# Indemostrabilidad de la Caracterización Lógica de la Bisimulación

Pedro Sánchez Terraf

UMA, UniCen, 30 / 09 / 2010

# La próximas **dos horas** hablaremos de. . .

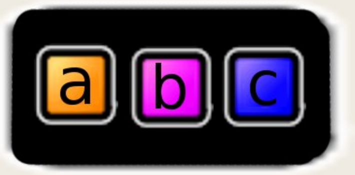
1. Introducción
   - Un poco de verso
   - Sistemas de Transiciones Etiquetados (STE)
   - Lógicas Modales
2. Procesos de Markov Etiquetados (PME)
   - Ahora, Probabilidades
   - Teoría de Conjuntos Descriptiva
3. Resultados
   - Contraejemplos
   - Trabajo Futuro

# Procesos de Decisión de Markov

## Algunas propiedades de nuestros sistemas

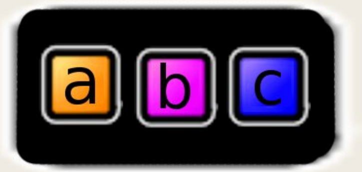
- Son sistemas reactivos. Tendrán un conjunto de *estados internos* $S$ y *acciones* etiquetadas por un conjunto $L$.
- Nuestros modelos evolucionan con el tiempo, que consideramos discreto, interactuando con el medio a través de $L$.
- Las transiciones del sistema no dependen de la historia pasada.

# Botones, letras y colores



# Botones, letras y colores

Todos habilitados




“Deadlock”

# Botones, letras y colores


*II*

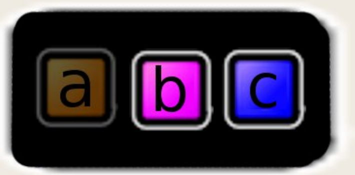

*I*

# Botones, letras y colores

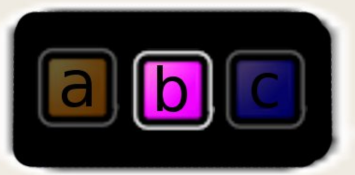

*II*


*I*

# Botones, letras y colores

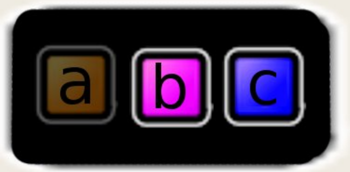



*II*




*I*

# Botones, letras y colores




*II*


*I*

# Botones, letras y colores

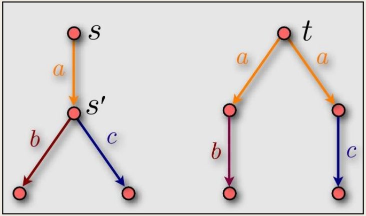

*II*


*I*

# Un modelo de juguete

## Sistemas de Transiciones Etiquetados (STE)

$\langle S, L, T\rangle$ tales que $T_a(s) \subseteq S$ para cada $s \in S$ y $a \in L$.



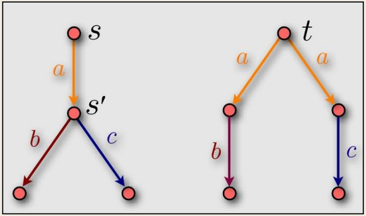
# Un modelo de juguete

**Sistemas de Transiciones Etiquetados (STE)**

$\langle S, L, T\rangle$ tales que $T_a(s) \subseteq S$ para cada $s \in S$ y $a \in L$.

**Notación.** $s \xrightarrow{a} s'$ si $s' \in T_a(s)$.

Observar: Esto no es otra cosa que el modelo relacional $\langle S, \{\xrightarrow{a}\}_{a\in L}\rangle$ con lenguaje $L$.



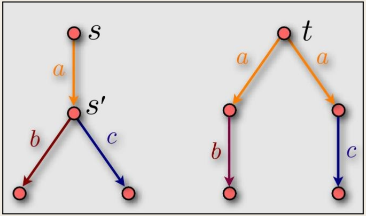
# Un modelo de juguete

## Sistemas de Transiciones Etiquetados (STE)

$\langle S, L, T\rangle$ tales que $T_a(s) \subseteq S$ para cada $s \in S$ y $a \in L$.

