

Centre des Métiers d'Education et de Formation
Casablanca- Settat
Annexe Provinciale de Settat

Cycle de préparation au concours d'agrégation
Sciences Industrielles de l'Ingénieur (SII)
Ingénierie Mécanique (IM)

COURS

ELASTICITE LINEAIRE

M'hammed EL ALLAMI
m.elallami@gmail.com

Table des matières

Table des matières	2
Chapitre 1 Contraintes.....	6
1.1 Vecteur contrainte en un point M.....	6
1.1.1 Contrainte normale et contrainte tangentielle :	6
1.2 Tenseur des contraintes	7
1.3 Equation d'équilibre	8
1.4 Relation de Cauchy	9
1.5 Contraintes et directions principales	10
1.5.1 Valeurs propres et vecteurs propres	10
1.5.2 Repère principal, directions et contraintes principales.....	10
1.5.3 Invariants scalaires	11
1.6 Tenseur sphérique et tenseur déviateur	12
1.6.1 Compression isotrope.....	12
1.6.2 Invariants du tenseur déviateur	13
1.7 Cercle de Mohr des contraintes	13
1.7.1 Cercle de Mohr dans le plan.....	13
1.7.2 Tri- cercles de Mohr des contraintes	15
1.8 Etats de contrainte particuliers	17
1.8.1 Traction-compression.....	17
1.8.2 Cisaillement simple.....	17
1.8.3 Etat sphérique ou compression hydrostatique.....	18
1.8.4 Etat plan de contraintes	18
Chapitre 2 Déplacements et déformations	21
2.1 Transformation : Déplacement et Déformation	21
2.2 Tenseurs fondamentaux :	22
2.2.1 Tenseur gradient de la déformation $[F]$	22
2.2.2 Tenseur des dilatations C	25
2.2.3 Tenseur des déformations de Green-Lagrange $[E]$	25
2.3 Elasticité linéaire.....	27
2.3.1 Hypothèses	27

2.3.2	Tenseur des déformations linéarisé [E]	27
2.3.3	Tenseur de dilatations linéarisé [C].....	27
2.3.4	Transformations des longueurs	28
2.3.5	Transformation des angles	29
2.3.6	Déformations dans le cas d'un problème plan	30
2.3.7	Dilatation volumique et déformation volumique	30
2.4	Conditions de compatibilité	31
2.4.1	Conditions de compatibilité dans le plan	31
2.4.2	Conditions de compatibilité dans l'espace.....	32
Chapitre 3 Lois de comportement		34
3.1	Loi de Hooke généralisée	34
3.2	Propriétés du tenseur d'élasticité <i>Cijkl</i>	34
3.3	Matériau isotrope.....	35
3.4	Lois de comportement (matériau élastique, linéaire et isotrope)	35
3.4.1	Loi de Lamé	35
3.4.2	Loi de Hooke	36
3.4.3	Loi de comportement avec variation de la température :	36
3.5	Etats d'élasticité particuliers	36
3.5.1	Etat de contraintes planes	36
3.5.2	Etat de déformations planes	37
3.5.3	Etat axisymétrique ou de révolution cylindrique	38
3.6	Energie de déformation élastique	39
Chapitre 4 Méthodes de résolution d'un problème d'élasticité		42
4.1	Problème d'élasticité	42
4.2	Equations de NAVIER : Méthode des déplacements.....	42
4.3	Equations de BELTRAMI : Méthode des contraintes	44
4.4	Principe de superposition	46
Chapitre 5 Critères de limite élastique		47
5.1	Critère de Rankine.....	47
5.2	Critère de Tresca	48
5.3	Critère de Von Mises.....	48
Annexe A Systèmes de coordonnées		50
Annexe B Notation indicielle		52

Introduction

La théorie de l'élasticité étudie les **déplacements**, les **déformations** et les **contraintes** dans un **milieu continu** soumis à des charges extérieures.

Milieu continu

A l'échelle nanoscopique, un solide est **granulaire**, fait de molécules. Mais à l'œil nu, ce solide est perçu comme **continu**, c'est-à-dire que ses propriétés varient progressivement.

L'hypothèse des milieux continus consiste à considérer les fonctions caractéristiques du milieu (densité, température, pression, élasticité, etc) des fonctions continues.

Un milieu diphasique et certain mélange comme eau-huile sont des milieux non continus.

Un milieu continu peut être :

- Homogène : il a les mêmes propriétés en tout point
- Isotrope : en un point donné, il a les mêmes propriétés dans toutes les directions.

Matériaux

De nombreux matériaux utilisés dans l'industrie sont à la fois homogènes et isotropes : métaux usinés ou bruts de fonderie.

Cependant, de nombreux matériaux ne sont pas isotropes : tôles laminées, pièces forgées, pièces tréfilées, etc.

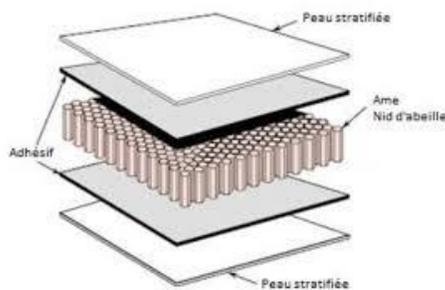


Figure 1 –Matériaux composites (sandwich).

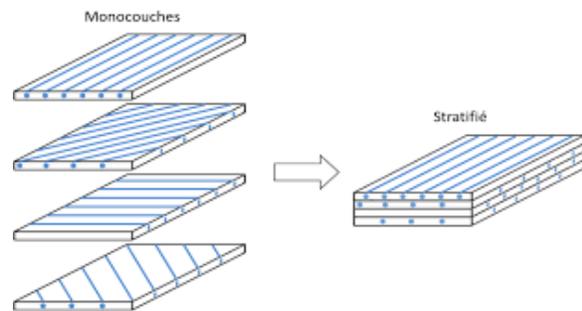


Figure 2 –Matériaux composites (stratifiés)

Les matériaux composites sont des milieux qui ne sont :

- Ni homogènes : sandwich (deux peaux collées sur une âme : mousse de polymère ou un nid d'abeille).
- Ni isotropes : stratifié (fibres de verre, de carbone ou de kevlar maintenues dans une résine).

Mais pour lesquels l'hypothèse de continuité reste valable dans leur totalité ou par morceaux.

Chapitre 1

Contraintes

1.1 Vecteur contrainte en un point M

Effectuons une **coupure** du solide E, par une surface S, en deux parties E1 et E2 (Figure 3. a).

La partie E1, par exemple, est en équilibre sous l'action de (Figure 3. b) :

- Des forces extérieures qui lui sont directement appliquées
- Et des forces intérieures réparties sur la coupure.

Considérons un point M de S et soient dS un élément de la surface infiniment petit entourant M et \vec{n} le vecteur unitaire, normal en M à S et dirigé vers l'extérieur de la partie E1 (Figure 3. c).

Soit $d\vec{F}$ la force qui s'exerce sur la **facette** \vec{n} en M.

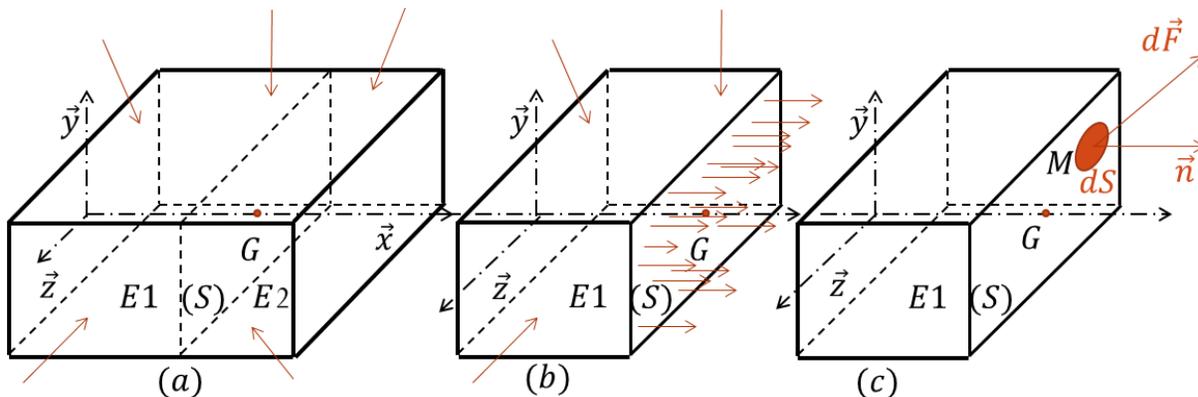


Figure 3 –coupure, facette et vecteur contrainte dans un solide.

On appelle vecteur contrainte sur la facette \vec{n} en M, la quantité :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \frac{d\vec{F}}{dS} \quad 1.1$$

Une contrainte s'exprime en pascal (1 Pa = 1 N/m²). Dans la pratique, on utilise le Mégapascal (1 MPa = 10⁶ Pa = 1 N/mm²)

1.1.1 Contrainte normale et contrainte tangentielle :

Le vecteur contrainte $\vec{T}(M, \vec{n})$ peut être décomposé en :

- Contrainte normale σ : c'est la projection de $\vec{T}(M, \vec{n})$ sur la normale \vec{n} de la facette. Si σ est positive, on a localement un état de traction, sinon un état de compression.

- Contrainte tangentielle τ , appelée aussi contrainte de cisaillement ou cession : c'est la projection de $\vec{T}(M, \vec{n})$ sur le plan de la facette.

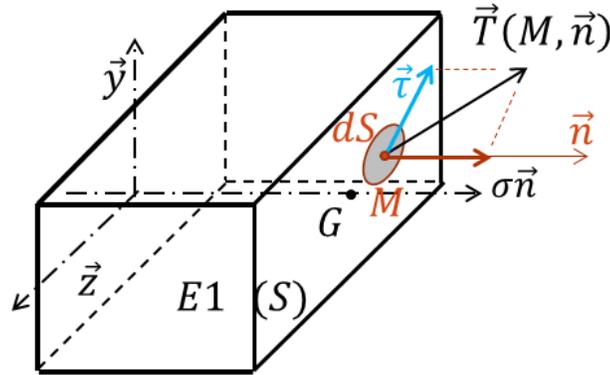


Figure 4 –Contrainte normale et contrainte tangentielle

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma \vec{n} + \vec{\tau}$$

$$\|\vec{T}(M, \vec{n})\|^2 = \sigma^2 + \|\vec{\tau}\|^2$$

$$\sigma = \vec{T}(M, \vec{n}) \cdot \vec{n}$$

$$\|\vec{\tau}\|^2 = \|\vec{T}(M, \vec{n})\|^2 - \sigma^2$$

1.2

1.2 Tenseur des contraintes

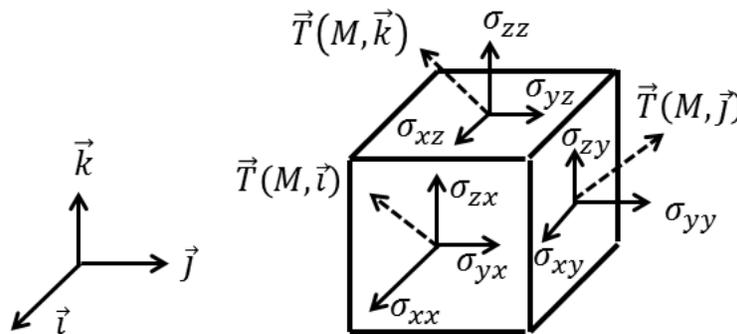


Figure 5 –les composantes du tenseur de contraintes $\bar{\sigma}(M)$ sur les trois facettes du point M
 Considérons le cube infiniment petit d'un solide, centré sur le point M, construit sur les axes x, y et z . les contraintes en un point sur les facettes $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sont :

Sur la facette \vec{i} : $\vec{T}(M, \vec{i}) = \sigma_{xx}\vec{i} + \sigma_{yx}\vec{j} + \sigma_{zx}\vec{k}$

Sur la facette \vec{j} : $\vec{T}(M, \vec{j}) = \sigma_{xy}\vec{i} + \sigma_{yy}\vec{j} + \sigma_{zy}\vec{k}$

Sur la facette \vec{k} : $\vec{T}(M, \vec{k}) = \sigma_{xz}\vec{i} + \sigma_{yz}\vec{j} + \sigma_{zz}\vec{k}$

Soit en notation indicielle :

$$T_i = \sigma_{ji} n_j \quad 1.3$$

Soit le tenseur $\bar{\sigma}(M)$ dont les colonnes sont les contraintes sur les trois facettes $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ du repère (\vec{x}, y, \vec{z}) :

$$\bar{\sigma}(M) = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}_{(x,y,z)} \quad 1.4$$

$$\text{Avec :} \quad \vec{T}(M, \vec{i}) = \bar{\sigma}(M) \cdot \vec{i} \quad \vec{T}(M, \vec{j}) = \bar{\sigma}(M) \cdot \vec{j} \quad \vec{T}(M, \vec{k}) = \bar{\sigma}(M) \cdot \vec{k}$$

$\bar{\sigma}(M)$ est le tenseur des contraintes de Cauchy.

Les termes diagonaux σ_{ij} du tenseur sont les contraintes normales et les termes non diagonaux τ_{ij} sont les contraintes tangentielles.

Sur une facette \vec{n} :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \bar{\sigma}(M) \vec{n}$$

1.3 Equation d'équilibre

Prenons un solide déformable pour lequel on isole un domaine borné (V) délimité par une surface fermée (∂V). Le domaine est soumis à des forces surfaciques $\vec{T}(M, \vec{n})$ et des forces de volume $\vec{f}(P)$.

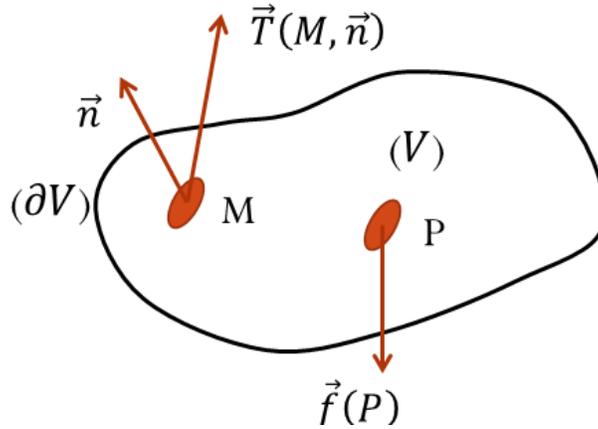


Figure 6 –Equilibre d'un domaine.

Le théorème de la résultante dynamique appliqué au domaine s'écrit :

$$\int_{\partial V} \vec{T}(M, \vec{n}) ds + \int_V \vec{f}(P) dV = \int_V \rho \vec{\gamma} dV$$

$\vec{\gamma}$ est l'accélération du point P et ρ est la masse volumique du matériau.

