0.54117	73	1.06526	1.08745
14	1.00127	0.16421	44	1.01505	0.55590	74	1.06867	1.11099
15	1.00146	0.17614	45	1.01590	0.57080	75	1.07228	1.13503
16	1.00167	0.18813	46	1.01679	0.58587	76	1.07611	1.15958
17	1.00189	0.20016	47	1.01772	0.60111	77	1.08018	1.18467
18	1.00212	0.21223	48	1.01869	0.61655	78	1.08451	1.21031
19	1.00237	0.22437	49	1.01970	0.63217	79	1.08912	1.23653
20	1.00264	0.23656	50	1.02075	0.64800	80	1.09404	1.26335
21	1.00292	0.24881	51	1.02185	0.66403	81	1.09928	1.29080
22	1.00322	0.26112	52	1.02300	0.68027	82	1.10488	1.31890
23	1.00354	0.27350	53	1.02420	0.69674	83	1.11087	1.34768
24	1.00387	0.28595	54	1.02546	0.71344	84	1.11727	1.37717
25	1.00422	0.29848	55	1.02677	0.73037	85	1.12413	1.40740
26	1.00459	0.31108	56	1.02814	0.74755	86	1.13148	1.43840
27	1.00498	0.32377	57	1.02958	0.76498	87	1.13935	1.47020
28	1.00538	0.33653	58	1.03108	0.78268	88	1.14780	1.50284
29	1.00581	0.34939	59	1.03265	0.80066	89	1.15687	1.53636
30	1.00625	0.36234	60	1.03430	0.81891	90	1.16660	1.57080

donde ds es un elemento anular de superficie, de un perímetro igual a $2\pi R_1$ y de un ancho igual a la longitud del arco $r_1 d\phi$. De la figura 11.4.2: $R_1 = r_1 \text{sen} \phi$.

Elemento de superficie en S_2 :

$$ds = 2\pi R_1 (r_1 d\phi) = 2\pi r_1 \text{sen} \phi (r_1 d\phi) = 2\pi r_1^2 \text{sen} \phi d\phi$$

ds es un elemento anular de superficie, de un perímetro igual a $2\pi R_f$ y de un ancho igual a la longitud del arco $r_f d\phi$. De la figura 11.4.2: $R_f = r_f \text{sen}\phi$.

Aplicando los factores en la ecuación 11.1.5:

Para S_1 :

$$\dot{W}_{S_1} = \int_{S_1} \left(\frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \right) (\dot{V}_1 \text{sen}\phi) (2\pi r_1^2 \text{sen}\phi d\phi) = \frac{2\pi\sigma_0}{\sqrt{3}} \dot{V}_1 r_1^2 \int_{\phi=0}^{\phi=\alpha} \text{sen}^2\phi d\phi \quad (k)$$

Para S_2 :

$$\dot{W}_{S_2} = \int_{S_2} \left(\frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \right) (\dot{V}_f \text{sen}\phi) (2\pi r_f^2 \text{sen}\phi d\phi) = \frac{2\pi\sigma_0}{\sqrt{3}} \dot{V}_f r_f^2 \int_{\phi=0}^{\phi=\alpha} \text{sen}^2\phi d\phi \quad (l)$$

Al utilizar en la ecuación k la igualdad:

$$\dot{V}_f r_f^2 = \dot{V}_1 r_1^2$$

resulta:

$$\dot{W}_{S_1} = \frac{2\pi\sigma_0}{\sqrt{3}} \dot{V}_f r_f^2 \int_{\phi=0}^{\phi=\alpha} \text{sen}^2\phi d\phi \quad (m)$$

Las ecuaciones l y m son idénticas, por lo que se pueden sumar:

$$\dot{W}_{S_1, S_2} = 4\pi \dot{V}_f r_f^2 \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \int_{\phi=0}^{\alpha} \text{sen}^2\phi d\phi$$

Integrando la ecuación anterior:

$$\dot{W}_{S_1, S_2} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right) \sigma_0 \pi \dot{V}_f r_f^2 [\alpha - \text{sen}\alpha \cos\alpha]$$

