CATEDRA 08

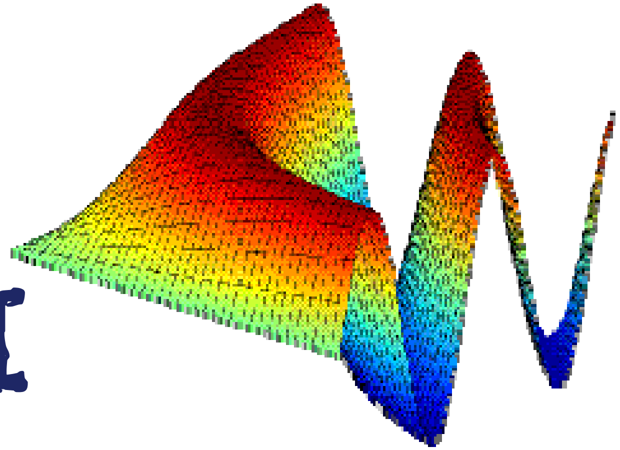
FACULTAD DE INGENIERÍA DE MINAS, GEOLOGÍA Y CIVIL

DEPARTAMENTO ACADÉMICO DE INGENIERÍA DE MINAS Y CIVIL

METODOS NUMERICOS

Ingeniería Civil

ING. CRISTIAN CASTRO P.



Capitulo VI

Sistema de Ecuaciones Algebraicas Lineales - Métodos Iterativos

ING. CRISTIAN CASTRO P.

MÉTODOS ITERATIVOS DE SOLUCIÓN

Introducción

TABLA No. 1: Comparación de las características de diversos métodos alternativos para encontrar soluciones de ecuaciones algebraicas lineales simultáneas

MÉTODO	ESTABILIDAD	PRECISIÓN	RANGO DE APLICACIÓN	COMPLEJIDAD DE LA PROGRAMACIÓN	COMENTARIOS
GRÁFICO	---	Pobre	Limitado	---	Puede tomar más tiempo que el método numérico
Regla de Cramer	---	Afectado por errores de redondeo	Limitado	---	Escesiva complejidad de cálculo para más de tres ecuaciones
Eliminación de Gauss (con pivoteo paracial)	---	Afectado por errores de redondeo	General	Moderada	
Descomposición LU	---	Afectado por errores de redondeo	General	Moderada	Método de eliminación preferido; permite el cálculo de la matriz inversa
Gauss_Seidel	Puede no converger si no es diagonalmente dominante	EXCELENTE	Apropiado solo para sistemas diagonalmente dominantes	FÁCIL	

MÉTODOS ITERATIVOS DE SOLUCIÓN

Comparación de Métodos Directos e Iterativos a partir de la cantidad de operaciones matemáticas

Método	Eliminación de Gauss		Gauss-Jordan		ITERATIVOS	
N	Multiplicaciones/Divisiones $(n^3 + 3n^2 - n)/3$	Sumas / restas $(2n^3 + 3n^2 - 5n)/6$	Multiplicaciones/Divisione $(n^3 + 2n^{s2} - n)/2$	Sumas / restas $(n^3 - n)/2$	Multiplicaciones-Divisiones $(2n^2 - 1)$	Sumas / restas $(n(n-1))$
3	17	11	21	12	17	12
10	430	375	895	495	199	90
50	44150	42875	64975	62475	4999	2450
100	343300	338250	509950	499950	19999	9900

MÉTODOS ITERATIVOS DE SOLUCIÓN

•Debemos resaltar que lo métodos vistos hasta la actualidad para solucionar sistemas de ecuaciones algebraicas lineales son muy caros computacionalmente.

•Estos métodos exigen una memoria de máquina proporcional al cuadrado del orden de la matriz de coeficiente A.

•De igual manera se producen grandes errores de redondeo como consecuencia del número de operaciones.

MÉTODOS ITERATIVOS DE SOLUCIÓN

•Debemos mencionar que en estos métodos necesitan tener una aproximación inicial de la solución y no esperamos tener una solución exacta aun cuando todas las operaciones se realicen utilizando una aritmética exacta.

Pero podemos decir que en muchos casos son mas efectivos que los métodos directos por requerir mucho menos esfuerzo computacional y sus errores se reducen, esto es cierta cuando la matriz es dispersa es decir cuando la matriz tienen un alto porcentaje de elementos nulos

Aplicaciones

- Rara vez para resolver sistemas lineales de dimensión pequeña.
  - Tiempo requerido mayor para lograr la precisión
  - Los métodos directos son suficientemente exactos.

  Utilidad para la resolución de los sistemas de ecuaciones diferenciales en aplicaciones de:
  - Todas las ramas de ingeniería
  - Ciencias sociales
  - Economía
- Estos métodos son útiles en la predicción del clima, análisis matricial de estructuras, donde el volumen de variables amerita el uso de extensas matrices.

MÉTODOS ITERATIVOS DE SOLUCIÓN

- Estos métodos en mención son más efectivos que los vistos anteriormente y han permitido solucionar sistemas de hasta 1000 ecuaciones y variables a un más, sistemas que se presentan en la solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales (EDP).

- Supongamos que tenemos el sistema

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{b} \tag{1}$$

- Luego podemos escribir como:

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} - \mathbf{b} = \mathbf{0} \tag{2}$$

Que es una ecuación vectorial que se puede escribir así:

$$\boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0} \tag{3}$$

MÉTODOS ITERATIVOS DE SOLUCIÓN

El propósito es buscar una matriz B y su vector C de tal forma que la ecuación vectorial es la siguiente:

$$\boldsymbol{x} = \mathbf{B}\,\boldsymbol{x} + \mathbf{C} \qquad (4)$$

Sea un arreglo de la ecuación (1) ie que la solución de una ecuación sea también solución de la otra ecuación, luego se propone lo siguiente:

<u>Primero:</u> Proponer un vector inicial $x^{(0)}$ como la primera aproximación al vector solución x

<u>Segundo:</u> calcular la sucesión de vectores que son soluciones aproximadas

$$x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)}, \ldots\ldots, \rightarrow x \ \text{vector} \ \ \text{solución}$$

MÉTODOS ITERATIVOS DE SOLUCIÓN

Usando:

$$x^{(R+1)} = Bx^{(R)} + C \quad , \quad R = 0,1,2,.....$$

Donde:

$$x^{(R)} = \left[x_1^R, x_2^R, ..., x_n^R \right]^T$$

MÉTODOS ITERATIVOS DE SOLUCIÓN

Observación:

1. Para que la sucesión de soluciones converja a x vector solución es necesario que $x_j^m, \ 1 \le j \le n$ se aproxime al vector $x_j, \ 1 \le j \le n$ $\left| x_j^m - x_j \right|, \ 1 \le j \le n$ decir sean menores que un valor pequeño fijado previamente y que se mantengan menores para todos los vectores siguientes de la iteración.

   Es decir:

   $$\lim_{m \to \infty} x_j^m = x_j \ , \ 1 \le j \le n$$

2. La forma como llegar a la ecuación $x = Bx + C$ se define al algoritmo y su convergencia.

MÉTODOS ITERATIVOS DE SOLUCIÓN

. Sea dada el sistema

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{matrix}$$

Con $a_{11} \neq 0$, $a_{22} \neq 0$, $a_{33} \neq 0$

De λ_1 tenemos que:

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3$$

$$x_2 = \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}} x_1 - \frac{a_{23}}{a_{22}} x_3$$

$$x_3 = \frac{b_3}{a_{33}} - \frac{a_{31}}{a_{33}} x_1 - \frac{a_{32}}{a_{33}} x_2 \qquad (5)$$

MÉTODOS ITERATIVOS DE SOLUCIÓN

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & -\frac{a_{23}}{a_{22}} \\ -\frac{a_{31}}{a_{33}} & -\frac{a_{32}}{a_{33}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \frac{b_3}{a_{33}} \end{pmatrix} \qquad (6)$$

$$x = Bx + C$$

MÉTODOS ITERATIVOS DE SOLUCIÓN

Una vez que es determinada la ecuación (6) se propone un vector inicial $x^{(0)}$ que puede ser $x^{(0)} = 0$ "cero" o algún otro vector que sea aproximado al vector solución x.

Para determinar la sucesión buscada de solución iterativo tenemos los siguientes métodos numéricos:

- Método de Jacobi (Desplazamiento simultaneo)
- Método de Gauss –Seidel (Desplazamiento sucesivo)
- Método de Sobrerelajación (*Succesive-Over-Relaxations*)

Convergencia

- Este criterio también se aplica a las ecuaciones lineales que se resuelven con el método de Gauss-Seidel. Por tanto, al aplicar este criterio sobre las ecuaciones de Gauss-Seidel y evaluando con respecto a cada una de las incógnitas, obtenemos la expresión siguiente:

$$\left|\frac{a_{21}}{a_{22}}\right| < 1 \qquad \left|\frac{a_{12}}{a_{11}}\right| < 1$$

- En otras palabras, el valor absoluto de las pendientes en la ecuación, deben ser menor que la unidad para asegurar la convergencia.

$$|a_{22}| > |a_{21}| \qquad |a_{11}| > |a_{12}|$$

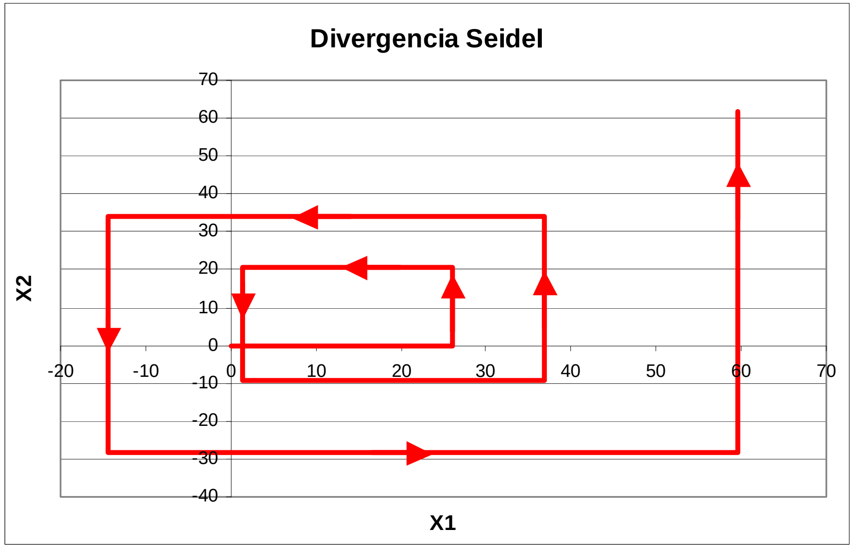
- Esto es, el elemento diagonal debe ser mayor que el elemento fuera de la diagonal para cada reglón de ecuaciones. La generalización del criterio anterior para un sistema de n ecuaciones es:

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$$

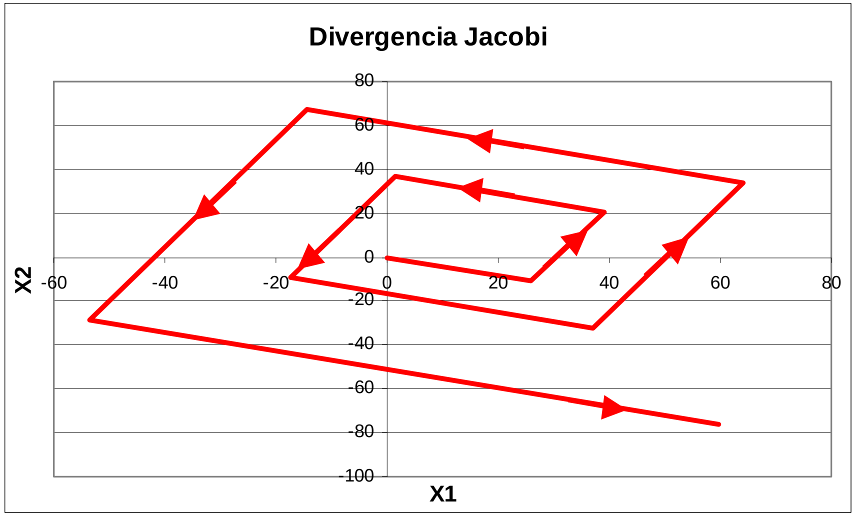
MÉTODOS ITERATIVOS DE SOLUCIÓN

Convergencia

Divergencia Seidel	
X1	X2
0.00	0.00
26.00	0.00
26.00	20.78
1.44	20.78
1.44	-9.23
36.91	-9.23
36.91	34.12
-14.32	34.12
-14.32	-28.50
59.68	-28.50
59.68	61.95
-47.21	61.95
-47.21	-68.70
107.19	-68.70
107.19	120.01
-115.83	120.01
-115.83	-152.57



Divergencia Jacobi	
X1	X2
0.00	0.00
26.00	-11.00
39.00	20.78
1.44	36.67
-17.33	-9.23
36.91	-32.19
64.04	34.12
-14.32	67.27
-53.50	-28.50
59.68	-76.39



- Resultado de las iteraciones utilizando las ecuaciones sin ordenar

$$u: 11x_1 + 13x_2 = 286$$

$$v: 11x_1 - 9x_2 = 99$$

Convergencia

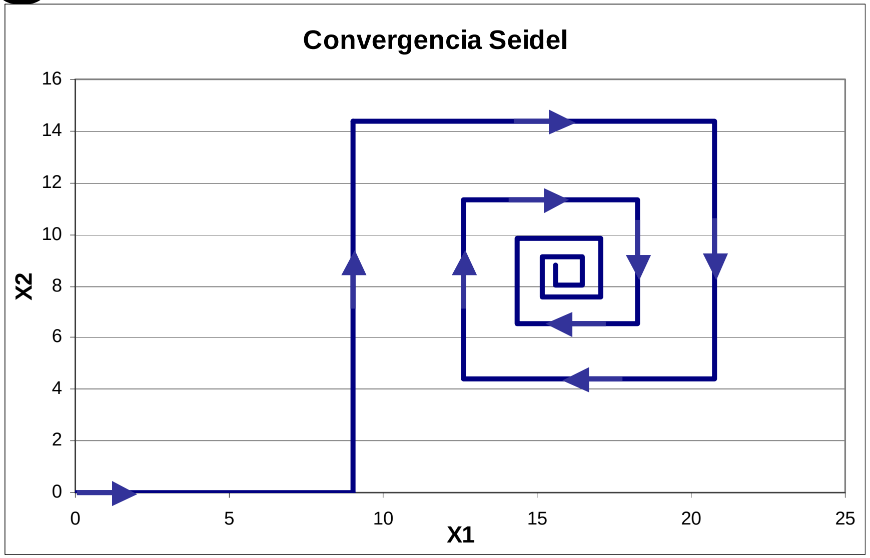
- Resultado de las iteraciones utilizando previamente el criterio de diagonal dominante

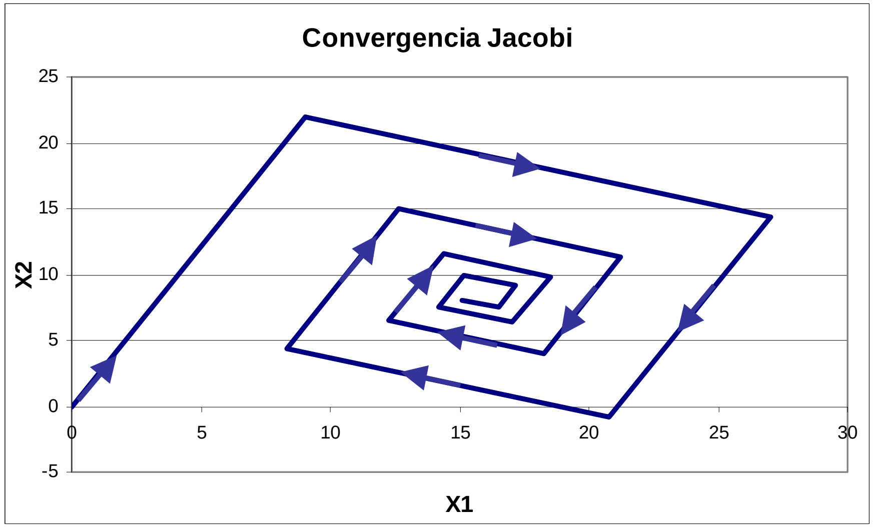
$$v: 11x_1 - 9x_2 = 99$$

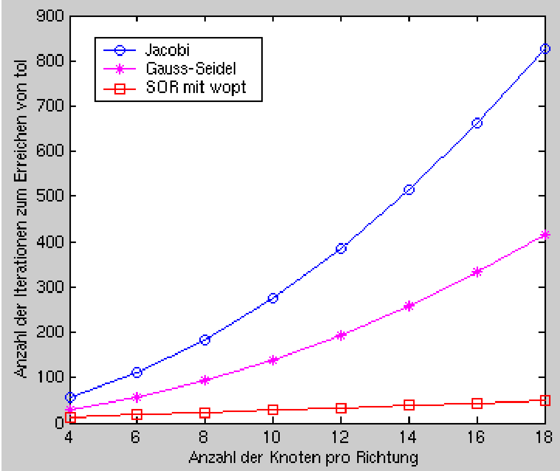
$$u: 11x_1 + 13x_2 = 286$$

Convergencia Seidel	
X1	X2
0.00	0.00
9.00	0.00
9.00	14.38
20.77	14.38
20.77	4.43
12.62	4.43
12.62	11.32
18.26	11.32
18.26	6.55
14.36	6.55
14.36	9.85
17.06	9.85
17.06	7.56
15.19	7.56
15.19	9.15
16.48	9.15
16.48	8.05
15.59	8.05
15.59	8.81

Convergencia Jacobi	
X1	X2
0.00	0.00
9.00	22.00
27.00	14.38
20.77	-0.85
8.31	4.43
12.62	14.97
21.25	11.32
18.26	4.02
12.29	6.55
14.36	11.60
18.49	9.85
17.06	6.35
14.20	7.56
15.19	9.99
17.17	9.15
16.48	7.47
15.11	8.05







Métodos Iterativos

Jacobi, Gauss Seidel, Relajación

Método de Jacobi

MÉTODOS ITERATIVOS DE SOLUCIÓN

MÉTODO DE DESPLAZAMIENTO SIMULTÁNEO DE JACOBI

Si $x^{(R)} = \begin{pmatrix} x_1^{R} \\ x_2^{R} \\ x_3^{R} \end{pmatrix}$ es el vector de aproximación a la solución *x* después de R iteraciones, entonces, tendremos la siguiente aproximación

$$x^{R+1} = \begin{pmatrix} x_1^{R+1} \\ x_2^{R+1} \\ x_3^{R+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^R - a_{13}x_3^R) \\ \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^R - a_{23}x_3^R) \\ \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^R - a_{32}x_2^R) \end{pmatrix}$$

MÉTODOS ITERATIVOS DE SOLUCIÓN

Fenómeno que se puede generalizar para *n* ecuaciones

$$x_i^{R+1} = -\frac{1}{a_{ii}}\left(-b_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{i\,j}\, x_j^{R}\right), \quad i = 1,2,\ldots\ldots,n$$

Método de Jacobi

- Este método se puede ilustrar usando las siguientes ecuaciones:

$$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 = b_1$$

$$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 = b_2$$

$$a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3 = b_3 \qquad (1)$$

MÉTODOS ITERATIVOS DE SOLUCIÓN

Método de Jacobi

- El método comienza resolviendo la ec. 1 para x_1, x_2 y x_3 e introduciendo el índice *k* que se utilizara para indicar el número de iteraciones, se obtiene:

$$x_1^{(k+1)} = \frac{b_1 - a_{12} \cdot x_2^{(k)} - a_{13} \cdot x_3^{(k)}}{a_{11}}$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{b_2 - a_{21} \cdot x_1^{(k)} - a_{23} \cdot x_3^{(k)}}{a_{22}}$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{b_3 - a_{31} \cdot x_1^{(k)} - a_{32} \cdot x_2^{(k)}}{a_{33}}$$

(2)

Método de Jacobi

- Además se requiere de un vector inicial

$$x_i = (x_1^{(k)},\ x_2^{(k)}, x_3^{(k)})$$

el cual representa la primera aproximación de la solución del sistema, con lo que se produce $\mathbf{x}^{k+1}$.

- Este vector si no se conoce se puede asumir como:

$$x_0 = (0^{(0)},\ 0^{(0)}, 0^{(0)})$$

- Con estos valores y las fórmulas de las ecuaciones (2) se van calculando los nuevos valores de $\mathbf{x}_i$

- El proceso se continua hasta que $| x_{i+1} - x_i| \le e_a$.

Método de Jacobi

Ejemplo 1:

Resolver el siguiente sistema de tres ecuaciones por el Método de Jacobi, para un ε_a = 5% :

$$\begin{aligned} 17X_1 - 2X_2 - 3X_3 &= 500 \\ -5X_1 + 21X_2 - 2X_3 &= 200 \\ -5X_1 - 5X_2 + 22X_3 &= 30 \end{aligned}$$

Las siguientes fórmulas las utilizamos para encontrar X_1, X_2 y X_3 en cada una de las iteraciones

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}} \qquad x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3}{a_{22}}$$

$$x_3 = \frac{b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2}{a_{33}}$$

Método de Jacobi

- Para la primera iteración el valor de X_1, X_2 y X_3 a sustituir en cada una se asumirá como cero.
- Aplic

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}}$$

$$x_1 = \frac{500 - (-2)\cdot 0 - (-3)\cdot 0}{17}$$

$$x_1 = 29{,}41176$$

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3}{a_{22}}$$

$$x_2 = \frac{200 - (-5)\cdot 0 - (-2)\cdot 0}{21}$$

$$x_2 = 9{,}52381$$

$$x_3 = \frac{b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2}{a_{33}}$$

$$x_3 = \frac{30 - (-5)\cdot 0 - (-5)\cdot 0}{22}$$

$$x_3 = 1{,}36364$$

Método de Jacobi

- Para la segunda iteración el valor de X_1, X_2 y X_3 serán los calculados anteriormente.
- Aplicando (2) se obtiene:

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}}$$
$$x_1 = \frac{500 - (-2)\cdot 9{,}52381 - (-3)\cdot 1{,}36364}{17}$$
$$x_1 = 30{,}77285$$

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3}{a_{22}}$$
$$x_2 = \frac{200 - (-5)\cdot 29{,}41176 - (-2)\cdot 1{,}36364}{21}$$
$$x_2 = 16{,}65648$$

$$x_3 = \frac{b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2}{a_{33}}$$
$$x_3 = \frac{30 - (-5)\cdot 29{,}41176 - (-5)\cdot 9{,}52381}{22}$$
$$x_3 = 10{,}21263$$

Método de Jacobi

- Una vez obtenidos estos resultados se debe calcular el error aproximado porcentual para cada uno de los resultados, para ello utilizamos la siguiente fórmula:

$$\varepsilon_a = \left| \frac{x_r^{nuevo} - x_r^{anterior}}{x_r^{nuevo}} \right| \cdot 100\%$$

$$\varepsilon_{ax1} = \left| \frac{30{,}77285 - 29{,}41176}{30{,}77285} \right| \cdot 100\%$$

$$\varepsilon_{ax1} = 4{,}423\% < 5\%$$

$$\varepsilon_{ax2} = \left| \frac{16{,}65648 - 9{,}52381}{16{,}65648} \right| \cdot 100\%$$

$$\varepsilon_{ax2} = 42{,}822\% > 5\%$$

$$\varepsilon_{ax3} = \left| \frac{10{,}21263 - 1{,}36364}{10{,}21263} \right| \cdot 100\%$$

$$\varepsilon_{ax3} = 86{,}648\% > 5\%$$

Dado que no se cumple con el εa se debe continuar iterando.