Le théorème de la divergence (Annexe C) permet de transformer l'intégrale surfacique :

$$\int_{\partial V} \vec{T}(M, \vec{n}) ds = \int_{\partial V} \bar{\sigma}(M) \vec{n} ds = \int_V \text{div } \bar{\sigma}(P) dV$$

L'équation de la résultante dynamique devient :

Forme vectorielle :

$$\text{div} \bar{\sigma}(p) + \vec{f}(p) = \rho \vec{\gamma}$$

1.5

Sous forme indicielle en repère cartésien :

$$\sigma_{ij,j} + f_i = \rho \gamma_i$$

1.4 Relation de Cauchy

Dans le repère (M, x, y, z), étudions l'équilibre d'un cube infiniment petit de côté (da = dx = dy = dz).

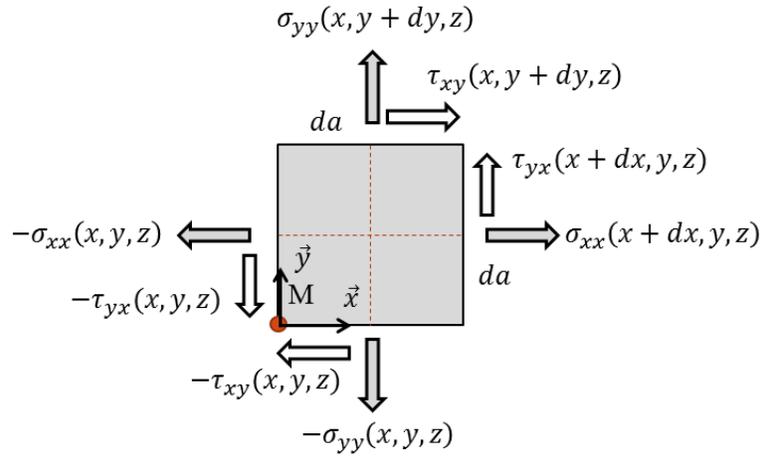


Figure 7 –Equilibre d'un cube infiniment petit d'un solide de côté da.

Avec :

$$\sigma_{xx}(x + dx, y, z) = \sigma_{xx}(x, y, z) + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx \quad \sigma_{yy}(x, y + dy, z) = \sigma_{yy}(x, y, z) + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} dy$$

$$\tau_{yx}(x + dx, y, z) = \tau_{yx}(x, y, z) + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} dx \quad \tau_{xy}(x, y + dy, z) = \tau_{xy}(x, y, z) + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy$$

L'équilibre des moments suivant l'axe \vec{M}_z s'écrit :

$$\left[\sigma_{xx} - \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx \right) \right] dydz \frac{da}{2} + \left[-\sigma_{yy} + \left(\sigma_{yy} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} dy \right) \right] dx dz \frac{da}{2} - \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \right) dx dz da + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} dx \right) dy dz da = 0$$

Soit encore en annulant les infiniment petits d'ordre 4 :

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

De même pour l'équilibre des moments suivant M_x et M_y donnent :

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}$$

Soit encore :

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} \quad 1.6$$

C'est la relation de Cauchy ou réciprocity des contraintes tangentielles. Les contraintes tangentielles s'exerçant sur deux faces perpendiculaires sont égales et dirigées vers l'arête commune. Le tenseur des contraintes est donc symétrique et :

$$[\sigma] = [\sigma]^T \quad 1.7$$

1.5 Contraintes et directions principales

1.5.1 Valeurs propres et vecteurs propres

Prenons le cas où le vecteur contrainte $\vec{T}(M, \vec{n})$ et la facette \vec{n} sont colinéaire.

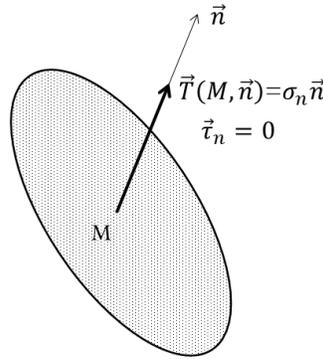


Figure 8 –cas de vecteur contrainte et la facette \vec{n} sont colinéaire

Le vecteur contrainte de cisaillement est nul :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma_n \vec{n} = \bar{\sigma}(M) \vec{n} \quad \text{Ou encore :} \quad [\sigma(M)]\{n\} = \sigma_n \{n\}$$

Cette relation peut être écrite enfin :

$$[[\sigma(M)] - \sigma_n [I]]\{n\} = \{0\} \quad 1.8$$

σ_n est alors **valeur propre** du tenseur des contraintes et $\{n\}$ est le **vecteur propre** associé.

1.5.2 Repère principal, directions et contraintes principales

Il existe en M un repère orthonormé

$$R_p(M, \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3) \text{ pour lequel le cisaillement est nul.} \quad \bar{\sigma}(M) = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}_{R_p(M, \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3)}$$

$R_p(M, \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3)$ est le repère principal.

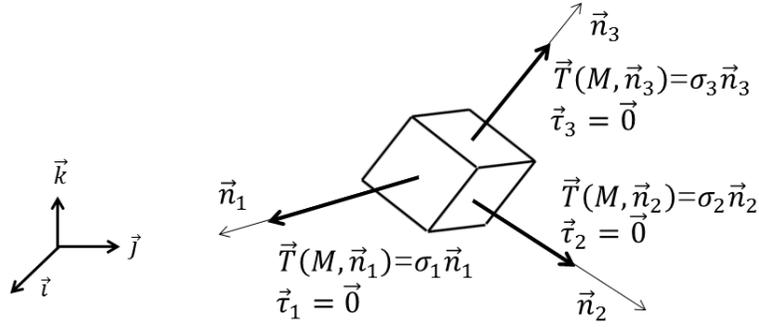


Figure 9 – Contraintes et directions principales en M

σ_1 , σ_2 et σ_3 sont appelés : **contraintes principales** et les \vec{n}_1 , \vec{n}_2 et \vec{n}_3 sont appelés : **directions principales**.

Les directions principales correspondent à la présence d'axes de révolution ou aux symétries dans le matériel ou dans la charge.

Les **contraintes principales** sont racines de l'équation caractéristique :

$$\det([\sigma(M)] - \sigma_i[I]) = 0 \quad 1.9$$

Les trois **directions principales** \vec{n}_i s'obtiennent en résolvant l'équation :

$$([\sigma(M)] - \sigma_i[I])\{n_i\} = \{0\} \quad 1.10$$

1.5.3 Invariants scalaires

L'équation caractéristique (1.9) s'écrit :

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} - \sigma_n & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma_n & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_1 - \sigma_n & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - \sigma_n & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - \sigma_n \end{vmatrix} = 0$$

Ce qui donne :

$$-\sigma_n^3 + I_1\sigma_n^2 - I_2\sigma_n + I_3 = 0$$

Avec :

$$I_1 = \text{tr}(\sigma) = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \left((\text{tr}(\sigma))^2 - \text{tr}(\sigma^2) \right) = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3$$

$$= \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{11}\sigma_{33} + \sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{13}^2 - \sigma_{23}^2 \quad 1.11$$

$$I_3 = \det(\sigma) = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$$

$$= \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} + 2\sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{23} - \sigma_{11}\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{13}^2 - \sigma_{33}\sigma_{12}^2$$

$I1, I2$ et $I3$ sont des invariants scalaires quelle que soit la base ou est exprimé le tenseur de contraintes.

1.6 Tenseur sphérique et tenseur déviateur

Soit en un point M $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$

$$\bar{\sigma}(M) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}_{\{x1,x2,x3\}}$$

On pose :

$$\sigma_m = -p = \frac{1}{3} \text{trace}(\bar{\sigma}) = \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$$

Le tenseur de contraintes peut s'écrire sous forme d'une somme de deux tenseurs sphérique et déviateur :

$$\bar{\sigma}(M) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_{xx} + p & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} + p & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} + p \end{pmatrix}$$

Tenseur contrainte

$\bar{\sigma}_S$: Tenseur sphérique :
Définit une Compression
isotrope

$\bar{\sigma}_D$: Tenseur déviateur
Représente le reste

Changement de volume
sans changement de forme

Changement de forme sans
changement de volume

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_M &= \bar{\sigma}_S + \bar{\sigma}_D \\ \sigma_{ij} &= -p\delta_{ij} + S_{ij} \\ \text{trace}(\bar{\sigma}) &= -3p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_S &= \frac{\text{trace}(\bar{\sigma})}{3} \bar{I} = -p\bar{I} \\ \text{trace}(\bar{\sigma}_S) &= -3p \\ \sigma_{s\ ij} &= -p\delta_{ij} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_D &= \bar{S} = \bar{\sigma} - \frac{\text{trace}(\bar{\sigma})}{3} \bar{I} \\ \text{trace}(\bar{\sigma}_D) &= 0 \\ S_{ij} &= \sigma_{ij} + p\delta_{ij} \end{aligned}$$

1.6.1 Compression isotrope

L'expérience montre que lors d'une compression isotrope sur la surface d'un corps :

- Il y a modification du volume sans modification de la forme.
- Il n'y a aucune déformation permanente : après retour à un état de pression nulle, le corps retrouve intégralement sa forme initiale.
- Pratiquement, il n'y a pas de limite à la valeur de la pression appliquée.
- La compression isotrope n'a aucune influence sur le domaine élastique [Bridgman et Nadai].

1.6.2 Invariants du tenseur déviateur

$$J_1 = \text{tr}(\bar{\sigma}_D) = 0$$

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{2} \left((\text{tr}(\bar{\sigma}_D))^2 - \text{tr}(\bar{\sigma}_D^2) \right) = \frac{1}{2} (S_1^2 + S_2^2 + S_3^2) = S_1 S_2 + S_1 S_3 + S_2 S_3 \\ &= -\frac{1}{6} \left((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 \right) \\ &= \frac{1}{6} \left[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 \right. \\ &\quad \left. + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2) \right] \end{aligned} \quad 1.12$$

$$J_3 = \det(\bar{\sigma}_D) = S_1 S_2 S_3$$

1.7 Cercle de Mohr des contraintes

Les cercles de Mohr est une représentation graphique plane exprimant pour une facette \vec{n} , les relations existantes entre les contraintes normales et tangentielles (σ_n, τ_n) et les contraintes principales $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$.

1.7.1 Cercle de Mohr dans le plan

Prenons un solide déformable et un point M de ce milieu. On définit au point M, un repère de la facette $R\{M, \vec{n}, \vec{t}, \vec{b}\}$ et le repère principal $R_p\{M, \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{b}\}$.

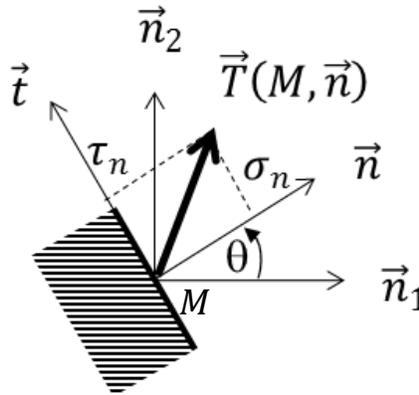


Figure 10 – contrainte au point M dans le repère de la facette et dans le repère principal

Repère de la facette $R\{M, \vec{n}, \vec{t}, \vec{b}\}$

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma_n \vec{n} + \tau_n \vec{t}$$

Avec :

$$\sigma_n = \vec{n} \cdot \vec{T}(M, \vec{n})$$

$$\tau_n = \vec{t} \cdot \vec{T}(M, \vec{n})$$

Repère principal $R_p\{M, \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{b}\}$.

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \bar{\sigma}(M) \vec{n}$$

Avec :

$$\bar{\sigma}(M) = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}_{\{\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{b}\}}, \vec{n} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{t} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les contraintes normales et tangentielles s'écrivent (σ_n, τ_n) :

$$\begin{cases} \sigma_n = \vec{n} \cdot \vec{T}(M, \vec{n}) = \{n\}^t ([\bar{\sigma}(M)] \{n\}) = \sigma_1 \cos^2\theta + \sigma_2 \sin^2\theta \\ \tau_n = \vec{t} \cdot \vec{T}(M, \vec{n}) = \{t\}^t ([\bar{\sigma}(M)] \{n\}) = -\sigma_1 \cos\theta \sin\theta + \sigma_2 \cos\theta \sin\theta \end{cases} \quad 1.13$$

Ou encore :

$$\begin{cases} \sigma_n = d + r \cos(-2\theta) \\ \tau_n = r \sin(-2\theta) \end{cases} \quad \text{Avec :} \quad \begin{cases} d = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) \\ r = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) \end{cases} \quad 1.14$$

De l'équation (1.14), on déduit :

$$(\sigma_n - d)^2 + \tau_n^2 = r^2 \quad 1.15$$

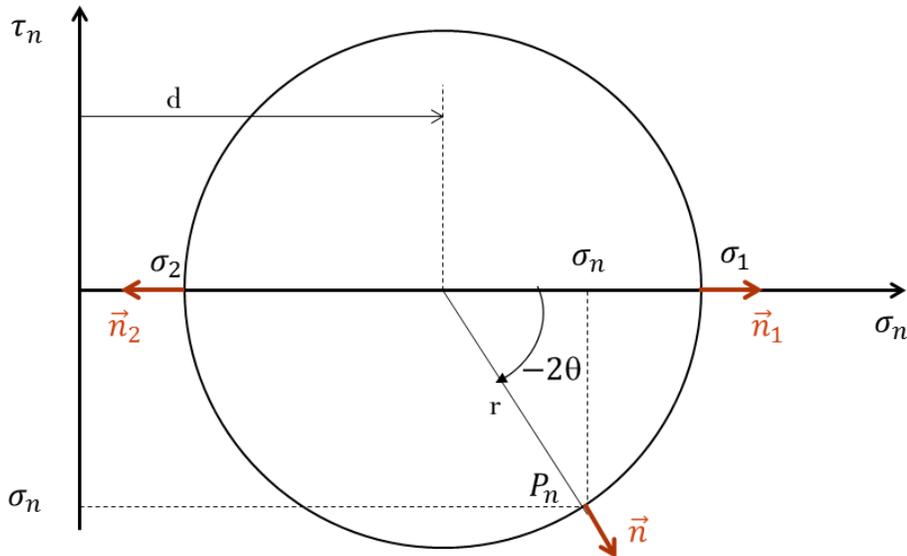


Figure 11 –cercle de Mohr de contraintes.

Lorsque l'angle θ varie, le point Pn décrit le cercle de **Mohr des contraintes** C_{12} [de centre $(d = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, 0)$ et de rayon $(r = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2})$].

- Les points représentatifs des directions principales \vec{n}_1, \vec{n}_2 sont les intersections $(\sigma_1, 0)$ et $(\sigma_2, 0)$ du cercle avec l'axe σ_n .
- Si la facette \vec{n} fait réellement un angle θ avec \vec{n}_1 , son point représentatif sur le cercle de Mohr fait un angle -2θ .

1.7.2 Tri- cercles de Mohr des contraintes

Nous allons généraliser la représentation de Mohr sur les trois contraintes principales $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$.