Haciendo la sustitución:

$$\begin{aligned} r_f^2 &= R_f^2 / \text{sen}^2\phi \\ \dot{W}_{S_1, S_2} &= \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right) \sigma_0 \pi \dot{V}_f R_f^2 \left[\frac{\alpha}{\text{sen}^2\alpha} - \cot\alpha \right] \end{aligned} \quad (n)$$

b) Discontinuidades de velocidad debidas a fricción S_3, S_4

Superficie S_3

La ecuación para determinar la potencia consumida para vencer la fricción en la superficie de discontinuidad cónica S_3 y cilíndrica S_4 es la 11.1.5, pero se debe tomar en cuenta la fricción en el cálculo de τ . Se supone que la fricción es gobernada por un factor de corte constante m de igual magnitud para ambos tipos de superficies, por eso:

$$\tau = m \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}$$

Discontinuidad de velocidad en S_3 :

$$\Delta u = \dot{V}_f \left(\frac{r_f^2}{r^2} \right) \cos \alpha = \dot{V}_f \left(\frac{R_f}{R} \right) \cos \alpha$$

Elemento de la superficie S_3 :

$$ds = 2\pi R \left(\frac{dR}{\text{sen} \alpha} \right)$$

$dR/\text{sen} \alpha$ es el ancho de un elemento anular de superficie, de perímetro $2\pi R$.

Aplicando estos factores en la ecuación 11.1.5:

$$\dot{W}_{S_3} = \int_{S_3} \tau \Delta v ds = m \left(\frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \right) \int_{R=R_f}^{R_1} \left(\frac{2\pi R}{\text{sen} \alpha} \right) \dot{V}_f \left(\frac{R_f}{R} \right)^2 \cos \alpha dR$$

Simplificando y poniendo todos los factores constantes fuera del operador de integración

$$\dot{W}_{S_3} = 2\pi \dot{V}_f R_f^2 (\cot \alpha) m \left(\frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \right) \int_{R_f}^{R_1} \frac{dR}{R}$$

Integrando:

$$\dot{W}_{S_3} = \left(\frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \right) m \pi \dot{V}_f R_f^2 (\cot \alpha) \ln \frac{R_1}{R_f} \quad (o)$$

SUPERFICIE S_4

La derivación de la ecuación para calcular la potencia consumida en la superficie cilíndrica de discontinuidad S_4 es trivial

$$\dot{W}_{S_4} = \int_{S_4} \tau |\Delta u| ds = m \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} (2\pi R_f L) \dot{V}_f \quad (p)$$

El factor en paréntesis circular es el valor del área de la envolvente cilíndrica.

La potencia total consumida en las discontinuidades es la suma de la potencia consumida en cada superficie de discontinuidad:

$$\begin{aligned} \dot{W}_d &= \dot{W}_{S_1, S_2} + \dot{W}_{S_3} + \dot{W}_{S_4} = \\ &\left(\frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \right) \pi \dot{V}_f R_f^2 \left[\frac{a}{\text{sen}^2 \alpha} - \cot \alpha \right] + \left(\frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \right) \pi m \dot{V}_f R_f^2 (\cot \alpha) \ln \frac{R_1}{R_f} + \left(\frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \right) \pi m \dot{V}_f R_f L \end{aligned}$$

Factorizando:

$$\dot{W}_d = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \pi \dot{V}_f R_f^2 \left\{ \left[\frac{\alpha}{\text{sen}^2 \alpha} - \cot \alpha \right] + \left[m \cot \alpha \ln \left(\frac{R_1}{R_f} \right) \right] + \left[m \frac{L}{R_f} \right] \right\} \quad (C.d)$$

ESFUERZO DE TREFILADO

El esfuerzo de trefilado σ_t es obtenido aplicando las ecuaciones C.a, C.b, C.c1, C.d a la ecuación 11.1.1:

$$\sigma_t \pi R_f^2 \dot{V}_f = 2\pi \sigma_0 \dot{V}_f R_f^2 f(\alpha) \ln \frac{R_1}{R_f} + \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \pi \dot{V}_f R_f^2 \left\{ \left[\frac{\alpha}{\text{sen}^2 \alpha} - \cot \alpha \right] + \left[m \cot \alpha \ln \left(\frac{R_1}{R_f} \right) \right] + \left[m \frac{L}{R_f} \right] \right\} + \sigma_a (\pi R_f^2) \dot{V}_f$$

