

Flervariabelanalys: Teori

Tomas Sjödin

15 augusti 2022

Innehåll

0 Förkunskaper	3
0.1 Envariabelanalys	3
0.2 Linjär Algebra	3
0.2.1 Rummen \mathbb{R}^n	3
0.2.2 Linjer och plan	4
0.2.3 Matriser	5
0.2.4 Linjär Avbildning	5
0.2.5 Determinanter, Area och Volymkala	6
0.2.6 Kvadratiske Former	6
1 Delmängder till \mathbb{R}^n. Funktioner	7
1.1 Delmängder till \mathbb{R}^n	7
1.2 Funktioner	9
1.3 Parameterkurvor	10
1.4 Reellvärda funktioner av två variabler	11
1.4.1 Grafritning	12
1.5 Nivåytor till funktioner av tre variabler	13
1.6 Sammansatta och inversa funktioner	14
1.7 Affina funktioner	15
1.8 Polära/Sfäriska koordinater	15
2 Gränsvärden. Kontinuitet	16
2.1 Gränsvärden	16
2.2 Kontinuerliga funktioner	20
3 Differentierbarhet och Partiella derivator för reellvärda funktioner	22
3.1 Partialderivator	24
3.2 Differentierbarhet	24
3.3 Högre ordnings derivator. Klasserna C^k	27
3.4 Differential*	29
3.5 Vissa elementära system av partiella differentialekvationer. Beräkning av potentialer till vektorfält	30
4 Funktionalmatriser. Kedjeregeln. Partiella differentialekvationer	30
4.1 Differentierbarhet för vektorvärda funktioner. Funktionalmatris	30
4.2 Kedjeregeln	32
4.3 Koordinattransformationer och Partiella Differentialekvationer	34
5 Riktningderivator. Gradienter	34
5.1 Nivåkurvor/ytor	36

6	Taylors formel. Lokala extrempunkter	36
6.1	Polynom i flera variabler	36
6.2	Taylors formel	36
6.3	Några ord om beviset av Taylors sats*	38
6.4	Taylorpolynom av högre grad*	39
6.5	Lokala extrempunkter	39
7	Kurvor. Ytor. Funktionaldeterminanter. Inversa funktioner	41
7.1	Kurvor	41
7.2	Ytor på parameterform	42
7.3	Inversa funktionssatsen	44
8	Implicita funktionssatsen	46
8.1	Implicita funktionssatsen	46
8.1.1	En ekvation med två variabler	46
8.1.2	En ekvation med tre variabler	47
8.1.3	Två ekvationer med tre variabler	48
8.1.4	En allmän version av implicita funktionssatsen*	50
9	Dubbelintegraler	51
9.1	Dubbelintegraler	51
9.2	Över- och undersummor: en mer formell definition av dubbelintegraler*	53
9.3	Fubinis sats för dubbelintegraler	54
10	Variabelbyten i dubbelintegraler	57
10.1	Variabelbyten i dubbelintegraler	57
11	Trippelintegraler	58
11.1	Grundläggande egenskaper och Fubinis sats	58
11.2	Variabelbyten i trippelintegraler	61
12	Integraltillämpningar. Generaliserade integraler	62
12.1	Area och Volym	62
12.2	Tyngdpunkter i 2D	63
12.3	Tyngdpunkter i 3D	63
12.4	Generaliserade Integraler	63
12.5	Variabelbyten och Fubinis sats för generaliserade integraler	67
A	Några kommentarer angående olika notationer	68

* Stjärnmarkerade sektioner/rutor innehåller lite mer teoretiskt eller tekniskt svårare material som inte är helt nödvändiga för att tillgodogöra sig kursen.

0 Förkunskaper

0.1 Envariabelanalys

- **Gränsvärden:** Vi kommer behöva använda gränsvärden från envariabeln, och ofta kan Taylor/Maclaurinutvecklingar vara användbara.
- **Derivator:** Man måste kunna derivationsregler (linjäritet, produktregel, kedjeregel ...) samt de elementära funktionernas derivator.
- **Integraler:** Man måste kunna integrationsteknikerna i en variabel (linjäritet, partiell integration, variabelsubstitution ...), standard-primitiverna osv.

Vi kommer också behöva Taylors sats i en variabel (samt ibland kan man ha nytta av standardutvecklingarna för de elementära funktionerna).

Sats 0.1 (Taylor)

Om $f(x)$ har kontinuerliga derivator upp till och med ordning $n + 1$ i en omgivning till punkten a , då gäller att

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + \mathcal{O}(h^{n+1}),$$

där $\mathcal{O}(h^{n+1}) = b(h)h^{n+1}$ för någon funktion $b(h)$ som är begränsad nära origo.

0.2 Linjär Algebra

Det vi kommer behöva i denna kurs från linjär algebran är rummen \mathbb{R}^n , linjer och plan på parameter- och normalform, matriser och hur de multipliceras, determinanter samt lite om egenvärden och teckenkaraktär till kvadratiske former. Vi sammanfattar kortfattat nedan de viktigaste begreppen. Notera att vi kommer ha lite förenklande notation då vi i denna kurs i princip enbart kommer arbeta i standardbasen.

0.2.1 Rummen \mathbb{R}^n

Definition 0.2. För ett heltal $n > 0$ definieras \mathbb{R}^n att vara mängden av alla n -tupler (x_1, x_2, \dots, x_n) av reella tal x_i ($1 \leq i \leq n$), tillsammans med följande operationer.

- Addition:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n),$$

- Multiplikation med skalär:

$$k(x_1, x_2, \dots, x_n) = (kx_1, kx_2, \dots, kx_n),$$

- Skalärprodukt:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \bullet (y_1, y_2, \dots, y_n) = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n.$$

I \mathbb{R}^n har vi en naturlig bas, den så kallade standardbasen, som ges av:

$$\bar{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \bar{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \bar{e}_n = (0, 0, \dots, 1).$$

Vi kommer i denna kurs med mycket få undantag jobba i standardbasen, så det är underförstått att alla begrepp som beror på valet av bas är med avseende på standardbasen om inget annat sägs. Vi kommer också i denna kurs identifiera element i \mathbb{R}^n med motsvarande kolumnvektor:

$$\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

där det senare alltid är det uttryck som används vid matrisräkning. I uttryck som innefattar en skalärprodukt mellan vektorer ska den dock behandlas som ett element i \mathbb{R}^n . Notera alltså skillnaden att vi i denna kurs tillåter oss att skippa \underline{e} som skrevs framför koordinatmatrisen i kursen i linjär algebra. Notera också att vi här använder \bar{x} som i många böcker istället skrivs med fetstil \mathbf{x} , och kolumnmatrisen skrevs i linjär algebran ofta X istället.

I två och tre dimensioner skriver vi ofta $(x, y)/(x, y, z)$ istället för $(x_1, x_2)/(x_1, x_2, x_3)$.

Definition 0.3. Belopp: $|(x_1, x_2, \dots, x_n)| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$.

Avstånd: $d(\bar{x}, \bar{y}) = |\bar{x} - \bar{y}|$.

Vinkel: $\cos \phi = \frac{\bar{x} \bullet \bar{y}}{|\bar{x}||\bar{y}|}$ (ϕ vinkeln mellan \bar{x} och \bar{y}).

Notera att \bar{x}, \bar{y} är ortogonala om och endast om $\bar{x} \bullet \bar{y} = 0$.

Schwarz olikhet: $|\bar{x} \bullet \bar{y}| \leq |\bar{x}||\bar{y}|$.

Triangelolikheten: $|\bar{x} + \bar{y}| \leq |\bar{x}| + |\bar{y}|$.

0.2.2 Linjer och plan

En linje på parameterform i \mathbb{R}^n skrivs som

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (a_0, a_1, \dots, a_n) + t(v_1, v_2, \dots, v_n),$$

där (a_0, a_1, \dots, a_n) är en fix punkt på linjen, och (v_1, v_2, \dots, v_n) är en riktningsvektor till linjen. Parametern t är ett reellt tal (varje t svarar alltså mot en unik punkt på linjen).

I två dimensioner kan en linje också skrivas på normalform

$$ax + by = c$$

där (a, b) nu är en normalvektor till linjen. Det kan vara värt att notera att om (a, b) är en normalvektor till en linje, så är $(b, -a)$ en riktningsvektor och vice versa.

Ett plan på parameterform i \mathbb{R}^n skrivs som

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (a_0, a_1, \dots, a_n) + s(u_1, u_2, \dots, u_n) + t(v_1, v_2, \dots, v_n),$$

där (a_0, a_1, \dots, a_n) är en fix punkt på planet, och (u_1, u_2, \dots, u_n) och (v_1, v_2, \dots, v_n) är ickeparallella riktningsvektorer till planet.

I tre dimensioner kan ett plan också skrivas på normalform

$$ax + by + cz = d$$

där (a, b, c) nu är en normalvektor till planet. Kom också ihåg att vi kan komma från parameterformen till normalformen genom att ta kryssprodukten av de två riktningsvektorerna för att få fram en normalvektor.

0.2.3 Matriser

Definition 0.4. Om vi för varje par ij med $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq k$ har fått tal $a_{ij} \in \mathbb{R}$ då kallar vi

$$A = (a_{ij})_{r \times k} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rk} \end{pmatrix}$$

för en $r \times k$ -matris över \mathbb{R} .

- En $r \times k$ -matris har r rader och k kolumner. En matris som bara har en rad, $(a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1k})$, kallas en radmatris, och en matris som bara har en kolumn,

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{r1} \end{pmatrix},$$

kallas en kolumnmatris.

- En $r \times r$ -matris kallas kvadratisk.
- Transponatet A^t av en matris A är den matris man får om man byter rader mot kolumner. T.ex. är

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^t = (x_1 \ x_2).$$

Definition 0.5. • $(a_{ij})_{r \times k} = (b_{ij})_{r \times k}$ om och endast om $a_{ij} = b_{ij}$ för alla ij ,

- $(a_{ij})_{r \times k} + (b_{ij})_{r \times k} = (a_{ij} + b_{ij})_{r \times k}$,
- $\lambda(a_{ij})_{r \times k} = (\lambda a_{ij})_{r \times k}$,
- $(a_{ij})_{r \times m} \cdot (b_{ij})_{m \times k} = (c_{ij})_{r \times k}$, där $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{im}b_{mj}$.

0.2.4 Linjär Avbildning

Definition 0.6. En avbildning (funktion) $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ som uppfyller

$$F(\bar{x} + \bar{y}) = F\bar{x} + F\bar{y},$$

$$F(k\bar{x}) = kF\bar{x}$$

för alla vektorer $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$ och konstanter k kallas linjär.

Sats 0.7

Till varje linjär avbildning $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ finns en unik $m \times n$ -matris A , sådan att

$$F\bar{x} = A\bar{x},$$

där $A\bar{x}$ betecknar matrismultiplikationen mellan matrisen A och kolumnvektorn \bar{x} .

I linjär algebra har vi sett att det finns en unik matris givet att vi valt bas till \mathbb{R}^n respektive \mathbb{R}^m . I denna kurs kommer vi alltid jobba i standardbasen och kommer därför normalt formulera definitioner i termer av matriser.

Ifall $m = 1$ då kan vi också formulera det som att $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ är linjär om och endast om det finns konstanter A_1, A_2, \dots, A_n sådana att

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_nx_n.$$

0.2.5 Determinanter, Area och Volymkala

Om A är en kvadratisk matris så gäller att

$\det A = \pm$ arean/volymen av parallelogrammet/parallelepipeden som spänns upp av kolumnerna i A .

Detta påstående gäller (rätt tolkat om $n \geq 4$) i alla dimensioner. Notera att detta är samma sak som att säga att A sett som linjär avbildning avbildar enhetskvadraten/kuben i \mathbb{R}^n på ett parallelogram/parallelepiped med volymen $|\det A|$. Det är därför ett belopp av en determinant kommer in i formeln för variabelbyten i multipelintegraler senare i kursen.

0.2.6 Kvadratiska Former

Detta material kommer in nedan då vi ska se på lokala extrempunkter. Det är enbart hur man räknar fram egenvärdena till en matris samt hur man avgör en kvadratisk forms teckenkaraktär utifrån dessa som vi kommer använda.

Definition 0.8. En kvadratisk matris A sägs ha ett egenvärde λ (reellt tal, eventuellt 0) med motsvarande egenvektor $\bar{v} \neq \bar{0}$ om

$$A\bar{v} = \lambda\bar{v}.$$

Eftersom

$$A\bar{v} = \lambda\bar{v} \Leftrightarrow (A - \lambda I)\bar{v} = \bar{0}$$

så har vi att λ är ett egenvärde till A om och endast om $A - \lambda I$ inte är inverterbar, det vill säga om och endast om

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Kom också ihåg att en kvadratisk form $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ är en funktion på formen

$$Q(\bar{x}) = \bar{x}^t A \bar{x},$$

där \bar{x}^t betecknar transponatet och A är symmetrisk (det vill säga $A^t = A$).

Teckenkaraktär: En kvadratisk form $Q(\bar{x}) = \bar{x}^t A \bar{x}$ på \mathbb{R}^n sägs vara:

- Positivt definit om $Q(\bar{x}) > 0$ för alla $\bar{x} \neq \bar{0}$,
- Positivt semidefinit om $Q(\bar{x}) \geq 0$ för alla \bar{x} med likhet för något $\bar{x} \neq \bar{0}$,
- Negativt definit om $Q(\bar{x}) < 0$ för alla $\bar{x} \neq \bar{0}$,
- Negativt semidefinit om $Q(\bar{x}) \leq 0$ för alla \bar{x} med likhet för något $\bar{x} \neq \bar{0}$,
- Indefinit om den antar både positiva och negativa värden.

Sats 0.9

Om $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ är egenvärdena till A , då gäller att Q är:

- Positivt definit om och endast om alla $\lambda_i > 0$,
- Positivt semidefinit om och endast om alla $\lambda_i \geq 0$ med likhet för något i ,
- Negativt definit om och endast om alla $\lambda_i < 0$,
- Negativt semidefinit om och endast om alla $\lambda_i \leq 0$ med likhet för något i ,
- Indefinit om det finns både positiva och negativa egenvärden.

Ett alternativt sätt att bestämma teckenkaraktären som inte går via egenvärden är succesiv kvadratkomplettering.

1 Delmängder till \mathbb{R}^n . Funktioner

Detta kapitel är ganska omfattande med många begrepp och mycket notation som kommer användas i kursen. Kapitlet är presenterat i sin logiska ordning, vilket inte nödvändigtvis är detsamma som dess mest pedagogiska ordning. Lite läsanvisningar:

- Se först och främst till att ni förstår reellvärda funktioner av två och tre variabler givna av funktionsuttryck (som t.ex. $f(x, y) = x - 2y$ eller $g(x, y, z) = xy - \sqrt{z}$) samt grafer, nivåkurvor/nivåytor. Detta är helt centralt för allt i kursen.
- I många geometriska problem behöver vi beskriva delmängder till \mathbb{R}^n , och dessa behövs också för att beskriva funktioner och deras definitionsmängder, målmängder och värdemängder.
 - Se till att ni förstår mängder givna av ekvationer och olikheter (och notationen som används) (t.ex. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 7\}$).
 - Lär er sedan begreppen inre-, yttre- och randpunkt samt begreppen öppen och slutna mängd.
- Vektorvärda funktioner (som t.ex. $\vec{f}(x, y) = (xy, \sin y)$) byggs upp av reellvärda koordinatfunktioner.
- Materialet om sammansatta och inversa funktioner kommer in först när vi börjar prata om inversa funktionssatsen. Detta gäller även subtilare frågor om definitions-, mål- och värdemängder.
- Polära och sfäriska koordinater kommer vi använda vid gränsvärdesundersökningar och i variabelbyten i multipelintegraler.

1.1 Delmängder till \mathbb{R}^n

En mängd M i \mathbb{R}^n är en väldefinierad samling punkter (element) i \mathbb{R}^n . T.ex. är \mathbb{R}^n själv en mängd.

Om M_1, M_2 är mängder i \mathbb{R}^n så definierar vi:

- $M_1 \subset M_2$: ” M_1 är en delmängd till M_2 ”, om varje punkt i M_1 också ligger i M_2 ,

- $M_1 \cap M_2$: ” M_1 snitt M_2 ”, mängden av punkter som ligger i både M_1 och M_2 ,
- $M_1 \cup M_2$: ” M_1 union M_2 ”, mängden av punkter som ligger i minst ett av M_1 eller M_2 ,
- $M_1 \setminus M_2$: ” M_1 minus M_2 ”, mängden av punkter som ligger i M_1 men inte i M_2 .

Vi skriver också

$$\bar{y} \in M : \bar{y} \text{ tillhör } M, \text{ eller } \bar{y} \text{ är en punkt i } M.$$

Kanske rätt självklart, men två mängder sägs vara lika om de innehåller samma element. Den tomma mängden är mängden som inte har några element alls, och betecknas \emptyset .

Ofta betecknas mängder på följande sätt:

$$\{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : P(\bar{x})\},$$

som står för mängden av de \bar{x} i \mathbb{R}^n som uppfyller villkoret $P(\bar{x})$, eller mer allmänt $\{\bar{x} \in M : P(\bar{x})\}$ är de punkter \bar{x} i mängden M som uppfyller $P(\bar{x})$. Om det står två eller fler villkor, t.ex. $\{\bar{x} \in M : P_1(\bar{x}), P_2(\bar{x})\}$, betyder detta att alla villkoren ska vara uppfyllda (det vill säga kommat ska tolkas som ett och).

T.ex. $\{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 : |\bar{x}| = 1\}$ är helt enkelt enhetscirkeln i planet, och $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$. Om en mängd är ändlig skriver man ofta också

$$\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k\},$$

där \bar{x}_i :na är elementen i mängden.

Definition 1.1. Givet $\bar{y} \in \mathbb{R}^n$ och $\varepsilon > 0$ så definierar vi (det öppna) klotet $B(\bar{y}, \varepsilon)$ med centrum \bar{y} och radie ε i \mathbb{R}^n som

$$B(\bar{y}, \varepsilon) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : |\bar{x} - \bar{y}| < \varepsilon\},$$

det vill säga de punkter \bar{x} som har avstånd mindre än ε till \bar{y} .

- $n = 1$: Om $y \in \mathbb{R}$ och $\varepsilon > 0$ så är $B(y, \varepsilon) =]y - \varepsilon, y + \varepsilon[$.
- $n = 2$: Om $\bar{y} \in \mathbb{R}^2$ och $\varepsilon > 0$ är $B(\bar{y}, \varepsilon)$ en cirkelskiva med radie ε och centrum \bar{y} (som inte innehåller cirkeln med radie ε och centrum \bar{y}).
- $n = 3$: Om $\bar{y} \in \mathbb{R}^3$ och $\varepsilon > 0$ så är $B(\bar{y}, \varepsilon)$ klotet med radie ε och centrum \bar{y} (som inte innehåller sfären med radie ε och centrum \bar{y}).
- O.s.v. för högre dimensioner.

Notera att dimensionen på $B(\bar{y}, \varepsilon)$ bestäms av vilken dimension \bar{y} ligger i. Notera också att klot kommer förekomma mycket nedan.

Definition 1.2. Givet $M \subset \mathbb{R}^n$ och $\bar{y} \in \mathbb{R}^n$ så kallas \bar{y} en:

- inre punkt till M om det finns $\varepsilon > 0$ så att $B(\bar{y}, \varepsilon) \subset M$,
- yttre punkt till M om det finns $\varepsilon > 0$ så att $B(\bar{y}, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^n \setminus M$,
- randpunkt till M om \bar{y} varken är en yttre eller inre punkt till M .

Mängden av alla randpunkter till M betecknas ∂M . Om alla punkter i M är inre punkter till M kallas M **öppen**. Om $\partial M \subset M$ kallas M **sluten**.

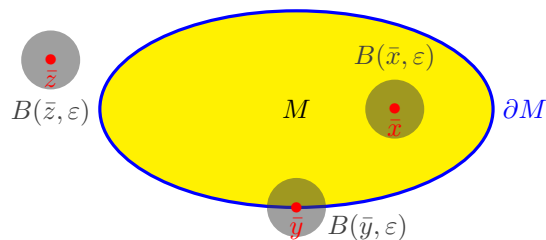
- $\bar{M} = M \cup \partial M$ (kallas M :s slutna hölje),
- $M^\circ = M \setminus \partial M$ (kallas M :s inre).

Notera att M är öppen om och endast om $\mathbb{R}^n \setminus M$ är sluten.

Definition 1.3. Om det finns $r > 0$ så att $M \subset B(\bar{0}, r)$ så kallas M **begränsad**.
En sluten och begränsad mängd kallas **kompakt**.

Exempel 1.4. Nedan ser vi exempel på en mängd M , i detta fall en ellipsskiva. Notera att \bar{x} är en inre punkt eftersom det finns en cirkelskiva $B(\bar{x}, \varepsilon)$ som ligger helt i M , och \bar{z} är en yttre punkt då det finns en cirkelskiva $B(\bar{z}, \varepsilon)$ som ligger helt utanför M . Punkten \bar{y} är en randpunkt, för oavsett hur litet vi väljer ε kommer cirkelskivan $B(\bar{y}, \varepsilon)$ innehålla punkter som ligger i M och punkter som inte gör det.

Randen ∂M till M är den blå ellipsen. Observera att nedanstående bild inte innehåller all info om mängden, eftersom den inte specificerar vilka punkter på randen som ingår. M är sluten om alla punkter på ∂M tillhör M . Å andra sidan är M öppen om inga punkter på ∂M ligger i M .



Definition 1.5. En öppen mängd M som innehåller \bar{a} kallas en (öppen) omgivning till \bar{a} .

1.2 Funktioner

En funktion \bar{f} från en mängd $M \subset \mathbb{R}^n$ till en mängd $N \subset \mathbb{R}^m$ är en regel som för varje $\bar{x} \in M$ ger exakt ett värde $\bar{f}(\bar{x}) \in N$, vi skriver

$$\bar{f} : M \rightarrow N.$$

(Ett annat skrivsätt, där dock N inte är med explicit, är $\bar{x} \in M, \bar{x} \mapsto \bar{f}(\bar{x}).$)

M kallas för **definitionsområdet** till \bar{f} , och betecknas även $D_{\bar{f}}$. Mängden N kallas ibland \bar{f} :s **målmängd**.

- En funktion består alltså om man ska vara riktigt formell (vilket vi som tur är oftast inte kommer vara) dels av själva regeln \bar{f} som ger värdet, definitionsområdet M som är de punkter som vi får stoppa in i denna regel, samt målmängden N .
- T.ex. är

$$\begin{aligned} \bar{f} : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ där } \bar{f}(x, y, z) = (xy, \sin z), \\ \bar{g} : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq v \leq 1\} \text{ där } \bar{g}(x, y, z) = (xy, \sin z), \\ \bar{h} : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \leq 0\} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ där } \bar{h}(x, y, z) = (xy, \sin z), \end{aligned}$$

tre olika funktioner, trots att själva regeln är densamma.

- Om vi får ett funktionsuttryck och $D_{\bar{f}}$ inte anges explicit är det underförstått att det är den största mängden där uttrycket är meningsfullt, och N är hela \mathbb{R}^m (för något m).
- Nedan är det underförstått att $D_{\bar{f}}$ ligger i \mathbb{R}^n för något fixt n .

- Notera dock att vi mycket väl får välja ett mindre $D_{\bar{f}}$ än det största möjliga. Redan i en variabel har ni stött på detta då ni skulle definiera inversen till t.ex. $\sin x$. För att detta ska vara möjligt väljer man normalt definitionsmängden $[-\pi/2, \pi/2]$ och målmängden $[-1, 1]$ (som då blir definitionsmängden för inversen \arcsin).
- Många böcker på denna nivå tillåter sig att skriva saker som att f går från \mathbb{R}^2 till \mathbb{R} , utan att mena att D_f nödvändigtvis är hela \mathbb{R}^2 . Jag föredrar dock att i sådana fall säga något i stil med "låt f vara en reellvärd funktion av två variabler", alternativt det något mer formella " $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($D_f \subset \mathbb{R}^2$)".
- Om $\bar{f} : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ så är den på formen

$$\bar{f}(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, x_2, \dots, x_n)),$$

där varje $f_j : M \rightarrow \mathbb{R}$. Egenskaper hos f bestäms därför till stor del av egenskaperna för f_j :na var för sig, varför mycket fokus ligger på reellvärda funktioner nedan.

- Vi försöker vara noga med att använda vektorbeteckningen \bar{x} för punkter i \mathbb{R}^n om n eventuellt är större än 1, och för funktioner som (eventuellt) är vektorvärda, det vill säga där eventuellt $m > 1$ ovan, kommer vi skriva \bar{f} . Undantag görs dock för linjära/affina funktioner som vi oftast skriver med stora bokstäver istället (t.ex. A eller F), utan vektorstreck även om vi eventuellt har $m > 1$.

Definition 1.6. Värdeområdet $V_{\bar{f}}$ till \bar{f} är mängden av alla punkter $\bar{y} \in \mathbb{R}^m$ sådana att det finns $\bar{x} \in D_{\bar{f}}$ med $\bar{y} = \bar{f}(\bar{x})$.

Definition 1.7. Om $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($D_f \subset \mathbb{R}^n$) så kallas mängden av par

$$\{(\bar{x}, f(\bar{x})) \in \mathbb{R}^{n+1} : \bar{x} \in D_f\}$$

för **graf**en till f .

Definition 1.8. Nivåområdet vid $c \in \mathbb{R}$ till $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ är mängden av $\bar{x} \in D_f$ sådana att $f(\bar{x}) = c$.

Om vi är i två dimensioner blir en nivåområde oftast en kurva, och man kallar det då en **nivåkurva**. Om vi är i tre dimensioner blir det istället oftast en yta, och vi kallar det då en **nivåyta**. Det kan dock hända att det t.ex. blir tomma mängden, en punkt eller hela rummet. Vi kommer dock vara lite informella och använda begreppen nivåkurva/nivåyta som synonymer med nivåområden i två respektive tre dimensioner.

1.3 Parameterkurvor

En vektorvärd funktion av en variabel $\bar{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ är på formen

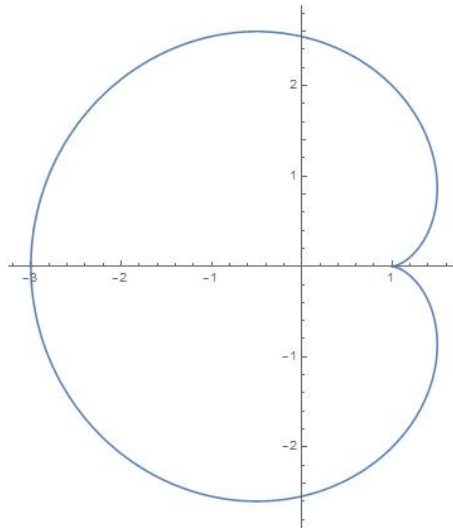
$$\bar{r}(t) = (r_1(t), r_2(t), \dots, r_n(t)).$$

I de fall varje funktion $r_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ är kontinuerlig kallar vi detta en (kontinuerlig) parameterkurva i \mathbb{R}^n .