Soit $\vec{T}(M, \vec{n})$ le vecteur contrainte en un point M sur une facette $\vec{n} \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix}$:

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = [\bar{\sigma}(M)]\{n\} = \sigma_n \vec{n} + \tau_n \vec{t}$$

On a les 3 relations :

$$\begin{cases} \sigma_n = \{n\}^t ([\bar{\sigma}(M)]\{n\}) \\ T^2 = \sigma_n^2 + \tau_n^2 \\ \{n\}^t \{n\} = 1 \end{cases}$$

Ces relations s'écrivent dans $R_p\{M, \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3\}$:

$$\begin{cases} \sigma_1 a^2 + \sigma_2 b^2 + \sigma_3 c^2 = \sigma_n \\ \sigma_1^2 a^2 + \sigma_2^2 b^2 + \sigma_3^2 c^2 = \sigma_n^2 + \tau_n^2 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1 \end{cases}$$

Si $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$ alors :

$$\begin{cases} a^2 = \frac{\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)} \\ b^2 = \frac{\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_3)(\sigma_n - \sigma_1)}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)} \\ c^2 = \frac{\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_2)}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)} \end{cases}$$

Sachant les inégalités suivantes :

$$\begin{cases} a^2 \geq 0 \\ b^2 \geq 0 \\ c^2 \geq 0 \end{cases}$$

Alors si $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$:

$$\begin{cases} \tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3) \geq 0 \\ \tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_3)(\sigma_n - \sigma_1) \geq 0 \\ \tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_2) \geq 0 \end{cases}$$

Ou encore :

$$\begin{cases} \left(\sigma_n - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)^2 + \tau_n^2 \geq \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2 \\ \left(\sigma_n - \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2}\right)^2 + \tau_n^2 \leq \left(\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}\right)^2 \\ \left(\sigma_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 + \tau_n^2 \geq \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 \end{cases} \quad 1.16$$

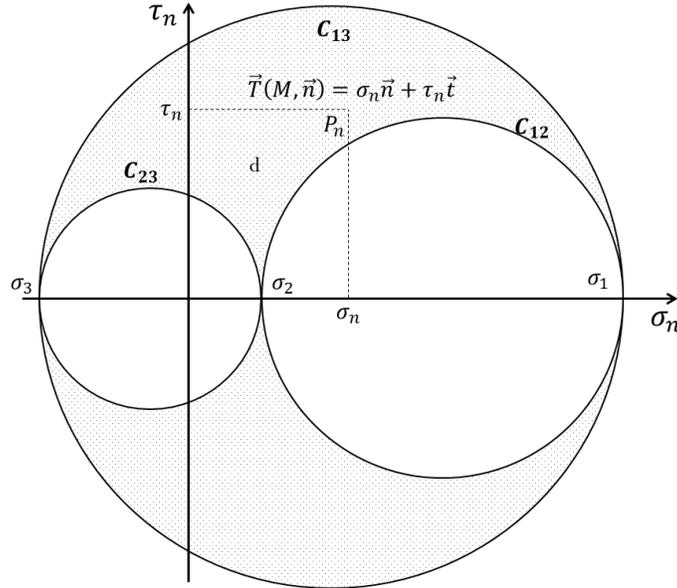


Figure 12 –tri-cercles de Mohr de contraintes.

Ces trois inéquations permettent de tracer le tri-cercle de Mohr.

A chaque facette \vec{n} , nous pouvons donc associer un point P_n de coordonnées (σ_n, τ_n) dans le repère $\{\sigma_n, \tau_n\}$ orthonormé. Ce point se trouve dans la zone grise, entre les trois cercles et il est obligatoirement :

- A l'intérieur du grand cercle C_{13} [de centre $\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, 0\right)$ et de rayon $\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)$].
- Et A l'extérieur des deux petits cercles C_{12} [de centre $\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, 0\right)$ et de rayon $\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)$] et C_{23} [de centre $\left(\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}, 0\right)$ et de rayon $\left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)$].

Remarque :

La contrainte normale maximale $\sigma_{max} = \text{Max}(|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3|)$ Avec $\tau = 0$

La contrainte tangentielle maximale $\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$ Avec $\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$

1.8 Etats de contrainte particuliers

1.8.1 Traction-compression

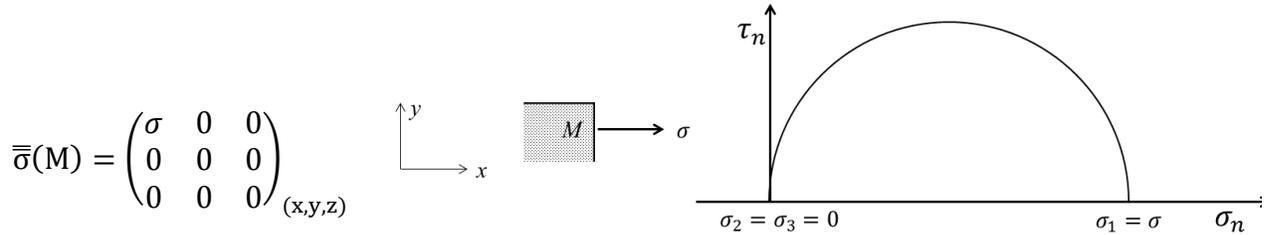


Figure 13 –tri-cercles de Mohr de contraintes pour la traction-compression.

1.8.2 Cisaillement simple

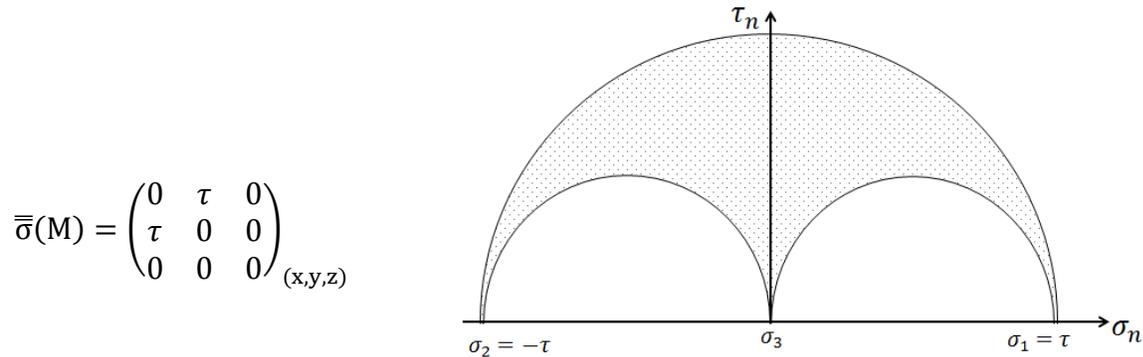


Figure 14 –tri-cercles de Mohr de contraintes pour un cisaillement simple.

Le tri-cercles de Mohr de contraintes montre que les contraintes principales sont :

$$\sigma_1 = \tau, \sigma_2 = -\tau \text{ et } \sigma_3 = 0.$$

Les directions principales sont :

$$\{n_1\} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \{n_2\} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \{n_3\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{z}$$

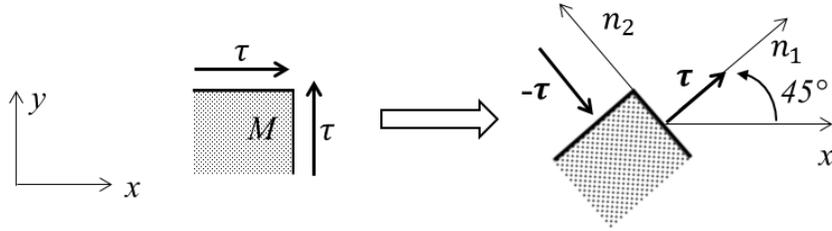


Figure 15 –Direction principales pour un cisaillement simple.

1.8.3 Etat sphérique ou compression hydrostatique

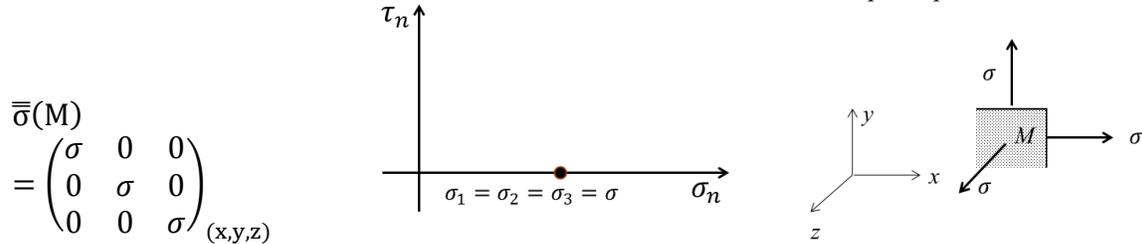


Figure 16 –tri-cercles de Mohr de contraintes pour la traction-compression.

Pour toute facette \vec{n} , on a :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma \vec{n}$$

Toute facette \vec{n} en M est face principale.

1.8.4 Etat plan de contraintes

$$\bar{\sigma}(M) = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(x,y,z)} \quad \text{Se réduit sur le plan } (x, y) \quad \bar{\sigma}(M) = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix}_{(x,y)}$$

Les deux contraintes principales sont solution de l'équation :

$$[\sigma(M)]\{n\} = \sigma_n\{n\} \quad \text{Ou encore :} \quad \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} = \sigma_n \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix}$$

Avec :

$$n_x^2 + n_y^2 = 1$$

Ce qui donne pour les contraintes principales :

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2} \quad \sigma_2 = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2} \quad 1.17$$

Et les directions principales :

$$\{n_1\} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad \{n_2\} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad \{n_3\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{z} \quad \text{Avec} \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{\sigma_1 - \sigma_{xx}}{\sigma_{xy}} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_1 - \sigma_{yy}} \quad 1.18$$

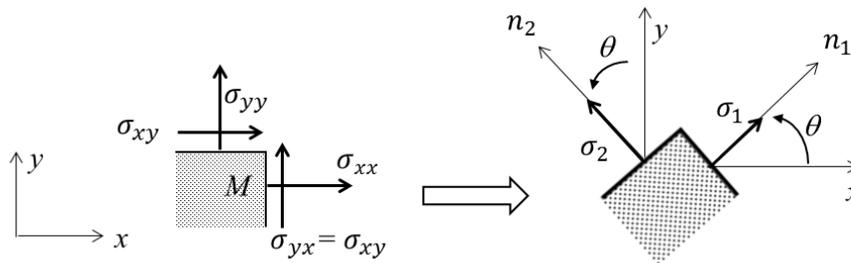


Figure 17 –Direction principales pour un état de Contraintes planes.

Ces résultats peuvent être déterminés graphiquement par le cercle de Mohr. On représente les deux facettes i et j :

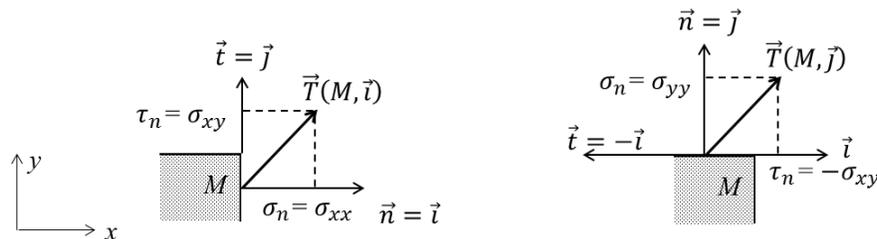


Figure 18 – contraintes au point M pour les facettes i et j

Les contraintes normales et tangentielles pour les deux facettes s'écrivent (équation (1.13)) :

- Pour la facette i : $\sigma_n = \vec{n} \cdot \vec{T}(M, \vec{i}) = \sigma_{xx}$ et $\tau_n = \vec{t} \cdot \vec{T}(M, \vec{i}) = \tau_{xy}$

Sur le cercle de Mohr, la facette i est représentée par le point Pi (σ_{xx}, τ_{xy})

- Pour la facette j : $\sigma_n = \vec{n} \cdot \vec{T}(M, \vec{j}) = \sigma_{yy}$ et $\tau_n = \vec{t} \cdot \vec{T}(M, \vec{j}) = -\tau_{xy}$

Sur le cercle de Mohr, la facette j est représentée par le point Pj ($\sigma_{yy}, -\tau_{xy}$)

Le cercle de Mohr est tracé à partir des deux points Pi et Pj :

A partir du cercle de Mohr, les contraintes principales s'écrivent :

$$\sigma_1 = d + r \quad \sigma_2 = d - r \quad \text{Avec :} \quad d = \frac{1}{2} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad r = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

Finalement, on obtient les mêmes équations (1.17).

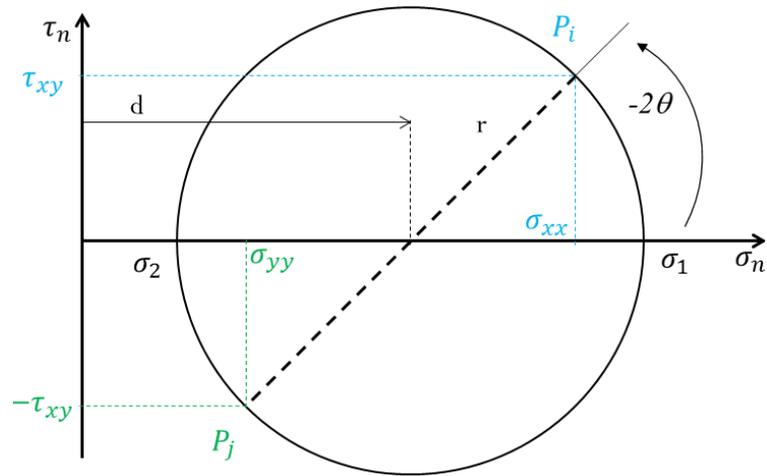


Figure 19 –Cercle de Mohr de contraintes pour un état de contraintes planes.

Chapitre 2

Déplacements et déformations

2.1 Transformation : Déplacement et Déformation

Les charges appliquées sur un solide provoquent le **Déplacement** de ces points et la **Déformation** de ces fibres de matière qui subissent des variations de longueur et d'orientations.

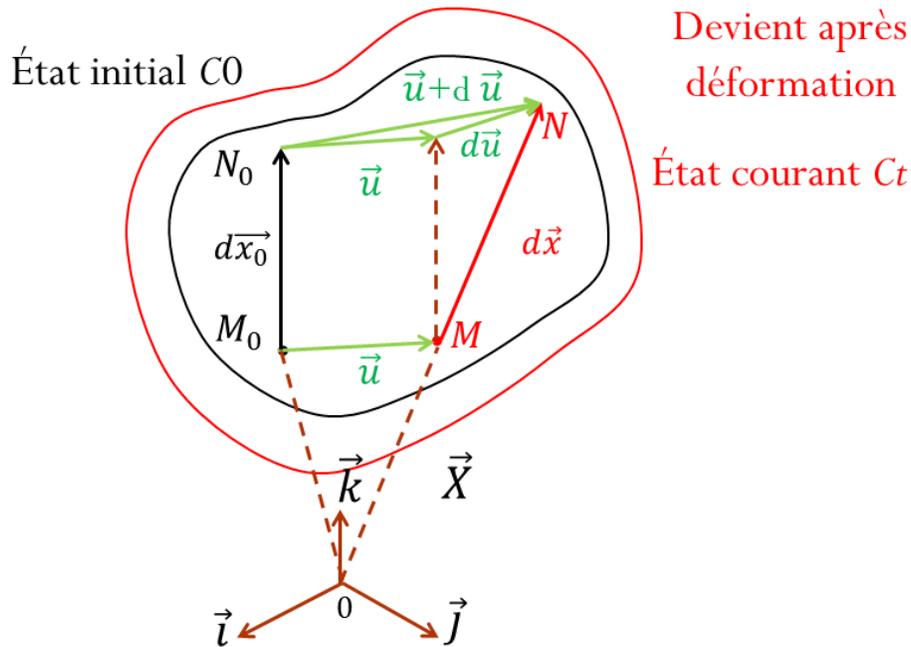


Figure 20 –Transformation de points et de vecteurs sur un solide.