Agrupando en forma conveniente, simplificando y despejando:

$$\sigma_t = \sigma_0 \left\{ 2f(\alpha) \ln \frac{R_1}{R_f} + \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\left[\frac{\alpha}{\text{sen}^2 \alpha} - \cot \alpha \right] + \left[m \cot \alpha \ln \left(\frac{R_1}{R_f} \right) \right] + \left[m \frac{L}{R_f} \right] \right) \right\} + \sigma_a \tag{11.4.2}$$

Frecuentemente la ecuación anterior se expresa por el esfuerzo de trefilado relativo σ_t/σ_0 para eliminar la dependencia de estos valores de esfuerzo respecto de la temperatura:

$$\frac{\sigma_t}{\sigma_0} = 2f(\alpha) \ln \frac{R_1}{R_f} + \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\left[\frac{\alpha}{\text{sen}^2 \alpha} - \cot \alpha \right] + \left[m \cot \alpha \ln \left(\frac{R_1}{R_f} \right) \right] + \left[m \frac{L}{R_f} \right] \right) + \frac{\sigma_a}{\sigma_0} \tag{11.4.3}$$

Es conveniente utilizar en esta ecuación, como esfuerzo de cedencia, el esfuerzo de cedencia promedio calculado para los materiales que obedecen la ecuación de Ludwik mediante la ecuación $\bar{\sigma}_0 = \frac{K\varepsilon^n}{n+1}$, donde ε es la deformación que experimenta el alambre durante el paso de trefilado; K, n fueron definidos en la sección 4.2.1.1.

ANÁLISIS DE LOS TÉRMINOS DE LA ECUACIÓN 11.4.3

La figura 11.4.3 se utilizará para efectuar este análisis. En 11.4.3, $2f(\alpha) \ln \frac{R_1}{R_f}$ representa la fracción de esfuerzo utilizado para realizar el trabajo ideal de deformación; la representación gráfica de este término es una recta paralela al eje del ángulo α ; $\frac{2}{\sqrt{3}} \left[\frac{a}{\text{sen}^2 \alpha} - \cot \alpha \right]$ es la fracción de esfuerzo empleado en la distorsión, crece linealmente con el valor de α ; $\frac{2}{\sqrt{3}} \left[m \cot \alpha \ln \left(\frac{R_1}{R_f} \right) \right]$ corresponde a la fracción de esfuerzo utilizado para vencer la fricción en la zona cónica, su valor es muy grande a ángulos de matriz pequeños y disminuye rápidamente al crecer α ; $\frac{2}{\sqrt{3}} \left[m \frac{L}{R_f} \right]$ identifica la fracción de esfuerzo para superar la fricción en la zona cilíndrica de la matriz,

es independiente de α , y, finalmente, $\frac{\sigma_a}{\sigma_0}$ es el esfuerzo relativo necesario para vencer la resistencia al desenrollado del alambre de la bobina. Estos dos últimos términos no están representados en la figura 11.4.3.

Cuando se grafica el esfuerzo relativo σ_f/σ_0 versus α , se observa una curva que presenta un valor mínimo de esfuerzo relativo. Puesto que el trabajo ideal de deformación es aproximadamente independiente del ángulo de la matriz α , para valores pequeños de este ángulo, como es el caso de trefilado, el valor mínimo en la curva es definido por el punto de intersección de la curva del esfuerzo empleado para vencer la fricción con la curva del esfuerzo consumido en la distorsión. Esta intersección se produce debido a que el esfuerzo de fricción disminuye al aumentar el ángulo α , en tanto que el esfuerzo de distorsión aumenta con el ángulo α (figura 11.4.3).