**Notación.** $s \xrightarrow{a} s'$ si $s' \in T_a(s)$.

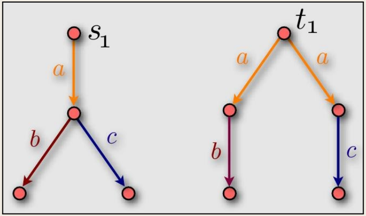
Observar: Esto no es otra cosa que el modelo relacional $\langle S, \{\xrightarrow{a}\}_{a\in L}\rangle$ con lenguaje $L$.




Decimos que $s$ **simula** a $t$ porque $s$ puede aceptar todas las "sucesiones de acciones" que $t$ acepta.

# Simulación y Bisimulación en STE

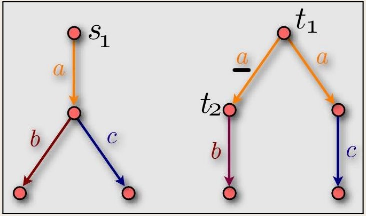
Supongamos dados dos jugadores, $I$ y $II$, que juegan respectivas transiciones en sendos STE comenzando por $s_1$ y $t_1$.




$I : t_1$
$II : s_1$

# Simulación y Bisimulación en STE

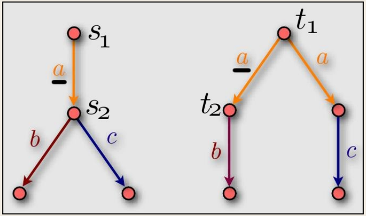
Supongamos dados dos jugadores, $I$ y $II$, que juegan respectivas transiciones en sendos STE comenzando por $s_1$ y $t_1$.




$I : t_1 \qquad a, t_2$
$II : s_1$

# Simulación y Bisimulación en STE

Supongamos dados dos jugadores, $I$ y $II$, que juegan respectivas transiciones en sendos STE comenzando por $s_1$ y $t_1$.

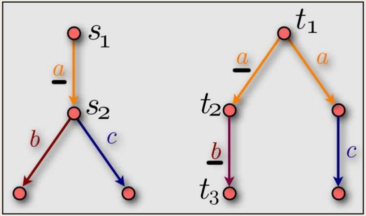



$I : t_1 \quad a, t_2$

$II : s_1 \quad a, s_2$

# Simulación y Bisimulación en STE

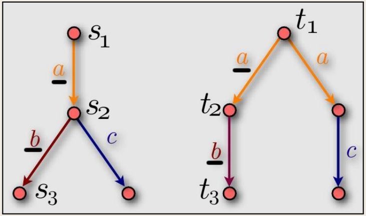
Supongamos dados dos jugadores, $I$ y $II$, que juegan respectivas transiciones en sendos STE comenzando por $s_1$ y $t_1$.




| | | | |
|---|---|---|---|
| $I : t_1$ | $a, t_2$ | | $b, t_3$ |
| $II : s_1$ | | $a, s_2$ | |

# Simulación y Bisimulación en STE

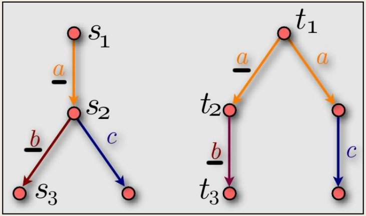
Supongamos dados dos jugadores, $I$ y $II$, que juegan respectivas transiciones en sendos STE comenzando por $s_1$ y $t_1$.




| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $I : t_1$ | $a, t_2$ | | $b, t_3$ | |
| $II : s_1$ | | $a, s_2$ | | $b, s_3$ |

# Simulación y Bisimulación en STE

Supongamos dados dos jugadores, $I$ y $II$, que juegan respectivas transiciones en sendos STE comenzando por $s_1$ y $t_1$.