Etat initial :

M_0 : un point du solide

$$\overrightarrow{OM_0} = \vec{X}_0 = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}$$

Soit le vecteur infiniment petit : $d\vec{x}_0 = \overrightarrow{dOM_0}$

$$d\overrightarrow{OM_0} = d\vec{x}_0 = dx_0\vec{i} + dy_0\vec{j} + dz_0\vec{k}$$

Le **vecteur déplacement** du point M_0 est donc :

$$\vec{u}(M_0) = \overrightarrow{M_0M} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$$

Etat courant (après déformation) :

Deviens le point M

$$\overrightarrow{OM} = \vec{X} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$d\vec{x} = d\overrightarrow{OM}$$

$$d\overrightarrow{OM} = d\vec{x} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

Avec

$$\overline{OM} = \overline{OM}_0 + \vec{u} \quad \text{et} \quad d\overline{OM} = d\overline{OM}_0 + d\vec{u}$$

Ou encore sous forme vectorielle :

$$\vec{X} = \vec{X}_0 + \vec{u}$$

$$d\vec{x} = d\vec{x}_0 + d\vec{u}$$

2.1

Ou encore sous forme matricielle :

$$\{x\} = \{x_0\} + \{u\}$$

$$\{dx\} = \{dx_0\} + \{du\}$$

Les équations (2.1) définissent la **transformation** qui fait passer le solide de l'état initial à la l'état courant.

2.2 Tenseurs fondamentaux :

2.2.1 Tenseur gradient de la déformation $[F]$

Sachant que (voir Annexe C) :

$$d\vec{u} = \overline{\text{grad}} \vec{u} d\overline{OM}_0 = \overline{\text{grad}} \vec{u} d\vec{x}_0$$

L'équation (2.1) devient :

$$\{dx\} = ([I] + \overline{\text{grad}} \vec{u})\{dx_0\} \quad \text{Ou} \quad \{dx\} = ([I] + [L])\{dx_0\} = [F]\{dx_0\} \quad 2.2$$

$$[L] = \overline{\text{grad}} \vec{u}$$

$$[F] = [I] + [L]$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_0} & \frac{\partial u}{\partial y_0} & \frac{\partial u}{\partial z_0} \\ \frac{\partial v}{\partial x_0} & \frac{\partial v}{\partial y_0} & \frac{\partial v}{\partial z_0} \\ \frac{\partial w}{\partial x_0} & \frac{\partial w}{\partial y_0} & \frac{\partial w}{\partial z_0} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial u}{\partial x_0} & \frac{\partial u}{\partial y_0} & \frac{\partial u}{\partial z_0} \\ \frac{\partial v}{\partial x_0} & 1 + \frac{\partial v}{\partial y_0} & \frac{\partial v}{\partial z_0} \\ \frac{\partial w}{\partial x_0} & \frac{\partial w}{\partial y_0} & 1 + \frac{\partial w}{\partial z_0} \end{bmatrix} \quad 2.3$$

$[I]$ est le tenseur unité et en coordonnées cartésiennes

$[F]$ est le **tenseur gradient** de la transformation (ou de la déformation).

Exemple : Transformation d'un vecteur dans le cas d'un problème plan :

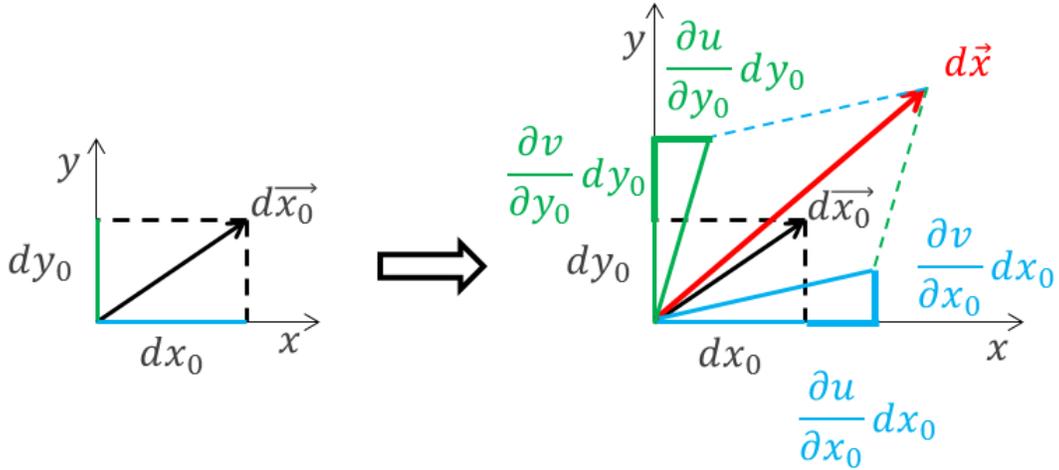


Figure 21 –Transformation de vecteurs sur un solide dans le cas d'un problème plan

Le tenseur gradient de la transformation devient :

$$[F] = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial u}{\partial x_0} & \frac{\partial u}{\partial y_0} \\ \frac{\partial v}{\partial x_0} & 1 + \frac{\partial v}{\partial y_0} \end{bmatrix}$$

La transformation d'un vecteur $\{dx_0\} = \begin{Bmatrix} dx_0 \\ dy_0 \end{Bmatrix}$:

$$\begin{aligned} \{dx\} = [F]\{dx_0\} &= \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial u}{\partial x_0} & \frac{\partial u}{\partial y_0} \\ \frac{\partial v}{\partial x_0} & 1 + \frac{\partial v}{\partial y_0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx_0 \\ dy_0 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} dx_0 + \frac{\partial u}{\partial x_0} dx_0 + \frac{\partial u}{\partial y_0} dy_0 \\ dy_0 + \frac{\partial v}{\partial y_0} dy_0 + \frac{\partial v}{\partial x_0} dx_0 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} dx_0 \\ dy_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_0} \\ \frac{\partial v}{\partial x_0} \end{Bmatrix} dx_0 + \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial y_0} \\ \frac{\partial v}{\partial y_0} \end{Bmatrix} dy_0 \end{aligned}$$

Tenseur déformation et tenseur rotation

$[L]$ peut être décomposée en une partie symétrique $[\varepsilon]$ et une partie antisymétrique $[\Omega]$.

Avec en coordonnées cartésiennes :

$$\overline{\text{grad}} \vec{u} = [L] = \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ u_{2,1} & u_{2,2} & u_{2,3} \\ u_{3,1} & u_{3,2} & u_{3,3} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} ([L] + [L]^T) + \frac{1}{2} ([L] - [L]^T) = [\varepsilon] + [\Omega] \quad 2.4$$

$$[\varepsilon] = \frac{1}{2}([L] + [L]^T)$$

$$[\Omega] = \frac{1}{2}([L] - [L]^T)$$

$[\Omega]$: est le tenseur rotation et $[\varepsilon]$: est le tenseur déformation

$$\begin{aligned} \bar{\Omega} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & u_{1,2} - u_{2,1} & u_{1,3} - u_{3,1} \\ u_{2,1} - u_{1,2} & 0 & u_{2,3} - u_{3,2} \\ u_{3,1} - u_{1,3} & u_{3,2} - u_{2,3} & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \Omega_{1,2} & \Omega_{1,3} \\ \Omega_{2,1} & 0 & \Omega_{2,3} \\ \Omega_{3,1} & \Omega_{3,2} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}) = -\Omega_{ji}$$

$$[\Omega] = -[\Omega]^T \quad 2.5$$

$[\Omega]$ est antisymétrique et nul si $[L]$ est symétrique.

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2u_{1,1} & u_{1,2} + u_{2,1} & u_{1,3} + u_{3,1} \\ u_{2,1} + u_{1,2} & 2u_{2,2} & u_{2,3} + u_{3,2} \\ u_{3,1} + u_{1,3} & u_{3,2} + u_{2,3} & 2u_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) = \varepsilon_{ji}$$

$$= \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \varepsilon_{yy} & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

$$[\varepsilon] = [\varepsilon]^T \quad 2.6$$

$[\varepsilon]$ est symétrique.

Vecteur rotation de la transformation

D'après la Figure 20, le déplacement du pont N_0 s'écrit :

$$\vec{u}(N_0) = \vec{u}(M_0) + d\vec{u}$$

Et sachant que (voir Annexe C) :

$$d\vec{u} = \overrightarrow{\text{grad}} \vec{u} d\overrightarrow{OM_0} = \overrightarrow{\text{grad}} \vec{u} d\vec{x}_0$$

Et d'après l'équation (2.4), le déplacement du pont N_0 s'écrit :

Ou encore :

$$\vec{u}(N_0) = \vec{u}(M_0) + \bar{\Omega} \cdot \overrightarrow{M_0N_0} + \bar{\varepsilon} \cdot \overrightarrow{M_0N_0} \quad \text{soit} \quad \vec{u}(N_0) = \vec{u}(M_0) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{M_0N_0} + \bar{\varepsilon} \cdot \overrightarrow{M_0N_0} \quad 2.7$$

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{u}$$

Vecteur rotation

$$\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{M_0N_0}$$

Déplacement solide dû à la rotation $\vec{\Omega}$

$$\bar{\varepsilon} \cdot \overrightarrow{M_0N_0}$$

Déplacement solide dû à la déformation

2.2.2 Tenseur des dilatations [C]

Considérons la transformation (déformation) suivante :

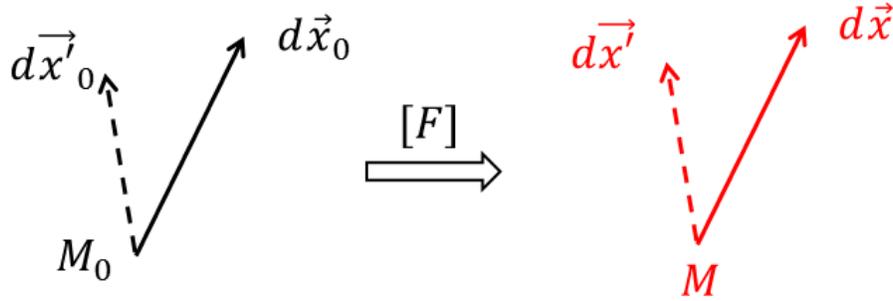


Figure 22 – transformation de deux vecteurs.

Considérons en M_0 deux vecteurs infiniment petits $d\vec{x}_0$ et $d\vec{x}'_0$ qui deviennent lors de la transformation (déformation) : $d\vec{x}$ et $d\vec{x}'$.

On a alors (équation (2.2)) :

$$\{dx\} = [F]\{dx_0\} \qquad \{dx'\} = [F]\{dx'_0\}$$

Le produit scalaire des deux vecteurs $d\vec{x}$ et $d\vec{x}'$ s'écrit :

$$d\vec{x} \cdot d\vec{x}' = \{dx\}^T \{dx'\} = \{dx_0\}^T [F]^T [F] \{dx'_0\} = \{dx_0\}^T [C] \{dx'_0\}$$

Avec :

$$[C] = [F]^T [F]$$

[C] est le **tenseur des dilatations**.

Encore d'après l'équation (2.3) :

$$[C] = [F]^T [F] = ([I] + [L]^T)([I] + [L])$$

$$[C] = [I] + [L]^T + [L] + [L]^T [L] \qquad 2.8$$

Si $d\vec{x}_0 = d\vec{x}'_0$ et $|d\vec{x}| = |d\vec{x}'| = ds$ alors :

$$ds^2 = d\vec{x} \cdot d\vec{x} = \{dx_0\}^T [C] \{dx_0\} > 0 \qquad \text{Quel que soit } ds \neq 0 \qquad 2.9$$

2.2.3 Tenseur des déformations de Green-Lagrange [E]

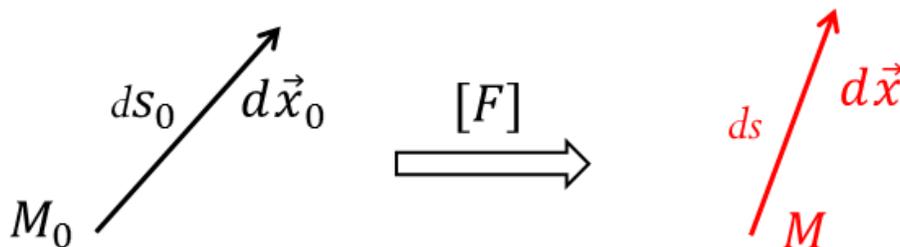


Figure 23 – transformation d'un vecteur.

Considérons en $M0$ le vecteur infiniment petit $d\vec{x}_0$ qui devient $d\vec{x}$ lors de la transformation (déformation) :

On a :

$$\begin{aligned} ds^2 - ds^2_0 &= d\vec{x} \cdot d\vec{x} - d\vec{x}_0 \cdot d\vec{x}_0 \\ &= \{dx\}^T \{dx\} - \{dx_0\}^T \{dx_0\} \end{aligned}$$

D'après l'équation (2.9) :

$$ds^2 - ds^2_0 = \{dx_0\}^T ([C] - [I])\{dx_0\} = 2\{dx_0\}^T [E]\{dx_0\}$$

$[E]$ est le tenseur des déformations de Green-Lagrange. Avec :

$$[E] = \frac{1}{2} ([C] - [I])$$

Cette relation devient, compte tenu des équations (2.8) et (2.4) :

$$[E] = \frac{1}{2} ([C] - [I]) = \frac{1}{2} ([L]^T + [L] + [L]^T[L]) = [\varepsilon] + \frac{1}{2} [L]^T[L]$$

$$[E] = \frac{1}{2} ([C] - [I]) = [\varepsilon] + \frac{1}{2} [L]^T[L] \quad 2.10$$

Avec la notation de Voigt, les composantes du tenseur des déformations de Green-Lagrange s'écrivent dans le repère $\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$:

$$\begin{bmatrix} E_{xx} \\ E_{yy} \\ E_{zz} \\ E_{xy} = E_{yx} \\ E_{xz} = E_{zx} \\ E_{yz} = E_{zy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_0} \\ \frac{\partial v}{\partial y_0} \\ \frac{\partial w}{\partial z_0} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y_0} + \frac{\partial v}{\partial x_0} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z_0} + \frac{\partial w}{\partial x_0} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z_0} + \frac{\partial w}{\partial y_0} \right) \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial u}{\partial x_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x_0} \right)^2 \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y_0} \right)^2 \\ \left(\frac{\partial u}{\partial z_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z_0} \right)^2 \\ \frac{\partial u}{\partial x_0} \frac{\partial u}{\partial y_0} + \frac{\partial v}{\partial x_0} \frac{\partial v}{\partial y_0} + \frac{\partial w}{\partial x_0} \frac{\partial w}{\partial y_0} \\ \frac{\partial u}{\partial x_0} \frac{\partial u}{\partial z_0} + \frac{\partial v}{\partial x_0} \frac{\partial v}{\partial z_0} + \frac{\partial w}{\partial x_0} \frac{\partial w}{\partial z_0} \\ \frac{\partial u}{\partial y_0} \frac{\partial u}{\partial z_0} + \frac{\partial v}{\partial y_0} \frac{\partial v}{\partial z_0} + \frac{\partial w}{\partial y_0} \frac{\partial w}{\partial z_0} \end{bmatrix} \quad 2.11$$

Termes linéaires

Termes non linéaires

N.B : tous les termes du tenseur des déformations de Green-Lagrange sont sans dimension

2.3 Elasticité linéaire

2.3.1 Hypothèses

On prend en compte l'hypothèse des Petits déplacements et des petites déformations.