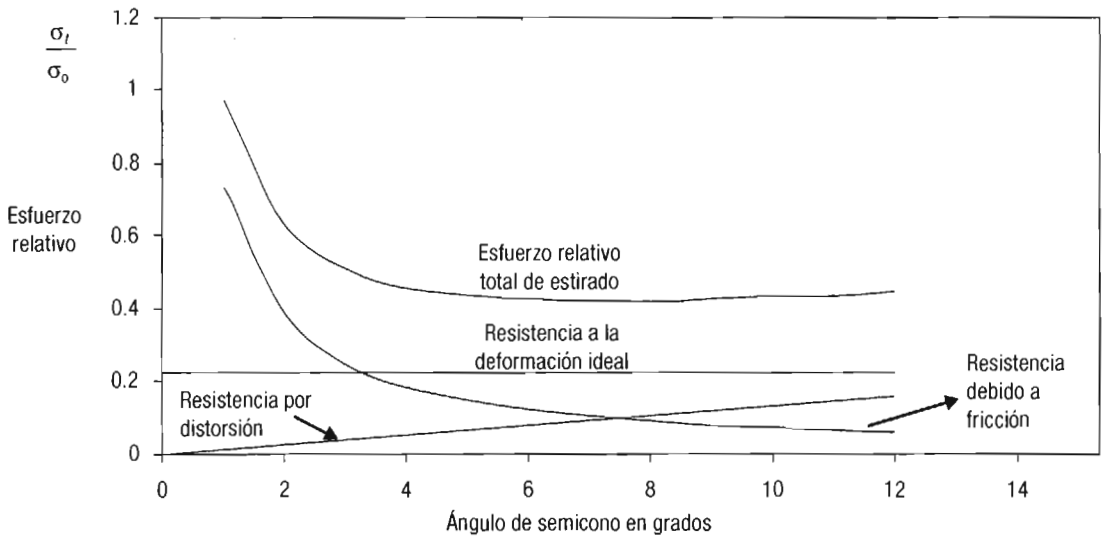


Figura 11.4.3. Componentes del esfuerzo de trefilado relativo en función de α : $L = \sigma_a = 0$; $m = 0.03$; $r = 25\%$ (Avitzur, 1968).

ÁNGULO DE TREFILADO ÓPTIMO

El ángulo α que produce el valor mínimo de esfuerzo relativo de trefilado, recibe el nombre de *ángulo α óptimo*; es determinado igualando a cero la derivada del esfuerzo relativo, ecuación 11.4.3, con respecto a α , y despejando α_{opt} de esta ecuación. Este procedimiento se realiza en varios pasos:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\sigma_f}{\sigma_0} \right) = 0$$

Al efectuar la derivación se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left[2f(\alpha) \ln \left(\frac{R_0}{R_f} \right) \right] + \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{\text{sen}^2 \alpha} \left[\left(1 - \frac{\alpha \cos \alpha}{\text{sen} \alpha} \right) - \frac{1}{2} m \ln \left(\frac{R_0}{R_f} \right) \right] = 0 \quad (i)$$

En la ecuación i la derivación del primer término sólo aparece indicada. A valores de α pequeños, el valor de $f(\alpha)$ es aproximadamente constante e igual a 1, como se puede ver en la tabla 11.4.1; por eso:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left[2f(\alpha) \ln \left(\frac{R_1}{R_f} \right) \right] = 0 \quad (\text{ii})$$

El cociente $\frac{\alpha \cos \alpha}{\sin \alpha}$ en la ecuación i se puede expresar en función de potencias del ángulo α utilizando series de Taylor, aprovechando el hecho de que, en trefilado, los ángulos son pequeños.

Representando la serie de Taylor, resulta:

$$\frac{\alpha \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\left[\alpha \left[1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!} - \dots \right] \right]}{\left[\alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^7}{7!} + \dots \right]}$$

Efectuando la división, se obtiene:

$$\frac{\alpha \cos \alpha}{\sin \alpha} = 1 - \left(\frac{1}{3} \right) \alpha^2 - \left(\frac{1}{45} \right) \alpha^4 - \dots \quad (\text{iii})$$

Los valores de las potencias de α superiores a 2 en iii tienen un valor muy pequeño, por eso se pueden despreciar. Aplicando ii y los dos primeros términos de iii a i, y simplificando, se obtiene el valor de $\alpha_{\text{ópt}}$:

$$\alpha_{\text{ópt}} = \sqrt{\frac{3}{2} m \ln \left(\frac{R_1}{R_f} \right)} \quad (11.4.4)$$

es decir, $\alpha_{\text{ópt}}$ es una función de m y de la relación de reducción R_1/R_f .

Ejercicio 11.4.1

1

Se ensayó en tensión un pedazo de alambre de acero 1070, de 6.4 mm de diámetro y 200 mm de longitud de prueba; al valor de carga máxima de 22.6 kN, la longitud de prueba aumentó 22 mm. Se determinaron los valores de σ y de ε para diferentes puntos de la curva P versus Δl y se encontró que, en la región plástica, la curva obedece la relación $\sigma = K\varepsilon^n$.

