

# Cours 1ère année ENTPE

## Résistance des matériaux – Partie 1

Boris TEDOLDI  
Ingénieur structure



Calcul Structure Bâtiment

2 chemin des maisonnettes BP19  
39150 SAINT LAURENT EN GDX

<http://www.csb.bet>

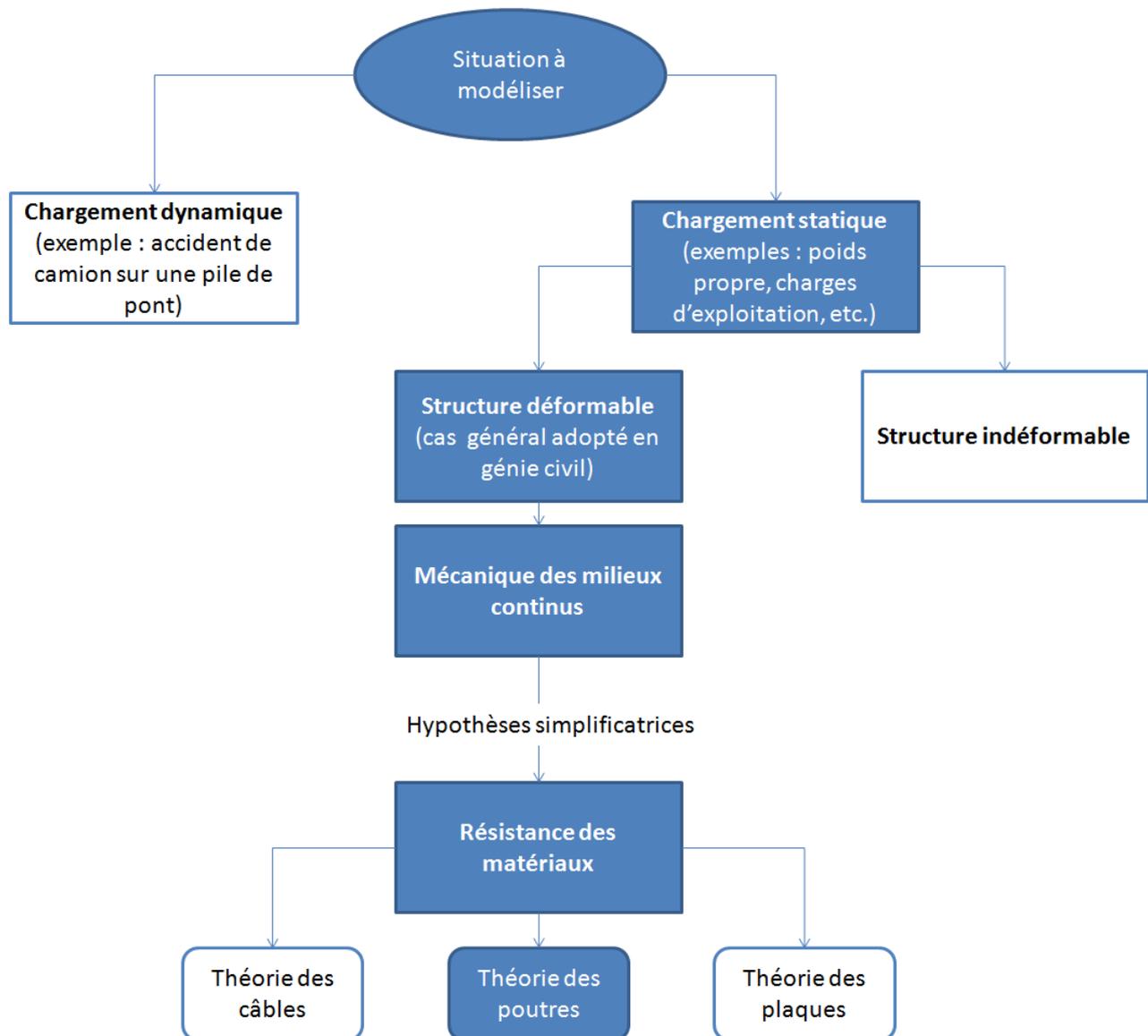
## Sommaire

<b>0. Objet du cours et conventions de signe .....</b>	<b>3</b>
<b>1. Rappels de MMC utiles en RDM .....</b>	<b>5</b>
<b>2. Notions élémentaires de mécanique.....</b>	<b>19</b>
<b>3. Définitions.....</b>	<b>27</b>
<b>4. Hypothèses du cours de R.D.M. ....</b>	<b>33</b>
<b>5. Calculs des réactions d'appuis .....</b>	<b>41</b>
<b>6. Calculs des diagrammes de sollicitations par la méthode des coupures .....</b>	<b>56</b>
<b>7. Tracé direct des diagrammes de sollicitations .....</b>	<b>79</b>
<b>8. Degré d'hyperstaticité - iso/hyperstaticité.....</b>	<b>91</b>
<b>9. Caractéristiques des sections droites .....</b>	<b>99</b>

## 0. Objet du cours et conventions de signe

### 0.1 Objet du cours

L'objet de ce cours est la théorie des poutres.



## 0.2 Convention de signe

	Signe positif	Signe négatif
Effort normal N	Engendre de la compression supplémentaire	Engendre de la traction supplémentaire
Moment $M_z$ pour les problèmes 2D	La fibre supérieure est l'ensemble des points où $\sigma$ est minimale (c'est-à-dire que c'est la zone la plus comprimée ou la moins tendue). La fibre inférieure est l'ensemble des points où $\sigma$ est maximale (c'est-à-dire que c'est la zone la plus tendue ou la moins comprimée).	La fibre supérieure est l'ensemble des points où $\sigma$ est maximale (c'est-à-dire que c'est la zone la plus tendue ou la moins comprimée). La fibre inférieure est l'ensemble des points où $\sigma$ est minimale (c'est-à-dire que c'est la zone la plus comprimée ou la moins tendue).
Contrainte $\sigma$	Traction	Compression

Remarque :

Les signes utilisés dans ce cours ne sont qu'une convention. Elle n'importe peu, tant que la réalité physique (zones en compression et en traction) est comprise de la même manière entre le calculateur et le lecteur d'une note de calculs.

Par exemple, pour les codes de génie civil (BAEL, Eurocode, etc.), la convention de signe pour les contraintes est généralement inversée par rapport à ce cours ( $\sigma > 0 \leftrightarrow$  compression). Les résultats en contrainte n'ont donc pas le même signe mais le résultat de dimensionnement des ouvrages est nécessairement identique avec l'une ou l'autre des conventions.

Néanmoins, une fois une convention choisie, il convient de toujours la respecter.

## 0.3 Notations de l'effort tranchant

Dans ce présent cours, l'effort tranchant est noté indifféremment T (notation française) ou V (notation adoptée pour les codes génie civil internationaux).