2.3.2 Tenseur des déformations linéarisé [E]

Les termes non linéaires de l'équation (2.11) seront négligés :

$$\begin{aligned}
 [E] = [\varepsilon] & \quad \text{En notation indicielle} & \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \\
 & \quad \text{En écriture vectorielle} & \quad \bar{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\overline{\text{grad}}\bar{u} + {}^T \overline{\text{grad}}\bar{u})
 \end{aligned}
 \tag{2.12}$$

En coordonnées cartésienne :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} & \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} & \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} \\
 \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}
 \end{aligned}
 \tag{2.13}$$

En coordonnées cylindriques

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} & \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} & \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} \\
 \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} & \gamma_{rz} &= \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} & \gamma_{\theta z} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z}
 \end{aligned}
 \tag{2.14}$$

Dans le cas d'un problème plan, les déformations sont interprétées selon la figure suivante :

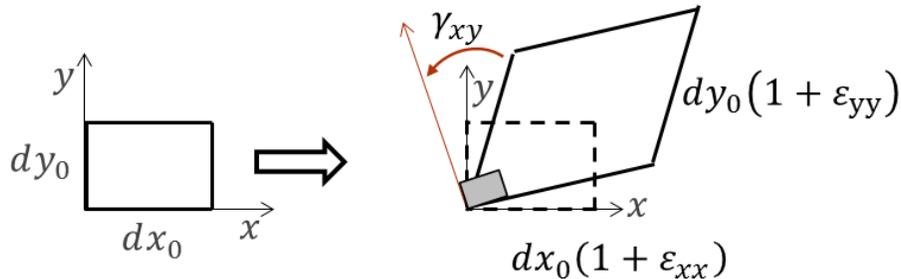


Figure 24 – Signification des déformations dans le cas d'un problème plan.

2.3.3 Tenseur de dilatations linéarisé [C]

Le tenseur des dilatations (équation (2.8)) devient après linéarisation :

$$[C] \approx [I] + [L]^T + [L]$$

Or :

$$[\varepsilon] \approx \frac{1}{2}([L]^T + [L])$$

D'où :

$$[C] \approx [I] + 2[\varepsilon] \quad 2.15$$

2.3.4 Transformations des longueurs

Considérons la transformation (déformation) suivante : En M_0 le vecteur infiniment petit $d\vec{x}_0$ de longueur ds_0 et de direction le vecteur unitaire \vec{n}_0 devient le vecteur infiniment petit $d\vec{x}$ de longueur ds après transformation.

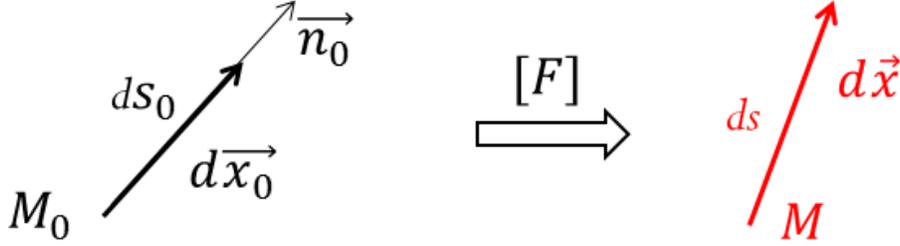


Figure 25 – transformation d'un vecteur.

Définitions :

La dilatation en M_0 dans la direction \vec{n}_0 :

$$\lambda(M_0, \vec{n}_0) = \frac{ds}{ds_0}$$

L'allongement unitaire en M_0 dans la direction \vec{n}_0 :

$$\varepsilon(M_0, \vec{n}_0) = \frac{ds - ds_0}{ds_0}$$

La déformation de Green-Lagrange en M_0 dans la direction \vec{n}_0 :

$$\varepsilon_{GL}(M_0, \vec{n}_0) = \frac{ds^2 - ds_0^2}{2ds_0^2}$$

D'après l'équation (2.9), la dilatation en M_0 dans la direction \vec{n}_0 s'écrit :

$$\lambda(M_0, \vec{n}_0) = \frac{ds}{ds_0} = \sqrt{\{n_0\}^T [C] \{n_0\}} \approx \sqrt{1 + 2\{n_0\}^T [\varepsilon] \{n_0\}}$$

La quantité $2\{n_0\}^T [\varepsilon] \{n_0\}$ est petite devant l'unité, la dilatation devient :

$$\lambda(M_0, \vec{n}_0) = \frac{ds}{ds_0} \approx 1 + \{n_0\}^T [\varepsilon] \{n_0\} \quad 2.16$$

D'après l'expression de la dilatation 2.9(2.16), l'allongement unitaire devient :

$$\varepsilon(M_0, \vec{n}_0) = \frac{ds - ds_0}{ds_0} = \lambda(M_0, \vec{n}_0) - 1 \approx \{n_0\}^T [\varepsilon] \{n_0\} \quad 2.17$$

D'après les équations (2.9) et (2.10), La déformation de Green-Lagrange devient :

$$\varepsilon_{GL}(M_0, \vec{n}_0) = \frac{ds^2 - ds_0^2}{2ds_0^2} \approx \{n_0\}^T [\varepsilon] \{n_0\} \approx \varepsilon(M_0, \vec{n}_0) \quad 2.18$$

Si \vec{n}_0 est un axe \vec{i}, \vec{j} ou \vec{k} , les relations (2.16) et (2.17) devient pour tout point M :

$$\varepsilon(M, \vec{i}) \approx \varepsilon_{xx} \quad \varepsilon(M, \vec{j}) \approx \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon(M, \vec{k}) \approx \varepsilon_{zz} \quad 2.19$$

$$\lambda(M, \vec{i}) \approx 1 + \varepsilon_{xx} \quad \lambda(M, \vec{j}) \approx 1 + \varepsilon_{yy} \quad \lambda(M, \vec{k}) \approx 1 + \varepsilon_{zz} \quad 2.20$$

2.3.5 Transformation des angles

Considérons la transformation (déformation) suivante :

Considérons en M_0 deux vecteurs infiniment petits et perpendiculaires ($d\vec{x}_0$ et $d\vec{x}'_0$) qui deviennent après déformation ($d\vec{x}$ et $d\vec{x}'$).

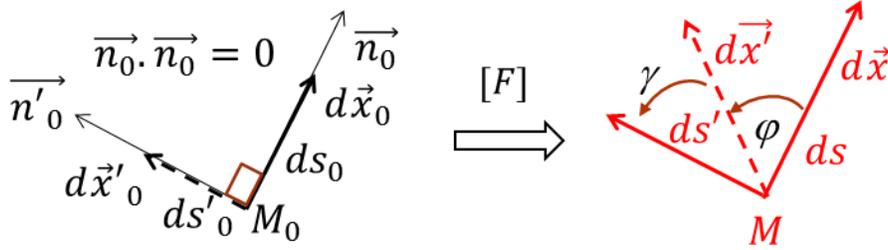


Figure 26 – transformation des angles

Définition :

Le glissement en M_0 dans les directions orthogonales \vec{n}_0 et \vec{n}'_0 est :

$$\gamma(M_0, \vec{n}_0, \vec{n}'_0) = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

φ est l'angle entre $d\vec{x}$ et $d\vec{x}'$. Donc :

$$d\vec{x} \cdot d\vec{x}' = ds ds' \cos \varphi = ds ds' \cos \left(\frac{\pi}{2} - \gamma \right) = ds ds' \sin \gamma$$

Le produit scalaire des deux vecteurs $d\vec{x}$ et $d\vec{x}'$ s'écrit :

$$d\vec{x} \cdot d\vec{x}' = \{dx_0\}^T [C] \{dx'_0\} = ds_0 ds'_0 \{n_0\}^T [C] \{n'_0\}$$

Alors :

$$ds ds' \sin \gamma = ds_0 ds'_0 \{n_0\}^T [C] \{n'_0\} \quad \text{Ou encore :} \quad \sin \gamma = \frac{ds_0 ds'_0}{ds ds'} \{n_0\}^T [C] \{n'_0\}$$

γ est petit et peut être confondu avec $\sin \gamma$ et d'après l'expression de la dilatation (2.16) et l'approximation (2.15), il s'écrit :

$$\gamma \approx \sin \gamma = \frac{\{n_0\}^T [C] \{n'_0\}}{\lambda(M_0, \vec{n}_0) \lambda(M_0, \vec{n}'_0)} \approx \frac{2\{n_0\}^T [\varepsilon] \{n'_0\}}{\lambda(M_0, \vec{n}_0) \lambda(M_0, \vec{n}'_0)}$$

Encore, on a :

$$\frac{1}{\lambda(M_0, \vec{n}_0)} \approx \frac{1}{1 + \{n_0\}^T [\varepsilon] \{n_0\}} \approx 1 - \{n_0\}^T [\varepsilon] \{n_0\}$$

γ s'écrit :

$$\gamma = 2\{n_0\}^T [\varepsilon] \{n'_0\} (1 - \{n_0\}^T [\varepsilon] \{n_0\}) (1 - \{n'_0\}^T [\varepsilon] \{n'_0\})$$

En négligeant les termes d'ordre 2 :

$$\gamma(M_0, \vec{n}_0, \vec{n}'_0) \approx 2 \{n'_0\}^T [\varepsilon] \{n_0\} \quad 2.21$$

Si \vec{n}_0 et \vec{n}'_0 sont un axe \vec{i}, \vec{j} ou \vec{k} , la relation (2.21) devient pour tout point M :

$$\gamma(M, \vec{i}, \vec{j}) \approx 2\varepsilon_{xy} = \gamma_{xy} \quad \gamma(M, \vec{i}, \vec{k}) \approx 2\varepsilon_{xz} = \gamma_{xz} \quad \gamma(M, \vec{j}, \vec{k}) \approx 2\varepsilon_{yz} = \gamma_{yz} \quad 2.22$$

2.3.6 Déformations dans le cas d'un problème plan

Dans le cas d'un problème plan, les relations (2.19) et (2.22) sont interprétés comme dans la Figure 24 :

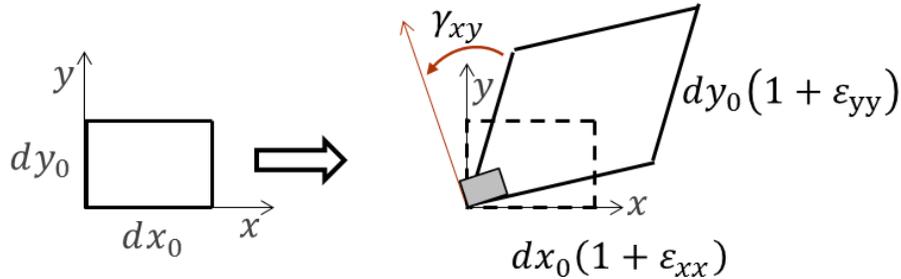


Figure 27 – Signification des déformations dans le cas d'un problème plan.

2.3.7 Dilatation volumique et déformation volumique

Définitions :

La dilatation volumique en M_0

$$\lambda_V(M_0) = \frac{dV}{dV_0}$$

La déformation volumique en M
ou coefficient de dilatation volumique

$$\theta = \varepsilon_V(M_0) = \frac{dV - dV_0}{dV_0}$$

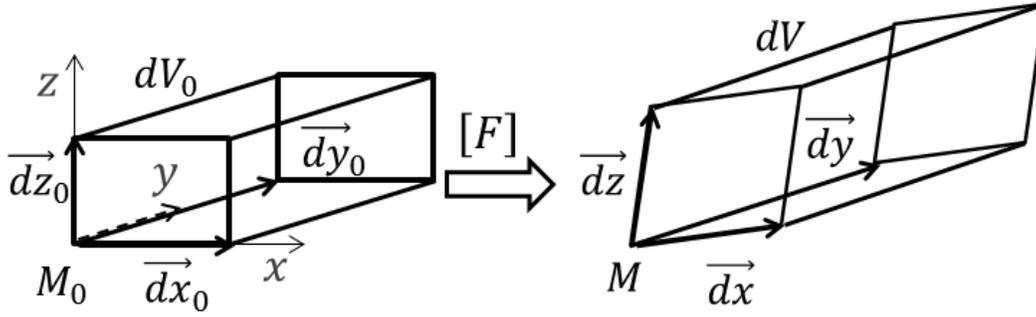


Figure 28 – Transformation d'un volume infiniment petit.

$$\vec{dx} = \vec{dx}_0(1 + \varepsilon_{xx}) \quad \vec{dy} = \vec{dy}_0(1 + \varepsilon_{yy}) \quad \vec{dz} = \vec{dz}_0(1 + \varepsilon_{zz})$$

La dilatation volumique et la déformation volumique s'écrivent alors :

$$\lambda_V(M_0) = \frac{dV}{dV_0} \approx 1 + \text{tr}[\varepsilon] = 1 + \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} \quad 2.23$$

$$\theta = \varepsilon_V(M_0) = \frac{dV - dV_0}{dV_0} \approx \text{tr}[\varepsilon] = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u}{\partial x_0} + \frac{\partial v}{\partial y_0} + \frac{\partial w}{\partial z_0} = \text{div } \vec{u}$$

N.B : Si $\text{div } \vec{u} = 0$ alors la densité du milieu ne varie pas.

2.4 Conditions de compatibilité

On peut retrouver les déformations ε_{ij} et les rotations ω_{ij} par dérivation du champ de déplacements u_i en utilisant les équations (**Erreur ! Source du renvoi introuvable.** et **Erreur ! Source du renvoi introuvable.**) :

Réciproquement, peut-on calculer le champ des déplacements u_i par l'intégration des déformations ε_{ij} ou des rotations ω_{ij} ?

Il est nécessaire l'existence de relations entre les six composantes ε_{ij} ou ω_{ij} et les trois composantes du champ vectoriel des déplacements u_i . Ces relations s'appellent les **conditions de compatibilité**.

2.4.1 Conditions de compatibilité dans le plan

On commence par les relations (2.13) :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, 2\varepsilon_{xy} = \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

Qui deviennent après une double dérive de ε_x et ε_y respectivement par rapport à y et à x :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2}$$

La somme des deux dernières équations est égale double dérive de γ_{xy} par rapport à x et à y :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

Ce qui donne :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad \text{Ou encore :} \quad \varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} - 2\varepsilon_{12,12} = 0 \quad 2.24$$

Ce sont les équations de compatibilité dans le plan.