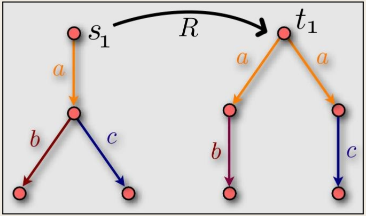

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $I : t_1$ | $a, t_2$ | | $b, t_3$ | |
| $II : s_1$ | | $a, s_2$ | | $b, s_3$ |

## Simulación

Es una relación $R$ tal que si $s_1 \, R \, t_1$ y $t_1 \xrightarrow{a} t_2$ entonces existe $s_2$ tal que $s_1 \xrightarrow{a} s_2$ y $s_2 \, R \, t_2$. En ese caso diremos que $s_1$ *simula a* $s_2$.

# Simulación y Bisimulación en STE

Supongamos dados dos jugadores, $I$ y $II$, que juegan respectivas transiciones en sendos STE comenzando por $s_1$ y $t_1$.



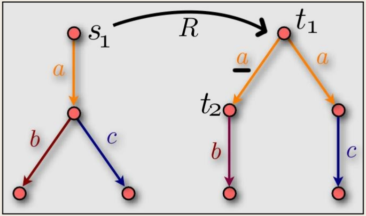

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $I : t_1$ | $a, t_2$ | | $b, t_3$ | |
| $II : s_1$ | | $a, s_2$ | | $b, s_3$ |

## Simulación

Es una relación $R$ tal que si $s_1 \, R \, t_1$ y $t_1 \xrightarrow{a} t_2$ entonces existe $s_2$ tal que $s_1 \xrightarrow{a} s_2$ y $s_2 \, R \, t_2$. En ese caso diremos que $s_1$ *simula a* $s_2$.

# Simulación y Bisimulación en STE

Supongamos dados dos jugadores, $I$ y $II$, que juegan respectivas transiciones en sendos STE comenzando por $s_1$ y $t_1$.



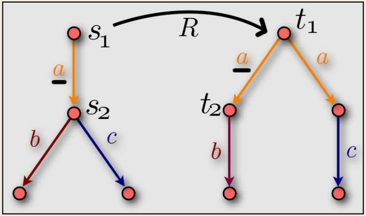

$I : t_1 \quad a, t_2 \quad b, t_3$
$II : s_1 \quad a, s_2 \quad b, s_3$

## Simulación

Es una relación $R$ tal que si $s_1\, R\, t_1$ y $t_1 \xrightarrow{a} t_2$ entonces existe $s_2$ tal que $s_1 \xrightarrow{a} s_2$ y $s_2\, R\, t_2$. En ese caso diremos que $s_1$ *simula a* $s_2$.

# Simulación y Bisimulación en STE

Supongamos dados dos jugadores, $I$ y $II$, que juegan respectivas transiciones en sendos STE comenzando por $s_1$ y $t_1$.




$I : t_1 \quad a, t_2 \quad b, t_3$

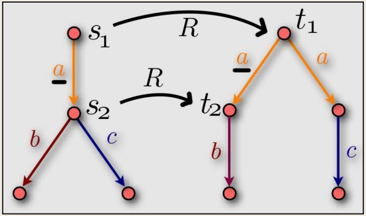
$II : s_1 \quad a, s_2 \quad b, s_3$

## Simulación

Es una relación $R$ tal que si $s_1\, R\, t_1$ y $t_1 \xrightarrow{a} t_2$ entonces existe $s_2$ tal que $s_1 \xrightarrow{a} s_2$ y $s_2\, R\, t_2$. En ese caso diremos que $s_1$ *simula a* $s_2$.

# Simulación y Bisimulación en STE

Supongamos dados dos jugadores, $I$ y $II$, que juegan respectivas transiciones en sendos STE comenzando por $s_1$ y $t_1$.




$I : t_1 \quad a, t_2 \quad \quad b, t_3$
$II : s_1 \quad \quad a, s_2 \quad \quad b, s_3$

## Simulación

Es una relación $R$ tal que si $s_1 \, R \, t_1$ y $t_1 \xrightarrow{a} t_2$ entonces existe $s_2$ tal que $s_1 \xrightarrow{a} s_2$ y $s_2 \, R \, t_2$. En ese caso diremos que $s_1$ *simula a* $s_2$.

# Simulación y Bisimulación en STE

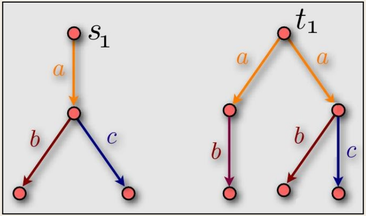
## Bisimulación

Es una relación de simulación **simétrica**. Diremos que $s_1$ es *bisimilar* a $t_1$ si existe una bisimulación $R$ tal que $s_1 \, R \, t_1$.