## 1. Rappels de MMC<sup>1</sup> utiles en RDM

### 1.1 Déformations

#### 1.1.1 Déformation longitudinale

##### Définition de la déformation longitudinale

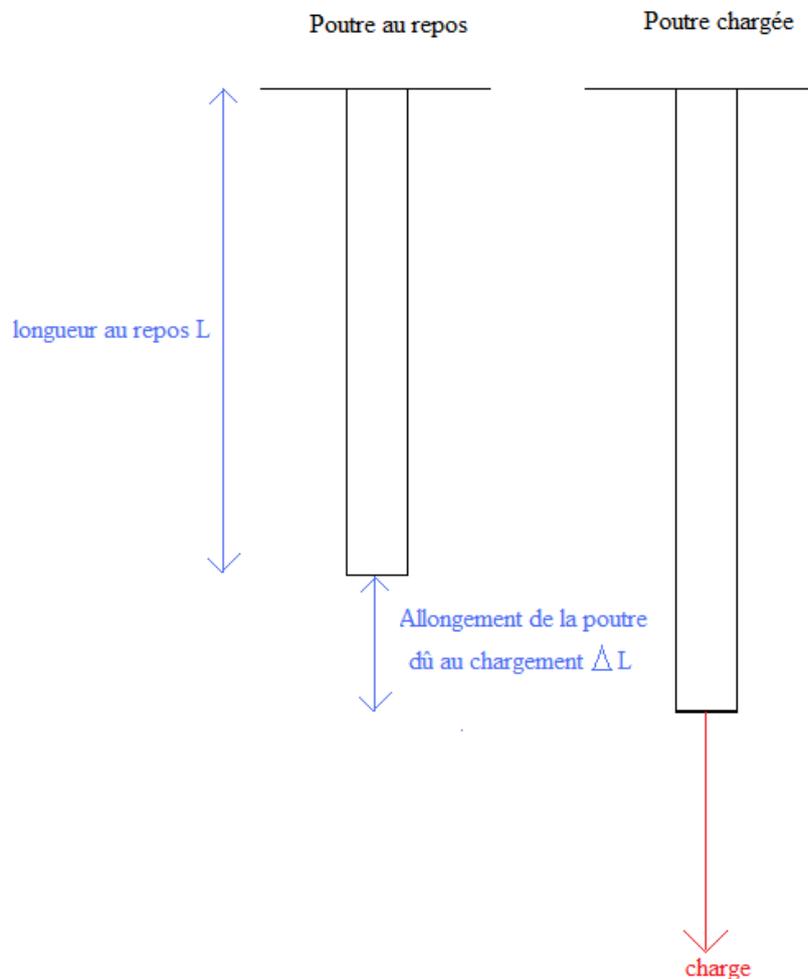
La déformation longitudinale  $\varepsilon_L$  est la dilatation dans le sens de la longueur de la poutre.

Lorsqu'il n'y a pas de confusion possible, cette déformation sera notée  $\varepsilon$ .

##### Expressions

L'expression de la déformation est  $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$

Unité : aucune



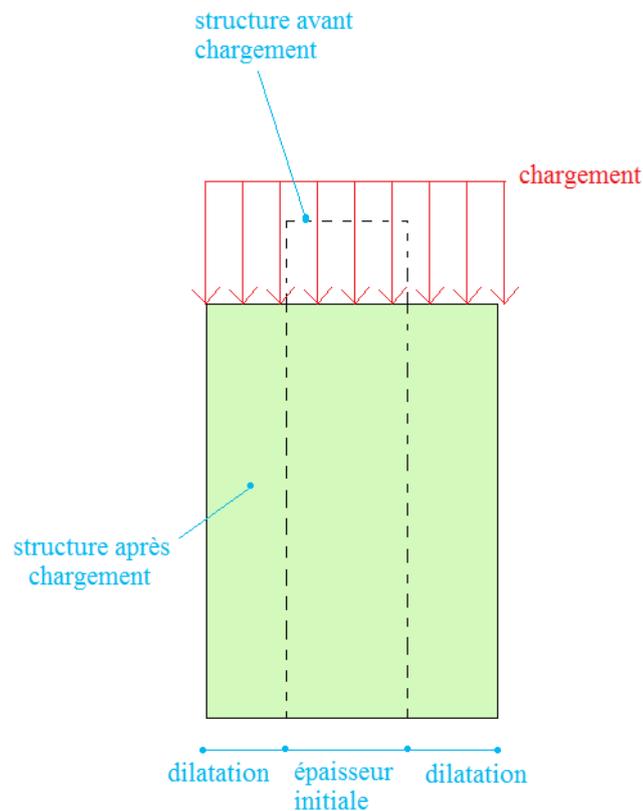
---

<sup>1</sup> MMC : Mécanique des Milieux Continus

### 1.1.2 Déformations transversales

#### Définition des déformations transversales

Les déformations transversales sont les dilatations selon les directions autres que celle de la longueur de la poutre.



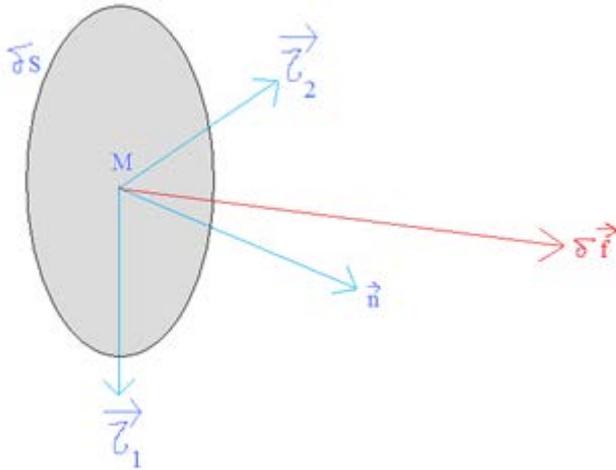
#### Remarque :

Les déformations transversales sont généralement négligées dans le cas de poutres ou de poteaux. Leurs effets peuvent néanmoins devenir importants dans le cas de pièces massives (exemple : radier épais) mais ces éléments ne sont pas l'objet de ce cours.

## 1.2 Contraintes

### 1.2.1 Vecteur contrainte

A l'intérieur d'un solide, sur une petite surface matérielle  $\delta S$  de normale  $\vec{n}$  s'exerce une petite force  $\delta \vec{f}$ .



$\vec{n}$  est perpendiculaire à la surface élémentaire  $\delta S$

$\vec{\tau}_1$  et  $\vec{\tau}_2$  sont des vecteurs positionnés dans le plan de surface élémentaire  $\delta S$ .

$\vec{n}$ ,  $\vec{\tau}_1$  et  $\vec{\tau}_2$  constitue un repère direct.

#### Définition du vecteur contrainte

On appelle vecteur contrainte  $\vec{\sigma}$  en  $M$ , sur la facette de normale  $\vec{n}$ , la limite lorsqu'elle existe de  $\frac{\delta \vec{f}}{\delta S}$  quand  $\delta S$  tend vers 0.

$$\vec{\sigma} = \vec{\sigma}(\mathbf{M}, \vec{n}) = \vec{\sigma}_n(\mathbf{M}) = \lim_{\delta S \rightarrow 0} \frac{\delta \vec{f}}{\delta S}$$

#### Définition de la contrainte normale

La contrainte normale en un point  $M$  sur une facette de normale normale  $\vec{n}$  est la composante de  $\delta \vec{f}$  sur le vecteur  $\vec{n}$ .

#### Définition de la contrainte tangente

La contrainte tangente en un point  $M$  sur une facette de normale  $\vec{n}$  est la composante de  $\delta \vec{f}$  sur les vecteurs  $\vec{\tau}_1$  et  $\vec{\tau}_2$ .