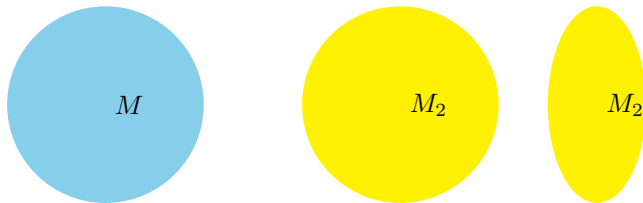
Även om det skulle, i de fall $n = 2$, gå att rita t -axeln och värdena $(r_1(t), r_2(t))$ i ett tredimensionellt rum så att man får en kurva i "rumtid" är detta oftast inte någon direkt hjälp, utan man ritar normalt bara ut kurvan i planet (det vill säga värdemängden) utan att ange vilket t -värde som varje punkt motsvarar.

Exempel 1.9. Här nedan har vi plottat (värdemängden till) kurvan

$$\begin{cases} x(t) = 2 \cos(t) - \cos(2t), \\ y(t) = \sin(t) - \sin(2t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$



Definition 1.10. En mängd $M \subset \mathbb{R}^n$ kallas (bågvis) **sammanhängande** om varje par av punkter i M kan sammanbindas med en kontinuerlig parameterkurva som helt ligger i M .



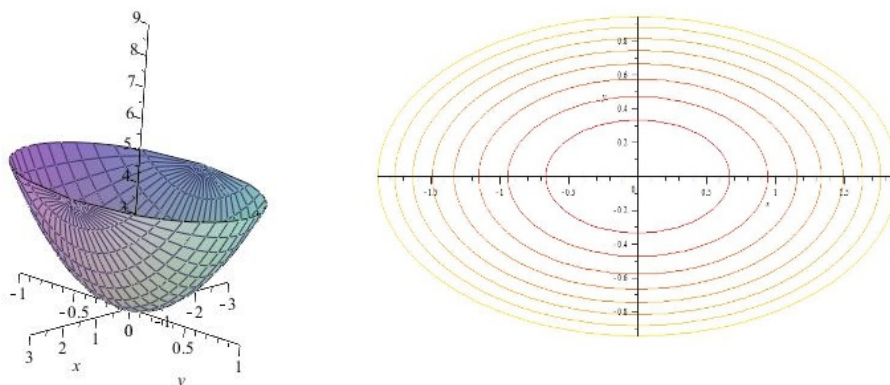
Den ljusblå mängden M är sammanhängande,
medan den gula mängden M_2 (som består av en cirkel och en ellips) inte är det.

1.4 Reellvärda funktioner av två variabler

För att få en förståelse för funktioner av flera variabler är det bra att börja med att studera reellvärda funktioner av två variabler. Så fort vi har fler variabler än så är det inte möjligt att visualisera deras grafer.

På många sätt är det här som den stora skillnaden sker mellan envariabelanalys och flervariabelanalys. Förstår man fallet med två variabler är det oftast ganska direkt att generalisera till flera variabler. Då fallet med reellvärda funktioner av två variabler i princip är det enda som går att visualisera någorlunda fullständigt är det extra viktigt att först börja med detta.

Nedan är grafen till funktionen $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ ritad över området $D_f = \{(x, y) : x^2 + 4y^2 \leq 4\}$, och brevid är några nivåkurvor till densamma ritade.



1.4.1 Grafritning

Att förstå vad grafen till en funktion av två variabler representerar, och hur man i alla fall i princip går till väga för att plotta en sådan är mycket viktigt, även om det i praktiken oftast är vettigare att använda ett lämpligt datorprogram för att göra själva arbetet.

För att göra en graf till en funktion $f(x, y)$ av två variabler kan man göra så att man skapar en värdetabell genom att välja ut lämpliga punkter. T.ex. om vi ovan valde punkterna

$$(-2, 0), (-1, 0), (0, -1), (0, 0), (1, 0), (0, 1), (2, 0)$$

och räknar ut motsvarande värden för f får vi

$$f(-2, 0) = 4, f(-1, 0) = 1, f(0, -1) = 4, f(0, 0) = 0, f(1, 0) = 1, f(0, 1) = 4, f(2, 0) = 4.$$

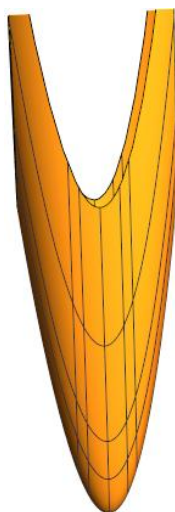
Alltså ligger punkterna i \mathbb{R}^3 som ges av

$$(-2, 0, 4), (-1, 0, 1), (0, -1, 4), (0, 0, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 4), (2, 0, 4)$$

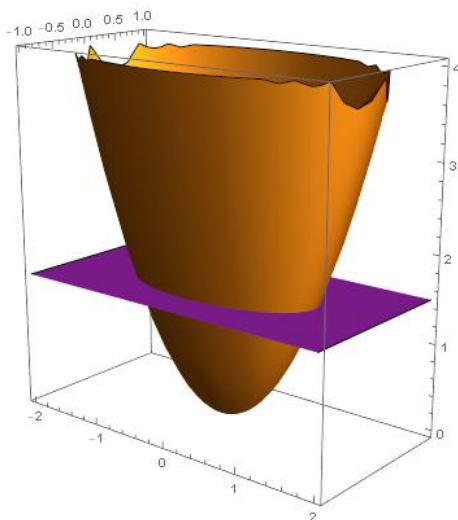
på grafen. Sedan får man skarva ihop på lämpligt sätt mellan punkterna för att få en approximation till den riktiga grafen.

Om vi bara plockat punkter lite här och där är det dock svårt att skarva ihop till en graf på ett vettigt sätt. Oftast är det mer rimligt att välja ut några olika värden på x respektive y , säg x_1, x_2, \dots, x_k och y_1, y_2, \dots, y_l , och se på funktionerna $f(x_i, y)$ för varje i och rita ut kurvorna $(x_i, y, f(x_i, y))$ (notera att detta är en parameterkurva i rummet med y som parameter), och sedan likadant för varje j ritar vi ut $(x, y_j, f(x, y_j))$. Notera att dessa bara är grafer till funktionerna av en variabel $f(x_i, y)$ respektive $f(x, y_j)$ där vi håller den ena variabeln fix, fast utritad i planet där $x = x_i$ respektive $y = y_j$ i tre dimensioner. Alla dessa kurvor bildar nu ett rutnät, och från detta rutnät som ju ligger på grafen till funktionen kan vi få en bra bild av hur grafen till hela funktionen ser ut.

Här nedan har vi plottat funktionen $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ igen, men över $-4 < x < 4$, $-2 < y < 2$ samt ritat ut kurvorna som beskrivits ovan för $x = -1.5, -1, 0, 1$ och 1.5 , respektive $y = 0, 0.7, 1$ och 1.5 (notara att kurvan som fås då $y = 0$ är "bottenkurvan", negativa y ligger på baksidan och syns inte i bilden).



När det gäller nivåkurvorna notera att dessa fås av att snitta grafen med ett plan vid höjd c . Här nedan har vi plottat $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ tillsammans med planet $z = 1.5$. Om vi tar kurvan som fås av snittet mellan planet och grafen och projicerar på xy -planet får vi nivåkurvan $f(x, y) = 1.5$, och den är i detta fall en ellips, precis som vi såg tidigare.



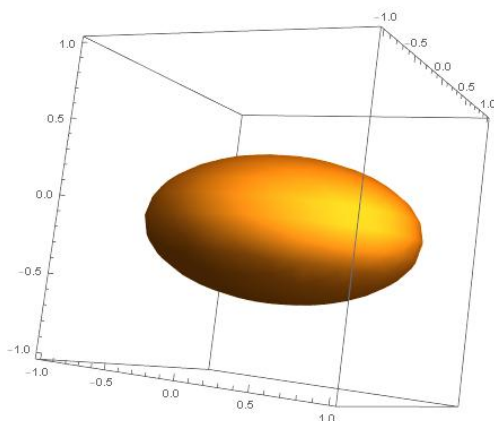
När det gäller att beskriva en nivåkurva $f(x, y) = c$, notera att detta betyder att vi försöker lösa en (typiskt icke-linjär) ekvation. Det finns inget systematiskt sätt att göra detta på, så det är bara i enklare fall som ovan vi kan förvänta oss att kunna lösa detta exakt.

1.5 Nivåytor till funktioner av tre variabler

Givet en funktion av tre variabler $w = f(x, y, z)$ så ligger grafen till denna i \mathbb{R}^4 , och kan alltså inte visualiseras. Men man kan ändå få en viss geometrisk känsla av hur funktionen "ser ut" via dess nivåytor. Det vill säga man tittar för fixt c på vilka punkter (x, y, z) som uppfyller $c = f(x, y, z)$.

T.ex. om $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 4z^2$ kan vi ganska enkelt se att $f(x, y, z) = c$ ger ellipsoider om $c > 0$ (om $c = 0$ ger det bara punkten $(0, 0, 0)$ och om $c < 0$ finns det inga punkter som uppfyller detta). Här

nedan är nivåytan för denna funktion plottad för $c = 1$ (notera att det bara är själva mantelytan som är nivåytan, inte det som är innanför ellipsoiden).



Notera dock återigen att det vi vill göra är att hitta lösningarna till den typiskt icke linjära ekvationen $f(x, y, z) = c$, och det är bara i enklare fall detta kan göras exakt.

1.6 Sammansatta och inversa funktioner

Detta material kommer in först när vi ska börja prata om inversa funktionssaten i kapitel 7 och kan lämnas tills det behövs.

Definition 1.11. Givet funktioner $\bar{f} : M \rightarrow N$ och $\bar{g} : U \rightarrow V$ då definierar vi $\bar{g} \circ \bar{f} : \widetilde{M} \rightarrow V$, där $\widetilde{M} = \{\bar{x} \in M : \bar{f}(\bar{x}) \in U\}$ via

$$\bar{g} \circ \bar{f}(\bar{x}) = \bar{g}(\bar{f}(\bar{x})).$$

Anledningen att vi måste införa \widetilde{M} är för att vissa punkter $\bar{x} \in M$ eventuellt avbildas på punkter $\bar{f}(\bar{x})$ där \bar{g} inte är definierad. T.ex. om $f(x, y) = x + y$ och $g(t) = 1/t$, om vi inte anger D_f och D_g explicit skulle detta innebära att $D_f = \mathbb{R}^2$ och $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. I detta fall blir $\widetilde{M} = D_{g \circ f} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \neq 0\}$, och $g \circ f(x, y) = g(f(x, y)) = 1/(x + y)$.

Definition 1.12. Givet $\bar{f} : M \rightarrow N$ så säger vi att \bar{f} är inverterbar om det finns en funktion $\bar{f}^{-1} : N \rightarrow M$ sådan att $\bar{f}^{-1} \circ \bar{f}(\bar{x}) = \bar{f}^{-1}(\bar{f}(\bar{x})) = \bar{x}$ och $\bar{f} \circ \bar{f}^{-1}(\bar{y}) = \bar{f}(\bar{f}^{-1}(\bar{y})) = \bar{y}$ för alla $\bar{x} \in M$ respektive $\bar{y} \in N$.

Det är lätt att inse att det kan finnas högst en invers. Kravet för att en invers ska finnas är precis att det för varje $\bar{y} \in N$ finns exakt ett $\bar{x} \in M$ sådant att $\bar{f}(\bar{x}) = \bar{y}$, och då är $\bar{f}^{-1}(\bar{y}) = \bar{x}$ för detta unika \bar{x} . Det vill säga funktionen måste vara vad som kallas bijektiv:

Definition 1.13. En funktion $\bar{f} : M \rightarrow N$ som ovan sägs vara:

- **injektiv** om det för varje par $\bar{a}, \bar{b} \in M$, $\bar{a} \neq \bar{b}$ gäller att $\bar{f}(\bar{a}) \neq \bar{f}(\bar{b})$.
- **surjektiv** om det för varje $\bar{y} \in N$ finns (minst) ett $\bar{x} \in M$ med $\bar{y} = \bar{f}(\bar{x})$.
- **bijektiv** om den är både injektiv och surjektiv.

1.7 Affina funktioner

Vi repeterade ovan lite linjär algebra. En stor del av denna kurs kommer handla om differentierbarhet, som är en generalisering av vanliga derivatan för envariabelfunktioner till funktioner av flera variabler. Ett sätt att säga att en funktion i en variabel är differentierbar är att den har en tangentlinje, och denna ges då i punkten $(a, f(a))$ av

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Notera att funktionen $x \mapsto f'(a)(x - a)$ är linjär, men en linjär funktion avbildar alltid nollvektorn på nollvektorn. Funktionen som ger tangentlinjen är alltså en summa av en konstant och en linjär funktion.

Definition 1.14. En funktion $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ på formen

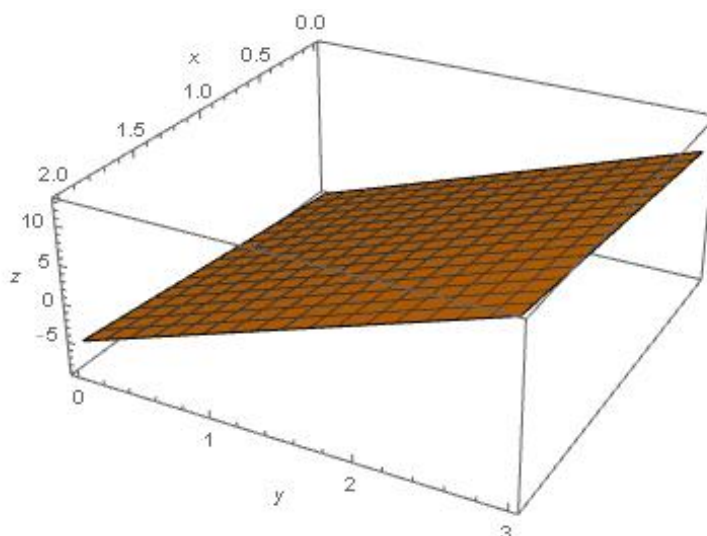
$$F(\bar{x}) = \bar{c} + A\bar{x},$$

där \bar{c} är en fix vektor i \mathbb{R}^m och $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ är linjär kallas affin.

Notera att summan av två affina avbildningar (med samma n, m) är affin, och likaså om vi multiplicerar med en reell konstant. Vidare är F inverterbar om och endast om A är inverterbar ($\bar{y} = \bar{c} + A\bar{x} \Leftrightarrow A\bar{x} = \bar{y} - \bar{c} \Leftrightarrow \bar{x} = A^{-1}(\bar{y} - \bar{c})$ om A^{-1} existerar).

Definitionen av differentierbarhet kommer bygga på att en funktion lokalt kan approximeras med en affin funktion, där denna affina avbildning tar rollen som tangentlinjen har ovan.

Här är (en del av) grafen till den affina funktionen $f(x, y) = 5 + 2(x - 1) + 6(y - 2)$ plottad:

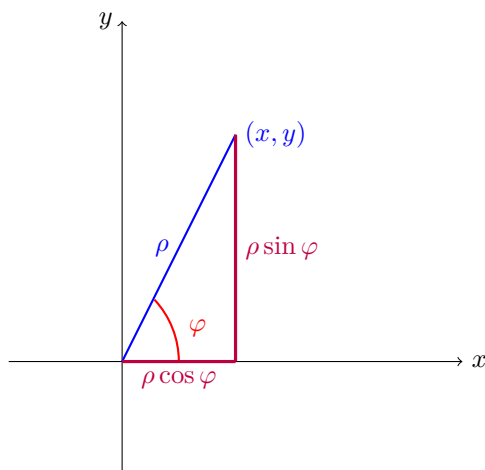


1.8 Polära/Sfäriska koordinater

- Polära koordinater:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi, \end{cases}$$

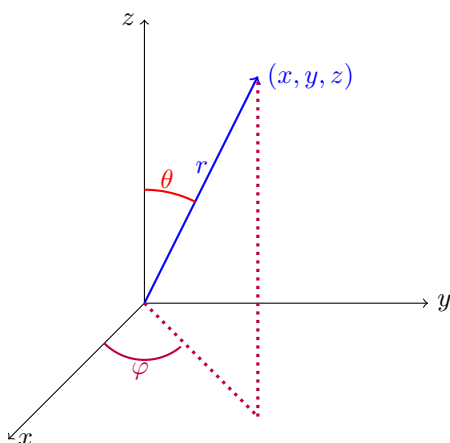
där $\rho = |(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2}$ och φ är begränsad till ett för det aktuella problemet lämpligt valt intervall av längd 2π (t.ex. $[0, 2\pi[$ eller $[-\pi, \pi[$).



- Sfäriska (rymdpolära) koordinater:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \sin \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \theta, \end{cases}$$

där $r = |(x, y, z)| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ och $0 \leq \theta \leq \pi$ (obs!) och φ är begränsad till ett för det aktuella problemet lämpligt valt intervall av längd 2π .



Notera att valet av intervall av φ i polära koordinater respektive φ, θ i sfäriska koordinater är gjort på ett sådant sätt att i princip varje punkt i planet/rummet ska ha en entydig representation. Undantaget för polära koordinater är origo, som ges av att $\rho = 0$, och φ är då inte entydigt bestämt. I sfäriska koordinater är φ godtyckligt längs hela z -axeln, och i origo är dessutom inte θ entydigt bestämt. Eftersom detta bara rör en väldigt liten mängd i respektive fall vållar detta sällan några problem i praktiken.

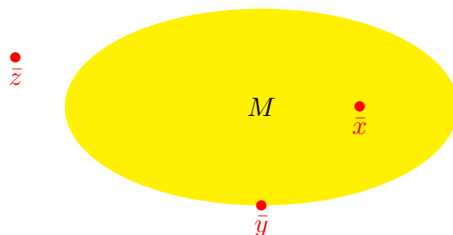
2 Gränsvärden. Kontinuitet

2.1 Gränsvärden

Definition 2.1 (Hopningspunkt). Givet en mängd $M \subset \mathbb{R}^n$ så säger vi att $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ är en hopningspunkt till M om det för varje $\delta > 0$ finns en punkt $\bar{y} \in M \setminus \{\bar{x}\}$ sådan att $|\bar{x} - \bar{y}| < \delta$.

Detta säger bara att det finns punkter andra än \bar{x} godtyckligt nära \bar{x} i M . Notera att \bar{x} inte nödvändigtvis måste ligga i M för att vara en hopningspunkt. (Det kan vara värt att notera att om det finns punkter godtyckligt nära \bar{x} i $M \setminus \{\bar{x}\}$ måste $B(\bar{x}, \delta) \cap (M \setminus \{\bar{x}\})$ innehålla oändligt många punkter för varje $\delta > 0$.)

T.ex. i nedanstående bild är \bar{x}, \bar{y} båda hopningspunkter till M , men \bar{z} är inte det.



Definition 2.2. Låt $\bar{f} : D_{\bar{f}} \rightarrow \mathbb{R}^m$ där $D_{\bar{f}} \subset \mathbb{R}^n$, och antag att \bar{a} är en hopningspunkt till $D_{\bar{f}}$. Vi säger då att \bar{f} har gränsvärde $\bar{b} \in \mathbb{R}^m$ i \bar{a} om det för varje $\varepsilon > 0$ finns $\delta > 0$ sådant att

$$|\bar{x} - \bar{a}| < \delta \text{ och } \bar{x} \in D_{\bar{f}} \setminus \{\bar{a}\} \Rightarrow |\bar{f}(\bar{x}) - \bar{b}| < \varepsilon.$$

Vi skriver i så fall

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} \bar{f}(\bar{x}) = \bar{b}.$$

Definitionen ovan är helt analog med den för fallet $m = n = 1$, och precis som där är det bäst att inte stirra sig blind på denna formalitet utan att ofta tänka på gränsvärden ganska intuitivt. Vad den säger är att \bar{f} har gränsvärde \bar{b} i \bar{a} om $\bar{f}(\bar{x})$ är **nästan lika med \bar{b}** om $\bar{x} \neq \bar{a}$ är **tillräckligt nära \bar{a}** (samt ligger i $D_{\bar{f}}$).

Om \bar{a} inte är en hopningspunkt är det inte så rimligt att prata om gränsvärde då vi går mot punkten (eftersom det skulle betyda att \bar{a} är isolerad från resten av $D_{\bar{f}}$). Det är också relativt enkelt att visa att det inte kan finnas två olika \bar{b} som uppfyller ovanstående, det vill säga gränsvärden är entydiga om de existerar. Notera också att om \bar{f} råkar vara definierad i \bar{a} så påverkar detta inte gränsvärdet med ovanstående definition. Notera att vissa böcker inte utesluter \bar{a} på detta vis, men det vanligaste är nog att detta görs.

Följande sats är det vi oftast använder, åtminstone implicit, för att visa att ett gränsvärde existerar:

Sats 2.3

Antag att h är en reellvärd funktion definierad på något intervall $]0, \varepsilon[$ där $\varepsilon > 0$ och sådan att $\lim_{t \rightarrow 0^+} h(t) = 0$. Om det finns $\delta > 0$ och en funktion $\bar{\psi}(\bar{x})$ sådana att

- $\bar{\psi}$ är begränsad på $(B(\bar{a}, \delta) \cap D_{\bar{f}}) \setminus \{\bar{a}\}$,
- $\bar{f}(\bar{x}) - \bar{b} = \bar{\psi}(\bar{x}) \cdot h(|\bar{x} - \bar{a}|)$ för alla $\bar{x} \in (B(\bar{a}, \delta) \cap D_{\bar{f}}) \setminus \{\bar{a}\}$,

då har \bar{f} gränsvärde \bar{b} i \bar{a} .

För att tillämpa satsen ska man försöka bryta ut lämplig "faktor" av $|\bar{x} - \bar{a}|$ ur $\bar{f}(\bar{x}) - \bar{b}$ för att få kvar något begränsat.

För att illustrera satsen ovan tittar vi på

$$\frac{x^3}{x^2 + y^2} = \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Eftersom $\psi(x, y) = \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$ uppfyller $|\psi(x, y)| \leq 1$ är den begränsad, och med $h(t) = t$ har vi $h(|(x, y)|) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Alltså ger satsen att

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2} = 0.$$

Normalt kommer vi dock inte införa beteckningarna ψ och h , utan bara säga att eftersom $x^3/(x^2 + y^2)^{3/2}$ är begränsad och $\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$ så blir gränsvärdet 0.

Följande sats, som följer mer eller mindre direkt av definitionen är vår standardmetod för att visa att ett gränsvärde inte existerar:

Sats 2.4

Antag att $\bar{f} : D_{\bar{f}} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ($D_{\bar{f}} \subset \mathbb{R}^n$), \bar{a} är en hopningspunkt till $D_{\bar{f}}$ och att \bar{f} har gränsvärde \bar{b} i \bar{a} . Om $\bar{r} : [c, d] \rightarrow D_{\bar{f}} \cup \{\bar{a}\}$ är en kontinuerlig parameterkurva sådan att

- $\bar{r}(c) = \bar{a}$,
- $\bar{r}(t) \in D_{\bar{f}} \setminus \{\bar{a}\}$ om $c < t \leq d$,

då gäller

$$\lim_{t \rightarrow c^+} \bar{f}(\bar{r}(t)) = \bar{b}. \tag{1}$$

Denna sats säger alltså att för alla kurvor som \bar{r} ovan måste gränsvärdet (1) **existera** och ge **samma** värde \bar{b} . Det vill säga, om vi kan hitta två olika sådana kurvor som ger olika gränsvärden får vi en motsägelse till att gränsvärdet existerar. Faktum är att om \bar{a} t.ex. är en inre punkt till $D_{\bar{f}} \cup \{\bar{a}\}$ gäller omvändningen också, det vill säga om gränsvärdet existerar och är samma längs alla sådana kurvor existerar gränsvärdet, men detta är i praktiken inte användbart för att visa att en funktion har ett gränsvärde. Notera dock att det inte räcker att det existerar längs t.ex. alla räta linjer som går in mot punkten, utan det måste vara längs alla sådana kurvor.

För att illustrera hur satsen kan tillämpas ser vi på

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

Om vi då låter $\bar{r}_1(t) = (t, 0)$ får vi (med $f(x, y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$) att

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(\bar{r}_1(t)) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^2}{t^2} = 1,$$

men med $\bar{r}_2(t) = (0, t)$ får vi istället

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(\bar{r}_2(t)) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{-t^2}{t^2} = -1.$$

Eftersom dessa värden är olika kan inte gränsvärdet existera.

När man ska undersöka ett gränsvärde måste man först försöka avgöra om man tror att gränsvärdet existerar eller ej. Om man tror att det inte existerar försöker man tillämpa sats 2.4 ovan, genom att välja två kurvor som ger olika värden på gränsvärdet.

Om man å andra sidan tror att gränsvärdet existerar får man försöka med en uppskattning. I båda fallen är ofta polära/sfäriska koordinater användbara.

Nedanstående två satser är sådant som man ofta använder implicit utan att kanske tänka på det. Bevisen är analoga med de för motsvarande satser i envariabelanalysen.

Sats 2.5

Antag att \bar{f} och \bar{g} är funktioner av n variabler som tar värden i \mathbb{R}^m , där $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} \bar{f}(\bar{x}) = \bar{b}_1$ och $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} \bar{g}(\bar{x}) = \bar{b}_2$, då gäller

(a) $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} (\alpha \bar{f}(\bar{x}) + \beta \bar{g}(\bar{x})) = \alpha \bar{b}_1 + \beta \bar{b}_2$ för alla $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

(b) $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} \bar{f}(\bar{x}) \bullet \bar{g}(\bar{x}) = \bar{b}_1 \bullet \bar{b}_2$,

(c) Om $m = 1$ och $\bar{b}_2 \neq 0$ gäller $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} \frac{\bar{f}(\bar{x})}{\bar{g}(\bar{x})} = \frac{\bar{b}_1}{\bar{b}_2}$.

(Notera att en del av påståendet är att gränsvärdena i (a) – (c) ovan existerar under dessa förutsättningar, vilket gäller så länge som \bar{a} är en hopningspunkt till $D_{\bar{f}} \cap D_{\bar{g}}$.)

Satsen om gränsvärden för sammansatta funktioner blir tyvärr nödvändigtvis krånglig att formulera, men informellt tänk: om $\bar{f}(\bar{x}) \rightarrow \bar{b}$ då $\bar{x} \rightarrow \bar{a}$ och $\bar{g}(\bar{y}) \rightarrow \bar{c}$ då $\bar{y} \rightarrow \bar{b}$ så gäller $\bar{g}(\bar{f}(\bar{x})) \rightarrow \bar{c}$ då $\bar{x} \rightarrow \bar{a}$, därför att om \bar{x} ligger nära \bar{a} så ligger $\bar{y} = \bar{f}(\bar{x})$ nära \bar{b} , och därför ligger $\bar{g}(\bar{f}(\bar{x}))$ nära \bar{c} . Problemet är att i definitionen måste $\bar{y} \neq \bar{b}$, vilket gör att vi måste kräva att $\bar{f}(\bar{x}) \neq \bar{b}$ ifall $\bar{x} \neq \bar{a}$ ligger nära \bar{a} , och dessutom måste det finnas punkter \bar{x} godtyckligt nära \bar{a} sådana att $\bar{g}(\bar{f}(\bar{x}))$ är definierat, det vill säga att \bar{a} är en hopningspunkt till $D_{\bar{g} \circ \bar{f}}$.

