TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

ARITMEETIKA JA ALGEBRA

1988

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL
Matemaatika õpetamise metoodika
kateeder

ARITMEETIKA JA ALGEBRA

Metoodiline juhend
matemaatika proseminariks

I

Teine, parandatud trükk

E.Abel, E.Jõgi, E.Mitt

TARTU 1988

Kinnitatud matemaatikateaduskonna nõukogus
25. märtsil 1988.a.

АРИФМЕТИКА И АЛГЕБРА.
Методическое руководство к просеминару
по математике. I.
Изд. 2-е, исправл.
Составители Элтс А б е л, Эрих Й ы г и, Эви М и т т.
На эстонском языке.
Тартуский государственный университет.
ЭССР, 202400, г.Тарту, ул.Юликооли, 18.
Vastutav toimetaja L. Lepmann.
Paljundamisele antud 28.06.1988.
Formaat 60x84/16.
Rotaatoripaber.
Masinakiri. Rotaprint.
Tingtrükipoognaid 9,3.
Arvestuspoognaid 8,56. Trükipoognaid 10,0.
Trükiarv 1000.
Tell. nr. 621.
Hind 30 kop.
TRÜ trükikoda. ENSV, 202400 Tartu, Tiigi t. 78.

EESSÕNA

Matemaatika proseminari ülesandeks on keskkoolis omandatud elementaarmatemaatika olulisemate teemade kordamine, sellealaste teadmiste süvendamine ning vastava sisuga ülesannete lahendamisoskuse viimistlemine.

Käesolev õppevahend sisaldab lühikokkuvõtte vajalikust teoreetilisest materjalist (mõisted, seosed, valemid) koos näiteülesannete ja kontrollküsimustega. Näiteülesanded on valitud nii, et nad süvendaksid koolis õpitut ja oleksid aluseks kõrgema kooli matemaatiliste distsipliinide paremale omandamisele.

Väljaanne "Aritmeetika ja algebra" hõlmab matemaatika proseminariks mõeldud materjalist esimese osa ning käsitleb tehteid arvude ja algebraliste avaldistega, suhte ja võrde ning protsentarvutuse põhimõisteid, võrrandite ja võrratuste lahendusmeetodeid.

Õppevahendi peatükid I–IV koostas E. Abel, V peatüki – E. Jõgi, VI peatüki – E. Mitt.

Koostajad

I TÄISARVUD

§1. Naturaalarvud

1. N a t u r a a l a r v u d e h u l k N_0. Arvu mõiste on matemaatika üks algmõisteid, mida ei defineerita mingite teiste mõistete kaudu. Kõige lihtsamateks arvudeks on n a t u r a a l a r v u d, mis tekkisid aastatuhandete vältel vajadusest loendada meid ümbritsevaid esemeid. Naturaalarvudeks on arvud 1, 2, 3, ... Kaasaja matemaatikas eksisteerib paralleelselt kaks erinevat käsitlust, millest ühes arv 0 loetakse naturaalarvude hulka kuuluvaks, teises aga mitte. Naturaalarvude hulk on lõpmatu ja selle hulga sümboliks on tavaliselt **N**. Edaspidi loeme ka arvu 0 naturaalarvuks ja tähistame vastavat hulka tähega N_0.

2. L i i t m i n e ja k o r r u t a m i n e. Öeldakse, et naturaalarvude hulk N_0 on kinnine liitmise ja korrutamise suhtes, s.t. iga kahe naturaalarvu a ja b summa $a + b$ ning korrutis $a \cdot b$ on alati naturaalarv.

Kahe naturaalarvu a ja b s u m m a k s on arv $a + b$, mis saadakse, kui naturaalarvude jadas arvust a arvu b võrra edasi loendada.

Kahe naturaalarvu a ja b k o r r u t i s e k s $a \cdot b$ nimetatakse summat, milles arv b esineb a korda liidetavana, s.t.

$$a \cdot b = \underbrace{b + b + \ldots + b}_{a \text{ liidetavat}}.$$

Mainitud tehetel on järgmised omadused:

1. kommutatiivsus
   $a + b = b + a, \quad a \cdot b = b \cdot a;$
2. assotsiatiivsus
   $(a + b) + c = a + (b + c), \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c);$
3. distributiivsus
   $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$

Seejuures mistahes naturaalarvu a korral

$$a + 0 = 0 + a = a, \quad a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0.$$

Võrdsete tegurite korrutise $\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ tegurit}}$ leidmist nimetatakse arvu a astendamiseks astendajaga n. Kõneldakse ka astmest a^n. Kui n = 1, siis defineeritakse $a^1 = a$. Kui n = 0, siis $a \neq 0$ korral loetakse $a^0 = 1$. Sümbol 0^0 aga ei oma mingit tähendust.

3. Lahutamine. Lahutamine on liitmise pöördtehe. Lahutada arvust a arv b, tähendab leida selline arv x, et $b + x = a$. Leitud arvu x nimetatakse arvude a ja b vaheks ning tähistatakse $x = a - b$. Naturaalarvude hulgas ei ole lahutamine alati teostatav. Näitena võiks tuua vahed 4 - 5 ja 20 - 100, mis ei kuulu hulka N_0.

4. Jagamine. Jagamine on korrutamise pöördtehe. Jagada arv a arvuga $b \neq 0$ tähendab leida selline arv x, et $a = b \cdot x$. Arvu x nimetatakse arvude a ja b jagatiseks ja tähistatakse $x = a : b$. Öeldakse ka, et arv a on arvu b kordne ehk arv a jagub arvuga b. Arvu b nimetatakse arvu a jagajaks ehk teguriks. Ka jagamine ei ole alati teostatav naturaalarvude hulgal N_0. Näiteks jagatised 3 : 2 ja 5 : 7 ei kuulu naturaalarvude hulka. Jagatised 3 : 3 = 1 ja 30 : 10 = 3 on aga naturaalarvulised. Jagamine arvuga 0 pole defineeritud.

5. Alg- ja kordarvud. Ühest suuremat naturaalarvu a nimetatakse algarvuks, kui tal on parajasti kaks erinevat jagajat, s.t. arv a jagub vaid iseendaga ja arvuga 1. Algarvudeks on arvud 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ... Juba Eukleides (3. sajand e.m.a.) tõestas, et algarvude hulk on lõpmatu. Tänini pole aga suudetud leida seaduspärasust, mille kohaselt paiknevad algarvud naturaalarvude jadas 1, 2, 3, 4, 5, ...

Ühest suuremat naturaalarvu, mis ei ole algarv, nimetatakse kordarvuks. Sellisteks on näiteks arvud 4, 75, 204, 1035, ...

Arv 1 ei ole ei alg- ega kordarv.

6. Aritmeetika põhiteoreem. On tõene järgmine lause (aritmeetika põhiteoreem).

Iga kordarv on ühesel viisil esitatav algarvude korrutisena.

Arvu esitamist algarvuliste tegurite korrutisena nimetatakse arvu a l g t e g u r i t e k s l a h u t a m i s e k s.

Näiteks arvude 96, 525 ja 1982 lahutamine algteguriteks toimub järgmise üldise skeemi kohaselt:

$$\begin{array}{r|l} 96 & 2 \\ 48 & 2 \\ 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 525 & 3 \\ 175 & 5 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1982 & 2 \\ 991 & 991 \\ 1 & \end{array}$$

$96=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3=2^5\cdot3$ $\quad 525=3\cdot5\cdot5\cdot7=3\cdot5^2\cdot7$ $\quad 1982=2\cdot991$

7. A r v u d e s u u r i m ü h i s t e g u r. Antud arvude ü h i s t e g u r i k s nimetatakse iga naturaalarvu, mis osutub kõigi antud arvude teguriks. Leides arvudele 45 ja 60 vastavad tegurite hulgad, saadakse

$$A_{45} = \{1;\ 3;\ 5;\ 9;\ 15;\ 45\},$$
$$A_{60} = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 10;\ 12;\ 15;\ 20;\ 30;\ 60\}.$$

Seega arvude 45 ja 60 ühisteguriteks on 1; 3; 5 ja 15. Kui antud arvudele a ja b vastavad tegurite hulgad A_a ja A_b on leitud, siis ühistegurite hulk on $T = A_a \cap A_b$. Suurimat arvu ühistegurite hulgas nimetatakse antud arvude s u u r i m a k s ü h i s t e g u r i k s. Toodud näites arvude 45 ja 60 suurimaks ühisteguriks on arv 15. Selle asjaolu märkimiseks võib kasutada tähistust

SÜT(45; 60) = 15 või S(45; 60) = 15.

Arve, mille suurimaks ühisteguriks on arv 1, nimetatakse ü h i s t e g u r i t a a r v u d e k s. Näiteks arvud 16 ja 25 on ühistegurita, sest SÜT(16; 25) = 1.

Arvude suurima ühisteguri leidmiseks lahutatakse kõik need arvud algtegureiks. Suurim ühistegur võrdub antud arvude kõigi ühiste algtegurite korrutisega.

Näide. Leida SÜT(126; 540; 630).

Lahendus. Lahutame arvud algtegureiks.

$$\begin{array}{r|l} 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 540 & 2 \\ 270 & 2 \\ 135 & 3 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 630 & 2 \\ 315 & 3 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 \qquad 540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \qquad 630 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$$

Ülaltoodud võtte kohaselt SÜT(126; 540; 630) = 2 · 3 ·3=18.

Vastus. SÜT(126; 540; 630) = 18.

Kui naturaalarvude a ja b korral SÜT(a; b) = d $\neq$ 1, siis leiduvad sellised naturaalarvud k ja l nii, et a = kd ja b = ld.

8. **A r v u d e v ä h i m ü h i s k o r d n e.** Antud arvude **ü h i s k o r d s e k s** nimetatakse iga naturaalarvu, mille jagajaks e. teguriks on iga antud arv. Näiteks arvude 8 ja 16 ühiskordseiks on arvud 16, 32, 48, 64 jne. Arvude 35 ja 15 ühiskordseiks on aga 105, 210, 420 jne. Vähimat arvu ühiskordsete hulgas nimetatakse antud arvude **v ä h i m a k s ü h i s k o r d s e k s**.

Näiteks arvude 8 ja 16 vähimaks ühiskordseks on arv 16, mille märkimiseks kasutatakse kirjutist

VÜK(8; 16) = 16 või V(8; 16) = 16.

Arvude 35 ja 15 korral aga VÜK(35; 15) = 105.

Arvude vähima ühiskordse leidmiseks lahutatakse kõik need arvud algtegureiks ja kirjutatakse välja kõik esimese arvu algtegurid, millele lisatakse teise arvu need algtegurid, mis esimese arvu algtegureiks lahutuses puuduvad, siis kolmanda arvu need algtegurid, mis puuduvad esimese ja teise arvu algtegurite lahutuses jne. Vähim ühiskordne võrdub kõigi nii väljakirjutatud algtegurite korrutisega.

Näide 1. Leida VÜK(270; 300; 315).

Lahendus. Lahutame arvud algtegureiks.

$$\begin{array}{r|l} 270 & 2 \\ 135 & 3 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 300 & 2 \\ 150 & 2 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 315 & 3 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$270=2\cdot 3^3\cdot 5 \qquad 300=2^2\cdot 3\cdot 5^2 \qquad 315= 3^2\cdot 5\cdot 7$$

Ülaltoodud eeskirja kohaselt VÜK(270; 300; 315) = $= 2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 = 18900$.

Vastus. VÜK(270; 300; 315) = 18900.

Kahe arvu a ja b vähima ühiskordse leidmisel esineb parajasti üks järgnevast kolmest võimalusest:

1) kui arvud a ja b on ühisteguritatud, siis VÜK(a; b) = $= a \cdot b$,

2) kui üks arvudest a ja b on teise kordne, näiteks $b = k \cdot a$, siis VÜK(a; b) = b,

3) kui SÜT(a; b) = $d \neq 1$, s.t. $a = k \cdot d$ ja $b = l \cdot d$, siis VÜK(a; b) = $k \cdot l \cdot d$.

Mistahes naturaalarvude a ja b korral kehtib võrdus

$$a \cdot b = \text{SÜT}(a; b) \cdot \text{VÜK}(a; b).$$

Näide 2. Leida arvude 72 ja 96 suurim ühistegur ja vähim ühiskordne.

Lahendus. Lahutame arvud 72 ja 96 algtegureiks.

$$\begin{array}{r|l} 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 96 & 2 \\ 48 & 2 \\ 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$72 = 2^3 \cdot 3^2 \qquad 96 = 2^5 \cdot 3$$

Siis SÜT(72; 96) = $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 8 \cdot 3 = 24$ ja VÜK(72;96)= $= 2^3 \cdot 3^2 \cdot 2^2 = 72 \cdot 4 = 288$. Nüüd pole raske kontrollida ka võrduse $72 \cdot 96$ = SÜT(72; 96) · VÜK(72; 96) kehtivust.

Vastus. SÜT(72; 96) = 24; VÜK(72;96) = 288.

Näide 3. Esimene laev jõuab tagasi sadamasse A iga

8 päeva järel, teine laev 10 päeva järel ja kolmas 15 päeva järel. Missuguse kõige lühema aja möödudes kohtuvad sadamas A esimene ja teine laev, esimene ja kolmas laev, kõik 3 laeva, kui laevad lahkusid sadamast A üheaegselt?

Lahendus. Esimese ja teise laeva kohtumiseks kuluv päevade arv peab olema nii arvu 8 kui ka 10 kordne. Lühim aeg on siis V(8; 10) = 40 päeva. Esimese ja kolmanda laeva kohtumiseks kulub vähemalt V(8; 15) = 120 päeva. Kõik kolm laeva kohtuvad V(8; 10; 15) = 120 päeva pärast.

Vastus. Esimene ja teine laev kohtuvad 40 päeva; esimene ja kolmas - 120 päeva ja kõik kolm laeva ka 120 päeva pärast.

Näide 4. Õunamüüjal oli müügiks pakutavaid õunu vähem kui 500. Kui müüja püüdis õunu letile asetada kahekaupa, jäi üks õun üle. Siis paigutas ta õunad letile kolmekaupa ja jälle jäi üks üle. Paigutades õunu nii nelja, viie kui ka kuuekaupa, osutus, et ikka üks õun jääb üle. Kuid seitsmekaupa õnnestus õunad lõpuks letile paigutada. Kui palju õunu oli müügiks?

Lahendus. Olgu otsitav õunte arv $N < 500$. Vastavalt ülesande tingimustele võime öelda, et arv N jagub arvuga 7 ning arv N - 1 jagub arvudega 2, 3, 4, 5 ja 6. Järelikult $(N - 1) \vdots$ VÜK(2; 3; 4; 5; 6). Et VÜK(2; 3; 4; 5; 6) = 60, siis otsitav arv N on arvust 500 väiksem arvuga 7 jaguv arv, mis on ühe võrra suurem teatavast arvu 60 kordsest. Liites kõigile ülesande tingimusi rahuldavatele arvu 60 kordsetele (60; 120; 180; 240; 300; 360; 420; 480) juurde arvu 1, saame, et ainuke 7-ga jaguv arv on 301.

Vastus. Müügiks pakuti 301 õuna.

9. A r v u s t a n d a r d k u j u. Arvude tähistamiseks vajatakse numbrimärke ja neist arvude moodustamise süsteeme. Naturaalarvude üleskirjutamiseks kasutatakse nn. positsioonilist arvusüsteemi, mille aluseks on tavaliselt arv 10. Kasutatakse kümmet numbrimärki 0, 1, 2, ..., 9, kusjuures iga numbri väärtus sõltub tema asendist (positsioonist) arvu tähises. Positsioonilises arvusüsteemis on arve võimalik üles kirjutada süsteemi aluse astmete abil. Nii näiteks 4256 tähendab kümnendsüsteemis arvu

$$4 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0.$$

Mistahes n-kohalise kümnendsüsteemi naturaalarvu m, mille üheliste numbrit tähistagu a_1, kümneliste numbrit a_2, sajaliste numbrit a_3 jne., üleskirjutus kümne astmete kaudu (a r v u s t a n d a r d k u j u) on järgmine

$$m = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_3 a_2 a_1} = a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} +$$

$$+ \ldots + a_3 \cdot 10^2 + a_2 10^1 + a_1 \cdot 10^0.$$

Kaasaegsetes arvutites kasutatakse laialdaselt kahend-, kaheksand- ja kuueteistkümnendsüsteemi.

§2. Täisarvud

1. T ä i s a r v u d e h u l k Z. Naturaalarvude hulk N_0 ei ole kinnine lahutamise suhtes. Kõneldakse naturaalarvude h u l g a N_0 l a i e n d a m i s e s t, kui lisatakse hulga N_0 elementidele uusi arve nii, et saadud hulk oleks kinnine liitmise, korrutamise ja lahutamise suhtes ning samal ajal säiliksid kõik naturaalarvude hulgal defineeritud tehete omadused.

Naturaalarvu a v a s t a n d a r v u k s $-a$ nimetatakse arvu, mille summa antud arvuga a on võrdne nulliga. Seega

$$a + (-a) = 0.$$

Hulka, mis koosneb naturaalarvudest 1, 2, 3, ..., nende vastandarvudest -1, -2, -3, ... ning arvust 0, nimetatakse t ä i s a r v u d e h u l g a k s ja tähistatakse sümboliga Z. Hulk Z on kinnine kolme tehte - liitmise, korrutamise ja lahutamise suhtes.

On tõene järgmine lause.

Iga täisarv on esitatav kahe naturaalarvu vahena.

Märkigem siinkohal, et selline esitus ei ole ühene. Tõepoolest, arvu -7 võib esitada näiteks vahedena

$$-7 = 7 - 14, \quad -7 = 14 - 21, \quad -7 = 53 - 60 \quad \text{jne.}$$

Naturaalarve 1, 2, 3, ... nimetatakse p o s i t i i v s e t e k s t ä i s a r v u d e k s , nende vastandarve -1, -2, -3, ... aga n e g a t i i v s e t e k s t ä i s a r v u d e k s.

2. T ä i s a r v u d e j a g u v u s. Öeldakse et täisarv a j a g u b täisarvuga b, kui leidub selline täisarv c, et $a = b \cdot c$, ja kirjutatakse $a \vdots b$. Kirjutis $m \not\vdots n$ tähendab, et arv m ei jagu arvuga n.

Täisarvude jaguvusel on järgmised ülaltoodud definitsioonist lihtsalt järelduvad omadused.

1. $a \vdots a$ ja $a \vdots 1$ iga $a \in Z$ korral.
2. $0 \vdots a$, $a \neq 0$.
3. Kui $a \vdots b$ ja $b \vdots c$, siis $a \vdots c$.
4. Kui $a \vdots b$ ja $b \vdots a$, siis $a = b$ või $a = -b$.
5. Kui $a \vdots b$, siis $(a \cdot c) \vdots b$ iga $c \in Z$ korral.
6. Kui $a \vdots c$ ja $b \vdots c$, siis $(x \cdot a \pm y \cdot b) \vdots c$ iga $x, y \in Z$ korral.
7. Kui $a \vdots b$ ja $b = c \cdot d$, siis $a \vdots c$ ja $a \vdots d$.
8. Kui $a \vdots b$ ja $c \not\vdots b$, siis ka $(a + c) \not\vdots b$.

Mitmesuguste ülesannete lahendamisel on tihti vaja otsustada, kas mingi arv või avaldis jagub antud arvuga. Lahendamist hõlbustavad arvude jaguvuse omadused, mida tuntakse arvude j a g u v u s t u n n u s t e nime all.

Vaatame näitena, kuidas on võimalik tuletada jaguvustunnust arvuga 2. Olgu antud n-kohaline naturaalarv standardkujul $m = a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_3 \cdot 10^2 + a_2 \cdot 10^1 + a_1$. Arv 10 ja tema suvaline aste 10^k $(k \in N)$ jagub arvuga 2. Jaguvuse kuuenda omaduse põhjal võime siis öelda, et avaldis $a_k \cdot 10^{k-1} + a_{k-1} \cdot 10^{k-2} + \ldots + a_3 \cdot 10^2 + a_2 \cdot 10^1$ jagub arvuga 2. Järelikult arvu m jaguvus arvuga 2 sõltub arvu m üheliste numbrist. Järelikult jagub täisarv arvuga 2 parajasti siis, kui ta lõpeb ühega numbritest 0, 2, 4, 6 või 8.

Täisarve, mis jaguvad arvuga 2, nimetatakse p a a r i s a r v u d e k s . Iga paarisarv on esitatav kujul $2 \cdot k$, kus $k \in Z$. Täisarve, mis ei jagu arvuga 2, nimetatakse p a a r i t u t e k s arvudeks. Suvalise paaritu arvu võib esitada kujul $2k + 1$, kus $k \in Z$.

Üsna lihtsalt on tuletatav ka jaguvustunnus näiteks arvuga 3 (või ka arvuga 9).

Esitame standardkujul antud n-kohalise naturaalarvu m kujul

$$m = a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_3 \cdot 10^2 + a_2 \cdot 10^1 + a_1 = a_n(10^{n-1} - 1) + a_{n-1}(10^{n-2} - 1) + a_3(10^2 - 1) + a_2(10^1 - 1) + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n.$$

Kergesti on kontrollitav, et iga vahe $10^k - 1$, kus $k = 1, 2, 3, \ldots,$ jagub arvuga 3 (ka arvuga 9). Seega antud arv m jagub arvuga 3 (arvuga 9) parajasti siis, kui arvu kõikide numbrite summa (r i s t s u m m a) $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$ jagub arvuga 3 (vastavalt arvuga 9).

Analoogiliselt on tuletatavad ka jaguvustunnused suvalise naturaalarvuga. Piirdume siinkohal vaid arvudega 4, 5, 8, 10, 25 ja 100 jaguvustunnuste sõnastustega.

1. Arv jagub 4-ga parajasti siis, kui arvu kahest viimasest numbrist moodustatud arv jagub 4-ga.

2. Arv jagub 5-ga parajasti siis, kui ta lõpeb numbriga 5 või 0.

3. Arv jagub 8-ga parajasti siis, kui arvu kolmest viimasest numbrist moodustatud arv jagub 8-ga.

4. Arv jagub 10-ga parajasti siis, kui ta lõpeb numbriga 0.

5. Arv jagub 25-ga parajasti siis, kui arvu kaks viimast numbrit on nullid või moodustavad ühe arvudest 25, 50 või 75.

6. Arv jagub 100-ga parajasti siis, kui ta lõpeb kahe nulliga.

Eraldi rühma moodustavad jaguvustunnused arvudega 7, 11 ja 13 (vt. näiteks Kowal, S. Meelelahutusest teadmiseni. Tln., Valgus, 1979, lk. 205-211).

Mis puutub jaguvustunnustesse ülejäänud algarvudega, siis praktiliselt osutub lihtsamaks jagamise teel (kui see on võimalik) kindlaks teha jaguvuse küsimus, kui kasutada vastavaid jaguvustunnuseid.

Siiski võimaldab jaguvustunnuste ja arvude jaguvuse omaduste teadmine lihtsustada mõnede ülesannete lahenduskäiku.

Näide 1. Kas arvud 73128 ja 573 jaguvad arvuga 24?

Lahendus. Arvuga 24 jaguvad need arvud, mis on samaaegselt nii arvu 3 kui ka arvu 8 kordsed. Arvude 73128 ja 573 ristsummad on vastavalt 21 ja 15. Seega mõlemad arvud jaguvad arvuga 3. Kontrollime jaguvust arvuga 8. Arvu 73128 kolmest viimasest numbrist moodustatud arv on 128 ning 128 ⋮ 8. Järelikult arv 73128 jagub arvuga 24. Arv 573 on aga paaritu arv, seega ta ei jagu arvuga $8 = 2^3$ ega järelikult ka arvuga 24.

Vastus. Arv 73128 jagub arvuga 24, 573 aga mitte.

Näide 2. Milline number tuleks kirjutada 15-kohalises arvus 555...55* üheliste kohale, et saadud arv jaguks arvuga 6.

Lahendus. Kuna arvuga 6 jaguvad arvud, mis on samaaegselt nii arvu 2 kui ka 3 kordsed, peab otsitav arv olema paarisarv, mille ristsumma jagub 3-ga. Et vaadeldava arvu ristsumma saamiseks tuleb arvule $14 \cdot 5 = 70$ lisada sobiv üheliste number arvude 0, 2, 4, 6 või 8 seast, võib otsitavas arvus üheliste kohale kirjutada numbrid 2 või 8.

Vastus. Arvuga 6 jaguvad 15-kohalised arvud 555...52 ja 555...58.

3. Jäägiga jagamine. Täisarvude hulgal Z ei ole jagamine alati teostatav. Seepärast võetakse kasutusele nn. jäägiga jagamise mõiste.

On tõene järgmine lause.

Mistahes täisarvude a ja b > 0 korral leidub parajasti üks täisarvude paar q ja r nii, et

1) $0 \leq r < b$;

2) $a = q \cdot b + r$, ehk $\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b}$.

Öeldakse, et arv a on jagatud arvuga b jäägiga r.

Arvu a nimetatakse jagatavaks, arvu b – jagajaks, arvu q – mittetäielikuks jagatiseks ja arvu r – jäägiks.

Tingimustest 1) ja 2) järeldub, et täisarvude a ja b jagamisel tekkinud jääk r on üks arvudest 0, 1, 2, ..., b – 1, ning et täisarv a jagub täisarvuga b parajasti siis, kui jääk $r = 0$.

Näide. Leida mittetäielikud jagatised ja jäägid, mis tekivad arvude 37 ja -49 jagamisel arvuga 11.

Lahendus. $37 : 11 = 3$ (jääk 4) ehk $37 = 3 \cdot 11 + 4$,
$-49 : 11 = -5$ (jääk 6) ehk $-49 = -5 \cdot 11 + 6$

Märkus. Negatiivsete arvude jagamisel eksitakse tihti jäägi määramisel tingimuse 1) vastu. Kirjutatakse näiteks, et $-49 = (-4) \cdot 11 - 5$. Kuigi võrdus kehtib, ei vasta see jäägiga jagamise esimesele nõudele, sest siin $r=-5<0$.

Kontrollküsimused

1. Millised arvud kuuluvad hulka N_0?
2. Millised tehted on alati sooritatavad naturaalarvude hulgal N_0?
3. Kas naturaalarvude hulk N_0 on lõplik või lõpmatu?
4. Kas naturaalarvude hulgas N_0 leidub suurimat elementi? Vähimat elementi?
5. Sõnastada liitmise tehte omadused.
6. Kuidas muutub summa, kui a) üht liidetavat suurendada 6 võrra; b) üht liidetavatest suurendada 9 võrra, aga teist 5 võrra; c) üht liidetavat suurendada 9 võrra, teist aga vähendada 5 võrra?
7. Kuidas on defineeritud lahutamine?
8. Kas lahutamine on alati teostatav naturaalarvude hulgal N_0?
9. Arvust a lahutati arv b. Kuidas nimetatakse teostatud tehte komponente ja resultaati?
10. Kuidas muutub vahe, kui a) vähendatavat suurendada 7 võrra, aga vähendajat suurendada 5 võrra; b) vähendatavat suurendada 8 võrra, vähendajat vähendada 4 võrra; c) vähendatavat vähendada 3 võrra, vähendajat suurendada 6 võrra?
11. Mida tähendab arvu a korrutamine arvuga b?
12. Kas korrutamine on alati teostatav naturaalarvude hulgal N_0?
13. Sõnastada korrutamise tehte omadused.
14. Kuidas muutub kahe teguri korrutis, kui a) üht tegurit suurendada 4 korda; b) üht tegurit suurendada 5 korda, teist aga vähendada 5 korda?
15. Millistel juhtudel on kahe naturaalarvu korrutis võrdne

ühega tegureist; kummagi teguriga?

16. Kuidas on defineeritud kahe arvu jagamine?
17. Kas jagamine on alati teostatav naturaalarvude hulgal N_0?
18. Kuidas muutub jagatis, kui jagatavat suurendada 12 korda, aga jagajat vähendada 2 korda?
19. Millistel juhtudel on kahe antud naturaalarvu jagatis võrdne ühega antud arvudest; kummagi arvuga?
20. Jagatavat suurendati 2 korda. Kuidas muuta jagajat, et jagatis väheneks 3 korda?
21. Milliseid arve nimetatakse algarvudeks, milliseid kordarvudeks?
22. Kas arvud -10; -7; -3; 0; 1; 3; 11; 14 on alg- või kordarvud?
23. Sõnastage aritmeetika põhiteoreem.
24. Millal öeldakse, et arv a jagub arvuga b?
25. Mida nimetatakse arvu ristsummaks?
26. Sõnastage jaguvustunnused arvudega 2, 3, 4, 5, 8, 9,10, 25 ja 100.
27. Missugused arvud jaguvad arvuga 6, missugused aga arvuga 14?
28. Missugustel tingimustel kahe arvu summa kindlasti jagub arvuga m?
29. Missugustel tingimustel kahe arvu summa kindlasti ei jagu antud arvuga m?
30. Millal korrutis kindlasti jagub algarvuga?
31. Millal korrutis kindlasti jagub kordarvuga?
32. Millal kahe arvu vahe kindlasti jagub antud arvuga m?
33. Milliseid arve nimetatakse antud arvu tegureiks?
34. Milliseid arve nimetatakse antud arvude ühistegureiks?
35. Millist arvu nimetatakse antud arvude suurimaks ühisteguriks ja kuidas ta leitakse?
36. Milliseid arve nimetatakse ühistegurita arvudeks?
37. Milliseid arve nimetatakse antud arvu kordseiks?
38. Milliseid arve nimetatakse antud arvude ühiskordseiks?
39. Millist arvu nimetatakse antud arvude vähimaks ühiskordseks ja kuidas ta leitakse?
40. Millised arvudest -10; 7; $\frac{3}{4}$; 0,75; -1,01; 2; 200; -1237,

0 on naturaalarvud, millised täisarvud?

41. Milline on täisarvude hulga suurim (vähim) element?

42. Milliste tehete suhtes on kinnine naturaalarvude hulk N_0, täisarvude hulk Z?

43. Kuidas on võimalik esitada iga täisarvu naturaalarvude abil?

44. Milliseid täisarve nimetatakse paarisarvudeks; paarituteks arvudeks?

45. Milliseid arve on rohkem, kas paaris- või paarituid?

46. Kuidas defineeritakse naturaalarvu a aste a^n, kui $n > 1$; kui $n = 1$ ja kui $n = 0$?

47. Millist arvu nimetatakse naturaalarvu vastandarvuks?

48. Kas naturaalarvude vastandarvud on naturaalarvud?

49. Kas igal täisarvul on vastandarv?

50. Nimetage arvude 1, 5, 100, 0, -3, -75 vastandarvud, kui võimalik.

51. Mitmekohalisi arve kujutavad järgmised esitused:

1) $4 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$;

2) $2 \cdot 10^7 + 3 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^0$;

3) $9 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^0$?

52. Esitage arvud 752; 10200; 5432 ja $\overline{mnxyz}$ standardkujul.

53. Andke (m + 1)-kohalise naturaalarvu üleskirjutus 10 astmete kaudu.

54. Kas võib täisarvu a jagamisel arvuga 13 tekkida jääk, mis on võrdne ühega arvudest 0; 1; -3; -13; 7; 12; 13; 20?

55. Kas võib öelda, milline jääk tekib täisarvude a ja b summa a + b (korrutise ab) jagamisel arvuga m, kui on teada, et a ja b jagamisel arvuga m tekkinud jäägid on vastavalt r_1 ja r_2?

II MURDARVUD

§3. Harilikud murrud

1. **H a r i l i k u   m u r r u   m õ i s t e.** Kahe naturaalarvu a ja $b \neq 0$ jagamine on teostatav vaid siis, kui arv a on arvu b kordne. Vastasel juhul ei ole jagatis $a : b$ naturaalarvuline. Et saada uus naturaalarve sisaldav arvude hulk, mis säilitaks hulgal N_0 defineeritud tehted ning oleks samal ajal ka kinnine jagamise suhtes, laiendatakse hulka N_0 uute arvudega – harilike murdudega. H a r i l i k u k s   m u r r u k s nimetatakse kahe (nullist erineva) naturaalarvu jagatist $a : b$ ja tähistatakse sümboliga $\frac{a}{b}$. Arvu a nimetatakse m u r r u   l u g e j a k s, arvu b – m u r r u   n i m e t a j a k s.

Murdu, mille lugeja on väiksem nimetajast ($a < b$), nimetatakse l i h t m u r r u k s. Näiteks murrud $\frac{2}{5}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{1037}$; $\frac{343}{344}$. L i i g m u r r u k s nimetatakse murdu, mille lugeja ei ole väiksem nimetajast ($a \geqslant b$). Näiteks murrud $\frac{3}{3}$; $\frac{5}{3}$; $\frac{103}{4}$; $\frac{4}{1}$.

Iga naturaalarv $a \neq 0$ on esitatav liigmurruna $\frac{a}{1}$.

2. **M u r r u   p õ h i o m a d u s.** Kahte harilikku murdu $\frac{a}{b}$ ja $\frac{c}{d}$ nimetatakse võrdseiks, kui $a \cdot d = b \cdot c$. Murdude võrdsuse tingimusest tuleneb m u r r u   p õ h i o m a d u s.

Kui murru lugejat ja nimetajat korrutada või jagada ühe ja sama (nullist erineva) naturaalarvuga, siis murru väärtus ei muutu, s.t.

$$\frac{a}{b} = \frac{k \cdot a}{k \cdot b},$$

kui naturaalarv $k \neq 0$.

Põhiomaduse tõestus põhineb murdude võrdsuse tingimusel $a \cdot (k \cdot b) = b \cdot (k \cdot a)$.

Murru lugeja ja nimetaja korrutamist ühe ja sama arvuga nimetatakse murru l a i e n d a m i s e k s, jagamist aga murru t a a n d a m i s e k s.

Murdu, mille lugeja ja nimetaja on ühistegurita arvud, nimetatakse t a a n d u m a t u k s m u r r u k s. Näiteks on taandumatud murrud $\frac{2}{3}$; $\frac{7}{5}$; $\frac{107}{3}$, $\frac{5}{1}$. Kui aga murru lugejal ja nimetajal leidub ühiseid tegureid, kõneldakse t a a n d u v a s t murrust. Taanduva murru $\frac{a}{b}$ taandamise loetakse lõpetatuks, kui on leitud selline taandumatu murd $\frac{m}{n}$, mis on võrdne esialgse taanduva murruga $\frac{a}{b}$.

Näide. Taandada murd $\frac{420}{1800}$.

Lahendus. Esimene võte - järjestikune taandamine. Taandatakse murdu mitu korda järjest lugeja ja nimetaja ühiste teguritega, kuni jõutakse taandumatu murruni. Antud murru $\frac{420}{1800}$ puhul võib näiteks taandada järjest lugeja ja nimetaja ühiste teguritega 10, 2 ja 3, s.t.

$$\frac{420}{1800} = \frac{42}{180} = \frac{21}{90} = \frac{7}{30}.$$

Ratsionaalsemaks osutub täieliku taandamise võte, mille puhul taandatakse murdu lugeja ja nimetaja suurima ühisteguriga. Kuna antud näites $420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ ja $1800 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2$, siis SÜT(420; 1800) $= 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$. Taandades nüüd murdu $\frac{420}{1800}$ arvuga 60, jõuame kohe taandumatu murruni $\frac{7}{30}$.

3. Ü h e - j a e r i n i m e l i s e d m u r r u d. Murde, mille nimetajad on võrdsed, nimetatakse ü h e- e h k s a m a n i m e l i s t e k s murdudeks. Näiteks $\frac{25}{3}$, $\frac{1}{3}$ ja $\frac{3}{3}$. Vastasel korral kõneldakse e r i n i m e l i s t e s t murdudest. Näiteks $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{3}$ ja $\frac{10}{7}$.

Kasutades murru põhiomadust võib ka erinimelisi murde teisendada ühenimelisteks, laiendades murde sobiva teguriga nii, et ühiseks nimetajaks oleks lähtemurdude nimetajate väiksem ühiskordne.

Kuna kahe arvu väiksema ühiskordse leidmisel esineb kolm juhtumit , siis ka kahe taandumatu erinimelise murru $\frac{a}{b}$ ja $\frac{c}{d}$ $(b \neq d)$ teisendamisel ühenimelisteks võib vaadelda kolme järgmist võimalust.

1. Olgu nimetajad b ja d ühisteguritа arvud. Siis VÜK(b; d) $= b \cdot d$ ning

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} \text{ ja } \frac{c}{d} = \frac{c \cdot b}{d \cdot b}.$$

2. Olgu üks nimetajatest b ja d teise kordne. Näiteks, $b = k \cdot d$, siis VÜK(b; d) $= b$ ning

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{b} \quad \text{ja} \quad \frac{c}{d} = \frac{k \cdot c}{k \cdot d} = \frac{k \cdot c}{b}.$$

3. Olgu nimetajate b ja d suurimaks ühisteguriks arv m, s.t. $b = m \cdot k$ ja $d = m \cdot n$. Siis VÜK $(b;\ d) = m \cdot k \cdot n$ ning

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a \cdot n}{m \cdot k \cdot n} \quad \text{ja} \quad \frac{c}{d} = \frac{c \cdot k}{d \cdot k} = \frac{c \cdot k}{m \cdot n \cdot k}.$$

Näide. Teisendada ühenimelisteks järgmised murrud: 1) $\frac{3}{5}$ ja $\frac{7}{10}$; 2) $\frac{4}{7}$ ja $\frac{6}{5}$; 3) $\frac{3}{12}$ ja $\frac{5}{8}$; 4) $\frac{51}{105}$ ja $\frac{7}{9}$; 5) $\frac{2}{300}$; $\frac{4}{1}$ ja $\frac{351}{315}$.

Lahendus. 1) Kuna $10 = 2 \cdot 5$, siis VÜK$(5;\ 10) = 10$ ja

$$\frac{3^{\backslash 2}}{5} = \frac{6}{10};$$

2) Kuna SÜT$(7;\ 5) = 1$, siis VÜK$(7;\ 5) = 35$ ning

$$\frac{4^{\backslash 5}}{7} = \frac{20}{35} \quad \text{ja} \quad \frac{6^{\backslash 7}}{5} = \frac{42}{35}.$$

3) Kuna SÜT$(8;\ 12) = 4$ ning $8 = 2 \cdot 4$ ja $12 = 3 \cdot 4$, siis VÜK$(8;\ 12) = 8 \cdot 3 = 24$. Seega

$$\frac{3^{\backslash 2}}{12} = \frac{6}{24} \quad \text{ja} \quad \frac{5^{\backslash 3}}{8} = \frac{15}{24}.$$

4) Teisendamine muutub hõlpsamaks, kui enne taandada murdu $\frac{51}{105}$ lugeja ja nimetaja suurima ühisteguriga 17, saame $\frac{51}{105} = \frac{3}{5}$. Teisendades nüüd ühenimelisteks murrud $\frac{3}{5}$ ja $\frac{7}{9}$, leiame, et $\frac{3^{\backslash 9}}{5} = \frac{27}{45}$ ja $\frac{7^{\backslash 5}}{9} = \frac{35}{45}$.

5) Ka siin ülesandes taandame esmalt viimasse murru arvuga 9, s.t.

$$\frac{351}{315} = \frac{39}{35}.$$

Kuna $300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$ ja $35 = 5 \cdot 7$, siis VÜK$(300;\ 1;\ 35) = 300 \cdot 7 = 2100$. Seega

$$\frac{2^{\backslash 7}}{300} = \frac{14}{2100}; \quad \frac{4^{\backslash 2100}}{1} = \frac{8400}{2100}; \quad \frac{39^{\backslash 2^2 \cdot 3 \cdot 5}}{35} = \frac{2340}{2100}.$$

4. Harilike murdude võrdlemine. Murdude järjestamisel suuruse järgi lähtutakse järgmistest printsiipidest.

1. Ühenimelistest murdudest on suurem murd, mille lugeja on suurem. Näiteks $\frac{3}{5} > \frac{2}{5}$; $\frac{35}{26} > \frac{1}{26}$.

2. Võrdsete lugejatega erinimelistest murdudest on suu-

rem murd, mille nimetaja on väiksem. Näiteks $\frac{6}{7} > \frac{6}{11}$; $\frac{5}{1} > \frac{5}{7}$.

3. Mittevõrdsete lugejatega erinimeliste murdude võrdlemiseks tuleb murrud teisendada kas ühenimelisteks või siis võrdsete lugejatega murdudeks ning kasutada vastavat tunnust. Näiteks $\frac{6}{7} > \frac{2}{3}$, sest $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$ ning $\frac{6}{7} > \frac{6}{9}$ tunnuse 2. põhjal. Kuid $\frac{2}{3} > \frac{5}{9}$, sest $\frac{2}{3} = \frac{6}{9} > \frac{5}{9}$ tunnuse 1. põhjal.

5. H a r i l i k e m u r d u d e l i i t m i n e .

Kahe ühenimelise murru $\frac{a}{b}$ ja $\frac{c}{b}$ summa defineeritakse võrdusega

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b} .$$

Näide 1. $\frac{5}{6} + \frac{7}{6} = \frac{12}{6} = \frac{2}{1} = 2.$

Kahe erinimelise murru $\frac{a}{b}$ ja $\frac{c}{d}$ liitmiseks teisendatakse murrud ühenimelisteks ja siis liidetakse kui ühenimelisi murde. Kuna ühenimelisteks teisendamisel esineb kolm juhtumit, siis ka erinimeliste murdude liitmisel võib vaadelda kolme võimalust. Selgitame neid näite varal.

Näide 2. Arvutada 1) $\frac{3}{5} + \frac{6}{7}$; 2) $\frac{2}{3} + \frac{5}{18}$; 3) $\frac{7}{24} + \frac{5}{36}$.

Lahendus. 1) Kuna SÜT(5; 7) = 1, siis VÜK(5; 7) = 35. Seega

$$\frac{3}{5} + \frac{5}{7} = \frac{3 \cdot 7 + 5 \cdot 5}{35} = \frac{21 + 25}{35} = \frac{46}{35} .$$

2) Kuna 18 = 6 · 3, siis VÜK(18; 3) = 18. Seega

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{18} = \frac{12 + 5}{18} = \frac{17}{18}.$$

3) Kuna $24 = 2^3 \cdot 3$ ja $36 = 2^2 \cdot 3^2$, siis SÜT(24; 36) = $= 2^2 \cdot 3 = 12$ ning VÜK(24; 36) = 12 · 2 · 3 = 72. Seega

$$\frac{7}{24} + \frac{5}{36} = \frac{21 + 10}{72} = \frac{31}{72}.$$

Kahe hariliku murru summa on alati harilik murd (miks?). Murdude liitmine säilitab kõik naturaalarvude liitmise omadused (kontrollida!).

Murdarvu, mis on esitatud naturaalarvu ja lihtmurru summana, nimetatakse s e g a a r v u k s. Näiteks esitatakse arvude 3 ja $\frac{1}{4}$ summa segaarvuna $3\frac{1}{4}$. Iga liigmurd on esitatav segaarvuna ja vastupidi. Näiteks võib liigmurdu $\frac{135}{8}$ esitada segaarvuna $\frac{16 \cdot 8 + 7}{8} = \frac{16 \cdot 8}{8} + \frac{7}{8} = 16\frac{7}{8}$.

6. H a r i l i k e   m u r d u d e   k o r r u t a m i n e. Kahe hariliku murru $\frac{a}{b}$ ja $\frac{c}{d}$ k o r r u t a m i n e defineeritakse võrdusega

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Kahe suvalise hariliku murru korrutis on harilik murd (miks?).

Arvu m nimetatakse arvu n p ö ö r d a r v u k s, kui nende korrutis on võrdne arvuga 1. Pöördarvudeks on näiteks murrud $\frac{1}{2}$ ja 2 ning $\frac{4}{5}$ ja $\frac{5}{4}$.

Murru $\frac{a}{b}$ pöördarvuks on alati murd $\frac{b}{a}$.

Harilike murdude korrutamisel säilivad kõik naturaalarvude korrutamise omadused (kontrollida!).

7. H a r i l i k e   m u r d u d e   j a g a m i n e. Hriliku murru $\frac{a}{b}$ jagamiseks murruga $\frac{c}{d}$ tuleb jagatavat $\frac{a}{b}$ korrutada jagaja pöördarvuga $\frac{d}{c}$, s.t.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c},$$

Näiteks

$$\frac{5}{7} : \frac{10}{3} = \frac{5}{7} \cdot \frac{3}{10} = \frac{5 \cdot 3}{7 \cdot 10} = \frac{3}{14}.$$

Seega, murru $\frac{a}{b}$ pöördarvu leidmiseks tuleb $1 : \frac{a}{b} = 1 \cdot \frac{b}{a} = \frac{b}{a}$.