# Simulación y Bisimulación en STE

## Bisimulación

Es una relación de simulación **simétrica**. Diremos que $s_1$ es *bisimilar* a $t_1$ si existe una bisimulación $R$ tal que $s_1 \, R \, t_1$.

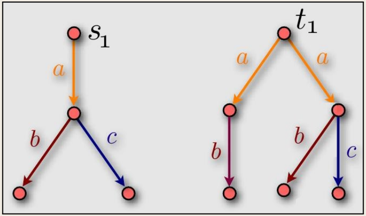



Notar: La bisimulación es más fina que la "doble simulación". Es decir, si $s_1$ es bisimilar a $t_1$, entonces $s_1$ simula $t_1$ y $t_1$ simula a $s_1$, **pero no recíprocamente.**

# Simulación y Bisimulación en STE

## Bisimulación

Es una relación de simulación **simétrica**. Diremos que $s_1$ es *bisimilar* a $t_1$ si existe una bisimulación $R$ tal que $s_1 \, R \, t_1$.

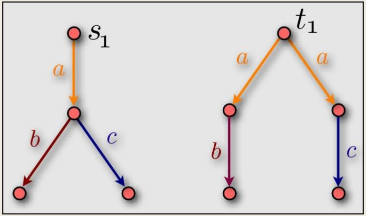



Notar: La bisimulación es más fina que la "doble simulación". Es decir, si $s_1$ es bisimilar a $t_1$, entonces $s_1$ simula $t_1$ y $t_1$ simula a $s_1$, **pero no recíprocamente**.

$R$ simétrica $\iff$ El jugador $I$ puede cambiar de sistema en su turno.

# Simulación y Bisimulación en STE

Supongamos dados dos jugadores, $I$ y $II$, que juegan respectivas transiciones en sendos STE comenzando por $s_1$ y $t_1$.



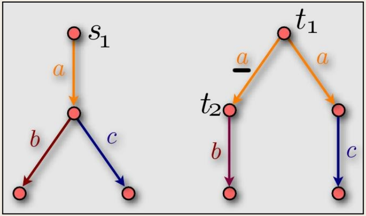

$I : t_1$
$II : s_1$

## Simulación

Es una relación $R$ tal que si $s_1 \, R \, t_1$ y $t_1 \xrightarrow{a} t_2$ entonces existe $s_2$ tal que $s_1 \xrightarrow{a} s_2$ y $s_2 \, R \, t_2$. En ese caso diremos que $s_1$ *simula a* $s_2$.

# Simulación y Bisimulación en STE

Supongamos dados dos jugadores, $I$ y $II$, que juegan respectivas transiciones en sendos STE comenzando por $s_1$ y $t_1$.



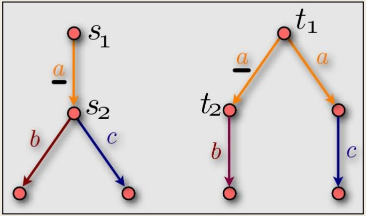

$I : t_1 \quad a, t_2$
$II : s_1$

## Simulación

Es una relación $R$ tal que si $s_1 \, R \, t_1$ y $t_1 \xrightarrow{a} t_2$ entonces existe $s_2$ tal que $s_1 \xrightarrow{a} s_2$ y $s_2 \, R \, t_2$. En ese caso diremos que $s_1$ *simula a* $s_2$.

# Simulación y Bisimulación en STE

Supongamos dados dos jugadores, $I$ y $II$, que juegan respectivas transiciones en sendos STE comenzando por $s_1$ y $t_1$.



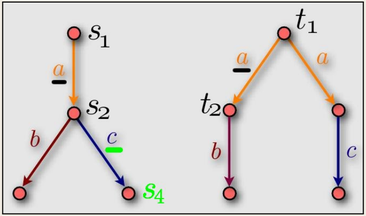

$I : t_1 \quad a, t_2$
$II : s_1 \quad a, s_2$

## Simulación

Es una relación $R$ tal que si $s_1 \, R \, t_1$ y $t_1 \xrightarrow{a} t_2$ entonces existe $s_2$ tal que $s_1 \xrightarrow{a} s_2$ y $s_2 \, R \, t_2$. En ese caso diremos que $s_1$ *simula a* $s_2$.