Sats 2.6

Antag att $\bar{f} : D_{\bar{f}} \rightarrow \mathbb{R}^m$ och $\bar{g} : D_{\bar{g}} \rightarrow \mathbb{R}^k$, \bar{a} och \bar{b} är hopningspunkter till $D_{\bar{g} \circ \bar{f}}$ respektive $D_{\bar{g}}$ och dessa uppfyller

(a) $\bar{f}(\bar{x}) \rightarrow \bar{b}$ då $\bar{x} \rightarrow \bar{a}$ och $\bar{g}(\bar{y}) \rightarrow \bar{c}$ då $\bar{y} \rightarrow \bar{b}$,

(b) det finns ett öppet klot $B(\bar{a}, \varepsilon)$ sådant att $\bar{f}(\bar{x}) \neq \bar{b}$ om $\bar{x} \in (B(\bar{a}, \varepsilon) \cap D_{\bar{f}}) \setminus \{\bar{a}\}$.

Då gäller att

$$\bar{g}(\bar{f}(\bar{x})) \rightarrow \bar{c} \text{ då } \bar{x} \rightarrow \bar{a}.$$

Undantagsfallen där antagandena att \bar{a} är en hopningspunkt till $D_{\bar{g} \circ \bar{f}}$ eller (b) ställer till problem är väldigt speciella, och är normalt inte något vi behöver bekymra oss om.

För att illustrera denna sats kan vi titta på kvoten $\sin(xy)/(xy)$. Med $g(t) = \sin t/t$ och $f(x, y) = xy$, där vi väljer $D_{\bar{f}} = \{(x, y) : xy \neq 0\}$ (så att $f(x, y) \in D_g$ för varje $(x, y) \in D_{\bar{f}}$), då gäller $g(f(x, y)) = \sin(xy)/(xy)$. Eftersom vi vet från envariabelanalysen att $g(t) \rightarrow 1$ då $t \rightarrow 0$, och $xy \rightarrow 0$ då $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ (vilket t.ex. följer av sats 2.5 (b)), så följer enligt ovanstående sats att $g(f(x, y)) = \sin(xy)/(xy) \rightarrow 1$ då $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

Det ska dock sägas att vi även här normalt inte är så pass formella, utan i praktiken skulle vi nöja oss med att säga något som följer: Eftersom

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1, \text{ och } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy = 0$$

gäller, enligt satsen om gränsvärden av sammansatta funktioner,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} = 1.$$

Vi kommer mest studera gränsvärden för reellvärda funktioner, och detsamma kan sägas om kontinuerliga funktioner. Anledningen är helt enkelt att studera dessa för vektorvärda funktioner i praktiken blir att studera vardera koordinat för sig:

Sats 2.7

Om $\bar{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m) : D_{\bar{f}} \rightarrow \mathbb{R}^m$ då gäller

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} \bar{f}(\bar{x}) = \bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m),$$

om och endast om

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} f_j(\bar{x}) = y_j$$

för varje $1 \leq j \leq m$.

Notera att definitionen av gränsvärden ovan bara gäller för punkter \bar{a} i \mathbb{R}^n och $\bar{b} \in \mathbb{R}^m$. Om vi vill ta gränsvärden när $|\bar{x}|$ går mot oändligheten är det istället följande definition som gäller:

Definition 2.8. Antag att $\bar{f} : D_{\bar{f}} \rightarrow \mathbb{R}^m$ där $D_{\bar{f}} \subset \mathbb{R}^n$, och att det för varje $R > 0$ finns punkter $\bar{x} \in D_{\bar{f}}$ med $|\bar{x}| > R$. Om $\bar{b} \in \mathbb{R}^m$ uppfyller att för varje $\varepsilon > 0$ finns $R > 0$ så att

$$|\bar{f}(\bar{x}) - \bar{b}| < \varepsilon \text{ för alla } \bar{x} \in D_{\bar{f}} \text{ med } |\bar{x}| > R,$$

i så fall säger vi att $\bar{f}(\bar{x})$ har gränsvärde \bar{b} då $|\bar{x}| \rightarrow \infty$ och skriver

$$\lim_{|\bar{x}| \rightarrow \infty} \bar{f}(\bar{x}) = \bar{b}.$$

Det första antagandet säger bara att $D_{\bar{f}}$ är obegränsat, så att det går att närma sig ∞ via $D_{\bar{f}}$. Man kan även för reellvärda funktioner definiera oegentliga gränsvärden att $f(\bar{x}) \rightarrow \infty$ eller $f(\bar{x}) \rightarrow -\infty$ då $\bar{x} \rightarrow \bar{a}$. Detta skulle då betyda att det för varje givet $R > 0$ gäller att $f(\bar{x}) > R$ respektive $f(\bar{x}) < -R$ om \bar{x} är tillräckligt nära \bar{a} .

2.2 Kontinuerliga funktioner

Definition 2.9. Om $\bar{f} : D_{\bar{f}} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ($D_{\bar{f}} \subset \mathbb{R}^n$) och \bar{a} ligger i $D_{\bar{f}}$, då sägs \bar{f} vara kontinuerlig i \bar{a} om antingen:

- \bar{a} inte är en hopningspunkt till $D_{\bar{f}}$,
eller
- $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} \bar{f}(\bar{x}) = \bar{f}(\bar{a})$.

Om \bar{f} är kontinuerlig i alla punkter i $D_{\bar{f}}$ sägs \bar{f} vara kontinuerlig.

Det är precis som med gränsvärden viktigast att först och främst få en känsla för vad kontinuitet innebär. Angående definitionen säger den första delen att om \bar{a} är isolerad från resten av $D_{\bar{f}}$ så är \bar{f} automatiskt kontinuerlig där per definition (inte ett speciellt intressant fall dock).

Notera att det precis som med gränsvärden inte räcker att kolla kontinuitet längs med linjer. Nedan kommer vi ha satser som tillsammans bl.a. säger att ändliga kombinationer av elementära funktioner från envariabelanalysen är kontinuerliga på sina definitionsområden.

Sats 2.10

Om \bar{f} är kontinuerlig i \bar{a} och \bar{g} är kontinuerlig i $\bar{f}(\bar{a})$, i så fall är den **sammansatta funktionen** $\bar{g} \circ \bar{f}$, definierad (i de punkter \bar{x} där detta är meningsfullt) via

$$(\bar{g} \circ \bar{f})(\bar{x}) = \bar{g}(\bar{f}(\bar{x})),$$

kontinuerlig i \bar{a} .

Med uttryck som $f + g$, $f \cdot g$ menas alltid funktioner definierade punktvis, t.ex. $(f + g)(\bar{x}) = f(\bar{x}) + g(\bar{x})$.

Sats 2.11

Om $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ är kontinuerliga så gäller:

- (1) $kf : M \rightarrow \mathbb{R}$ är kontinuerlig för alla $k \in \mathbb{R}$,
- (2) $f + g : M \rightarrow \mathbb{R}$ är kontinuerlig,
- (3) $f \cdot g : M \rightarrow \mathbb{R}$ är kontinuerlig,
- (4) $f/g : M \setminus \{\bar{x} \in M : g(\bar{x}) = 0\} \rightarrow \mathbb{R}$ är kontinuerlig.

Vad satserna ovan säger är helt enkelt att kontinuitet bevaras under våra vanligaste operationer på funktioner.

Sats 2.12

Låt $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($D_f \subset \mathbb{R}^n$) vara kontinuerlig.

- (1) Om D_f är kompakt (det vill säga slutet och begränsad) så är även V_f kompakt, så speciellt antar f sitt största och minsta värde på D_f .
- (2) Om D_f är sammanhängande så är V_f ett intervall (det vill säga V_f är sammanhängande, och de enda sammanhängande delmängderna till \mathbb{R} är intervallen). Så speciellt antar f alla mellanliggande värden, det vill säga om $f(\bar{x}_1) < t < f(\bar{x}_2)$ så finns \bar{x} så att $f(\bar{x}) = t$.
- (3) Om D_f är kompakt så är f likformigt kontinuerlig på D_f . Det vill säga det finns en avtagande funktion $K : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ med $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} K(\delta) = 0$ så att

$$|f(\bar{x}) - f(\bar{y})| \leq K(|\bar{x} - \bar{y}|) \text{ för alla } \bar{x}, \bar{y} \in D_f.$$

3 Differentierbarhet och Partiella derivator för reellvärda funktioner

Differentierbarhet i högre dimensioner generaliserar derivatan från envariabelanalysen. Kanske det bästa sättet att motivera definitionen utgår ifrån följande tolkning av derivatan. Antag att $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ där $D_f \subset \mathbb{R}$, då är f deriverbar i a om och endast om det finns ett reellt tal $f'(a)$ sådant att

$$R(h) = \frac{f(a+h) - f(a) - f'(a)h}{|h|} \rightarrow 0 \text{ då } h \rightarrow 0.$$

Notera att detta medför att vi har

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + R(h)|h|,$$

där den sista termen $R(h)|h|$ går fortare än linjärt mot noll (oftast är i praktiken $R(h)|h| = \mathcal{O}(h^2)$). Notera att grafen till funktionen av h som ges av

$$y = f(a) + f'(a)h,$$

är tangentlinjen till f 's graf i $(a, f(a))$. Det vill säga derivatan existerar om och endast om det finns en linje sådan att differensen mellan funktionen själv och denna linje skiljer sig med en faktor $R(h)|h|$ som går fortare än linjärt mot noll.

Det kan också vara värt att notera att ifall vi vill uttrycka ovanstående i x blir formeln:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + R(x-a)|x-a|,$$

och motsvarande kan sägas i fallet med flera variabler nedan.

Vi börjar nu med att generalisera detta till fallet då vi har en reellvärd funktion $f(x, y)$ av två variabler, så att grafen är en yta. Vi vill nu byta ut linjen ovan mot ett tangentplan istället. Notera nu att ett plan i (x, y, z) -rummet som inte är parallellt med z -axeln och som går genom punkten $(a, b, f(a, b))$ kan skrivas på formen

$$z = f(a, b) + A_1(x-a) + A_2(y-b) = f(a, b) + A_1h + A_2k,$$

(där $(h, k) = (x-a, y-b)$) på ett entydigt sätt, eftersom planet har en unik normalvektor på formen $(A_1, A_2, -1)$, och ekvationen ovan är samma sak som att

$$(A_1, A_2, -1) \bullet (x-a, y-b, z-f(a, b)) = 0,$$

vilket ju är planets ekvation på normalform.

Alltså vore en naturlig generalisering av derivator till detta fall att kräva att det finns reella tal A_1, A_2 sådana att, om vi sätter $(h, k) = (x-a, y-b)$, så gäller att

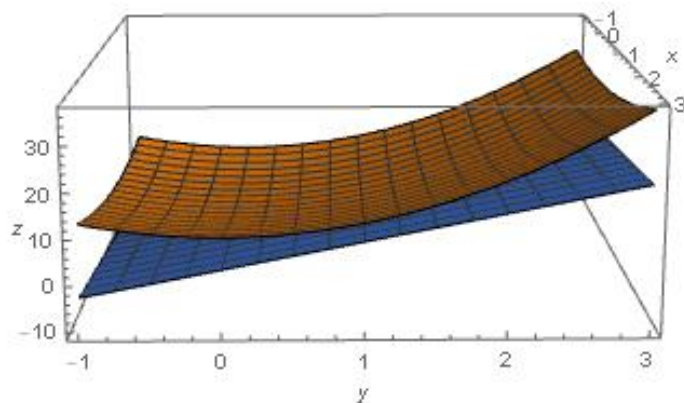
$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + A_1h + A_2k + R(h, k)|(h, k)|,$$

där

$$R(h, k) = \frac{f(a+h, b+k) - f(a, b) - A_1h - A_2k}{|(h, k)|} \rightarrow 0 \text{ då } (h, k) \rightarrow (0, 0).$$

Det vill säga att f skiljer sig från ovanstående plan med en faktor som går fortare än linjärt mot noll då $(h, k) \rightarrow (0, 0)$.

Exempel 3.1. Nedan är funktionen $f(x, y) = 1 + x^2 + 3y^2$ plottad tillsammans med sitt tangentplan i $(1, 1)$:



Notera att vi per definition har om vi låter $k = 0$ ovan:

$$\frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} = A_1 + R(h, 0)|h|/h.$$

Alltså gäller

$$A_1 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}$$

om f är differentierbar i (a, b) . Notera att detta helt enkelt är derivatan av funktionen $g(x) = f(x, b)$ som vi får om vi håller $y = b$ fixt. Detta kallas **partialderivatan** av f med avseende på x i (a, b) , skrivet

$$f'_x(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = A_1.$$

På samma sätt får vi genom att hålla $x = a$ fixt

$$f'_y(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = A_2.$$

Så om vi får en funktion $f(x, y)$ kan vi räkna ut dessa partialderivator med räknelagar från envariabelanalysen.

När det gäller frågan om differentierbarhet är det så att det inte räcker att de partiella derivatorna existerar i punkten, men om de existerar och är kontinuerliga i någon omgivning till punkten är funktionen differentierbar i denna.

Exempel 3.2. Om $f(x, y) = 3x^2y + 2xy^3 + y$, då blir

$$f'_x(x, y) = 6xy + 2y^3,$$

eftersom vi behandlar y som en konstant när vi deriverar med avseende på x , och

$$f'_y(x, y) = 3x^2 + 6xy^2 + 1,$$

då vi behandlar x som en konstant när vi deriverar med avseende på y . Eftersom vi kan se att f'_x och f'_y är kontinuerliga så vet vi att f är differentierbar i t.ex. $(0, 1)$, och om vi vill ha konstanterna A_1 och A_2 ovan i denna punkt får vi i detta fall

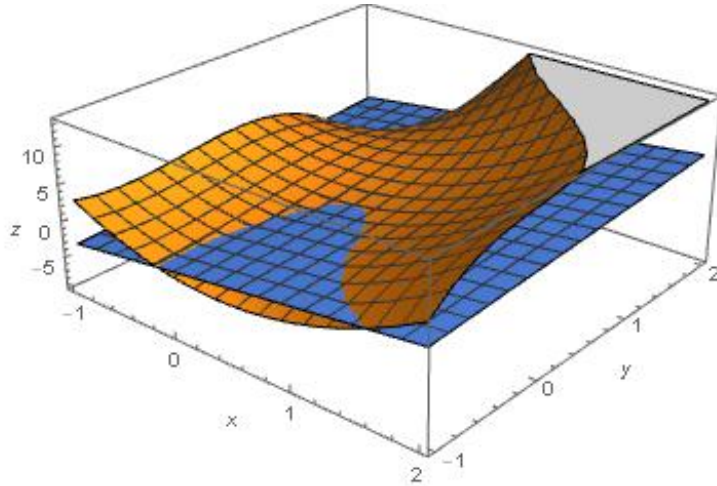
$$A_1 = f'_x(0, 1) = 2, \quad A_2 = f'_y(0, 1) = 1.$$

Alltså gäller

$$f(0+h, 1+k) = f(0, 1) + f'_x(0, 1)h + f'_y(0, 1)k + R(h, k)|(h, k)| = 1 + 2h + k + R(h, k)|(h, k)|,$$

där $R(h, k) \rightarrow 0$ då $(h, k) \rightarrow (0, 0)$.

Här nedan är en plot av funktionen och dess tangentplan i $(0, 1)$.



Ovanstående idéer generaliseras direkt till högre dimensioner också, så frågan om $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ är differentierbar i en punkt (a_1, a_2, \dots, a_n) är om $f(a_1 + h_1, a_2 + h_2, \dots, a_n + h_n)$ kan approximeras på ett "bra sätt" av en funktion på formen $f(a_1, a_2, \dots, a_n) + A_1 h_1 + A_2 h_2 + \dots + A_n h_n$ (d.v.s. en affin funktion) för några konstanter A_1, A_2, \dots, A_n lokalt kring (a_1, a_2, \dots, a_n) .

3.1 Partialderivator

Antag att $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ är en reellvärd funktion av n variabler, och att $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ är en inre punkt till D_f . Om

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1 + h, a_2, \dots, a_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n)}{h}$$

existerar säger vi att **partialderivatan** av f med avseende på x_1 existerar i \bar{a} och betecknar denna

$$f'_{x_1}(\bar{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{a}).$$

Vi definierar analogt de övriga partialderivatorna med avseende på de andra variablerna.

Notera att t.ex. $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{a})$ helt enkelt är $g'(a_1)$, där $g(t) = f(t, a_2, a_3, \dots, a_n)$, det vill säga vi håller alla variabler utom x_1 fixt. Motsvarande gäller även för övriga partialderivator. Detta gör att partialderivator beräknas som envariabelderivator, där man behandlar de variabler man inte deriverar med avseende på som konstanter.

En tolkning av partialderivatan $\partial f / \partial x_j$ är att den säger hur fort funktionen växer/avtar i x_j -riktningen.

3.2 Differentierbarhet

Definition 3.3. Antag att $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ och att $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ är en inre punkt till $D_f \subset \mathbb{R}^n$. Om det finns reella tal A_1, A_2, \dots, A_n sådana att

$$R(\bar{h}) = \frac{f(\bar{a} + \bar{h}) - f(\bar{a}) - A_1 h_1 - A_2 h_2 - \dots - A_n h_n}{|\bar{h}|} \rightarrow 0 \text{ då } \bar{h} \rightarrow \bar{0},$$

där $\bar{h} = (h_1, h_2, \dots, h_n)$, då säger vi att f är differentierbar i \bar{a} .

Observera att detta precis som tidigare ger oss formeln:

$$f(\bar{a} + \bar{h}) = \underbrace{f(\bar{a})}_{\text{Konst.}} + \underbrace{A_1 h_1 + A_2 h_2 + \dots + A_n h_n}_{\text{Linjär del}} + \underbrace{R(\bar{h})|\bar{h}|}_{\text{Felterm}}.$$

Alternativt kan vi säga att vi har en approximation av differensen $f(\bar{a} + \bar{h}) - f(\bar{a})$ med den linjära funktionen $\sum_{i=1}^n A_i h_i$, och $R(\bar{h})|\bar{h}|$ är feltermen i denna uppskattning som då går fortare än linjärt mot 0.

Det följer mer eller mindre direkt från ovanstående att om f är differentierbar i \bar{a} så är f kontinuerlig i \bar{a} .

Om $n = 3$ är funktionen $f(x, y, z)$ differentierbar i (a, b, c) om och endast om det finns reella tal A_1, A_2, A_3 och någon funktion R som går mot noll då $(h, k, r) \rightarrow (0, 0, 0)$ sådana att

$$f(a + h, b + k, c + r) = f(a, b, c) + A_1 h + A_2 k + A_3 r + R(h, k, r)|(h, k, r)|$$

Observera att alla konstanterna A_1, A_2, A_3 och funktionen R beror på punkten (a, b, c) .

Precis som i inledningen med fallet $n = 2$, där vi visade hur man får konstanterna A_1, A_2 från partialderivatorna, får vi följande sats.

Sats 3.4

Om f är differentierbar i \bar{a} så existerar alla (första ordningens) partialderivator till f i \bar{a} , och konstanterna A_i i definitionen ges av

$$A_i = f'_{x_i}(\bar{a}).$$

En följd av ovanstående sats är att om vi ska kontrollera om en funktion är differentierbar i en given punkt \bar{a} , då börjar man först med att räkna ut partialderivatorna (om dessa inte existerar är den inte differentierbar i punkten). Satsen ger oss då att konstanterna A_i i definitionen måste vara $f'_{x_i}(\bar{a})$. Sedan tittar man på kvoten

$$R(\bar{h}) = \frac{f(\bar{a} + \bar{h}) - f(\bar{a}) - A_1 h_1 - A_2 h_2 - \dots - A_n h_n}{|\bar{h}|}.$$

Då är f differentierbar i \bar{a} om och endast om denna funktion går mot 0 då $\bar{h} \rightarrow 0$.

Notera att $A_1 h_1 + A_2 h_2 + \dots + A_n h_n = (f'_{x_1}(\bar{a}), f'_{x_2}(\bar{a}), \dots, f'_{x_n}(\bar{a})) \bullet (h_1, h_2, \dots, h_n)$. I många fall är det fördelaktigt att skriva denna del som en skalärprodukt. Vektorn

$$\nabla f(\bar{a}) = (f'_{x_1}(\bar{a}), f'_{x_2}(\bar{a}), \dots, f'_{x_n}(\bar{a}))$$

kallas **gradienten** till f i \bar{a} . Notera att vi alltså kan säga att f är differentierbar i \bar{a} om och endast om

$$f(\bar{a} + \bar{h}) = f(\bar{a}) + \nabla f(\bar{a}) \bullet \bar{h} + R(\bar{h})|\bar{h}|,$$

där $R(\bar{h}) \rightarrow 0$ då $\bar{h} \rightarrow 0$. Vi kommer säga mer om den geometriska tolkningen av gradienten senare.

Nedanstående sats säger att de funktioner vi i praktiken kommer jobba med, som är ändliga kombinationer av elementära funktioner från envariabeln, är differentierbara såvida de inblandade funktionerna är deriverbara i motsvarande punkter, och vi kan räkna ut partialderivatorna, och därför även den affina approximationen, med vanliga derivationsmetoder från envariabelanalysen. Notera dock att vi får vara försiktiga när vi har en nämnare som blir noll, eller rotuttryck av uttryck som blir noll och så vidare.

Sats 3.5

Om alla (första ordningens) partialderivator till f existerar och dessa är kontinuerliga i någon omgivning till \bar{a} , då är f differentierbar i \bar{a} .

Exempel 3.6. Vi ska beräkna

$$f'_x = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{och} \quad f'_y = \frac{\partial f}{\partial y}$$

då

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - 2y^2},$$

och sedan bestämma $f'_x(0.7, 0)$ och $f'_y(0.7, 0)$, samt ange en ekvation för tangentplanet till funktionsytan i punkten som svarar mot $(x, y) = (0.7, 0)$.

Partialderivatorna:

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - 2y^2}.$$

$$f'_x = \frac{1}{2\sqrt{1 - x^2 - 2y^2}}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - 2y^2}},$$

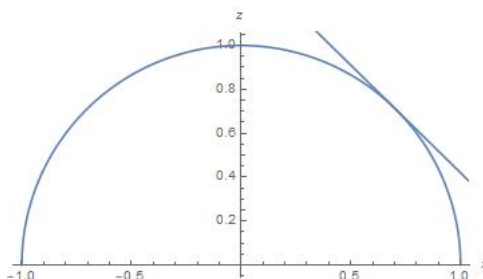
$$f'_y = \frac{1}{2\sqrt{1 - x^2 - 2y^2}}(-4y) = \frac{-2y}{\sqrt{1 - x^2 - 2y^2}}.$$

$$f'_x(0.7, 0) = \frac{-0.7}{\sqrt{1 - (0.7)^2 - 2(0)^2}} = \frac{-0.7}{\sqrt{0.51}} \approx -0.98,$$

$$f'_y(0.7, 0) = 0.$$

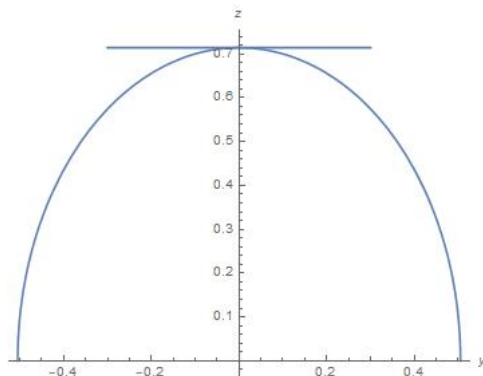
Geometrisk tolkning av $f'_x(0.7, 0)$:

$f'_x(0.7, 0)$ är derivatan av funktionen $f(x, 0) = \sqrt{1 - x^2}$ i $x = 0.7$:



Geometrisk tolkning av $f'_y(0.7, 0)$:

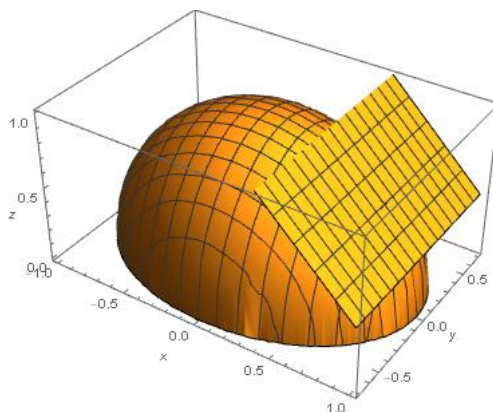
$f'_y(0.7, 0)$ är derivatan av funktionen $f(0.7, y) = \sqrt{0.51 - 2y^2}$ i $y = 0$:



Tangentplan: Vi får nu att

$$f(0.7 + h, 0 + k) \approx f(0.7, 0) + f'_x(0.7, 0)h + f'_y(0.7, 0)k = \sqrt{0.51} - \frac{0.7h}{\sqrt{0.51}}.$$

Notera i bilden nedan att kurvorna vi plottade ovan ligger på grafen till funktionen (den första i planet $y = 0$ och den andra i planet $x = 0.7$), och att tangentlinjerna som var med i dessa plottar ligger på tangentplanet.



Det kan också vara värt att notera att det följer från sats 3.5 att funktionen $f(x, y)$ är differentierbar på det öppna området $1 - x^2 - 2y^2 > 0$, d.v.s. ellipsen $x^2 + 2y^2 < 1$.

Vidare har vi att

$$\nabla f(0.7, 0) = \left(-\frac{0.7}{\sqrt{0.51}}, 0 \right).$$

3.3 Högre ordnings derivator. Klasserna C^k

Högre ordnings partialderivator definieras helt enkelt som upprepade partiella derivator. T.ex.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = (f'_{x_i})'_{x_j} = f''_{x_i x_j}.$$

Notera ordningen här dock i vänster- respektive högerledet.

Om $i = j$ skriver vi oftast istället

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}.$$

Vi kan även definiera ännu högre derivator på motsvarande sätt, som t.ex.

$$f_{x_2 x_1^2}^{(3)} = \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_2}.$$

De två första av ovanstående sägs vara av ordning 2 och den sista av ordning 3. Mer allmänt är ordningen på en partialderivata antalet deriveringar vi gör totalt.

Definition 3.7. Givet en öppen mängd D så betecknar $C^k(D)$ mängden av alla funktioner $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ som har kontinuerliga partialderivator upp till och med ordning k på D .

(Om $k = 0$ betecknar det mängden av kontinuerliga funktioner, och $C^\infty(D)$ är mängden av alla funktioner som ligger i $C^k(D)$ för alla k).

Ofta kanske vi inte specificerar mängden D , utan bara säger att en funktion är av klass \mathcal{C}^k . Detta ska då tolkas som att f ligger i $\mathcal{C}^k(D)$ för någon öppen mängd D som innehåller de punkter vi är intresserade av.