§4. Ratsionaalarvud

1. H a r i l i k e   m u r d u d e   l a h u t a m i n e. Olgu ülesandeks leida kahe hariliku murru $\frac{m}{n}$ ja $\frac{p}{n}$ vahe $\frac{m}{n} - \frac{p}{n}$. Lahutamise tehte definitsioonist lähtudes tuleb leida selline arv x, et

$$x + \frac{p}{n} = \frac{m}{n}.$$

Korrutades selle võrduse mõlemaid pooli naturaalarvuga n, saadakse võrdus

$$x \cdot n + p = m,$$

millest

$$x \cdot n = m - p.$$

Kui nüüd m − p on naturaalarv (s.t. kui $m > p$), siis on vahe $\frac{m}{n} - \frac{p}{n}$ harilik murd ning

$$x = \frac{m}{n} - \frac{p}{n} = \frac{m - p}{n}.$$

Kuna aga kahe mistahes naturaalarvu vahe pole alati naturaalarv, siis ka harilike murdude hulk pole kinnine lahutamise tehte suhtes. Et sellest puudusest vabaneda, tuuakse sisse harilike murdude vastandarvud nii, nagu seda tehti naturaalarvudegi korral. Hariliku murru $\frac{a}{b}$ vastandarvu $-\frac{a}{b}$ nimetatakse **negatiivseks murdarvuks.**

2. **Ratsionaalarvude hulk Q.** Arvude hulka, mis koosneb harilikest murdudest, nende vastandarvudest ja arvust 0 nimetatakse **ratsionaalarvude hulgaks** Q. On tõene järgmine lause.

Iga ratsionaalarv on esitatav mingi kahe täisarvu a ja $b \neq 0$ jagatisena $\frac{a}{b}$.

Selline esitus pole kaugeltki ühene. Näiteks $2 = \frac{4}{2} = \frac{8}{4} = \frac{20}{10}$, $\frac{1}{3} = \frac{3}{9} = \frac{30}{90}$ jne.

Ratsionaalarvude hulk Q on kinnine liitmise, lahutamise, korrutamise ja nullist erinevate arvudega jagamise suhtes.

§5. Kümnendmurrud

1. **Kümnendmurru mõiste.** Ratsionaalarvu, mille nimetajaks on arvu 10 mingi naturaalarvuline aste 10^n $(n \in N_0)$, nimetatakse **kümnendmurruks.** Kümnendmurdu

$$a_k \cdot 10^{k-1} + a_{k-1} \cdot 10^{k-2} + \ldots + a_2 \cdot 10 + a_1 + \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \ldots + \frac{b_l}{10^l},$$

kus $0 \leq a_i \leq 9$, $(i = 1, \ldots, k-1)$, $1 \leq a_k \leq 9$; $0 \leq b_j \leq 9$ $(j = 1, \ldots, l)$, esitatakse kokkuleppeliselt kujul

$$\overline{a_k\, a_{k-1} \ldots a_1,\, b_1\, b_2 \ldots b_l}.$$

Näiteks $\frac{3}{10} = 0{,}3$; $\frac{7}{10^2} = 0{,}07$; $\frac{305}{10^3} = 0{,}305$; $3 \cdot 10 + 5 + \frac{2}{10} + \frac{4}{10^2} = 35{,}24$.

Lõpmatuteks kümnendmurdudeks nimetatakse arve, mida esitatakse kümnendmurdudele sarnasel kujul. kuid milles kümnendkohti paremal pool koma on lõpmata palju, s.t. arve kujul

$$\overline{a_k a_{k-1} \ldots a_1, b_1 b_2 \ldots b_n \ldots} .$$

Lõpmatut kümnendmurdu nimetatakse perioodiliseks, kui arvu murdosa mingist kohast alates teatav number või numbrite rühm lõpmatult kordub. Korduvat numbrite rühma nimetatakse perioodiks. Kui periood algab vahetult pärast koma, siis nimetatakse kümnendmurdu puhtperioodiliseks, vastasel korral aga segaperioodiliseks. Näiteks on lõpmatuteks puhtperioodilisteks kümnendmurdudeks murrud $0,333... = 0,(3)$ perioodiga 3 ja $67,451451451... = 67,(451)$ perioodiga 451; segaperioodilisteks on aga murrud $0,332565656... = 0,332(56)$ ning $12,092939293... = 12,0(9293)$.

Kui korduvat numbrite rühma lõpmatu kümnendmurru murdosas ei leidu, kõneldakse ka mitteperioodilisest kümnendmurrust.

Iga lõplikku või lõpmatut perioodilist kümnendmurdu on võimalik esitada ratsionaalarvuna, s.t. kahe täisarvu jagatisena ja vastupidi, iga ratsionaalarv on esitatav kas lõpliku või lõpmatu perioodilise kümnendmurruna.

Märkus. Iga lõplikku kümnendmurdu võib vaadelda ka kui lõpmatut perioodilist kümnendmurdu. Näiteks $2,35 = 2,3500... = 2,35(0)$.

2. Hariliku murru teisendamine kümnendmurruks. Iga harilik murd on esitatav kas lõpliku või lõpmatu perioodilise kümnendmurruna.

Taandumatud harilikud murrud, mille nimetaja algteguriteks on ainult arvud 2 ja 5, teisenevad lõplikeks kümnendmurdudeks. Näiteks

$$\frac{3}{40} = \frac{3}{2^3 \cdot 5} = \frac{3 \cdot 5^2}{2^3 \cdot 5^3} = \frac{75}{10^3} = 0,075;$$

$$\frac{9}{625} = \frac{9}{5^4} = \frac{9 \cdot 2^4}{5^4 \cdot 2^4} = \frac{144}{10^4} = 0,0144;$$

$$\frac{5}{8} = \frac{5}{2^3} = \frac{5 \cdot 5^3}{2^3 \cdot 5^3} = \frac{625}{10^3} = 0,625.$$

Taandumatud harilikud murrud, mille nimetaja algtegurite seas leidub arvudest 2 või 5 erinevaid algarve, teisenevad lõpmatuteks perioodilisteks kümnendmurdudeks.

Hariliku murru teisendamiseks kümnendmurruks tuleb murru lugeja jagada nimetajaga. Näiteks $\frac{2}{3} = 2 : 3 = 0,(6)$; $\frac{3}{7} = 3 : 7 = 0,(428571)$; $\frac{23}{50} = 23 : 50 = 0,46$ või $\frac{23}{50} = \frac{23}{5^2 \cdot 2} = \frac{23 \cdot 2}{5^2 \cdot 2^2} = \frac{46}{10^2} = 0,46$; $\frac{35}{16} = 35 : 16 = 2,1875$ või $\frac{35}{16} = \frac{35 \cdot 5^4}{2^4 \cdot 5^4} = \frac{21875}{10^4} = 2,1875$.

3. L õ p l i k u k ü m n e n d m u r r u t e i s e n d a m i n e h a r i l i k u k s m u r r u k s. Olgu antud lõplik kümnendmurd, milles kümnendkohtade arv (kohti pärast koma) on n. Selline lõplik kümnendmurd avaldub hariliku murruna, mille lugejas seisab täisarv, mis saadakse kümnendmurrust koma ärajätmisel, nimetajaks aga on 10^n. Näiteks $0,25 = \frac{25}{100}$; $3,431 = \frac{3431}{10^3}$; $0,0009 = \frac{9}{10^4}$.

4. L õ p m a t u p e r i o o d i l i s e k ü m n e n d m u r r u t e i s e n d a m i n e h a r i l i k u k s m u r r u k s. Lõpmatut perioodilist kümnendmurdu saab esitada teatava lõpmatult kahaneva geomeetrilise jada summa abil. Näiteks

$$0,2121\ldots = \frac{21}{100} + \frac{21}{100^2} + \frac{21}{100^3} + \ldots;$$

$$2,5353\ldots = 2 + \frac{53}{100} + \frac{53}{100^2} + \ldots;$$

$$0,35(26) = \frac{35}{100} + \frac{26}{100^2} + \frac{26}{100^3} + \ldots;$$

$$3,42(5) = 3 + \frac{42}{100} + \frac{5}{1000} + \frac{5}{10000} + \ldots .$$

Seetõttu saab niisuguse kümnendmurru teisendamisel harilikuks murruks kasutada lõpmatult kahaneva geomeetrilise jada summa valemit $S = \frac{a}{1 - q}$, kus a on jada esimene liige ja q on jada tegur. Esitatud näidete puhul

$$0,2121\ldots = \frac{\frac{21}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{21}{99} = \frac{7}{33};$$

$$2,5353\ldots = 2 + \frac{\frac{53}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = 2\frac{53}{99};$$

$$0{,}35(26) = \frac{35}{100} + \frac{\frac{26}{100^2}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{35}{100} + \frac{26}{9900} = \frac{3491}{9900};$$

$$3{,}42(5) = 3 + \frac{42}{100} + \frac{\frac{5}{10^3}}{1 - \frac{1}{10}} = 3\frac{42}{100} + \frac{5}{900} = 3\frac{383}{900}.$$

Nüüd võib kergesti põhjendada järgmised laused.

Puhtperioodilise lõpmatu kümnendmurru murdosa teiseneb harilikuks murruks, mille lugejaks on kümnendmurru periood, nimetajaks aga arv, mis on kirjutatud nii mitme 9-ga, kui mitu kohta on perioodis.

Näiteks $0,(7) = \frac{7}{9}$; $0,(35) = \frac{35}{99}$; $2,(153) = 2\frac{153}{999}$; $0,(21) = \frac{21}{99} = \frac{7}{33}$; $2,(53) = 2\frac{53}{99}$.

Segaperioodilise lõpmatu kümnendmurru murdosa teiseneb harilikuks murruks, mille lugeja leidmiseks tuleb arvust, mis seisab murdosa alguses pärast koma kuni teise perioodini, lahutada arv, mis seisab kohe pärast koma kuni esimese perioodini; nimetajasse tuleb aga kirjutada arv, mis algab nii mitme 9-ga, kui mitu numbrit on perioodis, ja lõpeb nii mitme 0-ga, kui mitu numbrit seisab pärast koma esimese perioodi ees.

Näiteks

$$0{,}35(26) = \frac{3526 - 35}{9900} = \frac{3491}{9900};$$

$$3{,}42(5) = 3 + \frac{425 - 42}{900} = 3\frac{383}{900};$$

$$0{,}2(35) = \frac{235 - 2}{990} = \frac{233}{990}.$$

Lõpmatut mitteperioodilist kümnendmurdu ei ole võimalik esitada hariliku murruna.

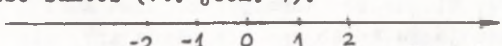
§6. Reaalarvud

1. R e a a l a r v u d e h u l k $\mathbb{R}$. Igapäevase elu vajadusi rahuldavad täielikult ratsionaalarvud. Algul piisas ka matemaatiku tarbeks nendest arvudest. Alles hiljem selgus, et mitte kõikidel võrranditel ei ole lahendeid ratsio-

naalarvude hulgas (näiteks $x^2 = 2$). Osutus, et ka lõikude pikkuste mõõtmiseks ei piisa alati ratsionaalarvudest. (Näiteks ühikruudu diagonaali pikkust ei väljenda ükski ratsionaalarv). Ka ringjoone pikkuse ja diameetri suhe ei ole võrdne ühegi ratsionaalarvuga. Vajalikke uusi arve hakati nimetama *irratsionaalarvudeks*.

Iga irratsionaalarv on esitatav mitteperioodilise lõpmatu kümnendmurruna ja vastupidi. Ratsionaalarvud ja irratsionaalarvud koos moodustavad *reaalarvude hulga* $\mathbb{R}$, mis on kinnine nelja aritmeetika põhitehte suhtes.

2. *Arvtelg.* Näitlikkuse mõttes kujutatakse reaalarve sageli punktidena teataval sirgel – *arvteljel* (s.o. sirgel, millel on märgitud arvude 0 ja 1 kujutised ning millel liikumissuunda arvu 0 kujutiselt arvu 1 kujutise poole loetakse positiivseks suunaks). Kauguste mõõtmiseks valitakse arvteljel pikkusühikuks selle lõigu pikkus, mille otspunktid kujutavad arve 0 ja 1. Vastandarvude a ja -a kujutised paiknevad arvteljel sümmeetriliselt arvu 0 kujutise suhtes (vt. joon. 1).



Joon.1

Kõneldakse, et ratsionaalarvud paiknevad arvsirgel *tihedalt* selles mõttes, et valides arvsirgel suvalise kuitahes väikese pikkusega lõigu, leiame sellel lõigul ikka mõne ratsionaalarvu kujutise. Ent ratsionaalarvude kujutised ei täida veel kogu arvsirget. Öeldakse, et reaalarvud täidavad arvsirge *pidevalt* selles mõttes, et mistahes kahe reaalarvu kujutise vahel ei leidu nn. "tühja kohta" s.t., et vaadeldava lõigu iga sisepunkt on mingi reaalarvu kujutiseks. Reaalarvude ja arvtelje punktide vahel on üksühene vastavus.

3. *Reaalarvu absoluutväärtus.* Reaalarvu a *absoluutväärtuse* $|a|$ all mõistame suurimat arvudest a ja -a, s.t.

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ kui } a \geq 0; \\ -a, \text{ kui } a < 0. \end{cases}$$

Näiteks $|4| = 4$; $|-5{,}2| = -(-5{,}2) = 5{,}2$; $\left|-\frac{5}{3}\right| = \frac{5}{3}$, $|0{,}(3)| = 0{,}(3)$.

Reaalarvu absoluutväärtusel on järgmised omadused:

1) $|a| \geqslant 0$;

2) $|-a| = |a|$;

3) $a \leqslant |a|$;

4) $-a \leqslant |a|$;

5) $||a| - |b|| \leqslant |a + b| \leqslant |a| + |b|$;

6) $||a| - |b|| \leqslant |a - b| \leqslant |a| + |b|$;

7) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$;

8) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ $(b \neq 0)$.

Reaalarvu a absoluutväärtus $|a|$ on võrdne arvu a kujutise kaugusega arvu 0 kujutisest arvteljel. Tihti võetakse toodud reaalarvu absoluutväärtuse geomeetriline interpretatsioon absoluutväärtuse definitsiooniks.

§7. Reaalarvu astendamine ja juurimine

1. Astme mõiste. Reaalarvu a astendamiseks ühest suurema naturaalarvuga n nimetatakse korrutise

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ tegurit}}$$

leidmist. Arvu a nimetatakse astendatavaks e. astme aluseks ning arvu n astendajaks e. astmenäitajaks.

Näiteks $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$; $(-0{,}1)^4 = (-0{,}1) \cdot (-0{,}1) \cdot$ $\cdot (-0{,}1) \cdot (-0{,}1) = 0{,}0001$.

Ühest suuremate naturaalarvuliste astendajate n ja k korral on reaalarvu astmel järgmised omadused.

1. Positiivse arvu iga aste on positiivne arv. Näiteks $12^n > 0$.

2. Negatiivse arvu aste paarisarvulise astendaja korral on positiivne arv. Näiteks $(-3)^4 > 0$.

3. Negatiivse arvu aste paarituarvulise astendaja korral on negatiivne arv. Näiteks $(-0{,}02)^3 < 0$.

4. Arvu 0 suvaline aste $(n \in N,\ n > 1)$ on 0, s.t. $0^n = 0$.

5. Arvu 1 suvaline aste on 1, s.t. $1^n = 1$.

Tehted astmetega toimuvad järgmiste reeglite kohaselt.

6. Võrdsete alustega astmete korrutamise ja jagamise reeglid.

$a^k \cdot a^n = a^{k+n}$;

$a^k : a^n = a^{k-n}$, kui $k - n > 1$.

7. Astme astendamise reegel

$(a^k)^n = a^{k \cdot n}$.

8. Korrutise astendamise reegel

$(a \cdot b \cdot c)^k = a^k \cdot b^k \cdot c^k$.

9. Jagatise astendamise reegel

$(\frac{a}{b})^k = \frac{a^k}{b^k}$.

Näited.

1) $2^3 \cdot 2^2 = 2^5$.

2) $(0,1)^5 : (0,1)^2 = (0,1)^3$.

3) $[(-3)^2]^5 = (-3)^{10}$.

4) $(2 \cdot 3)^4 = 2^4 \cdot 3^4$.

5) $\frac{2^2}{6^2} = (\frac{2}{6})^2 = (\frac{1}{3})^2$.

2. J u u r e m õ i s t e. Kui reaalarvude a ja b korral kehtib võrdus $a^n = b$, siis öeldakse, et arv a on võrdne n-a s t m e j u u r e g a arvust b ja märgitakse kujul

$$a = \sqrt[n]{b}.$$

Arvu b nimetatakse j u u r i t a v a k s, arvu a j u u r e k s, naturaalarvu n j u u r i j a k s. Vaadeldavat astendamise pöördtehet nimetatakse j u u r i m i s e k s. Vastavalt juure definitsioonile saame, et

$$(\sqrt[n]{b})^n = b.$$

Seega

$$\sqrt[3]{8} = 2, \text{ sest } 2^3 = 8 \text{ ja } \sqrt[3]{-8} = -2, \text{ sest } (-2)^3 = -8.$$

Kuid juurel $\sqrt[4]{-16}$ ei ole väärtust reaalarvude hulgas, sest astme omaduste 1 ja 2 põhjal ei leidu reaalarvu, mille neljas aste oleks negatiivne. Järelikult, negatiivse reaalarvu b korral ei ole juurel $\sqrt[2k]{b}$ reaalarvulist väärtust.

Paarisarvulise juurija n = 2k korral tekib juure leidmisel ka positiivsest arvust üks iseärasus. Lähtudes ülalantud juure definitsioonist, oleks näiteks juurel $\sqrt{9}$ kaks erinevat väärtust 3 ja -3, sest nii $(3)^2 = 9$ kui ka $(-3)^2 = 9$. Et juurimistehe paarisarvulise juurija korral oleks samuti üheselt defineeritud, võetakse kasutusele aritmeetilise juure mõiste. **A r i t m e e t i l i s e k s n-a s t m e j u u r e k s** mittenegatiivsest reaalarvust $b \geq 0$ nimetatakse mittenegatiivset reaalarvu $a \geq 0$, mille korral $a^n = b$. Järelikult muutub juurimine üheseks tehteks, kui paarisarvulise juurija korral vaadelda vaid aritmeetilist juurt, paarituarvulise juurija korral aga lähtuda juure üldisest definitsioonist. Seega

$$\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a| .$$

<u>Näide</u>. $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt[3]{a^3} = a$, $\sqrt[4]{a^4} = |a|$, $\sqrt[3]{-0{,}001} = -0{,}1$; $\sqrt{(-5)^2} = |-5|$; $\sqrt[2k]{(b)^{2k}} = |b|$, $\sqrt[2k+1]{(c)^{2k+1}} = c$.

3. **A r i t m e e t i l i s t e j u u r t e o m a d u s e d**. Olgu järgnevas $a \geq 0$ ja $b \geq 0$ mingid reaalarvud; k, n ja m ühest suuremad naturaalarvud. Aritmeetilistel juurtel on järgmised omadused:

1) $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$;

2) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, kui $b \neq 0$;

3) $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$;

4) $(\sqrt[k]{a})^n = \sqrt[k]{a^n}$;

5) $\sqrt[k]{a^n} = \sqrt[k\cdot m]{a^{n\cdot m}}$;

6) kui $a > b$, siis $\sqrt[k]{a} > \sqrt[k]{b}$;

7) $\sqrt[n]{a^n \cdot b} = |a| \sqrt[n]{b}$;

8) $b \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a \cdot b^n}$

Märkus. Kui $b < 0$, siis $b \cdot \sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{a \cdot |b|^n}$.

<u>Näited</u>. Teostada juurimistehe:

1) $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{(3)^3} \cdot \sqrt[3]{2} = 3 \cdot \sqrt[3]{2}$;

2) $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{10}{5}} = \sqrt{2}$;

3) $\sqrt[6]{25} = \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[3]{5}$;

4) $\sqrt[6]{2^5} \cdot \sqrt{2} = \sqrt[6]{2^5} \cdot \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{2^5 \cdot 2^3} = \sqrt[6]{2^6 \cdot 2^2} =$
$= 2 \cdot \sqrt[6]{2^2} = 2 \cdot \sqrt[3]{2}$;

5) $\sqrt{27a^2} = 3|a| \cdot \sqrt{3}$;

6) $2\sqrt{3} = \sqrt{3 \cdot 2^2} = \sqrt{12}$;

7) $(-5)\sqrt[3]{\frac{1}{5}} = -\sqrt[3]{\frac{5^3}{5}} = -\sqrt[3]{5^2}$;

8) $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$;

9) $\sqrt[6]{(-3)^6} = |-3| = 3$;

10) $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{2}}} = \sqrt[12]{2}$;

11) $\sqrt{3\sqrt[3]{81}} = \sqrt{3 \cdot \sqrt[3]{3^4}} = \sqrt{3 \cdot 3\sqrt[3]{3}} = \sqrt{9 \cdot \sqrt[3]{3}} =$
$= 3 \cdot \sqrt[6]{3}$;

12) $\sqrt[3]{3\sqrt[4]{3\sqrt[5]{3}}} = \sqrt[3]{3\sqrt[20]{3^5 \cdot 3}} = \sqrt[3]{3 \cdot \sqrt[20]{3^6}} =$
$= \sqrt[3]{3 \cdot \sqrt[10]{3^3}} = \sqrt[30]{3^{10} \cdot 3^3} = \sqrt[30]{3^{13}}$;

13) $\sqrt[4]{6\sqrt{16\sqrt[3]{9}}} = \sqrt[4]{6\sqrt{2^4 \cdot \sqrt[3]{3^2}}} = \sqrt[4]{6\sqrt[6]{2^{12} \cdot 3^2}} =$
$= \sqrt[4]{6 \cdot 2^2 \cdot \sqrt[3]{3}} = \sqrt[12]{6^3 \cdot 2^6 \cdot 3} = \sqrt[12]{2^9 \cdot 3^4} =$
$= \sqrt[4]{2^3} \cdot \sqrt[3]{3}$.

4. **A s t m e   m õ i s t e   ü l d i s t a m i n e.** Reaalarvu a aste a^n on seni defineeritud vaid ühest suurema naturaalarvulise astendaja n korral. Järgnevad definitsioonid võimaldavad lisaks eelnevale arvutada mistahes reaalarvu a ($a \neq 0$) astet ka mistahes täisarvulise astendaja $p \in \mathbb{Z}$ korral, kui $p \in \{1; 0; -1; -2; \dots\}$.

1. Kui $p = 1$, siis $a^1 = a$. Näiteks $(-2)^1 = -2$; $(\frac{1}{3})^1 = \frac{1}{3}$.
2. Kui $p = 0$, siis $a^0 = 1$. Näiteks $5^0 = 1$; $[0,(5)]^0 = 1$.
3. Kui täisarv $p < 0$, siis $a^p = \frac{1}{a^{-p}}$. Näiteks

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9};\quad (-3)^{-1} = \frac{1}{(-3)^1} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3};$$

$$(\tfrac{2}{3})^{-1} = \tfrac{3}{2};\quad (-\tfrac{1}{10})^{-4} = (-10)^4 = 10^4.$$

Rõhutagem veelkord, et arvu 0 astet 0^0 ei defineerita.

Positiivsete reaalarvude $a > 0$ korral võib defineerida ka astme mõiste suvalise ratsionaalarvulise astendajaga $\frac{p}{q}$. Kui $p \in \mathbb{Z}$ ja $q \in \mathbb{N}$, siis arvu a aste astendajaga $\frac{p}{q}$ defineeritakse valemiga

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

Näiteks $2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2}$ ja $8^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^{-2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8^2}} = \sqrt[3]{\left[(\frac{1}{2})^3\right]^2} =$
$= (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$.

Samal ajal, vastavalt nõudele $a > 0$, ei oma mõtet aste $(-8)^{\frac{3}{4}}$.

Ratsionaalarvulise astendajaga astmetel on samad omadused, mis naturaalarvulise astendajaga astmete korralgi (vt. §7, p. 1.).

Reaalarvu a astme mõistet on võimalik veelgi üldistada. Olgu meil ratsionaalarvude jada

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots,$$

mille piirväärtuseks on reaalarv x, s.t. $x = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$. Siis astme a^x $(a > 0)$ all mõistetakse piirväärtust

$$a^x = \lim_{n \to \infty} a^{x_n}.$$

Reaalarvulise astendajaga x astme a^x lähem käsitlus väljub elementaarmatemaatika kursuse raamest. Täpsemalt võib sellest lugeda näiteks õpikust Kangro, G. Matemaatiline analüüs I. Tln., Valgus, 1982.

5. R e a a l a r v u d e a r i t m e e t i l i n e j a g e o m e e t r i l i n e k e s k m i n e. Reaalarvude $a_1, a_2, \ldots, a_n$ a r i t m e e t i l i s e k s k e s k m i s e k s $\bar{a}$ nimetatakse nende arvude summa jagatist liidetavate arvuga n, s.t.

$$\bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

Näiteks arvude 1; 2; 3; 3; 5; 5 ja 5 aritmeetiline keskmine on

$$\bar{a} = \frac{1 + 2 + 3 + 3 + 5 + 5 + 5}{7} = \frac{24}{7} = 3\frac{3}{7}.$$

Arvu $\bar{g}$, mis võrdub n-astme juurega n positiivse reaalarvu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ korrutisest, nimetatakse antud arvude g e o m e e t r i l i s e k s k e s k m i s e k s. Järelikult

$$\bar{g} = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}.$$

Näiteks arvude 1; 5; 15 ja 25 geomeetriline keskmine on arv

$$\bar{g} = \sqrt[4]{1 \cdot 5 \cdot 15 \cdot 25} = \sqrt[4]{5^4 \cdot 3} = 5 \cdot \sqrt[4]{3}.$$

Kahe arvu geomeetrilist keskmist nimetatakse ka nende arvude k e s k m i s e k s v õ r d e l i s e k s.

Näiteks arvude $\sqrt{5}$ ja 7 geomeetriline keskmine ehk keskmine võrdeline on

$$\bar{g} = \sqrt{\sqrt{5} \cdot 7} = \sqrt[4]{5 \cdot 7^2} = \sqrt[4]{245}.$$

Kahe erineva mittenegatiivse reaalarvu a ja b korral ilmselt

$$\frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2} \geqslant 0,$$

millest lihtsustades saame, et

$$\frac{a + b}{2} \geqslant \sqrt{ab}.$$

Seega oleme tõestanud järgmise lause.

Kahe positiivse reaalarvu aritmeetiline keskmine ei ole väiksem nende arvude geomeetrilisest keskmisest.

Viimane lause leiab laialdast rakendamist mitmesuguste ülesannete lahendamisel.

Näide. Tõestada, et suuruse x kõikide positiivsete väärtuste korral kehtib võrratus

$$2^{\sqrt[12]{x}} + 2^{\sqrt[4]{x}} \geqslant 2 \cdot 2^{\sqrt[6]{x}}.$$

Lahendus. Arvestades tõestatud lauset ning juure ja astme omadusi võime kirjutada, et

$$2^{\sqrt[12]{x}} + 2^{\sqrt[4]{x}} \geqslant 2 \cdot \sqrt{2^{\sqrt[12]{x}} \cdot 2^{\sqrt[4]{x}}} = 2 \cdot 2^{\frac{\sqrt[12]{x} + \sqrt[4]{x}}{2}}$$

Rakendades sama omadust astmenäitajate suhtes leiame, et

$$\frac{\sqrt[12]{x} + \sqrt[4]{x}}{2} \geqslant \sqrt{\sqrt[12]{x} \cdot \sqrt[4]{x}} = \sqrt{\sqrt[12]{x^4}} = \sqrt[6]{x}.$$

Et aga korrutisest $2^a \geqslant 2^b$ järeldub alati võrratus $a \geqslant b$, siis olemegi tõestanud nõutud võrratuse kehtivuse

$$2^{\sqrt[12]{x}} + 2^{\sqrt[4]{x}} \geqslant 2 \cdot 2^{\frac{\sqrt[12]{x} + \sqrt[4]{x}}{2}} \geqslant 2 \cdot 2^{\sqrt[6]{x}}.$$

Kontrollküsimused

1. Millist murdu nimetatakse harilikuks murruks?
2. Millised murdudest $\frac{3}{4}$; $\frac{7}{5}$; $\frac{2}{1}$; $\frac{5}{5}$; $\frac{104}{104}$; $\frac{103}{104}$ on liht-, millised liigmurrud?
3. Milliseid harilikke murde nimetatakse võrdseiks?
4. Sõnastada murru põhiomadus.
5. Mis on murru laiendamine; taandamine?
6. Millist murdu nimetatakse taandumatuks?
7. Nimetada murdude $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ ja $\frac{4}{6}$ ühine nimetaja.
8. Võrrelda murde
   a) $\frac{104}{7}$; $\frac{50}{7}$; b) $\frac{5}{9}$; $\frac{5}{7}$; c) $\frac{3}{4}$; $\frac{2}{3}$.
9. Kuidas on defineeritud harilike murdude liitmine?
10. Kas harilike murdude liitmisel on kommutatiivsuse ja assotsiatiivsuse omadus? (Põhjendada).
11. Millist arvu nimetatakse segaarvuks?
12. Kuidas on defineeritud harilike murdude korrutamine?
13. Kas harilike murdude korrutamisel on kommutatiivsuse ja assotsiatiivsuse omadused? (Põhjendada).
14. Kas harilike murdude liitmine ja korrutamine on seotud distributiivsuse omadusega? (Põhjendada).
15. Defineerida arvu pöördarv.
16. Sõnastada harilike murdude jagamise reegel.
17. Tuletada harilike murdude jagamise reegel lähtudes kahe arvu jagatise definitsioonist.
18. Kas harilike murdude lahutamine on alati teostatav? Miks?
19. Milliste tehete suhtes on kinnine harilike murdude hulk?
20. Milliste arvude hulka nimetatakse ratsionaalarvude hulgaks?
21. Kuidas on esitatav iga ratsionaalarv täisarvude kaudu? Kas selline esitus on ühene?
22. Milliseid arve nimetatakse kümnendmurdudeks; lõpmatuteks kümnendmurdudeks?

23. Milline kümnendmurd on perioodiline?

24. Millised murdudest 4,44(56); 1,(551); 0,000(3); 12,(6) on puhtperioodilised, millised segaperioodilised?

25. Millise kümnendmurruna avaldub iga ratsionaalarv?

26. Kuidas teisendada lõpmatut puhtperioodilist ja segaperioodilist kümnendmurdu harilikuks murruks?

27. Millised harilikud murrud teisenevad lõplikeks kümnendmurdudeks, millised lõpmatuteks perioodilisteks kümnendmurdudeks?

28. Millised järgmistest arvudest -50; $-13,5$; $-\frac{1}{3}$; 0; $\frac{1}{7}$; $\sqrt{5}$; 10; $4^{0,5}$; $6,(6)$ on 1) naturaalarvud; 2) täisarvud; 3) ratsionaalarvud; 4) irratsionaalarvud; 5) reaalarvud?

29. Kas lõpmatu kümnendmurruna esitatud arv võib olla ratsionaalarv? irratsionaalarv?

30. Kirjutada lõpmatu kümnendmurru kujul arvud $\frac{15}{8}$; $\frac{3}{7}$; 5; 2;7.

31. Defineerida reaalarvu absoluutväärtus.

32. Esitada reaalarvu absoluutväärtuse geomeetriline tõlgendus.

33. Milliste y väärtuste korral on õiged võrdused 1) $y = |y|$; 2) $-y = |y|$; 3) $|-y| = |y|$?

34. Kus paiknevad arvsirgel arvu x kujutised, kui 1) $|x| < 2$; 2) $|x| > 3$; 3) $2 < |x| < 3$?

35. Anda reaalarvu astme mõiste naturaalarvulise astendaja korral.

36. Anda n-astme juure mõiste.

37. Anda aritmeetilise n-astme juure mõiste.

38. Sõnastada võrdsete alustega astmete korrutamise ja jagamise reeglid.

39. Sõnastada astme astendamise reegel.

40. Sõnastada korrutise ja jagatise astendamise reeglid.

41. Millega võrdub $(-1)^{102}$ ja $(-1)^{333}$?

42. Sõnastada korrutise ja jagatise juurimise reeglid.

43. Sõnastada juure juurimise reegel.

44. Arvutada $\sqrt{(-2)^2 \cdot 9}$; $\sqrt[3]{(-3)^9 \cdot 4^3}$; $\sqrt[3]{3^3 + 8}$.

45. Kuidas defineeritakse reaalarvude aritmeetiline ja geomeetriline keskmine?

46. Mida nimetatakse kahe arvu keskmiseks võrdeliseks?
47. Kuidas on võrreldavad kahe arvu aritmeetiline ja geomeetriline keskmine?

III SUHE JA VÕRRE. PROTSENTARVUTUS

§8. Võrdeline ja pöördvõrdeline jaotamine

1. *Suhte mõiste.* Arvude a ja $b \neq 0$ *suhteks* nimetatakse nende arvude jagatist $a : b$ ehk $\frac{a}{b}$, kus arve a ja b nimetatakse *suhte liikmeteks.*

Suhe $a : b$ näitab, mitu korda arv a on suurem arvust b. Suhte mõiste on üldisem kui hariliku murru mõiste (miks?). Hariliku murru põhiomadus laieneb ka suhtele.

Kui reaalarv $m \neq 0$, siis suhted $a : b$ ja $(a \cdot m) : (b \cdot m)$ on võrdsed, s.t.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot m}{b \cdot m}.$$

See omadus lubab murdarvude suhte asendada täisarvude suhtega. Näiteks

$$\frac{2}{3} : \frac{3}{5} = \frac{10}{15} : \frac{9}{15} = 10 : 9.$$

2. *Võrde mõiste ja põhiomadus.* Kui suhted $a : b$ ja $c : d$ on võrdsed, siis kõneldakse *võrdest*

$$a : b = c : d \quad \text{või} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \qquad (1)$$

kus arve a ja d nimetatakse võrde *välisliikmeteks*, arve b ja c aga võrde *siseliikmeteks*. Korrutades võrret (1) arvuga $b \cdot d$, saame võrduse

$$ad = bc, \qquad (2)$$

mida tuntakse *võrde põhiomadusena*. Sõnastame selle omaduse:

Võrde välisliikmete korrutis võrdub võrde siseliikmete korrutisega.

Omadust (2) kasutatakse võrde tundmatu liikme leidmisel. Näiteks kui $\frac{20}{x} = 0{,}7 : 14$, siis $20 \cdot 14 = 0{,}7x$ ja $x = \frac{20 \cdot 14}{0{,}7} = 400$.

Võrde (1) korral kõneldakse ka, et arvud a ja c on võrdelised arvudega b ja d. Võrdest (1) järelduvad võrded

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}; \quad \frac{d}{b} = \frac{c}{a} \quad \text{ja} \quad \frac{d}{c} = \frac{b}{a},$$

sest nende võrrete välisliikmete ja siseliikmete korrutised on kõik võrduse (2) põhjal võrdsed.

3. S u h t e j a v õ r d e o m a d u s i. Kui on antud võrdsed suhted

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} = q,$$

siis $a_1 = b_1 q$, $a_2 = b_2 q$, ..., $a_n = b_n q$. Leiame nüüd suhte

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} = \frac{b_1 q + b_2 q + \ldots + b_n q}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} =$$

$$= \frac{q(b_1 + b_2 + \ldots + b_n)}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} = q.$$

Seega kehtib omadus

$$1. \ \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}.$$

Võrdest $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ järelduvad järgmised võrded:

$$2. \ \frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d},$$

$$3. \ \frac{a \pm b}{a} = \frac{c \pm d}{c},$$

$$4. \ \frac{a + b}{a - b} = \frac{c + d}{c - d}.$$

4. V õ r d e l i n e j a o t a m i n e. Kui on antud suhted $a_1 : a_2$, $a_2 : a_3$, $a_3 : a_4$, ..., $a_{n-1} : a_{n-1}$ ja $a_{n-1} : a$, siis kirjutatakse lühidalt $a_1 : a_2 : a_3 : \ldots : a_n$.

Olgu ülesandeks j a o t a d a a r v A v õ r d e l i s e l t etteantud arvudega $k_1, k_2, \ldots, k_n$. See tähendab, tuleb jaotada arv A selliseks n osaks suurustega $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$, mille korral

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = A$$

ja

$$a_1 : a_2 : \ldots : a_n = k_1 : k_2 : \ldots : k_n.$$

Taolise ülesande lahendamise eeskiri seisneb järgnevas:

1) leida osade üldarv $k = k_1 + k_2 + \ldots k_n$;
2) leida ühele osale vastav suurus $q = A : k$;
3) leida osade $a_1, \ldots, a_n$ suurused, kuna $a_1 = k_1 \cdot q$, $a_2 = k_2 \cdot q, \ldots, a_n = k_n \cdot q$.

Näide 1. Kooperatiivi kuuluval neljal perekonnal tuli sooja vee eest kokku tasuda 70 rbl., kusjuures tasumine toimus võrdeliselt perekonna liikmete arvuga. Kui palju tuli maksta igal perekonnal, kui neis oli liikmeid vastavalt 1, 3, 4 ja 6.

Lahendus. Tasuda tuli võrdeliselt arvudega 1, 3, 4 ja 6. Perekonnaliikmete koguarv $k = 1 + 3 + 4 + 6 = 14$. Ühe perekonnaliikme kohta tuli tasuda $70 : 14 = 5$ rubla. Seega perekonnad maksid vastavalt $1 \cdot 5$ rbl. = 5 rbl.; $3 \cdot 5$ rbl. = = 15 rbl.; $4 \cdot 5$ rbl. = 20 rbl. ja $6 \cdot 5$ rbl. = 30 rbl.

Kontroll: $5 + 15 + 20 + 30 = 70$; $5 : 15 : 20 : 30 = = 1 : 3 : 4 : 6$.

Vastus. Perekondadel tuli tasuda vastavalt 5 rbl., 15 rbl., 20 rbl. ja 30 rbl.

Näide 2. Kahe kooli kohtumisõhtust võttis osa 153 õpilast ja õpetajat kummastki koolist. Leida õpilaste arv kummastki koolist ja õhtul viibinud õpetajate arv, kui kahe kooli õpilaste arvud suhtuvad nagu $\frac{5}{6} : \frac{2}{3}$ ja teise kooli õpilaste arv suhtub õpetajate arvu nagu $2 : \frac{3}{5}$.

Lahendus. Olgu õpilaste arvud a_1 ja a_2 ning õpetajate arv a_3. Siis $a_1 : a_2 = \frac{5}{6} : \frac{2}{3}$ ning $a_2 : a_3 = 2 : \frac{3}{5}$. Teisendame esmalt antud suhted täisarvulisteks. Saame $a_1 : a_2 = = \frac{5}{6} : \frac{2}{3}^{\backslash 2} = \frac{5}{6} : \frac{4}{6} = 5 : 4$ ja $a_2 : a_3 = 2^{\backslash 5} : \frac{3}{5} = 10 : 3$. Seega $a_1 : a_2 = 5 : 4$ ja $a_2 : a_3 = 10 : 3$. Teisendame kumbagi suhet nüüd nii, et suuruse a_2 kohal seisaks üks ja sama arv. Siis $a_1 : a_2 = (5a_1) : (5a_2) = 25 : 20$ ning $a_2 : a_3 = = (2a_2) : (2a_3) = 20 : 6$. Järelikult on tarvis arv 153 jaotada võrdeliselt arvudega 25, 20 ja 6, sest $a_1 : a_2 : a_3 = = 25 : 20 : 6$. Et osade üldarv $k = 25 + 20 + 6 = 51$, siis ühele osale vastav osavõtjate arv on $153 : 51 = 3$. Seega esimesest koolist oli $25 \cdot 3 = 75$ õpilast; teisest koolist oli $20 \cdot 3 = 60$ õpilast ning õpetajaid oli õhtul $6 \cdot 3 = 18$.

Kontroll. Osavõtjaid oli tõepoolest $75 + 60 + 18 = 153$ ning $75 : 60 = 5 : 4 = \frac{5}{6} : \frac{2}{3}$ ja $60 : 18 = 10 : 3 = 2 : \frac{3}{5}$.

Vastus. Esimesest koolist osales 75 õpilast, teisest koolist 60 õpilast, õpetajaid oli õhtul 18.

5. Pöördvõrdeline jaotamine. Jaotada A pöördvõrdeliselt antud arvudega $k_1, k_2, \ldots, k_n$ tähendab jaotada (arv) A võrdeliselt arvude $k_1, k_2, \ldots, k_n$ pöördarvudega $\frac{1}{k_1}, \frac{1}{k_2}, \ldots, \frac{1}{k_n}$.

Näide 1. Kolmel vennal tuli ühiselt ehitatava garaaži ehitusmaterjali eest tasuda 290 rbl. Nad leppisid kokku, et igaüks tasub pöördvõrdeliselt ehitusel tehtud töötundide arvuga. Kui palju tuli igal vennal tasuda, kui töötatud tundide arvud olid 99, 66 ja 88?

Lahendus. Tasuda tuli pöördvõrdeliselt arvudega 99, 66 ja 88 ehk võrdeliselt arvudega $\frac{1}{99}$, $\frac{1}{66}$ ja $\frac{1}{88}$. Teisendades vajaliku suhte täisarvuliseks, saame $\frac{1}{99} : \frac{1}{66} : \frac{1}{88} =$
$= \frac{8}{792} : \frac{12}{792} : \frac{9}{792} = 8 : 12 : 9$. Et osade koguarv $k = 8 +$
$+ 12 + 9 = 29$, siis ühe osa maksumus on $290 : 29 = 10$ rubla. Järelikult tuli vennal, kes oli töötanud 99 tundi, tasuda $8 \cdot 10$ rbl. $= 80$ rbl.; vennal, kes oli töötanud 66 tundi, tasuda $12 \cdot 10$ rbl. $= 120$ rbl. ja 88 tundi töötanud vennal tasuda $9 \cdot 10$ rbl. $= 90$ rbl.

Kontroll. $80 + 120 + 90 = 290$; $80 : 120 : 90 =$
$= 8 : 12 : 9 = \frac{1}{99} : \frac{1}{66} : \frac{1}{88}$.

Vastus. Vendadel tuli töötatud tundide arvudele 99, 66 ja 88 vastavalt tasuda 80 rbl., 120 rbl. ja 90 rbl.

Näide 2. Jaotada arv 76 kolmeks liidetavaks a, b ja c nii, et osad a ja b oleksid pöördvõrdelised arvudega 1 ja $\frac{1}{2}$, b ja c aga pöördvõrdelised arvudega $\frac{1}{3}$ ja 4.

Lahendus. Arvud a ja b peavad olema võrdelised arvudega 1 ja 2, s.t. $a : b = 1 : 2$, ning arvud b ja c võrdelised arvudega 3 ja $\frac{1}{4}$, s.t. $b : c = 3 : \frac{1}{4}$. Suhte põhiomaduse $b : c = (k \cdot b) : (k \cdot c)$ tõttu, saame selle suhte taandada täisarvude suhteks $b : c = 12 : 1$. Esimese võrde võime aga kirjutada kujul $a : b = 6 : 12$. Seega $a : b : c = 6 : 12 : 1$. Et osade üldarv on

$$k = 6 + 12 + 1 = 19,$$

siis ühele osale vastab arv $76 : 19 = 4$. Seega

$$a = 6 \cdot 4 = 24; \quad b = 12 \cdot 4 = 48 \quad \text{ja} \quad c = 4 \cdot 1 = 4.$$

Kontroll. $24 + 48 + 4 = 76$; $24 : 48 = 1 : 2$;

$48 : 4 = 12 : 1.$

Vastus. Arv 76 tuleb jagada liidetavateks 24, 48 ja 4.

§9. Protsentarvutuse põhiülesanded

1. P r o t s e n d i m õ i s t e. Ühte sajandikku osa antud arvust A (tervikust) nimetatakse ü h e k s p r o t s e n d i k s (lühidalt 1 %) arvust A. Nii näiteks 1 % arvust 100 on 1; 3 % arvust 100 on 3; 10 % arvust 55 on 5,5.

Kui vaadeldavaks tervikuks võtta arv 1, siis 1 % arvust 1 on 0,01; 5 % on 0,05; 10 % on $0,1 = \frac{1}{10}$; 25 % on $0,25 = \frac{1}{4}$; 33,3 % on $0,33... = \frac{1}{3}$; 50 % on $0,5 = \frac{1}{2}$; 75 % on $0,75 = \frac{3}{4}$; 100 % on 1; 200 % on 2; 1000 % on 10 jne.

2. P r o t s e n t a r v u t u s e k o l m p õ h i ü l e s a n n e t. Protsentülesannetes esineb alati kaks arvu. Üks neist arvudest (olgu selleks näiteks arv A) moodustab alati terviku, millele vastab $\frac{100}{100}$ osa ehk 100 % tervikust. Teine arv (olgu selleks näiteks arv a) moodustab alati teatava osa tervikust A. Moodustagu arv a tervikust A $\frac{m}{100}$ osa ehk m %. Selge on siis, et protsentülesannete lahendamise võti peitub võrdes

$$\frac{A}{100} = \frac{a}{m}. \tag{1}$$

Sõltuvalt sellest, milline kolmest arvust A, a või m on otsitav, saamegi kolm protsentülesannete põhitüüpi.