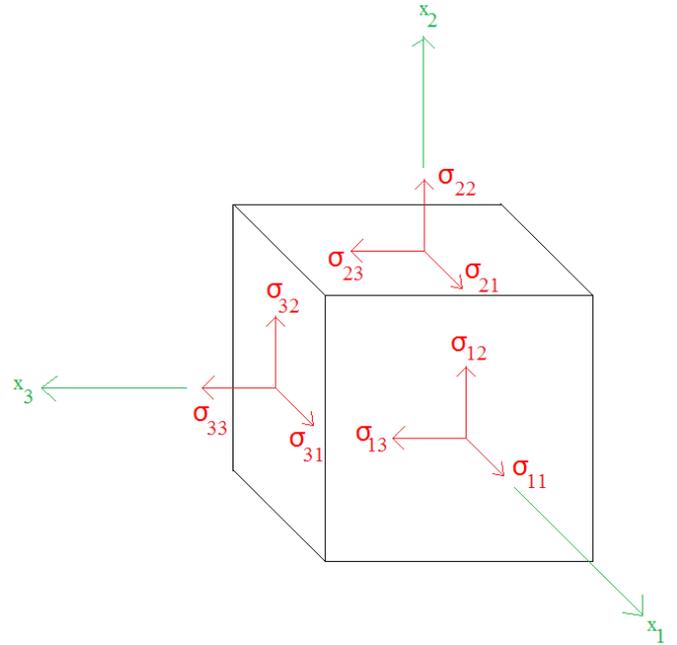
### 1.2.2 Tenseur des contraintes

#### 1.2.2.1 Tenseur des contraintes de Cauchy

##### Propriété

Le tenseur des contraintes peut s'exprimer sous forme matricielle :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{M}) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$



Remarque : ce tenseur est symétrique :  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$

Notations

En théorie des poutres dans le repère local, le tenseur des contraintes devient :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{M}) = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

1.2.2.2 Tenseurs de contrainte appliqué à la théorie des poutres

1.2.2.2.1 Cas général

Les tenseurs de contraintes, qui seront rencontrés dans le cadre de ce cours sont de la forme suivante dans le repère local :

$$\begin{pmatrix} \sigma & \tau_y & \tau_z \\ \tau_y & 0 & 0 \\ \tau_z & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.2.2.2.2 Cas des problèmes plans

Dans le cas des problèmes plans, les tenseurs de contraintes sont de la forme suivante dans le repère local :

$$\begin{pmatrix} \sigma & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

### 1.3 Directions principales

#### Propriété du tenseur de contrainte

La matrice  $\sigma_{ij}$  étant symétrique, elle est diagonalisable : il existe un repère orthonormé  $(M, \vec{j}_1, \vec{j}_2, \vec{j}_3)$  dans lequel la matrice est diagonale.

#### Définition du repère principal de contraintes

Le repère orthonormé  $(M, \vec{j}_1, \vec{j}_2, \vec{j}_3)$  dans lequel la matrice M est diagonale, est appelé repère principal de contraintes.

#### Définition des directions principales de contraintes

Les directions  $\vec{j}_1, \vec{j}_2$  et  $\vec{j}_3$  sont appelées directions principales de contraintes.

#### Définition des contraintes principales

Les valeurs propres de la matrice  $\sigma_1, \sigma_2$  et  $\sigma_3$  associées aux directions principales  $\vec{j}_1, \vec{j}_2$  et  $\vec{j}_3$  s'appellent les contraintes principales ; dans le repère  $(M, \vec{j}_1, \vec{j}_2, \vec{j}_3)$ , nous avons :

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

## 1.4 Les lois de comportement

### 1.4.1 Quelques définitions

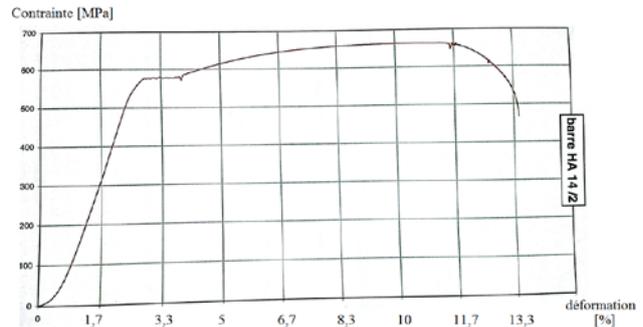
#### Définition de la loi de comportement

Une loi de comportement est une relation liant les contraintes aux déformations.

#### Exemples :

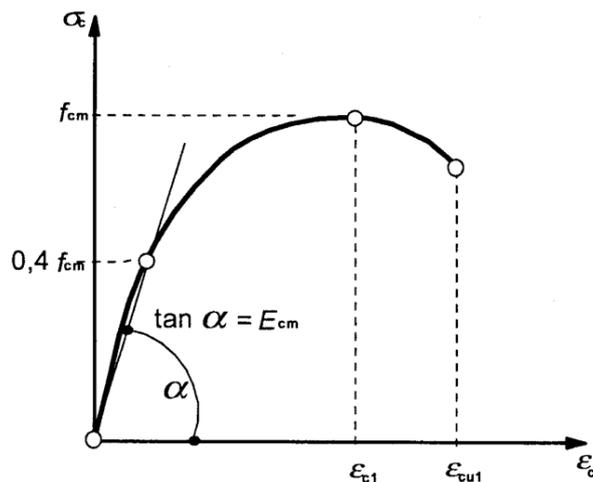
Elle est obtenue par expérimentation : **loi de comportement réelle.**

Exemple : barre acier HA14



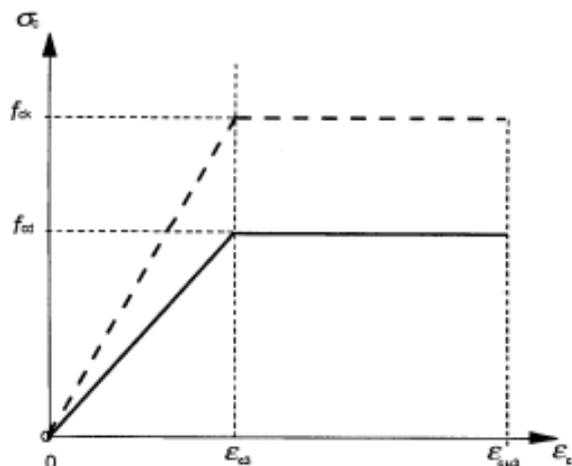
Elle peut être modélisée mathématiquement : **loi de comportement modélisée.**

Exemple : loi de Sargin du béton



Elle peut être idéalisée et prendre en compte des coefficients de sécurité réglementaire : **loi de comportement réglementaire.**

Exemple : loi de bilinéaire du béton de l'Eurocode 2 (béton)



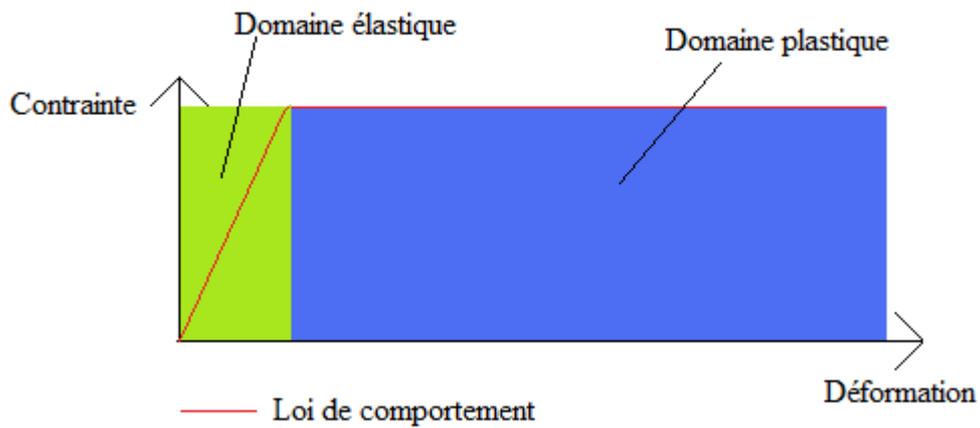
### Définition d'une loi de comportement élastique

Une loi est de comportement élastique si après chargement et déchargement du matériau, les déformations reviennent à 0.