# Simulación y Bisimulación en STE

Supongamos dados dos jugadores, $I$ y $II$, que juegan respectivas transiciones en sendos STE comenzando por $s_1$ y $t_1$.




$I : t_1 \quad a, t_2 \quad s_2, c, s_4$

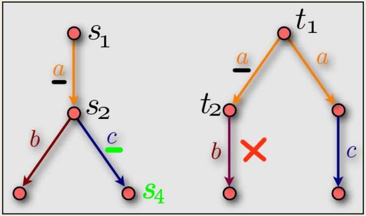
$II : s_1 \quad a, s_2$

## Simulación

Es una relación $R$ tal que si $s_1 \, R \, t_1$ y $t_1 \xrightarrow{a} t_2$ entonces existe $s_2$ tal que $s_1 \xrightarrow{a} s_2$ y $s_2 \, R \, t_2$. En ese caso diremos que $s_1$ *simula a* $s_2$.

# Simulación y Bisimulación en STE

Supongamos dados dos jugadores, $I$ y $II$, que juegan respectivas transiciones en sendos STE comenzando por $s_1$ y $t_1$.




$I : t_1 \quad a, t_2 \quad s_2, c, s_4$

$II : s_1 \quad a, s_2 \quad$ (fin)

## Simulación

Es una relación $R$ tal que si $s_1 \, R \, t_1$ y $t_1 \xrightarrow{a} t_2$ entonces existe $s_2$ tal que $s_1 \xrightarrow{a} s_2$ y $s_2 \, R \, t_2$. En ese caso diremos que $s_1$ *simula a* $s_2$.

# Lógica para la bisimulación

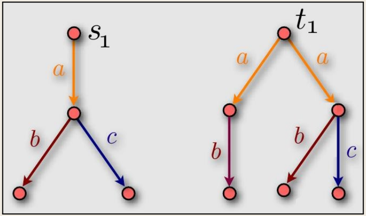
## Lógica de Hennessy-Milner (HML)

$$\varphi \equiv \top \mid \neg\varphi \mid \bigwedge_i \varphi_i \mid \langle a \rangle \psi$$

# Simulación y Bisimulación en STE

## Bisimulación

Es una relación de simulación **simétrica**. Diremos que $s_1$ es *bisimilar* a $t_1$ si existe una bisimulación $R$ tal que $s_1 \, R \, t_1$.




"$t_1$ puede hacer una transición $a$ después de la cual no puede hacer una $c$".

$$t_1 \models \langle a \rangle \neg \langle c \rangle \top$$

$$s_1 \not\models \langle a \rangle \neg \langle c \rangle \top$$

# Lógica para la bisimulación

## Lógica de Hennessy-Milner (HML)

$$\varphi \equiv \top \mid \neg\varphi \mid \bigwedge_i \varphi_i \mid \langle a\rangle\psi$$

## Caracterización Lógica de la Bisimulación

Dos estados de un STE son bisimilares si y sólo si satisfacen las mismas fórmulas de la lógica modal HML.

# Procesos de Markov Etiquetados (PME)

**Definición (Desharnais et al.)**

$\langle S, \mathcal{S}, L, T \rangle$ tales que $T_a(s) \in \mathbf{P}(S)$ para cada $s \in S$ y $a \in L$, donde:

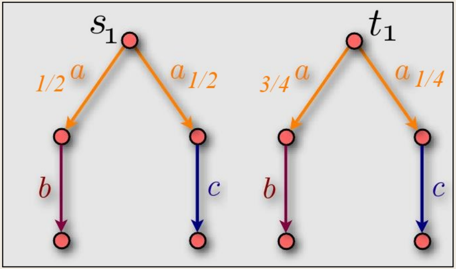
- $\langle S, \mathcal{S} \rangle$ es un espacio medible;
- $\mathbf{P}(S)$ es el espacio de medidas de probabilidad sobre $\langle S, \mathcal{S} \rangle$;
- $T_a$ es medible.