Método de Jacobi

- Siguiendo el mismo procedimiento, se obtiene el siguiente cuadro de resultados:

Iteración	x_1	x_2	x_3	$\varepsilon_a\ x_1$	$\varepsilon_a\ x_2$	$\varepsilon_a\ x_3$
0	0,00000	0,00000	0,00000			
1	29,41176	9,52381	1,36364			
2	30,77285	16,65648	10,21263	4,423%	42,822%	86,648%
3	33,17358	17,82331	12,14303	7,237%	6,547%	15,897%
4	33,65151	18,57876	12,95384	1,420%	4,066%	6,259%
5	33,88347	18,76977	13,23415	0,685%	1,018%	2,118%

Se resaltan los datos donde los errores obtenidos son menores que 5%, se logra un error aproximado porcentual menor en las tres incógnitas hasta la quinta iteración.

Método de Jacobi

- Si sustituimos estos valores en las ecuaciones originales para verificar los resultados se obtiene:

$$17 *(33,88347) - 2 *(18,76977) - 3 *(13,23415) = 498,77703$$
$$-5 *(33,88347) + 21 *(18,76977) - 2 *(13,23415) = 198,27957$$
$$-5 *(33,88347) - 5 *(18,76977) + 22 *(13,23415) = 27,88513$$

- Al calcular los porcentajes de error de estos resultados se obtiene:

$$\mathrm{Error}_{\mathrm{EC1}} = \frac{500 - 498{,}77703}{500} \cdot 100\% = 0{,}03\%$$

$$\mathrm{Error}_{\mathrm{EC2}} = \frac{200 - 198{,}27957}{200} \cdot 100\% = 0{,}10\%$$

$$\mathrm{Error}_{\mathrm{EC3}} = \frac{30 - 27{,}88513}{30} \cdot 100\% = 0{,}88\%$$

MÉTODOS ITERATIVOS DE SOLUCIÓN

Ejemplo:

$$\begin{array}{ccccccc} 4x_1 & -x_2 & 0x_3 & 0x_4 & = & 1 \\ -x_1 & +4x_2 & -x_3 & 0x_4 & = & 1 \\ 0x_1 & -x_2 & +4x_3 & -x_4 & = & 1 \\ 0x_1 & 0x_2 & -x_3 & +4x_4 & = & 1 \end{array}$$

Solución:

$$\begin{array}{l} x_1 = \frac{x_2}{4} + \frac{1}{4} \\ x_2 = \frac{1}{4} + \frac{x_1}{4} + \frac{x_3}{4} \\ x_3 = \frac{1}{4} + \frac{x_2}{4} + \frac{x_4}{4} \\ x_4 = \frac{1}{4} + \frac{x_3}{4} \end{array} \approx \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

$$x \quad = \quad B \quad x \quad + \quad C$$

MÉTODOS ITERATIVOS DE SOLUCIÓN

Valor Inicial

Cuando no tenemos una aproximación inicial del vector solución, se usa como vector inicial el vector cero, ie

$$x^0 = [0,0,0,0]^T$$

Método de Jacobi

Para determinar $x^{(1)}$ reemplazamos $x^{(0)}$ en el sistema dado ie

MÉTODOS ITERATIVOS DE SOLUCIÓN

Para determinar $x^{(1)}$ reemplazamos $x^{(0)}$ en el sistema dado ie

$$\left.\begin{aligned}
x_1^1 &= \frac{x_2}{4} + \frac{1}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{4} \\
x_2^1 &= \frac{0}{4} + \frac{0}{4} + \frac{1}{4} \Rightarrow x_2 = \frac{1}{4} \\
x_3^1 &= \frac{1}{4} + \frac{0}{4} + \frac{0}{4} \Rightarrow x_3 = \frac{1}{4} \\
x_4^1 &= \frac{1}{4} + \frac{0}{4} \Rightarrow x_4 = \frac{1}{4}
\end{aligned}\right\} \Rightarrow x^{(1)} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)^T$$

MÉTODOS ITERATIVOS DE SOLUCIÓN

Determinando $x^{(2)}$

$$x_1^2 = \frac{1}{4}\left(1 + x_2^2 - 0\right) \qquad \Rightarrow x_1^3 = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{16}$$

$$x_2^2 = \frac{1}{4}\left(1 + 4\left(\frac{1}{4}\right) + 1\left(\frac{1}{4}\right)\right) \Rightarrow x_2^3 = \frac{1}{4}\left(\frac{6}{4}\right) \qquad = \frac{6}{16}$$

$$x_3^2 = \frac{1}{4}\left(1 + 1\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) \qquad \Rightarrow x_3^3 = \frac{1}{4}\left(\frac{6}{4}\right) \qquad = \frac{6}{16}$$

$$x_4^2 = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{4}\right) \qquad \Rightarrow x_4^3 = \frac{1}{4}\left(\frac{5}{6}\right) \qquad = \frac{5}{16}$$

$$\Longrightarrow x^{(2)} = \left(\frac{5}{16}, \frac{5}{16}, \frac{5}{16}, \frac{5}{16}\right)^T$$

MÉTODOS ITERATIVOS DE SOLUCIÓN

R	x_1^R	x_2^R	x_3^R	x_4^R
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.2500	0.2500	0.2500	0.2500
2	0.3125	0.3750	0.3750	0.3125
3	0.3438	0.4219		
4	0.3555	0.4414		
5	0.3604	0.4492		
6	0.3223	0.4524		
7	0.3631	0.4537		
8	0.3634	0.4542		
9	0.3635	0.4544		
10	0.3636	0.4545	0.4545	0.3636

Método Gauss-Seidel

MÉTODOS ITERATIVOS DE SOLUCIÓN

MÉTODO GAUSS – SEIDEL DESPLAZAMIENTO SUCESIVO

Este método se diferencia del anterior en que los valores que se van calculando en la (R + 1) – ésima iteración se usan para calcular los valores restantes de esa misma interacción.

$$x^{R+1} = \begin{pmatrix} x_1^{R+1} \\ x_2^{R+1} \\ x_3^{R+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^R - a_{12}x_3^R) \\ \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{R+1} - a_{23}x_3^R) \\ \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^{R+1} - a_{32}x_2^{R+1}) \end{pmatrix}$$

$$x_i^{R+1} = -\frac{1}{a_{ii}}\left(-b_i + \sum_{\substack{j=i+1 \\ i \neq I}}^{n} a_{i\,j}x^R + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{i-1} a_{i\,j}x^{R+1} \right), \; 1 \leq i \leq n$$

Método de Gauss-Seidel

- Este método en general converge mas rápidamente que el método de Jacobi.
- Supone que una mejor aproximación a la solución, se obtiene sustituyendo los valores parciales calculados, en lugar de asumir una aproximación inicial.
- Utilizando las ecuaciones de (1):

$$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 = b_1$$

$$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 = b_2$$

$$a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3 = b_3$$

Método de Gauss-Seidel

- Y despejando para x_1, x_2 y x_3 y adicionando los valores ya obtenidos, esta se puede expresar como:

$$x_1^{(k+1)} = \frac{b_1 - a_{12} \cdot x_2^{(k)} - a_{13} \cdot x_3^{(k)}}{a_{11}}$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{b_2 - a_{21} \cdot x_1^{(k+1)} - a_{23} \cdot x_3^{(k)}}{a_{22}}$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{b_3 - a_{31} \cdot x_1^{(k+1)} - a_{32} \cdot x_2^{(k+1)}}{a_{33}}$$

El valor de x_1 se calcula con los valores asumidos de x_2 y x_3.

Posteriormente el valor de x_1 obtenido y x_3 asumido, se usan para calcular x_2. Y finalmente el nuevo valor de x_3 sale de los valores calculados x_1 y x_2.

Método de Gauss-Seidel

Ejemplo: Resolver el siguiente sistema de tres ecuaciones por el

Método de Gauss Seidel, para un ε_a = 5% :

$$17X_1 - 2X_2 - 3X_3 = 500$$

$$-5X_1 + 21X_2 - 2X_3 = 200$$

$$-5X_1 - 5X_2 + 22X_3 = 30$$

Las siguientes fórmulas las utilizamos para encontrar X_1, X_2 y X_3 en cada una de las iteraciones

$$\boxed{x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}}}$$

$$\boxed{x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3}{a_{22}}}$$

$$\boxed{x_3 = \frac{b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2}{a_{33}}}$$

Método de Gauss-Seidel

- El valor de x_1 se calcula con los valores asumidos de x_2 y x_3 que en principio es cero. Posteriormente el valor de x_1 obtenido y x_3 asumido (0), se usan para calcular x_2. Y finalmente el nuevo valor de x_3 sale de los valores calculados x_1 y x_2.

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}}$$
$$x_1 = \frac{500 - (-2)\cdot 0 - (-3)\cdot 0}{17}$$
$$x_1 = 29,41176$$

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3}{a_{22}}$$
$$x_2 = \frac{200 - (-5)\cdot 29,41176 - (-2)\cdot 0}{21}$$
$$x_2 = 16,52661$$

$$x_3 = \frac{b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2}{a_{33}}$$
$$x_3 = \frac{30 - (-5)\cdot 29,41176 - (-5)\cdot 16,52661}{22}$$
$$x_3 = 11,80418$$

Método de Gauss-Seidel

- Para la segunda iteración, en el cálculo de X_1 el valor de X_2 y X_3 serán los calculados anteriormente. Entonces para X_1:

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}}$$

$$x_1 = \frac{500 - (-2)\cdot 16,52661 - (-3)\cdot 11,80418}{17}$$

$$x_1 = 33,43916$$

- Para X_2 se utiliza el valor de X_3 de la primera iteración y el de X_1 de la segunda iteración:

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3}{a_{22}}$$

$$x_2 = \frac{200 - (-5)\cdot 33,43916 - (-2)\cdot 11,80418}{21}$$

$$x_2 = 18,60972$$

Método de Gauss-Seidel

Para X_3 se utiliza el valor de X_1 y X_2 calculados en la segunda iteración:

$$x_3 = \frac{b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2}{a_{33}}$$

$$x_3 = \frac{30 - (-5)\cdot 33{,}43916 - (-5)\cdot 18{,}60972}{22}$$

$$x_3 = 13{,}19293$$

- Una vez obtenidos estos resultados, se debe calcular el error aproximado porcentual para cada uno de los resultados, con la fórmula:

$$\varepsilon_a = \left| \frac{x_r^{nuevo} - x_r^{anterior}}{x_r^{nuevo}} \right| \cdot 100\,\%$$

Método de Gauss-Seidel

- Una vez aplicado el cálculo de error se determina que los valores son superiores a la premisa inicial (ε_a = 5%), determinándose que se deben continuar las iteraciones hasta que se cumpla el criterio.