2.4.2 Conditions de compatibilité dans l'espace

On dérive les relations (**Erreur ! Source du renvoi introuvable.**), on obtient :

$$\omega_{ij,k} = \frac{1}{2}(u_{i,jk} - u_{j,ik})$$

Ou encore en ajoutant et retranchant $u_{k,ji}$:

$$\omega_{ij,k} = \frac{1}{2}(u_{i,jk} + u_{k,ji} - u_{k,ji} - u_{j,ik}) = \frac{1}{2}((u_{i,k} + u_{k,i})_j - (u_{k,j} + u_{j,k})_i) \omega_{ij,k} = \varepsilon_{ik,j} - \varepsilon_{jk,i}$$

$$\omega_{ij,k} = \varepsilon_{ik,j} - \varepsilon_{jk,i} \quad 2.25$$

On outre, la forme différentielle de ω_{ij} s'écrit pour les variables k et l :

$$d\omega_{ij} = \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_k} dx_k + \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_l} dx_l$$

$d\omega_{ij}$ est différentielle totale si :

$$\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} = \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_l \partial x_k}$$

Cette expression devient en tenant compte des équations (2.25) :

$$\varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jk,il} = \varepsilon_{il,jk} - \varepsilon_{jl,ik}$$

Ou encore

$$\varepsilon_{il,jk} + \varepsilon_{jk,il} - \varepsilon_{jl,ik} - \varepsilon_{ik,jl} = 0$$

Ou encore en permutant l et j :

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0$$

2.26

Ou sous forme vectorielle :

$$\overrightarrow{rot} \quad {}^t \overrightarrow{rot} \bar{\varepsilon} = \bar{0}$$

Ce sont les équations de compatibilité

Ces équations se réduisent à 6 conditions :

- La première condition est obtenue en mettant : $i=j=1$ et $k=l=2$
- La deuxième condition est obtenue en mettant : $i=j=1$ et $k=2$ et $l=3$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} - 2\varepsilon_{12,12} &= 0 \\ \varepsilon_{11,23} + \varepsilon_{23,11} - \varepsilon_{12,13} - \varepsilon_{13,12} &= 0\end{aligned}\tag{2.27}$$

- Les 4 autres conditions sont obtenues par permutation circulaire des indices 1, 2, 3 dans les deux premières conditions.
- Dans le cas d'un problème plan (x, y), ces équations se réduisent aux équations (2.24).

Chapitre 3

Lois de comportement

3.1 Loi de Hooke généralisée

Pour une direction donnée, la loi de Hooke s'exprime sous la forme (Expériences de 1675) :

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

On peut généraliser la loi de Hooke au comportement élastique tri directionnel en l'exprimant sous une forme matricielle :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad 3.1$$

Le comportement élastique tri directionnel du matériau est modélisé par un tenseur d'ordre 4 $[C_{ijkl}]$ contenant 81 coefficients élastiques.

C_{ijkl} ou $[C]$ est le tenseur d'élasticité.

3.2 Propriétés du tenseur d'élasticité C_{ijkl}

- La symétrie des tenseurs de contraintes σ_{ij} et de déformations ε_{ij} permettent d'écrire :

$$C_{ijkl} = C_{jikl} \text{ et } C_{ijkl} = C_{ijlk}$$

Le nombre de coefficients élastiques se réduit à 36

- L'existence d'un potentiel élastique W : "stabilité énergétique du tenseur C_{ijkl} ", permet d'écrire :

$$C_{ijkl} = C_{klij}$$

Le nombre de coefficients élastiques se réduit à 21.

En effet, on a pour le potentiel élastique :

$$dW = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad \text{Ou encore} \quad \sigma_{ij} = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij}}$$

Et d'après l'équation (3.1) :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad \text{Alors :} \quad \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = C_{ijkl} = \frac{\partial^2 w}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}}$$

De même :

$$\sigma_{kl} = C_{klij}\varepsilon_{ij} \quad \text{Alors :} \quad \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \varepsilon_{ij}} = C_{klij} = \frac{\partial^2 w}{\partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{ij}}$$

$$\text{Et comme :} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial^2 w}{\partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{ij}} \quad \text{Alors :} \quad C_{ijkl} = C_{klij}$$

Pour simplifier l'écriture, on adopte souvent la notation de Voigt :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1113} & C_{1112} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2213} & C_{2212} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3313} & C_{3312} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2323} & C_{2313} & C_{2312} \\ C_{1311} & C_{1322} & C_{1333} & C_{1323} & C_{1313} & C_{1312} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1223} & C_{1213} & C_{1212} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix}$$

3.3 Matériau isotrope

Un matériau est dit isotrope si ses propriétés sont identiques dans les trois directions. Dans ce cas, il ne reste que trois coefficients.

En introduisant les coefficients de Lamé, il ne reste que deux coefficients indépendants : λ et μ

Dans ce cas, le tenseur d'élasticité s'écrit :

$$[C] = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \quad 3.2$$

3.4 Lois de comportement (matériau élastique, linéaire et isotrope)

Les lois de comportement traduisent les relations entre les contraintes et les déformations.

3.4.1 Loi de Lamé

Pour un matériau élastique, linéaire et isotrope, l'équation (3.1) s'écrit en tenant compte de l'équation (3.2) :

$$\text{En notation matricielle} \quad [\sigma] = 2\mu[\varepsilon] + \lambda \operatorname{tr}[\varepsilon][I] \quad 3.3$$

$$\text{En notation indicielle :} \quad \sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij}$$

λ et μ sont les coefficients de **Lamé**.

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = G \quad 3.4$$

3.4.2 Loi de Hooke

En notation matricielle
$$[\varepsilon] = \frac{1 + \nu}{E} [\sigma] - \frac{\nu}{E} \text{tr}[\sigma][I] \quad 3.5$$

En notation indicielle :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij}$$

E et ν sont les coefficients de **Hooke** ou de **Young**.

$$E = \frac{\mu (3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad 3.6$$

3.4.3 Loi de comportement avec variation de la température :

En tenant compte de la variation de température, les lois de Lamé et de Hooke deviennent :

$$[\sigma] = 2\mu[\varepsilon] + \lambda \text{tr}[\varepsilon][I] - \frac{E\alpha\Delta T}{1 - 2\nu} [I] \quad 3.7$$

$$[\varepsilon] = \frac{1 + \nu}{E} [\sigma] - \frac{\nu}{E} \text{tr}[\sigma][I] + \alpha \Delta T [I]$$

Ou encore en notation indicielle :

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} - \frac{E\alpha\Delta T}{1 - 2\nu} \delta_{ij} \quad 3.8$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \alpha \Delta T \delta_{ij}$$

α est le coefficient de dilatation du matériau et ΔT est la variation de température.

3.5 Etats d'élasticité particuliers

3.5.1 Etat de contraintes planes

Un solide est en état de contraintes planes par rapport au plan (x, y), si en tout point M du solide, le tenseur des contraintes est de la forme :

$$\bar{\sigma}(M) = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(x,y,z)}$$

L'axe z est donc direction principale ($\sigma_{zz} = 0$). La loi de Hooke permet d'écrire :

$$\bar{\varepsilon}(M) = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}}{E} & \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{xy} & 0 \\ \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{xy} & \frac{\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx}}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-\nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})}{E} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}$$

Les équations d'équilibre permettent d'écrire :

$$\begin{cases} \sigma_{xx,x} + \sigma_{xy,y} + f_x = \rho \ddot{u} \\ \sigma_{xy,x} + \sigma_{yy,y} + f_y = \rho \ddot{v} \\ f_z = 0 \end{cases}$$

Le solide est donc sollicité par des charges uniquement sur le plan (x, y). C'est le cas de pièces minces de petites épaisseurs h.

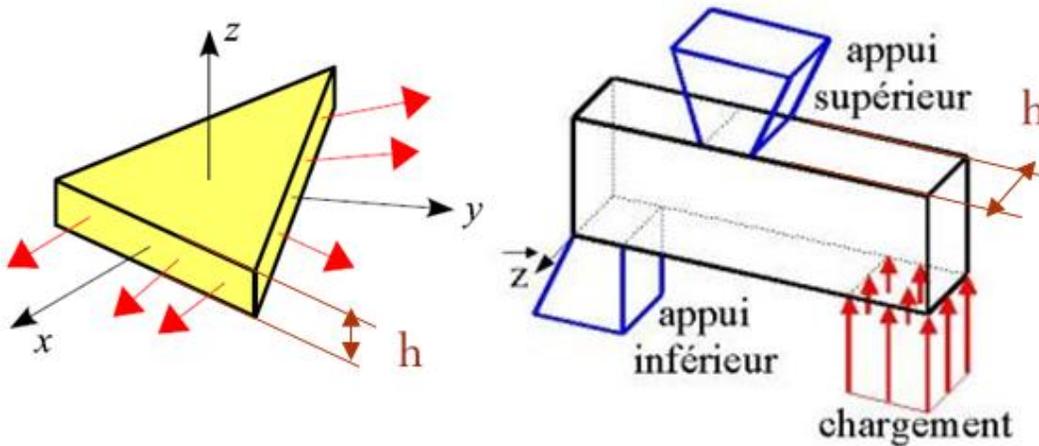


Figure 29 –Exemples de solides en état de contraintes planes

3.5.2 Etat de déformations planes

Un solide est en état de déformations planes par rapport au plan $\{O; x, y\}$ si en tout point M du solide, le champ de déplacement est de la forme :

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \\ w = 0 \end{cases}$$

Le tenseur de déformations $\bar{\varepsilon}(M)$ est donc de la forme :

$$\bar{\varepsilon}(M) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'axe z est donc une direction principale ($\varepsilon_{zz} = 0$). Les lois de Lamé permettent d'écrire :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad \text{Avec :} \quad \sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$

Le tenseur de contraintes est donc de la forme :

$$\bar{\sigma}(M) = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

C'est le cas de solides de longueur très supérieure aux autres dimensions selon l'axe Oz et satisfaisant aux conditions :

- Les bases du corps sont fixes selon z.
- Les forces appliquées au solide sont normales à Oz et indépendantes de z.

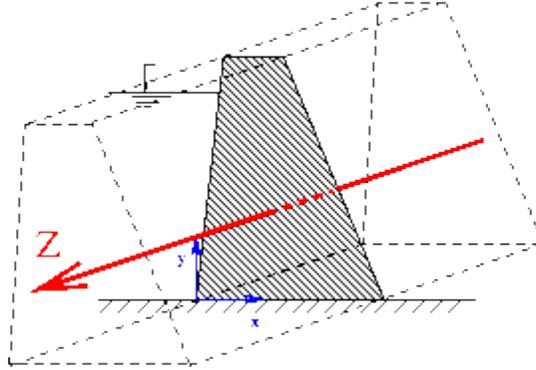


Figure 30 –Barrage en état de déformations planes

3.5.3 Etat axisymétrique ou de révolution cylindrique

Le solide étudié, le chargement et les conditions aux limites sont de révolution cylindrique.

Un point du solide est repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) . Si z est l'axe de révolution, chaque point du solide se déplace dans son plan méridien (r, z) . De plus le champ de déplacement est indépendant de θ .

Le champ de déplacement est de la forme

$$\begin{cases} u_r = u = u(r, z) \\ u_\theta = 0 \\ u_z = w = w(r, z) \end{cases}$$

Le tenseur de déformations $\bar{\varepsilon}(M)$ est déduit à partir des déplacements. :

$$\bar{\varepsilon}(M) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \\ 0 & \frac{u}{r} & 0 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) & 0 & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}_{r, \theta, z}$$

L'axe \vec{e}_θ est donc une direction principale ($\varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{z\theta} = 0$). Les lois de Lamé permettent d'écrire :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{rz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{rz} \end{pmatrix}$$

Si le chargement est une pression intérieure ou extérieure sur les cylindres.

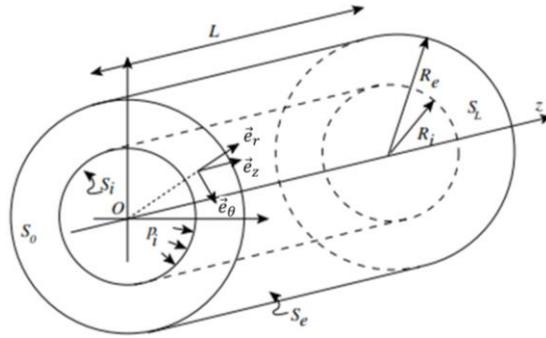


Figure 31 –Cylindre chargé par une pression intérieure et ou extérieure.

Le champ de déplacement est de la forme :

$$\begin{cases} u = u(r) \\ v = 0 \\ w = w(z) \end{cases} \quad \text{On en déduit :}$$

$$\bar{\varepsilon}(M) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{u}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}_{r,\theta,z} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}$$

3.6 Energie de déformation élastique

L'énergie de déformation élastique s'écrit :

$$U = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \quad 3.9$$

$$U = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon \text{ (Traction-compression)} \quad \text{et} \quad U = \frac{1}{2} \tau \gamma \text{ (Cisaillement)}$$

Si le solide est isotrope et le comportement est linéaire, alors en utilisant les lois de comportement, on obtient :

$$U = \frac{1}{2} [2\mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + \lambda (\text{trace } \bar{\varepsilon})^2] \quad \text{Ou encore :} \quad U = \frac{1}{2} \left[\frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} (\text{trace } \bar{\sigma})^2 \right]$$

Les tenseurs de contraintes et de déformation peuvent se décomposer en parties sphériques et déviatoriques :

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{3} \text{trace } \bar{\sigma} \delta_{ij} + S_{ij} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{3} \text{trace } \bar{\varepsilon} \delta_{ij} + e_{ij}$$

S_{ij} : Déviateur du tenseur des contraintes et e_{ij} : déviateur du tenseur des déplacements ;

L'énergie devient :

$$U = \frac{1}{6} \text{trace } \bar{\sigma} \text{ trace } \bar{\varepsilon} + \frac{1}{2} S_{ij} e_{ij} = U_v + U_f$$

$$U_v = \frac{1}{6} \text{trace } \bar{\sigma} \text{ trace } \bar{\varepsilon} \qquad U_f = \frac{1}{2} S_{ij} e_{ij}$$

U_v : Énergie de déformation élastique sphérique. C'est l'énergie due au changement de volume sans changement de forme. Elle n'a aucune influence sur le domaine élastique.

U_f : Énergie de déformation élastique déviatorique. C'est l'énergie due au changement de forme sans changement de volume. C'est cette partie d'énergie qui influe sur le domaine élastique.

Énergie de déformation élastique sphérique

En appliquant les lois de comportements, U_v devient :

$$U_v = \frac{1}{3K} (\text{trace } \bar{\sigma})^2 = \frac{1}{3K} I_1^2 = \frac{1-2\nu}{6E} I_1^2 \qquad 3.10$$

$$K = \frac{2E}{1-2\nu}$$

E et ν sont les coefficients de **Hooke** et de **Young**.

I_1 est le premier invariant du tenseur des contraintes.

Énergie de déformation élastique déviatorique

En repère principal U_f s'écrit :

$$U_f = \frac{1}{2} (S_1 e_1 + S_2 e_2 + S_3 e_3)$$

Devient, en utilisant les lois de comportement :

$$U_f = \frac{1}{4G} (S_1^2 + S_2^2 + S_3^2) = \frac{1}{2G} J_2$$

J_2 est le second invariant du déviateur du tenseur des contraintes et G est le module de cisaillement.