**Notación.** $s \xrightarrow{a} \mu$ si $\mu = T_a(s)$.

# Bisimulación en PME

## Definición

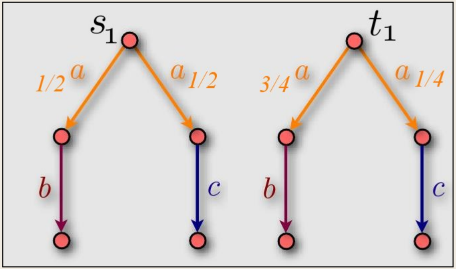
Una relación $R$ es una *bisimulación* en un PME si es simétrica y para todos $s_1, t_1, \nu$, si $s_1 \, R \, t_1$ y $t_1 \xrightarrow{a} \nu$ entonces existe $\mu$ tal que $s_1 \xrightarrow{a} \mu$ y $\mu R \nu$.



# Bisimulación en PME

**Definición**

Una relación $R$ es una *bisimulación* en un PME si es simétrica y para todos $s_1, t_1, \nu$, si $s_1 R t_1$ y $t_1 \xrightarrow{a} \nu$ entonces existe $\mu$ tal que $s_1 \xrightarrow{a} \mu$ y $\mu R \nu$.



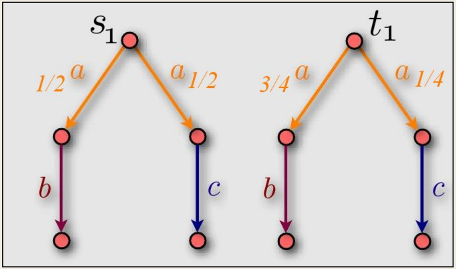

Con probabilidad mayor a $\frac{1}{3}$, $s_1$ puede hacer una transición $a$ y luego hacer $c$.

$t_1$ **no**.

# Bisimulación en PME

## Definición

Una relación $R$ es una *bisimulación* en un PME si es simétrica y para todos $s_1, t_1, \nu$, si $s_1 R t_1$ y $t_1 \xrightarrow{a} \nu$ entonces existe $\mu$ tal que $s_1 \xrightarrow{a} \mu$ y $\mu R \nu$.




Con probabilidad mayor a $\frac{1}{3}$, $s_1$ puede hacer una transición $a$ y luego hacer $c$. $t_1$ **no**.

$$s_1 \models \langle a \rangle_{\frac{1}{3}} \langle c \rangle_0 \top$$

$$t_1 \not\models \langle a \rangle_{\frac{1}{3}} \langle c \rangle_0 \top$$

# Una pizca de Teoría de Conjuntos Descriptiva

**Definición**

Un espacio topológico es *analítico* si es la imagen continua de un conjunto boreliano (v.g., de reales).

# Una pizca de Teoría de Conjuntos Descriptiva

## Definición

Un espacio topológico es *analítico* si es la imagen continua de un conjunto boreliano (v.g., de reales).

Un espacio medible es *analítico* si es isomorfo a $\langle A, \mathbf{B}(A)\rangle$ con $A$ un espacio analítico.

# Una pizca de Teoría de Conjuntos Descriptiva

**Definición**

Un espacio topológico es *analítico* si es la imagen continua de un conjunto boreliano (v.g., de reales).
Un espacio medible es *analítico* si es isomorfo a $\langle A, \mathbf{B}(A)\rangle$ con $A$ un espacio analítico.

## Ejemplos

- la cápsula convexa de un conjunto boreliano de $\mathbb{R}^n$;
- la relación de isomorfismo entre estructuras contables.

# Una pizca de Teoría de Conjuntos Descriptiva

**Definición**

Un espacio topológico es *analítico* si es la imagen continua de un conjunto boreliano (v.g., de reales).
Un espacio medible es *analítico* si es isomorfo a $\langle A, \mathbf{B}(A) \rangle$ con $A$ un espacio analítico.

Ejemplos

- la cápsula convexa de un conjunto boreliano de $\mathbb{R}^n$;
- la relación de isomorfismo entre estructuras contables.

**Teorema**

(Suslin) Hay subconjuntos analíticos de $\mathbb{R}$ que no son borelianos.
(Lusin) Todo conjunto analítico es medible Lebesgue.