Iteración	x_1	x_2	x_3	ε_a x_1	ε_a x_2	ε_a x_3
0	0,00000					
1	29,41176	16,52661	11,80418			
2	33,43916	18,60972	13,19293	12,044%	11,194%	10,526%
3	33,92931	18,85869	13,36091	1,445%	1,320%	1,257%

- Se resaltan los datos donde los errores obtenidos son menores que 5%, se logra un error aproximado porcentual menor en las tres incógnitas en la tercera iteración

Método de Gauss-Seidel

- Si sustituimos estos valores en las ecuaciones originales para verificar los resultados se obtiene:

17 *(33,92931) – 2 *(18,85869) – 3 *(13,36091) = 498,99813

-5 *(33,92931) + 21*(18,85869) – 2 *(13,36091) = 199,66404

-5 *(33,92931) – 5 *(18,85869) +22 *(13,36091) = 30,00000

- Al calcular los porcentajes de error de estos resultados se obtiene:

$$\mathrm{Error}_{\mathrm{EC1}} = \frac{500 - 498{,}99813}{500} \cdot 100\% = 0{,}20\%$$

$$\mathrm{Error}_{\mathrm{EC2}} = \frac{200 - 199{,}66404}{200} \cdot 100\% = 0{,}17\%$$

$$\mathrm{Error}_{\mathrm{EC3}} = \frac{30 - 30}{30} \cdot 100\% = 0{,}00\%$$

- Los resultados obtenidos son una aproximación muy buena de los valores verdaderos.

MÉTODOS ITERATIVOS DE SOLUCIÓN

Método de Gauss Seidel

$$x^{R+1} = \begin{pmatrix} x_1^{R+1} \\ x_2^{R+1} \\ x_3^{R+1} \\ x_4^{R+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x^{R} - a_{13}x_3^{R} - a_{14}x_4^{R}\right) \\ \dfrac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{R+1} - a_{23}x_3^{12} - x_4^{R}\right) \\ \dfrac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1^{R+1} - a_{32}x_3^{R+1}\right) \end{pmatrix}$$

MÉTODOS ITERATIVOS DE SOLUCIÓN

Determinación del

$$x^{(1)} \quad \frac{1}{a_{44}}\left(b_4 - a_{41}x_1^{R+1} - a_{42}x_2^{R+1} - a_{43}x_3^{R+1}\right)$$

$$x_1^1 = \frac{1}{4}(1+(0)+0) \qquad \Rightarrow x_1^1 = \frac{1}{4}$$

$$x_2^1 = \frac{1}{4}(1+1(1/4)+1(0)) \qquad \Rightarrow x_2^1 = \frac{5}{16}$$

$$x_3^1 = \frac{1}{4}(1+1(1/4)+1(5/16)) \Rightarrow x_3^1 = \frac{25}{64}$$

$$x_4^1 = \frac{1}{4}(1+0+0+25/14) \qquad \Rightarrow x_4^1 = \frac{89}{256}$$

$$\Rightarrow x^1 = \left(\frac{1}{4}, \frac{5}{12}, \frac{25}{64}, \frac{89}{256}\right)$$

MÉTODOS ITERATIVOS DE SOLUCIÓN

Observación:

•La sucesión de vectores $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, \ldots., x^{(R)}, \ldots.$ converge o se aleja del vector solución $x = [x_1, x_2, x_3, \ldots.., x_n]^T$

•Cuando se detendrá el proceso iterativo

•**Rpta:** Si la sucesión converge a la solución *x* caso esperado que los componentes de $x^{(R)}$ converjan a sus elementos

MÉTODOS ITERATIVOS DE SOLUCIÓN

Ejemplo:

Resolver el siguiente sistema con el método de Gauss Seidel con E = 10^{-2} aplicando a $|x^{K+1} - x^{K}|$

$$-x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 10$$

$$x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 4x_4 = 15$$

$$x_2 + x_4 = 2$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 3$$

MÉTODOS ITERATIVOS DE SOLUCIÓN

Resolviendo: x_1 de (1) x_2 de (2) x_3 de (4) y x_4 de (3)

$$x_1 = 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 - 10$$

$$x_2 = -\frac{x_1}{9} - \frac{8x_3}{9} - \frac{4x_4}{9} + \frac{15}{9}$$

$$x_3 = -2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 3$$

$$x_4 = - x_2 + 2$$

MÉTODOS ITERATIVOS DE SOLUCIÓN

Si $x^0 = (0, 0, 0, 0)^T$: determinamos:

K	x_1^K	x_2^K	x_3^K	x_4^K	$\lvert x^{K+1} - x^K \rvert$
0	0	0	0	0	0
1	-10.0000	2.7778	14.222	-0.7778	17.62
2	67.9889	-18.172	-121.2	20.17	159.0
3	-631.1	170.2	1108.0	-168.71	1439.05

MÉTODOS ITERATIVOS DE SOLUCIÓN

El proceso diverge: Luego podemos arreglar las ecuaciones para despejar los diferentes "x" "y", que despejadas sean distintas, para aplicar el teorema se debe tener solo en cuenta una aproximación pues caso contrario son raros en donde se encontraría tales sistemas

$$x_1 = -\frac{x_2}{2} - \frac{x_3}{2} + \frac{x_4}{2} - \frac{3}{2}$$

$$x_2 = -\frac{x_1}{9} - \frac{8x_3}{9} - \frac{4x_4}{9} + \frac{15}{9}$$

$$x_3 = \frac{x_1}{5} - \frac{3x_2}{5} - \frac{2x_4}{5} + \frac{10}{5}$$

$$x_4 = -x_2 + 2$$

$$x_1^K \to x_1$$

$$x_2^K \to x_2$$

$$\vdots$$

$$x_n^K \to x_n$$

Caso contrario se alejan

MÉTODOS ITERATIVOS DE SOLUCIÓN

- Los valores absolutos $|x_1^{K+1} - x_1^{K}|, |x_2^{K+1} - x_2^{K}|, \ldots\ldots, |x_n^{K+1} - x_n^{K}|$ que sean todos menores de número pequeño *E* cuyo valor será dado

- Si el número de iteraciones ha excedido un máximo dado

- Detener el proceso una vez que $|x^{K+1} - x^{K}| < E$

MÉTODOS ITERATIVOS DE SOLUCIÓN

¿Cómo asegurar la convergencia si existe?

El proceso de Jacobi y Gauss – Seidel convergerán si en la matriz de coeficiente cada elemento de la diagonal principal es mayor que la suma de los valores absolutos de todos los demás elementos de la misma fila o columna (matriz diagonal dominante)

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j}}^{n} |a_{ij}| \qquad 1 \leq i \leq n$$

$$y$$

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}} a_{ij} \qquad 1 \leq j \leq n$$

Métodos de Relajación

Método de SOR

MÉTODO DE RELAJACIÓN DE SOR

Este método es muy similar al método de Jacobi y Gauss-Seidel se diferencia por usar una escala para reducir el error de aproximación, es una metodología mas reciente, para determinar $X^{(k)}$ lo realiza con el modelo:

$$x_i^{(k)} = (1-w)x_i^{(k-1)} + \frac{w}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)}\right]$$

0bsevemos que cuanto w=1, tenemos de Gauss-Seidel, cuanto 0<w<1 el procedimiento se llama método de subrelajación y se usa para obtener convergencia cuando el método de Gauss-Seidel no converge.

Método de SOR

Cuando 1<w se le llama método de sobrerrelajación, generalmente se le conoce como el metodo de SOR acrónimo del ingles **Successive Over Relaxation (**Sobre relajación sucesiva) se utilizan para resolver sistemas lineales que aparecen en la resolución de ciertas ecuaciones en derivadas parciales.

Para determinar la forma matricial del método de SOR rescribimos la relación anterior de la siguiente manera:

$$a_{ii}x_i^{(k)} + w\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} = (1-w)a_{ii}x_i^{(k-1)} - w\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)} + wb_i$$

Método de SOR

Ejemplo

$$4x_1 + 3x_2 = 24$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 = 30$$

$$-x_2 + 4x_3 = -24$$

La solución del sistema dado es $(3,4,-5)^t$, usaremos w=1.25 para el método de SOR con un valor inicial de $(1,1,1)^t$, para k=1

Tenemos

$$x_1^{(k)} = -0.25x_1^{(k-1)} - 0.9375x_2^{(k-1)} + 7.5$$

$$x_2^{(k)} = -0.9375x_1^{(k)} - 0.25x_2^{(k-1)} + 0.3125x_3^{(k-1)} + 9.375$$

$$x_3^{(k)} = 0.3125x_2^{(k)} - 0.25x_3^{(k-1)} - 7.5$$

Método de SOR

Cuadro en 7 iteraciones

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$x_1^{(k)}$	1	6.312500	2.6223145	3.133027	2.9570512	3.0037211	2.9963276	3.00004
$x_2^{(k)}$	1	3.5195313	3.9585266	4.0102646	4.0074838	4.0029250	4.0009262	4.00026
$x_3^{(k)}$	1	-6.6501465	-4.6004238	-5.0966863	-4.9734897	-5.0057135	-4.998282	-5.0004

Método Gauss-Seidel con relajación

- El método de Gauss-Seidel con Relajación es muy similar a al método de Gauss-Seidel, la diferencia es que usa un factor de escala para reducir el error de aproximación.

$$\boxed{x_i^{(k)} = x_i^{(k-1)} + \lambda \cdot (x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)})}$$

- Este método obtiene un nuevo valor estimado haciendo una ponderación entre el valor previo y el calculado utilizando un factor de ponderación λ

$$\boxed{x_i^{nuevo} = \lambda \cdot x_i^{nuevo} + (1-\lambda) \cdot x_i^{anterior}}$$

$$0 \leq \lambda \leq 2$$

Método Gauss-Seidel con relajación

- $\lambda = 1$
  - ✓ El resultado no se modifica
  - ✓ Se convierte en la ecuación de Gauss-Siedel

- $\lambda < 1$
  - ✓ Se conoce como **subrelajación**
  - ✓ Para hacer que un sistema no convergente converja o apresure la convergencia al amortiguar las oscilaciones.

- $\lambda > 1$
  - ✓ Se conoce como **sobrerelajación**
  - ✓ Se usa cuando la convergencia va en la dirección correcta hacia la solución verdadera, pero con una velocidad demasiado lenta. Para llevarla más cerca de la verdadera.

- La elección de λ es empírica, se utiliza para la solución de un sistema que se debe resolver de manera repetitiva.

MÉTODOS ITERATIVOS DE SOLUCIÓN

Método Gauss-Seidel con relajación

- Y despejando para x_1 , x_2 y x_3, y adicionando los valores ya obtenidos, esta se puede expresar como:

$$\boxed{x_1^{(k+1)} = \frac{b_1 - a_{12} \cdot x_2^{(k)} - a_{13} \cdot x_3^{(k)}}{a_{11}}}$$

$$\boxed{x_2^{(k+1)} = \frac{b_2 - a_{21} \cdot x_1^{(k+1)} - a_{23} \cdot x_3^{(k)}}{a_{22}}} \qquad \boxed{x_3^{(k+1)} = \frac{b_3 - a_{31} \cdot x_1^{(k+1)} - a_{32} \cdot x_2^{(k+1)}}{a_{33}}}$$

El valor de x_1 se calcula con los valores asumidos de x_2 y x_3.

Posteriormente el valor de x_1 obtenido y x_3 asumido, se usan para calcular x_2. Y finalmente el nuevo valor de x_3 sale de los valores calculados x_1 y x_2.