J_2 peut être écrite en fonction des éléments du tenseur de contraintes :

$$J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$

$$J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)]$$

Dans ce cas, la partie déviatorique de l'énergie U_f devient :

$$\begin{aligned}
U_f &= \frac{1}{12G} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \\
&= \frac{1}{12G} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)] \\
&= \frac{1}{12G} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)] \\
&\quad + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)]
\end{aligned}
\tag{3.11}$$

Chapitre 4

Méthodes de résolution d'un problème d'élasticité

4.1 Problème d'élasticité

Résoudre un problème d'élasticité revient à déterminer le champ de déplacements u_i , les déformations ε_{ij} et les contraintes σ_{ij} .

C'est un problème de 15 équations à 15 inconnues en plus des conditions aux limites de déplacement ou de chargement.

Inconnues :

3 inconnues u_i , 6 inconnues ε_{ij} et 6 inconnues σ_{ij} .

Equations

3 équations d'équilibre (1.5) :

$$\sigma_{ij,j} + f_i = \rho \gamma_i \quad (\text{a})$$

6 relations de comportement (3.3) et (3.5) :

$$\sigma_{ij} = 2 \mu \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \quad \text{Ou} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (\text{b})$$

6 relations déplacement/déformation (**Erreur ! Source du renvoi introuvable.**) :

$$2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} \quad (\text{c})$$

Souvent nous serons face à un système d'équations différentielles relativement **délicat à résoudre**. Il est utile de réécrire les équations de l'élasticité linéaire, sous une autre forme, pour faciliter la résolution.

Nous écrivons ces équations en fonction :

- Des déplacements (équations de Navier)
- Ou en fonction des contraintes (équations de Beltrami).

4.2 Equations de NAVIER : Méthode des déplacements

Ces équations se basent sur le choix du champ de déplacement \vec{u} : cinématiquement admissible et qui doit vérifier les 3 équations d'équilibre (a).

Nous allons construire une seule équation : équation de Navier qui regroupe les équations (a), (b) et (c) :

Prenons comme départ, les 6 relations de comportement (b) :

$$\sigma_{ij} = 2 \mu \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij}$$

Dans les quelles, on introduit les 6 relations déplacement - déformation (c) :

$$2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}$$

Cette équation devient :

$$\sigma_{ij} = \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij}$$

Dérivons ces équations par rapport à j et introduisons les équations d'équilibre (a) :

$$\sigma_{ij,j} = \mu (u_{i,j} + u_{j,i})_{,j} + \lambda \varepsilon_{kk,j} \delta_{ij} = \rho \gamma_i - f_i$$

On introduit une seconde fois, les équations (c) :

$$\sigma_{ij,j} = \mu (u_{i,j} + u_{j,i})_{,j} + \lambda u_{k,ki} \delta_{ij} = \rho \gamma_i - f_i$$

Cette équation peut être écrite sous forme vectorielle :

$$\mu \vec{\Delta} (\vec{u}) + (\lambda + \mu) \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div} (\vec{u})) + (\vec{f} - \rho \vec{\gamma}) = \vec{0} \quad 4.1$$

C'est la première forme des équations de Navier.

Connaissant la relation vectorielle suivante :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} (\vec{u}) = \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div} (\vec{u})) - \vec{\Delta} (\vec{u})$$

La première forme des équations de Navier devient :

$$(\lambda + 2\mu) \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div} (\vec{u})) - \mu \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} (\vec{u}) + (\vec{f} - \rho \vec{\gamma}) = \vec{0} \quad 4.2$$

C'est la deuxième forme des équations de Navier.

Premier cas important :

Si le domaine est en équilibre ou le terme accélération est nul, on obtient :

$$(\lambda + 2\mu) \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div} (\vec{u})) - \mu \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} (\vec{u}) + \vec{f} = \vec{0} \quad 4.3$$

Deuxième cas important :

Si en plus, le $\overrightarrow{\text{grad}} \vec{u}$ est symétrique alors le terme $\overrightarrow{\text{rot}} (\vec{u}) = \vec{0}$

La deuxième forme des équations de Navier devient alors :

$$(\lambda + 2\mu) \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div} (\vec{u})) + \vec{f} = \vec{0} \quad 4.4$$

Troisième cas important :

Si en plus, le domaine est placé dans un champ de forces volumiques négligées ($\vec{f} = \vec{0}$), ces équations deviennent :

$$\text{div}(\vec{u}) = \theta = \text{trace}(\bar{\varepsilon}) = \text{constante} \quad 4.5$$

La déformation volumique est une constante.

Schéma de calcul :

1. Choix de u_i
2. Vérifier les équations de Navier,
3. Vérifier les CL en déplacements,
4. Calculer ε_{ij} (Equations (c))
5. Calculer ensuite σ_{ij} (Equations (b))
6. Vérifier les CL en efforts,
7. Si oui alors u_i , ε_{ij} et σ_{ij} sont solution du problème

4.3 Equations de BELTRAMI : Méthode des contraintes

Ces équations se basent sur le choix du tenseur de contraintes $\bar{\sigma}$: statiquement admissible et qui doit vérifier les conditions aux limites et les 3 équations d'équilibre (a)

Aussi, ce choix doit vérifier les 6 relations de compatibilités (2.27) :

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0$$

Les équations de Beltrami consistent à introduire σ_{ij} dans les relations de compatibilités :

On impose $k=l$ avec i et $j=1,2,3$. Les 6 relations de compatibilités deviennent :

$$\varepsilon_{ij,kk} + \varepsilon_{kk,ij} - \varepsilon_{ik,jk} - \varepsilon_{jk,ik} = 0 \quad 4.6$$

Les quatre termes de (4.6) seront calculés à partir des 6 relations de comportement (b)

Le premier terme

$$\varepsilon_{ij,kk} = \Delta\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\Delta\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\Delta(\sigma_{kk}\delta_{ij})$$

Le deuxième terme

$$\varepsilon_{kk,ij} = \frac{1-2\nu}{E}\sigma_{kk,ij}$$

Le troisième terme

$$\varepsilon_{ik,jk} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ik,jk} - \frac{\nu}{E}\sigma_{ll,jk}\delta_{ik} \quad \text{Avec :} \quad \sigma_{ll,jk}\delta_{ik} = \sigma_{ll,ij}$$

Le quatrième terme

$$\varepsilon_{jk,ik} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{jk,ik} - \frac{\nu}{E}\sigma_{ll,ik}\delta_{jk} \quad \text{Avec :} \quad \sigma_{ll,ik}\delta_{jk} = \sigma_{ll,ij}$$

En sommant les 4 termes, l'équation (4.6) devient :

$$\Delta\sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu}\Delta\sigma_{kk}\delta_{ij} + \frac{1}{1+\nu}\sigma_{kk,i,j} - (\sigma_{jk,ik} + \sigma_{ik,jk}) = 0 \quad 4.7$$

On impose aux équations (4.7) successivement $i=j=1$ puis $i=j=2$ et ensuite $i=j=3$. Cela donne trois nouvelles équations que nous sommons. Cela donne le résultat suivant :

$$\Delta\sigma_{kk} = -\frac{1+\nu}{1-\nu}f_{k,k} \quad 4.8$$

On insère enfin les équations (4.8) dans les équations (4.7), on retrouve l'expression suivante :

$$\Delta\sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu}\sigma_{kk,i,j} + \frac{\nu}{1-\nu}f_{k,k}\delta_{ij} + (f_{i,j} + f_{j,i}) = 0 \quad 4.9$$

Ce sont les équations de Beltrami.

Ces équations peuvent être écrites sous une forme vectorielle :

$$\Delta\bar{\sigma} + \frac{1}{1+\nu}\overrightarrow{\text{grad grad}}\sigma_{kk} + \frac{\nu}{1-\nu}\overrightarrow{\text{div}}(\vec{f}\bar{I}) + (\overrightarrow{\text{grad}}\vec{f} + {}^t\overrightarrow{\text{grad}}\vec{f}) = \bar{0} \quad 4.10$$

Cas important :

Si les forces de volumes sont constantes (pesanteur), les équations de Beltrami s'écrivent :

$$\Delta\sigma_{ij} + \frac{\sigma_{kk,i,j}}{1+\nu} = 0 \quad 4.11$$

Schéma de calcul :

1. Choix de σ_{ij}
2. Vérifier les conditions d'équilibre (Equations (a))
3. Vérifier les CL en efforts,
4. Vérifier les équations de Beltrami,
5. Calculer ε_{ij} (Equations (b))
6. Intégrer pour calculer u_i (Equations (c))
7. Vérifier les CL en déplacements,
8. Si oui alors u_i , ε_{ij} et σ_{ij} sont solution du problème

4.4 Principe de superposition

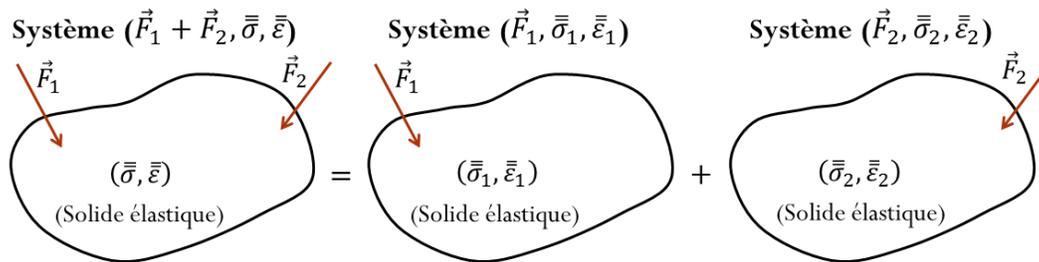


Figure 32 –Principe de superposition

L'étude d'un système complexe se ramène à l'addition de deux (ou plusieurs) systèmes simples.

Le système $(\vec{F}_1 + \vec{F}_2, \bar{\sigma}, \bar{\epsilon})$ peut se décomposer en deux (ou plusieurs) systèmes $(\vec{F}_1, \bar{\sigma}_1, \bar{\epsilon}_1)$ et $(\vec{F}_2, \bar{\sigma}_2, \bar{\epsilon}_2)$ tel que :

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_2 \quad \text{et} \quad \bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}_1 + \bar{\epsilon}_2$$

Exemple

Considérons le système sollicité en traction- compression suivant l'axe \vec{x} combinée avec le cisaillement suivant l'axe \vec{y} .

Système 1 ($\bar{\sigma}_1$)	Système ($\bar{\sigma}_2$)	Système global
Traction-compression	Cisaillement simple	$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_2$
$\bar{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(x,y,z)}$	$\bar{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(x,y,z)}$	$\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Chapitre 5

Critères de limite élastique

Soit l'état de contrainte d'un solide en M tel que :

$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ sont les contraintes principales.

$$\bar{\sigma}(M) = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}_{\{n1,n2,n3\}}$$

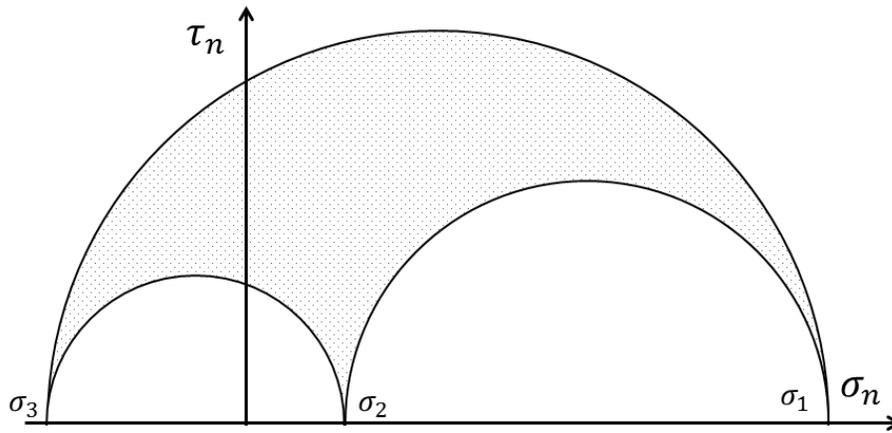


Figure 33 – Etat de contrainte d'un solide.

Comment savoir si le solide est dans le domaine élastique ou non ?

5.1 Critère de Rankine

Le critère de Rankine s'applique pour les matériaux fragiles : craie, béton, verre, fonte, etc. La limite élastique au cisaillement pur $\tau_e = \sigma_e$

Le solide reste dans le domaine élastique tant que la contrainte principale maximale ($|\sigma_{p-max}|$) en module est inférieure à une valeur (σ_{lim}) déterminée par l'essai de traction ou de compression.

La contrainte principale maximale :

$$\sup(|\sigma_i|)$$

σ_{lim} est déterminée par l'essai de traction :

$$\sigma_{lim} = \sigma_e$$

D'où le critère de Rankine :

$$\sup(|\sigma_i|) \leq \sigma_e \quad 5.1$$

- Pour un état de traction simple :

$$|\sigma| \leq \sigma_e$$

- Pour un état de cisaillement pur :

$$|\tau| \leq \sigma_e$$

5.2 Critère de Tresca

Le critère de Tresca s'applique pour les matériaux ductiles : alliages de cuivre ou d'aluminium, aciers doux, etc. La limite élastique au cisaillement pur $\tau_e = \frac{\sigma_e}{2}$

Le solide reste dans le domaine élastique tant que la contrainte tangentielle maximale (τ_{max}) est inférieure à une valeur (τ_{lim}) déterminée par l'essai de traction.

La contrainte tangentielle maximale :

$$\tau_{max} = \sup \left(\frac{\sigma_i - \sigma_j}{2} \right)$$

τ_{lim} est déterminée par l'essai de traction :

$$\tau_{lim} = \frac{\sigma_e}{2}$$

Donc :

$$\sup(\sigma_i - \sigma_j) \leq \sigma_e \quad 5.2$$

- Pour un état de traction simple :

$$|\sigma| \leq \sigma_e$$

- Pour un état de cisaillement pur :

$$2|\tau| \leq \sigma_e \quad \text{Ou encore} \quad |\tau| \leq \frac{\sigma_e}{2} = \tau_e$$

5.3 Critère de Von Mises

Le critère de Von Mises est un critère énergétique qui utilise le constat de Bridgman et Nadai (paragraphe 1.14) : "La compression isotrope n'a aucune influence sur le domaine élastique". L'idée est donc de limiter seulement l'énergie obtenue à partir des tenseurs déviateurs.

Le solide reste dans le domaine élastique tant que l'énergie de déformation élastique déviatorique reste inférieure à une valeur déterminée par l'essai de traction.