Calcule: a) el esfuerzo de trefilado para reducir el alambre hasta 6.0 mm en un solo paso, y b) la potencia mínima del motor, si el material trefilado abandona la matriz a una velocidad de 2 ms^{-1} . La matriz tiene una longitud cilíndrica $L = 0.5 \text{ mm}$ y el factor de corte es $m = 0.05$. Seleccione una matriz de ángulo óptimo para este proceso. Utilice en sus cálculos el valor del esfuerzo de cedencia promedio. Suponga que, al mismo tiempo que el alambre está siendo trefilado, es necesario aplicar un esfuerzo $\sigma_a = 5 \text{ MPa}$ para jalarlo de la bobina en que se encuentra enrollado.

Para hacer uso de la ecuación 11.4.3, es necesario determinar primero los términos de la misma.

Ejercicio 11.4.1 (continuación)

2

ESFUERZO DE CEDENCIA PROMEDIO Y ÁNGULO α_{opt}

Cálculo del esfuerzo real y de la deformación real

$$D_1 = 6.4 \text{ mm} \Rightarrow R_1 = 3.2 \text{ mm}$$

$$D_f = 6.0 \text{ mm} \Rightarrow R_f = 3.0 \text{ mm}$$

$$S_{\text{máx}} = \frac{P_{\text{máx}}}{A_1} = \frac{22.6(10^3)}{\pi \left((3.2)(10^{-3}) \right)^2} = 702.5 \text{ MPa}$$

$$e = \frac{L_f - L_1}{L_1} = \frac{222 - 200}{200} = 0.11$$

$$\varepsilon = \ln(1 + e) = \ln(1 + 0.11) = 0.1044$$

$$\sigma = S_{\text{máx}}(1 + e) = 702.5(1 + 0.11) = 779.8 \text{ MPa}$$

Del criterio de inestabilidad: $\varepsilon = n = 0.1044$:

$$K = \frac{\sigma}{n^n} = \frac{779.8}{0.1044^{0.1044}} = 987.2 \text{ MPa}$$

La deformación que experimenta el alambre al ser trefilado es

$$\varepsilon = 2 \ln \frac{R_1}{R_f} = 2 \ln \frac{3.2}{3.0} = 2(0.06453) = 0.1291$$

Suponiendo que el material al ser trefilado endurece únicamente por deformación

$$\bar{\sigma}_0 = \frac{K\varepsilon^n}{(n+1)} = \frac{987.2(0.1291)^{0.1044}}{(1+0.1044)} = 721.9 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{3}{2} m \ln \left(\frac{R_1}{R_f} \right)} = \sqrt{(1.5)(0.05)(0.06453)} = \sqrt{0.0048397} = 0.069567 \text{ rad}$$

$$\sigma_{\text{opt}} = 4^\circ$$

De la tabla 11.4.1 para este valor de α_{opt} :

$$f(\alpha) = 1; \quad \frac{a}{\sin^2 \alpha} - \cot \alpha = 0.046573$$

$$\cot \alpha = 14.3$$

Entonces:

a) Esfuerzo de trefilado

Aplicando valores en la ecuación 11.4.3:

$$\frac{\sigma_t}{\bar{\sigma}_0} = 2f(\alpha) \ln \frac{R_1}{R_f} + \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\left[\frac{a}{\sin^2 \alpha} - \cot \alpha \right] + \left[m \cot \alpha \ln \left(\frac{R_1}{R_f} \right) \right] + \left[m \frac{L}{R_f} \right] \right) + \frac{\sigma_a}{\bar{\sigma}_0}$$

(11.4.3)

Ejercicio 11.4.1 (continuación)

3

$$\frac{\sigma_t}{721.9} = 2(1)(0.06453) + 1.1547 \left\{ [0.046573] + [0.05(14.3)(0.06453)] + \left[0.05 \left(\frac{0.5}{3.0} \right) \right] \right\} + \frac{5}{721.9}$$

$$\frac{\sigma_t}{721.9} = 0.12906 + 1.1547 \{ [0.046573] + [0.0461] + [0.00833] \} + 0.007$$

$$\sigma_t = (0.12906 + 0.117 + 0.007 = 0.253)(721.9)$$

$$\sigma_t = 182.6 \text{ MPa}$$

b) Potencia de trefilado

$$\dot{W}_t = \sigma_t A_f \dot{V}_f = (182.6)\pi(3)^2(2) = 10.3 \text{ kW} = 13.8 \text{ HP}$$

Ejercicios de final de capítulo

1

1. Se va a forjar en caliente un cilindro de una aleación de aluminio de 50.8 mm de diámetro y 80 mm de altura en forma homogénea con una prensa de forja. El factor de corte es de 0.1.