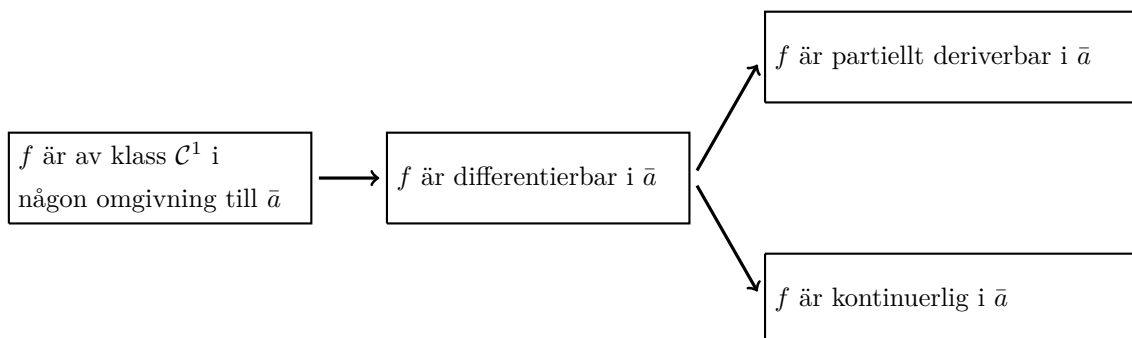
I allmänhet behöver inte $f''_{x_i x_j} = f''_{x_j x_i}$, men det visar sig att om f är av klass \mathcal{C}^2 , då spelar det inte någon roll i vilken ordning dessa derivator tas.

Sats 3.8

Om f är av klass \mathcal{C}^2 i någon omgivning till \bar{a} så gäller att

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\bar{a}).$$

Det kan vara värt att sammanfatta lite om olika egenskaper av funktioner här. Givet en reellvärd funktion $f(\bar{x})$ definierad i någon omgivning till \bar{a} , så gäller följande implikationer:



Notera speciellt att en funktion mycket väl kan vara partiellt deriverbar i en punkt utan att ens vara kontinuerlig där (låt t.ex. $f(x, y) = 1$ om $x = 0$ eller $y = 0$ och $f(x, y) = 0$ annars, som har partialderivator 0 i origo ...).

I första hand ska ni dock se till att ni förstår differentialer/partialderivator m.m. för snälla funktioner, säg \mathcal{C}^1 , och när ni behärskar detta kan ni fundera närmare på ovanstående typ av frågor.

3.4 Differential*

Vi noterar att om A_1, A_2, \dots, A_n är konstanter, då är funktionen $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ som defineras av

$$A(h_1, h_2, \dots, h_n) = A_1 h_1 + A_2 h_2 + \dots + A_n h_n = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

en linjär avbildning. Vidare vet vi att alla linjära avbildningar från \mathbb{R}^n till \mathbb{R} är på denna form, och $(A_1 \ A_2 \ \dots \ A_n)$ är matrisen till A i standardbasen. En alternativ (och ekvivalent) definition av differentierbarhet, som är oberoende av valet av bas, är därför följande

Definition 3.9. Antag att $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ och att \bar{a} är en inre punkt till $D_f \subset \mathbb{R}^n$.

Om det finns en linjär avbildning $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sådan att

$$R(\bar{h}) = \frac{f(\bar{a} + \bar{h}) - f(\bar{a}) - A\bar{h}}{|\bar{h}|} \rightarrow 0 \text{ då } \bar{h} \rightarrow 0,$$

då säger vi att f är differentierbar i \bar{a} .

A kallas då **differentialen** till f i \bar{a} och betecknas

$$df(\bar{a}) = A.$$

Vi har alltså

$$f(\bar{a} + \bar{h}) = f(\bar{a}) + df(\bar{a})\bar{h} + R(\bar{h})|\bar{h}|.$$

Slarvigare skrivet

$$f(\bar{a} + \bar{h}) \approx f(\bar{a}) + df(\bar{a})\bar{h}$$

när $\bar{h} \approx \bar{0}$, där felet i denna uppskattning går fortare än linjärt mot noll.

Från ovanstående resultat vet vi nu att

$$df(\bar{a})\bar{h} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{a})h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{a})h_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{a})h_n = \nabla f(\bar{a}) \bullet \bar{h},$$

eller om man så vill kan vi säga att

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{x}}(\bar{a}) = (f'_{x_1}(\bar{a}) \quad f'_{x_2}(\bar{a}) \quad \dots \quad f'_{x_n}(\bar{a}))$$

är matrisen i standardbasen till $df(\bar{a})$. Denna matris kallas **funktionalmatrisen** till f i \bar{a} .

Ett annat skrivsätt ni kan stöta på är följande

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n,$$

där i detta fall dx_i betecknar projektionen på x_i -axeln. Historiskt sett kommer dock denna notation snarare av att om vi ändrar (x_1, x_2, \dots, x_n) med en liten faktor $(dx_1, dx_2, \dots, dx_n)$ så ändrar sig f ungefär med storleken df . Det läggs dock ingen stor vikt vid denna notation i den här kursen.

3.5 Vissa elementära system av partiella differentialekvationer. Beräkning av potentialer till vektorfält

Vi ser först på ett enkelt exempel: hitta alla funktioner $z(x, y)$ som löser

$$\begin{cases} z'_x = 2x \\ z'_y = y. \end{cases}$$

Notera att den första ekvationen $z'_x = 2x$ medför att z måste vara på formen " x^2 +något som inte beror på x ", det vill säga " x^2 +något som med avseende på x har derivata noll".

Eftersom vi sagt att z får bero av x, y men inte några andra variabler, betyder detta att $z = x^2 + h(y)$ för en godtycklig funktion $h(y)$. För att kunna derivera denna måste vi anta att $h(y)$ är deriverbar. Om vi deriverar detta uttryck får vi att $z'_y = h'(y)$, och den andra ekvationen säger nu att $h'(y) = y$. Det vill säga $h(y) = y^2/2 + c$ för en godtycklig konstant c . Slutsatsen blir att allmänna lösningen ges av $z = x^2 + y^2/2 + c$.

Det man måste förstå här är att integrationskonstanter just blir konstanta med avseende på den variabel man integrerar med avseende på, inte med avseende på den eller de andra variablerna som är med i problemet.

Ovanstående problem kan på vektorform skrivas som: bestäm alla $z(x, y)$ sådana att $(z'_x, z'_y) = (2x, y)$. Uttrycket $(2x, y)$ är ett exempel på ett så kallat vektorfält i \mathbb{R}^2 , och en lösning z till denna ekvation kallas en potential till vektorfältet. Mer allmänt kallas ett uttryck på formen

$$\bar{f}(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

ett vektorfält i $D_{\bar{f}} \subset \mathbb{R}^n$, och lösningar z till

$$z'_{x_i} = f_i \text{ för varje } i = 1, 2, \dots, n$$

kallas en potential till vektorfältet. Notera dock att i de flesta fall så finns det inga lösningar till en sådan ekvation. Det vill säga de flesta vektorfälten har inte någon potential (t.ex. om det stått $z'_y = x$ istället i exemplet ovan hade vi kommit till $h'(y) = x$ vilket inte går att lösa eftersom vänsterledet bara får bero på y).

4 Funktionalmatriser. Kedjeregeln. Partiella differentialekvationer

4.1 Differentierbarhet för vektorvärda funktioner. Funktionalmatris

Definition 4.1. Antag att $\bar{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m) : D_{\bar{f}} \rightarrow \mathbb{R}^m$ och att \bar{a} är en inre punkt till $D_{\bar{f}} \subset \mathbb{R}^n$. Om det finns en $m \times n$ -matris A sådan att

$$\bar{R}(\bar{h}) = \frac{\bar{f}(\bar{a} + \bar{h}) - \bar{f}(\bar{a}) - A\bar{h}}{|\bar{h}|} \rightarrow \bar{0} \text{ då } \bar{h} \rightarrow \bar{0},$$

då säger vi att \bar{f} är differentierbar i \bar{a} .

A kallas då **funktionalmatrisen** till \bar{f} i \bar{a} och betecknas

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}}(\bar{a}) = \frac{\partial (f_1, f_2, \dots, f_m)}{\partial (x_1, x_2, \dots, x_n)}(\bar{a}) = A.$$

Vi har alltså

$$\bar{f}(\bar{a} + \bar{h}) = \underbrace{\bar{f}(\bar{a})}_{\text{Konst.}} + \underbrace{\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}} \bar{h}}_{\text{Linjär del}} + \underbrace{\bar{R}(\bar{h})|\bar{h}|}_{\text{Felterm}}.$$

Funktionalmatrisen kallas ibland även Jacobimatrisen, eller Jacobianen. Notera också att detta i fallet $m = 1$ är ekvivalent med vår tidigare definition om vi låter $A = (A_1 \ A_2 \ \dots \ A_n)$.

* Vi kan notera att vi i definitionen av differentierbarhet, i analogi med diskussionen om differentierbarhet för reellvärda funktioner, kunde ha låtit A vara en linjär avbildning $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ istället för en matris. Denna avbildning betecknas då $d\bar{f}(\bar{a})$ och kallas differentialen till \bar{f} i \bar{a} . Funktionalmatrisen är då helt enkelt matrisen till denna linjära avbildning i standardbaserna till \mathbb{R}^n respektive \mathbb{R}^m .

Sats 4.2

Om $\bar{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m) : D_{\bar{f}} \rightarrow \mathbb{R}^m$ är differentierbar i \bar{a} , då existerar partialderivatorna

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(\bar{a})$$

för alla $1 \leq j \leq m$ och $1 \leq k \leq n$, och

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}}(\bar{a}) = \frac{\partial (f_1, f_2, \dots, f_m)}{\partial (x_1, x_2, \dots, x_n)}(\bar{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{a}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{a}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{a}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{a}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{a}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{a}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\bar{a}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\bar{a}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\bar{a}) \end{pmatrix}.$$

För att se varför detta gäller, notera (då det är ganska klart från definitionen att \bar{f} är differentierbar om och endast om varje f_j är det) att enligt tidigare resultat har vi

$$f_j(\bar{a} + \bar{h}) = f_j(\bar{a}) + \nabla f_j(\bar{a}) \bullet \bar{h} + R_j(\bar{h})|\bar{h}|,$$

för varje j . Alltså får vi om vi sätter in gradienterna i raderna i en matris

$$\begin{pmatrix} f_1(\bar{a} + \bar{h}) \\ f_2(\bar{a} + \bar{h}) \\ \vdots \\ f_m(\bar{a} + \bar{h}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(\bar{a}) \\ f_2(\bar{a}) \\ \vdots \\ f_m(\bar{a}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} - & \nabla f_1(\bar{a}) & - \\ - & \nabla f_2(\bar{a}) & - \\ \vdots & & \\ - & \nabla f_m(\bar{a}) & - \end{pmatrix} \bar{h} + \begin{pmatrix} R_1(\bar{h}) \\ R_2(\bar{h}) \\ \vdots \\ R_m(\bar{h}) \end{pmatrix} |\bar{h}| = \bar{f}(\bar{a}) + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}}(\bar{a})\bar{h} + \bar{R}(\bar{h})|\bar{h}|.$$

Låt oss bara skriva upp de två specialfallen då $m = n = 2$ respektive 3. Om vi har funktioner $u(x, y)$ och $v(x, y)$ så gäller

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Om vi har funktioner $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ och $w(x, y, z)$ så gäller

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

4.2 Kedjeregeln

Vi börjar med att titta på ett enkelt specialfall. Antag att $f(u, v) = g(u) + h(v)$ och att vi dessutom får $u = \alpha(x)$ och $v = \beta(x)$, där x är en reell variabel. Om vi sätter samman detta får vi

$$f(u, v) = f(\alpha(x), \beta(x)) = g(\alpha(x)) + h(\beta(x)).$$

Om vi vill derivera detta med avseende på x får vi

$$\frac{d}{dx} f(\alpha(x), \beta(x)) = g'(\alpha(x))\alpha'(x) + h'(\beta(x))\beta'(x),$$

där vi nu tillämpat kedjeregeln från envariabelanalysen. Notera nu att g' är precis partialderivatan av f med avseende på u och h' är partialderivatan av f med avseende på v . Alltså gäller i detta fall

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f(\alpha(x), \beta(x)) = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{dv}{dx},$$

där vi slarvigt ser f som en funktion av x (men notera att vi med detta per definition menar den sammansatta funktionen ovan) och använder att $du/dx = \alpha'(x)$ och $dv/dx = \beta'(x)$. Det visar sig att denna formel är korrekt även om f inte är på denna speciella form. Detta och mer allmänna fall av hur differentieringar till sammansatta funktioner fås fram är vad kedjeregeln nedan säger.

Nedan formulerar vi kedjeregeln utan att skriva ut antaganden om differentierbarhet. En mer formell formulering kommer i sats 4.4 nedan.

Sats 4.3 (Kedjeregeln)

Om den reellvärda funktionen f beror på m variabler (u_1, u_2, \dots, u_m) som i sin tur beror på n variabler (x_1, x_2, \dots, x_n) då gäller

$$\frac{\partial f}{\partial x_r} = \frac{\partial f}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_r} + \frac{\partial f}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_r} + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_m} \frac{\partial u_m}{\partial x_r}. \quad (2)$$

* Framförallt när vi ska tillämpa kedjeregeln för att räkna ut högre ordnings derivator måste man förstå att vi kan stoppa in "vad som helst" i formeln istället för f som är differentierbart. En del kan föredra att skriva regeln ovan i termer av differentialoperatorer:

$$\frac{\partial}{\partial x_r} = \frac{\partial u_1}{\partial x_r} \frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_r} \frac{\partial}{\partial u_2} + \dots + \frac{\partial u_m}{\partial x_r} \frac{\partial}{\partial u_m}.$$

Låt oss titta på några specialfall av formeln (2) ovan:

(a) $m = 2, n = 1$: $f(u, v)$ där $\begin{cases} u = u(x) \\ v = v(x) \end{cases}$ ger $\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{dv}{dx}$.

(b) $m = n = 2$: $f(u, v)$ där $\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}$ ger $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \end{cases}$.

(c) $m = n = 3$: $f(u, v, w)$ där $\begin{cases} u = u(x, y, z) \\ v = v(x, y, z) \\ w = w(x, y, z) \end{cases}$ ger t.ex. $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x}$.

Alternativt kan man skriva t.ex. ekvationen i (a) som $f'_x = f'_u u'_x + f'_v v'_x$.

OBS! Egentligen är ju f en funktion av u_i :na som i sin tur är funktioner av x_r :na. När vi skriver förkortat $\partial f / \partial x_r$ ovan menar vi egentligen $\partial f \circ \bar{u} / \partial x_r$.

Notera också att \bar{u} har dubbla roller här, dels som variablerna i f och dels som funktioner av variablerna \bar{x} . Här måste man vara försiktig så man inte blandar ihop saker. I klurigare fall är det ofta säkrare att införa namn för funktionerna som variablerna u_j beror på, säg $u_j = g_j(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Notera slutligen att satsen ovan inte är fullständigt formulerad. Ska man vara noga så ska även antagandet att f är differentierbar i $\bar{u}(\bar{a})$, där \bar{u} i sin tur är differentierbar i \bar{a} vara med, och formeln (2) blir då om man skriver ut allt

$$\frac{\partial f \circ \bar{u}}{\partial x_r}(\bar{a}) = \sum_{l=1}^m \frac{\partial f}{\partial u_l}(\bar{u}(\bar{a})) \cdot \frac{\partial u_l}{\partial x_r}(\bar{a}).$$

Detta blir dock snabbt ohanterligt och vi tillåter det mindre formella uttrycket i (2). Det är dock viktigt att komma ihåg att det är ovanstående man egentligen menar.

Mer allmänt gäller följande kedjeregeln för vektorvärda funktioner:

Sats 4.4 (Kedjeregeln, allmän form)

Om \bar{u} är differentierbar i \bar{a} och \bar{g} är differentierbar i $\bar{u}(\bar{a})$ då är $\bar{g} \circ \bar{u}$ differentierbar i \bar{a} med

$$\frac{\partial(\bar{g} \circ \bar{u})}{\partial \bar{x}}(\bar{a}) = \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{u}}(\bar{u}(\bar{a})) \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}(\bar{a}).$$

På komponentform blir detta (där \bar{g} beror på m variabler (u_1, u_2, \dots, u_m) som i sin tur beror på n variabler (x_1, x_2, \dots, x_n)):

$$\frac{\partial g_l}{\partial x_r} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial g_l}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_r}. \quad (3)$$

För att förklara rimligheten i denna sats kom ihåg att differentierbarheten för de respektive funktionerna informellt uttryckt betyder att

$$\begin{aligned} \bar{u}(\bar{a} + \bar{h}) &\approx \bar{u}(\bar{a}) + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}(\bar{a})\bar{h}, \\ \bar{g}(\bar{u}(\bar{a}) + \bar{k}) &\approx \bar{g}(\bar{u}(\bar{a})) + \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{u}}(\bar{u}(\bar{a}))\bar{k}. \end{aligned}$$

Alltså får vi

$$\bar{g}(\bar{u}(\bar{a} + \bar{h})) \approx \bar{g}(\bar{u}(\bar{a})) + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}(\bar{a})\bar{h} \approx \bar{g}(\bar{u}(\bar{a})) + \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{u}}(\bar{u}(\bar{a}))\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}(\bar{a})\bar{h}\right),$$

där vi först använde den första approximationen och i andra steget satte in $\bar{k} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}(\bar{a})\bar{h}$. (Ska detta göras om till ett formellt bevis får man också införa feltermen och hålla koll på dem vilket gör argumentet lite längre, men med samma idé.)

Om vi nu tittar på vad detta i praktiken blir när vi multiplicerar matriserna låt

$$\bar{u}(x_1, x_2, \dots, x_n) = (u_1(x_1, x_2, \dots, x_n), u_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, u_m(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

respektive

$$\bar{g}(u_1, u_2, \dots, u_m) = (g_1(u_1, u_2, \dots, u_m), g_2(u_1, u_2, \dots, u_m), \dots, g_k(u_1, u_2, \dots, u_m)).$$

Då får vi

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u_m}{\partial x_1} & \frac{\partial u_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{u}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \frac{\partial g_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial u_m} \\ \frac{\partial g_2}{\partial u_1} & \frac{\partial g_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial u_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial u_1} & \frac{\partial g_k}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial u_m} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial x_1} & \frac{\partial g_k}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial x_n} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \frac{\partial g_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial u_m} \\ \frac{\partial g_2}{\partial u_1} & \frac{\partial g_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial u_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial u_1} & \frac{\partial g_k}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial u_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u_m}{\partial x_1} & \frac{\partial u_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m \frac{\partial g_1}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} & \sum_{i=1}^m \frac{\partial g_1}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_2} & \cdots & \sum_{i=1}^m \frac{\partial g_1}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_n} \\ \sum_{i=1}^m \frac{\partial g_2}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} & \sum_{i=1}^m \frac{\partial g_2}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_2} & \cdots & \sum_{i=1}^m \frac{\partial g_2}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^m \frac{\partial g_k}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} & \sum_{i=1}^m \frac{\partial g_k}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_2} & \cdots & \sum_{i=1}^m \frac{\partial g_k}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_n} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

Om vi nu tittar på varje komponent för sig får vi formel (3) i satsen.

* Om vi formulerar differentierbart i termer av linjära avbildningar kan kedjeregeln istället skrivas

$$d(\bar{g} \circ \bar{u})(\bar{a}) = d\bar{g}(\bar{u}(\bar{a})) \circ d\bar{u}(\bar{a}),$$

där sista ledet är sammansättningen mellan de linjära avbildningarna $d\bar{g}$ i $\bar{u}(\bar{a})$ och $d\bar{u}$ i \bar{a} .

4.3 Koordinattransformationer och Partiella Differentialekvationer

Vi kommer använda kedjeregeln till att göra variabelbyten i vissa partiella differentialekvationer. Det handlar inte om någon teori för detta, utan bara att lösa en ekvation med hjälp av ett föreslaget variabelbyte.

T.ex. antag att vi vill lösa

$$2xz'_x - yz'_y = y^2.$$

Genom att införa variablerna

$$\begin{cases} u = xy^2 \\ v = x \end{cases}$$

kan man via kedjeregeln visa att

$$2xz'_x - yz'_y = 2x \frac{\partial z}{\partial v} = y^2,$$

vilket ger

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{y^2}{2x} = \frac{u}{2v^2}.$$

Detta medför att $z = -\frac{u}{2v} + h(u) = -\frac{y^2}{2x} + h(xy^2)$.

När man gör ett sådant variabelbyte är det viktigt att det är inverterbart för att ovanstående ska vara OK.

Problemet är att de funktioner vi får fram i slutändan är alla lösningar på formen $z(u(x, y), v(x, y))$, men om sambanden inte är inverterbara kan det finnas funktioner $f(x, y)$ som inte kan skrivas på denna form.

Notera dock att ni inte behöver verifiera i en sådan uppgift där ni får ett föreslaget variabelbyte att det är inverterbart, utan det ska ses som underförstått.

5 Riktningderivator. Gradienter

Vi påminner om definitionen av **gradienten** till en reellvärd funktion f i n variabler i en punkt \bar{a} :

$$\nabla f(\bar{a}) = (f'_{x_1}(\bar{a}), f'_{x_2}(\bar{a}), \dots, f'_{x_n}(\bar{a})).$$

Vi kommer också ihåg att f är differentierbar i \bar{a} om och endast om

$$f(\bar{a} + \bar{h}) = f(\bar{a}) + \nabla f(\bar{a}) \bullet \bar{h} + R(\bar{h})|\bar{h}|$$

för någon funktion $R(\bar{h})$ som går mot noll då $\bar{h} \rightarrow 0$.

• **Riktningderivata:** Om \bar{n} är en vektor i \mathbb{R}^n med **längd 1** (OBS!) så definieras riktningderivatan i \bar{a} i riktning \bar{n} till f (om den existerar) som

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{a} + h\bar{n}) - f(\bar{a})}{h} = f'_{\bar{n}}(\bar{a}).$$

Notera att partialderivator helt enkelt är riktningderivator när vi tar \bar{n} att vara en av vektorerna i standardbasen:

$$f'_{x_j} = f'_{\bar{e}_j}.$$

Vi kan vidare notera att riktningderivatan av $f(\bar{x})$ ovan är $g'(0)$ där

$$g(t) = f(\bar{a} + t\bar{n}),$$

där vi bara tittar på funktionen f längs linjen som på parameterform ges av $\bar{a} + t\bar{n}$ (som går genom punkten \bar{a} då $t = 0$ och har riktning \bar{n}). Det är viktigt här att \bar{n} har längd 1, för detta bevarar längdskalan så att avståndet mellan \bar{a} och $\bar{a} + t\bar{n}$ är $|t|$.

Sats 5.1

Om f är differentierbar i \bar{a} så existerar $f'_{\bar{n}}(\bar{a})$ och ges av

$$f'_{\bar{n}}(\bar{a}) = \nabla f(\bar{a}) \bullet \bar{n}.$$

För att visa detta notera att om f är differentierbar i \bar{a} gäller

$$f(\bar{a} + h\bar{n}) = f(\bar{a}) + \nabla f(\bar{a}) \bullet (h\bar{n}) + R(h\bar{n})|h\bar{n}|.$$

Eftersom $\nabla f(\bar{a}) \bullet (h\bar{n}) = h\nabla f(\bar{a}) \bullet \bar{n}$ följer direkt av riktningderivatans definition att satsen gäller. Ett annat alternativ är att se detta via kedjeregeln och funktionen $g(t)$ ovan:

$$g'(t) = \nabla f(\bar{a} + t\bar{n}) \bullet \bar{n},$$

vilket ger

$$f'_{\bar{n}}(\bar{a}) = g'(0) = \nabla f(\bar{a}) \bullet \bar{n}.$$

Anledningen till kravet att \bar{n} ska ha längd 1 i definitionen ovan är alltså att vi då har $|h\bar{n}| = |h||\bar{n}| = |h|$, vilket gör att längden på steget från \bar{a} vi tar är just $|h|$. Får ni en uppgift där ni ska räkna ut en riktningderivata med en riktning $\bar{v} \neq \bar{0}$ måste ni först normera \bar{v} , det vill säga införa $\bar{n} = \bar{v}/|\bar{v}|$, eller vad som blir samma sak, använda formeln

$$f'_{\bar{v}}(\bar{a}) = \frac{\nabla f(\bar{a}) \bullet \bar{v}}{|\bar{v}|}.$$

• **Geometrisk tolkning av gradienten:** Gradienten ∇f pekar i den riktning i vilken funktionen f växer snabbast, det vill säga i den riktning som har störst riktningderivata, och storleken på denna riktningderivata är $|\nabla f|$.

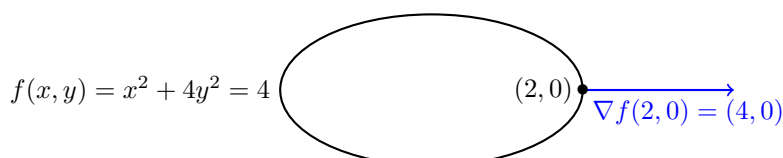
Detta beror helt enkelt på att den enhetsvektor \bar{n} som maximerar $\nabla f(\bar{a}) \bullet \bar{n}$ är just $\bar{n} = \nabla f(\bar{a})/|\nabla f(\bar{a})|$, under förutsättning att $\nabla f(\bar{a}) \neq \bar{0}$. Om $\nabla f(\bar{a}) = \bar{0}$ är alla riktningderivator 0 och man kallar då \bar{a} en **kritisk** eller **stationär punkt**.

5.1 Nivåkurvor/ytor

Om $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ där $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ och vi ser på nivåytan (kurvan då $n = 2$) $f(\bar{x}) = c$ i Ω så gäller att om \bar{a} ligger på denna och f har kontinuerliga partialderivator i en omgivning till \bar{a} med $\nabla f(\bar{a}) \neq \bar{0}$ så är $\nabla f(\bar{a})$ en normalvektor till nivåytan i \bar{a} . Anledningen är helt enkelt att i de riktningar \bar{v} som tangerar ytan i \bar{a} kommer funktionen lokalt vara nästan konstant $= c$ så riktningsderivatan $\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(\bar{a}) = \nabla f(\bar{a}) \bullet \bar{v} = 0$. Speciellt får vi:

- Om $n = 2$ och $\bar{a} = (a, b)$ ger $\nabla f(a, b) \bullet (x - a, y - b) = 0$ tangentlinjen på normalform till nivåkurvan i (a, b) ,
- Om $n = 3$ och $\bar{a} = (a, b, c)$ ger $\nabla f(a, b, c) \bullet (x - a, y - b, z - c) = 0$ tangentplanet på normalform till nivåytan i (a, b, c) .

Nedan ser vi ett exempel med $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ och hur gradienten är normal till nivåkurvan $f(x, y) = 4$ i $(2, 0)$:



Det kan vara värt att notera här att om vi har t.ex. en nivåkurva tittar vi på en ekvation $f(x, y) = c$, men gradienten $\nabla f(x, y)$ räknas alltså ut för funktionen i sig (det vill säga ekvationen kommer inte in här) vilket ger oss en vektor i planet för varje (x, y) . Om vi sätter in en punkt (a, b) som ligger på nivåkurvan, det vill säga $f(a, b) = c$, och placerar vektorn $\nabla f(a, b)$ med start i punkten (a, b) , då pekar den i normalriktningen till kurvan.

6 Taylors formel. Lokala extrempunkter

Vi kommer nedan vara intresserade av att förstå en reellvärd funktion f lokalt kring en **inre punkt** \bar{a} till f 's definitionsområde, så det är ett stående antagande i detta kapitel att \bar{a} är en sådan punkt.