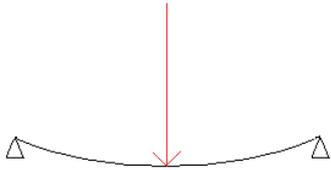
#### Exemple :

*Seul le domaine d'élasticité ci-dessous convient à la définition d'un comportement élastique.*

*En domaine de plasticité, même après déchargement, il existe une déformation résiduelle.*



Une illustration des différences de comportement dans les domaines élastique et plastique est donnée par la situation suivante :

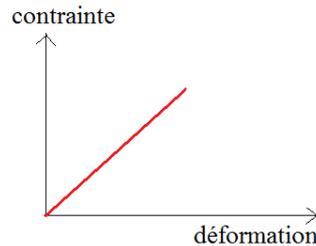
	<u>Comportement élastique</u>	<u>Comportement plastique</u>
Etat initial. La structure n'est pas chargée (si le poids propre peut être négligé).	<b><u>Structure non chargée</u></b> 	<b><u>Structure non chargée</u></b> 
Chargement de la structure	<b><u>Chargement modéré (la structure « reste » dans le domaine élastique)</u></b>  La flèche reste faible.	<b><u>Chargement élevé (la structure atteint le domaine plastique)</u></b>  La flèche est significativement plus élevée que pour un chargement maintenant la structure dans le domaine élastique.
Etat final. Suppression du chargement. La structure est à nouveau au repos.	<b><u>Le chargement est supprimé</u></b>  La structure revient à son état initial.	<b><u>Le chargement est supprimé</u></b>  La structure est déformée par rapport l'état initial malgré l'absence de charge. ⇒ La structure a été plastifiée !

Ainsi, pour les chargements courants d'une structure génie civil, le comportement élastique est privilégié pour :

- Accroître la sécurité en étant *loin* du point de rupture par rapport au domaine plastique.
- Eviter un endommagement excessif permanent rendant inutilisable la structure.

### Définition d'une loi de comportement linéaire

Une loi a un comportement linéaire si la relation entre les contraintes et les déformations est linéaire.



Remarque :

La plupart des lois de comportement réelle ne sont pas linéaires.

Néanmoins, pour de faibles déformations, cette hypothèse varie peu du comportement réel.

### Définition d'une loi de comportement homogène

Une loi a un comportement homogène si elle ne dépend pas du point M que l'on considère

*Contre exemple*

*Par sa nature hétérogène (granulats, pâte de ciment), le béton n'est donc pas un matériau de comportement homogène (voir photo ci-contre de béton désactivé).*

*Cependant, à l'échelle d'un élément de structure (échelle macrosopique), il n'est pas incohérent de considérer un comportement homogène, ce qui autorise l'utilisation des outils de la RDM.*



### Définition d'une loi de comportement isotrope

Une loi a un comportement isotrope si elle ne dépend pas des directions que l'on considère.

*Contre exemple*



*Une planche de bois possède des veines et des nœuds rendant son comportement non isotrope (et non homogène également).*

*Néanmoins, une bonne qualité de bois et une bonne maîtrise de fabrication permet de s'approcher de cette hypothèse afin d'utiliser la RDM.*

*Des coefficients de sécurité complémentaires dans les calculs sont généralement utilisés.*

## 1.4.2 Loi de Hooke

### 1.4.2.1 Généralisée

#### Définition de la loi de Hooke généralisée (contraintes triaxiales)

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E} (\text{tr} \boldsymbol{\sigma}) \boldsymbol{\delta} \quad \text{avec } \boldsymbol{\delta} \text{ tenseur unitaire : } \delta_{ij} = 1 \text{ si } i=j, \delta_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j$$

Avec :

$\sigma$ : contrainte	[MPa]
$\varepsilon$ : déformation	[sans unité]
E : module d'élasticité ou module d'Young	[MPa]
$\nu$ : Coefficient de Poisson	[sans unité]

#### Propriétés

La loi de Hooke est une loi de comportement élastique, linéaire, homogène, isotrope ; elle ne dépend que de deux paramètres : E et  $\nu$ .

### 1.4.2.2 Application à la théorie des poutres

En théorie des poutres (objet de ce cours), la loi de Hooke simplifiée est suffisante.

#### Définition de la loi de Hooke pour la théorie des poutres

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

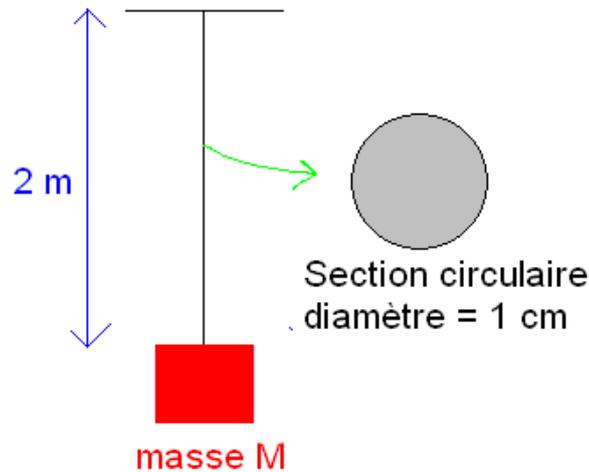
Avec :

$\sigma$ : contrainte [MPa]
$\varepsilon$ : déformation [sans unité]
E : module d'élasticité ou module d'Young [MPa]

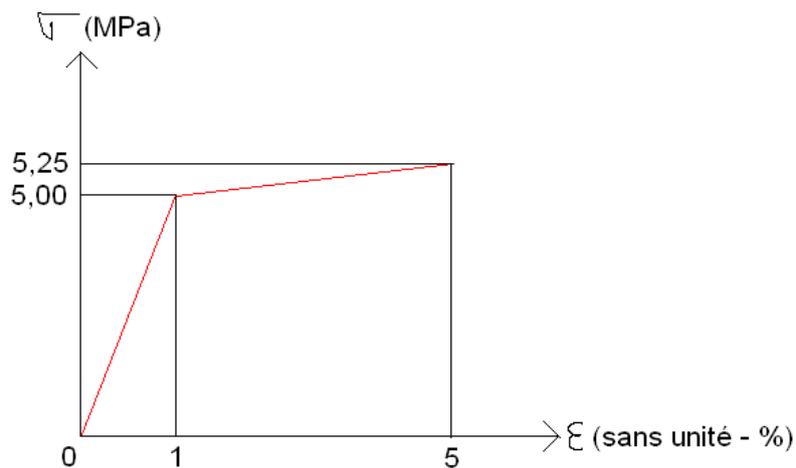
## 1.5 Exercices

### Exercice [ 1 ]

Une masse est suspendue à un barreau de 2 m de longueur initiale.



Le barreau est composé du matériau dont la loi de comportement est :



Le poids propre du barreau est négligé devant le poids de la masse suspendue.

Données :  $g = 10 \text{ m/s}^2$

1 – Pour une masse de 20 kg,

a) Quelle est la déformation ?

b) Quel est l'allongement ?

2 – Quelle est la masse maximale pour laquelle le barreau conserve un comportement élastique ?

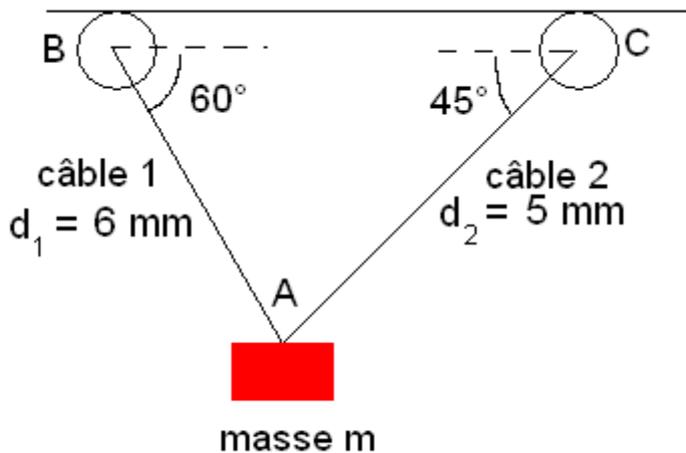
3 – Pour une masse de 40 kg,

a) Quelle est la déformation ?

b) Quel est l'allongement ?