# Lógica para la bisimulación en PME

**$\mathrm{HML}_q$ (e.g., Larsen y Skou)**

$$\varphi \equiv \top \mid \varphi_1 \wedge \varphi_2 \mid \langle a \rangle_q \psi, \qquad q \in \mathbb{Q}$$

# Lógica para la bisimulación en PME

## $\mathrm{HML}_q$ (e.g., Larsen y Skou)

$$\varphi \equiv \top \mid \varphi_1 \wedge \varphi_2 \mid \langle a \rangle_q \psi, \qquad q \in \mathbb{Q}$$

## Caracterización Lógica de la Bisimulación (Danos *et al.*)

Dos estados de un PME $\langle S, \mathcal{S}, L, T \rangle$ con $\langle S, \mathcal{S} \rangle$ *analítico* son bisimilares si y sólo si satisfacen las mismas fórmulas de la lógica modal $\mathrm{HML}_q$

# Lógica para la bisimulación en PME

## $\mathrm{HML}_q$ (e.g., Larsen y Skou)

$$\varphi \equiv \top \mid \varphi_1 \wedge \varphi_2 \mid \langle a \rangle_q \psi, \qquad q \in \mathbb{Q}$$

## Caracterización Lógica de la Bisimulación (Danos *et al.*)

Dos estados de un PME $\langle S, \mathcal{S}, L, T \rangle$ con $\langle S, \mathcal{S} \rangle$ *analítico* son bisimilares si y sólo si satisfacen las mismas fórmulas de la lógica modal $\mathrm{HML}_q$

**Idea de la prueba:** "Cocientar" $\langle S, \mathcal{S}, L, T \rangle$ por la relación de equivalencia lógica $\equiv$. $\langle S/\equiv, \mathcal{S}/\equiv \rangle$ es analítico.
$[\![\varphi]\!] := \{s \in S : s \models \varphi\}$ es un conjunto medible (está en $\mathcal{S}$).

# Lógica para la bisimulación en PME

**HML$_q$ (e.g., Larsen y Skou)**

$$\varphi \equiv \top \mid \varphi_1 \wedge \varphi_2 \mid \langle a \rangle_q \psi, \qquad q \in \mathbb{Q}$$

**Caracterización Lógica de la Bisimulación (Danos *et al.*)**

Dos estados de un PME $\langle S, \mathcal{S}, L, T \rangle$ con $\langle S, \mathcal{S} \rangle$ *analítico* son bisimilares si y sólo si satisfacen las mismas fórmulas de la lógica modal HML$_q$

**Idea de la prueba:** "Cocientar" $\langle S, \mathcal{S}, L, T \rangle$ por la relación de equivalencia lógica $\equiv$. $\langle S/\equiv, \mathcal{S}/\equiv \rangle$ es analítico.
$[\![\varphi]\!] := \{s \in S : s \models \varphi\}$ es un conjunto medible (está en $\mathcal{S}$).
La familia $\{[\![\varphi]\!] : \varphi \in \mathrm{HML}_q\}$ es contable y separa puntos en $S/\equiv$.

# Lógica para la bisimulación en PME

## HML$_q$ (e.g., Larsen y Skou)

$$\varphi \equiv \top \mid \varphi_1 \wedge \varphi_2 \mid \langle a \rangle_q \psi, \qquad q \in \mathbb{Q}$$

## Caracterización Lógica de la Bisimulación (Danos *et al.*)

Dos estados de un PME $\langle S, \mathcal{S}, L, T \rangle$ con $\langle S, \mathcal{S} \rangle$ *analítico* son bisimilares si y sólo si satisfacen las mismas fórmulas de la lógica modal HML$_q$

**Idea de la prueba:** "Cocientar" $\langle S, \mathcal{S}, L, T \rangle$ por la relación de equivalencia lógica $\equiv$. $\langle S/{\equiv}, \mathcal{S}/{\equiv} \rangle$ es analítico.

$[\![\varphi]\!] := \{ s \in S : s \models \varphi \}$ es un conjunto medible (está en $\mathcal{S}$).

La familia $\{ [\![\varphi]\!] : \varphi \in \mathrm{HML}_q \}$ es contable y separa puntos en $S/{\equiv}$.