6.1 Polynom i flera variabler

Ett polynom i två variabler är en funktion som kan skrivas som en (ändlig) linjärkombination av termer på formen $x^k y^l$, där k, l är icke-negativa heltal. Graden av $x^k y^l$ är $k + l$, och graden av ett polynom definieras som den högsta graden av dess termer. Så t.ex. är

$$p(x, y) = 3x^3 + 4x^2y^4 + y^2$$

ett polynom av grad 6 (mittentermen har högsta grad $2 + 4$).

Polynom av flera variabler definieras på ett analogt sätt, så t.ex. är

$$p(x, y, z) = 3x^2z - 4yz^3 + 7xy^3z^4$$

ett polynom av grad $1 + 3 + 4 = 8$ i tre variabler.

6.2 Taylors formel

Givet en reellvärd funktion f av n variabler så definierar vi det k :te **Taylorpolynomet** till f i en punkt $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$ som det unika polynom p_k av grad högst k och sådant att p_k och alla dess partialderivator upp till och med ordning k är lika med motsvarande för funktionen f i punkten \bar{a} . Följande sats kan visas, som generaliserar satsen från envariabelanalysen:

Sats 6.1 (Taylor)

Om f har kontinuerliga partialderivator i en omgivning till \bar{a} upp till och med grad $k + 1$ så gäller

$$(*) \quad f(\bar{x}) = p_k(\bar{x}) + b(\bar{x})|\bar{x} - \bar{a}|^{k+1},$$

där p_k är det k :e Taylorpolynomet till f i \bar{a} och $b(\bar{x})$ är begränsad i någon omgivning till \bar{a} .

Vidare är p_k det enda polynomet av grad $\leq k$ som uppfyller (*).

Vi använder ibland också begreppet **stora ordo**:

$$b(\bar{x})|\bar{x} - \bar{a}|^{k+1} = \mathcal{O}(|\bar{x} - \bar{a}|^{k+1})$$

om $b(\bar{x})$ är begränsad nära \bar{a} . Ordokalkyl är dock ingen stor del av denna kurs, men kan ibland vara användbart för att få fram utvecklingar via standardutvecklingar från envariabelanalysen. Det kan vara värt att notera att vi t.ex. i två dimensioner har, eftersom $|x| \leq |(x, y)|$ och $|y| \leq |(x, y)|$,

$$|cx^k y^l| = |c||x|^k |y|^l \leq |c|||(x, y)|^k |(x, y)|^l = |c|||(x, y)|^{k+l} = \mathcal{O}(|(x, y)|^{k+l}).$$

Det vill säga alla termer av ordning $k + l$ är $\mathcal{O}(|(x, y)|^{k+l}) = \mathcal{O}(\rho^{k+l})$. Motsvarande kan sägas även i högre dimensioner, samt för andra punkter än origo.

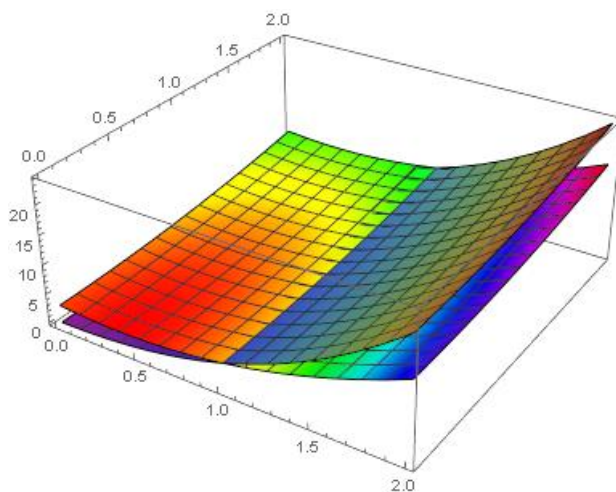
Formeln för p_k i allmänhet är lite stökig, och vi kommer **främst vara intresserade av $k = 2$** för att göra lokala undersökningar. I två variabler ges andra ordningens Taylorpolynom p_2 till f i (a, b) av

$$\begin{aligned} p_2(x, y) &= f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) + \\ &\quad \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)(x - a)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)(x - a)(y - b) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)(y - b)^2. \end{aligned}$$

Exempel 6.2. Om vi tittar på $f(x, y) = x^3 + 3x^2 + y^2$ får vi efter lite räknande $f(1, 1) = 5$, $f'_x(1, 1) = 5$, $f'_y(1, 1) = 2$, $f''_{x^2}(1, 1) = 8$, $f''_{xy}(1, 1) = 0$ och $f''_{y^2}(1, 1) = 2$. Alltså gäller att Taylorpolynomet av ordning 2 till f i $(1, 1)$ ges av

$$p_2(x, y) = 5 + 5(x - 1) + 2(y - 1) + 4(x - 1)^2 + (y - 1)^2.$$

Här nedan är en plot av f och p_2 :



Precis som i en variabel är det ofta, såvida inte $(a, b) = (0, 0)$, värt att göra ett variabelbyte: $x = a + h$
 $y = b + k$ så att vi får **Taylor's formel**:

$$\begin{aligned} f(a + h, b + k) &= f(a, b) + \\ &+ \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)k + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)h^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)hk + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)k^2 \\ &+ \mathcal{O}(|(h, k)|^3). \end{aligned}$$

Notera att den tredje raden ovan kan skrivas på formen

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)h^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)hk + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)k^2 = \\ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \bar{h}^t H(\bar{a}) \bar{h}, \end{aligned}$$

där $\bar{h} = (h, k)$ och $H(\bar{a})$ betecknar den så kallade Hessianen till f i (a, b) .

Om vi nu har en funktion $f(\bar{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ av n variabler, och vi låter $H(\bar{a})$ vara matrisen som på plats ij har andraderivatan

$$f''_{x_j x_i}(\bar{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{a}),$$

då vet vi att denna matris är symmetrisk, eftersom det inte spelar någon roll i vilken ordning vi tar partialderivatorna (om vi antar att f är av klass \mathcal{C}^2 nära punkten \bar{a}). T.ex. om vi får en funktion $f(x, y, z)$ av tre variabler (x, y, z) ges $H(a, b, c)$ av

$$H(a, b, c) = \begin{pmatrix} f''_{x^2}(a, b, c) & f''_{xy}(a, b, c) & f''_{xz}(a, b, c) \\ f''_{xy}(a, b, c) & f''_{y^2}(a, b, c) & f''_{yz}(a, b, c) \\ f''_{xz}(a, b, c) & f''_{yz}(a, b, c) & f''_{z^2}(a, b, c) \end{pmatrix}.$$

Då visar det sig att vi kan skriva Taylorutvecklingen av ordning två på formen

$$f(\bar{a} + \bar{h}) = f(\bar{a}) + \nabla f(\bar{a}) \bullet \bar{h} + \frac{1}{2} \bar{h}^t H(\bar{a}) \bar{h} + \mathcal{O}(|\bar{h}|^3).$$

Observera dock att i uttrycket $\nabla f(\bar{a}) \bullet \bar{h}$ ska \bar{h} behandlas som en vektor i \mathbb{R}^n , medan det i matrismultiplikationen $\bar{h}^t H(\bar{a}) \bar{h}$ ska behandlas som en kolumnmatris.

6.3 Några ord om beviset av Taylor's sats*

I princip följer Taylor's sats i flera variabler från satsen i en variabel genom att fixera \bar{x} och $\bar{h} \neq \bar{0}$ och titta på funktionen

$$g(t) = f(\bar{x} + t\bar{h}/|\bar{h}|),$$

av en variabel, och använda Taylor's sats från en variabel på denna, samt kedjeregeln. T.ex. om vi tillämpar kedjeregeln får vi efter lite arbete

$$g'(t) = \frac{\nabla f(\bar{x} + t\bar{h}) \bullet \bar{h}}{|\bar{h}|}$$

och

$$g''(t) = \frac{\bar{h}^t H(\bar{x} + t\bar{h}) \bar{h}}{|\bar{h}|^2}.$$

Så med $t = 0$ får vi

$$g(0) = f(\bar{x}), \quad g'(0) = \frac{\nabla f(\bar{x}) \bullet \bar{h}}{|\bar{h}|}, \quad g''(0) = \frac{\bar{h}^t H(\bar{x}) \bar{h}}{|\bar{h}|^2}.$$

Enligt Taylors sats från envariabeln gäller

$$g(t) = g(0) + g'(0)t + \frac{1}{2}g''(0)t^2 + \mathcal{O}(t^3),$$

så med $t = |\bar{h}|$ får vi

$$f(\bar{x} + \bar{h}) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x}) \bullet \bar{h} + \frac{1}{2}\bar{h}^t H(\bar{x}) \bar{h} + \mathcal{O}(|\bar{h}|^3),$$

vilket i princip visar satsen till ordning 2 i alla fall (ska man vara riktigt noga får man vara lite försiktig med ordo-termen, och normalt utgår man istället från Lagranges restterm).

6.4 Taylorpolynom av högre grad*

Om $n = 2$ har vi formeln för Taylorpolynomet av ordning k till f i (a, b) :

$$\begin{aligned} p_k(x, y) &= f(a, b) + \\ &+ \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)(x - a)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)(x - a)(y - b) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)(y - b)^2 + \dots + \\ &+ \sum_{m=0}^k \frac{1}{m!(k-m)!} \frac{\partial^k f}{\partial x^m \partial y^{k-m}}(a, b)(x - a)^m (y - b)^{k-m}. \end{aligned}$$

För ett allmänt n ges p_k av att det är det unika polynom av grad högst k sådant att för alla $k_1 + k_2 + \dots + k_n \leq k$ ges koefficienten framför $(x_1 - a_1)^{k_1} (x_2 - a_2)^{k_2} \dots (x_n - a_n)^{k_n}$ av

$$\frac{1}{k_1! k_2! \dots k_n!} \frac{\partial^{k_1+k_2+\dots+k_n} f}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n}}(\bar{a}).$$

6.5 Lokala extrempunkter

Definition 6.3. Om f är en reellvärd funktion av n variabler och \bar{a} uppfyller att det finns $\varepsilon > 0$ så att

$$f(\bar{x}) \leq f(\bar{a}) \text{ för alla } \bar{x} \in B(\bar{a}, \varepsilon)$$

så kallas \bar{a} ett **lokalt maximum** till f .

Om det finns $\varepsilon > 0$ så att

$$f(\bar{x}) < f(\bar{a}) \text{ för alla } \bar{x} \in B(\bar{a}, \varepsilon) \setminus \{\bar{a}\}$$

så kallas \bar{a} ett **lokalt strängt maximum** till f . Med omvända olikheter definieras lokala (stränga) minimum också.

Sats 6.4

Om \bar{a} är ett lokalt max/min till f och f är differentierbar i \bar{a} , då gäller att $\nabla f(\bar{a}) = \bar{0}$.

Detta följer direkt av att f annars växer i gradientens riktning och avtar i den motsatta riktningen.

Punkter \bar{x} där $\nabla f(\bar{x}) = \bar{0}$ kallas **kritiska eller stationära punkter** till f .

Om \bar{a} är en kritisk punkt och f är av klass \mathcal{C}^3 nära \bar{a} så får vi från Taylors sats att

$$f(\bar{a} + \bar{h}) = f(\bar{a}) + \frac{1}{2}\bar{h}^t H(\bar{a})\bar{h} + \mathcal{O}(|\bar{h}|^3) = f(\bar{a}) + \frac{1}{2}Q(\bar{h}) + \mathcal{O}(|\bar{h}|^3).$$

Q är här den kvadratiske form som har Hessianen som matris.

Sats 6.5

Om \bar{a} är en kritisk punkt till f , så gäller följande:

- Om Q är positivt definit har f ett lokalt strängt minimum i \bar{a} ,
- Om Q är negativt definit har f ett lokalt strängt maximum i \bar{a} ,
- Om Q är indefinit har f en sadelpunkt i \bar{a} .

I de fall där Q bara är (positivt eller negativt) semidefinit räcker inte andraderivatorna till för att avgöra om f har en lokal extrempunkt eller ej.

Vi har två olika sätt att avgöra teckenkaraktären på Q , antingen via egenvärden eller via kvadratkomplettering. Båda har sina för och nackdelar.

För att motivera ovanstående sats, antag att \bar{a} är en kritisk punkt till f . Då gäller alltså

$$f(\bar{a} + \bar{h}) = f(\bar{a}) + \frac{1}{2}Q(\bar{h}) + \mathcal{O}(|\bar{h}|^3).$$

Antag nu till exempel att Q är positivt definit. Då finns det $C > 0$ sådant att

$$Q(\bar{h}) \geq C|\bar{h}|^2 \text{ för alla } \bar{h}.$$

Å andra sidan finns det $D > 0$ så att

$$\mathcal{O}(|\bar{h}|^3) \leq D|\bar{h}|^3$$

gäller i någon omgivning till origo. Men

$$C|\bar{h}|^2 \geq D|\bar{h}|^3 \Leftrightarrow |\bar{h}| \leq C/D,$$

så alltså måste

$$Q(\bar{h}) + \mathcal{O}(|\bar{h}|^3) \geq 0$$

i någon omgivning till origo. Vidare får vi bara likhet nära origo om $\bar{h} = \bar{0}$.

Om Q är negativt definit istället är argumentet likartat med omvända tecken. Är Q indefinit kommer den växa kvadratisk längs någon linje genom origo, och högre ordnings termer kan inte ändra på detta lokalt längs denna linje. Å andra sidan avtar den kvadratisk längs någon annan linje, och det kan inte heller högre ordnings termer ändra på lokalt kring origo.

Det kan vara lättast att se ovanstående i specialfall. T.ex. om $Q(h, k) = h^2 + 2k^2 \geq |(h, k)|^2$ kan inte högre ordnings termer ändra på att f växer lokalt kring $(h, k) = (0, 0)$ eftersom Q växer kvadratisk i alla riktningar. Har vi istället $Q(h, k) = h^2 - 2k^2$, som ju är indefinit, så kan inte högre ordnings termer ändra på att f lokalt måste växa längs h -axeln, men avta längs k -axeln. Slutligen, antag att vi har en semidefinit form, som t.ex. $Q(h, k) = h^2$, då kan inte högre ordnings termer ändra på att f växer lokalt kring h -axeln, men Q kan inte kontrollera högre ordnings termer längs k -axeln (så även om testet i sig inte säger något direkt i detta fall, så får vi viktig information från längs vilka riktningar Q blir noll).

Exempel 6.6. Om vi ser på $f(x, y) = 6xy - 3y^2 - 2x^3$, och utvecklar denna i $(1, 1)$ ser vi att $\nabla f = (6y - 6x^2, 6x - 6y)$, så $\nabla f(1, 1) = (0, 0)$. Alltså är $(1, 1)$ en kritisk punkt. Om vi nu beräknar Hessianen får vi

$$H(1, 1) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(1, 1) & f''_{xy}(1, 1) \\ f''_{xy}(1, 1) & f''_{yy}(1, 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 6 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}.$$

Eigenvärdena ges nu av

$$\begin{vmatrix} -12 - \lambda & 6 \\ 6 & -6 - \lambda \end{vmatrix} = (-12 - \lambda)(-6 - \lambda) - 36 = 0,$$

vilket ger $\lambda = -9 \pm \sqrt{9^2 - 36}$. Eftersom bägge rötterna är negativa är alltså den kvadratiske formen $Q(h, k) = -12h^2 + 12hk - 6k^2$ negativt definit, och därför har f ett lokalt strängt maximum i $(1, 1)$.

Om vi istället vill använda metoden med kvadratkomplettering ser vi på den kvadratiske formen:

$$Q(h, k) = \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} H(1, 1) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = -12h^2 + 12hk - 6k^2 = -12 \left(h - \frac{k}{2} \right)^2 + 12 \frac{k^2}{4} - 6k^2 = -12 \left(h - \frac{k}{2} \right)^2 - 3k^2.$$

Vi ser då att denna är negativt definit eftersom $(h, k) \neq (0, 0) \Rightarrow Q(h, k) < 0$, och därför har f ett lokalt strängt maximum i $(1, 1)$.

7 Kurvor. Ytor. Funktionaldeterminanter. Inversa funktioner

7.1 Kurvor

En funktion

$$\bar{r}(t) = (r_1(t), r_2(t), \dots, r_n(t))$$

från ett intervall $[a, b]$ till \mathbb{R}^n är kontinuerlig, deriverbar etc. om varje funktion $r_i(t)$ ($1 \leq i \leq n$) är det. Om $\bar{r}(t)$ är kontinuerlig (för varje $t \in [a, b]$) så kallas denna för en parameterkurva i \mathbb{R}^n . Vi antar nu fortsättningsvis även att $\bar{r}(t)$ är deriverbar för varje $t \in]a, b[$.

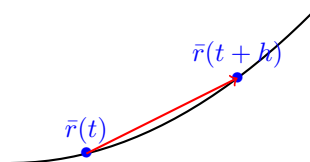
$$\bar{r}'(t) = (r'_1(t), r'_2(t), \dots, r'_n(t))$$

kallas (förutom derivatan) för **hastigheten** i punkten t , och $|\bar{r}'(t)|$ kallas **farten** i t (t betecknar ofta tiden, och $\bar{r}(t)$ ett objekts läge vid tiden t).

Vi noterar också att vektorn $\bar{r}'(t)$, såvida den är skild från $\vec{0}$, är en **tangentvektor** till kurvan i punkten $\bar{r}(t)$. För att förstå detta notera att för små h gäller

$$\bar{r}'(t) \approx \frac{\bar{r}(t+h) - \bar{r}(t)}{h},$$

och $\bar{r}(t+h) - \bar{r}(t)$ är en vektor med startpunkt i $\bar{r}(t)$ och slutpunkt $\bar{r}(t+h)$:



När vi låter h gå mot 0 ser vi att vektorn $(\bar{r}(t+h) - \bar{r}(t))/h$ (som pekar i samma riktning som $\bar{r}(t+h) - \bar{r}(t)$) mer och mer pekar i tangentriktningen till kurvan i $\bar{r}(t)$.

Längden s till kurvan definieras som

$$s = \int_a^b |\bar{r}'(t)| dt.$$

• **Speciellt för \mathbb{R}^2 :** $\pm(r'_2(t), -r'_1(t))$ ger normalriktningar till kurvan $(r'_1(t), r'_2(t))$ (ty $(r'_1(t), r'_2(t)) \cdot (r'_2(t), -r'_1(t)) = 0$). Om $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ kan vi se dess graf som en parameterkurva via

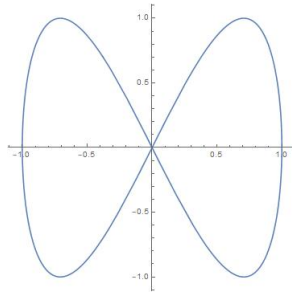
$$\bar{r}(t) = (t, f(t)) \quad t \in [a, b].$$

Notera att vi i detta fall har

$$\bar{r}'(t) = (1, f'(t)).$$

- Antag att $\bar{r}(t)$ är en kontinuerligt deriverbar parameterkurva. Det kan vara värt att poängtera att så länge som $\bar{r}'(t_0) \neq \bar{0}$ är kurvan slät lokalt kring $\bar{r}(t_0)$ i den meningen att om vi bara tittar på den del av kurvan som ges av $t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ för något tillräckligt litet $\varepsilon > 0$, så är det en slät kurva med en unik tangentlinje. För att förstå detta antag att vi ser på den plana kurvan $(x, y) = (f(t), g(t))$. Om $|(f'(t_0), g'(t_0))| \neq 0$, då måste någon av $f'(t_0)$ och $g'(t_0)$ vara skild från 0. Antag $f'(t) \neq 0$. Då kan vi lokalt invertera denna funktion $t = f^{-1}(x)$ som gäller för $t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ för något tillräckligt litet $\varepsilon > 0$. Alltså har vi att $y = g(t) = g(f^{-1}(x))$ lokalt, d.v.s. kurvan är lokalt en funktionsgraf till den kontinuerligt deriverbara funktionen $g \circ f^{-1}$.
- Det är dock möjligt för en parameterkurva att skära sig själv, d.v.s. $\bar{r}(t_1) = \bar{r}(t_0)$ kan mycket väl hända för olika t_0, t_1 (tänk på tolkningen som en partikelrörelse), och då kan det ju vara så att vi inte har någon unik tangentlinje i denna punkt. Det är därför vi måste inskränka oss till $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ ovan.
- Det är också värt att notera att om $\bar{r}'(t_0) = \bar{0}$ då kan kurvan ha ett hörn, d.v.s. att den inte är slät. För att förstå detta kan vi tänka på grafen $y = |x| = \sqrt{x^2}$, som ju har ett hörn i origo. Om vi parametriserar denna som $x = t^3, y = \sqrt{t^6}$, d.v.s. $\bar{r}(t) = (t^3, \sqrt{t^6})$, då är faktiskt $\bar{r}(t)$ kontinuerligt deriverbar som funktion av t , men med derivata $\bar{0}$ i origo.

Nedan är en plot av $\bar{r}(t) = (\sin t, \sin 2t)$ för $0 \leq t \leq 2\pi$.



7.2 Ytor på parameterform

Kom ihåg från linjär algebra att ett plan i \mathbb{R}^3 kan skrivas på parameterform som

$$(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + u(b_1, b_2, b_3) + v(c_1, c_2, c_3),$$

där u, v är reella parametrar, (a_1, a_2, a_3) är någon punkt på planet och $(b_1, b_2, b_3), (c_1, c_2, c_3)$ är vektorer som är parallella med planet, men inte parallella med varandra. Om vi inför beteckningen

$$\bar{f}(u, v) = (f_1(u, v), f_2(u, v), f_3(u, v)) = (a_1 + ub_1 + vc_1, a_2 + ub_2 + vc_2, a_3 + ub_3 + vc_3)$$

betyder detta alltså att planet helt enkelt är $V_{\bar{f}}$. Det vill säga avbildningen $\bar{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametriserar planet.

Om vi nu har en allmän funktion $\bar{f} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ där $U \subset \mathbb{R}^2$, så kommer $V_{\bar{f}}$ typiskt också vara en yta i \mathbb{R}^3 som parametriseras av funktionen. D.v.s. U avbildas på ytan $V_{\bar{f}}$. (Det mest uppenbara exemplet är om vi tar $f_1(u, v) = u, f_2(u, v) = v$ och $f_3(u, v) = g(u, v)$. Då blir $V_{\bar{f}}$ helt enkelt grafen till g med området $U = D_g$ som definitionsmängd).

Notera att då

$$\bar{f}(u, v) = (f_1, f_2, f_3)(u, v) \approx \bar{f}(a, b) + \frac{\partial \bar{f}}{\partial (u, v)}(a, b)(u - a, v - b)$$

så ser vi att tangentplanet till ytan i $\bar{f}(a, b)$ ges på parameterform av (med $h = u - a, k = v - b$)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(a, b) \\ f_2(a, b) \\ f_3(a, b) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u}(a, b) & \frac{\partial f_1}{\partial v}(a, b) \\ \frac{\partial f_2}{\partial u}(a, b) & \frac{\partial f_2}{\partial v}(a, b) \\ \frac{\partial f_3}{\partial u}(a, b) & \frac{\partial f_3}{\partial v}(a, b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(a, b) \\ f_2(a, b) \\ f_3(a, b) \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u}(a, b) \\ \frac{\partial f_2}{\partial u}(a, b) \\ \frac{\partial f_3}{\partial u}(a, b) \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial v}(a, b) \\ \frac{\partial f_2}{\partial v}(a, b) \\ \frac{\partial f_3}{\partial v}(a, b) \end{pmatrix},$$

eller ekvivalent

$$(x, y, z) = \bar{f}(a, b) + h \left(\frac{\partial f_1}{\partial u}(a, b), \frac{\partial f_2}{\partial u}(a, b), \frac{\partial f_3}{\partial u}(a, b) \right) + k \left(\frac{\partial f_1}{\partial v}(a, b), \frac{\partial f_2}{\partial v}(a, b), \frac{\partial f_3}{\partial v}(a, b) \right).$$

Det vill säga $\bar{f}(a, b)$ ger en fix punkt på planet, och

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial u}(a, b), \frac{\partial f_2}{\partial u}(a, b), \frac{\partial f_3}{\partial u}(a, b) \right), \left(\frac{\partial f_1}{\partial v}(a, b), \frac{\partial f_2}{\partial v}(a, b), \frac{\partial f_3}{\partial v}(a, b) \right)$$

ger två riktningsvektorer. Ett krav för att detta ska ge ett plan är då förstås att dessa inte är parallella. Vi vet ju dessutom att detta gäller om och endast om

$$\bar{n} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial u}(a, b), \frac{\partial f_2}{\partial u}(a, b), \frac{\partial f_3}{\partial u}(a, b) \right) \times \left(\frac{\partial f_1}{\partial v}(a, b), \frac{\partial f_2}{\partial v}(a, b), \frac{\partial f_3}{\partial v}(a, b) \right) \neq \bar{0},$$

och detta ger i så fall en normalvektor till ytan.

Ett alternativt sätt att se detta, notera att om vi fixerar den ena variabeln, säg $v = b$, och ser på $\bar{r}(u) = (f_1(u, b), f_2(u, b), f_3(u, b))$ då ger detta en parameterkurva som ligger på ytan hela tiden, och speciellt har vi $\bar{r}(a) = (f_1(a, b), f_2(a, b), f_3(a, b))$. Eftersom

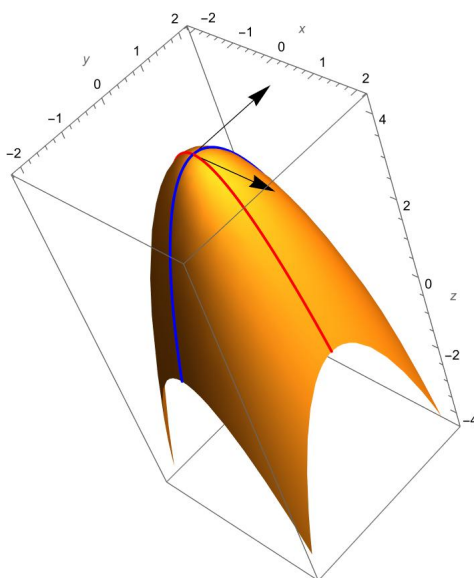
$$\bar{r}'(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial u}(a, b), \frac{\partial f_2}{\partial u}(a, b), \frac{\partial f_3}{\partial u}(a, b) \right)$$

pekar i tangentriftningen till kurvan, så pekar den i en tangentriftning till ytan också i punkten $(f_1(a, b), f_2(a, b), f_3(a, b))$.

På samma sätt kan vi istället fixera $u = a$ och använda v som parameter för att se att

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial v}(a, b), \frac{\partial f_2}{\partial v}(a, b), \frac{\partial f_3}{\partial v}(a, b) \right)$$

pekar i en tangentriftning till ytan i $(f_1(a, b), f_2(a, b), f_3(a, b))$.



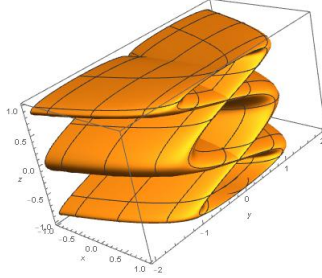
Det kan vara värt att notera att motsvarande kommentarer som de vi hade om kurvor gäller även här:

- Om vektorn \bar{n} ovan inte är noll, och funktionerna är säg av klass \mathcal{C}^1 , då finns ett $\varepsilon > 0$ så att om vi bara ser på bilden av en cirkelskiva med radie $\varepsilon > 0$ runt (a, b) så avbildas den på en slät yta. Detta är en konsekvens av implicita funktionssatsen som vi ska titta mer på i nästa kapitel.