1. Osa suuruse (osamäära) m leidmine protsentides terviku A ja osa a järgi ehk kahe arvu suhte väljendamine protsentides.

Taoliste ülesannete tüüpsõnastus on järgmine: leida, mitu protsenti moodustab arv a arvust A. Otsitavaks on siin suurus m % arvust A. Kui arv A on tervik, siis 1 % arvust A on $\frac{A}{100}$. Et leida nüüd, mitu protsenti moodustab arv a arvust A, tuleb arv a jagada arvuga $\frac{A}{100}$, s.t. tuleb leida suhe

$$a : \frac{A}{100} = \frac{a}{A} \cdot 100.$$

Järelikult arv a moodustab arvust A

$$m \% = (\frac{a}{A} \cdot 100) \% .$$

Samale tulemusele jõuame ka võrde (1) lahendamisel m suhtes.

Näide 1. Mitu protsenti moodustab arv 1 arvust 5?

Lahendus. Et arv 5 on tervik, siis 1 % arvust 5 on $\frac{5}{100} = \frac{1}{20}$. Jagades osa, s.o. arvu 1, arvuga $\frac{1}{20}$, saame $1 : \frac{1}{20} = 20$. Järelikult arv 1 moodustab 20 % arvust 5. Võrde

$$\frac{5}{100} = \frac{1}{m}$$

lahendamisel arvu m suhtes jõuame samale tulemusele

$$m\ \% = (\frac{1}{5} \cdot 100)\ \% = 20\ \%.$$

Vastus. Arv 1 moodustab 20 % arvust 5.

Näide 2. Milline on kaevandatava maagi vasesisaldus protsentides, kui 225 kg maagi töötlemisel saadakse 34,2 kg vaske?

Lahendus. Tervikuks selles ülesandes on 225 kg maaki. Seega tuleb leida, mitu protsenti moodustab arv 34,2 tervikust 225, s.t. tuleb arvutada

$$(\frac{34{,}2}{225} \cdot 100)\ \% = 15{,}2\ \%.$$

Vastus. Kaevandatav maak sisaldab 15,2 % vaske.

Näide 3. Tsehhis toodeti teatud aja jooksul 180 detaili. Pärast tehnilist reorganiseerimist suudeti sama aja jooksul valmistada 243 detaili. Mitme protsendi võrra suurenes tsehhi töötootlikkus?

Lahendus. Selles ülesandes tuleb arvu 243 võrrelda tervikuga 180. Leiame, mitu protsenti on 243 tervikust 180, s.t. arvutame

$$(\frac{243}{180} \cdot 100)\ \% = 135\ \%.$$

Kuna esialgsele töötootlikkusele (180 detaili) vastab 100%, pärastisele (243 detaili) aga 135 %, siis töötootlikkus suurenes 135 % - 100 % = 35 % võrra.

Vastus. Tsehhi töötootlikkus suurenes 25 % võrra.

2. Osa a leidmine terviku A ja osamäära m järgi. Taoliste ülesannete tüüpsõnastus on järgmine: leida m % tervikust A. Otsitavaks on siin suurus a. Et 1 % tervikust A on $\frac{A}{100}$, siis m % arvust A on $\frac{A}{100} \cdot m$. Järelikult on

$$a = \frac{A}{100} \cdot m.$$

Samale tulemusele jõuame ka võrde (1) lahendamisel a suhtes.

Näide 4. Leida 55 % arvust 54.

Lahendus. Tervikuks on siin arv 54. Et 1 % arvust 54 on $\frac{54}{100} = \frac{27}{50}$, siis 55 % arvust 54 on

$$55 \cdot \frac{27}{50} = 29{,}7.$$

Vastus. 55 % arvust 54 on 29,7.

Näide 5. Tsehhis toodeti 180 detaili päevas. Mitme detaili võrra suureneb toodangu väljalase päevas, kui töötootlikkus suureneb 35 % võrra.

Lahendus. Tervikuks on siin 180. Tuleb leida 35 % arvust 180. Et 1 % arvust 180 on $\frac{180}{100} = 1{,}8$, siis 35 % arvust 180 on

$$35 \cdot \frac{180}{100} = 63.$$

Vastus. Tsehhi päevatoodang suureneb 63 detaili võrra.

Näide 6. Kui palju tuleb tasuda 85 kopikat maksnud raamatu eest pärast hinnaalandust 20 % võrra?

Lahendus. Tervikuks on siin 85 kop. Uus hind a kopikat moodustab 100 % - 20 % = 80 % esialgsest hinnast 85 kop. . Kuna 1 % arvust 85 on $\frac{85}{100} = 0{,}85$, siis raamatu uus hind on

$$80 \cdot 0{,}85 \text{ kop.} = 68 \text{ kop.}$$

Vastus. Raamatu uus hind on 68 kop.

3. Terviku A leidmine, kui arv a moodustab m % arvust A. Ülesannete tüüpsõnastus on järgmine: leida arv, millest arv a moodustab m %. Otsitavaks on siin tervik A. Kui arv a moodustab m % otsitavast arvust A, siis 1 % otsitavast tervikust A on $\frac{a}{m}$ ning tervik A ise on siis $\frac{a}{m} \cdot 100$. Seega

$$A = \frac{a}{m} \cdot 100.$$

Samale tulemusele jõuame ka võrde (1) lahendamisel suuruse A suhtes.

Näide 7. Leida arv, millest arv 15 on 12 %.

Lahendus. Kuna arv 15 on 12 % otsitavast tervikust A, siis 1 % tervikust A on $\frac{15}{12} = \frac{5}{4}$. Järelikult otsitav tervik ise on võrdne arvuga $\frac{5}{4} \cdot 100 = 125$.

Vastus. Arv 15 moodustab 12 % arvust 125.

Näide 8. Töötootlikkuse suurendamise tulemusena 35 % võrra hakkas tsehh päevas tootma 243 detaili. Mitu detaili toodeti päevas varem?

Lahendus. Kuna 243 detaili moodustab 100 % + 35 % = = 135 % esialgsest toodangust, siis 1 % otsitavast suurusest on $\frac{243}{135}$. Järelikult, otsitav tervik on $\frac{243}{135} \cdot 100 = 180$.

Vastus. Tsehhi varasem päevatoodang oli 180 detaili.

Näide 9. Liha kaotab keetmisel 35 % oma massist. Kui palju keedetud liha saadakse 2 kg toorlihast? Kui palju tuleb võtta toorest liha, et saada 2,6 kg keedetud liha?

Lahendus. Antud ülesandes tervikuks A on toore liha kogus, millele vastab 100 % iseendast. Keedetud liha kogus a on osa arvust A ja moodustab 100 % - 35 % = 65 % keedetava liha kogusest.

Esimesele küsimusele vastamiseks tuleb leida osa a, teisele küsimusele vastamiseks aga tervik A.

Kui tervik A on 2 kg ning tuleb leida saadav keedetud liha kogus a kg, mis moodustab 65 % kogusest 2 kg, siis

$$a = \frac{2}{100} \cdot 65 = 1,3.$$

Et 2,6 kg keedetud liha moodustab 65 % otsitavast tervikust, siis arv A on võrdne

$$A = \frac{2,6}{65} \cdot 100 = 4.$$

Vastus. 2 kg toorest lihast saadakse 1,3 kg keedetud liha ning 2,6 kg keedetud liha saamiseks tuleb võtta 4 kg toorest liha.

Näide 10. Töölise palka tõsteti kaks korda, kummalgi korral sama protsendi võrra. Selle tulemusena tõusis ta palk 100 rublalt 125 rubla 44 kopikale. Mitme protsendi võrra tõsteti kummalgi korral palka?

Lahendus. Tervikuks on siin esialgne palk 100 rbl. Oletame, et palka tõsteti x % võrra. Seega pärast esimest palgakõrgendust sai tööline 100 % + x % = (100 + x) % esialgsest 100 rublast, s.t. ta sai

$$a_1 = \frac{100}{100} \cdot (100 + x) = (100 + x)$$

rubla. Pärast teist palgakõrgendust x % võrra sai ta (100 + x) % vahepealsest palgast a_1 rbl., s.t. ta sai palka

$$\frac{a_1}{100} \cdot (100 + x)$$

rubla, mis ülesande tingimuste kohaselt on võrdne 125 rbl.

ja 44 kop. . Järelikult arvu x leidmiseks saame võrrandi

$$\frac{100 + x}{100}(100 + x) = 125{,}44.$$

Lahendades seda võrrandit, saame

$$(100 + x)^2 = 12544,$$

millest

$$100 + x = 112$$

ning

$$x = 12.$$

Vastus. Töölise palka tõsteti kummalgi korral 12 % võrra.

Näide 11. Kaevur täidab päevanormist 75 %. Ta kavatseb päevast tööhulka suurendada 40 % võrra. Mitu protsenti päevanormist täidab kaevur nüüd?

Lahendus. Tervikuks A on siin päevanorm. Kuna kaevur täidab 75 % päevanormist A, siis tema tööhulk a päevas moodustab 75 % arvust A, s.t.

$$a = \frac{A}{100} \cdot 75 = 0{,}75\ A.$$

Kui kaevur suurendab tööhulka 40 % võrra, siis tema poolt sooritatud tööhulk b on 100 % + 40 % = 140 % tööhulgast a = 0,75A. Seega

$$b = \frac{0{,}75 \cdot A}{100} \cdot 140 = 1{,}05A.$$

Nüüd tuleb leida, mitu protsenti moodustab arv b arvust A, s.t. tuleb väljendada suhe b : A protsentides. Selleks arvutame

$$\left(\frac{b}{A} \cdot 100\right)\% = \left(\frac{1{,}05A}{A} \cdot 100\right)\% = 105\ \%.$$

Vastus. Suurendades päevast tööhulka 40 % võrra, täidab kaevur 105 % esialgsest päevanormist.

Näide 12. Kui palju on vaja võtta 5 %-lise niklisisaldusega ja kui palju 40 %-lise niklisisaldusega terast, et saada 140 tonni 30 %-lise niklisisaldusega terast?

Lahendus. Leiame esmalt 140 tonnis terases sisalduva nikli koguse n. Kuna 140 tonnis on 30 % niklit, siis nikli kogus tonnides on

$$n = \frac{140}{100} \cdot 30 = 42.$$

Oletame, et 140 tonni 30 %-lise niklisisaldusega terase saamiseks tuleb võtta A tonni 5 %-lise niklisisaldusega terast ja B tonni 40 %-lise niklisisaldusega terast. Siis

$$A + B = 140. \qquad (1)$$

Et esimeses sulamis on 5 % niklit, siis A tonnis selles terases on on nikli kogus tonnides

$$a = \frac{A}{100} \cdot 5 = 0{,}05A.$$

Et teises sulamis on 40 % niklit, siis B tonnis selles terases on nikli kogus tonnides

$$b = \frac{B}{100} \cdot 40 = 0{,}4B.$$

Kokku vajatakse aga 42 tonni niklit, seega

$$0{,}05A + 0{,}4B = 42. \qquad (2)$$

Lahendades võrranditest (1) ja (2) koosneva süsteemi arvude A ja B suhtes, saame, et $A = 40$ ja $B = 100$.

Kontroll. Et 40 tonnis 5 %-lise niklisisaldusega terases on niklit $\frac{40}{100} \cdot 5 = 2$ tonni ning 100 tonnis 40 %-lise niklisisaldusega terases $\frac{100}{100} \cdot 40 = 40$ tonni niklit, siis 140 tonnis uues sulamis on $2 + 40 = 42$ tonni niklit, mis tõepoolest moodustab 40 % terasekogusest 140 tonni.

Vastus. Vajalik kogus sobiva niklisisaldusega terast saadi, kui 5 %-list sulamit võeti 40 tonni ja 40 %-list sulamit 100 tonni.

Näide 13. Arv A on arvust B suurem 50 % võrra. Mitme protsendi võrra on arv B väiksem arvust A?

Lahendus. Kui arv A on arvust B suurem 50 % võrra, siis see tähendab, et arv A moodustab 150 % arvust B. Seega

$$\frac{A}{B} \cdot 100 = 150,$$

millest

$$\frac{A}{B} = \frac{150}{100}.$$

Vastuse küsitule leiame, kui väljendame protsentides suhte $\frac{B}{A}$. Ülalpool saadud võrduse põhjal leiame, et $\frac{B}{A} = \frac{100}{150}$, millest $\frac{B}{A} = \frac{2}{3}$ ehk $\frac{B}{A} = 0{,}(6)$. Seega arv B moodustab arvust A

$$\left(\frac{B}{A} \cdot 100\right) \% = 66{,}(6) \%.$$

Järelikult on arv B arvust A väiksem

$$100 \% - 66{,}(6) \% = 33{,}(3) \% \text{ võrra.}$$

Vastus. Kui arv A on arvust B suurem 50 % võrra, siis arv B on 33,(3) % võrra väiksem arvust A.

Kontrollküsimused

1. Mida nimetatakse kahe arvu suhteks?
2. Mida näitavad suhted 4 : 2 ja 3 : 9?
3. Teisendada täisarvulisteks suhted $\frac{1}{2} : 3$; $\frac{2}{5} : \frac{1}{3}$; $\frac{4}{14} : \frac{3}{21}$.
4. Mida nimetatakse võrdeks?
5. Sõnastada võrde põhiomadus.
6. Kui arvud a ja b on võrdelised arvudega c ja d, mida võib siis öelda arvude a ja c ning b ja d kohta?
7. Selgitada, mida tähendab arvu A jaotamine võrdeliselt (pöördvõrdeliselt) antud arvudega k_1, k_2, ..., k_n.
8. Mida nimetatakse üheks protsendiks antud arvust?
9. Väljendada protsentides arvude 1 ja 4; 3 ja 5; 5 ja 2; 12,5 ja 50 suhted.
10. Mitu protsenti arvust 1 moodustavad arvud 0,5; 2,15; 1,75; 0,(6); 0,02; 2,0?
11. Millise osa moodustavad 5 %; 20 %; 72 %; 100 %; 200 %; 7,5 % ja 0,75 % mingist arvust A?
12. Sõnastada protsentarvutuse kolm põhiülesannet.
13. Millisel võrdel põhineb protsentülesannete põhitüüpide lahendamine?
14. Kuidas väljendada kahe arvu suhet protsentides?
15. Kuidas toimub terviku leidmine protsentülesannetes?
16. Kuidas toimub osa leidmine tervikust protsentülesannetes?

IV ALGEBRALISTE AVALDISTE TEISENDAMINE

§10. Algebraliste avaldiste mõiste ja klassifikatsioon

1. Algebraline avaldis. Matemaatikas nimetatakse avaldiseks eeskirja, mis teatava suuruse leidmiseks määrab kindlaks nii konstantide ja muutujate väärtustega sooritatavad operatsioonid kui ka nende operatsioonide teostamise järjekorra.

Avaldist, mille väärtuse leidmiseks tuleb lõplik arv kordi kasutada vaid nelja aritmeetika põhitehet (liitmist, lahutamist, korrutamist ja jagamist) ning astendamist ja juurimist täisarvulise astendaja ja juurijaga, nimetatakse a l g e b r a l i s e k s a v a l d i s e k s.

Algebralisteks avaldisteks on $4ax^2 - 5y$; $\frac{x + a}{4 - b}$, $\sqrt[5]{x + a^{-4}z^7}$ jne.

Avaldist, milles kasutatakse ülimalt loenduv arv kordi aritmeetilisi tehteid ning piirprotsesse naturaalarvu n järgi, nimetatakse a n a l ü ü t i l i s e k s a v a l d i s e k s. Sellisteks on näiteks avaldised

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}; \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \Delta x_i;$$

$\log (x^2 - 2) + \tan x$ jne.

Iga algebraline avaldis on analüütiline avaldis.

2. A l g e b r a l i s t e a v a l d i s t e p õ h i l i i g i d. Kui algebralises avaldises ei esine juurimistehet, siis kõneldakse r a t s i o n a a l s e s t a l g e b r a l i s e s t a v a l d i s e s t. Näiteks $a^3b^{-2} + az - \frac{x + a}{y^{10}}$. Juuri sisaldava algebralise avaldise korral räägitakse i r r a t s i o n a a l s e s t a l g e b r a l i s e s t a v a l d i s e s t. Näiteks $a^{-\frac{4}{5}} \cdot b + \sqrt[3]{c}$.

Kui algebralise avaldise väärtuse leidmiseks tuleb teostada tehteid vaid reaalarvudega (konstantidega), siis kõneldakse ka a r v a v a l d i s e s t. Sellisteks on näiteks avaldised $\frac{25 - 15}{4}$, $5 - (3 + 8 \cdot 4)$; $\frac{\sqrt{4} - 5^{-2}}{\sqrt[3]{7}}$.

Muutujaid sisaldavate avaldiste näiteks võib tuua algebralised avaldised $5 + \frac{a}{3}$; $x^2 + y^2 - 1$ ja $\frac{3}{x - 5}$. Iga muutujaid sisaldav avaldis muutub arvavaldiseks, kui kõikide muutujate asemele panna muutujate mingid konkreetsed reaalarvulised väärtused.

3. A v a l d i s e m ä ä r a m i s p i i r k o n d. Muutujaid sisaldavate avaldiste väärtused sõltuvad muutujate väärtustest. Sellistel avaldistel võib muutujate teatavatel väärtustel avaldise enda väärtus puududa. Näiteks puudub avaldisel $\frac{3}{x - 5}$ väärtus, kui $x = 5$, sest tekib jagamine

nulliga.

Muutujate väärtuste hulka, mille korral antud avaldisel leidub väärtus, nimetatakse antud avaldise **m ä ä r a m i s p i i r k o n n a k s**.

Koolimatemaatikas piirdutakse selliste avaldiste väärtustega, milles muutujad omandavad vaid reaalarvulisi väärtusi. Nende avaldiste määramispiirkonnad on kirjeldatavad reaalarvude hulga teatavate alamhulkade kaudu. Näiteks algebralise avaldise $\frac{xy}{x + y}$ määramispiirkonda kuuluvad kõik järjestatud reaalarvude paarid $(x; y)$, mille korral $x + y \neq 0$. Analüütilise avaldise $x \cdot \log (z - y)$ määramispiirkonda kuuluvad kõik reaalarvude kolmikud $(x; y; z)$, mille korral $z - y > 0$.

Mitme (algebralise) avaldise koos vaatlemisel tuleb kindlaks teha nende ühine määramispiirkond. Nii tuleb avaldiste

$$A = \frac{x}{x + 1} \quad \text{ja} \quad B = \frac{y}{x(y + 2)}$$

koos vaatlemisel eeldada, et $x \neq -1$, $x \neq 0$ ja $y \neq -2$.

Muutujaid $x, y, z, \ldots, w$ sisaldavaid kahte avaldist nimetatakse **s a m a v ä ä r s e i k s a n t u d p i i r k o n n a s** D, kui

1) piirkond D kuulub antud avaldiste ühisesse määramispiirkonda;

2) muutujate $x, y, z, \ldots, w$ mistahes väärtuste korral piirkonnast D on antud avaldiste väärtused võrdsed.

Näiteks on avaldised $(a - b)^2$ ja $a^2 - 2ab + b^2$ samaväärsed piirkonnas $D=\{(a; b) | a \in R \quad b \in R\}$. Avaldised x^2+1 ja $y(x^2 + 1)$ ei ole samaväärsed üheski piirkonnas, sest nad sisaldavad erineva arvu muutujaid. Avaldised $x + 1$ ja $\frac{x^2 - 1}{x - 1}$ on samaväärsed ühises määramispiirkonnas $D=\{x | x \in R \wedge x \neq 1\}$, ei ole aga samaväärsed kogu reaalarvude hulgal R.

Üleminekut ühelt avaldiselt teisele, temaga samaväärsele avaldisele, nimetatakse avaldise **s a m a s u s t e i s e n d u s e k s**.

4. **V õ r d u s, s a m a s u s ja v õ r r a n d.** Kui kahe avaldise vahele on kirjutatud võrdusmärk, siis kõneldakse **v õ r d u s e s t**

$$A = B . \qquad (1)$$

Näiteks on võrdus

$$\frac{x}{x + 1} = \frac{y}{x(y + 2)} \quad . \qquad (2)$$

Andes võrduses (1) kõigile muutujatele konkreetsed arvulised väärtused avaldiste A ja B ühisest määramispiirkonnast, saame arvvõrduse.

Näiteks saame võrdusest (2) muutujate väärtustel $x = 1$ ja $y = 2$ tõese arvvõrduse $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$. Muutujate väärtustel $x = 1$ ja $y = 1$ (kuuluvad määramispiirkonda), saame aga väära arvvõrduse $\frac{1}{2} \neq \frac{1}{3}$.

Muutujaid sisaldavat võrdust (1), mis muutub tõeseks arvvõrduseks muutujate kõigi väärtuste korral avaldiste A ja B ühisest määramispiirkonnast, nimetatakse s a m a s u s e k s $A \equiv B$.

Lihtsamateks samasusteks on võrdused, mis väljendavad aritmeetiliste tehete omadusi $a + b = b + a$; $(a + b) \cdot c$ $a \cdot c + b \cdot c$ jne. Samasuseks osutub ka võrdus $\frac{a^3 - 8}{a - 2} = a^2 + 2a + 4$ igal reaalarvude hulgal, millel $a \neq 2$.

Kui avaldistel A, B ja C on ühine määramispiirkond, siis selles piirkonnas:

1) samasustest $A \equiv B$ ja $B \equiv C$ järeldub samasus $A \equiv C$;

2) samasusest $A \equiv B$ järeldub $A + C \equiv B + C$;

3) samasusest $A \equiv B$ järeldub $A \cdot C \equiv B \cdot C$.

Muutujaid sisaldavat võrdust (1), mis ei osutu samasuseks avaldiste A ja B ühises määramispiirkonnas, nimetatakse v õ r r a n d i k s $A = B$. Avaldiste ühist määramispiirkonda aga nimetatakse võrrandi m ä ä r a m i s p i i r k o n n a k s. Muutujate neid väärtusi võrrandi $A = B$ määramispiirkonnast, mis muudavad antud võrrandi tõeseks arvvõrduseks, nimetatakse võrrandi l a h e n d i t e k s.

Nii näiteks osutub võrdus (2) võrrandiks, mille üheks lahendiks on arvupaar (1; 1).

Võrrandi $A = 0$ lahendeid nimetatakse ka algebralise avaldise A n u l l k o h t a d e k s.

Leidub võrrandeid, millel lahendid puuduvad, mõnel võrrandil on neid lõplik arv, teisel võib lahendeid olla kuitahes palju. Oluline on jälgida võrrandi määramispiirkonda võrrandi lahendite leidmisel. Näiteks puuduvad võrrandil

$x = \frac{1}{2}$ lahendid naturaalarvude hulgas, leidub aga üks lahend ratsionaalarvude hulgas. Võrrandil $x^2 = -4$ puuduvad reaalarvulised lahendid, kompleksarvude hulgas aga on lahendid olemas. Võrrandite lahendamisest tuleb üksikasjalisemalt juttu edaspidi.

§11. Üks- ja hulkliikmed

1. *Üksliige. Hulkliige.* Üksliikmeks nimetatakse reaalarvu a ja muutujate x, y, ..., w naturaalarvuliste astendajatega astmete korrutist

$$ax^k y^l \ldots w^q. \tag{1}$$

Näiteks on avaldised xyz, $3x^4$, $-5b^2cz^3$, 2^8xy^2, $\frac{1}{3}zw^5$ üksliikmed, kuid avaldised $x + 1$, $a^2 + b^2$, $3y^3\frac{1}{x}$, $-5zy^{-4}$ aga mitte.

Üksliikmes esinevat reaalarvulist tegurit a nimetatakse üksliikme *kordajaks*. Kordaja 1 jäetakse tavaliselt kirjutamata. Astendajate k, l, ..., q summat $k + l + \ldots + q$ nimetatakse üksliikme (1) *astmeks*. Nii on üksliikme $-7xya^3$ aste $1 + 1 + 3 = 5$ üksliikme $0,1x$ aste 1, aga üksliikme 5^3 aste on 0.

Üksliikmeid nimetatakse *sarnasteks*, kui nad üksteisest üldse ei erine või kui nad erinevad ainult kordaja poolest. Nii on sarnased üksliikmed $5x^2yab^3$ ja $(-0,3)^4x^2yab^3$; xy ja xy, kuid üksliikmed xy ja xy^2 ning $5xy$ ja $5y$ ei ole sarnased

Üksliikmete liitmisel ja lahutamisel saadud avaldist nimetatakse üksliikmete *algebraliseks summaks* ehk *hulkliikmeks*. Nii on avaldis $2x - 5y^2 + \frac{3}{4}xyz - 0,1$ hulkliige.

Üksliikmete liitmistehtel on kommutatiivsuse ja assotsiatiivsuse omadused.

Märkus. Eelpool defineeritud üksliige (1) on tegelikult nn. *ratsionaalne* üksliige. Kui avaldises (1) astendajad k, l, ..., q kuuluvad positiivsete ratsionaalarvude hulka, saadakse nn. *irratsionaalsed* üksliikmed. Sellisteks on avaldised $-2x\sqrt{y}$ ja $(0,1)^3 x^{\frac{1}{7}} y^{\frac{3}{4}}$.

Ratsionaalsete üks- ja hulkliikmete määramispiirkond on määratud kogu reaalarvude hulgaga R.

2. Ü k s - j a h u l k l i i k m e t e k o o n d a m i n e. Sarnaste üksliikmete algebralise summa asendamist sellise liidetavatega sarnase üksliikmega, mille kordaja on võrdne liidetavate üksliikmete kordajate summaga, nimetatakse sarnaste üksliikmete k o o n d a m i s e k s. Et koondada sarnased üksliikmed summas $2xy - 5xy + 6xy$, tuleb antud summa asendada üksliikmega $(2-5+6)2xy = 3xy$.

Hulkliikme koondamine tähendab antud hulkliikme esitamist kujul, milles kõik sarnased üksliikmed on koondatud.

Näide 1. Koondada hulkliige $5x^2 - 4x + 3 - 3x^2 + x - 2$.

Lahendus. Antud hulkliikmes on sarnasteks üksliikmeteks $5x^2$ ja $-3x^2$; $4x$ ja x ning 3 ja -2. Et koondamisel mitte eksida, soovitatakse sarnased liikmed ka eristada. Seega:

$$\underline{5x^2} - \underline{\underline{4x}} + 3 - \underline{3x^2} + \underline{\underline{x}} - 2 = (5 - 3)x^2 + (-4 + 1)x + 3 - 2 = 2x^2 - 3x + 1.$$

Näide 2. Koondada $3ax^2 - 5x + 7y + 4ax^2 - 5ax^2 - 6y$.

Lahendus. $\underline{3ax^2} - 5x + \underline{\underline{7y}} + \underline{4ax^2} - \underline{5ax^2} - \underline{\underline{6y}} = 2ax^2 - 5x + y$.

3. Ü k s j a h u l k l i i k m e t e k o r r u t a m i n e. Kuna koolimatemaatikas lubatakse algebralistes avaldistes esinevatele muutujatele vaid reaalarvulisi väärtusi, siis võime tehete teostamisel üks- ja hulkliikmetega lähtuda reaalarvude hulgal defineeritud tehete omadustest.

3.1) Üksliikme korrutamine üksliikmega. Üksliikmete korrutamisel korrutatakse nende kordajad ja üksliikmeis esinevate muutujate astmed. Lähtudes reaalarvude korrutamise omadusest, leiame korrutise

$$7a^3bc \cdot (-2ab^4) = 7 \cdot (-2) \cdot a^3 a \cdot b \cdot b^4 \cdot c = 14a^4b^5c.$$

3.2) Hulkliikme korrutamine üksliikmega. Lähtudes korrutamis- ja liitmistehet siduvast distributiivsuse seadusest, saadakse reegel: hulkliikme korrutamisel üksliikmega korrutatakse selle üksliikmega hulkliikme iga liige ja saadud korrutised liidetakse. Näiteks

$$(5a^2 - 3bc + c^2)2ac = (5a^2)(2ac) + (-3bc)(2ac) + (c^2)(2ac) = 10a^3c - 6abc^2 + 2ac^3.$$

Hulkliikme korrutamisel arvuga −1 jäetakse kokkuleppeliselt number 1 kirjutamata ja lisatakse sulgudes oleva hulkliikme ette vaid märk "−".

Näiteks $(-1) \cdot (2a - 3b - 4ab) = -(2a - 3b - 4ab) = -2a + 3b + 4ab.$

3.3) Hulkliikme korrutamine hulkliikmega. Korrutamisel tuleb ühe hulkliikme iga liige korrutada teise hulkliikme iga liikmega ja saadud korrutised liita. Näiteks

$$5x(x - y) + (2x + y)(x + y) = \underline{5x^2} - \underline{\underline{5xy}} + \underline{2x^2} + \underline{\underline{2xy}} + \underline{\underline{yx}} + y^2 = 7x^2 - 2xy + y^2.$$

4. Hulkliikmete summa ja vahe. Hulkliikmete summa ja vahe teisendamisel avatakse sulud ja koondatakse sarnased üksliikmed.

Näide 1. $(5x^2 - 4x + 3) + (3x^2 - x + 2) = \underline{5x^2} - \underline{\underline{4x}} + 3 + \underline{3x^2} - \underline{\underline{x}} + 2 = 8x^2 - 5x + 5.$

Näide 2. $(17a^4 - 8a^3y - 5) - (6x - 5a^3y + 9a^4) = \underline{17a^4} - \underline{\underline{8a^3y}} - 5 - 6x + \underline{\underline{5a^3y}} - \underline{9a^4} = 8a^4 - 3a^3y - 6x - 5.$

Mõningate ülesannete lahendamisel on tarvis paigutada hulkliige sulgudesse.

Näide 3. $6x + y - 3xy + 5 = (6x + y) + (-3xy + 5).$

Näide 4. $6x + y - 3xy + 5 = (6x + y) - (3xy - 5).$

Näide 5. $6x + y - 3xy + 5 = -(-6x - y) - (3xy + 5).$

5. Üks- ja hulkliikmete astendamine. Korrutamise abivalemid. Üksliikmete astendamisel naturaalarvulise astendajaga n lähtutakse reaalarvude korrutise astendamise reeglist. Näiteks

$$(-2x^2y^3z)^4 = (-2)^4(x^2)^4(y^3)^4 z^4 = 16x^8y^{12}z^4.$$

Hulkliikmete astendamisel lähtutakse reaalarvu astme definitsioonist. Näiteks

$$(2x - 5y + 7)^2 = (2x - 5y + 7)(2x - 5y + 7) = 4x^2 - 10xy + \underline{\underline{14x}} - \underline{10xy} + 25y^2 - 35y + \underline{\underline{14x}} - 35y + 49 = 4x^2 + 25y^2 - 20xy + 28x - 70y + 49$$

On tuletatud terve rida hulkliikmete astendamist hõlbusta-

7*

vaid valemeid. Toome järgnevalt mõningad neist, mida tuntakse *korrutamise abivalemite* nime all.

1. Ruutude vahe valem $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$.
2. Summa ruudu valem $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.
3. Summa kuubi valem $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$.
4. Kuupide summa valem $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$.
5. Vahe ruudu valem $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$.
6. Vahe kuubi valem $(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$.
7. Kuupide vahe valem $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$.
8. Kolmliikme ruutude valemid

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz,$$
$$(x- y - z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz + 2yz.$$

Neid valemeid kasutatakse nii vasakult paremale kui ka paremalt vasakule paljude ülesannete lahendamisel.

6. *Hulkliikme lahutamine tegureiks*. Hulkliikme esitamist selliste üks- või hulkliikmete korrutisena, millede korrutamisel saame esialgse hulkliikme, nimetatakse *hulkliikme lahutamiseks tegureiks*. Näiteks

$$3ax^4 - 6a^7x^7 + 12ax^3 = 3ax^3(x - 2a^6x^4 + 4),$$

sest leides korrutise $3ax^2(x - 2a^6x^4 + 4)$ saame esialgse hulkliikme $3ax^4 - 6a^7x^7 + 12ax^3$.

Iga hulkliige ei lahutugi tegureiks. Näiteks $x - y - 1$ ja $a^2 + 4$.

Hulkliikmete tegureiks lahutamisel kasutatakse teatavaid abivõtteid, mida ülesannete lahendamisel rakendatakse kombineeritult.

6.1) Ühise teguri sulgude ette toomine.

Olgu antud üksliikmed $10xy$ ja $4x^2y$. Esitame nad korrutisena $10\,xy = (2x) \cdot 5y$ ja $4x^2y = (2x)\cdot 2xy$. Üksliiget $2x$ nimetatakse üksliikmete $10xy$ ja $4x^2y$ *ühiseks teguriks*. Ühist tegurit omavate üksliikmete algebralise summa võib alati esitada ühise teguri ja teatava hulkliikme korrutisena. Toodud näite korral $10xy - 4x^2y = 2x(5y - 2xy)$. Öeldakse, et ühine tegur $2x$ on hulkliikmest $10xy - 4x^2y$ toodud sulgude ette.

Näide 1. $12ax^4 - 6a^7x^7 + 3ax^3 = (3ax^3)4x -$
$- (3ax^3)(2a^6x^4) + (3ax^3) \cdot 1 = 3ax^3(4x - 2a^6x^4 + 1)$.

Näide 2. $-20bc^3 + 25b^2c^2 - 35b^3c^4 = -5bc^2(4c-5b+7b^2c^2)$.

Sulgude ette toodavaks ühiseks teguriks võib osutuda ka hulkliige.

Näide 3. $6a(2c - d) + 3b(2c - d) = 3[2a(2c-d)+b(2c-d)] =$
$= 3 \cdot (2c - d)(2a + b)$.

Näide 4. $3p(p - q) - 5(q - p)^2 = 3p(p - q) - 5(p-q)^2 =$
$= (p - q)[3p - 5(p - q)] = (p - q)(3p - 5p + 5q) =$
$= (p - q)(5q - 2p)$.

Näide 5. $4x(x - y) - 8x^2y(y - x) + 8xy - 8x^2 =$
$= 4x(x - y) - 8x^2y(y - x) + 8x(y - x) =$
$= 4x[(x - y) - 2xy(y - x) + 2(y - x)] =$
$= 4x(y - x)[-1 - 2xy + 2] = 4x(y - x)(1 - 2xy)$.

6.2) Rühmitamine. Liidetavate järjekorra muutmisega hulkliikmes ja sulgude sobiva paigutamisega võib sulgudesse jääda hulkliikmeid, milledel leidub ühiseid tegureid.

Näide 6. $3(x - 2y)^2 - 3x + 6y = 3(x - 2y)^2 - (3x -6y) =$
$= 3(x - 2y)^2 - 3(x - 2y) = 3(x - 2y)(x - 2y - 1)$.

Näide 7. $ab + 2a - 3b - 6 = (ab - 3b) + (2a - 6) =$
$= b(a - 3) + 2(a - 3) = (a - 3)(b + 2)$.

Näide 8. $xy - zy - x + z - y + 1 = (xy - zy - y) -$
$- (x - z - 1) = y(x - z - 1) - (x - z - 1) =$
$= (x - z - 1)(y - 1)$.

Näide 9. $2x^2 + 3x + 1 = 2x^2 + 2x + x + 1 =$
$= 2x(x + 1) + (x + 1) = (x + 1)(2x + 1)$.

6.3) Korrutamise abivalemite rakendamine. Nende valemite kasutamine aitab hulkliikmete teguriteks lahutamisel. Vaatame järgmisi näiteid.

Näide 10. $4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2 =$
$= [2ac - (a^2 + c^2 - b^2)] \cdot [2ac + (a^2 + c^2 - b^2)] =$
$= [-(a^2 - 2ac + c^2) + b^2] \cdot [(a^2 + 2ac + c^2) - b^2] =$
$= [b^2 - (a - c)^2] \cdot [(a + c)^2 - b^2] = [b + (a - c)] \cdot$
$\cdot [b - (a - c)] \cdot (a + c + b)(a + c - b) =$
$= (b + a - c)(b - a + c)(a + c + b)(a + c - b)$.

Näide 11. $a^{11} - 2a^{10} + a^9 - a^7 + 2a^6 - a^5 =$
$= a^9(a^2 - 2a + 1) - a^5(a^2 - 2a + 1) =$
$= a^5(a^2 - 2a + 1)(a^4 - 1) = a^5(a - 1)^2(a^2 - 1)(a^2 + 1) =$
$= a^5(a - 1)^3(a + 1)(a^2 + 1).$

7. **Ruutkolmliikme lahutamine tegureiks.** Hulkliiget $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ nimetatakse ruutkolmliikmeks muutuja x suhtes. Ruutkolmliikme teguriteks lahutamiseks on tarvis seda hulkliiget teataval kindlal viisil teisendada, s.t. eraldada ruutkolmliikmest teatava kaksliikme täisruut. Vaatame seda teisendust järgnevate näidete varal.

Näide 1. $x^2 + 6x + 13 = (x^2 + 2 \cdot 3x + 9) - 9 + 13 =$
$= (x + 3)^2 + 4.$

Näide 2. $x^2 - 5x + 6 = x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{5}{2} + \frac{25}{4} - \frac{25}{4} + 6 =$
$= (x - \frac{5}{2})^2 - \frac{1}{4}.$

Näide 3. $-x^2 + 8x - 7 = -(x^2 - 8x + 7) =$
$= -(x^2 - 2 \cdot 4x + 16 - 16 + 7) = -\left[(x-4)^2 - 9\right] =$
$= 9 - (x - 4)^2.$

Näide 4. $7 + 4x - 2x^2 = -2(x^2 - 2x - \frac{7}{2}) =$
$= -2(x^2 - 2 \cdot 1 \cdot x + 1 - 1 - \frac{7}{2}) =$
$= 2\left[(x - 1)^2 - \frac{9}{2}\right] = 9 - 2(x - 1)^2.$

Esitame nüüd täisruudu eraldamise võtte ka üldjuhul.

$$ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) =$$
$$= a(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}) =$$
$$= a\left[(x + \frac{b}{2a})^2 + (\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2})\right] = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Täisruudu eraldamine ruutkolmliikmest on alati võimalik. Kui selle teisenduse tulemusena saame kahe avaldise ruutude vahe, siis on võimalik antud ruutkolmliiget ka tegureiks lahutada. Kasutades näidetes 2, 3 ja 4 ruutude vahe abivalemit, saame

1) $x^2 - 5x + 6 = (x - \frac{5}{2})^2 - \frac{1}{4} =$
$= \left[(x - \frac{5}{2}) + \frac{1}{2}\right] \cdot \left[(x - \frac{5}{2}) - \frac{1}{2}\right] = (x - 2)(x - 3);$

$$2)\ -x^2 + 8x - 7 = 9 - (x - 4)^2 =$$
$$= [3 + (x - 4)]\cdot[3 - (x - 4)] = (x - 1)(7 - x);$$
$$3)\ 7 + 4x - 2x^2 = 9 - 2(x - 1)^2 =$$
$$= [3 + \sqrt{2}(x - 1)]\cdot[3 - \sqrt{2}\cdot(x - 1)].$$

Näites 1 aga saime kahe avaldise ruutude summa, mis ei lahutu tegureiks reaalarvude hulgal.

Ruutkolmliikme tegureiks lahutamiseks võib kasutada ka teist võtet. Kui oskame leida ruutvõrrandi $ax^2 + bx + c = 0$ reaalarvulisi lahendeid x_1 ja x_2, siis antud ruutkolmliige lahutub tegureiks

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Näide 5. Et ruutvõrrandi $2x^2 + 5x - 3 = 0$ lahenditeks on arvud $\frac{1}{2}$ ja -3, siis

$$2x^2 + 5x - 3 = 2(x - \tfrac{1}{2})(x + 3).$$

Samale tulemusele jõuame ka täisruudu eraldamise võttega. Tõepoolest

$$2x^2 + 5x - 3 = 2(x^2 + \tfrac{5}{2}x - \tfrac{3}{2}) = 2(x^2 + 2\cdot\tfrac{5}{4}x + \tfrac{25}{16} - \tfrac{25}{16} - \tfrac{3}{2}) =$$
$$= 2\left[(x + \tfrac{5}{4})^2 - \tfrac{49}{16}\right] = 2(x + \tfrac{5}{4} - \tfrac{7}{4})(x + \tfrac{5}{4} + \tfrac{7}{4}) =$$
$$= 2(x - \tfrac{1}{2})(x + 3).$$

Näide 6. Ruutvõrrandil $x^2 + 6x + 13 = 0$ puuduvad reaalarvulised lahendid ja nagu nägime ka näites 1, ruutkolmliige $x^2 + 6x + 13$ ei lahutunud tegureiks.

§12. Algebralised murrud

1. Üksliikme jagamine üksliikmega. Üksliikme jagamisel üksliikmega leiame sellise üksliikme, mille korrutis jagajaga annab tulemuseks jagatava.

Näide 1. $6a^2b^3 : 2ab = 3ab^2$, sest $3ab^2 \cdot 2ab = 6a^2b^3$.

Näide 2. $-5x^5y^6z : 3xz = \frac{-5}{3}x^4y^6$, sest $\frac{-5}{3}x^4y^6 \cdot 3xz = -5x^5y^6z$.

Üksliikmete jagamisel jagatakse nende kordajad ja neis esinevate muutujate astmed. Jagatis ei ole alati üksliige. Näiteks ei leidu sellist üksliiget A, et $A \cdot 3a^3 \cdot b^2 = -10ab$. Samal ajal võime küll leida algebralise avaldise A, mille korral $A \cdot 3a^3 \cdot b^2 = -10ab$. Tõepoolest, kui $A = -\frac{10}{3} a^{-2} \cdot b^{-1}$, siis üksliikmete jagatis

$-10ab : 3a^3b^2 = -\frac{10}{3} a^{-2}b^{-1}$ ei ole üksliige.

2. Hulkliikme jagamine üksliikmega. Hulkliikme jagamisel üksliikmega jagatakse antud hulkliikme iga liige selle üksliikmega ja tulemused liidetakse.

Näide 1. $(5x^3 - 6x^2 + 7x) : x = 5x^3 : x + (-6x^2) : x + 7x : x = 5x^2 - 6x + 7$.

Kuna üksliikmete jagatis alati ei tarvitse olla üksliige, siis ka hulkliikme jagatiseks üksliikmega ei tarvitse alati olla hulkliige.

Näide 2. $(6xy - 3x^2z) : 2x^2 = 3x^{-1} \cdot y - \frac{3}{2}z$.

3. Hulkliikme jagamine hulkliikmega. Hulkliikme jagamisel hulkliikmega leitakse selline hulkliige, mille korrutis jagajaga annab jagatava hulkliikme.

Näide 1. Kuna $(x + 2)(2x^2 - 3) = 2x^3 + 4x^2 - 3x - 6$, siis võime kirjutada, et $(2x^3 + 4x^2 - 3x - 6) : (x + 2) = 2x^2 - 3$ ning $(2x^3 + 4x^2 - 3x - 6) : (2x^2 - 3) = x + 2$.

Hulkliikmete jagamistehet vormistatakse kujul

$$\begin{array}{rl|l} & 2x^3 + 4x^2 - 3x - 6 & 2x^2 - 3 \\ - & 2x^3 - 3x & \overline{x + 2} \\ \hline \text{(esimene jääk)} & 4x^2 - 6 & \\ - & 2x^2 - 6 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

Üldjuhul pole kahe suvalise hulkliikme jagatis mitte hulkliige, vaid üldisem algebraline avaldis, nn. algebraline murd.

Kahe ühest muutujast sõltuva hulkliikme jagamisel tuleb

1) mõlemad hulkliikmed korrastada muutuja astmete kahanemise suunas;

2) jagada jagatava hulkliikme kõrgeima astme üksliige jagaja hulkliikme suurima astme üksliikmega; saadud üksliige on jagatise esimene liige;

3) jagatise esimene üksliige korrutada jagajaga ning korrutis lahutada jagatavast; saadud vahe on esimene jääk;

4) jagatise järgmise liikme leidmiseks tuleb esimese jäägiga toimida nii, nagu toimisime jagatavaga punktides 2 ja 3; jagamist tuleb jätkata seni, kuni jõuame jäägini null või jäägini, mille aste on väiksem jagaja astmest.

Näide 2. Jagada hulkliige $15x^5 - x^4 - 13x^3 + 8x^2 - 13x + 4$ hulkliikmega $3x^2 + x - 4$.