Método Gauss-Seidel con relajación

Ejemplo 3:

Emplee el método de Gauss-Seidel con relajación para resolver (λ=0.90 y ε_a = 5%):

$$
\begin{aligned}
-5X_1 \qquad\qquad + 12X_3 &= 80\\
4X_1 - 1X_2 - 1X_3 &= -2\\
6X_1 + 8X_2 &= 45
\end{aligned}
$$

Si es necesario reordene las ecuaciones para que el sistema converja.

$$
\begin{bmatrix} -5 & & 12 \\ 4 & -1 & -1 \\ 6 & 8 & \end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 80 \\ -2 \\ 45 \end{bmatrix}
$$

Método Gauss-Seidel con relajación

Verificando el criterio de convergencia:

$$|a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|$$

Para un sistema de 3 x 3 obtenemos:

$$|a_{11}| > |a_{12}| + |a_{13}|$$

$$|a_{22}| > |a_{21}| + |a_{23}|$$

$$|a_{33}| > |a_{31}| + |a_{32}|$$

Método Gauss-Seidel con relajación

Esto quiere decir que el elemento diagonal debe ser mayor al elemento fuera de la diagonal para cada fila. Por tanto reorganizamos el sistema de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 6 & 8 & \\ -5 & & 12 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 45 \\ 80 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} |4| > |-1| + |-1| \\ |8| > |6| \\ |12| > |-5| \end{array}$$

Por lo tanto se puede asegurar la convergencia con este arreglo.

MÉTODOS ITERATIVOS DE SOLUCIÓN

Método Gauss-Seidel con relajación

Para calcular el primer valor de X_1, se asumirán X_2 y X_3 con valores cero. Entonces para X_1,

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}}$$

$$x_1 = \frac{-2-(-1)\cdot 0-(-1)\cdot 0}{4}$$

$$x_1 = -0{,}50000$$

Para calcular el valor de X_2, se utilizará solamente el valor encontrado de X_1, dado que a_{23} es cero.

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3}{a_{22}}$$

$$x_2 = \frac{45-(6)\cdot(-0{,}50000)}{8}$$

$$x_2 = 6{,}00000$$

Para calcular el valor de X_3, se utilizará solamente el valor encontrado de X_1, dado que a_{32} es cero.

$$x_3 = \frac{b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2}{a_{33}}$$

$$x_3 = \frac{80-(-5)\cdot(-0{,}50000)}{12}$$

$$x_3 = 6{,}45833$$

MÉTODOS ITERATIVOS DE SOLUCIÓN

Método Gauss-Seidel con relajación

- Segunda iteración:

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}}$$

$$x_1 = \frac{-2-(-1)\cdot 6{,}0000-(-1)\cdot 6{,}45833}{4}$$

$$x_1 = 2{,}61458$$

$$x_1^{nuevo} = \lambda \cdot x_1^{nuevo} + (1-\lambda)\cdot x_1^{anterior}$$

$$x_1^{nuevo} = 0{,}9\cdot 2{,}61458 + (1-0{,}9)\cdot(-0{,}50000)$$

$$x_1^{nuevo} = 2{,}30313$$

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3}{a_{22}}$$

$$x_2 = \frac{45-(6)\cdot(2{,}30313)}{8}$$

$$x_2 = 3{,}89766$$

$$x_2^{nuevo} = 0{,}9\cdot 3{,}89766 + (1-0{,}9)\cdot(6{,}00000)$$

$$x_2^{nuevo} = 4{,}10789$$

$$x_3 = \frac{b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2}{a_{33}}$$

$$x_3 = \frac{80-(-5)\cdot(2{,}30313)}{12}$$

$$x_3 = 7{,}62630$$

$$x_3^{nuevo} = 0{,}9\cdot 7{,}62630 + (1-0{,}9)\cdot(6{,}45833)$$

$$x_3^{nuevo} = 7{,}50951$$

Método Gauss-Seidel con relajación

- Se debe realizar el cálculo de los errores y se debe continuar iterando hasta que se cumpla la premisa inicial (ε_a = 5%).

Iteración	x_1	x_2	x_3	ε_a x_1	ε_a x_2	ε_a x_3
0	0,00000	0,00000	0,00000			
1	-0,50000	6,00000	6,45833			
2	2,30313	4,10789	7,50951	121,71%	46,06%	14,00%
3	2,39423	3,85719	7,64879	3,81%	6,50%	1,82%
4	2,37827	3,84289	7,65673	0,67%	0,37%	0,10%

- Se resaltan los datos donde los errores obtenidos son menores que 5%, se logra un error aproximado porcentual menor en las tres incógnitas en la cuarta iteración

MÉTODOS ITERATIVOS DE SOLUCIÓN

Método Gauss-Seidel con relajación

- Si sustituimos estos valores en las ecuaciones originales para verificar los resultados se obtiene:

$$4 *(2,37827) - 1 *(3,84289) - 1 *(7,65673) = -1,98655$$

$$6 *(2,37827) + 8 *(3,84289) + 0 *(7,65673) = 45,01271$$

$$-5 *(2,37827) + 0 *(3,84289) + 12 *(7,65673) = 79,98941$$

- Al calcular los porcentajes de error de estos resultados se obtiene:

$$\mathrm{Error}_{EC1} = \frac{-2-(-1,98655)}{-2}\cdot 100\% = 0,67\%$$

$$\mathrm{Error}_{EC2} = \frac{45-45,01271}{45}\cdot 100\% = -0,03\%$$

$$\mathrm{Error}_{EC3} = \frac{80-79,98941}{80}\cdot 100\% = 0,01\%$$

Comparación de Métodos

Ejercicio

- Resolver el siguiente sistema de ecuaciones, para un error εa $\leq$ 5 %, con los tres métodos analizados.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & \\ -1 & 2 & -1 \\ & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 124 \\ 4 \\ 14 \end{bmatrix}$$

MÉTODOS ITERATIVOS DE SOLUCIÓN

Jacobi

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}} \qquad x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3}{a_{22}} \qquad x_3 = \frac{b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2}{a_{33}}$$

$$\varepsilon_a = \left| \frac{x_r^{nuevo} - x_r^{anterior}}{x_r^{nuevo}} \right| \cdot 100\%$$

Iteración	X_1	x_2	x_3	ε_a x_1	ε_a x_2	ε_a x_3
0	0,00000	0,00000	0,00000			
1	62,00000	2,00000	7,00000			
2	63,00000	36,50000	8,00000	1,587%	94,521%	12,500%
3	80,25000	37,50000	25,25000	21,495%	2,667%	68,317%
4	80,75000	54,75000	25,75000	0,619%	31,507%	1,942%
5	89,37500	55,25000	34,37500	9,650%	0,905%	25,091%
6	89,62500	63,87500	34,62500	0,279%	13,503%	0,722%
7	93,93750	64,12500	38,93750	4,591%	0,390%	11,075%
8	94,06250	68,43750	39,06250	0,133%	6,301%	0,320%
9	96,21875	68,56250	41,21875	2,241%	0,182%	5,231%
10	96,28125	70,71875	41,28125	0,065%	3,049%	0,151%

MÉTODOS ITERATIVOS DE SOLUCIÓN

Gauss-Seidel

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}} \qquad x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3}{a_{22}} \qquad x_3 = \frac{b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2}{a_{33}}$$

$$\varepsilon_a = \left| \frac{x_r^{nuevo} - x_r^{anterior}}{x_r^{nuevo}} \right| \cdot 100\%$$

Iteración	x_1	x_2	x_3	ε_a x_1	ε_a x_2	ε_a x_3
0	0,00000					
1	62,00000	33,00000	23,50000			
2	78,50000	53,00000	33,50000	21,019%	37,736%	29,851%
3	88,50000	63,00000	38,50000	11,299%	15,873%	12,987%
4	93,50000	68,00000	41,00000	5,348%	7,353%	6,098%
5	96,00000	70,50000	42,25000	2,604%	3,546%	2,959%

MÉTODOS ITERATIVOS DE SOLUCIÓN

Gauss-Seidel con Relajación

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}} \qquad x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3}{a_{22}} \qquad x_3 = \frac{b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2}{a_{33}}$$

$$x_i^{nuevo} = \lambda \cdot x_i^{nuevo} + (1-\lambda) \cdot x_i^{anterior} \qquad \varepsilon_a = \left| \frac{x_r^{nuevo} - x_r^{anterior}}{x_r^{nuevo}} \right| \cdot 100\%$$

$\lambda = 1,20$

Iteración	x_1	x_2	x_3	ε_a x_1	ε_a x_2	ε_a x_3
0	0,00000	0,00000	0,00000			
1	62,00000	33,00000	23,50000			
2	81,80000	58,98000	39,08800	24,205%	44,049%	39,879%
3	93,42800	70,11360	42,65056	12,446%	15,879%	8,353%
4	97,78256	72,63715	43,45218	4,453%	3,474%	1,845%

Comparación de Métodos

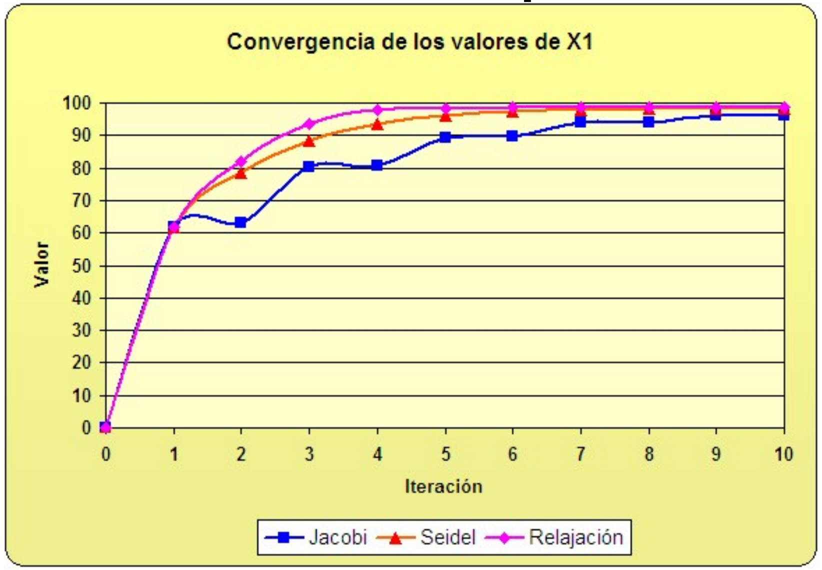
Haciendo un resumen de los resultados obtenidos en la siguiente tabla:

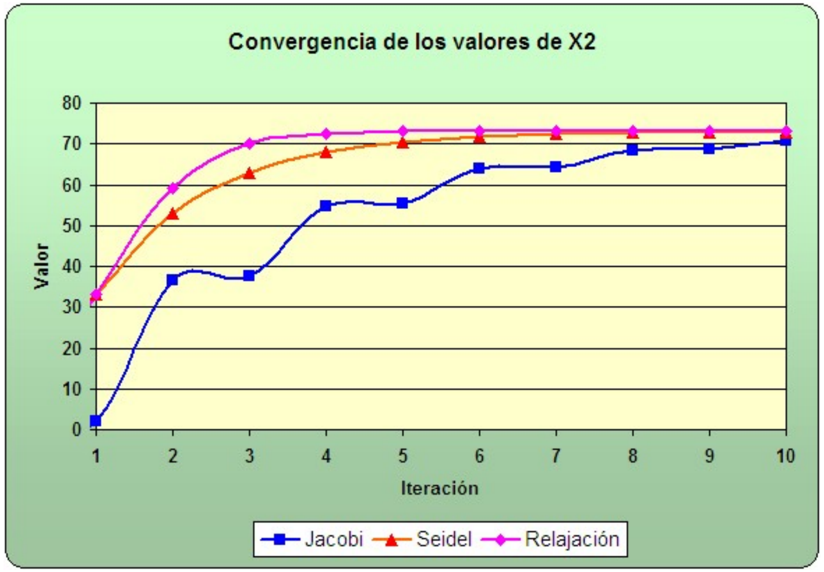
Incógnita	Valores verdaderos	Iteracio-nes	Valores aproximados			Errores verdaderos		
			Jacobi	Seidel	C/Relaj	Jacobi	Seidel	C/Relaj
X_1	98,5	10	96,281	96,000	97,783	2,25%	2,54%	0,73%
X_2	73,0	5	70,719	70,500	72,637	3,13%	3,42%	0,50%
X_3	43,5	4	41,281	42,250	43,452	5,10%	2,87%	0,11%