- Om $\bar{n} = \bar{0}$ då behöver ytan inte vara slät även om funktionerna är \mathcal{C}^1 .
- En parameteryta kan skära sig själv i den meningen att $\bar{f}(a, b) = \bar{f}(c, d)$ med $(a, b) \neq (c, d)$.

Nedan är en plot av parameterytan

$$(x, y, z) = (\cos 2u, \sin u + \cos 3v, \sin v), \quad 0 \leq u \leq 2\pi, -\pi \leq v \leq \pi.$$



7.3 Inversa funktionsatsen

Kom ihåg att om $M, N \subset \mathbb{R}^n$ och $\bar{f} : M \rightarrow N$ är en funktion, då säger vi att \bar{f} är inverterbar om det finns en funktion $\bar{f}^{-1} : N \rightarrow M$ sådan att

$$\bar{f}^{-1}(\bar{f}(\bar{x})) = \bar{x}, \text{ och } \bar{f}(\bar{f}^{-1}(\bar{y})) = \bar{y}$$

för alla $\bar{x} \in M$ respektive $\bar{y} \in N$. En sådan invers existerar om och endast om \bar{f} är bijektiv, det vill säga för varje $\bar{y} \in N$ finns unikt $\bar{x} \in M$ sådant att $\bar{f}(\bar{x}) = \bar{y}$, och per definition är då $\bar{f}^{-1}(\bar{y}) = \bar{x}$ för detta unika \bar{x} (så om en invers finns är den unik). (Notera speciellt att vi måste ha $V_f = N$, så här spelar det roll vad vi väljer för målmängd.)

Det är ofta bra att använda olika namn på variablerna på de olika sidorna.

(Det är också, precis som i linjär algebra, bara rimligt att fråga efter en invers i de fall att M och N ligger i rum med samma dimension. T.ex. att en invers ska kunna existera för en funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ är för oss en orimlig fråga. Sådana funktioner finns visserligen, men de kan inte ha några rimliga egenskaper och är inte något som vi kommer stöta på.)

Definition 7.1. Om $\bar{f} : M \rightarrow N$, där $M, N \subset \mathbb{R}^n$, är differentierbar i \bar{a} , då definierar vi funktionaldeterminanten till \bar{f} i \bar{a} :

$$\frac{d\bar{f}}{d\bar{x}}(\bar{a}) = \det \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}}(\bar{a}).$$

Notera att detta bara är definierat om \bar{f} 's definitionsmängd och värdemängd ligger i rum med samma dimension n (annars är inte funktionsmatrisen kvadratisk).

Sats 7.2 (Inversa funktionsatsen)

Låt $\bar{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ vara en funktion av n variabler $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ av klass \mathcal{C}^k (d.v.s. varje f_j av klass \mathcal{C}^k) för något $k \geq 1$ i en omgivning till \bar{a} . Då finns öppna omgivningar U, V till \bar{a} respektive $\bar{f}(\bar{a})$ sådana att $\bar{f} : U \rightarrow V$ är bijektiv, och en invers funktion $\bar{f}^{-1} : V \rightarrow U$ av klass \mathcal{C}^k om och endast om

$$\frac{d\bar{f}}{d\bar{x}}(\bar{a}) \neq 0.$$

Vidare har vi i detta fallet att

$$\frac{\partial \bar{f}^{-1}}{\partial \bar{y}}(\bar{f}(\bar{a})) = \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}}(\bar{a}) \right)^{-1}.$$

* För den som föredrar att använda linjära avbildningar istället för matriser kan formeln ovan i termer av differentier skrivas

$$d\bar{f}^{-1}(\bar{f}(\bar{a})) = (d\bar{f}(\bar{a}))^{-1}.$$

I en dimension säger satsen alltså att om $f'(a) \neq 0$ så finns det en omgivning sådan att vi kan invertera funktionen, vilket är lätt att inse varför det gäller, eftersom antagandet att f är C^1 gör att om t.ex. $f'(a) > 0$ måste $f'(x) > 0$ i någon omgivning $U =]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ till a , och alltså är funktionen växande på detta intervall, och avbildar det på $V =]f(a - \varepsilon), f(a + \varepsilon)[$. Motsvarande (men med omvändning av V) gäller om $f'(a) < 0$ eftersom f då istället är avtagande i någon omgivning till a . Om å andra sidan $f'(a) = 0$ vänder normalt funktionen där. Notera dock att t.ex. $f(x) = x^3$ i och för sig är inverterbar på hela \mathbb{R} även fast $f'(0) = 0$, men inversen blir inte deriverbar i 0, eftersom vi då måste ha $(f^{-1})'(f(0)) = 1/f'(0)$.

Tyvärr är det bara det endimensionella fallet som går att visualisera (som en graf) eftersom redan om $n = 2$ skulle vi behöva 4 dimensioner för att visualisera funktionen.

Att bevisa denna sats är ganska svårt, men för att förklara ungefär vad som pågår kommer vi ihåg att differentierbarhet betyder (informellt) att nära \bar{a} gäller

$$\bar{f}(\bar{x}) \approx \bar{f}(\bar{a}) + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}}(\bar{a})(\bar{x} - \bar{a}).$$

Den högra sidan här är ju affin (konstant vektor plus linjär funktion). Högerledet är därför inverterbart om och endast om den linjära delen är det, vilket vi vet är fallet om och endast om

$$\det \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}}(\bar{a}) = \frac{df}{dx}(\bar{a}) \neq 0.$$

Vad satsen säger är alltså informellt att lokalt beter sig funktionen \bar{f} och denna approximation likadant när det gäller inverterbarhet (men notera att detta bara gäller lokalt, och vad lokalt innebär beror på funktionen).

Kom ihåg att $\bar{f} : A \rightarrow B$ är bijektiv per definition betyder att

- Om $\bar{x}, \bar{y} \in A$ och $\bar{x} \neq \bar{y}$ så är $\bar{f}(\bar{x}) \neq \bar{f}(\bar{y})$,
- om $\bar{z} \in B$ så finns $\bar{x} \in A$ så att $\bar{f}(\bar{x}) = \bar{z}$.

Det kan också vara värt att se på vad detta betyder i termer av ekvationssystem (där vi nu för enkelhets skull håller oss till två variabler, men exakt motsvarande kan sägas i högre dimensioner också).

Så antag att vi har $\bar{f}(x, y) = (f(x, y), g(x, y)) = (u, v)$ som avbildar mängden A i xy -planet på B i uv -planet. Vi har alltså ekvationssystemet

$$\begin{cases} u = f(x, y), \\ v = g(x, y). \end{cases}$$

Frågan om \bar{f} är (globalt) inverterbar är då helt enkelt om det finns en **entydig** lösning $(x, y) \in A$ till ovanstående (typiskt icke linjära) ekvationssystem för varje $(u, v) \in B$. Notera alltså att det ska finnas exakt en lösning, varken mer eller mindre.

Vad inversa funktionssatsen säger är i detta fall att om

$$\frac{d(u, v)}{d(x, y)}(a, b) \neq 0$$

då finns omgivningar U till (a, b) respektive V till $(f(a, b), g(a, b))$ så att vi har entydig lösning $(x, y) \in U$ för varje $(u, v) \in V$. Det är detta vi menar med lokal inverterbarhet. Notera att vi ofta inte namnger funktionen (u, v) i ett fall som ovan, utan när vi skriver saker som u'_x eller $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$ menar vi att vi ser u, v som funktioner av (x, y) givna av formlerna $u = f(x, y), v = g(x, y)$. Vad inversa funktionssatsen nu säger är att vi lokalt kan lösa ekvationssystemet (fast typiskt inte explicit, utan satsen ger existens av

lösning) med avseende på x, y entydigt så att vi kan se $x(u, v)$ och $y(u, v)$ som funktioner av (u, v) . Då gäller nu att

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(f(a, b), g(a, b)) = \left(\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}(a, b) \right)^{-1},$$

där vi i vänsterledet ser x, y som funktioner av u, v och de senare som oberoende variabler, medan vi i högerledet ser u, v som funktioner av x, y och de senare som oberoende variabler.

Det är värt att poängtera att till skillnad från fallet med linjära avbildningar/ekvationssystem så kan vi mycket väl ha lokal inverterbarhet kring varje punkt i A utan att funktionen är globalt inverterbar. Det första säger i princip bara att $\bar{f}(\bar{x}) \neq \bar{f}(\bar{y})$ om $\bar{x} \neq \bar{y}$ och dessa ligger nära varandra, medan det för global inverterbarhet krävs att $\bar{f}(\bar{x}) \neq \bar{f}(\bar{y})$ om $\bar{x} \neq \bar{y}$ oavsett om dessa ligger nära varandra eller ej.

8 Implicita funktionssatsen

Detta kapitel ska handla om implicit givna funktioner, samt implicit derivering av sådana. Det enklaste fallet får vi om vi har en (typiskt icke-linjär) ekvation på formen $F(x, y) = k$ där k är konstant, och frågar oss om detta lokalt kring en given lösning $F(a, b) = k$ definierar en kurva.

Ekvationen $F(x, y) = k$ är "typiskt" en kurva, men vi har t.ex.

- om $F(x, y) = k$ för varje (x, y) blir detta hela \mathbb{R}^2 ,
- om $F(x, y) = x^2 + y^2$ och $k = 0$ blir det bara punkten $(0, 0)$.

Implicita funktionssatsen ger villkor för att säkerställa att vi, i alla fall lokalt, faktiskt får en kurva, samt om kurvan $F(x, y) = k$ lokalt kring $(x, y) = (a, b)$, som ligger på kurvan (det vill säga uppfyller $F(a, b) = k$), kan parametreras som en graf $y = f(x)$ (eller en graf $x = g(y)$). Om detta går gäller alltså $b = f(a)$ och $F(x, f(x)) = k$ för x nära a . Vi kan nu derivera uttrycket $F(x, f(x)) = k$ med avseende på x och får då $\frac{d}{dx}F(x, f(x)) = \frac{d}{dx}k = 0$. Med hjälp av detta och kedjeregeln kommer vi se att vi får en ekvation för $f'(a)$, utan att behöva veta vad funktionen $f(x)$ är explicit. Detta kallas **implicit derivering**.

Dessa och mer allmänna påståenden om lokal parametrisering och implicit derivering av lösningar till (typiskt icke-linjära) ekvationssystem är vad vi kommer ta upp nedan.

Vi kommer för enkelhets skull formulera satserna för homogena ekvationer/ekvationssystem (d.v.s. $k = 0$ ovan t.ex.). Detta är dock utan förlust då vi kan titta på $F - k$ istället, och detta ändrar inga derivator.

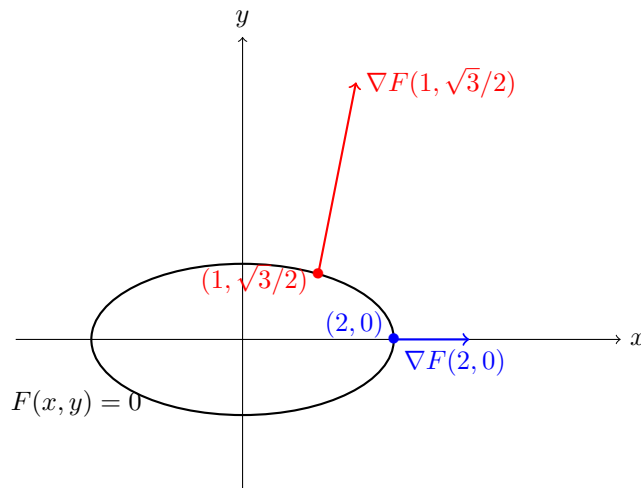
Även om vi kommer avsluta med en allmän version av implicita funktionssatsen är det bara tre fall som ni behöver kunna hantera i denna kurs: en ekvation i två variabler, en ekvation i tre variabler respektive ett ekvationssystem med två ekvationer i tre variabler.

8.1 Implicita funktionssatsen

8.1.1 En ekvation med två variabler

Vi ska här studera ekvationer på formen $F(x, y) = 0$ där F är av klass C^k för $k \geq 1$.

För att ta ett motiverande exempel, låt $F(x, y) = x^2 + 4y^2 - 4 = 0$. Då ser vi att punkten $(a, b) = (2, 0)$ ligger på kurvan $F(x, y) = 0$, och att $\nabla F(2, 0) = (4, 0)$. Vi ser även att $(a, b) = (1, \sqrt{3}/2)$ ligger på denna kurva med $\nabla F(1, \sqrt{3}/2) = (2, 4\sqrt{3})$. Vi påminner också om att gradienten, såvida den inte är noll, pekar i normalriktningen till nivåkurvan.



Här ser vi att runt $(2, 0)$ kan vi inte lösa ut y som funktion av x , eftersom det hur nära vi än kommer alltid (såvida $x < 2$) finns två olika y -värden för varje x -värde. Problemet är att gradienten $\nabla F(2, 0)$ är vinkelrät mot y -axeln här. D.v.s $F'_y(2, 0) = 0$.

Å andra sidan ser vi att runt $(1, \sqrt{3}/2)$ kan vi lokalt lösa ut y som funktion av x , och detta beror helt enkelt på att gradienten $\nabla F(1, \sqrt{3}/2)$ inte är vinkelrät mot y -axeln, d.v.s. $F'_y(1, \sqrt{3}/2) \neq 0$ (i detta fall kan vi till och med lösa ut $y = \sqrt{4 - x^2}/2$ explicit, men notera att inget av det vi gör nedan bygger på att vi kan få fram en explicit formel, vilket vi typiskt inte kommer kunna få).

Sats 8.1 (Implicita funktionssatsen)

Om $F(x, y)$ är en reellvärd funktion av klass C^k ($k \geq 1$) sådan att $F(a, b) = 0$ och $F'_y(a, b) \neq 0$, då finns någon omgivning till (a, b) sådan att den del av nivåkurvan $F(x, y) = 0$ som ligger i denna omgivning är grafen till en funktion $y = f(x)$ av klass C^k . Denna funktion uppfyller med andra ord $F(x, f(x)) = 0$ och $b = f(a)$.

Implicit derivering: Om $F(x, y)$ och $y = f(x)$ uppfyller $b = f(a)$ och $F(x, f(x)) = 0$ för x nära a , i så fall gäller enligt kedjeregeln

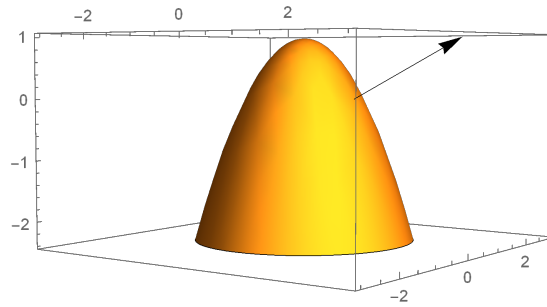
$$\frac{d}{dx} F(x, f(x)) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) \cdot \frac{df}{dx}(x) = \frac{d}{dx} 0 = 0.$$

Om nu $F'_y(a, b) \neq 0$ får vi (eftersom $b = f(a)$):

$$f'(a) = -\frac{F'_x(a, b)}{F'_y(a, b)}.$$

8.1.2 En ekvation med tre variabler

Om $F(x, y, z)$ är en reellvärd funktion av tre variabler och $F(a, b, c) = 0$ med $F'_z(a, b, c) \neq 0$, då gäller återigen att gradienten $\nabla F(a, b, c) = (F'_x(a, b, c), F'_y(a, b, c), F'_z(a, b, c))$ har en nollskild z -komponent, och detta är av motsvarande geometriska skäl som i fallet med två variabler vad som krävs för att nivåytan $F(x, y, z) = 0$ lokalt kring (a, b, c) ska ges av grafen till en funktion $z = f(x, y)$. Denna funktion uppfyller alltså $F(x, y, f(x, y)) = 0$ och $c = f(a, b)$. Här nedan har vi plottat en yta $F(x, y, z) = 0$, och gradienten ∇F i en punkt (a, b, c) . Vi ser att lokalt kring denna är ytan en funktionsgraf.



Sats 8.2 (Implicita funktionssatsen)

Om $F(x, y, z)$ är en reellvärd funktion av klass C^k ($k \geq 1$) sådan att $F(a, b, c) = 0$ och $F'_z(a, b, c) \neq 0$, då finns någon omgivning till (a, b, c) sådan att den del av nivåytan $F(x, y, z) = 0$ som ligger i denna omgivning är grafen till en funktion $z = f(x, y)$ av klass C^k . Denna funktion uppfyller med andra ord $F(x, y, f(x, y)) = 0$ och $c = f(a, b)$.

Implicit derivering: Om vi har en funktion $F(x, y, z)$ av tre variabler med $F(x, y, f(x, y)) = 0$ där $c = f(a, b)$ som ovan, då kan vi även här derivera ekvationen implicit med avseende på x respektive y . T.ex.

$$\frac{\partial}{\partial y} F(x, y, f(x, y)) = \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, f(x, y)) + \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, f(x, y)) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

Om nu $F'_z(a, b, c) \neq 0$ får vi

$$f'_y(a, b) = -\frac{F'_y(a, b, c)}{F'_z(a, b, c)}.$$

På motsvarande sätt får vi

$$f'_x(a, b) = -\frac{F'_x(a, b, c)}{F'_z(a, b, c)}.$$

8.1.3 Två ekvationer med tre variabler

Låt oss se på ekvationssystemet

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

där F och G är reellvärda funktioner. Var och en av dessa ekvationer svarar (typiskt) mot en parameteryta, och lösningarna till ekvationssystemet är helt enkelt snittet mellan dessa ytor.

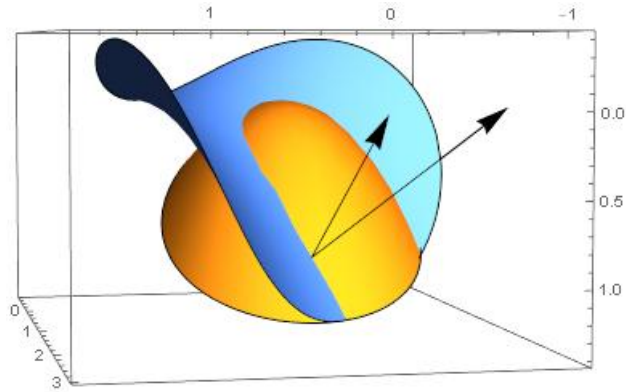
Vi är nu ute efter villkor som säkerställer att dessa lösningar lokalt kring en given lösning $F(a, b, c) = G(a, b, c) = 0$ är en parameterkurva som kan parametreras med x som parameter.

Notera att ∇F och ∇G är normaler till respektive yta (såvida dessa inte är nollvektorer har vi verkligen ytor, och dessa ger normalerna). Om vi tittar på kryssprodukten

$$\nabla F \times \nabla G = \left(\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F'_z & F'_x \\ G'_z & G'_x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{vmatrix} \right),$$

så ser vi att kravet att denna inte ska vara noll är precis att någon av determinanterna är nollskild. Om detta är fallet har vi alltså att normalerna till ytorna inte är parallella, och därför skär de varandra (lokalt) längs en kurva. Kryssprodukten ovan ger en tangentvektor till denna kurva och kravet att den första determinanten är nollskild är just att denna tangentvektor har en nollskild x -komponent, vilket är kravet för att vi ska kunna parametrisera med x som parameter. (Och på motsvarande sätt om y -respektive z -komponenten är nollskild kan vi lokalt parametrisera med y respektive z som parameter.)

Här är en bild med $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$, $G(x, y, z) = x - xy - z$ och $(a, b, c) = (1, 0, 1)$, där vi plottat respektive nivåyta samt satt ut gradienterna i punkten $(1, 0, 1)$.



Sats 8.3 (Implicita funktionssatsen)

Antag att F, G av klass C^k ($k \geq 1$) uppfyller

$$\begin{cases} F(a, b, c) = 0 \\ G(a, b, c) = 0 \end{cases}$$

och

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y}(a, b, c) & \frac{\partial F}{\partial z}(a, b, c) \\ \frac{\partial G}{\partial y}(a, b, c) & \frac{\partial G}{\partial z}(a, b, c) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Då finns det en omgivning till (a, b, c) sådan att lösningarna till ekvationssystemet

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

som ligger i denna omgivning är en parameterkurva på formen $y = f(x), z = g(x)$ av klass C^k . Vi har alltså

$$\begin{cases} F(x, f(x), g(x)) = 0 \\ G(x, f(x), g(x)) = 0 \end{cases} \quad \text{och} \quad \begin{cases} b = f(a) \\ c = g(a). \end{cases}$$

För att vidare motivera resultatet, antag att ekvationerna vore linjära, t.ex. att

$$\begin{cases} F(x, y, z) = a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ G(x, y, z) = a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

Detta svarar mot att var och en av ekvationerna ger upphov till ett plan, och lösningarna till ekvationssystemet är snittet mellan dessa. Vi kan nu skriva detta som (genom att flytta $a_ix + d_i$ till högersidan)

$$\begin{pmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1x - d_1 \\ -a_2x - d_2 \end{pmatrix}.$$

Men här vet vi från linjär algebra att kravet för att vi ska ha entydig lösning är precis att determinanten av matrisen i vänsterledet är nollskild, vilket visar satsen för detta specialfall (om determinanten är noll är matrisen inte inverterbar, och då finns det antingen inga lösningar alls eller oändligt många lösningar för varje givet x).

Implicit derivering:

Om vi som ovan har

$$\begin{cases} F(x, f(x), g(x)) = 0 \\ G(x, f(x), g(x)) = 0 \end{cases} \quad \text{och} \quad \begin{cases} b = f(a) \\ c = g(a), \end{cases}$$

då kan vi derivera varje ekvation för sig implicit med avseende på x och får

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}F(x, f(x), g(x)) = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{df}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{dg}{dx} = 0 \\ \frac{d}{dx}G(x, f(x), g(x)) = \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \cdot \frac{df}{dx} + \frac{\partial G}{\partial z} \cdot \frac{dg}{dx} = 0, \end{cases}$$

där vi ovan inte skrev ut i vilka punkter vi evaluerar derivatorna. Om nu

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y}(a, b, c) & \frac{\partial F}{\partial z}(a, b, c) \\ \frac{\partial G}{\partial y}(a, b, c) & \frac{\partial G}{\partial z}(a, b, c) \end{vmatrix} \neq 0,$$

då får vi

$$\begin{pmatrix} f'(a) \\ g'(a) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial y}(a, b, c) & \frac{\partial F}{\partial z}(a, b, c) \\ \frac{\partial G}{\partial y}(a, b, c) & \frac{\partial G}{\partial z}(a, b, c) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} F'_x(a, b, c) \\ G'_x(a, b, c) \end{pmatrix}.$$

- Notera att det i alla tre fallen ovan går bra att byta roll på variablerna. T.ex. om vi har en funktion $F(x, y)$ sådan att $F(a, b) = k$ och $F'_x(a, b) \neq 0$ då ges nivåkurvan lokalt som en graf $x = g(y)$ istället, och ekvationen kan deriveras på motsvarande sätt med avseende på y för att få fram

$$g'(b) = - \frac{F'_y(a, b)}{F'_x(a, b)}.$$

Jämför detta i ellipsfallet ovan. Lokalt runt punkterna $\pm(2, 0)$ går det bra att lösa ut x som funktion av y .

- När det gäller implicit derivering behöver man inte memorera formlerna ovan, utan man kan derivera det aktuella uttrycket för att få en ekvation, eller ett ekvationssystem, för de derivator som söks (notera att dessa blir linjära för de eftersökta derivatorna).
- Notera också att det inte är viktigt att vi har homogena ekvationer (d.v.s. $= 0$), utan det skulle kunna vara andra konstanter k/l till höger i ekvationen/ekvationssystemet, eftersom vi kan titta på $F - k$ respektive $F - k, G - l$ istället.

8.1.4 En allmän version av implicita funktionssatsen*

Sats 8.4 (Implicita funktionssatsen)

Låt $\bar{F} = (F_1, F_2, \dots, F_n)$ vara en funktion av $m + n$ variabler $(\bar{x}, \bar{y}) = (x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n)$ av klass C^k i någon omgivning till punkten (\bar{a}, \bar{b}) ($\bar{a} \in \mathbb{R}^m$, $\bar{b} \in \mathbb{R}^n$) sådan att $\bar{F}(\bar{a}, \bar{b}) = \bar{0}$ och funktionaldeterminanten

$$\frac{d\bar{F}}{d\bar{y}}(\bar{a}, \bar{b}) \neq 0,$$

då finns i någon omgivning till punkten \bar{a} exakt en funktion $\bar{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ (av m variabler med värden i \mathbb{R}^n) av klass C^k sådana att i denna omgivning gäller

$$\bar{b} = \bar{f}(\bar{a}), \quad \bar{F}(\bar{x}, \bar{f}(\bar{x})) = \bar{0}$$

och

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_j} = - \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{y}} \right)^{-1} \frac{\partial \bar{F}}{\partial x_j} \text{ för } j = 1, 2, \dots, m.$$

9 Dubbelintegraler

Vi kommer i denna kurs i princip uteslutande jobba med dubbel- och trippelintegraler (det vill säga integrationsområden i två respektive tre dimensioner). Man kan definiera multipelintegraler för allmän dimension också och de vanligaste egenskaperna som linjäritet o.d. bevisas analogt oberoende av dimension (oftast samma som i envariabeln till och med).

9.1 Dubbelintegraler

Vad vi i alla dessa fall har är dels ett **begränsat** område $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (det vill säga $\Omega \subset B((0,0), R)$ för något tillräckligt stort R) och en **begränsad** reellvärd funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (det vill säga det finns en konstant C så att $|f(x, y)| \leq C$ för alla (x, y) i Ω), och vi vill definiera

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \iint_{\Omega} f dx dy$$

så att ifall f är positiv på Ω , då ska detta ge **volymen under grafen till f över Ω** .

Vi kommer först förklara hur konstruktionen av dessa dubbelintegraler fungerar, utan att ge en direkt formell definition (vi antar speciellt att vi för rimliga mängder A i planet vet hur vi definierar deras area $m(A)$).