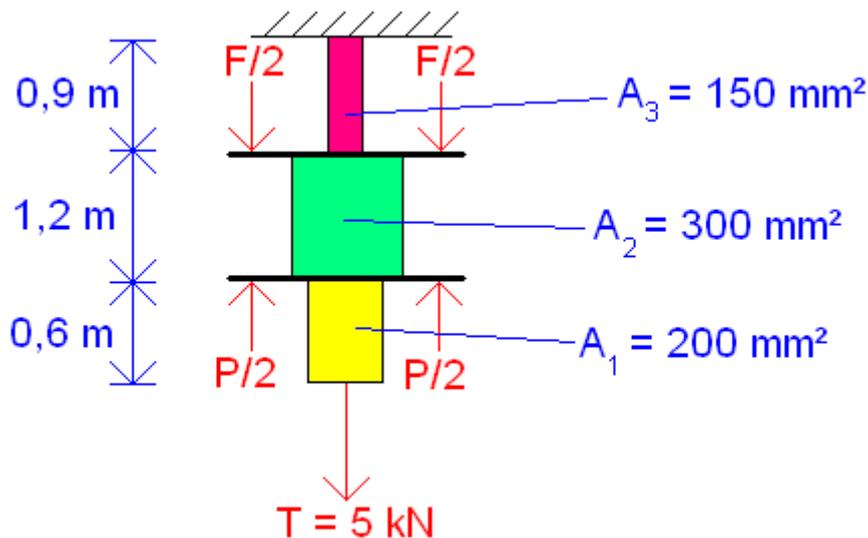
c) Quel est la nouvelle longueur du barreau après déchargement de cette masse ?

Exercice [ 2 ]



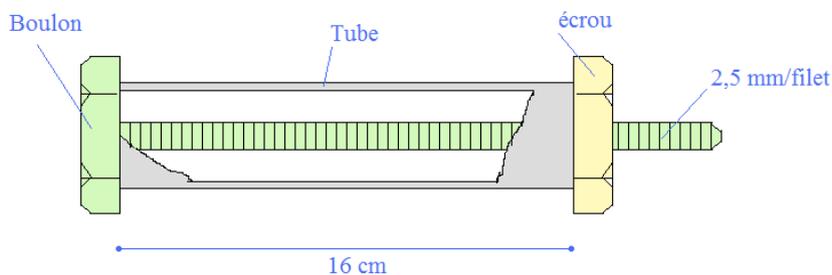
- Calculer la contrainte moyenne dans chacun des câbles lorsque  $m = 600 \text{ kg}$ .
- Quelle est la masse maximale admissible si la contrainte maximale est de  $280 \text{ MPa}$  ?

Exercice [ 3 ]



Calculer dans chacun des cylindres pleins la contrainte moyenne avec  
 $\begin{cases} P = 18 \text{ kN} \\ F = 10 \text{ kN} \end{cases}$

Exercice [ 4 ]



Données pour le tube :

$$E = 105 \text{ GPa}$$

$$\alpha_t = 10 \cdot 10^{-6}$$

$$\sigma_{\max} = 140 \text{ MPa}$$

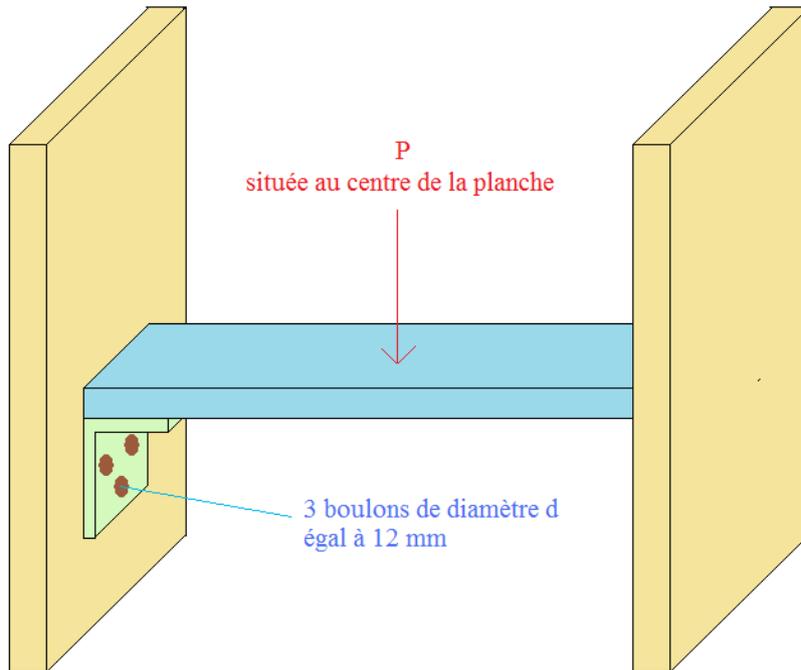
Déformation thermique :

$$\varepsilon_T = \alpha_t \times \Delta T$$

Il y a initialement tout juste contact entre l'écrou et le tube.

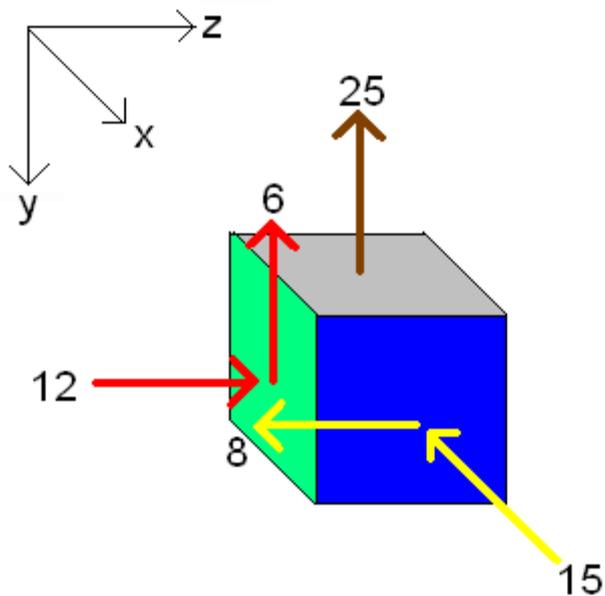
- Donner l'expression des contraintes dans le tube lorsque l'on serre l'écrou d'un angle de  $30^\circ$  et lorsque le tube subit une augmentation de température  $\Delta T$ .
- Quelle est l'augmentation de température maximale que peut subir le tube ?

Exercice [ 5 ]



Calculer la contrainte de cisaillement moyenne dans chacun des boulons avec  $P = 36 \text{ kN}$ .