Lahendus.

$$
\begin{array}{lrrrrrr|l}
 & 15x^5 & - x^4 & - 13x^3 & + 8x^2 & - 13x & + 4 & 3x^2 + x - 4 \\
\cline{8-8}
 & 15x^5 & + 5x^4 & - 20x^3 & & & & 5x^3 - 2x^2 + 3x - 1 \\
\cline{2-7}
\text{(esimene jääk)} & & -6x^4 & + 7x^3 & + 8x^2 & - 13x & + 4 & \\
 & & -6x^4 & - 2x^3 & + 8x^2 & & & \\
\cline{3-7}
\text{(teine jääk)} & & & 9x^3 & & - 13x & + 4 & \\
 & & & 9x^3 & + 3x^2 & - 12x & & \\
\cline{4-7}
\text{(kolmas jääk)} & & & & - 3x^2 & - x & + 4 & \\
 & & & & - 3x^2 & - x & + 4 & \\
\cline{5-7}
 & & & & & 0 & &
\end{array}
$$

Vastus. $(15x^5 - x^4 - 13x^3 + 8x^2 - 13x + 4):(3x^2+x-4) = 5x^3 - 2x^2 + 3x - 1$.

Näide 3. Jagada hulkliige $12x^4 - 3x^3 + x^2 + 5$ hulkliikmega $x^2 - 5x + 1$.

Lahendus.

$$
\begin{array}{lrrrrr|l}
 & 12x^4 & - 3x^3 & + x^2 & & + 5 & x^2 - 5x + 1 \\
\cline{7-7}
 & 12x^4 & - 60x^3 & + 12x^2 & & & 12x^2 + 57x + 274 \\
\cline{2-6}
\text{(esimene jääk)} & & 57x^3 & - 11x^2 & & + 5 & \\
 & & 57x^3 & - 285x^2 & + 57x & & \\
\cline{3-6}
\text{(teine jääk)} & & & 274x^2 & - 57x & + 5 & \\
 & & & 274x^2 & - 1370x & + 274 & \\
\cline{4-6}
\text{(kolmas jääk)} & & & & 1313x & - 269 &
\end{array}
$$

Vastus. Antud hulkliikmete jagamisel tekib jagatis $12x^2 + 57x + 274$ ja jääk $1313x - 269$, seega
$12x^4 - 3x^3 + x^2 + 5 = (12x^2 + 57x + 274) \cdot (x^2 - 5x + 1) + (1313x - 269)$.

4. **Algebraline murd.** Algebralisi avaldisi, milles ei esine jagamistehet ega negatiivseid astendajaid, nimetatakse algebralisteks **täisavaldisteks**. Üks- ja hulkliikmed on täisavaldised, kuid näiteks avaldised $4x^{-2}y$ ja $5 : (x + y)$ mitte.

Kahe algebralise täisavaldise A ja B jagatist $A : B$, mis ei osutu täisavaldiseks, nimetatakse **algebraliseks murruks** $\frac{A}{B}$. Algebralisteks murdudeks on jagatised

$$-\frac{10ab}{3a^3b^2}; \quad \frac{6xy - 3x^2z}{2x^2}; \quad \frac{\sqrt{a^2} + a + \sqrt[3]{b}}{\sqrt[4]{a + b} - \sqrt{c}}.$$

Kui algebralisele murrule pole lisatud tema määramispiirkonda, tuleb arvestada, et murd $\frac{A}{B}$ on määratud vaid muutujate selliste väärtuste korral, mis kuuluvad avaldiste A ja B ühisesse määramispiirkonda ning ei muuda nimetaja B väärtust võrdseks nulliga. Nii näiteks pole algebralise murru $\frac{x + y}{x - y}$ väärtus määratud muutujate x ja y selliste väärtuste korral, mille puhul $x - y = 0$.

5. **Algebralise murru põhiomadus.** Hariliku murru põhiomadus laieneb ka algebralistele murdudele. Kui avaldiste A, B ja C ühisesse määramispiirkonda kuuluvate muutujate väärtuste korral $B \neq 0$ ja $C \neq 0$, siis kehtib samasus

$$\frac{A}{B} = \frac{C \cdot A}{C \cdot B}.$$

<u>Näide 1.</u> $\frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} \equiv \frac{(x^2 - 2x + 4)(x + 2)}{(x - 2)(x + 2)}$ piirkonnas, kus $x \neq 2$ ja $x \neq -2$.

<u>Näide 2.</u> $\frac{x^2 + xy + y^2}{x + y} \equiv \frac{x^3 - y^3}{x^2 - y^2}$ piirkonnas, kus $x^2 - y^2 \neq 0$.

<u>Näide 3.</u> $\frac{a - b}{x - y} \equiv \frac{(-1)(a - b)}{(-1)(x - y)} \equiv \frac{b - a}{y - x}$ piirkonnas, kus $x \neq y$.

Toodud kolmes näites kasutati murru põhiomadust algebralise murru laiendamiseks. Sama omadust saab kasutada ka algebraliste murdude taandamisel murru määramispiirkonnas.

<u>Näide 4.</u> $\frac{ax + ay}{ax + ay} = \frac{a(x + y)}{a(x - y)} = \frac{x + y}{x - y}$, kui $a \neq 0$ ja $x \neq y$.

Näide 5. $\frac{x^4 - 81}{x - 3} = \frac{(x^2 - 9)(x^2 + 9)}{x - 3} =$

$= \frac{(x - 3)(x + 3)(x^2 + 9)}{x - 3} = (x + 3)(x^2 + 9) =$

$= x^3 + 3x^2 + 9x + 27$ piirkonnas, kus $x \neq 3$.

6. Algebraliste murdude teisendamine ühenimelisteks. Algebralise murru põhiomadust kasutades saab erinevate nimetajatega murde teisendada ühenimelisteks. Ka siin ilmneb täielik analoogia harilike murdude teisendamisega ühenimelisteks murdudeks.

Näide. Teisendada ühenimelisteks murdude paarid

1) $\frac{x + 1}{2x - 5}$, $\frac{x^2 + 2x + 3}{8x^3 - 125}$; 2) $\frac{2}{(x+1)(x-2)}$, $\frac{3}{(x-2)(x+3)}$;

3) $\frac{2x - 3}{x + 1}$, $\frac{x}{x + 2}$.

Lahendus.

1. Kuna $8x^3 - 125 = (2x - 5)(4x^2 + 10x + 25)$, siis

$$\frac{x + 1}{2x - 5} = \frac{(x + 1)(4x^2 + 10x + 25)}{(2x - 5)(4x^2 + 10x + 25)} \text{ ja}$$

$$\frac{x^2 + 2x + 3}{8x^3 - 125} = \frac{x^2 + 2x + 3}{(2x - 5)(4x^2 + 10x + 25)}.$$

Ülesandes on eeldatud, et $8x^3 - 125 \neq 0$.

2. Kuna kummaski nimetajas on ühiseks teguriks avaldis $x - 2$, siis

$$\frac{\overset{x+3}{2}}{(x + 1)(x - 2)} = \frac{2(x + 3)}{(x + 1)(x - 2)(x + 3)} \text{ ja}$$

$$\frac{\overset{x+1}{3}}{(x - 2)(x + 3)} = \frac{3(x + 1)}{(x + 1)(x - 2)(x + 3)}.$$

Selles ülesandes on vaatluse all piirkond, kus $x \neq -1$, $x \neq 2$ ja $x \neq -3$.

3. Kuna nimetajatel ühised tegurid puuduvad, siis

$$\frac{\overset{x+2}{2x - 3}}{x + 1} = \frac{(2x - 3)(x + 2)}{(x + 1)(x + 2)} \text{ ja } \frac{\overset{x+1}{x}}{x + 2} = \frac{x(x + 1)}{(x + 2)(x + 1)}.$$

Siin $x \neq -1$ ja $x \neq -2$.

Enne algebraliste murdude teisendamist ühenimelisteks tuleb

1) murdude nimetajas olevad hulkliikmed lahutada tegu-

reiks;

2) taandada kõiki murde niipalju, kui see on võimalik või vajalik.

7. T e h t e d a l g e b r a l i s t e m u r d u d e g a. Algebraliste murdude liitmine, lahutamine, korrutamine, jagamine ja astendamine toimuvad analoogiliselt vastavatele tehetele harilike murdudega. Tehete sooritamisel algebraliste murdudega tuleb aga alati silmas pidada muutujate lubatavate väärtuste piirkondi, mida kokkuleppeliselt võib ka kirjutamata jätta.

Vaatame mõningate tehete sooritamist näidete varal. Rõhutagem, et pärast tehte sooritamist tuleb resultaadiks saadud algebraline murd lihtsustada, s.t. teisendada lihtsaimale kujule.

Näide 1. $\frac{2x - 3}{x + 1}^{\,x+2} + \frac{x}{x + 2}^{\,x+1} =$

$$= \frac{(2x - 3)(x + 2)}{(x + 1)(x + 2)} + \frac{x(x + 1)}{(x + 1)(x + 2)} =$$

$$= \frac{(2x - 3)(x + 2) + x(x + 1)}{(x + 1)(x + 2)} = \frac{2x^2 - 3x + 4x - 6 + x^2 + x}{(x + 1)(x + 2)} =$$

$$= \frac{3x^2 + 2x - 6}{(x + 1)(x + 2)} .$$

Näide 2. $\frac{x^3}{x - 3} - \frac{3x^3 + 81}{x^2 - 9} = \frac{x^3}{x - 3} -$

$$- \frac{3(x + 3)(x^2 - 3x + 9)}{(x - 3)(x + 3)} = \frac{x^3}{x - 3} - \frac{3(x^2 - 3x + 9)}{x - 3} =$$

$$= \frac{x^3 - 3x^2 + 9x - 27}{x - 3} = \frac{x^2(x - 3) + 9(x - 3)}{x - 3} =$$

$$= \frac{(x - 3)(x^2 + 9)}{x - 3} = x^2 + 9.$$

Näide 3. $\left[\frac{25}{a^2 + 5a + 25} + \frac{2a}{a - 5} - \frac{a^3 + 25a^2}{(a-5)(a^2+5a + 25)}\right] \cdot$

$$\cdot \frac{(a - 5)^2 + 15a}{a - 5} = \frac{25(a - 5) + 2a(a^2+5a+25)-(a^3 + 25a^2)}{(a - 5)(a^2 + 5a + 25)} \cdot$$

$$\cdot \frac{a^2 - 10a + 25 + 15a}{a - 5} =$$

$$= \frac{25a - 125 + 2a^3 + 10a^2 + 50a - a^3 - 25a^2}{(a - 5)(a^2 + 5a + 25)} \cdot \frac{a^2+5a + 25}{a - 5} =$$

$$= \frac{a^3 - 15a^2 + 75a - 125}{(a - 5)(a^2 + 5a + 25)} \cdot \frac{a^2 + 5a + 25}{a - 5} =$$

$$= \frac{(a - 5)^3 \cdot (a^2 + 5a + 25)}{(a - 5)^2 \cdot (a^2 + 5a + 25)} = a - 5.$$

Näide 4.

$$\left(\frac{a^2 - b^2}{a} - a\right) : \left(\frac{x^2 - y^2}{x} - x\right) = \frac{a^2 - b^2 - a^2}{a} : \frac{x^2 - y^2 - x^2}{x} =$$

$$= \frac{-b^2}{a} : \frac{-y^2}{x} = \frac{(-b^2) \cdot x}{a \cdot (-y^2)} = \frac{b^2 x}{a y^2}.$$

Näide 5. $\left[\frac{a^2 - 1}{ab + b}\right]^4 = \left[\frac{(a - 1)(a + 1)}{b(a + 1)}\right]^4 = \left(\frac{a - 1}{b}\right)^4 =$

$$= \frac{(a - 1)^4}{b^4}.$$

Toodud näidetes teostatud tehete sooritamisel on eeldatud, et muutujad omandavad vaid lubatavaid väärtusi. Näiteks ülesandes 4 on eeldatud, et $a \neq 0$, $x \neq 0$ ja $y \neq 0$.

§ 13. Absoluutväärtust sisaldavate avaldiste lihtsustamine

Absoluutväärtust sisaldavate avaldiste lihtsustamisel tuleb lähtuda reaalarvu absoluutväärtuse definitsioonist ja omadustest. Et

$$|x + 1| = \begin{cases} x + 1, & \text{kui } x + 1 \geq 0 \\ -(x + 1), & \text{kui } x + 1 < 0, \end{cases}$$

siis

$$|x + 1| = \begin{cases} x + 1, & \text{kui } x \geq -1 \\ -(x + 1), & \text{kui } x < -1. \end{cases}$$

Kirjutatu tähendab, et kõigi nende muutuja x väärtuste korral, mis ei ole väiksemad arvust -1, tuleb avaldise $|x+1|$ väärtus leida eeskirja $x + 1$ põhjal, muutuja x ülejäänud väärtuste korral aga eeskirja $-(x + 1)$ põhjal. Kui $x = 0 > -1$, siis $|x + 1| = x + 1 = 1$. Kui aga $x = -4 < -1$, siis $|x + 1| = -(x + 1) = -(-3) = 3$.

Järgmiste näidete korral püüame selgitada selliste avaldiste lihtsustamist, milles absoluutväärtuste märkide vahel seisavad avaldised ainult ühe muutuja suhtes.

Näide 1. Lihtsustada avaldis $2 - |x - 3|$.

Lahendus. Et $|x - 3| = \begin{cases} x - 3, \text{ kui } x \geqslant 3 \\ -x + 3, \text{ kui } x < 3, \end{cases}$

siis

$$2 - |x - 3| = \begin{cases} 2 - (x - 3), \text{ kui } x \geqslant 3 \\ 2 - (-x + 3), \text{ kui } x < 3 \end{cases} = \begin{cases} 5 - x, \text{ kui } x \geqslant 3 \\ x - 1, \text{ kui } x < 3. \end{cases}$$

Näide 2. Lihtsustada avaldis $|x| + |x - 2|$ piirkonnas, kus $x < 0$.

Lahendus.

Et $|x| = \begin{cases} x, \text{ kui } x \geqslant 0 \\ -x, \text{ kui } x < 0 \end{cases}$ ja $|x - 2| = \begin{cases} x - 2, \text{ kui } x \geqslant 2 \\ -(x - 2), \text{ kui } x < 2, \end{cases}$

siis antud piirkonnas $x < 0$ saame, et $|x| = -x$ ja $|x - 2| = -(x - 2)$. Järelikult meie avaldis teiseneb piirkonnas $x < 0$ järgmiselt:

$$|x| + |x - 2| = -x - (x - 2) = -2x + 2 = 2(1 - x).$$

Näide 3. Lihtsustada avaldis $|x + 1| - |2x + 5|$, kui $x \geqslant -2$. Lahendus. Et

$$|x + 1| = \begin{cases} x + 1, \text{ kui } x \geqslant -1 \\ -(x + 1), \text{ kui } x < -1 \end{cases} \text{ ja } |2x + 5| = \begin{cases} 2x + 5, \text{ kui } x \geqslant -\frac{5}{2} \\ -(2x + 5), \text{ kui } x < -\frac{5}{2}, \end{cases}$$

siis muutuja x lubatavate väärtuste piirkond $x \geqslant -2$ tuleb jagada kaheks osapiirkonnaks $-2 \leq x < -1$ ja $x \geqslant -1$. Kui $-2 \leq x < -1$, siis $|x + 1| = -(x + 1)$ ja $|2x + 5| = 2x + 5$. Järelikult selles piirkonnas meil avaldis teiseneb nii:

$$|x + 1| - |2x + 5| = -(x + 1) - (2x + 5) = -3(x + 2).$$

Et teises piirkonnas $x \geqslant -1$ leiavad aset võrdused $|x + 1| = x + 1$ ja $|2x + 5| = 2x + 5$, siis avaldis saab kuju

$$|x + 1| - |2x + 5| = x + 1 - (2x + 5) = -x - 4.$$

Vastus.

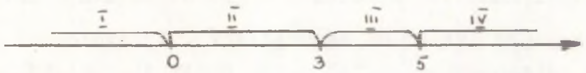
$$|x + 1| - |2x + 5| = \begin{cases} -3(x + 2), \text{ kui } -2 \leqslant x < -1 \\ -(x + 4), \text{ kui } x \geqslant -1. \end{cases}$$

Ülesannetes, mis sisaldavad enam kui ühe avaldise absoluutväärtust, on otstarbekas kogu arvtelg jaotada osapiirkondadeks, mille otspunktideks on absoluutväärtuste märkide vahel olevate avaldiste nullkohad ning määramispiirkonna otspunktid (kui nad on lisatud).

Igas nii saadud osapiirkonnas tuleb kogu avaldise käitumist uurida.

Näide 4. Lihtsustada avaldis $\frac{2|x| + |x - 5|}{|3 - x|}$.

Lahendus. Absoluutväärtuste märkide vahel olevate avaldiste nullkohad on $x_1 = 0$, $x_2 = 5$ ja $x_3 = 3$, millest viimane ei kuulu antud avaldise määramispiirkonda. Seega tuleb antud ülesandes kogu arvtelg jagada neljaks piirkonnaks, nagu on kujutatud ka järgmisel joonisel



Analüüsime avaldise käitumist igas piirkonnas eraldi, arvestades, et

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{kui } x \geq 0 \\ -x, & \text{kui } x < 0, \end{cases} \quad |x - 5| = \begin{cases} x - 5, & \text{kui } x \geq 5 \\ -x + 5, & \text{kui } x < 5 \end{cases} \quad \text{ja}$$

$$|3 - x| = \begin{cases} 3 - x, & \text{kui } x \leq 3 \\ -3 + x, & \text{kui } x > 3. \end{cases}$$

I Kui $x < 0$, siis

$$\frac{2|x| + |x - 5|}{|3 - x|} = \frac{2(-x) + (-x + 5)}{3 - x} = \frac{5 - 3x}{3 - x}.$$

II Kui $0 \leq x < 3$, siis

$$\frac{2|x| + |x - 5|}{|3 - x|} = \frac{2x + (-x + 5)}{3 - x} = \frac{x + 5}{3 - x}.$$

III Kui $3 < x < 5$, siis

$$\frac{2|x| + |x - 5|}{|3 - x|} = \frac{2x + (-x + 5)}{x - 3} = \frac{x + 5}{x - 3}.$$

IV Kui $x \geq 5$, siis

$$\frac{2|x| + |x - 5|}{|3 - x|} = \frac{2x + (x - 5)}{x - 3} = \frac{3x - 5}{x - 3}.$$

Ülesande vastuse võib esitada piirkondade kaupa või kokkuvõtval kujul

$$\frac{2|x| + |x - 5|}{|3 - x|} = \begin{cases} \frac{5 - 3x}{3 - x}, & \text{kui } x < 0 \\ \frac{x + 5}{3 - x}, & \text{kui } 0 \leq x < 3 \\ \frac{x + 5}{x - 3}, & \text{kui } 3 < x < 5 \\ \frac{3x - 5}{x - 3}, & \text{kui } x \geq 5 \end{cases} .$$

§ 14. Irratsionaalsed avaldised

1. **Lihtsamate irratsionaalavaldiste teisendamine.** Irratsionaalavaldisest kõneldakse siis, kui algebraline avaldis sisaldab mingi muutujat sisaldava algebralise avaldise A astet $A^{\frac{1}{m}}$ ehk juurt $\sqrt[m]{A}$ (m on naturaalarv). Irratsionaalsete avaldiste teisendamisel tuleb eriti hoolikalt jälgida kogu avaldise määramispiirkonda. Lähtutakse siin jällegi reaalarvude korral defineeritud juure mõistest ja omadustest. Seega juure $\sqrt[m]{A}$ määramispiirkonnaks on paarituarvulise juurija m korral juurealuse avaldise A määramispiirkond, paarisarvulise juurija $m = 2k$ korral aga on $\sqrt[2k]{A}$ määramispiirkonnaks juurealuse avaldise A määramispiirkonna osapiirkond, mille korral $A \geqslant 0$. Nii on avaldise $\sqrt[3]{\frac{x-1}{x}}$ määramispiirkonnaks avaldise $\frac{x-1}{x}$ määramispiirkond, s.o. kõik nullist erinevad reaalarvud. Avaldise $\sqrt[4]{\frac{x+4}{x}}$ määramispiirkonnaks on aga piirkond, kus $\frac{x+4}{x} \geqslant 0$ ja $x \neq 0$.

Edaspidi tuleb arvestada ka seda, et vastavalt juure omadustele $\sqrt[2k]{A^{2k}} = |A|$.

<u>Näide 1</u>. Lihtsustada avaldis $\sqrt{(a-b)^2}$.

Lahendus. Kuna $\sqrt{(a-b)^2} = |a-b|$, siis

$$\sqrt{(a-b)^2} = |a-b| = \begin{cases} a-b, & \text{kui } a \geqslant b \\ -(a-b), & \text{kui } a < b. \end{cases}$$

Antud avaldis on määratud muutujate a ja b kõigi reaalarvuliste väärtuste korral.

<u>Näide 2</u>. Tuua avaldisest $\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$ juure märgi alt välja muutuja x eeldusel, et $x < 0$.

Lahendus. Et $\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{|x|}$,

siis ülesandes antud piirkonnas $x < 0$, saame $|x| = -x$.

Järelikult antud piirkonnas

$$\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x|}=-\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}.$$

Piirkonnas $x < 0$ on antud avaldis alati määratud.

Vastus. Kui $x < 0$, siis

$$\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=-\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}.$$

Näide 3. Viia avaldises $\frac{\sqrt{x}}{y}$ muutuja y juuremärgi alla, kui $x \geq 0$ ja $y < 0$.

Lahendus. Et ülesandes antud piirkonnas $x \geq 0$ ja $y<0$ avaldis $\frac{\sqrt{x}}{y}$ on määratud ning $y = -|y|$ ja $|y|^2 = y^2$, siis

$$\frac{\sqrt{x}}{y}=-\frac{\sqrt{x}}{|y|}=-\sqrt{\frac{x}{|y|^2}}=-\sqrt{\frac{x}{y^2}}.$$

Vastus. Kui $x \geq 0$ ja $y < 0$, siis $\frac{\sqrt{x}}{y}=-\sqrt{\frac{x}{y^2}}$.

Näide 4. Viia avaldises $\frac{\sqrt{x}}{y}$ muutuja y juuremärgi alla.

Lahendus. Antud ülesandes pole lisatud kitsendusi muutujate x ja y suhtes. Esmalt on tarvis leida antud avaldise määramispiirkond. Lugeja $\sqrt{x}$ on määratud, kui $x \geq 0$ aga nimetaja kui $y \neq 0$. Kuna paarisarvulise juurijaga juure korral on väga oluline juuremärgi alla viidava avaldise märk, siis tuleb meil vaadelda eraldi kahte osaülesannet 1) $y < 0$ ja 2) $y > 0$. Esimesel juhul on ülesanne lahendatud näites 3. Kui aga $y > 0$, siis $y = |y|$, seega

$$\frac{\sqrt{x}}{y}=\sqrt{\frac{x}{y^2}}.$$

Vastus. Ülesanne on lahenduv, kui $x \geq 0, y \neq 0$ ning siis

$$\frac{\sqrt{x}}{y}=\begin{cases}\sqrt{\frac{x}{y^2}}, & \text{kui } y > 0\\ -\sqrt{\frac{x}{y^2}}, & \text{kui } y < 0.\end{cases}$$

Näide 5. Lihtsustada avaldis $\sqrt{(x+1)^2}+\sqrt{(x-1)^2}$, kui $-1 < x < 1$.

Lahendus. Kuna $\sqrt{(x+1)^2}+\sqrt{(x-1)^2}=|x+1|+|x-1|$ ja antud piirkonnas $-1 < x < 1$ alati $x+1 > 0$ ja $x-1 < 0$, siis

$$\sqrt{(x+1)^2}+\sqrt{(x-1)^2}=|x+1|+|x-1|=x+1-(x-1)=2.$$

Vastus. Piirkonnas $-1 < x < 1$ on antud avaldise väärtus võrdne arvuga 2.

Näide 6. Lihtsustada avaldis $\sqrt{(x+1)^2} + \sqrt{(x-1)^2}$.

Lahendus. Kuna $\sqrt{(x+1)^2} + \sqrt{(x-1)^2} = |x+1| + |x-1|$ ja ülesandes pole lisatud mingeid kitsendusi muutuja x suhtes, tuleb meil arvtelg jagada kolmeks osapiirkonnaks

Kuna esimeses piirkonnas $x < -1$ kehtivad võrratused $x + 1 < 0$ ja $x - 1 < 0$, siis

$$\sqrt{(x+1)^2} + \sqrt{(x-1)^2} = |x+1| + |x-1| = -(x+1) - (x-1) = -2x.$$

Et teises piirkonnas $-1 \leq x < 1$ kehtivad võrratused $x + 1 \geq 0$ ja $x - 1 < 0$, siis

$$\sqrt{(x+1)^2} + \sqrt{(x-1)^2} = |x+1| + |x-1| = x + 1 - (x-1) = 2,$$

nagu nägime ka näites 5.

Kolmandas piirkonnas $x \geq 1$ kehtivad võrratused $x + 1 > 0$ ja $x - 1 \geq 0$. Seega siin

$$\sqrt{(x+1)^2} + \sqrt{(x-1)^2} = |x+1| + |x-1| = x + 1 + x - 1 = 2x.$$

Vastus.

$$\sqrt{(x+1)^2} + \sqrt{(x-1)^2} = \begin{cases} -2x, \text{ kui } x < -1 \\ 2, \text{ kui } -1 \leq x < 1 \\ 2x, \text{ kui } x \geq 1. \end{cases}$$

Pikemate ja keerulisemate avaldiste lihtsustamisel tuleb arvestada algebraliste murdudega sooritatavate tehete ning astmete ja juurte omadusi.

Näide 6. Lihtsustada $\dfrac{2}{\sqrt{-a}} \cdot \dfrac{1}{1 - \dfrac{a+bx}{a}} \cdot \dfrac{b}{2\sqrt{a+bx}} : \sqrt{-a}$, kui $a < 0$.

Lahendus. Kuna ülesandes $a < 0$, siis $-a > 0$ ja $\sqrt{-a}$

on määratud ning $(\sqrt{-a})^2=-a$. Lisaks tuleb aga eeldada, et $a + bx > 0$. Nendel eeldustel teostame teisendused:

$$\frac{2}{\sqrt{-a}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{a + bx}{a}} \cdot \frac{b}{2\sqrt{a + bx}} : \sqrt{-a} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{-a}} \cdot \frac{1}{\frac{a - a - bx}{a}} \cdot \frac{b}{2\sqrt{a + bx}} \cdot \frac{1}{\sqrt{-a}} =$$

$$= \frac{2 \cdot a \cdot b \cdot 1}{\sqrt{-a} \cdot (-bx) \cdot 2\sqrt{a + bx} \cdot \sqrt{-a}} = \frac{a}{(-a)(-x)\sqrt{a + bx}} =$$

$$= \frac{1}{x\sqrt{a + bx}}.$$

Vastus. Eeldustel $a < 0$ ja $a + bx > 0$ on antud avaldis samaväärne avaldisega $\frac{1}{x\sqrt{a + bx}}$.

Näide 7. Lihtsustada $\frac{\sqrt{b}}{2} + \frac{a}{2\sqrt{b}} + \sqrt{\frac{(a + b)^2}{4b} - a}$.

Lahendus. Teisendamine on võimalik vaid eeldustel $b > 0$ ja $\frac{(a + b)^2}{4b} - a \geqslant 0$. Viimane võrratus teiseneb aga kujule $\frac{(a - b)^2}{4b} \geqslant 0$. Kuna $b > 0$ korral ka $\frac{(a - b)^2}{4b} \geqslant 0$, siis antud ülesande määramispiirkond on määratud täielikult võrratusega $b > 0$, mille tõttu

$$\sqrt{\frac{(a + b)^2}{4b} - a} = \sqrt{\frac{(a - b)^2}{4b}} = \frac{|a-b|}{2\sqrt{b}} = \begin{cases} \frac{a-b}{2\sqrt{b}} & \text{kui } a \geqslant b \\ -\frac{a-b}{2\sqrt{b}}, & \text{kui } a < b\ . \end{cases}$$

Kogu antud avaldise lihtsustamisel tingimustel $a \geqslant b > 0$, saame

$$\frac{\sqrt{b}}{2} + \frac{a}{2\sqrt{b}} + \sqrt{\frac{(a + b)^2}{4b} - a} = \frac{\sqrt{b}}{2} + \frac{a}{2\sqrt{b}} + \frac{|a - b|}{2\sqrt{b}} =$$

$$= \frac{\overset{\sqrt{b}}{\sqrt{b}}}{2} + \frac{a}{2\sqrt{b}} + \frac{a - b}{2\sqrt{b}} = \frac{b + a + a - b}{2\sqrt{b}} = \frac{a}{\sqrt{b}}.$$

Lihtsustades antud avaldist tingimustel $b > 0$ ja $a < b$, saame

$$\frac{\sqrt{b}}{2} + \frac{a}{2\sqrt{b}} + \sqrt{\frac{(a+b)^2}{4b}} - a = \frac{\sqrt{b}}{2} + \frac{a}{2\sqrt{b}} - \frac{a-b}{2\sqrt{b}} =$$

$$= \frac{b + a - a + b}{2\sqrt{b}} = \sqrt{b}.$$

Vastus.

$$\frac{\sqrt{b}}{2} + \frac{a}{2\sqrt{b}} + \sqrt{\frac{(a+b)^2}{4b}} - a = \begin{cases} \frac{a}{\sqrt{h}}, \text{ kui } a \geqslant b > 0 \\ \sqrt{b}, \text{ kui } a < b,\ b > 0. \end{cases}$$

2. I r r a t s i o n a a l s u s e k a o t a m i n e m u r r u l u g e j a s t v õ i n i m e t a j a s t. Olgu A mingi irratsionaalne algebraline avaldis. Kui leidub selline irratsionaalne avaldis B, mis ei ole samaselt võrdne nulliga nii, et korrutis $A \cdot B$ on ratsionaalne avaldis, siis öeldakse, et avaldis B on avaldise A k a a s a v a l d i s (kaastegur). Esitame mõningate avaldiste kaasavaldised:

1) kui p, q, ..., r on naturaalarvust n väiksemad naturaalarvud, siis avaldise

$$A = \sqrt[n]{X^p \cdot Y^q \cdot \ldots \cdot Z^r}$$

kaasavaldiseks on

$$B = \sqrt[n]{X^{n-p} \cdot Y^{n-q} \cdot \ldots \cdot Z^{n-r}},$$

sest $A \cdot B = X \cdot Y \cdot \ldots \cdot Z$;

2) avaldiste

$$A = \sqrt{X} \pm \sqrt{Y} \quad (X \geqslant 0;\ Y \geqslant 0)$$

kaasavaldised on vastavalt

$$B = \sqrt{X} \mp \sqrt{Y},$$

sest

$$A \cdot B = (\sqrt{X})^2 - (\sqrt{Y})^2 = X - Y;$$

3) avaldiste

$$A = \sqrt[3]{X} \pm \sqrt[3]{Y}$$

kaasavaldised on vastavalt

$$B = \sqrt[3]{X^2} \mp \sqrt[3]{XY} + \sqrt[3]{Y^2},$$

sest

$$AB = (\sqrt[3]{X})^3 \pm (\sqrt[3]{Y})^3 = X \pm Y.$$

Olgu antud irratsionaalne algebraline murd $C = \frac{P}{Q}$, milles vähemalt nimetaja (lugeja) on irratsionaalne avaldis.

Kui seda murdu laiendada nimetaja (lugeja) kaasavaldisega K, siis saame murru $C = \frac{P}{Q} = \frac{PK}{QK}$, milles nimetajas (lugejas) on ratsionaalne avaldis. Kõneldakse, et oleme k a o t a n u d i r r a t s i o n a a l s u s e murru nimetajast (lugejast).

Kasutades eelpool toodud kaasavaldisi lahendame mõned näiteülesanded irratsionaalsuse kaotamiseks murru nimetajast.

Näide 1. $\frac{x}{\sqrt{a}} = \frac{x \cdot \sqrt{a}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}} = \frac{x\sqrt{a}}{a}$ (kui $a > 0$).

Näide 2. $\frac{x}{a - \sqrt{b}} = \frac{x(a + \sqrt{b})}{(a - \sqrt{b})(a + \sqrt{b})} = \frac{x(a + \sqrt{b})}{a^2 - b}$,

(kui $b \geqslant 0$ ja $b \neq a^2$).

Näide 3. $\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}} = \frac{1}{(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + \sqrt{z}} =$

$$= \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y}) - \sqrt{z}}{\left[(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + \sqrt{z}\right]\left[(\sqrt{x} + \sqrt{y}) - \sqrt{z}\right]} = \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y}) - \sqrt{z}}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 - (\sqrt{z})^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{z}}{x + y - z + 2\sqrt{xy}} .$$

Murru ühekordse laiendamisega ei õnnestunud seekord kaotada irratsionaalsust nimetajast. Teostame vajaliku teisenduse veelkord.

$$\frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{z})\left[(x + y - z) - 2\sqrt{xy}\right]}{\left[(x+y-z) + 2\sqrt{xy}\right]\left[(x+y-z) - 2\sqrt{xy}\right]} = \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{z})\left[(x+y-z) - 2\sqrt{xy}\right]}{(x + y - z)^2 - 4xy} .$$

Nüüd on nimetaja vabastatud irratsionaalsusest. Kõik teisendused on lubatud vaid piirkonnas, kus $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ ning $(x + y - z)^2 - 4xy \neq 0$.

Näide 4. Kaotada irratsionaalsus murru $\frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}}{x + y}$ lugejast.

Lahendus. Et avaldise $\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}$ kaasavaldis on $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}$, siis piirkonnas, kus $x \neq -y$, saame

$$\frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}}{x + y} = \frac{(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2})}{(x + y)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2})} =$$

$$= \frac{x - y}{(x + y)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2})} .$$

3. L i i t r a d i k a a l i   v a l e m i d . Algebraliste avaldiste A ja B ühisesse määramispiirkonda kuuluvas mistahes osapiirkonnas kehtivad samasused

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}},$$

mida tuntakse ka l i i t r a d i k a a l i valemite nime all. Neid valemeid on otstarbekas kasutada mõningate irratsionaalsete avaldiste lihtsustamisel.

Näide 1. Arvutada $\left(\frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} + \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}}\right)^2$.

Lahendus. Kuna liitradikaali valemite põhjal

$$\sqrt{2 + \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{4 - 3}}{2}} + \sqrt{\frac{2 - \sqrt{4 - 3}}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}}$$

ja $\sqrt{2 - \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}}$,

siis

$$\frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}}\right)^2}{\sqrt{2} + \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}}} = \frac{(\sqrt{3} + 1)^2 \cdot \sqrt{2}}{2(3 + \sqrt{3})} =$$

$$= \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{6}}$$

ning

$$\frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}}\right)^2}{\sqrt{2} - \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}}} = \frac{(\sqrt{3} - 1)^2 \cdot \sqrt{2}}{2(3 - \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{6}} .$$

Järelikult antud avaldise väärtus on võrdne

$$\left(\frac{\sqrt{3} + 1}{6} + \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{6}}\right)^2 = \left(\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\right)^2 = 2.$$

Näide 2. Lihtsustada $\frac{\sqrt{2b + 2\sqrt{b^2 - 4}}}{\sqrt{b^2 - 4} + b + 2}$.

Lahendus. Kasutades murru lugeja teisendamiseks liitradikaali valemit, saame

$$\sqrt{2b + 2\sqrt{b^2 - 4}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{b + \sqrt{b^2 - 4}} = \sqrt{2} \cdot \left[\sqrt{\frac{b + \sqrt{b^2 - b^2 + 4}}{2}} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\frac{b - \sqrt{b^2 - b^2 + 4}}{2}}\right] = \sqrt{b + 2} + \sqrt{b - 2}.$$

Seega, lahutades nimetaja tegureiks, saame

$$\frac{\sqrt{2b + 2\sqrt{b^2 - 4}}}{\sqrt{b^2 - 4} + b + 2} = \frac{\sqrt{b + 2} + \sqrt{b - 2}}{\sqrt{b + 2}\,(\sqrt{b - 2} + \sqrt{b + 2})} = \frac{1}{\sqrt{b + 2}},$$

piirkonnas, kus $b + 2 > 0$ ja $b - 2 \geq 0$.

<u>Näide 3.</u> Lihtsustada $\sqrt{13 + 30\sqrt{2 + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}}$.

Lahendus. Selles ülesandes tuleb liitradikaali valemit kasutada korduvalt. Esmalt leiame

$$\sqrt{9 + 4\sqrt{2}} = \sqrt{9 + \sqrt{32}} = \sqrt{\frac{9 + \sqrt{81 - 32}}{2}} + \sqrt{\frac{9 - \sqrt{81 - 32}}{2}} = \sqrt{8} + 1.$$

Järgnevalt saame lihtsustada avaldise

$$\sqrt{2 + (\sqrt{8} + 1)} = \sqrt{3 + \sqrt{8}} = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{9 - 8}}{2}} + \sqrt{\frac{3 - \sqrt{9 - 8}}{2}} = \sqrt{2} + 1.$$

Jääb lihtsustada viimane osa kogu avaldisest

$$\sqrt{13 + 30(\sqrt{2} + 1)} = \sqrt{43 + 30\sqrt{2}} = \sqrt{43 + \sqrt{1800}} =$$

$$= \sqrt{\frac{43 + \sqrt{1849 - 1800}}{2}} + \sqrt{\frac{43 - \sqrt{1849 - 1800}}{2}} = 5 + 3\sqrt{2}.$$

Vastus. $\sqrt{13 + 30\sqrt{2 + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}} = 5 + 3\sqrt{2}$.

Kontrollküsimused

1. Avaldise mõiste.
2. Algebralise avaldise mõiste. Näiteid.
3. Analüütilise avaldise mõiste. Näiteid.
4. Ratsionaalse avaldise mõiste. Näiteid.
5. Avaldise määramispiirkonna mõiste. Näiteid.
6. Võrduse mõiste. Näiteid.
7. Samasuse mõiste. Näiteid.
8. Võrrandi mõiste. Näiteid.
9. Kas võrdus $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$ on samasus?
10. Kas võrdus $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$ on samasus?
11. Millist avaldist nimetatakse üksliikmeks; hulkliikmeks?
12. Mida nimetatakse üksliikme kordajaks, mida astmeks?
13. Milliseid üksliikmeid nimetatakse sarnasteks?
14. Mida mõistetakse sarnaste üksliikmete koondamise all?
15. Mida mõistetakse hulkliikme koondamise all?
16. Millisel kujul tuleb alati hulkliige esitada?
17. Kuidas toimub üksliikme korrutamine üksliikmega: hulk-

liikme korrutamine üksliikmega; hulkliikme korrutamine hulkliikmega?

18. Kuidas toimub üks- ja hulkliikmete astendamine?
19. Sõnastada korrutamise abivalemid.
20. Mida tähendab hulkliikme teguriteks lahutamine?
21. Nimetada tegureiks lahutamise erivõtteid.
22. Kuidas toimub ruutkolmliikme lahutamine tegureiks?
23. Kuidas toimub üks- ja hulkliikme jagamine?
24. Täisavaldise ja algebralise murru mõiste.
25. Mida tuleb kindlasti arvestada algebralise murru $\frac{A}{B}$ määramispiirkonna leidmisel?
26. Algebralise murru põhiomadus.
27. Kui A, B ja C on mingid algebralised avaldised, kas siis murd $\frac{A}{B}$ on samaselt võrdne murruga $\frac{AC}{BC}$?
28. Kuidas toimub algebraliste murdude teisendamine ühenimelisteks?
29. Milliseid tehteid võib sooritada algebraliste murdudega?
30. Leida $|a - 1|$, $|5 - b|$ ja $\frac{2x}{|x|}$.
31. Leida $\sqrt{x^2 + 2}$, $\sqrt[4]{a^4}$, $\sqrt[3]{y^3}$ ja $\sqrt[7]{(-z)^7}$.
32. Millist avaldist nimetatakse antud irratsionaalse avaldise kaasavaldiseks? Näiteid.
33. Mida tähendab irratsionaalsuse kaotamine murru lugejast või nimetajast?
34. Milliseid valemeid nimetatakse liitradikaali valemeiks?

V VÕRRANDID JA VÕRRANDISÜSTEEMID

§ 15. Ruutvõrrandid. Ruutvõrrandeiks taanduvad võrrandid

1. Võrrandi samasusteisendused. Samasuse, võrrandi, võrrandi määramispiirkonna ja lahendite mõiste on antud § 10 p. 4.

Ühe tundmatuga võrrandi võime esitada kujul

$$f(x) = g(x),$$

millest leiame tundmatu need väärtused (võrrandi määramispiirkonnas), mis muudavad antud võrrandi tõeseks arvvõrduseks.

Toome näiteid ühe tundmatuga võrrandi määramispiirkonna ja lahendite kohta.

Näide 1. Võrrandi $2x + 3 = x + 8$ määramispiirkonnaks on $]-\infty, +\infty[$ ja lahend $x = 5$ kuulub määramispiirkonda.

Näide 2. Võrrandit

$$\frac{5x}{x + 3} - \frac{7 + x}{3 - x} = \frac{12(x + 2)}{x^2 - 9}$$

teisendades saame võrrandi

$$\frac{5x}{x + 3} + \frac{7 + x}{x - 3} = \frac{12(x + 2)}{(x - 3)(x + 3)},$$

mille määramispiirkonnaks on $]-\infty, -3[\cup]-3,3[\cup]3, +\infty[$. Viimane murdvõrrand taandub ruutvõrrandiks $6x^2 - 17x - 3 = 0$ lahenditega $x_1 = 3$; $x_2 = -\frac{1}{6}$. Kuna $x_1 = 3$ ei kuulu määramispiirkonda, siis lähtevõrrandi lahendiks on $x = -\frac{1}{6}$.

Näide 3. Võrrandi

$$x^2 + 6 + \frac{1}{x - 2} = 5x + \frac{1}{x - 2}$$

määramispiirkonda ei kuulu $x = 2$. Koondades sarnased liikmed tekib võrrand $x^2 - 5x + 6 = 0$, mille lahendeiks on $x_1 = 2$; $x_2 = 3$. Et $x = 2$ ei kuulu määramispiirkonda, siis on lahendiks $x = 3$.

Näide 4. Juurvõrrandi

$$\sqrt{25 - x^2} = \frac{x + 3}{x - 5} + 10$$

vasakul poolel on mõte, kui $25 - x^2 \geqslant 0$, ja paremal poolel, kui $x \neq 5$. Seega on määramispiirkonnaks $[-5, 5[$ ja sinna kuulub lahend $x = 4$.

Kaht võrrandit

$$f(x) = g(x) \qquad (1)$$

ja

$$f_1(x) = g_1(x) \qquad (2)$$

nimetatakse s a m a v ä ä r s e t e k s (ekvivalentseteks) mingil hulgal M, kui neil on sellel hulgal ühed ja samad lahendid, s.t. iga hulka M kuuluv võrrandi (1) lahend on võrrandi (2) lahendiks ja vastupidi.

Võrrandeid nimetatakse samaväärseteks ka juhul, kui võrrandeil ei ole lahendeid.

Näide 5. Võrrandid $x^2 - x = 20$ ja $(x+4)(x-5) = 0$ on samaväärsed kogu reaalarvude hulgal R, sest peale lahendite $x_1 = -4$ ja $x_2 = 5$ teisi lahendeid ei ole.

Näide 6. Võrrandid $(x-3)(2x+5)(x^2-2) = 0$ ja $(x-3)(2x+5) = 0$ on samaväärsed ratsionaalarvude hulgal Q, kuid ei ole samaväärsed reaalarvude hulgal R.

Näide 7. Võrrandid $x = 0$ ja $x(x^2+1) = 0$ on samaväärsed reaalarvude hulgal R. Lahendiks on $x = 0$.

Näide 8. Võrrandid $x^2 = x$ ja $\frac{x^2+1}{x} = \frac{x+1}{x}$ ei ole samaväärsed reaalarvude hulgal R, sest esimese võrrandi lahend $x = 0$ ei kuulu teise võrrandi määramispiirkonda.

Näide 9. Võrrandid $x^2 + 5 = 0$ ja $2x^2 + 7 = 0$ on reaalarvude hulgal samaväärsed, kuna kummalgi võrrandil ei ole reaalarvulisi lahendeid.

Teisendusi, mis annavad esialgse võrrandiga samaväärsed võrrandid, nimetatakse s a m a s u s t e i s e n d u s t e k s.

1. Kui võrrandi

$$f(x) = g(x) \qquad (1)$$

mõlemale poolele liita $\varphi(x)$, mis omab mõtet võrrandi (1) määramispiirkonnas, siis uus võrrand

$$f(x) + \varphi(x) = g(x) + \varphi(x)$$

on antud võrrandiga samaväärne.

2. Kui võrrandi

$$f(x) = g(x)$$

mõlemat poolt korrutada või jagada ühe ja sama nullist erineva arvuga, siis saame antud võrrandiga samaväärse võrrandi.