Med en rektangel K nedan menar vi en axelparallell rektangel på formen

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, c < y < d\} \subset K \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\},$$

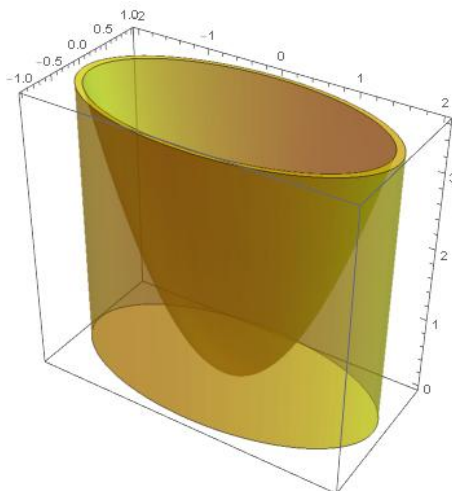
(så K är en rektangel som kan innehålla delar av sin rand, vilket inte påverkar dess area) och dess area ges av

$$m(K) = (b - a)(d - c).$$

Vi börjar med ett exempel:

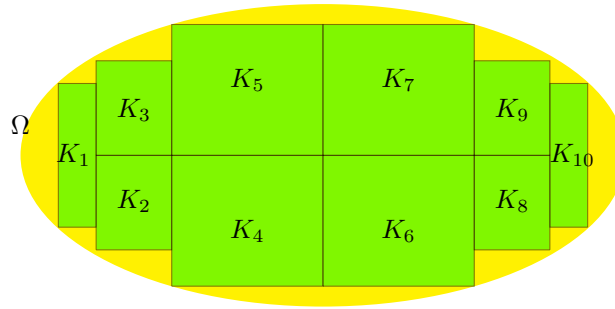
Exempel 9.1 (Volymtolkning i 2D). Om $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 < 4\}$, som är en ellips, och $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ är vår funktion, så ska dubbelintegralen alltså ge oss volymen av den tredimensionella kroppen som ges av

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq x^2 + 4y^2, x^2 + 4y^2 < 4\} :$$



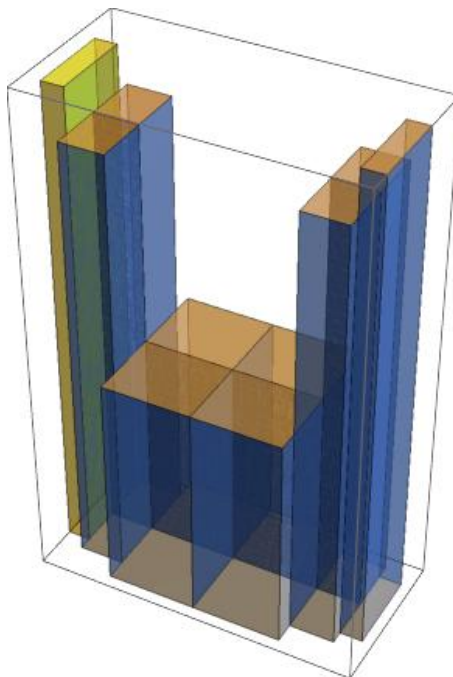
Notera att fördjupningen i mitten är just grafen till f , och att ellipsen i xy -planet är Ω .

Bara för att illustrera hur man kan approximera denna integral (detta är dock inte en central del i denna kurs) skriver vi approximativt Ω som en ändlig union av rektanglar (som inte skär varandra):



Här är Ω som vi approximerat med 10 gröna rektanglar K_1, K_2, \dots, K_{10}

Nästa steg är att "byta ut" f mot en lämplig konstant approximation på varje K_i . Detta blir bara bra normalt om man valt K_i :na små nog, och man kan (om f är kontinuerlig såg) då räkna ut, eller vid behov approximera, värdet till f i någon lämplig punkt i respektive K_i . T.ex. ligger punkten $(-3/2, 0)$ i K_1 och vi kan välja t.ex. $a_1 = f(3/2, 0) = 9/4 = 2.25$ o.s.v. Man skulle då få att man approximerar ovanstående volym med summan av volymer av tredimensionella rätblock som i figuren nedan:



Så för att återgå till den allmänna situationen, om vi sammanfattar idéerna från exemplet ovan:

Antag att det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett ändligt antal rektanglar K_1, K_2, \dots, K_l i Ω som inte skär varandra (det vill säga $K_i \cap K_j = \emptyset$ om $i \neq j$) sådana att

- (1) Arealen av $\Omega \setminus (K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_l)$ är mindre än ε ,
- (2) det finns tal a_1, a_2, \dots, a_l sådana att $|f(x, y) - a_i| < \varepsilon$ för all $(x, y) \in K_i$,

I så fall gäller att

$$\iint_{\Omega} f dx dy \approx \sum_{i=1}^l a_i m(K_i),$$

där felet i denna approximation är begränsat av $(C + m(\Omega))\varepsilon$ där $|f| \leq C$ på Ω . Så ju mindre vi tar ε desto närmare kommer vi det riktiga värdet. För att göra ε mindre krävs (oftast) att man tar fler och mindre rektanglar K_i ovan.

Tanken är alltså för att få en approximation av integralen approximerar vi först

$$\Omega \approx K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_l,$$

där \approx i detta fall betyder att arean/volymen av den del av Ω som inte ligger i någon av rektanglarna är så liten att denna del kan försummas (ifall Ω själv är en rektangel kan vi ta $\Omega = K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_l$), och sådana att f är nästan konstant $= a_i$ på respektive rektangel K_i .

Notera att om f är säg kontinuerlig på Ω och vi väljer K_i :na tillräckligt små så kan vi få att $f \approx a_i$ på K_i .

Notera också att ovanstående faktiskt är ett sätt att approximera en integral rent praktiskt. Det vill säga först stycka upp Ω i små rektanglar (plus någon försumbar mängd) K_i där f kan antas vara approximativt konstant. Sedan approximerar man f på dessa mängder. Detta kan göras genom att välja en lämplig punkt $\bar{x}_i \in K_i$ och approximera $f(\bar{x}_i)$ (eller räkna ut explicit i enkla fall).

Från ovanstående ”konstruktion” av integraler följer några viktiga egenskaper ganska direkt:

Sats 9.2

(1) $\iint_{\Omega} (af + bg) dx dy = a \iint_{\Omega} f dx dy + b \iint_{\Omega} g dx dy$ ($a, b \in \mathbb{R}$, f, g integrabla).

(2) $\iint_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f dx dy = \iint_{\Omega_1} f dx dy + \iint_{\Omega_2} f dx dy$ ($\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, f integrabel).

(3) $f \leq g \Rightarrow \iint_{\Omega} f dx dy \leq \iint_{\Omega} g dx dy$ (f, g integrabla). Speciellt $\iint_{\Omega} f dx dy \geq 0$ om $f \geq 0$.

(4) $\iint_{\Omega} dx dy = \text{Arean av } \Omega$.

(5) (Triangelolikheten) $|\iint_{\Omega} f dx dy| \leq \iint_{\Omega} |f| dx dy$ (f integrabel).

Egenskap (3) kan användas för att ge överskattningar och underskattningar av integraler. Om vi t.ex. väljer ϕ och ψ på ett sådant sätt att $\phi \leq f \leq \psi$ gäller på Ω , då gäller

$$\iint_{\Omega} \phi dx dy \leq \iint_{\Omega} f dx dy \leq \iint_{\Omega} \psi dx dy,$$

och om man väljer ϕ och ψ på lämpligt sätt (t.ex. trappfunktioner som är konstanta på rektanglar) så att integralerna av dessa är enkla att beräkna kan vi stänga in värdet av integralen av f .

9.2 Över- och undersummor: en mer formell definition av dubbelintegraler*

Vi betecknar med χ_K den så kallade karaktäristiska funktionen till en mängd $K \subset \mathbb{R}^N$ som definieras av

$$\chi_K(\bar{x}) = \begin{cases} 1 & \text{om } \bar{x} \in K, \\ 0 & \text{om } \bar{x} \notin K. \end{cases} \quad (4)$$

Med en trappfunktion menar vi en ändlig linjärkombination på formen

$$\psi = a_1 \chi_{K_1} + a_2 \chi_{K_2} + \dots + a_l \chi_{K_l},$$

där varje a_i är ett fixt reellt tal, och varje K_i är en axelparallell rektangel som ovan.

För en sådan inför vi integralen

$$I(\psi) = a_1 m(K_1) + a_2 m(K_2) + \dots + a_l m(K_l),$$

(anledningen att vi skriver I här är för att den inte beror på något specifikt område, man skulle kunnat skriva $\iint_{\mathbb{R}^2} \psi(x, y) dx dy$ istället om man vill).

Notera att det med ovanstående definition ser ut som att värdet $I(\psi)$ eventuellt beror på vilket sätt vi valt att representera ψ som en sådan linjärkombination i (4) ovan, men det går med lite jobb att visa att detta inte beror på den specifika representationen.

Notera att dessa trappfunktioner trivialt utgör ett vektorrum, så t.ex. är differensen av två sådana också en trappfunktion.

Vi säger att en sådan trappfunktion ψ är en övertrappa till f över Ω om

- $f(\bar{x}) \leq \psi(\bar{x})$ för alla $\bar{x} \in \Omega$,
- $\psi(\bar{x}) \geq 0$ för alla $\bar{x} \notin \Omega$.

Vi säger att en trappfunktion ϕ är en undertrappa till f över Ω om

- $\phi(\bar{x}) \leq f(x)$ för alla $\bar{x} \in \Omega$,
- $\phi(\bar{x}) \leq 0$ för alla $\bar{x} \notin \Omega$.

Definition 9.3. Vi säger att $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ är integrabel över Ω om det för varje $\varepsilon > 0$ finns en övertrappa ψ och en undertrappa ϕ till f över Ω sådana att

$$I(\psi - \phi) < \varepsilon.$$

Kravet $\psi \geq 0$ och $\phi \leq 0$ utanför Ω säger att även om funktionerna inte måste vara noll utanför måste de nästan vara det, eftersom $\psi - \phi$ är ickenegativ och detta gör att om t.ex. $\psi > t$ på en mängd utanför Ω , eftersom differensen $\psi - \phi > t$ då också på denna mängd, kan denna inte ha area större än ε/t om $I(\psi - \phi) < \varepsilon$.

Precis som i en variabel kan man nu visa att det då finns ett unikt värde $\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$ sådant att

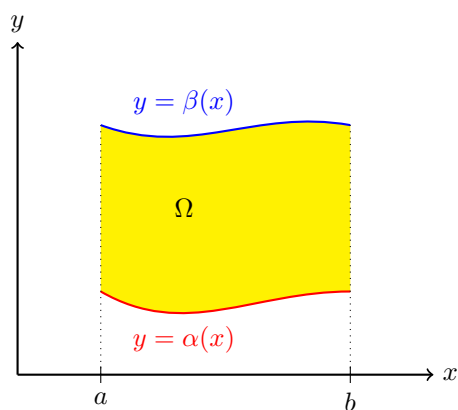
$$I(\phi) \leq \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy \leq I(\psi)$$

håller för alla undertrappor ϕ och alla övertrappor ψ till f över Ω . Detta kan användas för att ge över- och underskattningar av integralen.

Angående de funktioner som är integrabla, samt vilka områden Ω som vi kan integrera över, blir det vissa begränsningar som till stor del beror på konstruktionen av Riemannintegralen. Kravet på Ω är mer precist att $\partial\Omega$ ska ha area noll i den mening att den för varje $\varepsilon > 0$ kan täckas med ett ändligt antal rektanglar där summan av deras areor är mindre än ε . Ett sådant område brukar kallas kvadrerbart. Kravet på f är precis att definitionen 9.3 ska vara uppfylld. I praktiken är det dock så att det enda vi (i denna kurs i alla fall) behöver bekymra oss om är om något är obegränsat. Så länge som Ω är begränsat och f är begränsad på Ω så är kraven på dessa så små att det aldrig i denna kurs är ett problem att definiera integralen även om funktionen inte är kontinuerlig i alla punkter t.ex. **Dessa antaganden om att områden vi integrerar över är kvadrerbara och att funktioner vi integrerar är integrabla kommer vara underförstådda i satser och påståenden om integraler.**

9.3 Fubinis sats för dubbelintegraler

Det största nya med dubbelintegraler är egentligen inte ovanstående påståenden. De fungerar på samma sätt som för enkelintegraler. Det som vi har för enkelintegraler som vi använder är integralkalkylens huvudsats som kopplar ihop integraler med primitiva funktioner. Det finns ingen direkt motsvarighet i flera variabler, men precis som vi har reducerat beräkningen av differentier till beräkning av partialderivator tidigare (som vi kan räkna ut med envariabelmetoder) finns det en metod att skriva om en dubbelintegral som en så kallad itererad integral där man integrerar först med avseende på den ena variabeln och sedan med avseende på den andra. Dessa integraler är vanliga enkelintegraler där vi kan använda våra metoder från envariabelanalysen.



$$\Omega = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$$

Sats 9.4 (Fubini)

Om $\Omega = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$ så gäller att

$$\iint_{\Omega} f dx dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

om f är integrabel.

Anmärkning 9.5.

- Det absolut enklaste fallet är om Ω är en rektangel $a < x < b$, $c < y < d$, då vi ovan har $\alpha(x) = c$ och $\beta(x) = d$ för varje x .
- Notera att inte alla områden Ω kan skrivas på ovanstående form, men alla rimliga områden kan delas upp i ett ändligt antal bitar som vardera kan skrivas på denna form, alternativt med ombytta roller för x och y . Då kan integralen skrivas om som en summa av integralerna över dessa delområden där vi kan tillämpa Fubinis sats på var och en av dessa.
- Om vi för varje $x \in \mathbb{R}$ låter $\Omega_x = \{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in \Omega\}$ vara **tvärsnittet** av Ω med linjen som är parallell med y -axeln och går genom punkten $(x, 0)$, och definierar **projektion** A av Ω på x -axeln att vara mängden av alla x sådana att Ω_x inte är tom (ska man vara nogga är det egentligen inte projektion/tvärsnitt enbart då vi sedan "kastar bort" en av koordinaterna så att vi får en delmängd till \mathbb{R}). I så fall blir $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in A, y \in \Omega_x\}$. Antagandet på området i Fubinis sats är att A är ett intervall $[a, b]$ och att Ω_x för varje $x \in A$ är ett intervall $[\alpha(x), \beta(x)]$ (eller en punkt om $\alpha(x) = \beta(x)$).
- Fubinis sats reducerar alltså beräkningen till att beräkna två enkelintegraler. När vi integrerar med avseende på y behandlas x som konstant, och i den andra integralen försvinner y då vi sätter in gränserna som beror på x .
- Notera att motsvarande påstående då vi byter plats på x och y givetvis också gäller. Det vill säga om vi kan skriva

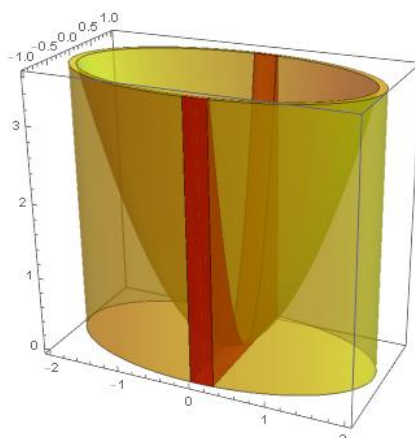
$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, \phi(y) \leq x \leq \psi(y)\}$$

så gäller

$$\iint_{\Omega} f dx dy = \int_c^d \left(\int_{\phi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

(Notera dock att t.ex. området i figuren ovan inte kan skrivas på denna form.)

För att förklara varför Fubinis sats är geometriskt rimlig ser vi på nedanstående bild, där fördjupningen i mitten är precis grafen till f , och dubbelintegralen ska ge volymen av den gula kroppen nedan.



Om vi tittar på ett litet intervall i x -led $[r, r + \Delta x]$, då är tvärsnittet av kroppen med ett plan ortogonalt mot x -axeln nästan oberoende av x -värdet på detta lilla intervall, och för varje sådant x ges tvärsnittsarean av just $\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy$. Volymen av denna del (den röda delen i bilden ovan) av kroppen borde alltså vara, då tvärsnittsarean är nästan konstant på intervallet, ungefär

$$\left(\int_{\alpha(r)}^{\beta(r)} f(r, y) dy \right) \Delta x.$$

Om man styckar upp $[a, b]$ i sådana små Δx -bitar och summerar alla dessa approximationer får man just en approximation av uttrycket

$$\int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

Ett annat mer algebraiskt sätt att motivera rimligheten i satsen via vår "konstruktion" av integralen ovan är att vi skriver

$$\Omega \approx K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_j,$$

där vi antar att $f \approx a_i$ på K_i och K_i :na inte skär varandra. Om vi då inför funktionen $\tilde{f}(x)$ att ta värdet a_i om $x \in K_i$, och vara noll om x inte ligger i något K_i , då har vi per definition

$$\iint_{\Omega} \tilde{f} dx dy = a_1 m(K_1) + a_2 m(K_2) + \dots + a_j m(K_j) \approx \iint_{\Omega} f dx dy.$$

Alltså om vi kan visa att satsen gäller för \tilde{f} är det rimligt att tro att den även gäller för f då vi kan approximera f godtyckligt bra med sådana funktioner \tilde{f} . Men bägge sidorna i satsen är linjära:

$$\iint_{\Omega} \tilde{f} dx dy = a_1 \iint_{\Omega} \chi_{K_1} dx dy + \dots + a_j \iint_{\Omega} \chi_{K_j} dx dy,$$

och

$$\int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \tilde{f} dy \right) dx = a_1 \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \chi_{K_1} dy \right) dx + \dots + a_j \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \chi_{K_j} dy \right) dx,$$

där χ_{K_i} betecknar funktionen som är 1 på K_i och noll annars (det vill säga den karaktäristiska funktionen till K_i). Detta reducerar alltså det hela till att visa påståendet för funktionerna χ_K där K är en rektangel i Ω . Men om $K = \{(x, y) : k < x < l, r < y < q\}$ får vi

$$\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \chi_K(x, y) dy = \begin{cases} q - r & \text{om } x \in]k, l[\\ 0 & \text{om } x \notin]k, l[\end{cases},$$

så

$$\int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \chi_K dy \right) dx = (q - r)(l - k) = m(K),$$

vilket visar påståendet för χ_K och därför för \tilde{f} .

10 Variabelbyten i dubbelintegraler

10.1 Variabelbyten i dubbelintegraler

I envariabelanalys har vi ofta gjort variabelbyten för att utnyttja inre derivator. Denna typ av variabelbyten går ju fortfarande bra att använda i de itererade enkelintegralerna i Fubinis sats var för sig vid behov. Men ibland kan det vara värt att göra ett variabelbyte direkt i dubbelintegralen, vilket nedanstående sats handlar om. Notera dock att då de variabelbyten vi gör i envariabelanalysen enbart styrs av funktionen vi vill integrera (vi integrerar ju där typiskt enbart över intervall) motiveras dessa variabelbyten i dubbelintegralen lika ofta utav hur integrationsområdet Ω ser ut. Ofta är målet att rätta upp Ω så att i de nya koordinaterna är Ω en rektangel. T.ex. om Ω är enhetsskivan $B(\bar{0}, 1)$ i planet så är den i polära koordinater given av olikheterna $0 \leq \rho < 1$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, som alltså är en rektangel i (ρ, φ) -planet. Som vi såg ovan i samband med Fubinis sats är rektanglar extra enkla att jobba med. Det är dock också beroende på hur funktionen ser ut om detta är ett bra byte eller ej.

Sats 10.1

Om Ω och D är två områden i \mathbb{R}^2 och $\bar{g} = (g_1, g_2) : D \rightarrow \Omega$ är inverterbar och har kontinuerliga partiella derivator med $\frac{d(g_1, g_2)}{d(u, v)} \neq 0$ så gäller med

$$\begin{cases} x = g_1(u, v) \\ y = g_2(u, v) \end{cases}$$

att

$$\iint_{\Omega} f dx dy = \iint_D (f \circ \bar{g}) \left| \frac{d(x, y)}{d(u, v)} \right| du dv.$$

OBS! $\left| \frac{d(x, y)}{d(u, v)} \right|$ är alltså absolutbeloppet av $\frac{d(x, y)}{d(u, v)}$ som i sin tur är determinanten av funktionsmatrisen (det vill säga ett reellt tal).

I analogi med kedjeregeln ovan om

$$\begin{cases} x = g_1(u, v) \\ y = g_2(u, v) \end{cases}$$

har vi att

$$dx dy = \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u} & \frac{\partial g_1}{\partial v} \\ \frac{\partial g_2}{\partial u} & \frac{\partial g_2}{\partial v} \end{pmatrix} \right| du dv = \left| \frac{d(x, y)}{d(u, v)} \right| du dv.$$

Det vill säga man ser x och y som funktioner av de nya variablerna u, v . Fördelen med att skriva $d(x, y)$ istället för det kanske tydligare $d(g_1, g_2)$ är att vi informellt har formeln

$${}^{\prime} dx dy = \left| \frac{d(x, y)}{d(u, v)} \right| du dv,$$

som kan vara enklare att komma ihåg.

Notera också att

$$\frac{d(u, v)}{d(x, y)} = \left(\frac{d(x, y)}{d(u, v)} \right)^{-1},$$

vilket kan vara användbart för att i vissa fall slippa invertera funktioner. Notera dock att existens av invers är viktigt för att formeln ska vara rätt.

För att förklara rimligheten i satsen notera att eftersom \bar{g} har kontinuerliga partialderivator så är den differentierbar, så lokalt är den nästan affin. Vi kommer ihåg att för affina avbildningar (eftersom de bara är translationer av linjära avbildningar) så skalas area just som beloppet av determinanten av

den linjära delen. Så "lokalt" skalar \bar{g} area med faktorn $\left| \frac{d(x,y)}{d(u,v)} \right|$.

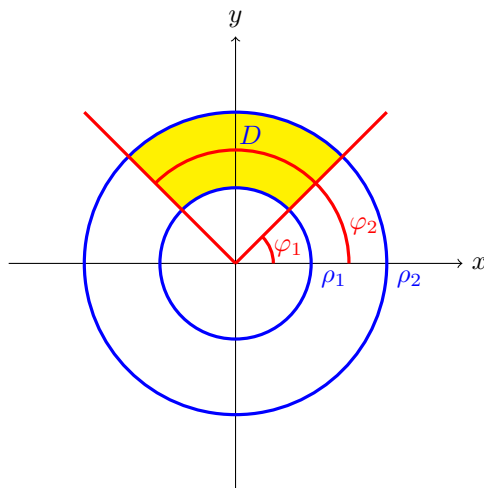
• **Polära koordinater:**

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases} \quad dxdy = \rho d\rho d\varphi.$$

Ovanstående formel följer av att

$$\frac{d(x,y)}{d(\rho,\varphi)} = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\varphi \\ y'_\rho & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho \cos^2 \varphi + \rho \sin^2 \varphi = \rho.$$

Notera att ett område D som ges av fixa gränser i polära koordinater, det vill säga på formen $\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2$ och $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$, ser ut som det gula området i figuren:



Notera också att om vi fixerar φ och låter ρ variera ger det en halvlinje utgående från origo, och om vi fixerar ρ -värdet och låter φ variera ger det en cirkel med radie ρ .

11 Trippelintegraler

11.1 Grundläggande egenskaper och Fubinis sats

Trippelintegraler införs på analogt sätt med dubbelintegraler. I detta fall har vi ett **begränsat** område $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ och en **begränsad** funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ och vill definiera

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z) dx dy dz = \iiint_{\Omega} f dx dy dz.$$

Eftersom grafen till f nu ligger i fyra dimensioner är en geometrisk tolkning som den med volymen under grafen för dubbelintegraler inte så användbar. Nedanstående fysikaliska tolkningar är då viktigare:

- Om f betecknar densiteten hos en kropp med utbredning Ω , då ska trippelintegralen ge oss den totala massan,
- Om f betecknar laddningstätheten hos en kropp med utbredning Ω , då ska trippelintegralen ge oss den totala laddningen.

(Det kan vara värt att säga att motsvarande tolkning gäller även för dubbelintegraler om vi har en yt-densitet, eller laddningstäthet på en tvådimensionell kropp.)

Approximationskonstruktionen (och över- och undertrappor) fungerar på samma sätt som för dubbelintegraler, med den skillnaden att istället för rektanglar används nu tredimensionella rätblock, det vill säga mängder K på formen

$$\{(x,y,z) : a < x < b, c < y < d, k < z < r\} \subset K \subset \{(x,y,z) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, k \leq z \leq r\},$$

med volymen

$$m(K) = (b - a)(d - c)(r - k).$$

Vi skriver alltså nu

$$\Omega \approx K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_l,$$

där \approx nu betyder att skillnaden i volym är försumbar, och sådana att f är nästan konstant lika med a_i på K_i . Vi har då

$$\iiint_{\Omega} f dx dy dz \approx a_1 m(K_1) + a_2 m(K_2) + \dots + a_l m(K_l).$$

Anmärkning 11.1 (Densitetstolkning). Det kan vara värt att tänka på densitetstolkningen ovan. Ω är ungefär "summan" av alla rätblocken K_i . Dessa är små så att densiteten är nästan konstant $= a_i$ på denna del, så totala massan av K_i -delen ska vara ungefär $a_i m(K_i)$. Totala massan av kroppen ska nu då vara ungefär summan av dessa delar.

Sats 11.2

(1) $\iiint_{\Omega} (af + bg) dx dy dz = a \iiint_{\Omega} f dx dy dz + b \iiint_{\Omega} g dx dy dz$ ($a, b \in \mathbb{R}$, f, g integrabla).

(2) $\iiint_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f dx dy dz = \iiint_{\Omega_1} f dx dy dz + \iiint_{\Omega_2} f dx dy dz$ ($\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, f integrabel).

(3) $f \leq g \Rightarrow \iiint_{\Omega} f dx dy dz \leq \iiint_{\Omega} g dx dy dz$ (f, g integrabla). Speciellt $\iiint_{\Omega} f dx dy dz \geq 0$ om $f \geq 0$.

(4) $\iiint_{\Omega} dx dy dz =$ Volymen av Ω .

(5) (Triangelolikheten) $|\iiint_{\Omega} f dx dy dz| \leq \iiint_{\Omega} |f| dx dy dz$ (f integrabel).

Sats 11.3 (Fubini)

- Om Ω är på formen $a \leq z \leq b$, $(x, y) \in \Omega_z$, då gäller

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left(\iint_{\Omega_z} f(x, y, z) dx dy \right) dz.$$

- Om Ω är på formen $(x, y) \in D$, $\alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y)$, då gäller

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D \left(\int_{\alpha(x, y)}^{\beta(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy.$$

Långt ifrån alla områden är på ovanstående former, men alla rimliga områden kan styckas upp i mindre bitar som var och en kan skrivas på detta vis.

- För att behandla en trippelintegral med Fubinis sats delar vi först upp den som en dubbelintegral och en enkelintegral. Dubbelintegralen kan man sedan behandla med alla de metoder vi har för dessa, till exempel kan man eventuellt använda Fubinis sats för dubbelintegraler för att skriva om det hela till tre enkelintegrationer.
- Man har här i första steget valet att antingen titta på projektionen av Ω på z -axeln, eller på xy -planet.

- Om man projicerar på z -axeln, då ser man för varje fixt $z \in \mathbb{R}$ på **tvärsnittet**

$$\Omega_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$$

mellan planet, som är parallellt med xy -planet och som går genom $(0, 0, z)$, och Ω . **Projektion** på z -axeln är per definition mängden av alla z sådana att Ω_z inte är tom. Antagandet i Fubinis sats (första formuleringen) är att denna projektion är ett intervall. (Ska man vara formell är det inte bara tvärsnitt/projektion ovan då vi också "kastar bort" en respektive två av variablerna.)

- Om man alternativt vill projicera Ω på xy -planet först, då kan vi för varje $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ införa **tvärsnittet**

$$\Omega_{xy} = \{z \in \mathbb{R} : (x, y, z) \in \Omega\}$$

mellan linjen som är parallell med z -axeln och går genom $(x, y, 0)$ och Ω . **Projektion** av Ω på xy -planet är nu per definition

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \Omega_{xy} \text{ är inte tom.}\}$$

Antagandet i Fubinis sats (andra formuleringen) är helt enkelt att Ω_{xy} är ett intervall $[\alpha(x, y), \beta(x, y)]$ (eller en punkt om $\alpha(x, y) = \beta(x, y)$) för varje $(x, y) \in D$. (Ska man vara formell är det inte bara tvärsnitt/projektion ovan då vi också "kastar bort" två respektive en av variablerna.)