Una subfamilia contable de $\mathcal{S}/{\equiv}$ que separa puntos debe generar $\mathcal{S}/{\equiv}$.

# Extensiones de Medidas

…¿es necesario que $\langle S, \mathcal{S} \rangle$ sea analítico? ¿Qué tiene que ver esto con la lógica y la bisimulación (Danos *et al.*)?

# Extensiones de Medidas

…¿es necesario que $\langle S, \mathcal{S} \rangle$ sea analítico? ¿Qué tiene que ver esto con la lógica y la bisimulación (Danos *et al.*)?

Observación: los conjuntos que la lógica puede "ver" son los elementos de $\sigma(\{[\![\varphi]\!] : \varphi \in \mathrm{HML}_q\})$.

# Extensiones de Medidas

…¿es necesario que $\langle S, \mathcal{S}\rangle$ sea analítico? ¿Qué tiene que ver esto con la lógica y la bisimulación (Danos *et al.*)?

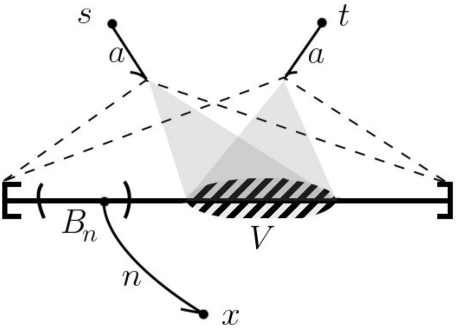
Observación: los conjuntos que la lógica puede "ver" son los elementos de $\sigma(\{[\![\varphi]\!] : \varphi \in \mathrm{HML}_q\})$.

**Teorema (Łoś y Marczewski)**

Sea $\mu$ una medida finita sobre $\langle S, \mathcal{S}\rangle$, $V \subset S$, y sea $\mu_i(V) \leq \zeta \leq \mu_e(V)$. Luego hay una extensión $\bar{\mu}$ de $\mu$ a $\sigma(\mathcal{S} \cup \{V\})$ tal que $\bar{\mu}(V) = \zeta$.

# $\text{HML}_q$ no caracteriza la Bisimulación

## Contraejemplo



# Indemostrabilidad en Conjuntos Proyectivos

**Lema (Gödel)**

$V = L$ implica que hay conjuntos $\Sigma^1_2$ no medibles Lebesgue.

# Indemostrabilidad en Conjuntos Proyectivos

**Lema (Gödel)**

$V = L$ implica que hay conjuntos $\Sigma^1_2$ no medibles Lebesgue.

**Teorema**

La caracterización lógica de la bisimulación no puede ser demostrada para PME sobre espacios $\Sigma^1_2$.

# Trabajo Futuro (“mejor tenélo listo para esta tarde. . . ”)

- Lindo problema: estudiar la expresividad de la lógica en espacios coanalíticos.

# Trabajo Futuro (“mejor tenélo listo para esta tarde. . . ”)

- Lindo problema: estudiar la expresividad de la lógica en espacios coanalíticos.
- La construcción de un contraejemplo, ¿requiere un conjunto no medible, e.g., Lebesgue?

# Trabajo Futuro (“mejor tenélo listo para esta tarde. . . ”)

- Lindo problema: estudiar la expresividad de la lógica en espacios coanalíticos.
- La construcción de un contraejemplo, ¿requiere un conjunto no medible, e.g., Lebesgue?
- ¡Conseguir gente que se interese en esto!

¡Muchas Gracias!

# Bibliografía


- [2006] V. Danos, J. Desharnais, F. Laviolette y P. Panangaden
  *Bisimulation and cocongruence for probabilistic systems.*
  *Inf. & Comp.*, vol. 204, pp. 503–523.
- [1999] J. Desharnais
  *Labelled Markov Processes.*
  Ph.D. dissertation, McGill University.
- [1991] K. Larsen y A. Skou
  *Bisimulation through Probabilistic Testing,*
  *Inf. & Comp.*, vol. 94, pp. 1–28.
- [1949] J. Łoś y E. Marczewski
  *Extension of measure,*
  *Fund. Math.*, vol. 39, pp. 267–276.