Märkus. Võrrandi mõlemat poolt ei või korrutada ega jagada muutujat sisaldava avaldisega.

Näide 10. Võrrandi $x^3 = x$ jagamisel x-ga saame $x^2 = 1$ ja $x = \pm 1$. Kaotasime lahendi $x = 0$. Õige lahendusviis:

$x^3 - x = 0$; $x(x^2 - 1) = 0$; $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = -1$.

Näide 11. Võrrandi $x - 5 = 1$ mõlema poole korrutamisel avaldisega $x - 3$ saadav võrrand $(x-5)(x-3) = x - 3$ ei ole samaväärne lähtevõrrandiga, mille ainsaks lahendiks on $x = 6$. Uuel võrrandil on kaks lahendit $x_1 = 6$; $x_2 = 3$, $x = 3$ ei ole lähtevõrrandi lahendiks.

Võrrandi lahendamisel püütakse võrrandit teisendada nii, et iga uus võrrand oleks eelnevaga samaväärne. Kui võrrandiga samaväärset võrrandit pole võimalik tuletada, siis asendatakse antud võrrand niisuguse võrrandiga (või võrranditega), mille lahenditeks on kõik antud võrrandi lahendid ja lisaks võib olla veel lahendeid, mida nimetatakse esialgse võrrandi v õ õ r l a h e n d i t e k s. Võõrlahendid eraldatakse antud võrrandi lahenditest kontrollimisel, asendades kõik leitud lahendite väärtused lähtevõrrandisse.

Võrrandi

$$f(x) = g(x) \qquad (1)$$

j ä r e l d u s e k s nimetatakse võrrandit

$$f_2(x) = g_2(x), \qquad (3)$$

kui võrrandi (1) teisendamisel võrrandiks (3) ei teki lahendite kadu, s.t. võrrandi (1) kõik lahendid on ka võrrandi (3) lahenditeks.

Järelduse tähistamiseks kasutatakse märki $\Rightarrow$. Näit. $x - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1$, sest lahend $x = 1$, mis on lähtevõrrandi ainsaks lahendiks on ka teise võrrandi üheks lahendiks.

2. T ä i e l i k r u u t v õ r r a n d. Võrrandit $ax^2 + bx + c = 0$ nimetatakse t ä i e l i k u k s r u u t v õ r r a n d i k s, kui $a \neq 0$; $b \neq 0$; $c \neq 0$. Võrrandi määramispiirkonnaks on $]-\infty, +\infty[$ ja seepärast järgnevate ruutvõrrandite korral määramispiirkonda enam ei esitata.

Täieliku ruutvõrrandi

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (\text{kus } a > 0)$$

lahendivalem

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

tuletatakse kasutades täisruudu eraldamist ruutkolmliikmest (§ 10, p. 7).

Avaldist

$$D = b^2 - 4ac$$

nimetatakse ruutvõrrandi **d i s k r i m i n a n d i k s**. Sõltuvalt diskriminandist võib vaadeldaval ruutvõrrandil:

1) olla kaks erinevat reaalarvulist lahendit, kui $D > 0$;
2) olla kaks võrdset reaalarvulist lahendit, kui $D = 0$;
3) lahend puududa reaalarvude hulgas, kui $D < 0$.

Näide 1. Võrrandil

$$3x^2 - 7x + 2 = 0 \quad (D = 49 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 25 > 0)$$

on 2 reaalarvulist lahendit $x_1 = 2$; $x_2 = \frac{1}{3}$.

Näide 2. Võrrandil

$$4x^2 - 4x + 1 = 0 \quad (D = 16 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 0)$$

on 2 võrset lahendit $x_{1,2} = \frac{1}{2}$.

Näide 3. Võrrandil

$$4x^2 - 7x + 6 = 0 \quad (D = 49 - 4 \cdot 4 \cdot 6 = -47 < 0)$$

reaalarvulised lahendid puuduvad.

Kui täieliku ruutvõrrandi lineaarliikme kordaja on paarisarv ($b = 2k$) ning

$$ax^2 + 2kx + c = 0,$$

siis on otstarbekas kasutada lahendivalemit

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}.$$

Näide 4. Võrrandil $3x^2 - 28x + 9 = 0$ on $k = 14$, siis

$$x_{1,2} = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 27}}{3} = \frac{14 \pm 13}{3}.$$

Lahendid: $x_1 = 9$; $x_2 = \frac{1}{3}$.

Näide 5. Missuguse a väärtuse korral on võrrandil

$$(2 + a)x^2 + 6ax + 4a + 1 = 0$$

kaks võrdset lahendit?

Lahendus. Lahendid on võrdsed, kui $D = 0$. Antud juhul

$$36a^2 - 4(2 + a)(4a + 1) = 0$$

ja peale teisendusi saame võrrandi

$$5a^2 - 9a - 2 = 0,$$

millest $a_1 = 2$; $a_2 = -\frac{1}{5}$.

Vastus. Parameetril võib olla 2 väärtust: $a_1 = 2$ ja $a_2 = -\frac{1}{5}$.

3. T a a n d a t u d r u u t v õ r r a n d. T a a n d a t u d r u u t v õ r r a n d

$$x^2 + px + q = 0$$

on täieliku ruutvõrrandi erijuhuks, kui $a = 1$; $b = p$ ja $c = q$. Lahendivalem on

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Näide 1. Võrrandil $x^2 - x - 30 = 0$ on 2 lahendit $x_1 = 6$; $x_2 = -5$, sest $D > 0$.

Näide 2. Võrrandil $x^2 - 2x + 1 = 0$ on 2 võrdset lahendit $x_{1,2} = 1$ $(D = 0)$.

Näide 3. Võrrandil $x^2 - 6x + 12 = 0$ reaalarvulised lahendid puuduvad $(D < 0)$.

4. M i t t e t ä i e l i k u d r u u t v õ r r a n d i d. M i t t e t ä i e l i k u r u u t v õ r r a n d i saame täielikust ruutvõrrandist, kui $a \neq 0$, kuid üks või mõlemad kordajatest b ja c on nullid.

Mittetäielike ruutvõrrandite liigid on järgmised.

1. Kui $b = 0$, tekib võrrand $ax^2 + c = 0$, mille lahendeiks on $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$. Reaalarvulised lahendid on, kui $\frac{c}{a} \leqslant 0$.
2. Kui $c = 0$, saame võrrandi $ax^2 + bx = 0$, mille lahendamiseks lahutame vasaku poole tegureiks $x(ax + b) = 0$. Siin on 2 võimalust:
   1) $x = 0$;
   2) $ax + b = 0$, millest $x = -\frac{b}{a}$
   Lahendid: $x_1 = 0$; $x_2 = -\frac{b}{a}$.
3. Kui $b = 0$, $c = 0$, siis $ax^2 = 0$ ja $x_1 = x_2 = 0$.

Näide 1. $x^2 - 52x = 0$; $x^2 = 52$; $x_{1,2} = \pm 2\sqrt{13}$.

Näide 2. $x^2 + 3x = 0$; $x(x + 3) = 0$; $x_1 = 0$; $x_2 = -3$.

5. R u u t v õ r r a n d i   l a h e n d i t e   o m a d u s e d . V i e t e'i teoreem. Taandatud ruutvõrrandi lahendite summa võrdub lineaarliikme kordaja vastandarvuga ja lahendite korrutis võrdub vabaliikmega.

Taandatud ruutvõrrandi

$$x^2 + px + q = 0$$

kordajad p ja q on seotud lahenditega x_1 ja x_2 järgmiselt:

$$x_1 + x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q} + (-\frac{p}{2} - \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}) = -p,$$

$$x_1 \cdot x_2 = (-\frac{p}{2} + \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q})(-\frac{p}{2} - \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}) =$$

$$= (-\frac{p}{2})^2 - (\sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q})^2 = q.$$

Teoreem võimaldab mõnel juhul peast arvutades leida ruutvõrrandi lahendid.

Näide 1. Võrrandi $x^2 - 5x + 6 = 0$ lahendid on $x_1 = 2$ ja $x_2 = 3$, sest $x_1 + x_2 = 2 + 3 = 5$ ja $x_1 \cdot x_2 = 2 \cdot 3 = 6$.

Leida peast järgmiste võrrandite lahendid:

1) $x^2 - 4x + 3 = 0$
2) $x^2 - 2x - 35 = 0$
3) $x^2 - x - 56 = 0$
4) $x^2 + 7x + 10 = 0$
5) $x^2 - x - 12 = 0$
6) $x^2 - 4x - 60 = 0$
7) $x^2 - 17x + 72 = 0$
8) $x^2 + 4x - 5 = 0$

Taandatud ruutvõrrandi lahendite omadust kasutame järgmiste ülesannete lahendamisel.

Näide 2. Võrrandit $x^2 + px + q = 0$ lahendamata avaldada p ja q kaudu tema lahendite ruutude summa.

Lahendus. Lähtume seosest $(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$ ja avaldame $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$. Kuna $x_1 + x_2 = -p$ ja $x_1 \cdot x_2 = q$, siis

$$x_1^2 + x_2^2 = (-p)^2 - 2q = p^2 - 2q.$$

Näide 3. Võrrandis $3x^2 - 5x + k = 0$ määrata k nii, et selle võrrandi lahendid x_1 ja x_2 rahuldaksid võrrandit $6x_1 + x_2 = 0$.

Lahendus. Taandatud ruutvõrrandi $x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{k}{3} = 0$ lahendite omadust ja lisatingimust kasutades saame süsteemi

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{5}{3} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{k}{3} \\ 6x_1 + x_2 = 0, \end{cases}$$

mille lahenditeks on $x_1 = -\frac{1}{3}$; $x_2 = 2$ ja $k = 3x_1 \cdot x_2 = 3 \cdot (-\frac{1}{3}) \cdot 2 = -2$.

6. Ruutkolmliikme lahutamine tegureiks. Ruutkolmliikme tegureiks lahutamist käsitleti § 11 p. 7. Teades ruutkolmliikme $ax^2 + bx + c$ nullkohti x_1 ja x_2, s.t. ruutvõrrandi $ax^2 + bx + c = 0$ lahendeid, võime ruutkolmliikme lahutada tegureiks

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Erijuhul, kui $a = 1$, siis

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2).$$

Näide 1. Lahutada tegureiks ruutkolmliige $2x^2 - 5x + 2$. Nullkohtade leidmiseks lahendame võrrandi $2x^2 - 5x + 2 = 0$, mille lahendeiks on $x_1 = +\frac{1}{2}$; $x_2 = +2$. Järelikult

$$2x^2 - 5x + 2 = 2(x - \tfrac{1}{2})(x - 2) = (2x - 1)(x - 2).$$

Näide 2. $x^2 + 5x - 14 = (x - 2)(x + 7)$, sest $x_1 = 2$; $x_2 = -7$.

Näide 3. $4x^2 - 4x + 1 = 4(x - \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2}) = (2x-1)(2x-1) = (2x - 1)^2$, sest $x_{1,2} = \frac{1}{2}$.

Näide 4. Ruutkolmliiget $2x^2 + 3x + 2 = 0$ ei saa tegureiks lahutada, sest võrrandil $2x^2 - 3x + 2 = 0$ ei ole reaalarvulisi lahendeid ($D < 0$).

Ruutkolmliikme tegureiks lahutamist kasutatakse näiteks algebraliste murdude taandamisel.

Näide 5. Taandada murrud:

1) $\dfrac{x^2 + 6x - 91}{x^2 + 8x - 105} = \dfrac{\cancel{(x - 7)}(x + 13)}{\cancel{(x - 7)}(x + 15)} = \dfrac{x + 13}{x + 15}$;

2) $\dfrac{2a^2 + 8a - 90}{3a^2 - 36a + 105} = \dfrac{2(a^2 + 4a - 45)}{3(a^2 - 12a + 35)} = \dfrac{2(a + 9)\cancel{(a - 5)}}{3(a - 7)\cancel{(a - 5)}} = \dfrac{2(a+9)}{3(a-7)}$;

3) $\frac{2x^2 - 11x + 5}{3x^2 - 14x - 5} = \frac{2\cancel{(x - 5)}(x - \frac{1}{2})}{3\cancel{(x - 5)}(x + \frac{1}{3})} = \frac{2x - 1}{3x + 1}.$

7. R u u t v õ r r a n d i k o o s t a m i n e l a h e n d i t e p õ h j a l. Ruutvõrrandi koostamiseks juhul, kui on antud tema 2 lahendit x_1 ja x_2, võib kasutada ühte kahest võimalusest:

1) taandatud ruutvõrrandi lahendite omadust (Viete'i teoreemi);

2) ruutkolmliikme esitamist kahe teguri korrutisena.

Esimesel juhul (Viete'i teoreemi kohaselt) $x_1 + x_2 = -p$ ja $x_1 \cdot x_2 = q$.

Näide 1. Koostame ruutvõrrandi, mille lahendid on 2 ja (-3).

Kuna $-p = 2 + (-3) = -1$ ja $q = 2 \cdot (-3) = -6$, siis ruutvõrrand on $x^2 + x - 6 = 0$.

Näide 2. Koostame sama võrrandi tegureiks lahutamist kasutades. Siis

$$(x - 2)[x - (-3)] = 0 \text{ ja } x^2 + x - 6 = 0.$$

Näide 3. Koostame kahel viisil ruutvõrrandi, mille lahendeiks on $x_1 = -\frac{3}{2}$ ja $x_2 = \frac{2}{9}$:

1) $-p = x_1 + x_2 = -\frac{3}{2} + \frac{2}{9} = -\frac{23}{18};$

$q = x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{3};$

$x^2 + \frac{23}{18}x - \frac{1}{3} = 0; \qquad 18x^2 + 23x - 6 = 0;$

2) $(x + \frac{3}{2})(x - \frac{2}{9}) = 0; \quad x^2 + \frac{23}{18}x - \frac{1}{3} = 0;$

$18x^2 + 23x - 6 = 0.$

8. M u r d v õ r r a n d. M u r d v õ r r a n d i k s nimetatakse võrrandit, mis sisaldab tundmatut murru nimetajas.

Murdvõrrandi lahendamist alustame kindlasti võrrandi määramispiirkonna leidmisega.

Näide 1. Lahendada võrrand

$$\frac{2}{x^2 - 4} - \frac{1}{x(x - 2)} + \frac{x - 4}{x(x + 2)} = 0.$$

Lahendus. Kuna $x \neq 2$; $x \neq -2$ ja $x \neq 0$, siis võrrandi määramispiirkonnaks on $]-\infty, -2[\cup]-2; 0[\cup]0; 2[\cup]2, +\infty[$. Teisendades lähtevõrrandit, tekib võrrand

$$x^2 - 5x + 6 = 0,$$

millest $x_1 = 2$ (ei kuulu määramispiirkonda) ja $x_2 = 3$.

Vastus. $x = 3$.

Näide 2. Lahendada võrrand

$$1 - \frac{x - 3}{x^2 + x - 2} = \frac{2x}{x^2 + x - 2}.$$

Lahendus. Määramispiirkonna leidmiseks lahendame võrrandi $x^2 + x - 2 = 0$, millest $x_1 = -2$ ja $x_2 = 1$. Kuna see ruutkolmliige on murru nimetajas, siis $x \neq -2$ ja $x \neq 1$. Võrrandi määramispiirkond on $]-\infty, -2[\cup]-2, 1[\cup]1, +\infty[$.

Antud võrrandist järeldub võrrand $x^2 - 2x + 1 = 0$, mille lahendeiks on $x_{1,2} = 1$ (mis ei kuulu lähtevõrrandi määramispiirkonda).

Vastus: lahendid puuduvad.

Näide 3. Lahendada võrrand

$$\frac{30}{x^2 - 1} - \frac{13}{x^2 + x + 1} = \frac{7 + 18x}{x^3 - 1}.$$

Lahendus. Lahutades nimetajad tegureiks, omandab võrrand kuju

$$\frac{30}{(x + 1)(x - 1)} - \frac{13}{x^2 + x + 1} = \frac{7 + 18x}{(x - 1)(x^2 + x + 1)}.$$

Nimetajatest selgub, et $x \neq -1$, $x \neq 1$. Ruutkolmliikmel $x^2 + x + 1$ ei ole reaalarvulisi nullkohti ($D < 0$).

Määramispiirkond on $]-\infty, -1[\cup]-1; 1[\cup]1, +\infty[$. Pärast teisendusi saame võrrandi $x^2 - 5x - 36 = 0$, mille lahendeiks on $x_1 = 9$; $x_2 = -4$, mis kuuluvad ka esialgse võrrandi määramispiirkonda.

Vastus. $x_1 = 9$; $x_2 = -4$.

9. Abitundmatu kasutamine võrrandi lahendamisel. Mõnd kõrgema astme võrrandit on võimalik teisendada nii, et abitundmatut kasutades tekib ruutvõrrand.

Näide 1. Võrrandi $(x^2 + 2x)^2 - 14(x^2 + 2x) - 15 = 0$ lahendamisel on sobiv kasutada abitundmatut $y = x^2 + 2x$.

Nii tekib ruutvõrrand $y^2 - 14y - 15 = 0$, mille lahendid on $y_1 = 15$; $y_2 = -1$. Nüüd on tegemist kahe ruutvõrrandiga:

1) $x^2 + 2x - 15 = 0$, mille lahendid on $x_1 = -5$; $x_2 = 3$;

2) $x^2 + 2x + 1 = 0$, kust $x_{1,2} = -1$.

Vastus: $x_1 = -5$; $x_{1,3} = -1$; $x_4 = 3$.

Näide 2. Võrrandi

$$\left(\frac{x-1}{x}\right)^2 - 3\left(\frac{x-1}{x}\right) - 4 = 0$$

määramispiirkonda ei kuulu $x = 0$.

Lahendamiseks kasutame abitundmatut $y = \frac{x-1}{x}$. Vastava ruutvõrrandi $y^2 - 3y - 4 = 0$ lahendeiks on $y_1 = 4$; $y_2 = -1$. Võrrandeist

$$\frac{x-1}{x} = 4 \quad \text{ja} \quad \frac{x-1}{x} = 1$$

leiame lahendid $x_1 = -\frac{1}{3}$; $x_2 = \frac{1}{2}$, mis kuuluvad määramispiirkonda.

Vastus. $x_1 = -\frac{1}{3}$; $x_2 = \frac{1}{2}$.

Näide 3. Võrrandi

$$\frac{1}{x^2 + 2x - 3} + \frac{18}{x^2 + 2x + 2} - \frac{18}{x^2 + 2x + 1} = 0$$

määramispiirkonda ei kuulu ruutkolmliikmete $x^2 + 2x - 3$; $x^2 + 2x + 2$ ja $x^2 + 2x + 1$ nullkohad, s.t. $x \neq -3$; $x \neq -1$; $x \neq 1$.

Kasutades abitundmatut $y = x^2 + 2x + 1$ omandab võrrand kuju

$$\frac{1}{y-4} + \frac{18}{y+1} - \frac{18}{y} = 0,$$

millest $y^2 - 17y + 72 = 0$ ja $y_1 = 8$, $y_2 = 9$.

Edasi on 2 võimalust:

1) $x^2 + 2x + 1 = 8$; $x^2 + 2x - 7 = 0$, millest $x_{1,2} = -1 \pm 2\sqrt{2}$;

2) $x^2 + 2x + 1 = 9$; $x^2 + 2x - 8 = 0$; $x_3 = -4$; $x_4 = 2$.

Kontrollime lahendite kuuluvust määramispiirkonda.

Vastus. $x_{1,2} = -1 \pm 2\sqrt{2}$; $x_3 = -4$; $x_4 = 2$.

Näide 4. Lahendada võrrand

$$\frac{3}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{4}{x-2} + \frac{4}{x-3} + \frac{1}{x-4} + \frac{3}{x-5} = 0.$$

Ühise nimetaja leidmine ei ole siin otstarbekas. Rühmitades ja liites murde

$$\left(\frac{3}{x} + \frac{3}{x-5}\right) + \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-4}\right) + \left(\frac{4}{x-2} + \frac{4}{x-3}\right) = 0,$$

saame pärast teisendamist

$$\frac{3(2x-5)}{x^2-5x} + \frac{2x-5}{x^2-5x+4} + \frac{4(2x-5)}{x^2-5x+6} = 0.$$

Määramispiirkonda ei kuulu $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, $x=4$ ja $x = 5$.

Ühise teguri sulgude ette toomisel

$$(2x-5)\left(\frac{3}{x^2-5x} + \frac{1}{x^2-5x+4} + \frac{4}{x^2-5x+6}\right) = 0$$

saame võrrandist $2x - 5 = 0$ ühe lahendi $x_1 = \frac{5}{2}$. Võrrandi

$$\frac{3}{x^2-5x} + \frac{1}{x^2-5x+4} + \frac{4}{x^2-5x+6} = 0$$

lahendamiseks kasutame abitundmatut $y = x^2 - 5x$. Lahendus on analoogiline eelmise näitega.

Vastus. $x_1 = 2{,}5$; $x_{2,3} = \frac{1}{2}(5 \pm \sqrt{17})$.

§ 16. Erikujulised võrrandid

1. Kaheliikmelised võrrandid. Algebralist võrrandit

$$ax^n \pm b = 0 \quad (a > 0,\ b > 0) \qquad (1)$$

nimetatakse kaheliikmeliseks võrrandiks. Asendus

$$x = y\sqrt[n]{\frac{b}{a}} \qquad (2)$$

taandab lähtevõrrandi (1) kujule

$$y^n \pm 1 = 0\,. \qquad (3)$$

Lahendanud võrrandi (3), leiame asendusest (2) lähtevõrrandi (1) lahendid.

Vaatleme järgnevalt erijuhte.

1. Kui $n = 2$, siis lahendame võrrandit $ax^2 \pm b = 0$:
   1) võrrandil $y^2 + 1 = 0$ reaalarvulisi lahendeid ei ole;
   2) võrrandit $y^2 - 1 = 0$ lahendades saame $y = \pm 1$ ja seosest (2) leiame $x = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}$;

2. Kui $n = 3$, siis on võrrandiks $ax^3 \pm b = 0$:

1) $y^3 + 1 = 0$; $(y + 1)(y^2 - y + 1) = 0$. Kuna $y^2 - y + 1 = 0$ ei oma reaalarvulisi lahendeid, siis $y = -1$ ja $x = -\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$;

2) $y^3 - 1 = 0$; $(y - 1)(y^2 + y + 1) = 0$, millest $y = 1$ ja $x = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$.

3. Kui $n = 4$, siis saame järgmised juhud:

1) $y^4 + 1 = 0$, millel reaalarvulisi lahendeid ei ole;

2) $y^4 - 1 = 0$; $(y^2 - 1)(y^2 + 1) = 0$, $y = \pm 1$, $x = \pm\sqrt[4]{\frac{b}{a}}$.

Näide 1. Lahendada võrrand $8x^3 - 27 = 0$.

Võrrand (3) omandab kuju $y^3 - 1 = 0$, millest $y = 1$ ja seosest (2)

$$x = y\sqrt[3]{\frac{b}{a}} = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{3}{2}.$$

Näide 2. $4x^6 - 3 = 0$; $y^6 - 1 = 0$; $y_1 = 1$; $y_2 = -1$; $x_{1,2} = \pm\sqrt[6]{\frac{3}{4}}$.

Üldise võtte asemel võib kasutada ka võrrandi vasaku poole tegureiks lahutamist.

Näide 3. $8x^3 - 27 = 0$ omandab pärast tegureiks lahutamist kuju $(2x - 3)(4x^2 + 6x + 9) = 0$. Kuna teisel teguril reaalseid nullkohti ei ole ($D < 0$), siis $2x - 3 = 0$ ja $x = \frac{3}{2}$.

2. B i r u u t v õ r r a n d. B i r u u t v õ r r a n d i k s nimetatakse võrrandit

$$ax^4 + bx^2 + c = 0,$$

kus $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$. Määramispiirkonnaks on $]-\infty, +\infty[$

Biruutvõrrandi lahendamisel kasutame abitundmatut $y = x^2$ ja lahendame ruutvõrrandi

$$ay^2 + by + c = 0.$$

Kui ruutvõrrandil reaalarvulised lahendid puuduvad, siis puuduvad nad ka biruutvõrrandil.

Olgu ruutvõrrandi lahendid y_1 ja y_2, siis

$$x^2 = y_1 \quad \text{ja} \quad x^2 = y_2.$$

Erijuhud

1) kui $y_1 \geq 0$ ja $y_2 \geq 0$, siis biruutvõrrandil on reaalarvulist lahendit

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{y_1}, \quad x_{3,4} = \pm\sqrt{y_2};$$

2) kui $y_1 \geq 0$ ja $y_2 < 0$, siis on 2 reaalarvulist lahendit

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{y_1};$$

3) kui $y_1 < 0$ ja $y_2 \geq 0$, siis on 2 reaalarvulist lahendit

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{y_2};$$

4) kui $y_1 < 0$ ja $y_2 < 0$, siis reaalarvulised lahendid puuduvad.

Biruutvõrrandi lahenditel x_1, x_2, x_3, x_4 on järgmised omadused:

1) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$;
2) $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = \frac{c}{a}$.

Näide 1. Taandada murd

$$\frac{x^4 - 9x^2 + 20}{x^4 - 10x^2 + 24}.$$

Lahendus. Lahendame biruutvõrrandid $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$ ja $x^4 - 10x^2 + 24 = 0$. Kasutades lahendeid lahutame lugeja ja nimetaja tegureiks. Seega

$$\frac{x^4 - 9x^2 + 20}{x^4 - 10x^2 + 24} = \frac{(x + 2)(x - 2)(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})}{(x - 2)(x + 2)(x - \sqrt{6})(x + \sqrt{6})} = \frac{x^2-5}{x^2-6}.$$

Näide 2. Koostada biruutvõrrand, mille lahendeiks on

$$x_{1,2} = \pm\frac{2}{3} \text{ ja } x_{3,4} = \pm 4.$$

Lahendus.

$$(x - \tfrac{2}{3})(x + \tfrac{2}{3})(x-4)(x+4) = 0; \quad 9x^4 - 148x^2 + 64 = 0.$$

3. Kolmeliikmeline võrrand. Algebralist võrrandit

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0,$$

kus $n \geq 2$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ nimetatakse kolmeliikmeliseks võrrandiks. Kui $n = 2$, saame biruutvõrrandi.

Lahendamisel kasutame abitundmatut $y = x^n$.

Näide. $x^8 - 17x^4 + 16 = 0$. Asendame $x^4 = y$, siis $y^2 - 17y + 16 = 0$, millest $y_1 = 16$ ja $y_2 = 1$.

1) $x^4 = 16$; $x_{1,2} = \pm 2$;

2) $x^4 = 1$; $x_{3,4} = \pm 1$.

Vastus. $x_{1,2} = \pm 2$; $x_{3,4} = \pm 1$.

4. J u u r v õ r r a n d. Võrrandit, milles tundmatu esineb juuritavas avaldises, nimetatakse j u u r v õ r r a n d i k s (irratsionaalvõrrandiks).

Lahendamiseks tuleb asendada juurvõrrand ratsionaalse võrrandiga, mis on samaväärne lähtevõrrandiga või viimase järelduseks. Sageli tõestetakse võrrandi mõlemad pooled mingisse astmesse. Nii saadud võrrand võib osutuda lähtevõrrandi järelduseks. Paarisarvulise astendajaga astendamisel on võimalus võõrlahendi tekkimiseks. Seepärast on tingimata vajalik lahendi kontroll.

Võrrandi määramispiirkonna leidmisel arvestame, et paarituarvulise juurija korral on irratsionaalse avaldise määramispiirkonnaks juurealuse avaldise määramispiirkond, paarisarvulise juurija korral peab juurealune avaldis olema mittenegatiivne.

Lahendame järgmised juurvõrrandid:

1) $\sqrt{2x - 4} - \sqrt{x + 5} = 1$;

2) $\sqrt{2x + 1} + \sqrt{x - 3} = 2\sqrt{x}$;

3) $\sqrt{1 + x\sqrt{x^2 + 24}} = x + 1$;

4) $\sqrt{9 - 5x} = \sqrt{3 - x} + \dfrac{6}{\sqrt{3 - x}}$;

5) $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x - 3} = \sqrt[3]{12(x - 1)}$;

6) $\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} = 12$;

7) $\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[3]{x^2} = 3$;

8) $\sqrt[3]{\dfrac{12 - 2x}{x - 1}} + \sqrt[3]{\dfrac{x - 1}{12-2x}} = \dfrac{5}{2}$.

Lahendused.

1) Võrrandi $\sqrt{2x - 4} - \sqrt{x + 5} = 1$ määramispiirkond on

$$\begin{cases} 2x - 4 \geqslant 0 \\ x + 5 \geqslant 0, \end{cases}$$

millest $x \geqslant 2$.

Teisendame võrrandit nii, et kummalgi pool võrdusmärki on üks juuravaldis ja tõstame võrrandi mõlemad pooled ruutu

$$(\sqrt{2x - 4})^2 = (1 + \sqrt{x + 5})^2.$$

Nii saame võrrandi $x - 10 = 2\sqrt{x + 5}$. Teistkordsel ruutu tõstmisel

$$x^2 - 20x + 100 = 4x + 20; \; x^2-24x +80 = 0; \; x_1 = 20, \; x_2 = 4.$$

Lahendeid lähtevõrrandisse asendades veendume, et võrrandit rahuldab ainult $x = 20$.

Vastus. $x = 20$.

2) Võrrandi $\sqrt{2x + 1} + \sqrt{x - 3} = 2\sqrt{x}$ määramispiirkond on

$$\begin{cases} 2x + 1 \geqslant 0 \\ x - 3 \geqslant 0, \end{cases}$$

millest $x \geqslant 3$. Ruutu tõstes

$$(\sqrt{2x + 1} + \sqrt{x - 3})^2 = (2\sqrt{x}); \quad (2\sqrt{(2x+1)(x-3)})^2 = (x + 2)^2;$$

$7x^2 - 24x - 16 = 0$; $x_1 = 4$; $x_2 = -\frac{2}{7}$ (ei kuulu määramispiirkonda).

Kontrollime lahendit $x = 4$.

Vastus. $x = 4$.

3) $\sqrt{1 + x\sqrt{x^2 + 24}} = x + 1$

$$(\sqrt{1 + x\sqrt{x^2 + 24}})^2 = (x + 1)^2; \quad 1 + x\sqrt{x^2 + 24} =$$

$$= x^2 + 2x + 1; \; x(\sqrt{x^2 + 24} - x - 2) = 0;$$

$$x_1 = 0 \text{ ja } \sqrt{x^2 + 24} - x - 2 = 0;$$

$$(\sqrt{x^2 + 24})^2 = (x + 2)^2; \quad 4x = 20; \; x_2 = 5.$$

Mõlemad lahendid sobivad.

Vastus. $x_1 = 0$; $x_2 = 5$.

4) Võrrandi $\sqrt{9 - 5x} = \sqrt{3 - x} + \dfrac{6}{\sqrt{3 - x}}$ määramispiirkond on

$$\begin{cases} 9 - 5x \geqslant 0 \\ 3 - x > 0 \end{cases} \quad \text{ehk} \quad x \leqslant 1{,}8$$

$\sqrt{(9-5x)(3-x)} = 3 - x + 6$; $(\sqrt{(9-5x)(3-x)})^2 = (9-x)^2$.

$2x^2 - 3x - 27 = 0$; $x_1 = -3$; $x_2 = 4{,}5$ (ei kuulu määramispiirkonda).

Kontrollime lahendit $x = -3$.

5) Võrrandi $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x-3} = \sqrt[3]{12(x-1)}$ määramispiirkond on $]-\infty, +\infty[$.

Tõstes kuupi $(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x-3})^3 = (\sqrt[3]{12(x-1)})^3$;

$x + 3\sqrt[3]{x^2(2x-3)} + 3\sqrt{x(2x-3)^2} + 2x - 3 = 12(x-1)$;

$3\sqrt[3]{x(2x-3)}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x-3}) = 9x - 9 \;|\; : 3.$

Kasutades lähtevõrrandit sulgavaldise asendamiseks, saame võrrandi

$$\sqrt[3]{x(2x-3)} \cdot \sqrt[3]{12(x-1)} = 3(x-1),$$

mida veel kord kuupi tõstes

$$12x(x-1)(2x-3) - 3^3(x-1)^3 = 0;$$

$$(x-1)\left[12x(2x-3) - 27(x-1)^2\right] = 0.$$

Siin kas $(x-1) = 0$, millest $x_1 = 1$ või

$$12x(2x-3) - 27(x-1)^2 = 0;\; x^2 - 6x + 9 = 0;\; x = 3.$$

Mõlemad lahendid kontrollimise põhjal sobivad.

Vastus. $x_1 = 1$; $x_2 = 3$.

6) Võrrandi $\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} = 12$ määramispiirkond on $x \geq 0$. Asendame $\sqrt[4]{x} = y$, siis $\sqrt{x} = y^2$ ja tekib võrrand $y^2 + y - 12 = 0$, millest $y_1 = 3$ ja $y_2 = -4$ (ei sobi). Kuna $y = 3$, siis $\sqrt[4]{x} = 3$ ja $x = 3^4 = 81$.

Vastus. $x = 81$.

7) Võrrandi $\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[3]{x^2} = 3$ määramispiirkond on $]-\infty, +\infty[$. Asendame $y = \sqrt[3]{x}$, siis $2y^2 + y - 3 = 0$; $y_1 = 1$; $y_2 = -\frac{3}{2}$ ning $x_1 = 1^3 = 1$; $x_2 = (-\frac{3}{2})^3 = -\frac{27}{8} = -3\frac{3}{8}$.

Vastus. $x_1 = 1$; $x_2 = -3\frac{3}{8}$.

8) Võrrandi

$$\sqrt[3]{\frac{12-2x}{x-1}} + \sqrt[3]{\frac{x-1}{12-2x}} = \frac{5}{2}$$

määramispiirkonda ei kuulu $x = 1$ ja $x = 6$. Asendame

$\sqrt[3]{\dfrac{12 - 2x}{x - 1}} = y$, siis lähtevõrrand omandab kuju

$$y + \frac{1}{y} = \frac{5}{2},$$

millest saame, et $2y^2 - 5y + 2 = 0$ ning $y_1 = 2$; $y_2 = \frac{1}{2}$.

Edasi peame lahendama kaks võrrandit

$$\sqrt[3]{\frac{12 - 2x}{x - 1}} = 2 \quad \text{ja} \quad \sqrt[3]{\frac{12 - 2x}{x - 1}} = \frac{1}{2}.$$

Tõstes kuupi ja teisendades leiame, et $x_1 = 2$; $x_2 = \frac{97}{19} = 5\frac{2}{19}$. Kontroll!

Vastus. $x_1 = 2$; $x_2 = 5\frac{2}{19}$.

5. Absoluutväärtust sisaldav võrrand. Absoluutväärtust sisaldavate võrrandite lahendamisel kasutame absoluutväärtuse definitsiooni:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{kui } x \geqslant 0 \\ -x, & \text{kui } x < 0. \end{cases}$$

Lahendame järgmised absoluutväärtust sisaldavad võrrandid:

1) $|x - 1| = 3$;
2) $|2x + 3| - 2 = 4x + 1$;
3) $|1 - x| + |x - 1| = x$;
4) $|x + 2| + |x| + |x - 2| = 4$.

Lahendused.

1) $|x - 1| = 3$.

Vastavalt definitsioonile

$$|x - 1| = \begin{cases} x - 1, & \text{kui } x \geqslant 1 \\ -(x - 1), & \text{kui } x < 1. \end{cases}$$

Ühe võrrandi asemel saame kaks järgnevat:

1) kui $x \geqslant 1$, siis $|x - 1| = x - 1$ ja asendades lähtevõrrandisse, saame $x - 1 = 3$, millest $x = 4$. Et $4 > 1$, siis $x = 4$ on võrrandi lahend;
2) kui $x < 1$, siis $|x - 1| = -(x - 1)$ ja võrrandiks on $-(x - 1) = 3$, mille lahend $x = -2$ rahuldab tingimust $x = -2 < 1$.

Vastus. $x_1 = 4$; $x_2 = -2$.

2) $|2x + 3| - 2 = 4x + 1$.

Definitsioonist

$$|2x + 3| = \begin{cases} 2x + 3, \text{ kui } x \geqslant -\frac{3}{2} \\ -(2x + 3), \text{ kui } x < -\frac{3}{2}. \end{cases}$$

1) kui $x \geqslant = -\frac{3}{2}$, siis $2x + 3 - 2 = 4x + 1$ ja $x = 0$;

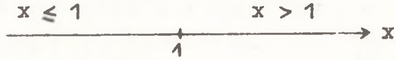
2) kui $x =< -\frac{3}{2}$, siis $-(2x + 3) - 2 = 4x + 1$ ja $x = -1$.

Vastus. $x_1 = 0$; $x_2 = -1$.

3) $|1 - x| + |x - 1| = x$.

Leiame absoluutväärtuste nullkohad: $x = 1$, ning jaotame x-telje saadud punktiga osadeks

$x \leq 1$ $\qquad$ $x > 1$



1) kui $x \leqslant 1$, siis $|1 - x| = 1 - x$ ja $|x - 1| = = -(x - 1)$.

Seetõttu omandab lähtevõrrand kuju

$1 - x + 1 - x = x$, millest $x = \frac{2}{3}$.

Et $\frac{2}{3} < 1$, siis $x = \frac{2}{3}$ on lahend.

2) Kui $x > 1$, siis $|1 - x| = -(1 - x) = x - 1$ ja $|x - 1| = x - 1$ ning võrrandiks on

$x - 1 + x - 1 = x$ ja $x = 2$.

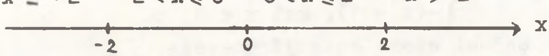
Kuna $2 > 1$, siis $x = 2$ on võrrandi lahendiks.

Vastus. $x_1 = \frac{2}{3}$; $x_2 = 2$.

4) $|x + 2| + |x| + |x - 2| = 4$.

Antud võrrandi puhul tekib 4 osapiirkonda:

$x \leq -2$ $\qquad$ $-2 < x \leqslant 0$ $\qquad$ $0 < x \leqslant 2$ $\qquad$ $x > 2$



1) kui $x \leq -2$, siis $|x + 2| = -(x + 2)$; $|x| = -x$ ja $|x - 2| = -(x - 2)$.

Võrrand omandab kuju

$-(x + 2) - x - (x - 2) = 4$, millest $x = -\frac{4}{3}$ (ei kuulu vaadeldavasse osapiirkonda).

2) $-2 < x \leqslant 0$, siis $|x + 2| = x + 2$, $|x| = -x$, $|x - 2| = -(x - 2)$

$x + 2 - x - (x - 2) = 4$; $x = 0$ (ei kuulu osapiirkonda).

3) $0 < x \leqslant 2$

$|x + 2| = x + 2$; $|x| = x$; $|x - 2| = -(x - 2)$;

$x + 2 + x - (x - 2) = 4$; $x = 0$ (kuulub osapiirkonda;

4) $x > 2$

$|x + 2| = x + 2$; $|x| = x$; $|x - 2| = x - 2$

$x + 2 + x + x - 2 = 4$; $x = \frac{4}{3}$ (ei kuulu osapiirkonda).

Vastus. $x = 0$.

§ 17. Kahe tundmatuga võrrandisüsteem

1. Võrrandisüsteemi mõiste ja samaväärsus. Kahe tundmatuga võrrandisüsteemi võib esitada kujul:

$$\begin{cases} f_1(x, y) = g_1(x, y) \\ f_2(x, y) = g_2(x, y) \end{cases} \qquad (1)$$

Süsteemi (1) lahendiks nimetatakse arvupaari (x_0, y_0), mis muudab mõlemad võrrandid tõesteks arvvõrdusteks

$$f_1(x_0, y_0) = g_1(x_0, y_0); \quad f_2(x_0, y_0) = g_2(x_0, y_0).$$

Lahendada süsteem, tähendab leida kõik lahendid. Kaht süsteemi

$$\begin{cases} f_1(x, y) = g_1(x, y) \\ f_2(x, y) = g_2(x, y) \end{cases} \qquad (2)$$

ja

$$\begin{cases} f_3(x, y) = g_3(x, y) \\ f_4(x, y) = g_4(x, y) \end{cases} \qquad (3)$$

nimetatakse samaväärseteks (ekvivalentseteks) mingil hulgal M, kui neil on sellel hulgal ühed ja samad lahendid, s.t. iga hulka M kuuluv süsteemi (2) lahend on ka süsteemi (3) lahendiks ja vastupidi.

Võrrandisüsteeme nimetatakse samaväärseteks ka juhul, kui neil ei ole lahendeid.

Kui süsteemi (1) määramispiirkonda pole antud, siis loetakse selleks süsteemi kuuluvate võrrandite määramispiirkondade ühisosa.

Võrrandite samasusteisendusi on käsitletud § 15 p. 1.

Võrrandisüsteemiga (1) on samaväärne

$$\begin{cases} f_1(x, y) - g_1(x, y) = 0 \\ f_2(x, y) - g_2(x, y) = 0, \end{cases}$$

mis võimaldab kahe tundmatuga võrrandisüsteemi esitada kujul

$$\begin{cases} F_1(x, y) = 0 \\ F_2(x, y) = 0\,. \end{cases} \tag{4}$$

Võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} f_5(x, y) = g_5(x, y) \\ f_6(x, y) = g_6(x, y) \end{cases} \tag{5}$$

nimetatakse süsteemi (1) järelduseks, kui süsteemi(1) iga lahend on süsteemi (5) lahendiks.

Märkus. Süsteemile (1) võime lisada võrrandi, mis on ta järelduseks. Seejuures süsteemi (1) lahendite hulk ei muutu.

Näide. Lahendada süsteem

$$\begin{cases} xy + 24 = \dfrac{x^3}{y} \\ xy - 6 = \dfrac{y^3}{x}\,. \end{cases}$$

Lahendus. Määramispiirkonda ei kuulu $x = 0$, $y = 0$. Korrutades võrrandi vastavaid pooli, saame

$$(xy + 24)(xy - 6) = x^2y^2,$$

millest

$$xy = 8. \tag{6}$$

Viimane võrrand on järeldus, mille lisame antud süsteemile:

$$\begin{cases} xy = 8 \\ xy + 24 = \dfrac{x^3}{y} \\ xy - 6 = \dfrac{y^3}{x}\,. \end{cases}$$

Teine ja kolmas võrrand lihtsustuvad, kui asendame neisse esimese võrrandi

$$\begin{cases} xy = 8 \\ \dfrac{x}{y} = 32 \\ \dfrac{y^3}{x} = 2. \end{cases}$$

Korrutades esimese ja teise võrrandi vastavaid pooli, saame

$$x^4 = 2^8.$$

Esimese ja kolmanda võrrandi vastavate poolte korrutamisel saame

$$y^4 = 2^4.$$

Lahendatava süsteemi järelduseks on süsteem

$$\begin{cases} x^4 = 2^8 \\ y^4 = 2^4, \end{cases}$$

millest

$$x = \pm 4; \quad y = \pm 2.$$

Kasutades võrrandit (6) saame lahenditeks arvupaarid (-4; -2) ja (4; 2). Kontrollimine näitab, et need arvupaarid rahuldavad lähtevõrrandeid.

Vastus. (-4; -2); (4; 2).

2. Võrrandisüsteemi lahendamine asendus- ja liitmisvõttega. Kui võrrandisüsteemi üks võrrand on lineaarne, siis on soovitav süsteemi lahendada asendusvõttega. Asendusvõte sobib mõnikord ka juhul, kui süsteemis puudub lineaarvõrrand.

Näide 1. Lahendada süsteem

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 63 \\ x - y = -3. \end{cases}$$

Lahendus. Teisest võrrandist avaldame $x = y - 3$ ja asendades esimesse võrrandisse, saame

$$y^2 - 3y - 54 = 0,$$

millest $y_1 = 9$; $y_2 = -6$. Asendusest arvutame $x_1 = 6$; $x_2 = -9$.

Lahendite õigsust kontrollida iseseisvalt (ka järgnevates ülesannetes).

Vastus. (6; 9); (-9; -6).

Näide 2. Lahendada süsteem

$$\begin{cases} x^2 + 3xy - 18 = 0 \\ 4y^2 + xy - 7 = 0. \end{cases}$$

Lahendus. Avaldame teisest võrrandist x tundmatu y kaudu

$$x = \frac{7 - 4y^2}{y},$$

mille asendame esimesse võrrandisse ja saame biruutvõrrandi

$$4y^4 - 53y^2 + 49 = 0,$$

mille lahendid on $y_{1,2} = \pm 3,5$; $y_{3,4} = \pm 1$. Asendusest leiame, et $x_{1,2} = \mp 12$; $x_{3,4} = \pm 3$.

Vastus. (-12; 3,5); (12; -3,5); (3; 1); (-3; -1).