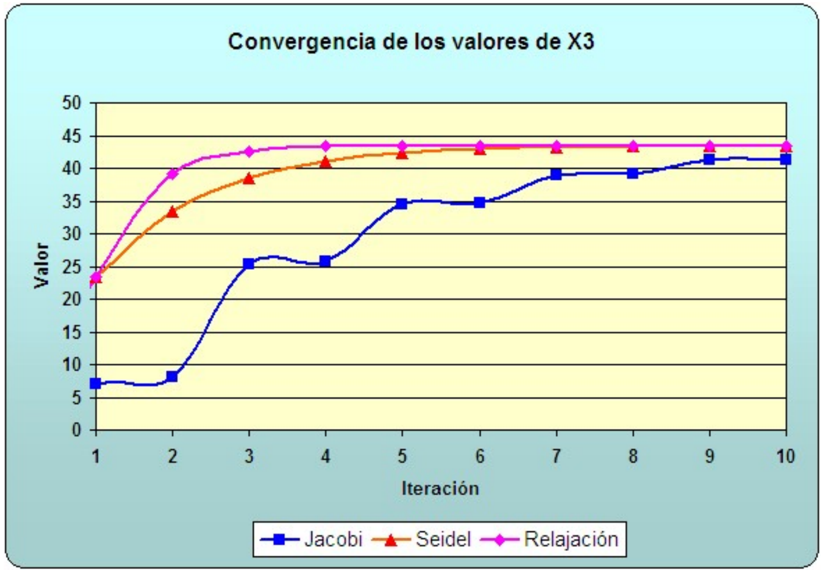
- ✓ El método de Jacobi es el que utiliza una mayor cantidad de iteraciones y que además tiene errores mayores con respecto al valor verdadero.
- ✓ Gauss-Seidel los errores son medianos, pero la cantidad de las iteraciones en mucho menor que en el caso de Jacobi.
- ✓ Gauss-Seidel con relajación se obtienen valores más cercanos a los verdaderos con una cantidad de iteraciones menor. Sin embargo el inconveniente radica en la elección del valor de λ.

MÉTODOS ITERATIVOS DE SOLUCIÓN

Comparación de Métodos







Comparación de Métodos

- ✓ Se observa que para las tres incógnitas con método de Jacobi los resultados son más oscilantes y convergen de forma más lenta.

- ✓ Por el Método de Gauss-Seidel se da una convergencia relativamente rápida.

- ✓ Si al Método de Gauss-Seidel le aplicamos relajación la convergencia es mucho más rápida hacia los valores verdaderos.

Algoritmos

Algoritmos

En la práctica, normalmente utilizamos computadoras para realizar las iteraciones, es por esta razón que necesitamos implementar algoritmos para encontrar soluciones de sistemas n x n mediante los métodos anteriormente descritos.

MÉTODOS ITERATIVOS DE SOLUCIÓN

ALGORITMO DE LOS MÉTODOS DE JACOBI – GAUSS SEIDEL

Para solucionar el sistema de Ax = b

Datos: Número de ecuaciones N

La matriz de coeficientes A

El vector de términos independientes b

El vector inicial xº

El número de iteración MATIZ

El valor de *Eps.* y M = 0 para usar Jacobi y M ≠ 0 para usar Gauss Seidel obtenemos la solución aproximada x y el número de iteraciones K o el mensaje “No se alcanzó la convergencia”

MÉTODOS ITERATIVOS DE SOLUCIÓN

Paso1: Arreglar la matriz aumentada de manera que la matriz coeficiente quede lo más cercano posible a la diagonal dominante

Paso2: Hace $K = 1$

Paso3: Mientras $K \leq Maxit$ repetir los pasos 4 a 18

Paso4: Si $M = 0$ ir al paso 5 de otro modo hacer $x = x^{o}$

Paso5: Hacer $I = 1$

Paso6: Mientras $I \leq N$ repetir los pasos 7 al 14

Paso7: Hacer suma = 0

Paso8: Hacer $J = 1$

Paso9: Mientras $J \leq N$, repetir los pasos 10 a 12

Paso10: Si $J = I$ ir al paso 12

MÉTODOS ITERATIVOS DE SOLUCIÓN

Paso11: Hacer suma = suma + A(IJ) * xº(J)

Paso12: Hacer J = J + 1

Paso13: Si M = 0 hacer

x(J) = -(b(J) - suma)/A(JJ)

de otro modo hacer

xº(I) = (b(J) – suma)/A(JJ)

Paso14: Hacer I = J + 1

MÉTODOS ITERATIVOS DE SOLUCIÓN

Paso15: Si $|x - x^{o}| \leq$ *Eps.* Ir al paso 19

de otro modo hacer

Paso16: Si $M = 0$, hacer $x^{o} = x$

Paso17: Hacer $K = K + 1$

Paso18: Imprimir mensaje "No se alcanzó la convergencia", el vector x, MAXIT

Paso19: Imprimir el mensaje "Vector Solución", x, K y el mensaje iteraciones terminada

Algoritmo Jacobi

For k=1,2,…

  For i=1,2,…, n

    xi=0

    For j=1,2,…,i-1,i+1,…,n

    End $x_i = x_i + a_{ij} X_j^{k-1}$

  End $x_i = (b_i - x_i)/a_{ii}$

End

$x^k = x$

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j \neq i}^{n} a_{i,j} \cdot x_j^{(k-1)} \right)$$

Algoritmo Gauss-Seidel

```
For k=1,2,…
        For i=1,2,…, n
            sum=0
            For j=1,2,…,i-1,
```

$$sum = sum + a_{ij} X_j^k$$

```
            End
            For j=i+1,…,n
```

$$sum = sum + a_{ij} X_j^{k-1}$$

```
            End
```

$$x_i^k = (b_i - sum) / a_{ii}$$

```
        End
End
```

$$x_i^k = \frac{\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^k - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{k-1} \right]}{a_{ii}}$$

MÉTODOS ITERATIVOS DE SOLUCIÓN

Algoritmo Gauss-Seidel con relajación

For k=1,2,…

    For i=1,2,…, n

        sum=0

        For j=1,2,…,i-1,

$$sum = sum + a_{ij} X_j^k$$

        End

        For j=i+1,…,n

$$sum = sum + a_{ij} X_j^{k-1}$$

        End

$$x_i^k = (b_i - sum) / a_{ii}$$

    End

$$x_i^k = x_i^{k-1} + \lambda(x_i^k - x_i^{k-1})$$

End

$$x_i^k = \frac{\lambda}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^k - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{k-1}\right] + (1-\lambda)\cdot X_i$$

MÉTODOS ITERATIVOS DE SOLUCIÓN

Resumen de los pasos de los métodos iterativos Jacobi, Gauss-Seidel sin y con relajación

Desplazamiento succesivo

Desplazamiento simultáneo

Primera iteración

Gauss-Seidel	Iterativo de Jacobi
$x_1 = (c_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3)/a_{11}$	$x_1 = (c_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3)/a_{11}$
$x_2 = (c_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3)/a_{22}$	$x_2 = (c_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3)/a_{22}$
$x_3 = (c_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2)/a_{33}$	$x_3 = (c_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2)/a_{33}$

Segunda iteración

Gauss-Seidel	Iterativo de Jacobi
$x_1 = (c_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3)/a_{11}$	$x_1 = (c_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3)/a_{11}$
$x_2 = (c_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3)/a_{22}$	$x_2 = (c_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3)/a_{22}$
$x_3 = (c_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2)/a_{33}$	$x_3 = (c_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2)/a_{33}$

Gauss-Seidel con relajación

$$x_i^{nuevo} = \lambda x_i^{nuevo} + (1-\lambda)x_i^{anterior}$$

Síntesis

Los métodos iterativos son óptimos para grandes sistemas y son mejor aprovechados cuando se tienen matrices esparcidas.

Estos métodos iterativos están basados en el concepto de punto fijo, es decir ($x_i = g_i$ (x), i = 1.. n), para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Para garantizar la convergencia se debe de cumplir que el sistema tenga una diagonal dominante, es decir que se cumpla la desigualdad siguiente, si se cambio el orden de las ecuaciones esta puede divergir

$$a_{ii} > \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij}$$

Síntesis

Para mejorar la convergencia, se usan técnicas como:
Utilización de los cálculos previos asumiendo que una mejor aproximación que el vector de condiciones iniciales. (Gauss-Siedel)
Un factor de ponderación para reducir el error residual (Relajación)

La selección de un vector de condiciones iniciales apropiado ayuda a reducir el número de iteraciones.

La selección de λ es de carácter práctico y de su elección se pueden lograr también que el número total de iteraciones se reduzcan.

La finalización del cálculo de iteraciones se logra cuando todos los elementos de vector de residual están debajo de la tolerancia requerida.

El método de Jacobi presenta mas oscilaciones que los métodos de Gauss-Siedel y relajación.

Métodos de Gradiente

MÉTODOS DEL DESCENSO MÁS RÁPIDO DEL GRADIENTE CONJUGADO

En esta oportunidad reflexionaremos sobre algunos métodos especiales para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

$$Ax = b$$

En donde la matriz A es de orden nxn simétrica y definida positiva, en otras palabras, $A^T = A$,y $x^T Ax > 0, para\ todo\ x \neq 0$ debemos recordar que el producto escalar de dos vectores X ,Y de componentes reales es:

$$\langle x, y \rangle = x^T y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Propiedades

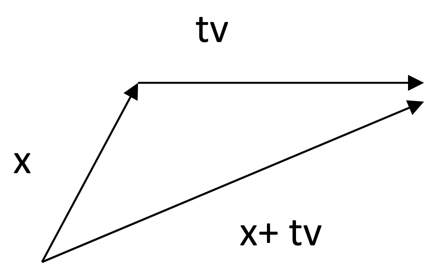
1. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$
2. $\langle \propto x, y\rangle = \propto \langle x, y\rangle, \, para\, todo\, \propto$
3. $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$
4. $\langle x, Ay\rangle = \langle A^T x, y\rangle$

Observemos que la propiedad 1 se refiere al orden de los elementos, 2, y 3 indican que se pueden invertir.

MÉTODOS DEL DESCENSO MÁS RÁPIDO DEL GRADIENTE CONJUGADO

Recordemos que si A es simétrica y definida positiva, entonces el problema de resolver Ax=b es equivalente al problema: $q(x) = \langle x, Ax \rangle - 2\langle x, b \rangle$

Veamos por que esta afirmación es cierta; primero veamos como se comporta q(x) a lo largo de un rayo unidimensional. Para lo cual consideremos x+tv en donde x y v son vectores y t un escalar gráficamente tenemos



Mediante un calculo directo tenemos que para todo escalar t :

$$q(x+tv) = \langle x+tv, A(x+tv)\rangle - 2\langle x+tv, b\rangle$$

$$q(x+tv) = \langle x, Ax\rangle + t\langle x, Av\rangle + t\langle v, Ax\rangle + t^2\langle v, Av\rangle - 2\langle x, b\rangle - 2\langle v, b\rangle$$

$$q(x+tv) = q(x) + 2t\langle v, Ax\rangle - 2t\langle v, b\rangle + t^2\langle v, Av\rangle$$

$$q(x+tv) = q(x) + 2t\langle v, Ax-b\rangle + t^2\langle v, Av\rangle \quad (*)$$

Como A es simétrica es decir $A^T = A$, entonces en la ecuación (*) el coeficiente de t^2, es positivo, de esta manera la función cuadrática sobre el rayo unidimensional tiene un mínimo y no un máximo.