L'énergie de déformation élastique déviatorique pour le cas de traction (équation 3.11)

$$U_{f\text{-traction}} = \frac{\sigma_1^2}{6G}$$

$U_{f\text{-limite}}$ est déterminée par l'essai de traction :

$$U_{f\text{-limite}} = \frac{\sigma_e^2}{6G}$$

Le critère de Von Mises s'écrit alors :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2} \leq \sigma_e \quad 5.3$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2)} \leq \sigma_e$$

Pour un état de traction simple :

$$|\sigma| \leq \sigma_e$$

Pour un état de cisaillement pur :

$$\sqrt{3}|\tau| \leq \sigma_e \quad \text{ou} \quad |\tau| \leq \frac{\sigma_e}{\sqrt{3}} = 0.58 \tau_e$$

- Pour un état de traction simple :

$$|\sigma| \leq \sigma_e$$

- Pour un état de cisaillement pur :

$$\sqrt{3}|\tau| \leq \sigma_e \quad \text{ou encore} \quad |\tau| \leq \frac{\sigma_e}{\sqrt{3}} = 0.58 \tau_e$$

Ce critère s'applique pour les matériaux ductiles : alliages de cuivre ou d'aluminium, aciers doux, etc. La limite élastique au cisaillement pur $\tau_e = \sigma_e / \sqrt{3} = 0.58 \sigma_e$.

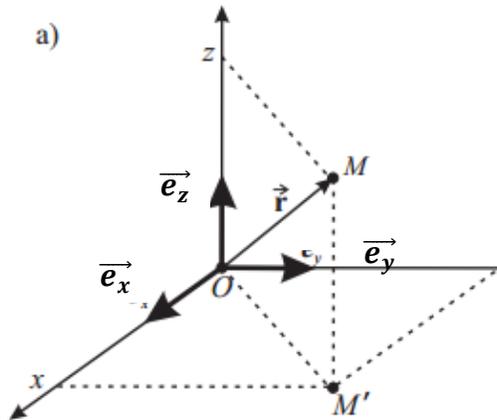
Annexe A

Systèmes de coordonnées

Description de la position d'un solide

La position d'un solide par rapport à un repère de référence R_0 , peut être définie par différents types de coordonnées : cartésiennes, cylindriques et sphériques.

Coordonnées cartésiennes $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ ou $R(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$



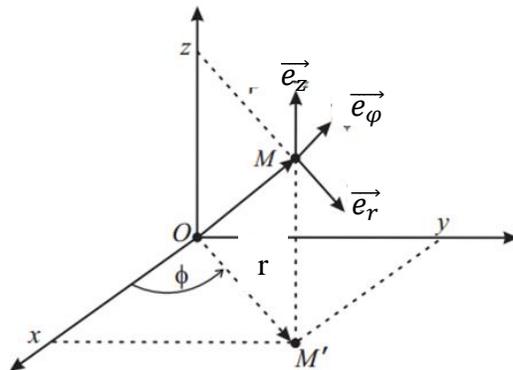
Un point M de l'espace est repéré par trois composantes du vecteur \vec{OM} :

Et

$$\vec{OM}(x, y, z) = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

$$d\vec{OM}(x, y, z) = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z$$
5.4

Coordonnées cylindriques $R(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z)$



Un point M de l'espace est repéré par trois composantes du vecteur \vec{OM} :

Et

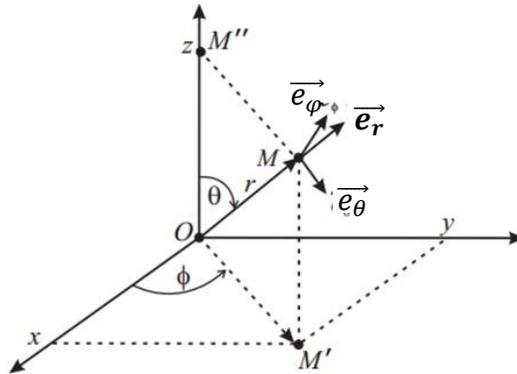
$$\vec{OM}(r, \phi, z) = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$$

$$d\vec{OM}(r, \phi, z) = dr\vec{e}_r + r d\phi\vec{e}_\phi + dz\vec{e}_z$$
5.5

Équivalent en coordonnées cartésiennes :

$$x = r \cos\varphi \qquad y = r \sin\varphi \qquad z = z$$

Coordonnées sphériques $\mathbf{R} (O, \vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_\theta)$



Un point M de l'espace est repéré par trois composantes du vecteur \vec{OM} :

Et

$$\vec{OM}(r, \varphi, \theta) = r\vec{e}_r$$

$$d\vec{OM}(r, \varphi, \theta) = dr\vec{e}_r + r\sin\theta d\varphi\vec{e}_\varphi + rd\theta\vec{e}_\theta \qquad 5.6$$

Équivalent en coordonnées cartésiennes :

$$x = r \sin\theta \cos\varphi \qquad y = r \sin\theta \sin\varphi \qquad z = r \cos\theta$$

Annexe B

Notation indicielle

Ordre et dimension d'un élément

Pour un tenseur : ordre 2.

Exemple : tenseur de contraintes, tenseur de déformations...

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ dim 3, } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \text{ dim 2.}$$

Ordre $r=2$ dans un espace de **dimension** n : il faut n^{r-2} composantes

Pour un vecteur : ordre 1.

Exemple : vecteur vitesse, vecteur force...

$$\vec{V} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \text{ dim 3, } \vec{u} = [u_1 \ u_2] \text{ dim 2.}$$

Ordre $r=1$ dans un espace de **dimension** n : il faut n^1 composantes

Pour un scalaire : ordre 0.

Un **scalaire** est défini par un seul nombre qui représente la valeur absolue de la grandeur physique qu'il représente.

Exemple : **masse, volume, densité, température ...**

Ordre $r=0$ dans un espace de **dimension** 1 : il faut $n^r=1^0=1$ composante

Notation indicielle

Désigner des vecteurs (ordre 1) ou des tenseurs (ordre 2) par leurs indices a pour objectif d'alléger l'écriture.

- Les coordonnées cartésiennes d'un point m : x, y, z ou x_1, x_2, x_3 ou \mathbf{x}_i
- Les vecteurs de la base seront notés \vec{e}_i ($i=1, n$).
- Pour désigner un vecteur \vec{v} de composantes v_1, v_2, v_3 , on utilisera \mathbf{v}_i .
- Pour désigner un tenseur $[t]$ d'ordre 2, on utilisera t_{ij} .
- Le symbole de **Kronecker** représente le tenseur unité $[i]$:

$$\delta_{ij} = 1 \text{ lorsque } i=j \quad \delta_{ij} = 0 \text{ lorsque } i \neq j$$

- Le symbole de **spin** (ordre 3) représente une permutation :

$$\varepsilon_{ijk} = 1 \quad \text{lorsque } i, j, k \text{ est une permutation directe}$$

$\varepsilon_{ijk} = -1$ lorsque i, j, k est une permutation indirecte

$\varepsilon_{ijk} = 0$ lorsque deux indices sont identiques

Convention de l'indice muet

Appelée aussi convention d'Einstein

Le produit scalaire :

$\vec{U} \cdot \vec{V} = \sum_{i=1}^3 u_i v_i$ est noté simplement : $u_i v_i$

Lorsqu'un indice apparaît 2 fois dans un monôme, ce monôme représente la somme de n termes en faisant varier l'indice de 1 à n.

Le produit matriciel :

- $[P] = [A][B]$

Un élément de la matrice produit : $P_{ij} = \sum_{k=1}^3 A_{ik} B_{kj}$ est noté : $A_{ik} B_{kj}$

$A_{ik} B_{kj}$:

- Les indices i et j ne sont pas répétés. Ils sont appelés indices libres ou indices d'ordre
- L'indice k est répété, il est dit indice muet ou indice de sommation

- $[P] = [A]^T [B]$

Un élément de la matrice produit : $P_{ij} = \sum_{k=1}^3 A_{ki} B_{kj}$ est noté : $A_{ki} B_{kj}$

- $[P] = [I][A]$

Un élément de la matrice produit : $P_{ij} = \sum_{k=1}^3 \delta_{ik} A_{kj}$ est noté : $\delta_{ik} A_{ij} = A_{ij}$

Le gradient d'une fonction scalaire f :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k} = f_{,i}$$

La divergence d'une fonction vectorielle \vec{V} :

$$\text{div}(\vec{V}) = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} = v_{i,i}$$

Remarques

$$P_{ij} = A_{ik} B_{kj}$$

- Un indice ne peut apparaître plus que 2 fois dans un monôme
- L'indice k est répété : indice muet, de sommation
- Les indices i et j ne sont pas répétés : indices libres ou d'ordre
- L'ordre du résultat est donné par le nombre d'indices libres :

Tii : ordre 0 : scalaire,

$t_{ij,j}$: ordre1 : vecteur,

$a_{ik}b_{kj}$: ordre2 : tenseur

- Les additions sont associatives et commutatives :

$$a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}$$

- Les multiplications sont associatives et distributives à droite et à gauche par rapport aux additions

Exercices

- Produit vectoriel

$$\vec{U} \wedge \vec{V} = \vec{W}$$

Montrer que : $w_i = \varepsilon_{ijk} u_j v_k$

- Produit mixte

Montrer que :

$$[\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}] = \vec{U}(\vec{V} \wedge \vec{W}) = \vec{V}(\vec{W} \wedge \vec{U}) = \vec{W}(\vec{U} \wedge \vec{V})$$

- Montrer que :

$$\vec{A} = \vec{U} \wedge (\vec{V} \wedge \vec{W}) = (\vec{U} \cdot \vec{W}) \cdot \vec{V} - (\vec{U} \cdot \vec{V}) \cdot \vec{W}$$

Annexe C

Opérateurs

Tenseur gradient

Le gradient d'une fonction \bar{q} est défini par la relation :

$$d\bar{q} = \overrightarrow{\text{grad}}\bar{q} \cdot d\overrightarrow{OM}$$

M point du domaine où est définie la fonction \bar{q}

- Si $\bar{q}=f(m)$ scalaire : $df = \overrightarrow{\text{grad}}f \cdot d\overrightarrow{OM} = f_{,i} dx_i$

En coordonnées cartésiennes : $\overrightarrow{\text{grad}}f = f_{,i}$

En coordonnées cylindriques : $\overrightarrow{\text{grad}}f = f_{,r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}f_{,\varphi}\vec{e}_\varphi + f_{,z}\vec{e}_z$

- Si $\bar{q}=\vec{u}$ vecteur : $d\vec{u} = \overrightarrow{\text{grad}}\vec{u} \cdot d\overrightarrow{OM}$

<p>En coordonnées cartésiennes</p> $\overrightarrow{\text{grad}}\vec{u} = \begin{bmatrix} \overrightarrow{\text{grad}}u \\ \overrightarrow{\text{grad}}v \\ \overrightarrow{\text{grad}}w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$ <p style="text-align: center;">$= u_{,i,j}$</p>	<p>En coordonnées cylindriques</p> $\overrightarrow{\text{grad}}\vec{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} & \frac{\partial u_r}{\partial z} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} & \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}$	5.7
---	---	-----

Divergence

- La divergence d'une fonction vectorielle \vec{u} :

$$\text{div}(\vec{u}) = \text{trace}(\overrightarrow{\text{grad}}\vec{u}) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = v_{,i,i} \quad 5.8$$

- La divergence d'un tenseur $\bar{\sigma}$:

<p>En coordonnées cartésiennes $\text{div}(\bar{\sigma})$</p> $\begin{bmatrix} \text{div}(\bar{\sigma}_x) \\ \text{div}(\bar{\sigma}_y) \\ \text{div}(\bar{\sigma}_z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \end{bmatrix} = \sigma_{i,j,j}$	<p>En coordonnées cylindriques $\text{div}(\bar{\sigma})$</p> $\begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{r} \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} \end{bmatrix}$	5.9
--	--	-----

Théorème de Green-Ostrogradski ou théorème de la divergence :

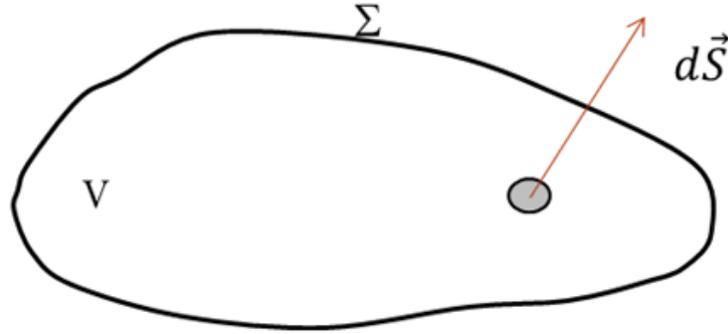


Figure 34 –Théorème de la divergence

Le flux sortant d'un champ vectoriel à travers une surface fermée est égal à l'intégrale sur le volume limité par cette surface de la divergence de ce champ.

$$\oiint_{\Sigma} \vec{u} \, d\vec{s} = \iiint_V \text{div } \vec{u} \, dv$$

Laplacien,

- Laplacien scalaire :

$$\Delta f = \text{div}(\text{grad}.f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = f_{,i} \quad 5.10$$

- Laplacien vectoriel :

$$\Delta \vec{u} = \begin{pmatrix} \Delta u_1 = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \\ \Delta u_2 = \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} \\ \Delta u_3 = \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2} \end{pmatrix} = u_{i,j} \quad 5.11$$

- Laplacien tensoriel :

$$\Delta \sigma = \Delta \sigma_{ij} = \sigma_{ij,kk} \quad 5.12$$

Rotationnel :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{u}) = \left[\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right] \vec{e}_x + \left[\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right] \vec{e}_y + \left[\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right] \vec{e}_z = \varepsilon_{ijk} u_{k,j} \quad 5.13$$

Opérateur nabla

L'espace étant rapporté à la base orthonormée directe i, j, k , on définit l'opérateur aux dérivées partielles **nabla** par :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Pour une fonction scalaire $\rho = \rho(x,y,z)$:

- Le gradient de ρ est défini par :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\rho = \vec{\nabla}\rho = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \rho = \frac{\partial \rho}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \rho}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \vec{k}$$

- Le Laplacien de ρ est défini par :

$$\Delta\rho = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}\rho) = \vec{\nabla}^2\rho = \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2}$$

Pour une fonction vectorielle $\vec{u} = \vec{u}(u, v, w)$:

- La divergence de \vec{u} est défini par :

$$\text{div}\vec{u} = \vec{\nabla}\vec{u} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) (u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

- Le **rotationnel** de \vec{u} est défini par :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}}\vec{u} &= \vec{\nabla} \wedge \vec{u} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \wedge (u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}) \\ &= \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{k} \end{aligned}$$

Formules

Montrer les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}}\rho) &= 0 \\ \text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{u}) &= 0 \\ \Delta f &= \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}\vec{u}) \\ \Delta\vec{u} &= \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{u}) - \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{u}) \end{aligned} \quad 5.14$$

Résumé

	$\overline{\text{grad}f}$	$\overline{\text{grad}u}$	$\text{div}(\overline{\sigma})$
Coordonnées cartésiennes	$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = u_{i,j}$	$\begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \end{bmatrix} = \sigma_{ij,j}$
Coordonnées cylindriques	$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} & \frac{\partial u_r}{\partial z} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} & \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{r} \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} \end{bmatrix}$
Coordonnées sphériques	$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r} \cot \theta \\ \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_\theta}{r} \cot \theta \end{bmatrix}$	\Downarrow $\begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{r\theta} \cos \theta}{r} \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{3\sigma_{r\theta} + (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}) \cos \theta}{r} \\ \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\varphi}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{3\sigma_{r\varphi} + 2\sigma_{\theta\varphi} \cos \theta}{r} \end{bmatrix}$