Ühest tundmatust vabanemist nimetatakse selle muutuja e l i m i n e e r i m i s e k s. Selleks korrutatakse vajaduse korral võrrandite vastavaid pooli niisuguse teguriga, et ühe tundmatu kordajad oleksid teineteise vastandarvud. Seejärel liidetakse võrrandite vastavad pooled ning saadakse ühe tundmatuga võrrand.

Näide 3. Lahendada süsteem

$$\begin{cases} 2x - y - xy = 14 \\ x + 2y + xy = -7. \end{cases}$$

Lahendus. Liites võrrandi mõlemad pooled saame

$$3x + y = 7$$

ja uueks süsteemiks on

$$\begin{cases} 2x - y - xy = 14 \\ 3x + y = 7, \end{cases}$$

mille lahendame asendusvõttega.

Vastus. (3; -2); $(-\frac{7}{3}; 14)$.

Näide 4. Lahendada süsteem

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 18 \\ x^2 - y^2 + x - y = 6. \end{cases}$$

Lahendus. Liites võrrandi mõlemad pooled saame võrrandi

$$x^2 + x - 12 = 0,$$

mille lahendid $x_1 = -4$ ja $x_2 = 3$ asendame y leidmiseks esimesse võrrandisse.

Vastus. (-4; 2); (-4; -3); (3; 2); (3; -3).

Näide 5. Lahendada süsteem

$$\begin{cases} x + y = 7xy \\ x - y = 3xy. \end{cases}$$

Lahendus. Kui korrutame esimest võrrandit arvuga 3 ja teist arvuga (-7), siis pärast liitmist tekib võrrand

$$2x - 5y = 0.$$

Asendusvõtet kasutades leiame lahendid.

Vastus. (0; 0); $(\frac{1}{2}; \frac{1}{5})$.

3. A b i t u n d m a t u   v õ t e. Võrrandisüsteemide **lahendamise** lihtsustamiseks kasutatakse abitundmatuid. Lahendame mõned näited.

Näide 1. Lahendada süsteem

$$\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{34}{15} \\ x^2 + y^2 = 34. \end{cases}$$

Lahendus. Määramispiirkonda ei kuulu $x = 0$; $y = 0$. Abitundmatuks valime $t = \frac{x}{y}$. Siis süsteemi esimesest võrrandist saame

$$15t^2 - 34t + 15 = 0,$$

millest

$$t_1 = \frac{5}{3}; \quad t_2 = \frac{3}{5}.$$

Teine võrrand avaldub abitundmatu kaudu

$$y^2 = \frac{34}{1 + t^2}$$

ja $y^2 = 9$; $y^2 = 25$, millest $y_{1,2} = \pm 3$, $y_{3,4} = \pm 5$. Seosest $x = yt$ leiame x väärtused.

Vastus. (5; 3); (-5; -3); (3; 5); (-3; -5).

Näide 2. Lahendada süsteem

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6} \\ \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} = \frac{5}{36}. \end{cases}$$

Lahendus. Määramispiirkonda ei kuulu $x = 0$ ja $y = 0$. Olgu abitundmatuteks $u = \frac{1}{x}$ ja $v = \frac{1}{y}$, siis süsteem omandab kuju

$$\begin{cases} u + v = \frac{5}{6} \\ u^2 - v^2 = \frac{5}{36}. \end{cases}$$

Teise võrrandi vasaku poole lahutame tegureiks ja asendame $u + v$ esimesest võrrandist. Tekkinud süsteemi

$$\begin{cases} u + v = \frac{5}{6} \\ u - v = \frac{1}{6} \end{cases}$$

lahendamisel elimineerimisvõttega saame, et $u = \frac{1}{2}$; $v = \frac{1}{3}$.

Vastus. (2; 3).

Näide 3. Lahendada süsteem

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{5}{2} \\ x + y = 10. \end{cases}$$

Lahendus. Määramispiirkonna saame tingimusest $xy > 0$.
Abitundmatu $t = \sqrt{\frac{x}{y}}$ asendamisel esimesse võrrandisse

$$2t^2 - 5t + 2 = 0,$$

millest $t_1 = 2$; $t_2 = -\frac{1}{2}$. Tekib 2 süsteemi

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = 4 \\ x + y = 10 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{1}{4} \\ x + y = 10. \end{cases}$$

Vastus. (8; 2); (2; 8).

Näide 4. Lahendada süsteem

$$\begin{cases} \frac{x + y}{x - y} + \frac{x - y}{x + y} = \frac{5}{2} \\ x^2 + y^2 = 20. \end{cases}$$

Lahendus. Määramispiirkonda ei kuulu $x = y$, $x = -y$.
Abitundmatu $t = \frac{x+y}{x-y}$ asendamisel esimesse võrrandisse

$$2t^2 - 5t + 2 = 0; \quad t_1 = 2; \quad t_2 = \frac{1}{2}.$$

Süsteemidest

$$\begin{cases} \frac{x + y}{x - y} = 2 \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{x + y}{x - y} = \frac{1}{2} \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases}$$

leiame lahendid.

Vastus. $(3\sqrt{2};\ \sqrt{2})$; $(-3\sqrt{2};\ -\sqrt{2})$; $(-3\sqrt{2};\ \sqrt{2})$; $(3\sqrt{2};\ -\sqrt{2})$.

4. H o m o g e e n n e   r u u t v õ r r a n d i s ü s t e e m. Ruutvõrrandisüsteemi, kus mõlema võrrandi kõik liikmed peale vabaliikme on tundmatute suhtes ruutliikmed, nimetatakse h o m o g e e n s e k s ruutvõrrandisüsteemiks.

Näide 1. Lahendada süsteem

$$\begin{cases} x^2 - 5y^2 = -1 \\ 3xy + 7y^2 = 1. \end{cases}$$

Lahendus. Kasutame abitundmatut t. Olgu $x = ty$, siis süsteemiks saame

$$\begin{cases} y^2(t^2 - 5) = -1 \\ y^2(3t + 7) = 1, \end{cases}$$

millest

$$\begin{cases} y^2 = \dfrac{1}{t^2 - 5} \\ y^2 = \dfrac{1}{3t + 7} \end{cases}.$$

Kuna võrdsed on vasakud pooled, siis ka

$$\frac{1}{t^2 - 5} = \frac{1}{3t + 7}$$

ja võrrandi $t^2 + 3t + 2 = 0$ lahendid on $t_1 = -1$, $t_2 = -2$.
Võrrandist

$$y^2 = \frac{1}{t^2 - 5}$$

määrame $y_{1,2} = \pm \frac{1}{2}$; $y_{3,4} = \pm 1$ ja avaldisest $x = ty$ leiame $x_{1,2} = \mp \frac{1}{2}$; $x_{3,4} = \mp 2$.

Vastus. $(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$; $(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$; $(2; -1)$; $(-2; 1)$.

5. V õ r r a n d i s ü s t e e m i l a h e n d a m i s e v õ t t e i d.

Näide 1. Lahendada süsteem

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 19(x - y) \\ x^3 + y^3 = 7(x + y). \end{cases}$$

Lahendus. Lahutame võrrandi vasaku poole tegureiks ja võtame ühise teguri sulgude ette, siis

$$\begin{cases} (x - y)(x^2 + xy + y^2 - 19) = 0 \\ (x + y)(x^2 - xy + y^2 - 7) = 0. \end{cases}$$

Et korrutis on null, siis tekib süsteemist 4 uut süsteemi

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y = 0 \\ x^2 - xy + y^2 - 7 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 - 19 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + xy + y^2 - 19 = 0 \\ x^2 - xy + y^2 - 7 = 0. \end{cases}$$

Nende süsteemide lahendamine ei tohiks raske olla.

Vastus. $(-\sqrt{19}; \sqrt{19})$; $(-3; -2)$; $(-\sqrt{7}; -\sqrt{7})$; $(-2; -3)$; $(0; 0)$; $(2; 3)$; $(\sqrt{7}; \sqrt{7})$; $(3; 2)$; $(\sqrt{19}; -\sqrt{19})$.

Näide 2. Lahendada süsteem

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 19 \\ x^2y - xy^2 = 6. \end{cases}$$

Lahendus. Korrutame teise võrrandi arvuga (-3) ja liidame esimesele. Siis

$$(x - y)^3 = 1 \text{ ja } x - y = 1.$$

Teisest võrrandist

$$xy(x - y) = 6.$$

Arvestades tingimust $x - y = 1$ saame, et $xy = 6$. Edasi lahendame süsteemi

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ xy = 6. \end{cases}$$

Vastus. (-2; 3); (3; 2).

<u>Näide 3.</u> Lahendada süsteem

$$\begin{cases} x^2 - 2xy - 3y^2 = 0 \\ x^2 - xy - 2x - 3y = 6. \end{cases}$$

Lahendus. Esimene võrrand on homogeenne, mille lahendame x suhtes (ruutvõrrand, mille kordajad on 1, $-2y$ ja $-3y^2$). Saame

$$x = y \pm \sqrt{y^2 + 3y^2} = y \pm 2y,$$

millest $x = 3y$ ja $x = -y$. Nüüd on võimalik esimene võrrand lahutada tegureiks

$$(x - 3y)(x + y) = 0$$

ja süsteem omandab kuju

$$\begin{cases} (x - 3y)(x + y) = 0 \\ x^2 - xy - 2x - 3y = 6. \end{cases}$$

Järgnevalt lahendame süsteemid

$$\begin{cases} x - 3y = 0 \\ x^2 - xy - 2x - 3y = 6 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} x + y = 0 \\ x^2 - xy - 2x - 3y = 6. \end{cases}$$

Vastus. (-2; 2); $(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2})$; $(\frac{3}{2}; -\frac{3}{2})$; (6; 2).

<u>Näide 4.</u> Lahendada süsteem

$$\begin{cases} x + y + x^2 + y^2 = 18 \\ xy + x^2 + y^2 = 19. \end{cases}$$

Lahendus. Kasutame abitundmatuid $x + y = u$, $xy = v$ ja võrrandit $x^2 + y^2 = u^2 - 2v$, siis süsteem omandab kuju

$$\begin{cases} u + u^2 - 2v = 18 \\ v + u^2 - 2v = 19, \end{cases}$$

millest

$$u^2 - u - 20 = 0$$

ja

$$\begin{cases} u_1 = 5 \\ v_1 = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} u_2 = -4 \\ v_2 = -3. \end{cases}$$

Lähtetundmatud määrame süsteemidest

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = -4 \\ xy = -3. \end{cases}$$

Vastus. $(-2 - \sqrt{7}; -2 + \sqrt{7})$; $(-2 + \sqrt{7}; -2 - \sqrt{7})$; $(2; 3)$; $(3; 2)$.

Näide 5. Lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} xy = 2 \\ yz = 6 \\ xz = 3. \end{cases}$$

Lahendus. Korrutame nende võrrandite vastavad pooled, siis

$$x^2y^2z^2 = 36, \quad \text{millest} \quad xyz = \pm 6.$$

Asendades viimasesse järjest lähtevõrrandid, mis sisaldavad kaht tundmatut, leiame kolmanda tundmatu.

Vastus. $(\pm 1; \pm 2; \pm 3)$.

6. V õ r r a n d i ja v õ r r a n d i s ü s t e e m i k o o s t a m i s e n ä i t e i d. Ülesande lahendamisel võrrandi abil väljendatakse ülesande andmete ja tundmatute olulised seosed võrrandina või võrrandisüsteemina ning lahendatakse need. Järgnevates näidetes on pearõhk pandud võrrandite koostamisele. Võrrandite lahendamine ja lahendite kontroll jääb iseseisvaks tööks.

Näide 1. Tööliste palka tõsteti kahel korral ühe ja sama protsendi võrra. Selle tulemusena tõusis palk 84 rublalt 120 rbl. 96 kopikale. Mitu protsenti tõsteti palka kummalgi korral?

Lahendus. Oletame, et palka tõsteti x % võrra. Esimene palgatõus on $84 \cdot 0{,}01x$ rbl.; teine $(84 + 84 \cdot 0{,}01x) \cdot 0{,}01x$ rbl.. Kuna palka tõsteti kokku $120{,}96 - 84 = 36{,}96$ rbl. võrra, saame võrrandi

$$84 \cdot 0{,}01x + (84 + 84 \cdot 0{,}01x) \cdot 0{,}01x = 36{,}96.$$

Ruutvõrrandi lahendeist üks ei sobi, sest x ei saa olla negatiivne.

Vastus. Palka tõsteti kummalgi korral 20 %.

Näide 2. Anumas oli 10 liitrit 100 %-list äädikhapet, millest osa kallati ära ja asemele pandi sama hulk vett. Seejärel kallati ära samapalju segu ja anum täideti uuesti veega. Mitu liitrit kallati ära kummalgi korral, kui lõpuks oli anumas 64 %-line äädikhappe lahus?

Lahendus. Eeldame, et ära kallati x liitrit äädikhapet, siis anumasse jäi 10 - x liitrit äädikhapet ja x liitrit vett. Seega on segu igas liitris $\frac{10 - x}{10}$ liitrit äädikhapet. Pärast x liitri segu väljakallamist on anumas

$$(10 - x) \cdot \frac{10 - x}{10} = \frac{(10 - x)^2}{10}$$

liitrit äädikhapet. Pärast vee lisamist on anumas äädikhapet

$$\frac{(10 - x)^2}{10 \cdot 10} \cdot 100 \%.$$

Vastavalt lähteandmetele $(10 - x)^2 = 64$; $x = 2$.

Vastus. Kummalgi korral kallati ära 2 liitrit.

Näide 3. Ühes anumas on piirituse ja vee segu, kus piirituse ja vee suhe on 2 : 3; teises anumas 3 : 7. Mitu pange segu tuleks võtta kummastki anumast, et saada 12 pange segu, mida iseloomustab suhe 3 : 5?

Lahendus. Oletame, et esimesest anumast võetakse x pange segu, siis on seal $\frac{2}{5}x$ pange piiritust. Teisest anumast võetakse siis 12 - x pange segu, milles on $\frac{3}{10}(12 - x)$ pange piiritust. Uus segu peab sisaldama piiritust $\frac{3}{8} \cdot 12 = \frac{9}{2}$ pange.

Võrrand: $\frac{2}{5}x + \frac{3}{10}(12 - x) = \frac{9}{2}$; $x = 9$.

Vastus. Esimesest anumast tuleb võtta 9 ja teisest anumast 3 pange segu.

Näide 4. Kahekohalise arvu kümneliste number on üheliste numbrist kaks korda suurem. Kui numbrite kohad vahetada, saadakse esialgsest arvust 36 võrra väiksem arv. Leidke esialgne arv.

Lahendus. Kahekohalist arvu $\overline{xy}$ võib esitada kujul $\overline{xy} = 10x + y$ ja arvu $\overline{yx} = 10y + x$ ülesande tingimuste kohaselt

$$\begin{cases} x = 2y \\ 10x + y = 10y + x + 36. \end{cases}$$

Lahendades $x = 9$; $y = 4$.

Vastus. Esialgne arv on 84.

Näide 5. Missugune kahekohaline täisarv väheneb 14 korda, kui arvu viimane number maha tõmmata?

Lahendus. Olgu otsitav arv $\overline{xy}$. Kui tõmmata maha y, siis arv x on 14 korda väiksem lähtearvust. Seega

$$10x + y = 14x \quad \text{ja} \quad 4x = y.$$

Et y on ühekohaline arv, siis $x < 3$. Kui $x = 1$, siis $y = 4$; kui $x = 2$, siis $y = 8$.

Vastus. Ülesande tingimusi rahuldavad arvud 14 ja 28.

Näide 6. Kahkohalise arvu kümneliste number on üheliste numbrist 2 võrra väiksem. Leida see arv, teades, et ta on suurem kui 21 ja väiksem kui 38.

Lahendus. Olgu arv $\overline{xy} = 10x + y$, siis

$$\begin{cases} x + 2 = y \\ 21 < 10x + y < 38. \end{cases}$$

Asendades

$$21 < 10x + x + 2 < 38$$

$$19 < 11x < 36; \quad 1\frac{8}{11} < x < 3\frac{3}{11}$$

x väärtusteks sobivad 2 ja 3. Olgu $x_1 = 2$, siis $y_1 = 4$. Kui $x_2 = 3$, siis $y_2 = 5$.

Vastus. Need arvud on 24 ja 35.

Näide 7. Kiirrong läbib tunnis 10 km rohkem kui postirong. Kiirrongil kulub 160 km läbimiseks 2 tundi vähem aega kui postirongil 180 km läbimiseks. Mitu kilomeetrit läbib kiirrong tunnis?

Lahendus. Olgu kiirrongi kiirus $x\ \frac{km}{h}$, siis postirongi kiirus on $x - 10\ \frac{km}{h}$. Kiirrong sõidab $\frac{160}{x}$ tundi, postirong $\frac{180}{x - 10}$ tundi. Kuna ajavahe on 2, siis saame võrrandi

$$\frac{160}{x} + 2 = \frac{180}{x - 10},$$

millest $x = 40$.

Vastus. Kiirrongi kiirus on $40\ \frac{km}{h}$.

Näide 8. Omnibuss väljus linnast A linna B, mille vahemaa on 150 km. Kolm tundi pärast väljumist oli omnibuss sunnitud peatuma 20 minutit. Seejärel läbis ta ülejäänud tee 6 km võrra suurema tunnikiirusega ja jõudis linna B hilinemiseta. Leida omnibussi esialgne kiirus.

Lahendus. Olgu bussi esialgne kiirus $x\ \frac{km}{h}$. 3 tunni pärast on buss läbinud $3x$ km ja jääb sõita $(150 - 3x)$ km. Selle tee läbimiseks kulus aega $\frac{150 - 3x}{x + 6}$ tundi, kuigi kogu tee läbimiseks oleks pidanud kuluma $\frac{150}{x}$ tundi. Saame võrrandi

$$\frac{150}{x} = 3 + \frac{1}{3} + \frac{150 - 3x}{x + 6},$$

millest $x = 30$.

Vastus. Omnibussi esialgne kiirus oli $30 \frac{km}{h}$.

<u>Näide 9</u>. Paat läbis 15 km pärivoolu ja 12 km vastuvoolu ning kulutas selleks sama palju aega, kui tal oleks vaja olnud 28 km läbimiseks seisvas vees. Leida paadi kiirus seisvas vees, kui voolu kiirus on $2 \frac{km}{h}$.

Lahendus. Olgu paadi kiirus seisvas vees $x \frac{km}{h}$, siis

$$\frac{15}{x + 2} + \frac{12}{x - 2} = \frac{28}{x},$$

millest $x = 8$.

Vastus. Paadi kiirus seisvas vees on $8 \frac{km}{h}$.

<u>Näide 10</u>. Kaks rongi väljuvad linnadest, mille vahemaa on 360 km, ja sõidavad teineteisele vastu. Kui teine rong väljuks jaamast 1,5 tundi varem esimesest, kohtuksid nad poolel teel. Kui nad väljuksid üheaegselt, oleks pärast 5-tunnist sõitu nende vahemaa 90 km. Leida kummagi rongi kiirus.

Lahendus. Olgu esimese rongi kiirus $x \frac{km}{h}$, teisel $y \frac{km}{h}$. Poolel teel kohtumisel on esimene rong olnud teel $\frac{180}{x}$ tundi, teine $\frac{180}{y}$ tundi. Et teisel rongil kulub aega 1,5 tundi rohkem, siis

$$\frac{180}{y} - \frac{180}{x} = 1,5.$$

Pärast 5-tunnist sõitu on rongid läbinud 270 km. Seega

$$5x + 5y = 270.$$

Süsteemist

$$\begin{cases} \frac{180}{y} - \frac{180}{x} = 1,5 \\ x + y = 54 \end{cases}$$

$x = 30$ ja $y = 24$.

Vastus. Kiirused on 30 km ja 24 km tunnis.

Näide 11. Kaks kommunistlike noorte brigaadi lõpetasid koos töötades puude istutamise katseaias 4 päevaga. Mitu päeva oleks kulunud selleks tööks kummalgi brigaadil eraldi, kui üks brigaadidest oleks võinud lõpetada puude istutamise 6 päeva kiiremini kui teine?

Lahendus. Oletame, et ühel brigaadil kuluks x päeva, teisel (x + 6) päeva. Ühe päevaga tehakse tööst vastavalt $\frac{1}{x}$ ja $\frac{1}{x+6}$ osa, koos töötades aga $\frac{1}{4}$ osa. Saame võrrandi

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+6} = \frac{1}{4},$$

millest x = 6.

Vastus. Päevi kuluks 6 ja 12.

Näide 12. Kaks brigaadi koos töötades lõpetaksid tee remondi 6 päevaga. Esimesel brigaadil kuluks kogu teest 40% remontimiseks 2 päeva rohkem kui teisel $13\frac{1}{3}$ % remontimiseks. Mitu päeva kuluks kummalgi brigaadil üksinda töötades?

Lahendus. Kulugu tööks esimesel brigaadil üksinda töötades x päeva, teisel y päeva. Vastavalt ülesande tekstile saame süsteemi

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \\ \frac{40x}{100} - \frac{40y}{300} = 2, \end{cases}$$

millest x = 10; y = 15.

Vastus. 10 päeva, 15 päeva.

§ 18. Logaritm- ja eksponentvõrrandid

1. **Logaritmi definitsioon ja selle rakendusi.** Positiivse arvu N **logaritmiks** alusel a ($0 < a \neq 1$) nimetatakse astendajat x, millega alust a astendades saadakse arv N.

Kui $a^x = N$, siis $x = \log_a N$.

Kui arvu N logaritmi tähistamiseks alusel a kasutada $\log_a N$, siis saame samasuse

$$a^{\log_a N} = N.$$

Lähtudes logaritmi definitsioonist on võimalik lahendada kolme tüüpi võrrandeid: 1) leida arvu logaritmi, kui antud on alus; 2) leida logaritmitav, kui antud on alus ja logaritm; 3) leida alus, kui antud on arv ja logaritm.

Näide 1. Kasutades logaritmi definitsiooni leiame $\log_6 36$; $\log_2 \frac{1}{8}$ ja $\log_{\frac{1}{2}} 4$:

1) $\log_6 36 = 2$, sest $6^2 = 36$;

2) $\log_2 \frac{1}{8} = -3$, sest $2^{-3} = \frac{1}{8}$;

3) $\log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$, sest $(\frac{1}{2})^{-2} = 4$;

4) $\log_2 \log_2 16 = \log_2 4 = 2$.

Näide 2. Kasutades logaritmi definitsiooni leida logaritmitav:

1) $\log_2 x = 5$; kuna $2^5 = x$, siis $x = 32$;

2) $\log_{\frac{1}{3}} x = -3$; $(\frac{1}{3})^{-3} = x$, siis $x = 27$;

3) $\log_{\sqrt{2}} x = 4$; $(\sqrt{2})^4 = x$; $x = 4$.

Näide 3. Leida logaritmi alus:

1) $\log_x 8 = 3$; $x^3 = 8$; $x = 2$;

2) $\log_x \frac{1}{81} = 4$; $x^4 = \frac{1}{81}$; $x = \frac{1}{3}$;

3) $\log_x \sqrt{8} = \frac{3}{4}$; $x^{\frac{3}{4}} = \sqrt{8}$; $x = 4$.

Näide 4. Kasutades samasust $a^{\log_a N} = N$, arvutame:

1) $2^{\log_2 8} = 8$;

2) $36^{\log_6 2} = 6^{2 \log_6 2} = 6^{\log_6 4} = 4$;

3) $81^{0,5 \log_9 7} = (9^2)^{0,5 \log_9 7} = 7$;

4) $5^{\log_5 10 - 1} = 5^{\log_5 10} \cdot 5^{-1} = \frac{10}{5} = 2$;

5) $(3^{\log_3 5})^2 = 5^2 = 25$.

2. L o g a r i t m i o m a d u s i. Lähtume eeldusest, et $x > 0$, $y > 0$ ja $(0 < a \neq 1)$, siis kehtivad järgmised omadused:

1. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$.

2. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$.

3. $\log_a x^n = n \log_a x$.

4. $\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_a x$.

5. $\log_a 1 = 0$.

6. $\log_a a = 1$.

7. $\log_b x = \frac{1}{\log_a b} \cdot \log_a x$.

8. $\log_a b \cdot \log_b a = 1$.

Omadus 7 võimaldab üle minna ühelt aluselt teisele. Üleminekul naturaallogaritmilt kümnendlogaritmile kasutatakse ka ligikaudset seost

$$\log N \approx 0{,}4343 \ln N.$$

9. Omadusest 7 järeldub, et

$$\log_{a^k} N = \frac{\log_a N}{\log_a a^k} = \frac{\log_a N}{k}.$$

Näide. 1) $\log_{a^2} N = \frac{\log_a N}{2}$; 2) $\log_{\sqrt{a}} N = 2 \log_a N$;

3) $\log_{\frac{1}{a}} N = - \log_a N$.

3. L o g a r i t m v õ r r a n d. Võrrandit, milles tundmatu esineb logaritmitavas või logaritmi aluses, nimetatakse l o g a r i t m v õ r r a n d i k s.

Logaritmvõrrandi lahendamiseks puudub üldine meetod. Kasutatakse logaritmi definitsiooni ja potentseerimist.

1° Logaritmi definitsiooni kasutamine.

Näide 1. Lahendada võrrand

$$\log_2 (5x + 1) = 3.$$

Lahendus. Määramispiirkonna leiame tingimusest $5x+1 > 0$, millest $x > -\frac{1}{5}$. Logaritmi definitsioonist järeldub, et

$5x + 1 = 2^3$ ja $x = \frac{7}{5}$.

Lahendit kontrollida iseseisvalt.

Vastus. $x = \frac{7}{5}$.

Näide 2. Lahendada võrrand

$$\log_{x-1}(x^2 - 5x + 10) = 2.$$

Lahendus. Määramispiirkonnaks on $]1; \infty[$. Definitsiooni põhjal $x^2 - 5x + 10 = (x - 1)^2$; $3x = 9$; $x = 3$.

Vastus. $x = 3$.

2° Potentseerimine.

Potentseerimiseks nimetatakse teisendust, mis seisneb võrrandilt

$$\log_{\varphi(x)} f(x) = \log_{\varphi(x)} g(x) \qquad (1)$$

üleminekus võrrandile

$$f(x) = g(x). \qquad (2)$$

Olgu x_0 võrrandi (1) lahend, s.t. et:

1) $\varphi(x_0)$ on positiivne ja ei võrdu ühega;

2) arvud $f(x_0)$ ja $g(x_0)$ on positiivsed;

3) $f(x_0) = g(x_0)$.

Viimasest tingimusest selgub, et x_0 on võrrandi (2) lahendiks ja võrrand (2) võrrandi (1) järelduseks. Seega lahendite kadu ei toimu. Küll võib võrrandil (2) olla lahendeid, mis ei ole võrrandi (1) lahendiks. Siit tekib lahendi kontrollimise nõue, et eraldada võõrlahendid.

Näide 3. Lahendada võrrand

$$\log_2 x = \log_2 (6 - x^2).$$

Lahendus. Potentseerides saame võrrandi

$$x = 6 - x^2,$$

mille lahendid on $x_1 = 2$ ja $x_2 = -3$.

Kontrollimine näitab, et $x_2 = -3$ on võõrlahend. Sama tulemuseni jõuame määramispiirkonda kasutades.

Vastus. $x = 2$.

3° Ruutvõrrandiks taanduvad logaritmvõrrandid.

Näide 4. Lahendada võrrand

$$\frac{1}{5 - \log x} + \frac{1}{1 + \log x} = 1.$$

Lahendus. Määramispiirkonda ei kuulu $x = 10^5$, $x = \frac{1}{10}$ ja $x < 0$. Pärast ühise nimetaja leidmist saame ruutvõrrandi

$$\log^2 x - 5 \log x + 6 = 0,$$

mille lahenditest $(\log x)_1 = 2$, $(\log x)_2 = 3$ leiame logaritmi definitsiooni kasutades $x_1 = 100$, $x_2 = 1000$.

Vastus. $x_1 = 100$; $x_2 = 1000$.

4° Logaritmi omaduste kasutamine.

Näide 5. Lahendada võrrand

$$\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7.$$

Lahendus. Logaritmi alused avaldame astmetena

$$\log_{2^4} x + \log_{2^2} x + \log_2 x = 7.$$

Kasutades omadust 9 leiame, et

$$\frac{\log_2 x}{4} + \frac{\log_2 x}{2} + \log_2 x = 7,$$

millest $7 \log_2 x = 28$; $\log_2 x = 4$; $x = 16$.

Vastus. $x = 16$.

Näide 6. Lahendada võrrand

$$\log_4 x + \log_x 4 = 2.$$

Lahendus. Kasutame omadust 8, siis

$$\log_x 4 = \frac{1}{\log_4 x}$$

ja võrrand omandab kuju

$$\log_4 x + \frac{1}{\log_4 x} = 2,$$

millest

$$\log_4^2 x - 2 \log_4 x + 1 = 0$$

ja $\log_4 x = 1$, $x = 4$.

Vastus. $x = 4$.

4. E k s p o n e n t v õ r r a n d. Võrrandit, milles tundmatu esineb astendajas, nimetatakse e k s p o n e n t v õ r r a n d i k s. Võrrandi lahendamiseks puudub algoritm, seepärast vaatleme näiteid.

1° Logaritmimisvõte.

Näide 1. Lahendada võrrand

$$2^x \cdot 3^{x-1} \cdot 5^{x+2} = 4.$$

Lahendus. Logaritmides alusel 2

$$x + (x - 1) \log_2 3 + (x + 2) \log_2 5 = 2,$$

millest

$$x = \frac{2 + \log_2 3 - 2 \log_2 5}{1 + \log_2 3 + \log_2 5} .$$

Näide 2. Lahendada võrrand

$$x^{\log x+2} = 1000.$$

Lahendus. Logaritmides

$$(\log x + 2) \log x = 3$$

ja lahendame ruutvõrrandi

$$\log^2 x + 2 \log x - 3 = 0,$$

millest

$$(\log x)_1 = -3; \quad (\log x)_2 = 1; \; x_1 = 0{,}001; \; x_2 = 10.$$

Vastus. $x_1 = 0{,}001$, $x_2 = 10$.

2° Logaritmi samasuse kasutamine.

Näide 3. Lahendada võrrand

$$x^{\log_x (x^2+3)} = 4.$$

Lahendus. Samasusest järeldame, et

$$x^2 + 3 = 4,$$

millest $x^2 = 1$ ja $x_1=1$; $x_2 = -1$.

Vastus. Lahendid puuduvad, sest 1 ja (−1) ei saa olla logaritmi aluseks.

3° Võrdsete alustega astmed.

Näide 4. Lahendada võrrand

$$5^{x^6-9x^3+11} = 125.$$

Lahendus. Sama võrrandi võime esitada kujul

$$5^{x^6- 9x^3+11} = 5^3.$$

Võrdsete astendajatega astmete võrdsusest järeldub astendajate võrdsus ning

$$x^6 - 9x^3 + 11 = 3; \; x^6 - 9x^3 + 8 = 0; \quad x_1^3 = 1;$$

$$x_2^3 = 8; \quad x_1 = 1; \quad x_2 = 2.$$

Vastus. $x_1 = 1$; $x_2 = 2$.

Näide 5. Lahendada võrrand

$$a^{(x-1)(x+2)} = 1.$$

Lahendus. Kuna $a^{(x-1)(x+2)} = a^0$, siis $(x - 1)(x + 2) = 0$ ja $x_1 = 1$; $x_2 = -2$.

Vastus. $x_1 = 1$; $x_2 = -2$.

Näide 6. Lahendada võrrand

$$\frac{1}{8} \cdot 4^{2x-3} = \left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x}.$$

Lahendus. $2^{-3} \cdot 2^{2(2x-3)} = 2^{\frac{5}{2}x}$, $2^{4x-9} = 2^{\frac{5}{2}x}$; $\frac{3}{2}x = 9$, $x = 6$.

Vastus. $x = 6$.

4° Ruutvõrrandiks taanduvad eksponentvõrrandid.

Näide 7. Lahendada võrrand

$$2 \cdot 3^{2x} - 5 \cdot 3^x - 1323 = 0.$$

Lahendus. Asendades $y = 3^x$ tekib ruutvõrrand

$$2y^2 - 5y - 1323 = 0,$$

millest $y_1 = 27$; $y_2 = -24\frac{1}{2}$.

Arvestades lähtetundmatut

1) $3^x = 27$; $3^x = 3^3$; $x = 3$;

2) $3^x \neq -24\frac{1}{2}$ (lahendit ei ole).

Vastus. $x = 3$.

Näide 8. Lahendada võrrand

$$4^x + 2^{x+1} = 80.$$

Lahendus. $4^x = 2^{2x}$, siis võrrandist

$$2^{2x} + 2 \cdot 2^x - 80 = 0; \quad 2^x = 8,$$

millest $x = 3$ ja $2^x = -10$ (ei sobi).

Vastus. $x = 3$.

5°. Sulgude ette toomise võte.

Näide 9. Lahendada võrrand

$$3^{x+1} + 3^x = 108.$$

Lahendus. $3^x(3 + 1) = 108$; $3^x = 27$; $x = 3$.

Vastus. $x = 3$.

Näide 10. Lahendada võrrand

$$2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} = 448.$$

Lahendus. $2^{x-3}(2^2 + 2 + 1) = 448$; $2^{x-3} = 64$; $x - 3 = 6$; $x = 9$.

Vastus. $x = 9$.

5. V õ r r a n d i s ü s t e e m i d. Vaatleme mõningaid erijuhte.

Näide 1. Lahendada süsteem

$$\begin{cases} 9^{x+y} = 729 \\ 3^{x-y-1} = 1. \end{cases}$$

Lahendus. Teisendame lähtesüsteemi kujule

$$\begin{cases} 3^{2(x+y)} = 3^6 \\ 3^{x-y-1} = 3^0, \end{cases}$$

millest

$$\begin{cases} 2(x + y) = 6 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2 \\ y = 1. \end{cases}$$

Vastus. (2; 1).

Näide 2. Lahendada süsteem

$$\begin{cases} \log_x \log_2 \log_x y = 0 \\ \log_y 9 = 1. \end{cases}$$

Lahendus. Süsteemi esimest võrrandit potentseerides

$$\log_2 \log_x y = 1; \quad \log_x y = 2; \quad x^2 = y.$$

Teisest võrrandist leiame, et $y = 9$.

Süsteemist

$$\begin{cases} x^2 = y \\ y = 9 \end{cases}$$

järeldub, et

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 9. \end{cases}$$

Vastus. (3; 9).

Näide 3. Lahendada süsteem

$$\begin{cases} x^{x^2-y^2+8x+1} = 1 \\ 2^y = 8 \cdot 2^x. \end{cases}$$

Lahendus. Teisest võrrandist $2^y = 2^{x+3}$ selgub, et $y = x + 3$. Esimesest võrrandist saame 2 võimalust:

1) $x = 1$; 2) $x^2 - y^2 + 8x + 1 = 0$

ja nii tekib 2 süsteemi

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = x + 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - y^2 + 8x + 1 = 0 \\ y = x + 3. \end{cases}$$

Esimesest süsteemist $x = 1$; $y = 4$. Teisest süsteemist

$x^2 - (x + 3)^2 + 8x + 1 = 0$; $2x - 8 = 0$; $x = 4$; $y = 7$.

Vastus. (1; 4); (4; 7).

Näide 4. Lahendada süsteem

$$\begin{cases} \log(x - y) - 2 \log 2 = 1 - \log (x + y) \\ \log x - \log 3 = \log 7 - \log y. \end{cases}$$

Lahendus. Määramispiirkond on $x > y > 0$. Teisendame süsteemi, siis

$$\begin{cases} \log (x - y) + \log (x + y) = 1 + 2 \log 2 \\ \log x + \log y = \log 7 + \log 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log (x^2 - y^2) = \log 40 \\ \log (xy) = \log 21 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - y^2 = 40 \\ xy = 21. \end{cases}$$

Süsteemi lahendades $x_1 = 7$, $y_1 = 3$, $x_2 = -7$, $y_2 = -3$. Viimane lahenditepaar ei kuulu määramispiirkonda.

Vastus. (7; 3).

Näide 5. Lahendada süsteem

$$\begin{cases} y^{x^2 -2x-15} = 1 \\ x + y = 7. \end{cases}$$

Lahendus. Samaväärne süsteem on

$$\begin{cases} (7 - x)^{x^2-2x-15} = 1 \\ y = 7 - x. \end{cases}$$

Esimese võrrandi lahendid saame tingimusest

1) $7 - x = 1$;

2) $7 - x \neq 0$, $x^2 - 2x - 15 = 0$

ja vastavad süsteemid on:

$$\begin{cases} 7 - x = 1 \\ y = 7 - x \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} x^2 - 2x - 15 = 0 \\ y = 7 - x. \end{cases}$$

Vastus. (-3; 10); (5; 2); (6; 1).

Kontrollküsimused

1. Mida nimetatakse võrrandi määramispiirkonnaks?
2. Mis on ühe tundmatuga võrrandi lahendiks?
3. Millal on kaks võrrandit samaväärsed?
4. Milliseid võrrandi teisendusi nimetatakse samasusteisendusteks?
5. Millal nimetatakse võrrandit eelmise võrrandi järelduseks?
6. Millist ruutvõrrandit nimetatakse täielikuks ruutvõrrandiks?
7. Täieliku ruutvõrrandi lahendivalem.
8. Millist avaldist nimetatakse ruutvõrrandi diskriminandiks?
9. Kuidas sõltuvad ruutvõrrandi lahendid diskriminandist?
10. Millist ruutvõrrandit nimetatakse taandatud ruutvõrrandiks?
11. Taandatud ruutvõrrandi lahendivalem.
12. Sõnastage Viete'i teoreem. Millal kehtib?
13. Tooge näiteid mittetäielike ruutvõrrandite kohta, Kuidas neid lahendatakse?
14. Kuidas saame ruutkolmliiget lahutada tegureiks, kui teada on nullkohad?
15. Millised võimalused on ruutvõrrandi koostamiseks antud lahendite põhjal?
16. Millist võrrandit nimetatakse murdvõrrandiks?
17. Millist võrrandit nimetatakse kaheliikmeliseks võrrandiks?
18. Millised võimalused on kaheliikmelise võrrandi lahendamiseks?
19. Millist võrrandit nimetatakse biruutvõrrandiks?
20. Biruutvõrrandi lahendite omadusi.
21. Millist võrrandit nimetatakse kolmeliikmeliseks võrrandiks?
22. Kuidas lahendatakse kolmeliikmeline võrrand?
23. Millist võrrandit nimetatakse juurvõrrandiks?
24. Kuidas lahendatakse absoluutväärtusi sisaldav võrrand?

25. Kahe tundmatuga võrrandisüsteemi üldkuju.
26. Mida nimetatakse võrrandisüsteemi lahendiks?
27. Millal on kaks võrrandisüsteemi samaväärsed?
28. Millist võrrandisüsteemi nimetatakse antud süsteemi järelduseks?
29. Võrrandisüsteemi lahendamise võtteid.
30. Millist ruutvõrrandisüsteemi nimetatakse homogeenseks?
31. Logaritmi definitsioon.
32. Milliseid ülesandeid on võimalik lahendada lähtudes logaritmi definitsioonist?
33. Logaritmi omadusi.
34. Millist võrrandit nimetatakse logaritmvõrrandiks?
35. Logaritmvõrrandi lahendamise võtteid.
36. Millist võrrandit nimetatakse eksponentvõrrandiks?
37. Eksponentvõrrandi lahendamise võtteid.

VI VÕRRATUSED

§ 19. Võrratuse mõiste

1. Arvvõrratuse mõiste. Kahe reaalarvu a ja b võrdlemisel võib esineda kolm võimalust: a ja b on võrdsed ($a = b$), a on suurem kui b ($a > b$), a on väiksem kui b ($a < b$). On teada, et

$$a = b \Leftrightarrow a - b = 0,$$
$$a > b \Leftrightarrow a - b > 0,$$
$$a < b \Leftrightarrow a - b < 0.$$

Kui kaks arvu või arvavaldist on ühendatud märgiga "suurem" (>) või "väiksem" (<), siis kõneldakse, et on antud arvvõratus. Arvvõrratusteks on ka sellised tähti sisaldavad võrratused, kus tähtede all mõeldakse kindlaid arve nagu π, e.

Kui võrratusmärki kasutatakse koos võrdusmärgiga, siis on tegemist mitterange võrratusega. Kirjutis $a \leq b$ tähendab, et $a < b$ või $a = b$. Sel juhul öeldakse ka, et a on mittesuurem kui b. Mitterange võrratus on samuti $a \geq b$, mida loetakse, et a on mitteväiksem kui b. Seega

$$a \leq b \Leftrightarrow a < b \vee a = b,$$
$$a \geq b \Leftrightarrow a > b \vee a = b.$$

Võrratused kujul $a > b$ ja $a < b$ on r a n g e d võrratused.

Avaldis kujul $a < b < c$ kannab a h e l v õ r r a t u s e nimetust. Kirjutis $a < b < c$ tähendab, et $a < b$ ja $b < c$, seega

$a < b < c \Longleftrightarrow a < b \wedge b < c.$

Arvvõrratused võivad olla tõesed või väärad. Võrratus on tõene, kui ta kujutab enesest tõest lauset. Nii on tõesed võrratused näiteks $2 + 3 \cdot 5 > 10 - 2 \cdot 3$, $7e > 10$, $4 \cdot (-8) \leq 2 \cdot 12$, $-2 \leq 0$. Väärad võrratused on näiteks $4 \cdot 5 - 8 < 3 \cdot (-2)$, $\pi + 3 < 6$.

2. A r v v õ r r a t u s t e o m a d u s e d. Arvvõrratuste korral kehtivad järgmised omadused.

1. Kui $a < b$, siis $b > a$.
2. Kui $a < b$ ja $b < c$, siis $a < c$ (transitiivsus).
3. Kui $a < b$, siis ka $a + m < b + m$, kus m on suvaline reaalarv.
4. Kui $a < b$, siis $m > 0$ korral $am < bm$ ja $m < 0$ korral $am > bm$.
5. Kui $a < b$ ja $c < d$, siis $a + c < b + d$ (samapidiseid võrratusi võib liikmeti liita).
6. Kui $a < b$ ja $c > d$, siis $a - c < b - d$ (vastupidiseid võrratusi võib liikmeti lahutada, kusjuures jääb selle võrratuse, millest lahutatakse, märk).

3. A l g e b r a l i s e d v õ r r a t u s e d. Võrratuses võib esineda üks või mitu tundmatut. Nii on tundmatuid sisaldavad võrratused ehk a l g e b r a l i s e d v õ r r a t u s e d näiteks $x > 2x + 1$, $x + y < xy$, $x^2 > 0$. Üldjuhul märgime algebralisi võrratusi kujul $f_1 < f_2$ või $f_1 > f_2$, kus f_1 ja f_2 on võrratuses esinevad muutujaid sisaldavad matemaatilised avaldised.

Algebralise võrratuse $f_1 < f_2$ m ä ä r a m i s p i i r k o n n a k s nimetatakse vastavate matemaatiliste avaldiste f_1 ja f_2 määramispiirkondade ühisosa. Algebraline võrratus võib selles esinevate tundmatute asendamisel arvulise väärtusega vaadeldava võrratuse määramispiirkonnast muutuda tõeseks või vääraks arvvõrratuseks. Näiteks võrratus

$$abc < a + b + c$$

on tõene, kui $a = 1$, $b = 1$ ja $c = 2$, kuid väär, kui $a = 2$, $b = 2$ ja $c = 3$.

Muutuja väärtust, mis kuulub võrratuse määramispiirkonda ja muudab võrratuse tõeseks, nimetatakse võrratuse lahendiks. Võrratusel võib olla üks, mitu, lõpmata palju lahendeid või lahendid hoopiski puududa. Näiteks on võrratusel $\sqrt{x - 1} + \sqrt{1 - x} \geqslant 0$ üks lahend $x = 1$, võrratusel $3x > 45$ aga lõpmata palju lahendeid, n.o. $x > 15$. Võrratusel $(x - 1)^2 < 0$ aga puuduvad lahendid.

Võrratuse lahendamine tähendab selle kõigi lahendite leidmist.

Kui algebraline võrratus on tõene kogu määramispiirkonnas, siis nimetatakse seda võrratust samasuseks. Sellised on näiteks võrratused

$$a^2 + b^2 \geqslant 0, \quad \frac{a + b}{2} \geqslant \sqrt{ab}.$$

Kahest võrratusest

$$f_1 < f_2$$

ja

$$g_1 < g_2$$

osutub teine esimese järelduseks, kui esimese võrratuse iga lahend on ka teise võrratuse lahendiks. Kaht võrratust nimetatakse samaväärseteks, kui kumbki neist on ülejäänu järelduseks. Näiteks $x^2 > 1$ on võrratuse $x > 1$ järelduseks, kuid nad ei ole samaväärsed, sest $x > 1$ ei ole võrratuse $x^2 > 1$ järelduseks (võrratuse $x^2 > 1$ lahend näiteks $x = -2$ ei ole võrratuse $x > 1$ lahendiks). Samaväärsed võrratused on näiteks $x > 1$ ja $x^3 > 1$. Samaväärsete võrratuste lahendihulgad ühtivad. Nii on samaväärsed ka võrratused $x^2 + 1 > 0$ ja $(x - 3)^2 < 0$, kuna kummagi võrratuse lahendihulk on tühi.