- Precis som i Fubinis sats för dubbelintegraler kan man byta roll på variablerna, så om t.ex. Ω istället är på formen $(x, z) \in D$, $\phi(x, z) \leq y \leq \psi(x, z)$ så gäller

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D \left(\int_{\phi(x, z)}^{\psi(x, z)} f(x, y, z) dy \right) dx dz.$$

- Efter att man skrivit om integralen med ett av ovanstående alternativ har man sedan kvar en enkelintegral och en dubbelintegral. Om man sedan ska använda Fubinis sats för dubbelintegraler på denna är målet i så fall att i slutändan komma till ett uttryck på formen (med eventuellt omvända roller för några koordinater)

$$\iiint_{\Omega} f dx dy dz = \int_a^b \left(\int_{\rho(x)}^{\gamma(x)} \left(\int_{\alpha(x, y)}^{\beta(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.$$

Försök dock inte mer än i väldigt enkla fall gå till detta uttryck direkt, utan skriv först om det som en dubbel- och en enkelintegral, och skriv sedan om dubbelintegralen.

Exempel 11.4. Antag att

$$\Omega = \{(x, y, z) : (x - 2)^2 + 2(y - 3)^2 + 3(z - 4)^2 \leq 4\}.$$

Då är Ω den gula kroppen i figuren nedan, medan den röda stolpen Ω_{xy} i detta fall är given av att $(x, y) = (2, 3)$ och att z ligger mellan gränserna

$$4 - \sqrt{4 - (x - 2)^2 - 2(y - 3)^2}/\sqrt{3} \text{ och } 4 + \sqrt{4 - (x - 2)^2 - 2(y - 3)^2}/\sqrt{3},$$

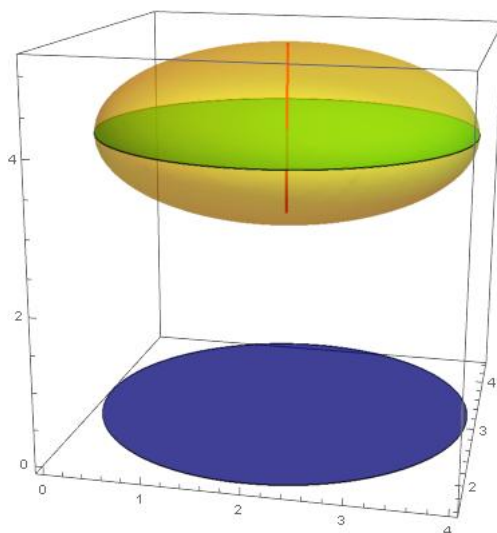
d.v.s

$$\Omega_{xy} = [4 - \sqrt{4 - (x - 2)^2 - 2(y - 3)^2}/\sqrt{3}, 4 + \sqrt{4 - (x - 2)^2 - 2(y - 3)^2}/\sqrt{3}] \text{ om } (x, y) = (2, 3).$$

Och det blå området i xy -planet är just projektionen D av Ω på xy -planet, och ges i detta fall av $(x - 2)^2 + 2(y - 3)^2 \leq 4$. Vi kan alltså skriva Ω på formen

$$(x, y) \in D, \quad 4 - \sqrt{4 - (x - 2)^2 - 2(y - 3)^2}/\sqrt{3} \leq z \leq 4 + \sqrt{4 - (x - 2)^2 - 2(y - 3)^2}/\sqrt{3}.$$

Å andra sidan är den gröna skivan ett exempel på ett snitt av Ω med ett plan parallellt med xy -planet, i detta fall planet $z = 4$. Så Ω_z är i detta fall precis projektionen av detta gröna område på xy -planet (det vill säga Ω_4 är i detta fall mängden av alla (x, y) sådana att $(x, y, 4)$ ligger på den gröna skivan i bilden). Gränserna för z i detta fall är $4 - 2/\sqrt{3} \leq z \leq 4 + 2\sqrt{3}$ och Ω_z ges nu av $(x - 2)^2 + 2(y - 3)^2 \leq 4 - 3(z - 4)^2$ för varje fixt z på detta intervall.



Om man i detta fall tänker på Ω som en potatis kan man tänka på uppstyckningen med Ω_z :na som att man skivar potatisen till chips, och uppdelningen med de röda stolparna som att man styckar upp den i pommes istället.

OBS! Notera att i ovanstående fall råkar projektionen D på xy -planet vara lika med ett av tvärsnitten ($D = \Omega_4$), eftersom detta tvärsnitts projektion innehåller alla andra tvärsnitts projektioner. Detta gäller absolut inte i allmänhet, utan D är unionen av alla tvärsnitts projektioner. Motsvarande kan även sägas om projektionen på z -axeln.

11.2 Variabelbyten i trippelintegraler

Sats 11.5

Om Ω och D är två områden i \mathbb{R}^3 och $\bar{g} = (g_1, g_2, g_3) : D \rightarrow \Omega$ är inverterbar och har kontinuerliga partiella derivator med $\frac{d(g_1, g_2, g_3)}{d(u, v, w)} \neq 0$ så gäller med

$$\begin{cases} x = g_1(u, v, w) \\ y = g_2(u, v, w) \\ z = g_3(u, v, w) \end{cases}$$

att

$$\iiint_{\Omega} f dx dy dz = \iiint_D (f \circ \bar{g}) \left| \frac{d(x, y, z)}{d(u, v, w)} \right| du dv dw.$$

• Sfäriska koordinater:

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad dxdydz = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi.$$

Ovanstående formel följer av att

$$\frac{d(x, y, z)}{d(r, \theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\theta & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\theta & y'_\varphi \\ z'_r & z'_\theta & z'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = \dots = r^2 \sin \theta.$$

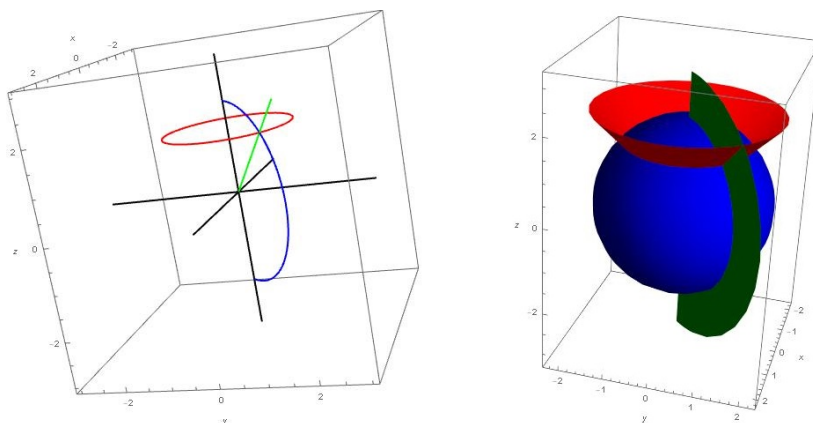
Notera att om vi fixerar θ och låter r variera från 0 till R och φ från 0 till 2π kommer vi om $\theta = 0$ få positiva z -axeln, om $0 < \theta < \pi/2$ får vi en kon med vinkel θ runt positiva z -axeln med höjd R , om $\theta = \pi/2$ får vi en cirkelskiva i xy -planet med radie R , om $\pi/2 < \theta < \pi$ får vi en kon runt negativa z -axeln med vinkel $\pi - \theta$ mot denna, och slutligen om $\theta = \pi$ får vi negativa z -axeln.

Om vi istället fixerar $r > 0$ och låter θ variera från 0 till π och φ från 0 till 2π får vi en sfär med centrum i origo och radie r .

Om vi slutligen fixerar φ och låter θ variera från 0 till π och r från 0 till R får vi en halvcirkelskiva som har en kant på z -axeln och radie R .

I bilden till vänster nedan ges den gröna linjen av att vi fixerat $\varphi = \pi/4$ och $\theta = \pi/4$ och låter r variera från 0 till 3, den röda cirkeln av att vi fixerar $r = 2$ och $\theta = \pi/4$ och låter φ variera från 0 till 2π , och den blå halvcirkeln av att vi fixerat $r = 2$ och $\varphi = \pi/4$ och låter θ variera från 0 till π .

I den högra bilden svarar den röda konen mot att vi fixerat θ till $\pi/4$, den blå sfären av att vi fixerat r till 2 och den gröna halvcirkelskivan av att vi fixerat φ till $\pi/4$. Notera att dessa tre ytor skär varandra i exakt en punkt som alltså är punkten som svarar mot $(r, \theta, \varphi) = (2, \pi/4, \pi/4)$.



12 Integraltillämpningar. Generaliserade integraler

12.1 Area och Volym

- Om Ω är ett område i planet så gäller

$$\text{Arean till } \Omega = \iint_{\Omega} dxdy.$$

- Om Ω är ett område i rummet så gäller

$$\text{Volymen till } \Omega = \iiint_{\Omega} dxdydz.$$

Notera att det inte är någon motsägelse att t.ex. $\iint_{\Omega} dxdy$ representerar volymen av kroppen som ligger mellan planen $z = 0$ och $z = 1$ över området Ω och ovanstående påstående. Vad vi säger är att volymen av denna "cylinder" med tvärsnitt Ω är precis lika stor som bottenarean av Ω .

12.2 Tyngdpunkter i 2D

Om en plan skiva med utbredning Ω i \mathbb{R}^2 har densitet $\varrho(x, y)$ ges tyngdpunkten (x_t, y_t) till denna av

$$x_t = \frac{\iint_{\Omega} x\varrho(x, y)dxdy}{\iint_{\Omega} \varrho(x, y)dxdy}, \quad y_t = \frac{\iint_{\Omega} y\varrho(x, y)dxdy}{\iint_{\Omega} \varrho(x, y)dxdy}.$$

Här är

$$\iint_{\Omega} \varrho(x, y)dxdy$$

den totala **massan** till skivan.

12.3 Tyngdpunkter i 3D

Om en kropp med utbredning Ω i \mathbb{R}^3 har densitet $\varrho(x, y, z)$ ges tyngdpunkten (x_t, y_t, z_t) till denna av

$$x_t = \frac{\iiint_{\Omega} x\varrho(x, y, z)dxdydz}{\iiint_{\Omega} \varrho(x, y, z)dxdydz}, \quad y_t = \frac{\iiint_{\Omega} y\varrho(x, y, z)dxdydz}{\iiint_{\Omega} \varrho(x, y, z)dxdydz}, \quad z_t = \frac{\iiint_{\Omega} z\varrho(x, y, z)dxdydz}{\iiint_{\Omega} \varrho(x, y, z)dxdydz}$$

Här är

$$\iiint_{\Omega} \varrho(x, y, z)dxdydz$$

den totala **massan** till kroppen.

12.4 Generaliserade Integraler

Ovanstående definition av integraler kräver att både området och funktionen är begränsade. Vi tittar här på hur man gör annars för dubbelintegraler (trippelintegraler behandlas helt analogt, där vi nedan byter \mathbb{R}^2 mot \mathbb{R}^3 och area mot volym, $dxdy$ mot $dxdydz$...). Låt därför $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ eventuellt vara obegränsat, och antag att $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eventuellt är obegränsad. Vi vill då, ifall det är möjligt, definiera

$$\iint_{\Omega} f dxdy \tag{5}$$

- Integral ovan kallas generaliserad ifall Ω och/eller f är obegränsad,
- Vi skulle även tillåta att f inte är definierad på en delmängd till Ω som har area noll, t.ex. som i

$$\iint_{B((0,0),1)} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dxdy,$$

där integranden inte är definierad i origo.

En växande följd $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \Omega_3 \subset \dots$ sådan att

- (U1) varje Ω_i är en begränsad delmängd till Ω ,
- (U2) f är begränsad (och definierad i alla punkter) på Ω_i för varje i ,
- (U3) $\Omega \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \dots)$ har area noll

kallas en tillåten uttömmande följd till Ω relativt integralen (5).

Poängen är att för en sådan följd är varje integral

$$\iint_{\Omega_i} f dxdy$$

väldefinierad i vår vanliga mening, och idén är att om det finns ett vettigt värde på integralen (5) borde integralerna ovan gå mot detta värde då $i \rightarrow \infty$.

Poängen med de tre kraven på uttömningen är att (U1) och (U2) är krav för att integralen av f över Ω_i ska vara väldefinierade, och (U3) är kravet för att det ska vara rimligt att dessa integralers värden faktiskt närmar sig något som ska vara integralen av f över hela Ω .

När vi har en generaliserad integral som (5), måste vi alltså först identifiera vad som gör den generaliserad, det vill säga identifiera punkter där $|f|$ blir oändligt stor samt om Ω är obegränsad. I integralen (5) gäller:

- Om $\Omega = B((0, 0), 1)$ och $f(x, y) = 1/\sqrt{x^2 + y^2}$ är $\Omega_i = \{(x, y) : 1/i^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$ som alltså är ett ringformat område med ett hål med radie $1/i$ runt origo, en tillåten uttömmande följd. Notera att Ω_i växer mot $\Omega \setminus \{0, 0\}$ som är hela Ω utom en punkt (och en punkt har givetvis area noll).
- Om $\Omega = \mathbb{R}^2$ och vi ser på $f(x, y) = 1/(1 + x^2 + y^2)$ är $\Omega_i = B((0, 0), i)$ en tillåten uttömmande följd eftersom f är begränsad och vårt enda problem är att \mathbb{R}^2 är obegränsat. I detta fall växer Ω_i mot hela Ω .
- Om $\Omega = \mathbb{R}^2$ och $f(x, y) = 1/(x^2 + (y - 1)^2)$ är integralen generaliserad p.g.a. att funktionen $\rightarrow \infty$ då $(x, y) \rightarrow (0, 1)$ samt att integrationsområdet är obegränsat. I detta fall är t.ex. $\Omega_i = \{(x, y) : 1/i^2 \leq x^2 + (y - 1)^2 \leq i^2\}$, som alltså är ringformade områden runt punkten $(0, 1)$ en tillåten uttömmande följd.

I ovanstående exempel fokuserade vi på uttömningar med cirkulär symmetri, men man kan tänka sig vilken typ av områden som helst.

Definition 12.1. Om det finns $I \in \mathbb{R}$ sådant att **för varje** tillåten uttömmande följd till Ω relativt $\iint_{\Omega} f \, dx dy$ som ovan gäller att

$$\iint_{\Omega_i} f \, dx dy \rightarrow I \text{ då } i \rightarrow \infty,$$

då säger vi att f har generaliserad integral I på Ω .

I så fall skriver vi även

$$\iint_{\Omega} f \, dx dy = I,$$

och säger att integralen är konvergent (annars säger vi att den är divergent).

En skillnad mot fallet med en variabel och denna definition är att vi där, om vi t.ex. ska definiera $\int_0^\infty f(x) dx$ bara ser på den uttömmande följden $[0, i]$, medan vi här skulle tillåta mer allmänna uttömningar. Med envariabeldefinitionen kan man ha funktioner f som är integrabla i denna mening utan att vara absolutintegrabla (t.ex. $\sin(x)/x$). Med ovanstående definition kan inte detta hända (vilket beror på att vi kan tömma ut den del där funktionen är positiv snabbare än den del där den är negativ och vice versa).

Följande sats säger att om f är icke-negativ så räcker det att testa med en uttömmande följd.

Sats 12.2

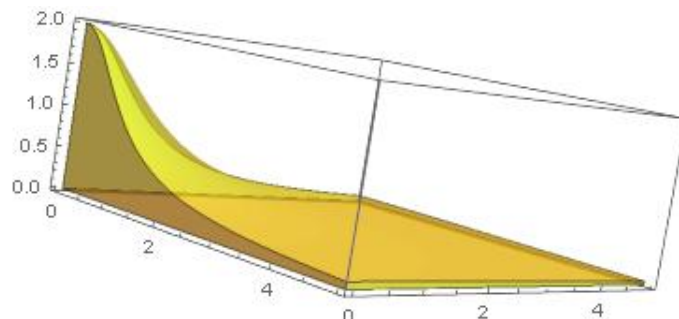
Om $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ och det finns en uttömmande följd Ω_i av Ω sådana att

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \iint_{\Omega_i} f(x, y) \, dx dy < \infty,$$

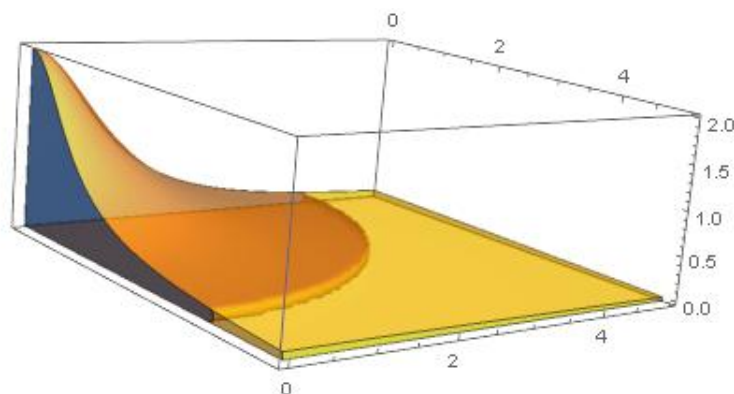
då är f generaliserat integrabel över Ω .

Notera att eftersom $\iint_{\Omega_i} f(x, y) dx dy$ är växande med i om $f \geq 0$, så kommer gränsvärdet existera, men eventuellt vara oändligt.

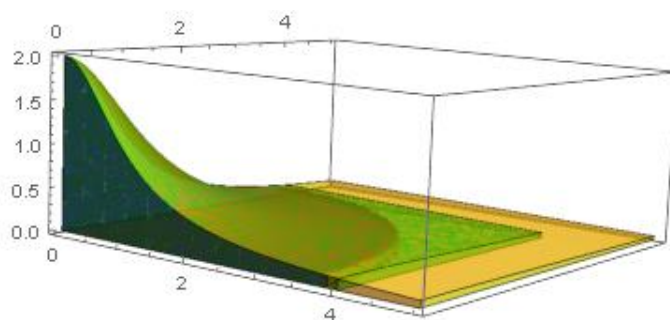
Exempel 12.3. Låt $f(x, y) = 2/(1 + x^2 + y^2)$ och $\Omega = \{(x, y) : x > 0, y > 0\}$. Vi kan då titta på två olika uttömningar av Ω , t.ex. $\Omega_i = \{(x, y) : x > 0, y > 0, x^2 + y^2 \leq i^2\}$, och $D_j = \{(x, y) : 0 < x < j, 0 < y < j\}$. Om vi tittar på $\iint_{\Omega} f dx dy$ ska detta vara volymen under grafen:



Om vi nu approximerar med Ω_i får vi en approximation med en volym som den orangea i nedanstående bild:



Å andra sidan får vi om vi approximerar med D_j en volym som den gröna nedan:



Notera att om vi valt j stort nog gäller $\Omega_i \subset D_j$, vilket leder till att

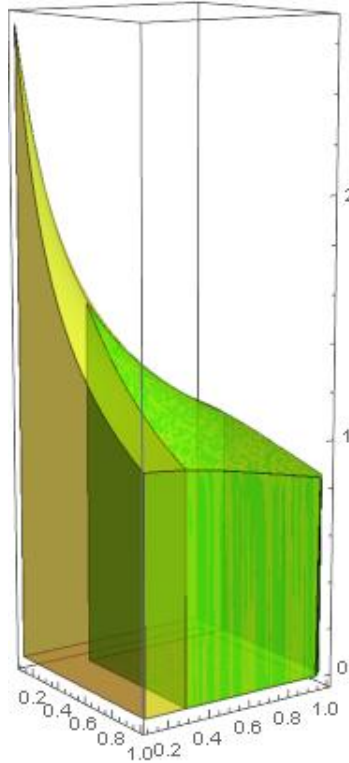
$$\iint_{\Omega_i} f dx dy \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \iint_{D_j} f dx dy.$$

Å andra sidan om vi väljer i stort nog gäller vice versa att $D_j \subset \Omega_i$ så att

$$\iint_{D_j} f dx dy \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \iint_{\Omega_i} f dx dy.$$

Notera dock att allt detta bygger på att integranden är positiv, men förklarar i detta fall varför vi bara behöver titta på en uttömning, eftersom alla sådana i slutändan måste leda till samma värde (eventuellt ∞) för varje sådan.

Exempel 12.4. Om vi istället tittar på en obegränsad funktion, säg $f(x, y) = 1/(x^2 + y^2)^{(1/4)}$, och vill se på integralen över området Ω som ges av $0 < x < 1$ och $0 < y < 1$. Då får vi istället följande bild, där vi vill definiera (om den är ändlig) volymen av den gula kroppen, och denna kan vi approximera med volymen av kroppar som den gröna där vi tömmer ut Ω med områdena Ω_i som ges av att $1/i < x < 1$ och $1/i < y < 1$ t.ex.



Om vi har en funktion som växlar tecken får man behandla den del där den är positiv för sig och den där den är negativ för sig:

Sats 12.5

Om $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ låt $\Omega_+ = \{(x, y) : f(x, y) > 0\}$ och $\Omega_- = \{(x, y) : f(x, y) < 0\}$. I så fall är

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$$

konvergent om och endast om båda integralerna

$$\iint_{\Omega_+} f(x, y) dx dy \quad \text{och} \quad \iint_{\Omega_-} -f(x, y) dx dy$$

är konvergenta. Vidare gäller då att

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \iint_{\Omega_+} f(x, y) dx dy - \iint_{\Omega_-} -f(x, y) dx dy.$$

Notera att vi satt minustecknet innanför integralen över Ω_- . Detta för att $-f$ är positiv på denna del av Ω och alltså kan vi använda satsen ovan för positiva funktioner.

12.5 Variabelbyten och Fubinis sats för generaliserade integraler

Det visar sig att variabelbyten och Fubinis sats faktiskt gäller även för generaliserade integraler om vi har en **positiv** integrand, där vi nu för en positiv integrand skriver

$$\iint_{\Omega} f dx dy = \infty$$

om den är divergent (då det enda sättet den kan vara divergent på i detta fall är att volymen under grafen är oändligt stor).

Sats 12.6 (Variabelbyten)

Antag att Ω och D är två områden i \mathbb{R}^2 och $\bar{g} = (g_1, g_2) : D \rightarrow \Omega$ är inverterbar och har kontinuerliga partiella derivator med $\frac{d(g_1, g_2)}{d(u, v)} \neq 0$. Låt

$$\begin{cases} x = g_1(u, v), \\ y = g_2(u, v). \end{cases}$$

Då gäller för alla $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ att

$$\iint_{\Omega} f dx dy = \iint_D (f \circ \bar{g}) \left| \frac{d(x, y)}{d(u, v)} \right| du dv.$$

Notera att ovanstående sats ska tolkas som att antingen är båda integralerna konvergenta med samma värde, eller så är båda divergenta (d.v.s. $= \infty$).

Sats 12.7 (Fubini)

Antag att $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ där $\Omega = \{(x, y) : a < x < b, \alpha(x) < y < \beta(x)\}$. Då gäller att

$$\iint_{\Omega} f dx dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

- Anledningen till att vi här har valt öppna intervall är att eventuellt är $a = -\infty$ och/eller $b = \infty$. Vi tillåter även $\alpha(x), \beta(x)$ att vara $\pm\infty$ här. (Notera att det inte hade gjort någon skillnad om vi tagit öppna intervall tidigare heller då mängderna där $x = a$, $x = b$, $y = \alpha(x)$ och $y = \beta(x)$ har area noll.)
- Satsen ska tolkas som att den generaliserade dubbelintegralen är konvergent om och endast om den (eventuellt) generaliserade integralen $\int_a^b g(x) dx$ är konvergent, där

$$g(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy.$$

Detta kräver förstås att den (eventuellt) generaliserade integralen $\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy$ är konvergent för de flesta x (den kan dock vara oändlig för något enstaka x så länge som funktionen $g(x)$ ovan blir generaliserat integrerbar).

- Båda resultaten ovan följer av att vi kan göra en lämplig uttömning D_i av D , tillämpa respektive sats på D_i :na och ta ett gränsvärde på båda sidor i likheten. T.ex. om vi ser på satsen om variabelbyten, då kommer D_i :na avbildas av \bar{g} på områden Ω_i som är en uttömning av Ω . Enligt satsen om variabelbyten (för icke-generaliserade integraler) gäller nu

$$\iint_{\Omega_i} f dx dy = \iint_{D_i} (f \circ \bar{g}) \left| \frac{d(x, y)}{d(u, v)} \right| du dv,$$

och om vi tar gränsvärdena på respektive sida får vi resultatet.

Exempel 12.8. Vi ser på integralen

$$\iint_D e^{-x-y} dx dy$$

där D ges av $x > 0$ och $y > 0$. Eftersom vi har en positiv integrand har vi nu två alternativ.

Det första alternativet är att vi väljer en uttömning av D , t.ex. med D_n som ges av $0 < x < n$ och $0 < y < n$ och tittar på

$$\iint_{D_n} e^{-x-y} dx dy = \int_0^n \left(\int_0^n e^{-x} \cdot e^{-y} dy \right) dx = [-e^{-x}]_0^n \cdot [-e^{-y}]_0^n = (1 - e^{-n}) \cdot (1 - e^{-n}).$$

Eftersom detta går mot 1 då $n \rightarrow \infty$ är integralen konvergent med värdet 1.

Det andra alternativet är att vi direkt tillämpar Fubinis sats ovan:

$$\iint_D e^{-x-y} dx dy = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-x-y} dy \right) dx = \int_0^\infty [-e^{-y} e^{-x}]_{y=0}^\infty dx = \int_0^\infty e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^\infty = 1.$$

Alltså är integralen konvergent, enligt Fubinis sats, med värdet 1.

A Några kommentarer angående olika notationer

Notera att det förekommer en hel del olika notationer i olika böcker. Nedan listar vi en del förekommande notation.

- I vissa fall används $\bar{f}'(\bar{a})$ för matrisen till $d\bar{f}(\bar{a})$ istället för $\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}}(\bar{a})$ (det finns även fall då $\bar{f}'(\bar{a})$ betecknar $d\bar{f}(\bar{a})$, men detta är ju lite i motsägelse med hur det används i en variabel om man ska vara noga). Vissa författare skriver $d\bar{f}_{\bar{a}}$ istället för $d\bar{f}(\bar{a})$. Ibland används även $J_{\bar{f}}$ för matrisen (J för Jacobi).
- För partialderivator förekommer även notationen $f_x, \partial_x f, D_x f, D_1 f$.
- För riktningsderivator kan man stöta på $\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}, d_{\bar{v}} f, \nabla_{\bar{v}} f, f'_{\bar{v}}, D_{\bar{v}} f, \partial_{\bar{v}} f$.
- För dubbelintegraler kan man se notationen $\iint f dA$ (det vill säga $dA = dx dy$, A för area).
- För trippelintegraler kan man se notationen $\iiint f dV$ (det vill säga $dV = dx dy dz$, V för volym).

Materialet i häftet har producerats i L^AT_EX. De flesta tvådimensionella figurerna har producerats med TikZ direkt i L^AT_EX, medan de tredimensionella graferna/figurerna har plottats främst med Mathematica, och i några fall med Maple.