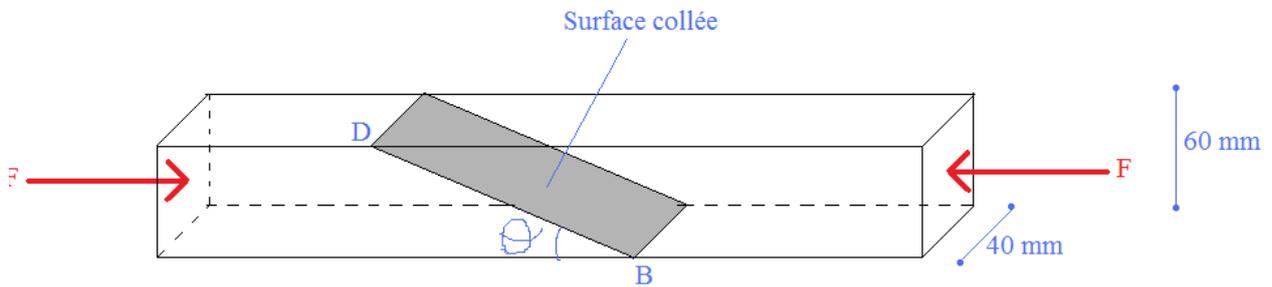
Exercice [ 6 ]



La figure illustre les contraintes connues sur 3 faces d'un solide soumis à des forces externes.

Déterminer toutes les composantes de contraintes sur ces 3 faces.

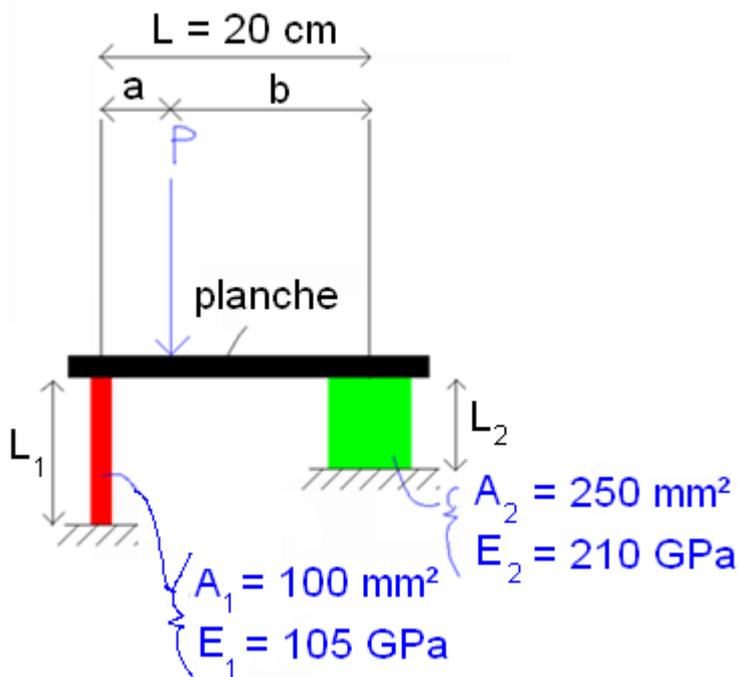
Exercice [ 7 ]



2 pièces biseautées sont collées selon la figure précédente.

- Quelle est la valeur maximale de l'angle  $\theta$  pour que, dans la colle, la contrainte normale soit inférieure ou égale à 20% de la contrainte de cisaillement (en valeur absolue)
- Avec la valeur de l'angle  $\theta$  trouvée en a), la colle cède quand la charge est de 7,8 kN. Calculer la contrainte de cisaillement agissant dans la colle ainsi que la contrainte normale exercée sur le plan de contact

Exercice [ 8 ]



- Trouver  $a$  et  $b$  tel que la planche reste horizontale avec  $L_1 = L_2 = 50 \text{ cm}$ .
- Même question avec  $\begin{cases} L_1 = 50 \text{ cm} \\ L_2 = 75 \text{ cm} \end{cases}$

## 2. Notions élémentaires de mécanique

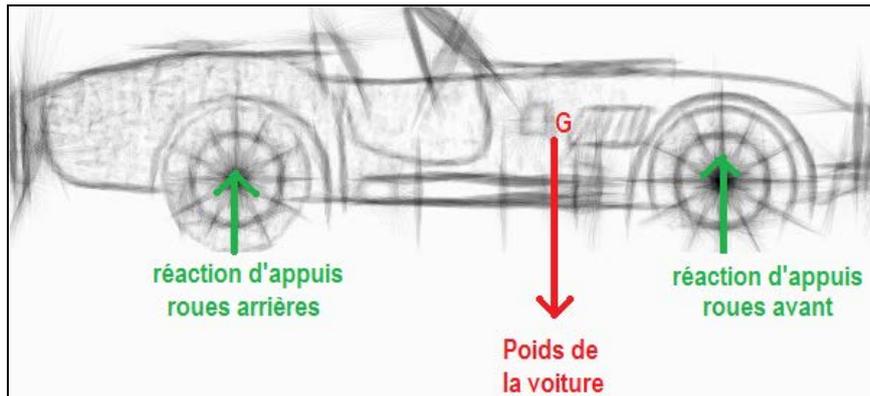
### 2.1 Force

#### 2.1.1 Notions

La notion de force est utile pour modéliser des actions de contact entre solides, des résultantes de plusieurs forces ou des actions distantes (poids, aimantation, etc.).

Les forces sont généralement représentées par des vecteurs.

*Exemple : poids et réactions d'appuis d'un véhicule*



#### Définition d'une force

Une force est définie par une intensité (unité : [Newton]), une direction, un sens et un point d'application.

#### Propriétés

Toutes les propriétés de calculs vectoriels s'appliquent aux calculs de forces.

#### 2.1.2 Effet de la résultante en force passant par le centre de gravité d'un solide

##### 2<sup>ème</sup> loi du principe fondamental de la dynamique pour le cas d'une translation rectiligne

L'accélération  $\vec{a}_G$  du centre de gravité G d'un solide en translation rectiligne par rapport à un repère absolu est proportionnelle à la résultante des forces agissant sur le solide et a même direction que celle-ci.

C'est-à-dire :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m \cdot \vec{a}_G$$

Avec :

$\vec{a}_G$  : accélération du solide [m/s<sup>2</sup>]

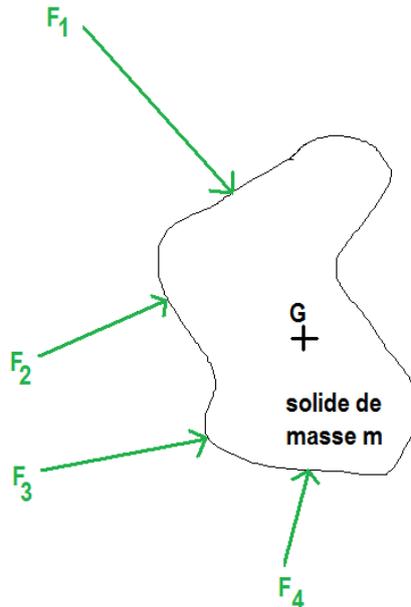
m : masse du solide [kg]

$\sum \vec{F}_{ext}$  : résultante des forces extérieures [N]

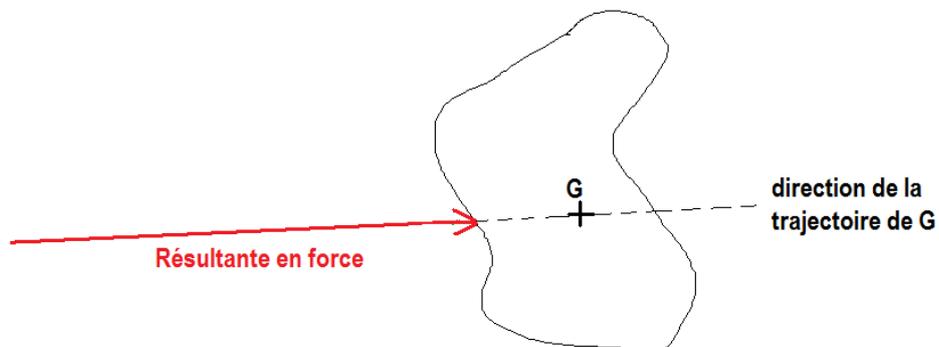
Ainsi, lorsqu'un solide subit une résultante en force passant par le centre de gravité, le mouvement du solide est une translation rectiligne.