Võrratuse lahendamisel asendatakse antud võrratus samaväärse, kuid lihtsama võrratusega, kuni saadakse võrratus, mille lahendid on hõlpsasti leitavad. Antud võrratuse asendamine samaväärse võrratusega tugineb võrratuse omadustest tulenevatele, põhiliselt järgmistele teisendustele: 1) võrratuse liikme kandmine võrratuse ühelt poolt teisele poole, muutes ülekantava liikme märgi vastupidiseks, 2) võrratuse mõlema poole korrutamine (jagamine) ühe ja sama nullist erineva arvuga, jättes võrratuse märgi samaks positiivse arvuga korrutamisel (jagamisel) ning muutes võrratuse märgi vastupidiseks negatiivse arvuga korrutamisel (jagamisel). Siit järeldub, et võrratuse pooli ei tohi korrutada (jagada) tundmatut sisaldava avaldisega.

Alati ei õnnestu aga lahendatavat võrratust asendada samaväärsega, vaid tuleb ta asendada antud võrratusest järelduva võrratusega. Sel juhul võib uue võrratuse lahendite hulk ja ka määramispiirkond olla laiem. Seetõttu on iga võrratuse lahendamise üks etapp selle võrratuse määramispiirkonna leidmine ning selle arvestamine edaspidises lahenduskäigus.

Näiteks on võrratus $x + \sqrt{x-2} < 5 + \sqrt{x-2}$ samaväärne võrratusega $x + \sqrt{x-2} - \sqrt{x-2} < 5$. Viimasest liikmete koondamisel saadav võrratus $x < 5$ ei ole aga esialgsega samaväärne.

Samaväärseks osutuvad nad esialgse võrratuse määramispiirkonnas $x - 2 \geqslant 0$ ehk $x \geqslant 2$. Arvestades nüüd lähtevõrratuse määramispiirkonda, saame antud võrratuse lahenditeks $2 \leqslant x < 5$.

§ 20. Erikujuliste ühe tundmatuga võrratuste lahendamine

1. L i n e a a r v õ r r a t u s e d. Võrratust kujul $ax + b > 0$ (aga ka $ax + b < 0$, $ax + b \geqslant 0$, $ax + b \leqslant 0$) nimetatakse l i n e a a r v õ r r a t u s e k s ehk esimese astme võrratuseks. Kui $a > 0$, siis

$$ax + b > 0 \Longleftrightarrow x > -\frac{b}{a}.$$

Kui aga $a < 0$, siis

$$ax + b > 0 \Longleftrightarrow x < -\frac{b}{a}.$$

Et lineaaravaldise $ax + b$ määramispiirkond on alati $]-\infty, +\infty[$, siis lineaarvõrratuste lahendamisel seda tavaliselt välja ei kirjutata.

Näide 1. Lahendada võrratused:

1) $-4x + 13 < 1 - (2 - 3x)$,

2) $x - 3 < -2 + x$,

3) $x - 3 > -2 + x$.

Lahendus.

1. Kandes võrratuses

$$-4x + 13 < 1 - (2 - 3x)$$

tundmatut x sisaldavad liikmed võrratuse vasakule poolele ja vabaliikmed paremale, saame võrratuse

$$-7x < -14,$$

millest $x > 2$. Seega on antud võrratuse lahenditeks kõik arvust 2 suuremad reaalarvud.

Vastus. $x > 2$ ehk $]2, +\infty[$.

2. Kandes võrratuses

$$x - 3 < -2 + x$$

tundmatut x sisaldavad liikmed võrratuse vasakule ja vabaliikmed paremale poolele, saame võrratuse

$$x - x < -2 + 3,$$

millest liikmete koondamisel saame võrratuse

$$0 < 1,$$

mis on tõene arvvõrratus sõltumata tundmatu x väärtusest. Seega sobib antud võrratuse lahendiks iga reaalarv.

Vastus. $-\infty < x < +\infty$ ehk $]-\infty, +\infty[$.

3. Võrratus

$$x - 3 > -2 + x$$

on samaväärne võrratusega

$$x - x > -2 + 3,$$

millest

$$0 > 1.$$

Viimane on väär arvvõrratus, sõltumata tundmatu x väärtusest. Seega on antud võrratus väär **tundmatu x iga** väärtuse korral. Järelikult võrratusel lahendid puuduvad.

Vastus. Lahendid puuduvad ehk lahendite hulk on $\emptyset$.

Näide 2. Kui kaugele linna sadamast tuleks rajada ujula, et laeval edasi-tagasi sõiduks ei kuluks üle 15 minuti, kui laeva kiirus seisvas vees on 20 $\frac{km}{h}$ ning voolu kiirus on 4 $\frac{km}{h}$?

Lahendus. Tähistades otsitava kauguse tähega x, saame ülesande tingimuste põhjal koostada võrratuse

$$\frac{x}{24} + \frac{x}{16} \leq \frac{1}{4}.$$

Korrutades võrratust murdude ühise nimetajaga 48, saame võrratuse

$$2x + 3x \leq 12,$$

millest $5x \leq 12$ ehk $x \leq 2,4$.

Vastus. Ujula tuleks rajada linna sadamast mitte kaugemale kui 2,4 km.

2. Lineaarvõrratusesüsteem. Kui on vaja leida kahe või enama võrratuse ühised lahendid, siis öeldakse, et tuleb lahendada võrratusesüsteem. Võrratusesüsteemi lahendiks on võrratuste ühised lahendid ehk võrratusesüsteemi lahendihulgaks on võrratuste lahendihulkade ühisosa. Seega tuleb võrratusesüsteemi lahendamisel lahendada esialgu iga võrratus eraldi ning seejärel leida kõigi võrratuste ühised lahendid.

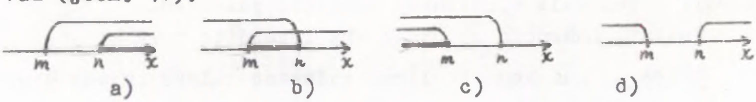
Kahest võrratusest koosnevad ühe tundmatuga lineaarvõrratusesüsteemid on näiteks

$$\begin{cases} 3x - 1 > 2 \\ 2x + 3 < 4, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 5 > 41 \\ 4x - 1 \geq 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x - 3 > 1 + x \\ 3 - 18x < 4x - 30. \end{cases}$$

Kahest võrratusest koosneva ühe tundmatuga lineaarvõrratusesüsteemi lahendamisel jõuame alati üheni järgmistest võimalustest:

$$1)\begin{cases} x > m \\ x > n, \end{cases} \qquad 2)\begin{cases} x > m \\ x < n, \end{cases} \qquad 3)\begin{cases} x < m \\ x < n, \end{cases} \qquad 4)\begin{cases} x < m \\ x > n. \end{cases}$$

Kui $m < n$, saame esimesel juhul võrratusesüsteemi lahendiks $x > n$ ehk $]n, \infty[$ (joon. 1a), teisel juhul — $m < x < n$ ehk $]m, n[$ (joon. 1b), kolmandal juhul — $x < m$ ehk $]-\infty, m[$ (joon. 1c) ja neljandal juhul lahendid puuduvad (joon. 1d).



Joon. 1

Näide. Lahendada võrratusesüsteemid:

1) $\begin{cases} 5x - 3 > 1 + x \\ 3 - 18x < 4x - 30, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x + 7 > 2x + 13 \\ 3x - 8 < 2x + 1, \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x > 4x + 6 \\ 4x + 3 < 2x + 1, \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2(x - 3) - 1 < 5 \\ \frac{3x}{3} - 7 > \frac{x}{12}. \end{cases}$

Lahendus.

1. Lahendades iga võrratuse eraldi, saame lahenduskäigu lühidalt üles märkida järgmiselt:

$$\begin{cases} 5x - 3 > 1 + x \\ 3 - 18x < 4x - 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x > 4 \\ -22x < -33 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > 1,5 \end{cases} \Rightarrow x > 1,5$$

Vastus. $x > 1,5$ (vt. joon. 2).

2. Antud võrratusesüsteemi lahenduskäik on lühidalt järgmine:

$$\begin{cases} 4x + 7 > 2x + 13 \\ 3x - 8 < 2x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x > 6 \\ x < 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x < 9 \end{cases} \Rightarrow 3 < x < 9.$$

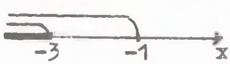
Vastus. $3 < x < 9$ ehk $]3, 9[$ (vt. joon. 3).

Joon. 2

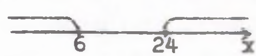
Joon. 3

3. $\begin{cases} 2x > 4x + 6 \\ 4x + 3 < 2x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x > 6 \\ 2x < -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -3 \\ x < -1 \end{cases} \Rightarrow x < -3.$

Vastus. $x < -3$ ehk $]-\infty, -3[$ (vt. joon. 4).



Joon. 4



Joon. 5

4. $\begin{cases} 2(x-3) - 1 < 5 \\ \frac{3x}{3} - 7 > \frac{x}{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x < 12 \\ \frac{7x}{24} > 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 6 \\ x > 24 \end{cases} \Rightarrow \varnothing.$

Vastus. Lahendid puuduvad (vt. joon. 5).

3. R u u t v õ r r a t u s e d. Ühe tundmatuga r u u t v õ r r a t u s e k s nimetatakse teise astme võrratust kujul $ax^2 + bx + c > 0$ või $ax^2 + bx + c < 0$ (aga ka $ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$).

Ruutvõrratuse algebralisel lahendamisel uurime vastava ruutvõrrandi $ax^2 + bx + c = 0$ diskriminandi märki. Kui diskriminant $D = b^2 - 4ac > 0$, siis leiame ruutvõrrandi lahendid x_1 ja x_2 ning lahutame ruutkolmliikme lineaartegurite korrutiseks

$$a(x - x_1)(x - x_2).$$

Seega tuleb lahendada võrratus

$$a(x - x_1)(x - x_2) > 0 \quad \text{või} \quad a(x - x_1)(x - x_2) < 0.$$

Olgu $a > 0$ (vastasel juhul võib võrratuse pooli korrutada -1-ga). Siis esimese võrratuse lahendamiseks tuleb lahendada võrratusesüsteemid

$$\begin{cases} x - x_1 > 0 \\ x - x_2 > 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x - x_1 < 0 \\ x - x_2 < 0 \end{cases}$$

ning leida nende süsteemide lahendihulkade ühend.

Võrratuse $a(x - x_1)(x - x_2) < 0$ korral tuleb lahendada võrratusesüsteemid

$$\begin{cases} x - x_1 > 0 \\ x - x_2 < 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x - x_1 < 0 \\ x - x_2 > 0 \end{cases}$$

ning leida nende lahendihulkade ühend.

Seega taandub ruutvõrratuse lahendamine $D > 0$ korral lineaarvõrratuste süsteemide lahendamisele.

Kui $D < 0$, siis ruutvõrrandil $ax^2 + bx + c = 0$ lahendid puuduvad ning ruutkolmliige $ax^2 + bx + c$ ei lahutu lineaartegurite korrutiseks. Sel juhul on ruutkolmliikme $ax^2 + bx + c$ väärtus positiivne iga x korral, kui vaid $a > 0$. See aga tähendab, et ruutvõrratuse $ax^2 + bx + c > 0$ lahenditeks on kõik reaalarvud, kuid ruutvõrratusel $ax^2 + bx + c < 0$ lahendid puuduvad.

Kui aga $D = 0$, siis ruutvõrrandi $ax^2 + bx + c = 0$ lahendid $x_1 = x_2$ ning ruutvõrratuse vasak pool lahutub tegureiks

$$a(x - x_1)^2.$$

Seega tuleb lahendada võrratus

$$a(x - x_1)^2 > 0 \quad \text{või} \quad a(x - x_1)^2 < 0.$$

Et $(x - x_1)^2$ on positiivne iga x korral välja arvatud $x = x_1$, siis on võrratuse $a(x - x_1)^2 > 0$ lahenditeks iga $x \neq x_1$, kuid võrratusel $a(x - x_1)^2 < 0$ lahendid puuduvad (eeldatud on, et $a > 0$).

<u>Näide 1</u>. Lahendada võrratus

$$x^2 - 2x - 15 \geq 0.$$

Lahendus. Et vastava ruutvõrrandi $x^2 - 2x - 15 = 0$ korral $D = 4 + 60 > 0$, siis lahendid on $x_1 = -3$ ja $x_2 = 5$. Seega

$$x^2 - 2x - 15 = (x + 3)(x - 5).$$

Antud võrratus on samaväärne võrratusega

$$(x + 3)(x - 5) \geq 0.$$

Siit

$$\begin{cases} x + 3 \geq 0 \\ x - 5 \geq 0 \end{cases} \quad \text{või} \quad \begin{cases} x + 3 \leq 0 \\ x - 5 \leq 0. \end{cases}$$

Lahendades kummagi süsteemi eraldi, saame, et $x \geq 5$, $x \leq -3$ (vt. joon. 6).

Joon. 6

Vastus. $x \geq 5 \vee x \leq -3$ ehk $]5, \infty[\ \cup\ ]-\infty, -3[$.

Ruutvõrratuste lahendamiseks kasutatakse enamasti lihtsamat, graafilist võtet, mis tugineb vastava ruutfunktsiooni $y = ax^2 + bx + c$ graafiku uurimisele (vt. joon. 7). Ruutvõrratuse $ax^2 + bx + c > 0$ ($ax^2 + bx + c < 0$) lahendamine tähendab ruutfunktsiooni $y = ax^2 + bx + c$ positiivsuspiirkonna (negatiivsuspiirkonna) leidmist.

<u>Näide 2</u>. Lahendada võrratused:

1) $x^2 - 2x - 15 > 0$,   4) $-x^2 + 4x - 4 \geq 0$,
2) $-x^2 + 4x - 4 > 0$,   5) $-x^2 + 4x - 4 \leq 0$,
3) $-x^2 + 4x - 4 < 0$,   6) $x^2 - 2x + 4 > 0$.

Lahendus.

1. Leiame vastava ruutfunktsiooni $y = x^2 - 2x - 15$ nullkohad: $x^2 - 2x - 15 = 0$, $x_1 = -3$, $x_2 = 5$. Graafikult (joon. 8) näeme, et vaadeldava ruutfunktsiooni $y = x^2 - 2x - 15$ positiivsuspiirkond ja seega ka antud võrratuse $x^2 - 2x - 15 > 0$ lahendid on $x < -3$ või $x > 5$.

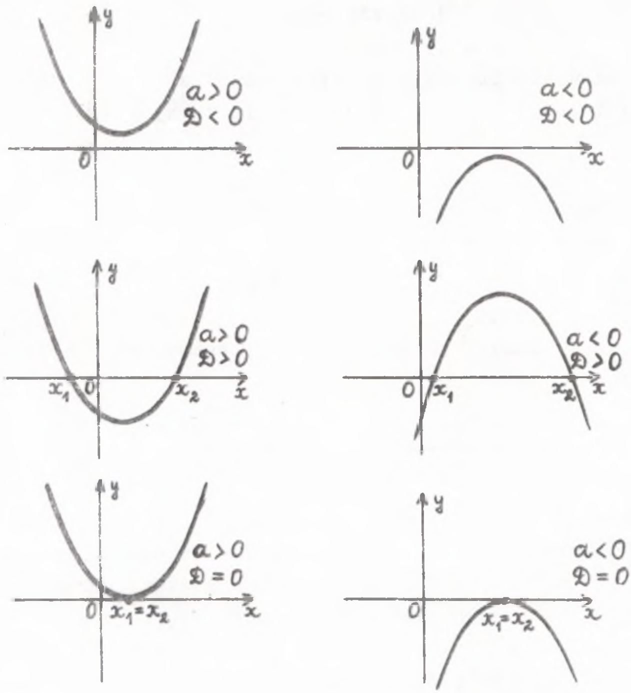
Vastus. $x < -3 \vee x > 5$ ehk $]-\infty, -3[\ \cup\ ]5, \infty[$.

2. Võrratus

$$-x^2 + 4x - 4 > 0$$

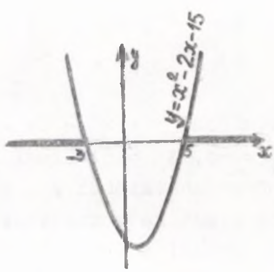
on samaväärne võrratusega

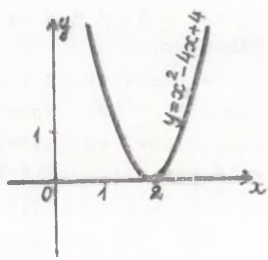
16



Funktsiooni $y = ax^2 + bx + c$ graafik

Joon. 7





Joon. 8

Joon. 9

$$x^2 - 4x + 4 < 0 \text{ ehk } (x - 2)^2 < 0.$$

Et vastav ruutfunktsiooni $y = (x - 2)^2$ väärtus on iga x korral mittenegatiivne (vt. joon. 9), siis võrratusel $(x - 2)^2 < 0$ lahendid puuduvad.

Vastus. $\varnothing$.

3. Kuna võrratus

$$-x^2 + 4x - 4 > 0$$

on samaväärne võrratusega

$$x^2 - 4x + 4 > 0 \text{ ehk } (x - 2)^2 > 0,$$

siis on ruutfunktsiooni $y = x^2 - 4x + 4$ positiivsuspiirkonnas kõik reaalarvud, välja arvatud $x = 2$ (vt. joon. 9).

Vastus. $x < 2 \vee x > 2$ ehk $]-\infty, 2[\cup]2, \infty[$.

4. Antud mitterange võrratus

$$-x^2 + 4x - 4 \geq 0$$

on samaväärne mitterange võrratusega

$$x^2 - 4x + 4 \leq 0 \text{ ehk } (x - 2)^2 \leq 0.$$

Seda tingimust täidab vaid üks arv $x = 2$ (vt. joon. 9).

Vastus. $x = 2$.

5. Antud mitterange võrratus

$$-x^2 + 4x - 4 \leq 0$$

on samaväärne mitterange võrratusega

$$x^2 - 4x + 4 \geq 0 \text{ ehk } (x - 2)^2 \geq 0.$$

Seda tingimust täidavad aga kõik reaalarvud (vt. joon. 9).

Vastus. $-\infty < x < \infty$ ehk $]-\infty, \infty[$ ehk R.

6. Võrratusele

$$x^2 - 2x + 4 > 0$$

vastava ruutvõrrandi diskriminant on negatiivne. Et ruutliikme kordaja on positiivne ($a = 1$), siis on vaadeldava ruutkolmliikme iga väärtus positiivne ehk ruutfunktsiooni $y = x^2 - 2x + 4$ graafik tervenisti ülevalpool x-telge.

Vastus. $-\infty < x < \infty$ ehk $]-\infty, \infty[$.

Näide 3. Millised reaalarvudest 2, 3, 4, -2, 0, 10 on võrratuse

$$-x^2 + 4x - 3 \geq 0$$

lahenditeks?

Lahendus. Asendades võrratuses tundmatu x antud reaalarvudega, saame vastavad arvvõrratused

$1 \geqslant 0$, $2 \geqslant 0$, $-3 \geqslant 0$, $-15 \geqslant 0$, $-3 \geqslant 0$,
$0 \geqslant 0$ ja $-63 \geqslant 0$.
Et tõesed nendest on vaid $1 \geqslant 0$, $2 \geqslant 0$ ja $0 \geqslant 0$, siis on võrratuse lahenditeks antud reaalarvudest vaid 2, 3 ja 1.

Vastus. Lahenditeks on 2, 3 ja 1.

4. R u u t v õ r r a t u s e s ü s t e e m. Võrratusesüsteemi, milles vähemalt üks võrratustest on ruutvõrratus, nimetatakse r u u t v õ r r a t u s e s ü s t e e m i k s. Ruutvõrratusesüsteemi lahendamisel tuleb leida iga võrratuse lahendid ja seejärel määrata saadud lahendihulkade ühisosa.

Näide. Lahendada võrratusesüsteemid:

1) $\begin{cases} x^2 + 2x - 15 > 0 \\ x - 10 < 0, \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 - 6x - 16 < 0 \\ x^2 - 8x + 12 > 0, \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + 5x + 6 \leq 0 \\ x^2 + 6x + 9 \leq 0, \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2 - 6x - 16 > 0 \\ x^2 - 8x + 12 < 0, \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2 - 8x + 12 < 0 \\ x^2 + 4x + 4 < 0. \end{cases}$

Lahendus.

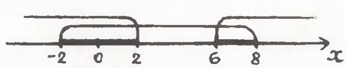
1. Ruutvõrratusesüsteemi

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 15 > 0 \\ x - 10 < 0 \end{cases}$$

esimese võrratuse lahendid kuuluvad piirkonda $x < -5 \vee x > 3$ ning teisel võrratusel piirkonda $x < 10$. Nende piirkondade ühisosa on $x < -5 \vee 3 < x < 10$ (vt. joon. 10).

Vastus. $x < -5 \vee 3 < x < 10$ ehk $]-\infty, -5[\, \cup \,]3, 10[$.

Joon. 10



Joon. 11

2. Süsteemi

$$\begin{cases} x^2 - 6x - 16 < 0 \\ x^2 - 8x + 12 > 0 \end{cases}$$

võrratuste lahendid on vastavalt

$$-2 < x < 8 \quad \text{ja} \quad x < 2 \vee x > 6.$$

Nende piirkondade ühisosa ja seega ka antud võrratuse lahendid on $-2 < x < 2 \vee 6 < x < 8$ (vt. joon. 11).

Vastus. $-2 < x < 2 \vee 6 < x < 8$ ehk $]-2,2[\cup]6,8[$.

3. Süsteemi

$$\begin{cases} x^2 + 5x + 6 \leq 0 \\ x^2 + 6x + 9 \leq 0 \end{cases}$$

esimese võrratuse lahendid on $-3 \leq x \leq -2$, teisel $x = -3$. Antud süsteemil on ainus lahend $x = -3$.

Vastus. $x = -3$.

4. Süsteemi

$$\begin{cases} x^2 - 6x - 16 > 0 \\ x^2 - 8x + 12 < 0 \end{cases}$$

võrrandite lahendid on vastavalt $x < -2 \vee x > 8$ ja $2 < x < 6$. Et nendel lahendihulkadel ühisosa puudub (joon. 12), siis antud võrratusesüsteemil lahendid puuduvad.

Joon. 12

Vastus. Lahendid puuduvad.

5. Süsteemi

$$\begin{cases} x^2 - 8x + 12 < 0 \\ x^2 + 4x + 4 < 0 \end{cases}$$

teisel võrratusel lahendid puuduvad. Seega ei ole ka võrratusesüsteemil lahendeid.

Vastus. Lahendid puuduvad.

5. I n t e r v a l l m e e t o d . K õ r g e m a a s t m e v õ r r a t u s e d. Intervallmeetodit kasutatakse võrratuste $P_n(x) > 0$ ja $P_n(x) < 0$, aga ka $P_n(x) \geq 0$ ja $P_n(x) \leq 0$ lahendamisel, kus $P_n(x)$ on muutuja x suhtes n-astme hulkliige.

I n t e r v a l l m e e t o d seisneb järgnevas. Võrratuse vasakul poolel oleva hulkliikme nullkohad jaotavad x-telje lõplikuks arvuks intervallideks, milledest igaühes võrratuse vasak pool säilitab märgi. Seega tuleb kindlaks määrata võrratuse märk iga intervalli mingis punktis ning, vastavalt võrratusele, sobivad intervallid välja valida.

Praktiliselt kujuneb võrratuse lahendamine intervallmeetodil järgmiseks. Teisendame võrratuse vasaku poole korrutiseks:

$$P_n(x) = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \beta_1)^k(x - \beta_2)^{\ell}\ldots$$
$$\ldots(x^2 + p_1x + q_1)(x^2 + p_2x + q_2)\cdot\ldots$$
$$\ldots\cdot(x^2 + p_ix + q_i),$$

milles $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \beta_1, \beta_2, \ldots$ on hulkliikme nullkohad, $k, \ell, \ldots$ vastavalt nullkohtade $\beta_1, \beta_2, \ldots$ järk. Ruutkolmliikmed $x^2 + p_ix + q_i$ ei võrdu nulliga ühegi x väärtuse korral. Kanname saadud nullkohad x-teljele ning läbime need pideva joonega järgmiselt. Eeldades, et $a > 0$ (vastasel juhul korrutame lähtevõrratust -1-ga), alustame abijoone tõmbamist paremalt ülalt ja läbime kõik nullkohad, lõigates x-telge, kui nullkoht on paaritut järku, ja puudutades x-telge, kui nullkoht on paarisjärku. Nii oleme saanud funktsiooni $y = P_n(x)$ graafiku skitsi, mille põhjal kirjutame välja võrratuse lahendid.

Näide. Lahendada võrratused:

1) $x^3 + x^2 - 2x^2 - 2x > 0$,

2) $x^2(x + 2)(x - 1)^3(x^2 + 1) < 0$,

3) $x^2(x + 2)(x - 1)^3(x^2 + 1) \leq 0$,

4) $(x - 1)(x^2 + 6)(x + 3)^2(2 - x) \geq 0$,

5) $(x + 1)(x - 3) > 0$.

Lahendus.

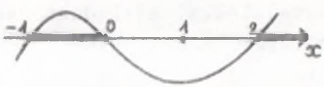
1. Võrratus

$$x^3 + x^2 - 2x^2 - 2x > 0$$

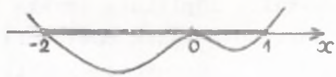
on samaväärne võrratusega

$$x(x - 2)(x + 1) > 0.$$

Vastava funktsiooni $y = x(x - 2)(x + 1)$ nullkohad on $x = 0$, $x = 2$, $x = -1$ ning kõik need on ühekordsed. Seega läbib abijoon neid punkte x-telge lõigates (vt. joon. 13).



Joon. 13



Joon. 14

Antud võrratuse lahendamine tähendab funktsiooni $y = x(x-2)(x+1)$ positiivsuspiirkonna leidmist. Positiivsuspiirkonna moodustavad need x väärtused, mille korral funktsiooni graafiku skits asub ülalpool x-telge. Antud juhul on positiivsuspiirkonnaks, aga seega ka vastava võrratuse lahenditeks $-1 < x < 0 \vee x > 2$.

Vastus. $-1 < x < 0 \vee x > 2$ ehk $]-1, 0[\cup]2, \infty[$.

2. Võrratuses

$$x^2(x+2)(x-1)^3(x^2+1) < 0$$

tegur $x^2 + 1 > 0$, mistõttu antud võrratus on samaväärne võrratusega

$$x^2(x+2)(x-1)^3 < 0.$$

Nullkoht $x = 0$ on paarisjärku, mistõttu abijoon sellel kohal puudutab x-telge. Nullkohtades $x = -2$ ja $x = 1$ aga läbib abijoon x-telge lõigates, sest need on paaritut järku (vt. joon. 14). Antud võrratuse lahendid on $-2 < x < 0 \vee 0 < x < 1$.

Vastus. $-2 < x < 0 \vee 0 < x < 1$ ehk $]-2, 0[\cup]0, 1[$.

3. Kasutades joonist 14 saame võrratuse

$$x^2(x+2)(x-1)^3(x^2+1) \leq 0$$

lahenditeks $-2 \leq x \leq 1$.

Vastus. $-2 \leq x \leq 1$ ehk $[-2, 1]$.

4. Võrratuse

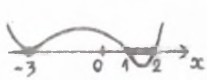
$$(x-1)(x^2+1)(x+3)^2(2-x) \geq 0$$

vasakul poolel oleva hulkliikme pealiikme kordaja on negatiivne (-1) viimase teguri $2 - x$ tõttu. Korrutades antud võrratust -1-ga, saame võrratuse kujul

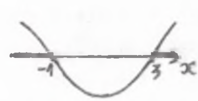
$$(x-1)(x^2+1)(x+3)^2(x-2) \leq 0.$$

Edasi lahendame juba nii nagu eelmisi näiteid. Antud võrratuse lahenditeks saame $x = -3$ ja $1 \leq x \leq 2$ (vt. joon. 15).

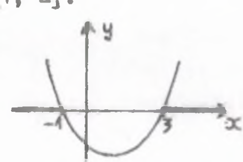
Vastus. $x = -3 \vee 1 < x < 2$ ehk $\{3\} \cup [1, 2]$.



Joon. 15



Joon. 16



Joon. 17

5. Lahendades võrratust

$$(x + 1)(x - 3) > 0$$

intervallmeetodil, paneme tähele, et mõlemad nullkohad $x = -1$ ja $x = 3$ on paaritut (esimest) järku. Seega kulgeb abijoon joonisel 16 näidatud viisil ning võrratuse lahenditeks saame $x < -1 \vee x > 3$ (joon. 16).

Antud võrratus on aga ruutvõrratus. Lahendades seda kui ruutvõrratust (vt. joon. 17), jõuame samale tulemusele.

Näeme, et intervallmeetodi rakendamisel kasutatav abijoon kui vastava funktsiooni graafiku skits kajastab vaid selle funktsiooni nullkohti ning positiivsus- ja negatiivsuspiirkondi, mida vajamegi võrratuste lahendamisel.

Vastus. $x < -1 \vee x > 3$ ehk $]-\infty, -1[\, \cup\,]3, \infty[$.

Märkus. Kõrgema astme võrratusi võib lahendada ka algebraliselt. Selleks tuleb alguses samuti, nagu intervallmeetodi rakendamise korralgi, antud võrratuse vasak pool teisendada korrutiseks. Seejärel tuleb välja kirjutada kõik võimalused, millal tegurite korrutis on, vastavalt antud võrratusele, kas positiivne või negatiivne. Nii saadud süsteemide lahendite ühend ongi lähtevõrratuse lahend.

Praktikas aga kasutatakse seda meetodit suhteliselt harva selle suure töömahu tõttu.

6. M u r d v õ r r a t u s e d j a m u r d v õ r r a t u s e s ü s t e e m i d. Võrratust, mis sisaldab tundmatut murru nimetajas, nimetatakse m u r d v õ r r a t u s e k s. Rangele murdvõrratusele saab üldjuhul anda kuju

$$\frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0} > 0 \quad (\text{või} < 0).$$

Selline range murdvõrratus on oma määramispiirkonnas aga samaväärne range võrratusega

$$(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0)(b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0) > 0$$

(või vastavalt < 0), sest jagatisel ja korrutisel on sama märk. Seega taandub range murdvõrratuse lahendamine kõrgema astme võrratuse lahendamisele, kasutades siis intervallmeetodit. Mitterange murdvõrratuse lahendamisel tuleb eriti tähele panna asjaolu, et nimetajas oleva avaldise nullkohad ei kuulu antud võrratuse lahendite hulka.

<u>Näide</u>. Lahendada võrratused:

1) $\frac{2}{x - 1} < 1$, 4) $\frac{(x - 1)(x - 2)}{x - 3} < 0$,

2) $\frac{x - 1}{x + 5} \geqslant 2$, 5) $\frac{x^2 - x - 12}{x^2 + 2x - 15} \geqslant 0$,

3) $\frac{2x^2 + 1}{x^4} > 0$, 6) $\begin{cases} x + \frac{16}{x} < 10 \\ \frac{x + 5}{2} - \frac{15}{x} > 2. \end{cases}$

Lahendus.

1. Võrratuse

$$\frac{2}{x - 1} < 1$$

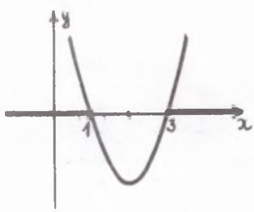
määramispiirkonna saame tingimusest $x - 1 \neq 0$ ehk $x \neq 1$. Kanname kõik liikmed võrratuse ühele poolele ja viime ühisele nimetajale. Siis saame võrratuse

$$\frac{3 - x}{x - 1} < 0 \quad \text{ehk} \quad \frac{x - 3}{x - 1} > 0.$$

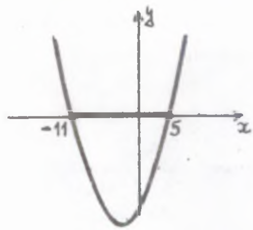
Viimane võrratus on samaväärne võrratusega

$$(x - 3)(x - 1) > 0.$$

Saadud ruutvõrratuse lahendid on $x < 1 \vee x > 3$ (vt. joon. 18).



Joon. 18



Joon. 19

Vastus. $x < 1 \vee x > 3$ ehk $]-\infty, 1[\cup]3, \infty[$.

2. Võrratuse

$$\frac{x - 1}{x + 5} \geqslant 2$$

määramispiirkonna saame tingimusest $x + 5 \neq 0$ ehk $x \neq -5$. Kandes võrratuse kõik liikmed ühele poolele ning viies ühisele nimetajale saame võrratuse

$$\frac{-x - 11}{x + 5} \geqslant 0 \quad \text{ehk} \quad \frac{x + 11}{x + 5} \leqslant 0.$$

Viimane võrratus on samaväärne võrratusega

$$(x+11)(x+5) \leq 0$$

lähtevõrratuse määramispiirkonnas. Lahendipiirkonnaks on $-11 \leq x < -5$ (vt. joon. 19).

Vastus. $-11 \leq x < -5$ ehk $[-11, -5[$.

3. Võrratust

$$\frac{2x^2+1}{x^4} > 0$$

võiks lahendada analoogiliselt kahe eelmise näitega. Kuid sellise lahendamiskäigu järele puudub siin vajadus. Tarvitseb vaid jälgida murru lugejat ja nimetajat. Et nii $2x^2+1 > 0$ kui ka $x^4 > 0$ iga x korral, siis ka nende jagatis on positiivne iga x korral. Arvestades määramispiirkonna tingimust $x \neq 0$, saame vastuse.

Vastus. $-\infty < x < 0 \vee 0 < x < \infty$ ehk $]-\infty, 0[\cup]0, \infty[$.

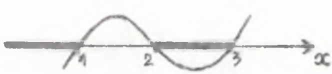
4. Võrratuse

$$\frac{(x-1)(x-2)}{x-3} < 0$$

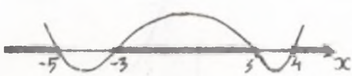
asemel võime lahendada võrratuse

$$(x-1)(x-2)(x-3) < 0.$$

Antud tegurite korrutis on negatiivne, kui $x < 1 \vee 2 < x < 3$ (vt. joon. 20).



Joon. 20



Joon. 21

Vastus. $x < 1 \vee 2 < x < 3$ ehk $]-\infty, 1[\cup]2, 3[$.

5. Võrratuse

$$\frac{x^2-x-12}{x^2+2x-15} \geq 0$$

määramispiirkonna saame tingimusest

$$x^2+2x-15 \neq 0 \quad \text{ehk} \quad x \neq -5 \text{ ja } x \neq 3.$$

Asendame antud võrratuse selle määramispiirkonnas samaväärse võrratusega

$$(x+3)(x-4)(x+5)(x-3) \geq 0.$$

Kasutades intervallmeetodit, leiame selle lahendid (vt. joon. 21).

Vastus: $x < -5 \vee -3 \leq x < 3 \vee x \geq 4$ ehk
$]-\infty, -5[\cup [-3, 3[\cup [4, \infty[$.

6. Murdvõrratusesüsteemi

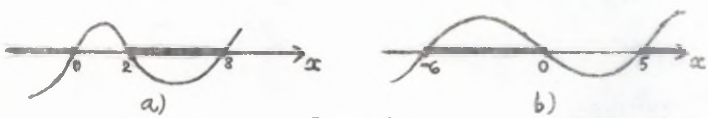
$$\begin{cases} x + \frac{16}{x} < 10 \\ \frac{x+5}{2} - \frac{15}{x} > 2 \end{cases}$$

lahendamisele asudes leiame kõigepealt võrratuste ühise määramispiirkonna. Antud juhul saame selle tingimusest $x \neq 0$. Seejärel lahendame kummagi võrratuse eraldi ja leiame lahendite hulkade ühisosa lähtevõrratusesüsteemi määramispiirkonnas. Antud süsteemi lahenduskäik on lühidalt järgmine:

$$\begin{cases} \frac{x^2 - 10x + 16}{x} < 0 \\ \frac{x^2 + x - 30}{2x} > 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{(x-2)(x-8)}{x} < 0 \\ \frac{(x-5)(x+6)}{2x} > 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

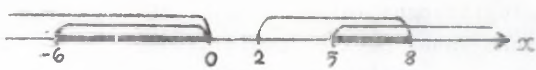
$$\Longrightarrow \begin{cases} (x-2)(x-8)x < 0 \\ (x-5)(x+6)2x > 0. \end{cases}$$

Esimese võrratuse lahendid on $x < 0 \vee 2 < x < 8$ (vt. joon. 22a), teisel $-6 < x < 0 \vee x > 5$ (joon. 22 b).



Joon. 22

Võrratusesüsteemi lahenditeks on aga



Joon. 23

piirkondade ühisosad (vt. joon. 23).

Vastus. $-6 < x < 0 \vee 5 < x < 8$ ehk $]-6, 0[\cup]5, 8[$.

7. J u u r v õ r r a t u s e d. Võrratust, milles tundmatu esineb juuritavas, nimetatakse j u u r v õ r r a t u s e k s. Juurvõrratuste lahendamisel tuleb arvestada juure

definitsiooni ja võrratuse määramispiirkonda. Seega taandub võrratuse

$$\sqrt[n]{f(x)} < \sqrt[n]{\varphi(x)}$$

lahendamine paarisarvulise juurija ($n = 2k$) korral süsteemi

$$\begin{cases} f(x) \geqslant 0 \\ \varphi(x) > 0 \\ f(x) < \varphi(x) \end{cases}$$

lahendamisele. Paarituarvulise juurija ($n = 2k + 1$) korral on aga võrratus

$$\sqrt[n]{f(x)} < \sqrt[n]{\varphi(x)}$$

samaväärne võrratusega

$$f(x) < \varphi(x).$$

Näide. Lahendada võrratused:

1) $\sqrt{2x + 4} > -8$,

2) $\sqrt{2x^2 + 1} > -3$,

3) $\sqrt{2x - 4} < -1$,

4) $\sqrt[4]{x - 5} < 3$,

5) $\sqrt{3x + 6} > x + 1$,

6) $\sqrt[3]{x + 2} < -2$

7) $\sqrt{x^2 - x - 6} < x + 5$,

8) $\sqrt{3x - 10} > \sqrt{6 - x}$,

9) $\sqrt[3]{2x - 1} < \sqrt[3]{x + 2}$,

10) $\dfrac{\sqrt{17 - 15x - 2x^2}}{x + 3} \geqslant 0$

11) $\sqrt{2 - \sqrt{3 + x}} < \sqrt{4 + x}$.

Lahendus.

1. Võrratuse

$$\sqrt{2x + 4} > -8$$

määramispiirkonna leiame tingimusest $2x + 4 \geqslant 0$. Siit $x \geqslant -2$. Võrratuse vasak pool on positiivne ja parem negatiivne. Et mistahes positiivne arv on alati suurem suvalisest negatiivsest arvust, siis rahuldavad antud võrratust kõik x väärtused, mis kuuluvad määramispiirkonda, s.t. $x \geqslant -2$.

Vastus. $x \geqslant -2$ ehk $[-2, \infty[$.

2. Vaadeldava võrratuse

$$\sqrt{2x^2 + 1} > -3$$

määramispiirkonna moodustavad kõik reaalarvud, sest iga x

korral on $2x^2 + 1 > 0$. Antud võrratuse vasak pool on positiivne iga x korral ja seega ka suurem kui -3. Järelikult kehtib võrratus iga x korral.

Vastus. $-\infty < x < \infty$ ehk $]-\infty, \infty[$.

3. Et võrratuse

$$\sqrt{2x - 4} < -1$$

vasak pool on positiivne ega saa olla väiksem negatiivsest arvust (-1), siis sellel võrratusel lahendid puuduvad.

Vastus. Lahendid puuduvad.

4. Võrratus

$$\sqrt[4]{x - 5} < 3$$

omab mõtet, kui $x - 5 \geqslant 0$ ehk $x \geqslant 5$. Sel juhul on võrratuse mõlemad pooled positiivsed ning neid võib astendada. Tõstes antud võrratuse mõlemad pooled neljandasse astmesse, saame võrratuse

$$x - 5 < 81 \quad \text{ehk} \quad x < 86.$$

Arvestades määramispiirkonda ja viimast tingimust, leiame võrratuse lahendid.

Vastus. $5 \leq x < 86$ ehk $[5, 86[$.

5. Võrratusel

$$\sqrt{3x + 6} > x + 1$$

on mõte, kui $3x + 6 \geqslant 0$ ehk $x \geqslant -2$. Antud võrratuse parem pool võib aga olla nii positiivne kui ka negatiivne.

Kui $x + 1 \geqslant 0$ ehk $x \geqslant -1$, siis võib võrratuse mõlemad pooled ruutu tõsta. Selle tulemusel saame (pärast sarnaste liikmete koondamist) võrratuse $x^2 - x - 5 \ 0$. Siit $-1{,}8 < x < 2{,}8$. Arvestades nüüd tingimust $x \geqslant -1$ ja määramispiirkonda ($x \geqslant -2$), saame lahenditeks $-1 \leq x < 2{,}8$.

Olgu $x + 1 < 0$ ehk $x < -1$. Siis kehtib lahendatav võrratus iga x korral, kui vaid $x < -1$ ja $x \geqslant -2$, s.t. $-2 \leq x < -1$.

Vastus. $-2 \leq x < -1 \vee -1 \leq x < 2$ ehk $-2 \leq x < 2$.

6. Võrratus

$$\sqrt[3]{x + 2} < -2$$

on samaväärne võrratusega

$$x + 2 < (-2)^3.$$

Siit $x < -10$.

Vastus. $x < -10$ ehk $]-\infty, -10[$.

7. Võrratus

$$\sqrt{x^2 - x - 6} < x + 5$$

omab mõtet, kui $x^2 - x - 6 \geq 0$ ehk $x \leq -2 \vee x \geq 3$. Vaatleme $x + 5$ suhtes kahte võimalust.

Olgu $x + 5 > 0$. Siit $x > -5$. Tõstame võrratuse mõlemad pooled ruutu

$$(\sqrt{x^2 - x - 6})^2 < (x + 5)^2.$$

Pärast lihtsustamist saame võrratuse $-11x < 31$, millest $x > -2\frac{9}{11}$. Arvestades võrratuse määramispiirkonda, tingimust $x > -5$ ja viimast tulemust (vt. joon. 24), saame võrratuse

Joon. 24

ühed lahendipiirkonnad: $-2\frac{9}{11} < x \leq -2 \vee x \geq 3$.

Olgu nüüd $x + 5 < 0$ ehk $x < -5$. Sel juhul peaks olema mittenegatiivne suurus ($\sqrt{x^2 - x - 6} \geq 0$) väiksem kui negatiivne suurus ($x + 5 < 0$). Et seda aga olla ei saa, siis siit ka võrratuse lahendeid juurde ei tule.

Vastus. $-2\frac{9}{11} < x \leq -2 \vee x \geq 3$ ehk $]-2\frac{9}{11}, -2] \cup [3, \infty[$.

8. Võrratuse

$$\sqrt{3x - 10} > \sqrt{6 - x}$$

lahendamine taandub süsteemi

$$\begin{cases} 3x - 10 > 0 \\ 6 - x \geq 0 \\ 3x - 10 > 6 - x \end{cases}$$

lahendamisele. Siit

$$\begin{cases} x > \frac{10}{3} \\ x \leq 6 \\ x > 4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{matrix} x > 4 \\ x \leq 6 \end{matrix} \Longrightarrow 4 < x \leq 6.$$

Vastus. $4 < x \leq 6$ ehk $]4, 6]$.

9. Võrratus

$$\sqrt[3]{2x - 1} < \sqrt[3]{x + 2}$$

on samaväärne võrratusega

$$2x - 1 < x + 2.$$

Siit $x < 3$.

Vastus. $x < 3$ ehk $]-\infty, 3[$.

10. Võrratuse

$$\frac{\sqrt{17 - 15x - 2x^2}}{x + 3} > 0$$

määramispiirkonna leiame järgmiselt:

$$\begin{cases} 17 - 15x - 2x^2 > 0 \\ x + 3 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -8 < x < 1 \\ x \neq -3 . \end{cases}$$

Viimasest süsteemist saame antud võrratuse määramispiirkonnaks $-8{,}5 < x < -3 \vee -3 < x < 1$. Et lähtevõrratuse lugeja on positiivne, siis peab positiivne olema ka nimetaja, s.t. $x + 3 > 0$ ehk $x > -3$. Arvestades nüüd ka võrratuse määramispiirkonda (vt. joon. 25), saame

Joon. 25

lahendipiirkonnaks $-3 < x < 1$.