Calculando la derivada de la ecuación (*) con respecto a t.

$$\frac{d}{dt}q(x+tv) = 2\langle v, Ax - b\rangle + 2t\langle v, Av\rangle$$

Cuando la derivada es cero, existe un mínimo de q a lo largo del rayo unidimensional en este caso el valor de t es: $\hat{t} = \frac{\langle v, b - Ax \rangle}{\langle v, Av \rangle}$,

en consecuencia usando este valor podemos determinar el mínimo de q sobre el rayo unidimensional

$$q(x + \hat{t}v) = q(x) + \hat{t}\,[2\langle v, Ax - b\rangle + \hat{t}\,\langle v, Av\rangle]$$

$$q(x + \hat{t}v) = q(x) + \hat{t}\,[2\langle v, b - Ax\rangle + \langle v, b - Ax\rangle]$$

$$q(x + \hat{t}v) = q(x) - \hat{t}\;\langle v, b - Ax\rangle$$

$$q(x + \hat{t}v) = q(x) - \frac{\langle v, b - Ax\rangle^2}{\langle v, Av\rangle} \qquad (**)$$

MÉTODOS DEL DESCENSO MÁS RÁPIDO DEL GRADIENTE CONJUGADO

Lo que quiere decir esto es que al pasar q(x) de **x** a $x + \hat{t}\,v$, siempre hay una reducción en el valor de q(x), a menos que v sea ortogonal al residuo es decir $\langle v, b - Ax \rangle = 0$

Si x no es una solución del sistema Ax=b entonces existen una diversidad de vectores que satisfacen

$$\langle v, b - Ax \rangle \neq 0$$

Por lo tanto $Ax \neq b$ entonces x no minimiza q(x) y por lo contrario si Ax=b no existe ningún rayo unidimensional que salga de x sobre el cual q(x) tome un valor menor a q(x), en consecuencia una x con las características es un mínimo para q(x).

Debemos manifestar que la reflexión anterior sugiere la existencia de los métodos iterativos para resolver Ax=b, luego entonces procedemos de manera natural por minimizar q(x) a lo largo de una sucesión de rayos. Es decir el algoritmo dispondrá de un proceso de:

$$X^{(0)}, X^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, X^{(k)}$$

En seguida nos preocupa determinar la dirección de búsqueda adecuada

Nuestro algoritmo será

$$X^{(K+1)} = X^{(K)} + t_K v^{(K)}$$

En donde

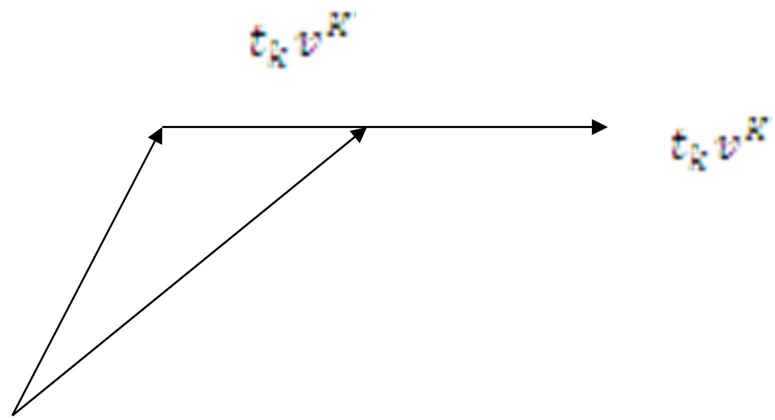
$$t_K = \frac{\langle V^{(K)}, b - Ax^{(K)} \rangle}{\langle V^{(K)}, AV^{(K)} \rangle}$$

Debemos decir que una diversidad de métodos iterativos tienen la forma general:

$$X^{(K+1)} = X^{(K)} + t_K v^{(K)}$$

MÉTODOS DEL DESCENSO MÁS RÁPIDO DEL GRADIENTE CONJUGADO

Para valores particulares del escalar t_K, y los valores de v^K, si $\|v^K\| = 1$, entonces t_k, mide la distancia que nos movemos de x^K, para hasta la obtención de x^{k+1}, ver la siguiente figura.



MÉTODO DEL DESCENSO MÁS RÁPIDO

Este método se le considera dentro del grupo de métodos iterativos que usan el algoritmo anterior, considera que v^K, debería ser el gradiente negativo de q(x) en $x^{(k)}$, resultando que este gradiente apunta en la dirección del residuo

Es decir tenemos:

$$r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$$

Es decir tenemos:

input $x^{(0)}$, A, b, M

output 0, $x^{(0)}$

for k=0,1,2,…, M-1 do

$$v^{(k)} \leftarrow b - Ax^{(k)}$$

$$t_K \leftarrow \frac{\langle V^{(K)}, b - Ax^{(K)} \rangle}{\langle V^{(K)}, AV^{(K)} \rangle}$$

$$x^{(K+1)} \leftarrow x^{(K)} + t_K v^{(K)}$$

output k+1, $x^{(k+1)}$

end

Debemos destacar al programar este algoritmo no es necesario conservar los vectores de la sucesión , lo mismo ocurre con , de manera el algoritmo seria:

input x, A, b, M

output 0, x)

for k=0,1,2,..., M-1 do

$$v \leftarrow b - Ax$$

$$t \leftarrow \frac{\langle V \;, b - Ax \;\rangle}{\langle V \;, AV \;\rangle}$$

$$\cdot x \leftarrow x + t\, v$$

output k, x)

end

Debemos destacar que este método generalmente no se aplica a este tipo de problemas como consecuencia de su lentitud

MÉTODO DEL GRADIENTE CONJUGADO

Otro método considerado dentro del algoritmo analizado anterior es el método del gradiente conjugado de Hestenes y Stiefel, el cual es aplicado a sistemas de la forma Ax=b, en donde A es considerada simétrica y definida positiva.

En este método las direcciones $\mathbf{v}^K$, son elegidas de una en una en el proceso iterativo y forman un sistema A-ortogonal, los residuos $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$ forman un sistema ortogonal es decir,

$$\langle r^{(i)}, r^{(j)} \rangle = 0 \;\; para \; i \neq j$$

MÉTODO DEL GRADIENTE CONJUGADO

Debemos decir que este método es preferible que el método de eliminación Gaussiana simple cuando la matriz A es muy grande y rala.

Este método en su inicio fue muy sorprendente e importante pero después de dos décadas las cosas ya no fue así como consecuencia que se descubrió que la terminación finita no era asequible en la práctica.

MÉTODO DEL GRADIENTE CONJUGADO

Pues la terminación finita era indeseable para un método directo, sin embargo posteriormente cuando se le considero como un método iterativo las cosas fue diferente, pues en estos métodos no es necesario obtener una solución absoluta después de n pasos lo que se espera es obtener una respuesta satisfactoria.

MÉTODOS DEL DESCENSO MÁS RÁPIDO DEL GRADIENTE CONJUGADO

La ejecución del algoritmo en una computadora precisa de un lugar de almacenamiento para cuatro vectores $x^{(k)}, r^{(k)}, v^{(k)}, Av^{(k)}$

$$
\begin{array}{l}
input\ x, A, b, M, \varepsilon, \delta \\
\qquad r \leftarrow b - Ax \\
\qquad v \leftarrow r \\
\qquad c \leftarrow \langle r, r \rangle \\
for\ k = 1, 2, \ldots, M\ do \\
\qquad if\ \langle v, v \rangle^{1/2} < \delta\ then\ stop \\
\qquad z \leftarrow Ax \\
\qquad t \leftarrow \dfrac{c}{\langle v, z \rangle} \\
\qquad x \leftarrow x + tv \\
\qquad r \leftarrow r - tz \\
\qquad d \leftarrow \langle r, r \rangle \\
\qquad if\ d^2 < \varepsilon\ then\ stop \\
\qquad v \leftarrow r + \left(\dfrac{d}{c}\right) v \\
\qquad c \leftarrow d \\
\qquad output\ k, x, r \\
end
\end{array}
$$

Convergencia

CONVERGENCIA

LONGITUD DE UN VECTOR

Supongamos x un vector en R^2, su longitud denotado por $|x|$ es definido como un número positivo o cero.

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

En términos de producto punto

$$|x| = \sqrt{x.x} \qquad \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

CONVERGENCIA

Ejemplo: sea $x = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ determinar su norma

$$|x| = \sqrt{x.x} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} = 7.0711$$

Debemos tener en consideración que el campo de los números reales R tiene el defecto de que un polinomio de grado n con coeficientes reales no necesariamente tiene n ceros reales

ejemplo $p(x) = x^2 - 2x + 2$

CONVERGENCIA

,

Su conjugado, norma, o modulo, se le define:

$$\overline{x} = a - bi \qquad |x| = \sqrt{x.x} = \sqrt{a_1^2 + bx_2^2}$$

$$\overline{\overline{x}} = x, x\overline{x} = |x|^2$$

- El campo de los complejos ya no tiene la anomalía de los reales, es mas tenemos el teorema fundamental del algebra, que establece que todo polinomio no constante con coeficientes complejos tiene al menos un cero en el plano complejo.
- La afirmación anterior permite afirmar que todo polinomio de grado n se puede descomponer como un producto de n factores lineales.

CONVERGENCIA

,

ESPACIO VECTORIAL C^n

El espacio vectorial C^n, esta compuesto de todos $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ los vectores en donde los $x_j \in C, para\ 1 \leq j \leq n$

Si al vector complejo x es multiplicado por α también complejo el resultado es otro vector complejo.

En consecuencia C^n, es un espacio vectorial sobre el cambo de escalares C. En consecuencia en este espacio C^n. El producto interno se define

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i$$

CONVERGENCIA

NORMA DE VECTORES

Una norma en R^n es una función de $\| \ \|$ de R^n en R que verifica las propiedades

$$\|x\| \geq 0, para\ todo\ x \in R^n$$

$$\|x\| = 0\ si\ solo\ si\ x = (0,0,\ldots,0)^t = 0$$

$$\|\propto x\| = |\propto|\|x\|, para\ todo\ \propto \in R\ y\ x \in R^n$$

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|, para\ todo\ x,y \in R^n$$

CONVERGENCIA

La norma Euclidiana se define:

$$\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

Podemos observar que,

$$\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$$

$$\langle x, \lambda y\rangle = \overline{\lambda}\langle x, y\rangle$$

$$\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$$

Consideremos A una matriz con elementos complejos, y A^* denota su conjugada transpuesta es decir $(A^*)_{ij} = \overline{A_{ji}}$ en particular, si x es una matriz de nx1 (o vector columna), entonces $x^* = (\overline{x_i})$, es una matriz de 1xn o vector fila,

CONVERGENCIA

$$y^{*}x = \langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i$$

$$x^{*}x = \langle x, x\rangle = \|x\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{x}_i = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2$$

En general podemos definir norma de un vector x

$$\|x\|_p = \left(x_1^p + x_2^p + \cdots\right)^{\frac{1}{p}} \qquad 1 \leq p \leq \infty$$

Como casos particulares tenemos la norma Euclidiana cuando p=2

$$\|x\|_2 = \left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots\right)^{\frac{1}{2}} \qquad 1 \leq 2 \leq \infty$$

CONVERGENCIA

Máximo valor absoluto

$$\|x\|_{max} = \max|x_i|$$

$$\|x\| \geq 0$$

$$\|ax\| = |a|\|x\|$$

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Estas propiedades son familiares en relación a la norma Euclidiana o “longitud” de un vector.