Exemple :

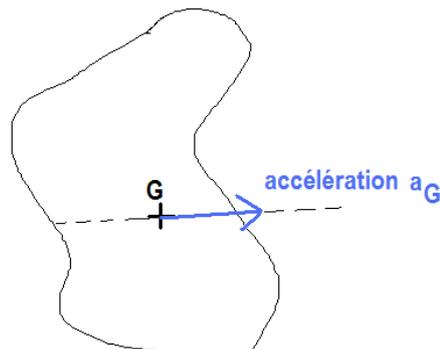
Le solide suivant subit différentes forces extérieures  $F_i$  :



La résultante de ces forces passent par le centre de gravité G.



Finalement, la trajectoire est une translation rectiligne ayant pour direction celle de la résultante des forces.



### 2.1.3 Détermination de la résultante de forces parallèles

Il est courant en génie civil qu'il soit pratique de déterminer la résultante de forces parallèles. La méthode est résumée par le logigramme suivant.

#### 2.1.3.1 Logigramme

Détermination de la force équivalente :

$$F_{eq} = \sum F_i$$

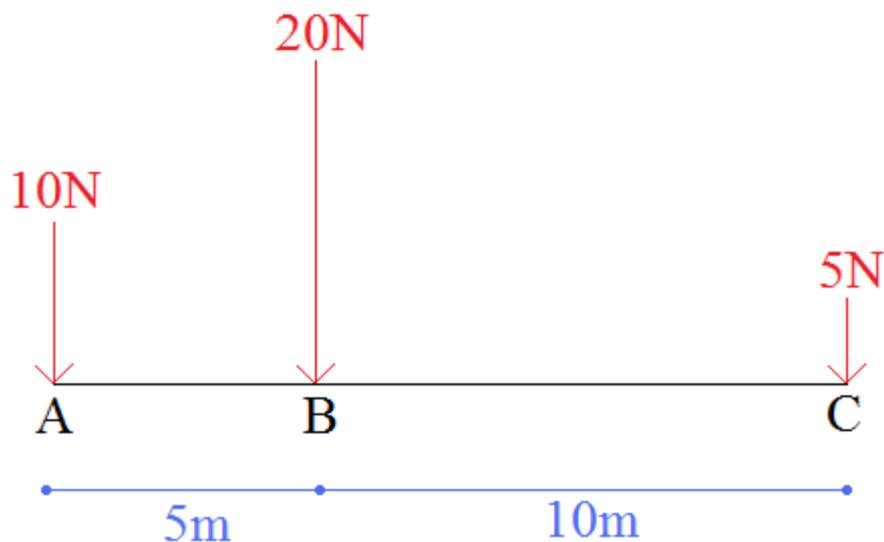
Mise en place d'un repère permettant de définir les abscisses  $x_i$  des points d'application des forces.

Détermination de l'abscisse  $x_m$  de la force équivalente :

$$x_M = \frac{\sum x_i \cdot F_i}{\sum F_i}$$

#### 2.1.3.2 Exemple

Déterminer la résultante des forces parallèles suivantes



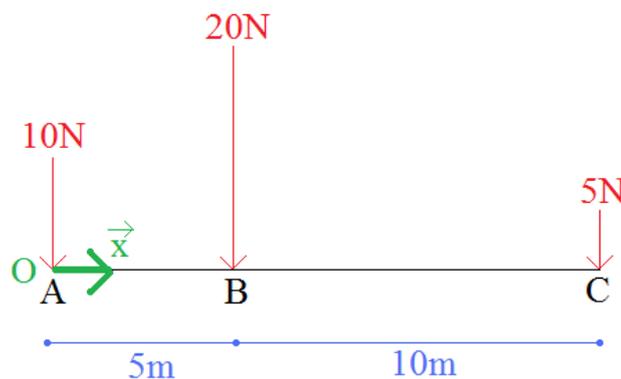
**Etape 1 : Détermination de la force équivalente :**

$$F_{eq} = \sum F_i = 10 + 20 + 5 = 35 \text{ N}$$

**Etape 2 : Mise en place d'un repère**

Le choix est de prendre :

- l'origine O confondu avec le point A
- les abscisses sont croissantes de gauche à droite



Ainsi, les abscisses dans le repère sont :

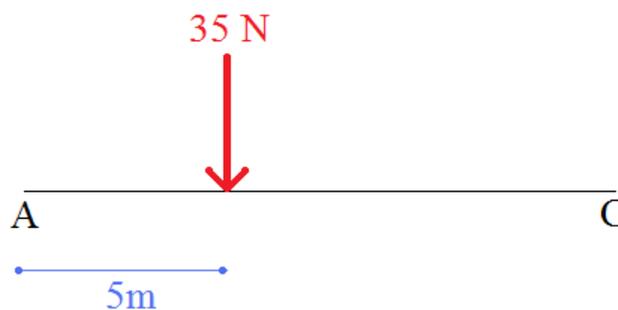
$F_i$ [N]	$x_i$ [m]
10	0
20	5
5	15

Remarque : le choix d'un autre repère aboutirait à un résultat identique concernant l'intensité et la position de la force équivalente.

**Etape 3 : Détermination de l'abscisse de la force équivalente**

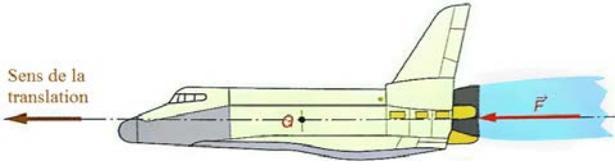
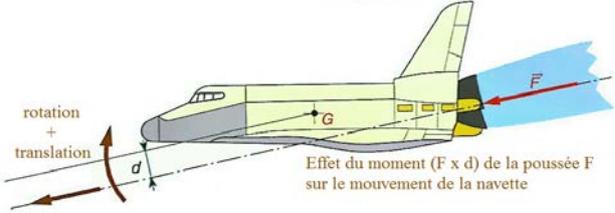
$$x_M = \frac{\sum x_i \cdot F_i}{\sum F_i} = \frac{0 \times 10 + 5 \times 20 + 15 \times 5}{10 + 20 + 5} = 5 \text{ m}$$

Au final, la force équivalente est égale à 35N et est positionné à 5 m à droite du point A :



## 2.2 Moment

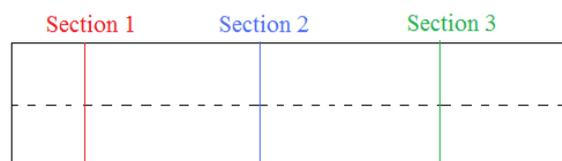
### 2.2.1 Comparaison des effets d'une résultante en force passant ou non par le centre de gravité d'un solide

Cas 1 La force de poussée $F$ est alignée avec le centre de gravité $G$	Cas 2 La force de poussée $F$ n'est pas alignée avec le centre de gravité $G$
 <p>La navette a un mouvement de translation rectiligne.</p>	 <p>La navette a un mouvement de translation rectiligne et de rotation autour de <math>G</math>.</p> <p>Le mouvement de rotation est d'autant plus important que la distance <math>d</math> entre <math>G</math> et la direction de la force de poussée <math>F</math> est élevée.</p> <p><b>Le produit entre <math>F</math> et <math>d</math> est appelé moment de <math>F</math> par rapport à <math>G</math>.</b></p>

L'exemple précédent permet de différencier la cause d'une translation (force) et la cause d'une rotation (moment) mais s'applique sur un objet différent d'une structure (qui est pourtant l'objet de la RDM).