Vastus. $-3 < x < 1$ ehk $]-3, 1[$.

11. Võrratuse

$$\sqrt{2 - \sqrt{3 + x}} < \sqrt{4 + x}$$

lahendamine taandub võrratusesüsteemi

$$\begin{cases} 3 + x \geq 0 & (1) \\ 4 + x > 0 & (2) \\ 2 - \sqrt{3 + x} \geq 0 & (3) \\ 2 - \sqrt{3 + x} < 4 + x & (4) \end{cases}$$

lahendamisele. Võrratustest (1) ja (2) saame, et $x \geq -3$. Võrratuse (3) teisendame kujule

$$\sqrt{3 + x} \leq 2.$$

Viimast ruutu tõstes saame, et $3 + x \leq 4$, ehk $x \leq 1$. Seega on lahendatava võrratuse määramispiirkond $-3 \leq x \leq 1$. Võrratus (4) on samaväärne võrratusega

$$\sqrt{3 + x} > -2 - x. \qquad (4a)$$

Selle lahendamiseks vaatleme võrratuse parema poole suhtes kahte võimalust.

Kui $-2 - x \geqslant 0$ ehk $x \leqslant -2$, siis tõstame võrratuse (4a) mõlemad pooled ruutu:

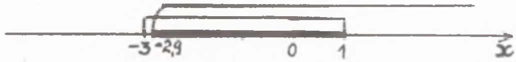
$$(\sqrt{3 + x})^2 > (-2 - x)^2.$$

Siit

$$3 + x > 4 + 4x + x^2 \text{ ehk } x^2 + 3x + 1 < 0.$$

Viimase võrratuse lahendid on $-2,9 < x < -0,4$. Arvestades tingimust $x \leq -2$, saame, et $-2,9 < x \leq -2$.

Olgu $-2 - x < 0$ ehk $x > -2$. Sel juhul on võrratus (4a) rahuldatud iga $x > -2$ korral. Seega on võrratuse (4) lahendid aga $-2,9 < x < \infty$. Arvestades nüüd veel võrratuse määramispiirkonda, saame lähtevõrratuse lahendite piirkonnaks $-2,9 < x \leqslant 1$ (vt. joon. 26).



Joon. 26

Vastus. $-2,9 < x \leqslant 1$ ehk $]-2,9; 1]$.

8. A b s o l u u t v ä ä r t u s i   s i s a l d a v a d   v õ r r a t u s e d. Võrratust, milles tundmatu esineb absoluutväärtuse märgi all, nimetatakse a b s o l u u t v ä ä r t u s t   s i s a l d a v a k s   v õ r r a t u s e k s.

Lahendame kõigepealt põhivõrratused.

1. $|x| < a$, kui $a > 0$. Arvestades absoluutväärtuse definitsiooni, saame antud võrratusest kaks võrratust.

1) kui $x \geqslant 0$, siis $|x| = x$ ning lähtevõrratus saab kuju $x < a$, s.t. $0 \leqslant x < a$;

2) kui $x < 0$, siis $|x| = -x$ ning lähtevõrratus saab kuju $-x < a$ ehk $x > -a$, s.t. $-a < x < 0$

Arvestades nüüd, et võrratust rahuldavad nii $0 \leqslant x < a$ kui ka $-a < x < 0$, siis saame lahendipiirkonna lühemalt üles kirjutada kujul $-a < x < a$ (vt. joon. 27). Viimane võrratus on samaväärne süsteemiga

$$\begin{cases} x > -a \\ x < a. \end{cases}$$

$|x| < a$

Joon. 27

$|x| > a$

Joon. 28

2. $|x| < a$, kui $a < 0$. Sel juhul võrratuse lahendid puuduvad, sest iga x korral on $|x| \geqslant 0$ ega saa olla väiksem mingist negatiivsest arvust.

3. $|x| > a$, kui $a > 0$. Absoluutväärtuse definitsiooni rakendades saame siin, analoogiliselt esimese juhuga toimides, et võrratust rahuldavad $x < -a$ või $x > a$ (vt. joon. 28).

4. $|x| > a$, kui $a < 0$. Sel juhul on võrratuse lahendiks tundmatu x iga reaalarvuline väärtus.

<u>Näide 1</u>. Lahendada võrratused:

1) $|2x - 1| < 3$, 3) $|x + 3| - x < 5$.

2) $|x + 2| > 1$,

Lahendus.

1. Võrratus $|2x - 1| < 3$ on samaväärne võrratusega $-3 < 2x - 1 < 3$. Siit (liites arvu 1) saame, et $-2 < 2x < 4$, millest (2-ga jagades) saame, et $-1 < x < 2$.

Vastus. $-1 < x < 2$ ehk $]-1, 2[$.

2. Võrratusest $|x + 2| > 1$ tuleneb, et $x + 2 < -1$ või $x + 2 > 1$ ehk $x < -3$ või $x > -1$.

Vastus. $x < -3 \vee x > -1$ ehk $]-\infty, -3[\cup]-1, \infty[$.

3. Antud võrratus

$$|x + 3| - x < 5$$

on samaväärne võrratusega

$$|x + 3| < x + 5,$$

mis on omakorda samaväärne võrratusega

$$-(x + 5) < x + 3 < x + 5.$$

Siit

$$\begin{cases} x + 3 > -(x + 5) \\ x + 3 < x + 5. \end{cases}$$

Esimese võrratuse lahendid on $x > -4$. Teine võrratus on aga tõene tundmatu x iga väärtuse korral ($3 < 5$). Süsteemi lahendiks, mis on võrratuste lahendite ühisosa, on seega $x > -4$.

Vastus. $x > -4$ ehk $]-4, \infty[$.

Kui võrratuses esineb enam kui ühe avaldise absoluutväärtus, siis vastleme võrratust intervallides, milledeks jaotavad absoluutväärtuse märgi all olevate avaldiste nullkohad x-telje.

<u>Näide 2</u>. Lahendada võrratused:

1) $|x - 1| + |x + 1| < 4$,

2) $\left|\frac{4 - x}{3x + 1}\right| > 1$,

3) $\left|\frac{x - 4}{3 - x}\right| > 0$,

4) $\left|\frac{x - 8}{2x - 1}\right| < x$,

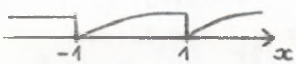
5) $\frac{|x + 2| - |x|}{\sqrt{4 - x^2}} > 0$.

Lahendus.

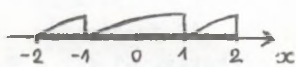
1. Võrratuse

$$|x - 1| + |x + 1| < 4$$

vasakul poolel absoluutväärtuse märkide all olevate avaldiste nullkohad on $x_1 = -1$ ja $x_2 = 1$. Seega tuleb võrratust vaadelda kolmes intervallis (vt. joon. 29).



Joon. 29



Joon. 30

Intervallis $-\infty < x \leq -1$

$$|x - 1| = -(x - 1) \quad \text{ja} \quad |x + 1| = -(x + 1).$$

Siin saab võrratus siis kuju

$$-(x - 1) - (x + 1) < 4,$$

millest $-2x < 4$ ehk $x > -2$. Arvestades ka vaadeldavat piirkonda, saame võrratuse lahenditeks selles intervallis $-2 < x \leq 1$.

Poollõigul $-1 < x \leq 1$ saab võrratus kuju

$$-(x - 1) + x + 1 < 4.$$

Siit $2 < 4$, mis on tõene arvvõrratus. Seega on vaadeldava piirkonna iga x lähtevõrratuse lahendiks, s.t. $-1 < x \leq 1$.

Intervallis $1 < x < \infty$ teiseneb antud võrratus kujule

$$x - 1 + x + 1 < 4.$$

Siit $2x < 4$ ehk $x < 2$. Arvestades piirkonda, saame võrratuse lahenditeks $1 < x < 2$.

Vaadeldes lahendeid piirkondade kaupa, ilmneb, et neid saab ühendada (vt. joon. 30) ja võrratuse lahendid kirjutada kujul $-2 < x < 2$.

Vastus. $-2 < x < 2$ ehk $]-2, 2[$.

2. Võrratus

$$\left|\frac{4 - x}{x + 1}\right| > 1$$

on samaväärne võrratusega

$$|4 - x| > |x + 1|,$$

kui $x + 1 \neq 0$. Nullkohad $x_1 = 4$ ja $x_2 = -1$ jaotavad x-telje kolmeks intervalliks (vt. joon. 31).

Kui $x < -1$, siis

$$|4 - x| = 4 - x \quad \text{ja} \quad |x + 1| = -(x + 1).$$

Sel juhul saame võrratuse

$$4 - x > -(x + 1).$$

Siit saame tõese võrratuse $4 > -1$, mis ütleb, et iga $x < -1$ on ka lähtevõrratuse lahendiks.

Joon. 31

Kui $-1 < x \leq 4$, siis

$$|4 - x| = 4 - x \quad \text{ja} \quad |x + 1| = x + 1$$

ning võrratus saab kuju

$$4 - x > x + 1.$$

Siit $x < 1,5$. Seega on vaadeldavas piirkonnas võrratuse lahenditeks $-1 < x < 1,5$.

Piirkonnas $x > 4$

$$|4 - x| = -(4 - x) \quad \text{ja} \quad |x + 1| = x + 1$$

ning võrratus saab kuju

$$-(4 - x) > x + 1.$$

Siit saame väära arvvõrratuse $-4 > 1$. See tähendab, et vaadeldavas piirkonnas võrratusel lahendid puuduvad.

Võttes kokku esimese ja teise piirkonna lahendid, saame, et $x < -1$ või $-1 < x < 1{,}5$.

Vastus. $x < -1 \vee -1 < x < 1{,}5$ ehk $]-\infty, -1[\cup]-1; 1{,}5[$.

Võrratuse

$$\left|\frac{4 - x}{x + 1}\right| > 1$$

võib lahendada ka teisiti, kasutades põhivõrratuse $|x| > a$ lahendeid $x < -a \vee x > a$. Antud juhul

$$\frac{4 - x}{x + 1} < -1 \quad \text{või} \quad \frac{4 - x}{x + 1} > 1.$$

Esimese võrratuse lahendame kui murdvõrratuse:

$$\frac{4 - x + x + 1}{x + 1} < 0 \Rightarrow \frac{5}{x + 1} < 0 \Rightarrow x + 1 < 0 \Rightarrow x < -1.$$

Teise murdvõrratuse lahendamine:

$$\frac{4 - x - x - 1}{x + 1} > 0 \Rightarrow \frac{3 - 2x}{x + 1} > 0 \Rightarrow (3-2x)(x+ 1) > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1 < x < 1{,}5.$$

Seega on võrratuse lahendid $x < -1 \vee -1 < x < 1{,}5$.

3. Võrratuse

$$\left|\frac{x - 4}{3 - x}\right| > 0$$

määramispiirkonnas $x \neq 3$. Et mistahes avaldise absoluutväärtus on positiivne, kui avaldis ei võrdu nulliga, siis antud juhul peab olema $x - 4 \neq 0$ ehk $x \neq 4$. Seega on antud võrratuse lahenditeks kõik reaalarvud, välja arvatud $x = 3$ ja $x = 4$.

Vastus. $-\infty < x < 3 \vee 3 < x < 4 \vee 4 < x < \infty$ ehk

$$]-\infty, 3[\cup]3, 4[\cup]4, \infty[.$$

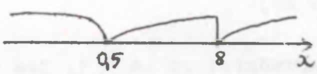
4. Võrratus

$$\left|\frac{x - 8}{2x - 1}\right| < x$$

on samaväärne võrratusega

$$|x - 8| < x|2x - 1|,$$

kui $2x - 1 \neq 0$ ehk $x \neq 0{,}5$. Ka antud võrratust tuleb lahendada kolmes piirkonnas eraldi (vt. joon. 32).



Joon. 32

Kui $x < 0{,}5$, siis

$$-(x - 8) < -x(2x - 1)$$

ehk

$$x - 8 > x(2x - 1).$$

Teisendades seda, saame ruutvõrratuse

$$2x^2 - 2x + 8 < 0 \quad \text{ehk} \quad x^2 - x + 4 < 0.$$

Viimasel võrratusel aga lahendid puuduvad.

Kui $0{,}5 < x \leq 8$, siis

$$-(x - 8) < x(2x - 1).$$

Saadud ruutvõrratuse

$$2x^2 - 8 > 0 \quad \text{ehk} \quad x^2 - 4 > 0$$

lahendid on $x < -2 \vee x > 2$. Vaadeldavas piirkonnas on võrratuse lahendid $2 < x \leq 8$.

Viimases piirkonnas $x > 8$ saame võrratuse

$$x - 8 < x(2x - 1) \quad \text{ehk} \quad x^2 - x + 4 > 0.$$

Viimane võrratus on tõene iga x korral. Seega on lähtevõrratuse lahenditeks $x > 8$.

Ühendades võrratuse lahendid erinevates piirkondades, leiame võrratuse lahendid: $x > 2$.

Vastus. $x > 2$ ehk $]2, \infty[$.

Esitame ka vaadeldava võrratuse teise lahenduse, kasutades põhivõrratuse lahendeid. Antud võrratus

$$\left|\frac{x - 8}{2x - 1}\right| < x$$

on samaväärne ahelvõrratusega

$$-x < \frac{x - 8}{2x - 1} < x,$$

viimane aga samaväärne võrratusesüsteemiga

$$\begin{cases} -x < \dfrac{x - 8}{2x - 1} \\ \dfrac{x - 8}{2x - 1} < x. \end{cases}$$

Siit esimese võrratuse

$$-x < \frac{x - 8}{2x - 1}$$

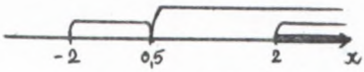
lahenditeks saame $-2 < x < 0{,}5 \vee x > 2$. Teise võrratuse

$$\frac{x - 8}{2x - 1} < x$$

lahendid on $x > 0{,}5$.

Et $(-2 < x < 0{,}5 \vee x > 2) \wedge x > 0{,}5$, siis (vt. joon.

33) $x > 2$.



Joon. 33

5. Võrratuse

$$\frac{|x + 2| - |x|}{\sqrt{4 - x^2}} > 0$$

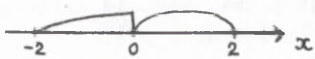
määramispiirkonna saame tingimusest

$$4 - x^2 > 0, \text{ s.t. } |x| < 2 \text{ ehk } -2 < x < 2.$$

Et $\sqrt{4 - x^2} > 0$, siis tuleb lähtevõrratuse asemel leida piirkonnas $-2 < x < 2$ võrratuse

$$|x + 2| - |x| > 0$$

lahendid. Määramispiirkond jaotub kaheks intervalliks (vt. joon. 34).



Joon. 34

Kui $-2 < x \leq 0$, siis $x + 2 + x > 0$ ehk $x > -1$. Siit $-1 < x \leq 0$.

Kui aga $0 < x < 2$, siis $x + 2 - x > 0$ ehk $2 > 0$. Et alati $2 > 0$, siis on vaadeldava intervalli x iga väärtus võrratuse lahendiks.

Võrratuse lahendid saame kahe piirkonna lahendeid ühendades: $-1 < x < 2$.

Vaatus. $-1 < x < 2$ ehk $]-1, 2[$.

9. Parameetreid sisaldavad võrratused. Võrratust, milles peale otsitava(te) saineb veel (mõni) täheline muutuja, millest sõltub võrratuse lahend, nimetatakse parameetrit sisaldavaks võrratuseks.

Parameetrit sisaldava võrratuse lahendamisel tuleb 1) leida lahendipiirkonnad parameetrite kaudu ja 2) uurida lahendi sõltuvust parameetrist. Seega tuleb uurida, milliste parameetri väärtuste korral on võrratusel lahendid ning kõigi selliste parameetri väärtuste jaoks leida võrratuse lahendid.

Näide 1. Lahendada parameetritest a ja m sõltuvad võrratused:

1) $\frac{2a}{a + x} > 0$, 3) $x - 2\frac{a - 1}{a} \leq \frac{3}{2a}(x + 1)$,

2) $mx + 1 > 2(x - 1)$, 4) $\sqrt{a + x} + \sqrt{a - x} > a$.

Lahendus.

1. Võrratuse $\frac{2a}{a + x} > 0$ lahendamine taandub järgmiste võrratusesüsteemide lahendamisele:

$$\begin{cases} 2a > 0 \\ a + x > 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2a < 0 \\ a + x < 0. \end{cases}$$

Esimesest süsteemist saame, et $a > 0$ ja $x > -a$, teisest, et $a < 0$ ja $x < -a$.

Vastus. Kui $a > 0$, siis $x > -a$, ja kui $a < 0$, siis $x < -a$, $a = 0$ korral võrratusel lahend puudub.

2. Teisendame võrratuse

$$mx + 1 > 2(x - 1)$$

kujule

$$(m - 2)x > -3.$$

Edasisel lahendamisel tuleb lähtuda x kordajast $m - 2$.

Kui $m - 2 > 0$ ehk $m > 2$, siis $x > -\frac{3}{m - 2}$,

kui $m - 2 < 0$ ehk $m < 2$, siis $x < -\frac{3}{m - 2}$,

kui $m - 2 = 0$ ehk $m = 2$, siis $0 \cdot x > -3$ ehk $0 > -3$, mis on tõene võrratue, s.t. x võib olla mistahes reaalarv.

Vastus. Kui $m > 2$, siis $x > -\frac{3}{m - 2}$,

kui $m < 2$, siis $x < -\frac{3}{m - 2}$,

kui $m = 2$, siis $-\infty < x < \infty$.

3. Võrratusel

$$x - 2\frac{a - 1}{a} \leq \frac{3}{2a}(x + 1)$$

puuduvad lahendid, kui $a = 0$. Leiame võrratuse lahendid a ülejäänud väärtuste korral. Selleks teisendame võrratuse kujule

$$(1 - \frac{2}{3a})x \leq 2(1 - \frac{2}{3a}).$$

Olgu $1 - \frac{2}{3a} > 0$. Siit $a < 0$ või $a > \frac{2}{3}$. Sel juhul $x \leq 2$.

Kui $1 - \frac{2}{3a} < 0$ ehk $0 < a < \frac{2}{3}$, siis $x \geq 2$.

Kui aga $1 - \frac{2}{3a} = 0$ ehk $a = \frac{2}{3}$, siis on võrratuse lahendiks x iga väärtus.

Vastus. Kui $a < 0$, siis $x \leq 2$,
kui $a = 0$, siis lahendid puuduvad,
kui $0 < a < \frac{2}{3}$, siis $x \geq 2$,
kui $a = \frac{2}{3}$, siis $-\infty < x < \infty$,
kui $a > \frac{2}{3}$, siis $x \leq 2$.

4. Võrratuse

$$\sqrt{a + x} + \sqrt{a - x} > a$$

määramispiirkonna leiame võrratusesüsteemist

$$\begin{cases} a + x \geq 0 \\ a - x \geq 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Siit ilmneb (liites võrratused), et $a \geq 0$. Kui $a = 0$, siis on süsteemil (1) ainus lahend $x = 0$, s.t. et $a = 0$ korral koosneb lähtevõrratuse määramispiirkond ühest punktist $x=0$. Sel juhul ($a = 0$, $x = 0$) pole aga lähtevõrratus rahuldatud, s.t. lahendid puuduvad.

Kui $a > 0$, siis on süsteemi (1) põhjal lähtevõrratuse määramispiirkonnaks $-a \leq x \leq a$.

Tingimustel $a > 0$ ja $-a \leq x \leq a$ on lähtevõrratuse mõlemad pooled positiivsed, mistõttu võime need ruutu tõsta. Pärast teisendamist saame siis võrratuse

$$2\sqrt{a^2 - x^2} > a^2 - 2a. \qquad (2)$$

Nüüd tuleb võrratuse (2) parema poole suhtes vaadelda kolme juhtu.

Esiteks, kui $a^2 - 2a < 0$ ehk $0 < a < 2$, siis võrratus (2) kehtib iga x korral määramispiirkonnast, s.t. $-a < x < a$.

Teiseks, kui $a^2 - 2a = 0$ ehk $a = 2$ ($a = 0$ korral lahendid puuduvad), siis võrratus (2) saab kuju

$$2\sqrt{4 - x^2} > 0,$$

millest $-2 < x < 2$.

Lõpuks olgu $a^2 - 2a > 0$. Siit $a > 2$ (võimalus $a < 0$ on välistatud, kuna on eeldatud, et $a > 0$). Sel juhul, tõstes võrratuse (2) mõlemad pooled ruutu, saame võrratuse

$$4(a^2 - x^2) > a^2 - 4a^3 + 4a^2,$$

mille lihtsustamisel jõuame võrratuseni

$$x^2 < \frac{a^3(4 - a)}{4} .$$

Siit ilmneb, et $a = 4$ korral lahendeid ei ole. Aga samuti puuduvad lahendid $a > 4$ korral. Kui $2 < a < 4$, siis

$$- \frac{a\sqrt{a(4 - a)}}{2} < x < \frac{a\sqrt{a(4 - a)}}{2} .$$

Vastus. Kui $a \leq 0$, siis lahendid puuduvad,
kui $0 < a < 2$, siis $-a < x < a$,
kui $a = 2$, siis $-2 < x < 2$,
kui $2 < a < 4$, siis $- \frac{a\sqrt{a(4 - a)}}{2} < x < \frac{a\sqrt{a(4-a)}}{2}$,
kui $a \geq 4$, siis lahendid puuduvad.

Näide 2. Missuguste parameetri m väärtuste korral on võrratuse $4x^2 + 2(m + 2)x + m + 2 > 0$ lahendiks kogu reaalarvude hulk?

Antud ruutvõrratuse lahendiks on kogu reaalarvude hulk siis, kui vastava ruutvõrrandi diskriminant on negatiivne, s.t.

$$D = 4(m + 2)^2 - 16(m \quad 2) < 0.$$

Siit $(m + 2)^2 - 4(m + 2) < 0$. Viimase võrratuse lahendid on $-2 < m < 2$.

Vastus. Antud võrratuse lahendiks on kogu reaalarvude hulk, kui $-2 < m < 2$.

10. E k s p o n e n t v õ r r a t u s e d. Võrratust, milles tundmatu esineb astendajas, nimetatakse e k s p o n e n t v õ r r a t u s e k s. Selle lahendamisel kasutame eksponentfunktsiooni omadusi, pöörates eriti tähelepanu eksponentfunktsiooni alusele. Võrratuse

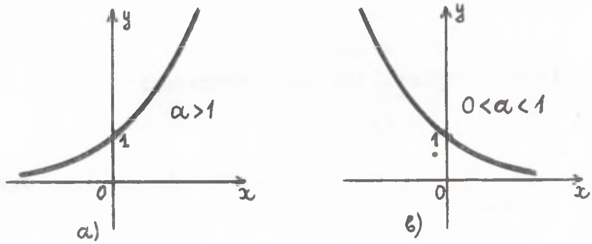
$$a^{f(x)} < a^{g(x)} \qquad (a > 0,\ a \neq 1)$$

lahendamisel on kaks võimalust:

kui $a > 1$, siis $a^{f(x)} < a^{g(x)} \Longleftrightarrow f(x) < g(x)$,

kui $0 < a < 1$, siis $a^{f(x)} < a^{g(x)} \Longleftrightarrow f(x) > g(x)$

(vt. joon. 34).



Joon. 34

<u>Näide</u>. Lahendada võrratused:

1) $3^x < \frac{1}{9}$,

2) $(0{,}5)^x \geq 0{,}25$,

3) $3^{x^2-4x} > 243$,

4) $25^x < 6 \cdot 5^x - 5$,

5) $(0{,}25)^x > 2^{\frac{2x}{x+1}}$,

6) $\frac{64}{9 - 3^x} - 3^x - 7 > 0$.

Lahendus.

1. Arvestades, et $\frac{1}{9} = 3^{-2}$, kirjutame antud võrratuse

$$3^x < \frac{1}{9}$$

kujul $3^x < 3^{-2}$. Kuna astme alus $3 > 1$, siis $x < -2$.

Vastus. $x < -2$ ehk $]-\infty, -2[$.

2. Antud võrratus

$$(0{,}5)^x \geq 0{,}25$$

on samaväärne võrratusega $(0{,}5)^x \geq 0{,}5^2$. Kuna astme alus $0{,}5 < 1$, siis on tegemist kahaneva funktsiooniga. Seega $x \leq 2$.

Vastus. $x \leq 2$ ehk $]-\infty, 2]$.

3. Et $243 = 3^5$, siis antud võrratus

$$3^{x^2-4x} > 243$$

saab kuju $3^{x^2-4x} > 3^5$. Kuna $3 > 1$, siis $x^2 - 4x > 5$ ehk $x^2 - 4x - 5 > 0$. Lahendades viimase ruutvõrratuse, leiame, et $x < -1$ või $x > 5$.

Vastus. $x < -1 \vee x > 5$ ehk $]-\infty, -1[\cup]5, \infty[$.

4. Antud võrratus

$$25^x < 6 \cdot 5^x - 5$$

teiseneb kujule

$$5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 5 < 0.$$

Tehes asenduse $z = 5^x$, saame ruutvõrratuse

$$z^2 - 6z + 5 < 0,$$

mille lahendid on $1 < z < 5$.

Et $z = 5^x$, siis $1 < 5^x < 5$ ehk $5^0 < 5^x < 5^1$. Kuna $5 > 1$, siis $0 < x < 1$.

Vastus. $0 < x < 1$ ehk $]0, 1[$.

5. Antud võrratus

$$(0{,}25)^x > 2^{\frac{2x}{x+1}}$$

on samaväärne võrratusega

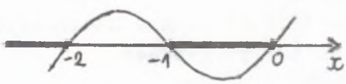
$$2^{-2x} > 2^{\frac{2x}{x+1}}.$$

Et $2 > 1$, siis $-2x > \frac{2x}{x+1}$. Lahendame viimase murdvõrratuse:

$$-x > \frac{x}{x+1} \Rightarrow x + \frac{x}{x+1} < 0 \Rightarrow \frac{x^2 + 2x}{x+1} < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(x + 2)(x + 1) < 0.$$

Kasutades intervallmeetodit leiame, et $x < -2$ või $-1 < x < 0$.



Joon. 35

Vastus. $x < -2 \vee -1 < x < 0$ ehk $]-\infty, -2[\cup]-1, 0[$.

6. Teisendame võrratuse

$$\frac{64}{9 - 3^x} - 3^x - 7 > 0$$

vasakut poolt järgmiselt:

$$\frac{64}{9 - 3^x} - 3^x - 7 = \frac{3^{2x} - 2 \cdot 3^x + 1}{9 - 3^x} = \frac{(3^x - 1)^2}{9 - 3^x}.$$

Uurides nüüd võrratust

$$\frac{(3^x - 1)^2}{9 - 3^x} > 0,$$

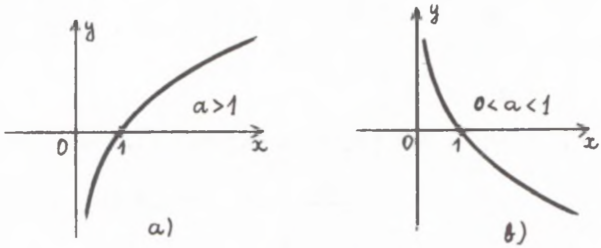
ilmneb, et $(3^x - 1)^2 > 0$, kui $x \neq 0$. Järelikult peab olema ka $9 - 3^x > 0$ ehk $3^2 > 3^x$, millest $x < 2$.

Vastus. $-\infty < x < 0 \vee 0 < x < 2$ ehk
$]-\infty, 0[\cup]0, 2[$.

11. **L o g a r i t m v õ r r a t u s e d.** Võrratust, milles tundmatu esineb logaritmitavas või logaritmi aluses, nimetatakse **l o g a r i t m v õ r r a t u s e k s.** Logaritmfunktsiooni omaduste põhjal

kui $a > 1$, siis $\log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow 0 < f(x) < g(x)$,

kui $0 < a < 1$, siis $\log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow 0 < g(x) < f(x)$
(vt. joon. 36).



Joon. 36

Seega on logaritmvõrratuse lahendamisel oluline jälgida logaritmi alust ja võrratuse määramispiirkonda.

Näide. Lahendada võrratused:

1) $\log(x + 3) \leq \log 2x$,

2) $\log_{0,5} x > \log_{0,5} 10$,

3) $\log_{0,5} x \cdot \log_2 x + \log_{0,5} x + 2 \leq 0$,

4) $\log_{\frac{x-1}{x+5}} 0,3 > 0$,

5) $\log(x - 2) + \log(1 - x) > 1$,

6) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{3x - 1}{x + 2} < 1$

7) $\log_3 [\log_4 (x^2 - 5)] > 0$,

8) $\log_4 (x + 7) > \log_2 (x + 1)$,

9) $|3 - \log_2 x| < 2$,

10) $5^{\log_3 \frac{x-2}{x}} < 1$,

11) $\log_a x - \frac{6}{\log_a x} + 1 > 0.$

Lahendus.

1. Et antud võrratuses

$$\log (x + 3) \leq \log 2x$$

logaritmide alus $10 > 1$, siis $0 < x + 3 \leq 2x$. Siit $x \geq 3$.

Vastus. $x \geq 3$ ehk $[3, \infty[$.

2. Võrratuses

$$\log_{0,5} x > \log_{0,5} 10$$

logaritmide alus $0,5 < 1$. Järelikult $0 < x < 10$.

Vastus. $0 < x < 10$ ehk $]0, 10[$.

3. Antud võrratuses

$$\log_{0,5} x \cdot \log_2 x + \log_{0,5} x + 2 \leq 0$$

teisendame logaritmid ühisele alusele 0,5. Et

$$\log_2 x = \frac{\log_{0,5} x}{\log_{0,5} 2} = \frac{\log_{0,5} x}{-1} = - \log_{0,5} x,$$

siis saab antud võrratuse kirjutada kujul

$$-(\log_{0,5} x)^2 + \log_{0,5} x + 2 \leq 0$$

ehk

$$(\log_{0,5} x)^2 - \log_{0,5} x - 2 \geq 0.$$

Lahendades saadud ruutvõrratuse $\log_{0,5} x$ suhtes, leiame, et

$$\log_{0,5} x \leq -1 \quad \text{või} \quad \log_{0,5} x \geq 2.$$

Siit $x \geq 2$ või $0 < x \leq 0,25$.

Vastus. $x \geq 2 \vee 0 < x \leq 0,25$ ehk $]0; 0,25] \cup [2, \infty[$.

4. Et antud võrratuses

$$\log_{\frac{x-1}{x+5}} 0,3 > 0$$

logaritmitav $0,3 < 1$ ning logaritm sellest positiivne, siis peab olema logaritmi alus

$$0 < \frac{x-1}{x+5} < 1$$

(vt. joon. 36b). Saadud murdvõrratuse lahendamine taandub võrratusesüsteemi

$$\begin{cases} \frac{x-1}{x+5} > 0 \\ \frac{x-1}{x+5} < 1 \end{cases}$$

lahendamisele. Esimese võrratuse lahendid on $x < -5 \vee x > 1$ ja teisel $x > -5$ ning võrratusesüsteemi lahendiks $x > 1$.

Vastus. $x > 1$ ehk $]1, \infty[$.

5. Leiame kõigepealt antud võrratuse

$$\log(x-2) + \log(1-x) > 1$$

määramispiirkonna:

$$\begin{cases} x - 2 > 0 \\ 1 - x > 0 \end{cases} \quad \text{ehk} \quad \begin{cases} x > 2 \\ x < 1. \end{cases}$$

Et süsteem on vastuoluline, siis antud võrratusel lahendid puuduvad.

6. Võrratuse

$$\log_{\frac{1}{3}} \frac{3x-1}{x+1} < 1$$

määramispiirkonna leidmiseks lahendame võrratuse

$$\frac{3x-1}{x+2} > 0.$$

Siit $x < -2 \vee x > \frac{1}{3}$. Asendades lähtevõrratuses $1 = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3}$, saame, et

$$\log_{\frac{1}{3}} \frac{3x-1}{x+2} < \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3}.$$

Et $0 < \frac{1}{3} < 1$, siis

$$\frac{3x-1}{x+2} > \frac{1}{3}.$$

Selle murdvõrratuse lahendid on $x < -2 \vee x > \frac{5}{8}$. Arvestades määramispiirkonda, saame lähtevõrratuse lahendid.

Vastus. $x < -2 \vee x > 0{,}625$ ehk

$$]-\infty, -2[\cup]0{,}625, \infty[.$$

7. Et võrratuses

$$\log_3 [\log_4(x^2 - 5)] > 0$$

välise logaritmi alus $3 > 1$ ja logaritm positiivne, siis logaritmitav lähtevõrratuses

$$\log_4 (x^2 - 5) > 1$$

ehk

$$\log_4 (x^2 - 5) > \log_4 4.$$

Et siin $4 > 1$, siis

$$x^2 - 5 > 4 \quad \text{ehk} \quad x^2 > 9.$$

Siit

$$x < -3 \vee x > 3. \qquad (1)$$

Lahendatava võrratuse määramispiirkonna leiame süsteemist

$$\begin{cases} x^2 - 5 > 0 \\ \log_4 (x^2 - 5) > 0. \end{cases}$$

Et lähtevõrratusest tuleneb võrratus $\log_4 (x^2 - 5) > 1$, siis on süsteemi teine võrratus rahuldatud. Jääb üle arvestada süsteemi esimest võrratust. Sellest

$$x < -\sqrt{5} \vee x > \sqrt{5}. \qquad (2)$$

Arvestades nüüd tingimusi (1) ja (2), saame lähtevõrratuse lahendid.

Vastus. $x < -3 \vee x > 3$ ehk $]-\infty, -3[\cup]3, \infty[$.

8. Antud võrratuse

$$\log_4 (x + 7) > \log_2 (x + 1) \qquad (1)$$

määramispiirkonnas

$$\begin{cases} x + 7 > 0 \\ x + 1 > 0. \end{cases}$$

Siit $x > -1$. Minnes üle alusele 2, saame võrratuse (1) kirjutada kujul

$$\frac{1}{2} \log_2 (x + 7) > \log_2 (x + 1).$$

Siit

$$\sqrt{x + 7} > x + 1. \qquad (2)$$

Et määramispiirkonnas on $x > -1$, siis on $x + 1 > 0$. Seega võime juurvõrratuse (2) mõlemad pooled ruutu tõsta. Saadud ruutvõrratusest

$$x^2 + x - 6 > 0$$

leiame, et $-3 < x < 2$. Arvestades määramispiirkonda $x > -1$ saame võrratuse (1) lahendid.

Vastus. $-1 < x < 2$ ehk $]-1, 2[$.

9. Võrratuse

$$|3 - \log_2 x| < 2$$

määramispiirkonnaks on $x > 0$. Arvestades absoluutväärtust saame, et

$$-2 < 3 - \log_2 x < 2.$$

Siit

$$-5 < -\log_2 x < -1$$

$$1 < \log_2 x < 5,$$

$$\log_2 2 < \log_2 x < \log_2 2^5,$$

$$2 < x < 2^5.$$

Vastus. $2 < x < 2^5$ ehk $]2, 2^5[$.

10. Antud võrratuse

$$5^{\log_3 \frac{x-2}{x}} < 1$$

määramispiirkonna leiame järgmiselt:

$$\frac{x-2}{x} > 0 \Rightarrow (x-2)x > 0 \Rightarrow x < 0 \vee x > 2.$$

Et $1 = 5^0$ ja $5 > 1$, siis saame lähtevõrratusest, et

$$\log_3 \frac{x-2}{x} < 0 \quad \text{ehk} \quad \log_3 \frac{x-2}{x} < \log_3 1.$$

Viimasest (kuna $3 > 1$)

$$\frac{x-2}{x} < 1 \Rightarrow \frac{-2}{x} < 0 \Rightarrow x > 0.$$

Arvestades nüüd viimast tulemust $x > 0$ ja määramispiirkonda $x < 0 \vee x > 2$, leiame antud võrratuse lahendid.

Vastus. $x > 2$ ehk $]2, \infty[$.

11. Võrratus

$$\log_a x - \frac{6}{\log_a x} + 1 > 0$$

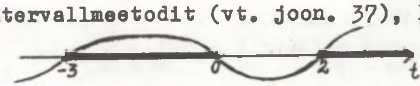
on parameetrit a sisaldav logaritmvõrratus. Selle määramispiirkonnaks on $x > 0$, kusjuures $x \neq 1$. Antud võrratus on oma määramispiirkonnas samaväärne võrratusega

$$(\log_a^2 x + \log_a x - 6) \log_a x > 0.$$

Tehes siin asenduse $\log_a x = t$, saame võrratuse

$$(t^2 + t - 6)t > 0 \quad \text{ehk} \quad (t-2)(t+3)t > 0.$$

Kasutades intervallmeetodit (vt. joon. 37), leiame, et



Joon. 37

$-3 < t < 0 \vee t > 2$. Arvestades asendust saame võrratused

$$-3 < \log_a x < 0 \vee \log_a x > 2.$$

Vaatleme parameetri a suhtes kahte võimalust.

Esiteks, kui $a > 1$, siis $a^{-3} < x < 1 \vee x > a^2$. Ja teiseks, kui $0 < a < 1$, siis $1 < x < a^{-3} \vee 0 < x < a^2$.

Vastus. Kui $a > 1$, siis $a^{-3} < x < 1 \vee x > a^2$,

kui $0 < a < 1$, siis $1 < x < a^{-3} \vee 0 < x < a^2$.

Kontrollküsimused

1. Mis on võrratus?
2. Kas võrratus $3 \geq 0$, $0 \leq 0$, $5 \geq 5$ on tõene? Miks?
3. Mida tähendavad kirjutised

   $a \leq b < c$, $a < b \leq c$?
4. Milline on range (mitterange) võrratus?
5. Kirjutada sümbolites järgmised väljendid:

   1) a on mittenegatiivne,

   2) b on mittepositiivne,

   3) a on mittesuurem kui b,

   4) c on mitteväiksem kui d.
6. Arvvõrratuse omadused.
7. Miks võrratuse omaduste hulgas ei ole omadusi eeldusel, et $a > b$?
8. Olgu $a < 4$ ja $b < 2$. Avaldada $a + b$.
9. Olgu $a > 5$ ja $b < 8$. Avaldada $a - b$.
10. Mida tähendab võrratuse lahendamine?
11. Mis on võrratuse määramispiirkond?
12. Mis on võrratuse lahendid?
13. Millist võrratust nimetatakse samasuseks?
14. Kas võrratus $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ on samasus kogu reaalarvude hulgal?
15. Kas võrratus $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ on samasus $a \geq 0$ ja $b \geq 0$ korral?
16. Milliseid võrratusi nimetatakse samaväärseteks?
17. Kas reaalarvude hulgal on võrratused $4x^2 < 0$ ja $-\frac{1}{x^2} > 0$ samaväärsed? Miks?
18. Millist võrratust nimetatakse lineaarvõrratuseks?
19. Milline on lineaarvõrratuse määramispiirkond?

20. Millised on võrratuse $6x - 5 \geq 7$ lahendid?
21. Millised on võrratuse $x + 2 < x + 5$ lahendid?
22. Millised on võrratuse $x - 3 > x + 1$ lahendid?
23. Milline on kahe tundmatuga lineaarvõrratusesüsteemi määramispiirkond?
24. Kuidas lahendada ühe tundmatuga lineaarvõrratusesüsteemi?
25. Millised on võrratusesüsteemide

a) $\begin{cases} x + 5 < 10 \\ 3 + x > 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 2 > 3 \\ 1 - x < 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 1 < 2 \\ x - 1 > 6 \end{cases}$

lahendid?
26. Millist võrratust nimetatakse ruutvõrratuseks?
27. Milline on ruutvõrratuse määramispiirkond?
28. Kuidas toimub ruutvõrratuse algebraline lahendamine?
29. Kuidas toimub ruutvõrratuse graafiline lahendamine?
30. Millised on võrratuste

a) $x^2 + 4x + 4 > 0$, b) $x^2 - 8x + 16 \leq 0$

lahendid?
31. Kuidas asub parabool, kui ruutliikme kordaja on positiivne?
32. Kuidas asub parabool, kui ruutliikme kordaja on negatiivne?
33. Kuidas toimub ruutvõrratusesüsteemi lahendamine?
34. Kuidas leitakse intervallid, milles võrratuse vasakul poolel olev hulkliige säilitab märgi?
35. Intervallmeetodi rakendamine võrratuse lahendamisel, kui võrratuse vasak pool ei oma kordseid nullkohti.
36. Intervallmeetodi rakendamine võrratuse lahendamisel, kui võrratuse vasak pool omab ka võrdseid nullkohti.
37. Miks paaritut järku nullkoha läbimisel hulkliige muudab märki (abijoon läbib x-telje lõigates)?
38. Miks paarisjärku nullkoha läbimisel hulkliikme märk ei muutu (abijoon puudutab x-telge)?
39. Miks intervallmeetodi rakendamisel abijoone tõmbamist alustame kõige suuremast nullkohast paremalt ülalt, kui pealiikme kordaja on positiivne?
40. Mis on murdvõrratus?

41. Millist tüüpi võrratuse lahendamisele taandub murdvõrratuse lahendamine? Miks?

42. Kas mitterange võrratuse lahendite hulka saavad kuuluda lugeja nullkohad? Miks?

43. Kas mitterange võrratuse lahendite hulka saavad kuuluda nimetaja nullkohad? Miks?

44. Millised on võrratuse

a) $\frac{1}{(x-3)^2} \geqslant 0$, b) $\frac{5}{(x-1)^2} \leq 0$

lahendid?

45. Millised on võrratuse

a) $\frac{10}{x-3} \leq 0$, b) $\frac{2}{x-2} > 0$

lahendid?

46. Mis on juurvõrratus?

47. Kuidas leida juurvõrratuse määramispiirkond?

48. Kuidas lahendada juurvõrratust, kui muutuja esineb ainult juuritavas?

49. Kuidas lahendada juurvõrratust, kui muutuja esineb mitte ainult juuritavas?

50. Millised on võrratuse

a) $\sqrt{x} \geqslant 0$, b) $\sqrt{x} < 0$, c) $\sqrt{x} \leq 0$

lahendid?

51. Millised on võrratuse

a) $\sqrt{x} < 2$, b) $\sqrt{x} > -2$

lahendid?

52. Millised on võrratuse

a) $\sqrt[3]{x} \geqslant 0$, b) $\sqrt[3]{x} < 0$

lahendid?

53. Arvu absoluutväärtuse definitsioon.

54. Mis on absoluutväärtusi sisaldav võrratus?

55. Võrratuse $|x| < a$ lahendid, kui $a > 0$.

56. Võrratuse $|x| > a$ lahendid, kui $a > 0$.

57. Millised on võrratuse

a) $|x| < 0$, b) $|x| > 0$, c) $|x| \leq 0$, d) $|x| \geqslant 0$

lahendid?

58. Millised on võrratuse $|x-1| + |x+2| > 0$ lahendid?

59. Millised on võrratuse $|x-2| + |x+1| < 0$ lahendid?

60. Mis on parameetrit sisaldav võrratus?
61. Kuidas toimub parameetrit sisaldava võrratuse lahendamine?
62. Millised on võrratuse $\frac{x}{a} > 1$ lahendid?
63. Millised on võrratuse $(3 - a)x < 3 - a$ lahendid?
64. Mis on eksponentfunktsioon?
65. Eksponentfunktsiooni $y = a^x$ graafiku paiknevus sõltuvalt alusest a.
66. Mis on eksponentvõrratus?
67. Millised on võrratuse
a) $3^x < 1$, b) $3^x \geq 1$
lahendid?
68. Millised on võrratuse
a) $(\frac{1}{2})^x > 1$, b) $(\frac{1}{2})^x < 1$
lahendid?
69. Millised on võrratuse
a) $2^x > 4$, b) $(\frac{1}{2})^x > 4$
lahendid?
70. Logaritmi definitsioon.
71. Mis on logaritmfunktsioon?
72. Milline on logaritmfunktsiooni $y = \log_a x$ määramispiirkond?
73. Logaritmfunktsiooni $y = \log_a x$ graafiku paiknevus sõltuvalt alusest a.
74. Mis on logaritmvõrratus?
75. Millised on võrratuse
a) $\log_2 x < 0$, b) $\log_{0,5} x < 0$, c) $\log_x 2 > 0$,
d) $\log_x \frac{1}{4} < 0$
lahendid?
76. Millised on võrratuse
a) $\log x < \log 3$, b) $\log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{1}{2}} 10$
lahendid?

SISUKORD