Determine: a) la carga necesaria para reducir el cilindro hasta la mitad de su altura, y b) la potencia consumida si la deformación se realizó en tres segundos. El esfuerzo de cedencia en compresión unidireccional es de 60 MPa y permanece constante a la temperatura de forja.

Respuestas: a) $P = 251 \text{ kN}$; b) 3.3 kW

2. Se van a reducir 100 mm del extremo de una cinta metálica de 200 mm de ancho, 5 mm de espesor y de una longitud de 20 metros a un espesor final de 3 mm, con un martillo de contragolpe. El esfuerzo de cedencia en compresión unidireccional a la temperatura de deformación es de 100 MPa. Sobre las aristas longitudinales se ejercerá una presión constante $p_L = 20 \text{ MPa}$. En estas condiciones, el factor de corte tiene un valor $m = 0.1$. Determine la presión de forja.

Respuesta: $p = 295.8 \text{ MPa}$

3. Se planea trefilar en un solo paso un acero de un diámetro inicial de 5.5 mm a un diámetro final de 4.9 mm. El material endurece por deformación en frío según la expresión $\sigma = 1200\epsilon^{0.25} \text{ MPa}$. La sección cilíndrica del dado tiene una longitud de 1 mm. El valor del factor de corte debido a fricción es de 0.03.

Determine: a) el ángulo que debe tener el dado para que el esfuerzo de trefilado sea el mínimo; b) el esfuerzo de trefilado; c) la potencia necesaria en HP para realizar la operación si el alambre abandona el dado a una velocidad de 600 m/min. Suponga que el alambre que se va a trefilar no está enrollado en bobina alguna, es decir, $\sigma_a = 0$.

Respuestas: a) $\alpha_{\text{opt}} = 4^\circ$; b) $\sigma_t = 236.9 \text{ MPa}$; c) $\dot{W}_t = 59.9 \text{ HP}$

Bibliografía

- Avitzur, B., *Metal Forming: Processes and Analysis*, McGraw Hill, Nueva York, 1968.
- Backofen, W.A., *Deformation Processing*, Addison-Wesley Publishing, Massachusetts, 1972.
- Caddell, R.M., y W.F. Hosford, *Int. J. Mech. Eng. Educ.*, vol. 8, 1980.
- Chakrabarty, J., *Applied Plasticity*, Springer Verlag, Berlín, 1999.
- Dally, W.J., y F.W. Riley, *Experimental Stress Analysis*, McGraw Hill, Nueva York, 1991.
- Davis, R.O., y A.P.S. Selvadurai, *Plasticity and Geomechanics*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- Dieter, G.E., *Mechanical Metallurgy, SI Metric Edition*, McGraw-Hill, Londres, 1988.
- Drucker, D.C., W. Prager y H.J. Greenberg, "Extended Limit Design Theorems for Continuous Media", *Quart. Appld Math.*, págs. 381-389, 1952.
- Fields, D.S., y W.A. Backofen, *Am. Soc. Test. Mater. Proc.*, vol. 57, págs. 1259-1272, 1957.
- Hollomon, J., *Trans. AIME*, vol. 171, pág. 355, 1947.
- Hosford, W.F., y R.M. Caddell, *Metal Forming Mechanics and Metallurgy*, Prentice Hall, Nueva Jersey, 1983.
- Johnson, W., y P.B. Mellor, *Engineering Plasticity*, Van Nostrand Reinhold, Nueva York, 1973.
- Johnson, W., R. Sowerby y J.B. Haddow, *Plane-Strain Slip-Line Fields: Theory and Bibliography*, Elsevier, Nueva York, 1970.
- Jonas, J.J., C.M. Sellars y W.J. Tegart, "Strength and Structure under Hot Working Conditions", *Metallurgical Review*, 130, págs. 1-24, 1969.
- Kachanov, L.M., *Fundamentals of the Theory of Plasticity*, Dover Publications, Nueva York, 2004.
- Kocks, U.F. "Laws for Work-Hardening and Low-Temperature Creep". *Engng. Tech., ASME H*, vol. 98, pág. 76, 1976.
- Lange, K., *Handbook of Metal Forming*, Society of Manufacturing Engineers, Dearborn, Michigan, 1985.