La norma de una matriz cuadrada, A , puede ser definida en forma consistente con la definición de norma de un vector:

CONVERGENCIA

La norma llamado generalmente norma infinito

$$\|x\|_\infty = \max_{1<i<n} |x_i|$$

Ejemplo:

Dado el vector $x = (-1, 1, -2)^T$

determinar sus normas Euclidiana e Infinito

$$\|x\|_2 = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1<i<3} \{|-1|, |1|, |-2|\} = 2$$

CONVERGENCIA

DISTANCIA EN ENTRE VECTORES

Dado dos vectores en R^n, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$, la distancia l_2 y , l_∞ entre x e y se definen :

$$\|x - y\| = \left\{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right\}^{1/2}$$

$$\|x - y\|_\infty = \max_{1<i<n}\{|x_i - y_i|\}$$

CONVERGENCIA

Ejemplo: Dado el sistema:

$$3.3330x_1 + 1.5920x_2 - 10.333x_3 = 15.913$$
$$2.2220x_1 + 16.710x_2 + 9.6120x_3 = 28.544$$
$$1.5611x_1 + 5.1791x_2 + 1.6852x_3 = 8.4254$$

Consideremos la solución inicial, $x = (1.0000, 1.0000, 1.0000)^T$, usamos eliminación de Gauss con Pivoteo parcial usando aritmética de cinco cifras con redondeo, obtenemos la siguiente solución:

$$\overline{x} = (\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3},)^T = (1.2001, 0.99991, 0.925438)^T$$

CONVERGENCIA

Las dos medidas de la exactitud de aproximación de a x son:

$$\|x-\bar{x}\|_2$$

$$= \{(1.00000-1.2001)^2 + (1.00000-0.99991)^2 + (1.00000-0.925438)^2\}^{1/2}$$

$$\|x-\bar{x}\|_2 = \{(0.2001)^2 + (0.00009)^2 + (0.07462)^2\}^{1/2} = 0.21356$$

$$\|x-\bar{x}\|_\infty = \max_{1<i<3}\{|1.0000-1.2001|, |1.0000-0.99991|, |1.0000-0.92538|\}$$

$$\|x-\bar{x}\|_\infty = \max_{1<i<3}\{0.2001,, 0.00009, 0.07462\} = 0.2001$$

CONVERGENCIA

Observamos que las componentes $\overline{x_2}$ y $\overline{x_3}$ son buenas aproximaciones a x_2 y a x_3, y la primera componente es una aproximación muy pobre en términos de distancias de ambas normas.

Pues el término de distancia en R^n , es utilizada para definir el limite de una sucesión de vectores.

Diremos que una sucesión de vectores $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ $en\ R^n$ converge a x con respecto a la norma ||*|| si dado $\varepsilon > 0$ cualquier existe un entero $N(\varepsilon)$ tal que: $\|x^{(k)} - x\| < \varepsilon, para\ todo\ k \geq N(\varepsilon)$

CONVERGENCIA

Ejemplo. Dada $x^{(k)} \in R^4$ la sucesión definida:

$$x^k = (x_1^k, x_2^k, x_3^k, x_4^k)^t = \left(1, 2 + \frac{1}{k}, \frac{3}{k^2}, e^{-k} senk\right)^t$$

Tenemos que,

$$\lim_{k\to\infty} 1 = 1;\ \lim_{k\to\infty}\left(2+\frac{1}{k}\right) = 2; \lim_{k\to\infty}\left(\frac{3}{k^2}\right) = 0; \lim_{k\to\infty}(e^{-k} senk) = 0$$

Es así que podemos encontrar un numero entero de tal manera que para todos los números

$$\left|x_1^{(k)} - 1\right|; \left|x_2^{(k)} - 2\right|; \left|x_3^{(k)} - 0\right|; \left|x_4^{(k)} - 0\right|$$

CONVERGENCIA

son menores que ε lo que nos afirma esto es que la sucesión $\{x^k\}$ converge a $(1,2,0,0)^t$ con respecto a la norma $\|\cdot\|_\infty$

Los siguientes términos son equivalentes:

La sucesión de vectores $\{x^k\}$, converge a x con respecto a alguna norma.

La sucesión de vectores $\{x^k\}$, converge a x con respecto a todas las normas.

El $\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i$, la componente i-ésima de x, para cada i =1,2,..,n sucesión $\{x^k\}$ de vectores, converge a x con respecto a alguna norma.

CONVERGENCIA

NORMAS MATRICIALES

Una norma matricial en el espacio de matricial *nxn* es una función de variable real $\|*\|$ que verifica las siguientes condiciones para todas las matrices A y B de dimensión nxn y todos los números reales

$$\|A\| \geq 0$$

$$\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$$

$$\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$$

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$$

CONVERGENCIA

NORMA MATRICIAL MÁXIMO O SUBORDINADA

Es la norma $\|*\|$, vectorial en R^n, la cual se le define sobre el conjunto de todas las matrices de orden nxn así

$$\|X\| \quad R^n \to R$$

$$\|x\| \quad = \max_{\|x\|=1} \|A\|$$

Consecuentemente las normas que consideramos son:

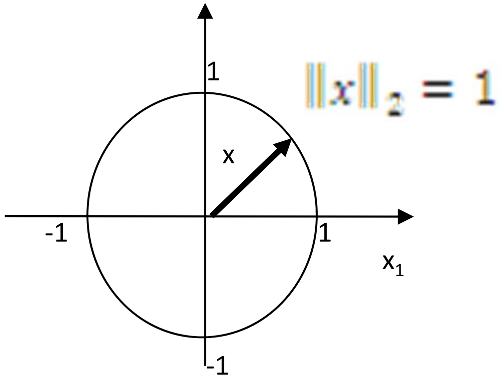
$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2} \|A\|_2 , \qquad norma\ l_2$$

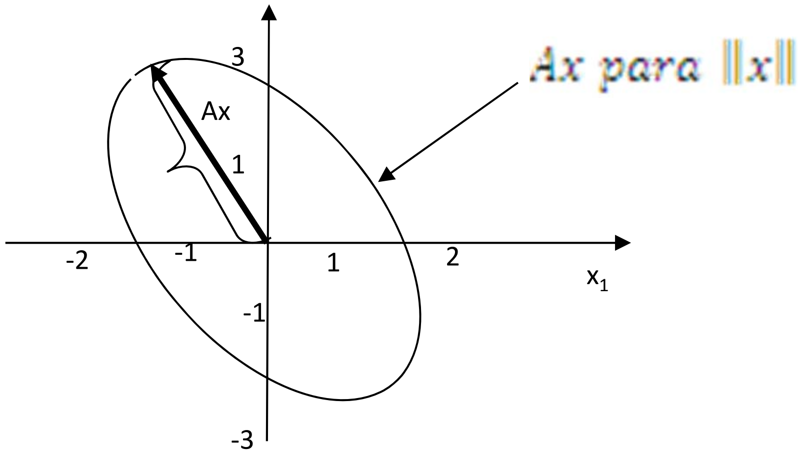
$$\|A\|_\infty = \max_{\|x\|_\infty = 1} \|Ax\|_\infty , \qquad norma\ l_\infty$$

CONVERGENCIA

Cuando n=2 su interpretación gráfica es:

$\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2} \|A\|_2, \qquad norma\ l_2$

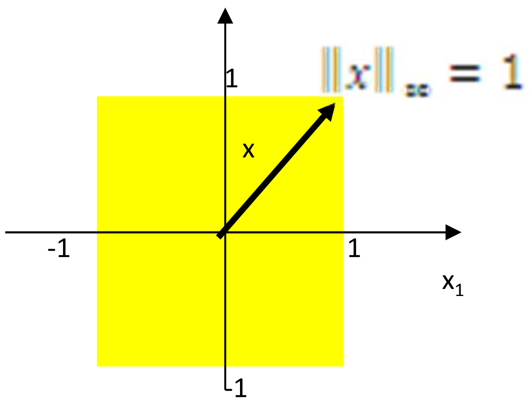


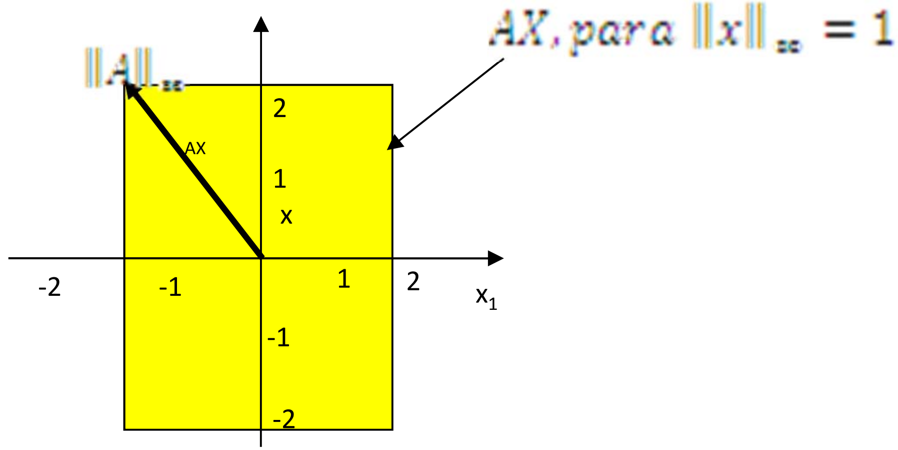


CONVERGENCIA

Norma de una matriz

$$\|A\|_{\infty} = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$





CONVERGENCIA

Ejemplo: dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -6 \\ 5 & -9 & 1 \end{bmatrix}$

Determinar $\|A\|_{\infty} = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

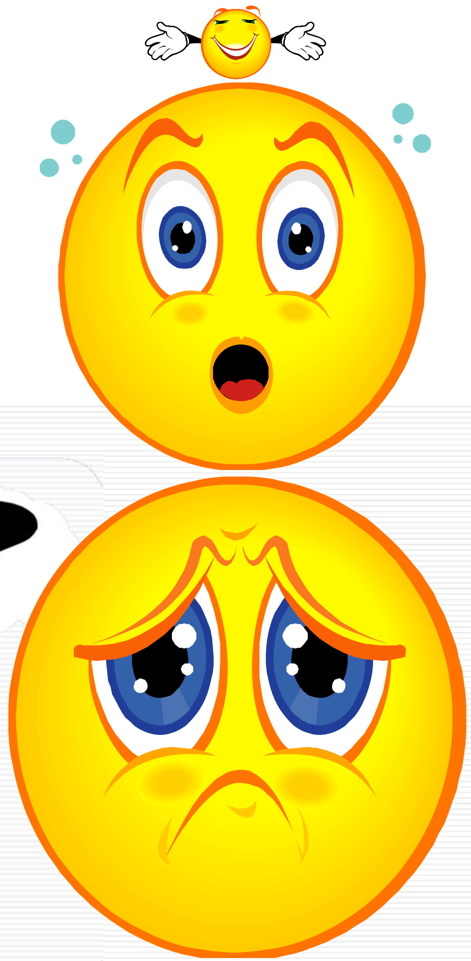
Solución

$$\sum_{j=1}^{3} |a_{1j}| = |3| + |2| + |-1| = 6$$

$$\sum_{j=1}^{3} |a_{2j}| = |0| + |3| + |-6| = 9$$

$$\sum_{j=1}^{3} |a_{3j}| = |5| + |-9| + |1| = 15$$

$$\|A\|_{\infty} = \max\{6, 9, 15\} = 15$$



Muchas Gracias