Lektion 9

# Fredagsmys

- Linjära ekvationssystem och matriser
  - Matrisform av ekvationssystem
  - Elementära radoperationer
  - Trappstegsmatris

# Ekvationssystem med 2 variabler

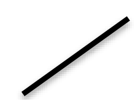
Linjära ekvationer som t.ex. $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$ bildar ett system.

Varje ekvation beskriver en linje i planet (t.ex. $y = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x$)

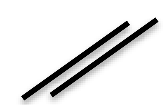
Lösningsmängden = samtliga lösningar till ekvationssystemet
= de *gemensamma* punkterna för linjerna.

Tre huvudfall:

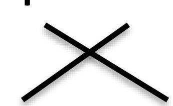
- Två identiska linjer (oändligt många lösningar)



- Två parallella linjer (finns inga lösningar)



- Två linjer som inte är parallella skär varandra i precis en punkt, (finns en entydig lösning till systemet)



# Ekvationssystem med 3 variabler

Linjära ekvationer som t.ex. $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 3x + 2y - z = 3 \\ 2x + 3y + 5z = 4 \end{cases}$ bildar ett system.

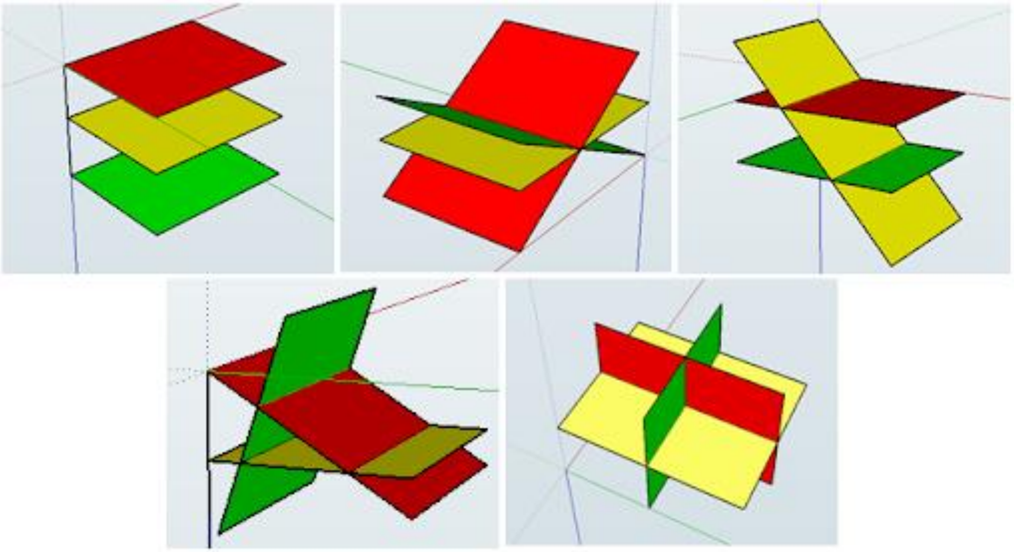
Varje ekvation beskriver plan i rummet

Lösningsmängden = samtliga lösningar till ekvationssystemet

= de *gemensamma* punkterna för linjerna.

Tre huvudfall:

- Oändligt många lösningar
- Lösning saknas
- Entydig lösning till systemet



# Lösningsstruktur

Allmänt: för ett linjärt ekvationssystem gäller exakt ett av följande alternativ:

- Systemet har entydig lösning
- Systemet har ingen lösning
- Systemet har oändligt många lösningar

# En viktig klass: **Homogena system**

- Ett **homogent system** är ett system med nollor i höger led

- Homogena system är alltid lösbara (alla variabler $=0$ är alltid en lösning och kallas den triviala lösningen), t.ex.

$$\begin{cases} 3x + y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

Obs att $x = y = 0$ är en trivial lösning

- Homogena system med fler obekanta än ekvationer har alltid oändligt många lösningar, t.ex.

$$\begin{cases} 2x - y + z &= 0 \\ x - 2y - z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + z &= 0 \\ x - 3y &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \cdots \begin{cases} z = -5t \\ x = \ \ 3t, \\ y = \ \ \ t \end{cases} \quad \text{där } t \in \mathbb{R}$$

# Lösningsstruktur för homogena ekvationssystem

Allmänt: för ett homogent ekvationssystem gäller exakt ett av följande alternativ:

- Systemet har entydig (trivial) lösning
- Systemet har oändligt många lösningar

# Elementära radoperationer

- Multiplicera ekvation med nollskild konstant
- Byta plats på två ekvationer
- Addera konst*(ekvation) till annan ekvation

- Multiplicera rad med nollskild konstant
- Byta plats på två rader
- Addera konst*(rad) till annan rad

$$\begin{array}{c} -2 \downarrow \quad -3 \downarrow \end{array} \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 3x + 2y - z = 3 \\ 2x + 3y + 5z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$1 \downarrow \begin{cases} x + y + z = 2 \\ -y - 4z = -3 \\ y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ -y - 4z = -3 \\ -z = -3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 2 - y - z = 8 \\ y = 3 - 4z = -9 \\ z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} -2 \downarrow \quad -3 \downarrow \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \end{array}\right) \sim$$

$$1 \downarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

# Lösningsstruktur

- Entydig lösning

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -\mathbf{1} & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -\mathbf{1} & 3 \end{array}\right)$$

- Ingen lösning:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -\mathbf{1} & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{3} \end{array}\right)$$

- Oändligt många (parameterlösning):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -\mathbf{1} & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

# Trappstegsform

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 7 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ {\color{red}0} & -1 & -4 & -3 \\ {\color{red}0} & 1 & 4 & 3 \end{array}\right) \sim$$

radekvivalenta

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ {\color{red}0} & -1 & -4 & -3 \\ {\color{red}0} & {\color{red}0} & {\color{red}0} & {\color{red}0} \end{array}\right)$$

*trappstegsform*

Om matrisen $B$ erhålls efter ändligt många radoperationer på matrisen $A$ så säges $A$ och $B$ vara radekvivalenta.

nya rad = gamla rad + $c$ · annan rad

Att $A$ och $B$ är radekvivalenta skrivs

$$A \sim B$$

Sats 3.4.2. *Om två ekvationssystem har **radekvivalenta** totalmatriser så är systemens lösningsmängder **identiska**.*

# Elementära radoperationer

- Multiplicera rad med nollskild konstant
- Byta plats på två rader
- Addera konst*(rad) till annan rad

$-2 \quad 1 \quad -3$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 5 & 6 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$:-14$

$-4 \quad 5$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & -14 & -14 & -14 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$Sätt \quad x_4 = t,\ x_3 = s \ vilket\ ger$$

$$x_2 = -t - s,$$

$$x_1 = -2t - s$$

Dvs

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$


Hands up if you
love Fridays