- Lubliner, J., *Plasticity Theory*, McMillan Publishing, Nueva York, 1990.
- Ludwik, P. *Elemente der Technologischen Mechanik*, Springer Verlag, Berlín, 1909.
- Marin, J., *Mechanical Behavior of Engineering Materials*, Prentice-Hall, Nueva Jersey, 1962.
- McQueen, H.J., "Shear Line Theory" (notas de curso), Concordia University, Montreal, 1981.
- Nadai, J., *Of Applied Physics*, vol. 8, pág. 205, 1937.
- Prager, W., y P.H. Hodge, *Theory of Perfect Plastic Solids*, John Wiley & Sons, Nueva York, 1951.
- Reed-Hill, *Physical Metallurgy Principles*, D. Van Nostrand, Nueva York, 1973.
- Rowe, W.G., *Principles of Industrial Metalworking Processes*, Edward Arnold Publishers, Londres, 1977.
- Saada, A.S., *Elasticity Theory and Applications*, Pergamon Press, Nueva York, 1974.
- Schey, J.A., *Tribology in Metalworking: Friction, Lubrication and Wear*, American Society for Metals, Metals Park, Ohio, 1983.
- Sellars, C.M., y W.J. Tegart McG., *Mem. Sci. Rev. Metall.*, vol. 63, pág. 731, 1966.
- Slater, R.A.C., *Engineering Plasticity, Theory and Application to Metal Forming Processes*, The Macmillan Press, Londres, 1977.
- Standard Test Methods for Tension Testing of Metallic Materials ASTM E-8.
- Stüwe, H.P. "Flow Stress and Speed of Deformation in Hot Extrusion", *Z. Metallkunde* 62, págs. 697-701, 1971.
- Thomsen, E.G., Ch.T. Yang y S. Kobayashi, *Plastic Deformation in Metal Processing*, MacMillan, Nueva York, 1965.
- Timoshenko, S.P., y D.H. Young, *Elements of Strength of Materials*, Van Nostrand Reinhold, Nueva York, 1968.
- Timoshenko, S.P., y J.N. Goodier, *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill, Singapur, 1988.
- Voce, E., "The Relationship between Stress and Strain for Homogeneous Deformation", *J. Inst. of Metals*, vol. 74, pág. 537, 1948.
- Zener, C., y H. Hollomon, "Problems in Non-Elastic Deformation", *J. Applied Physics*, febrero de 1944.



Comprender los procesos de formado de metales y todas sus implicaciones, es esencial para los estudiantes de Ingeniería, sobre todo en las ramas metalúrgica, mecánica, física y de materiales. Asimismo, los profesionales del ramo deben mantener frescos sus conocimientos acerca de los criterios de cedencia usados en los procesos de formado de metales y los métodos para determinar el esfuerzo o fuerza de forja, laminación, trefilado y extrusión, a fin de aplicarlos en su práctica diaria en las diferentes industrias.

En *Teoría de la plasticidad aplicada a los procesos de formado de metales*, el lector conocerá o reafirmará los conceptos de esfuerzo y deformación desde el punto de vista físico, lo mismo que las herramientas matemáticas para su manejo, y las ecuaciones que relacionan los esfuerzos con las deformaciones.

También se revisan ampliamente los ensayos para determinar las propiedades mecánicas de los metales, y las ecuaciones esfuerzo-deformación (llamadas ecuaciones constitutivas plásticas) para temperatura ambiente y trabajo en caliente.

Además, se describen las herramientas de tribología necesarias en el análisis de la deformación de metales, y los principales métodos para calcular fuerzas y esfuerzos, potencias y energías para dar forma a los metales.

El objetivo del libro es proporcionar información integral para el estudio de la teoría de la plasticidad aplicada a los procesos de formado de metales, además de contribuir al acervo de la literatura en español acerca del tema que, por lo general, siempre ha sido escasa.

ÁREA: INGENIERÍA MECÁNICA
ISBN-13 978-970-31-0838-1



9 789703 108381