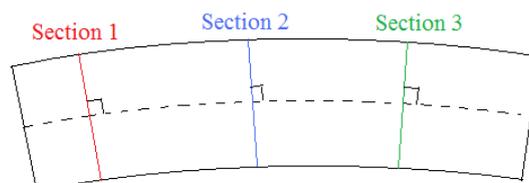
Pour revenir à un problème de RDM, l'effet d'un moment sur une poutre est :

En considérant une poutre à l'état de repos initialement :



Les sections 1, 2 et 3 sont parallèles les unes par rapport aux autres.

Admettons qu'il existe des moments (la méthode pratique de calculs est présentée par la suite) le long de cette poutre, l'état déformé devient :



Nous pouvons constater une rotation des sections les unes par rapport aux autres. Les moments sont donc la cause d'un fléchissement de la poutre. Il est ainsi courant de les appeler moment fléchissant dans le cadre d'un calcul de structure.

## 2.2.2 Notion de moment - vecteur

### Définition du moment – vecteur

Le moment vectoriel d'une force  $\vec{F}$  appliquée en A par rapport à un point B est défini par :

$$\vec{M}_B(\vec{F}) = \vec{BA} \wedge \vec{F}.$$

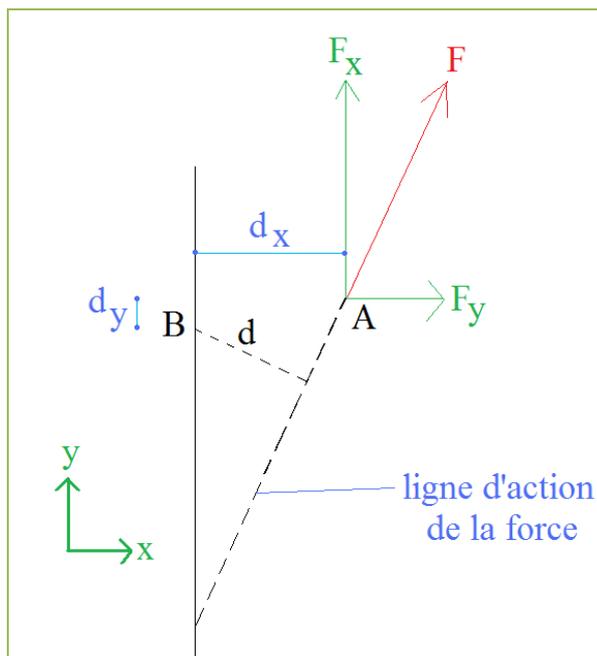
Un moment vectoriel  $\vec{M}$  est caractérisé par :

- un vecteur et un point d'application
- l'intensité d'un moment qui est la norme du vecteur associé
- l'axe de rotation qui est l'axe du vecteur.

La composante d'un moment sur son axe sera positive si la rotation est trigonométrique, négative dans le cas contraire ; les composantes sur les autres axes sont nulles.

## 2.2.3 Notion de moment scalaire

### Définition du moment scalaire dans un problème plan



Considérons l'axe  $\Delta$  de vecteur unitaire  $z$  perpendiculaire aux vecteurs  $\vec{BA}$  et  $\vec{F}$

$d$  est la distance entre la ligne d'action de  $\vec{F}$  et l'axe  $\Delta$  est appelé **bras de levier**.

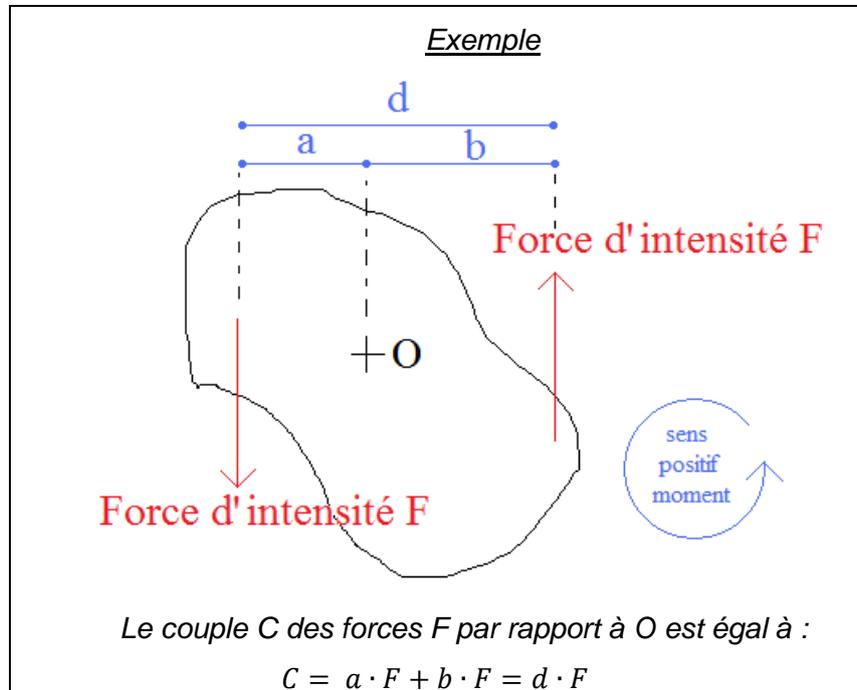
On peut calculer le moment au niveau du point B de la force  $F$  autour de l'axe  $\Delta$  de trois façons :

- Par le bras de levier :  
 $M_B(\vec{F}) = \pm Fd$
- Par la décomposition de la force :  
 $M_B(\vec{F}) = \pm F_x d_y \pm F_y d_x$
- Par la norme du moment vecteur

## 2.2.4 Notions de couple et de vecteur-couple

### Définitions de couple et de vecteur couple

Le moment scalaire (respectivement moment-vecteur) engendré par deux forces égales et opposées ayant des lignes d'actions différentes est également appelé **couple** (respectivement **vecteur-couple**).



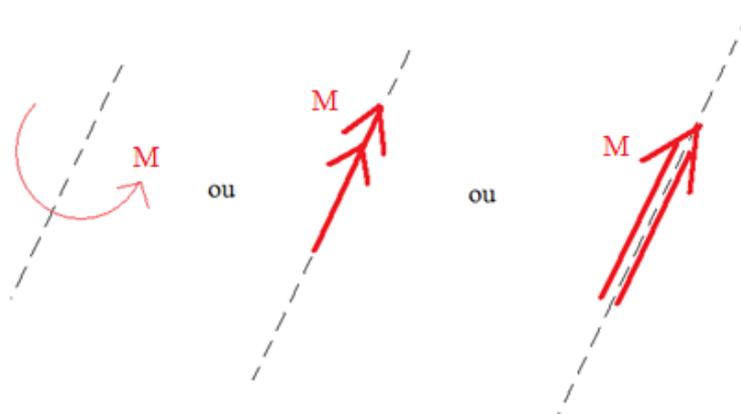
## 2.2.5 Vocabulaire appliqué au génie civil

Par abus de langage, toutes les notions précédentes (moment-vecteur, moment scalaire, couple, vecteur-couple) sont réunies sous le terme moment, sans distinction, pour une utilisation courante du génie civil, contrairement en mécanique.

## 2.2.6 Convention et représentation

### Représentation d'un moment

On utilise couramment une flèche courbe mais d'autres symboles peuvent être employés pour représenter un moment

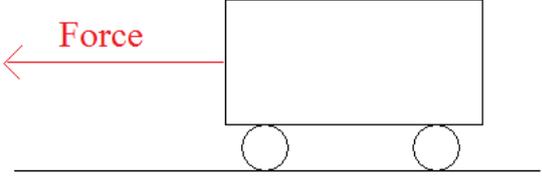
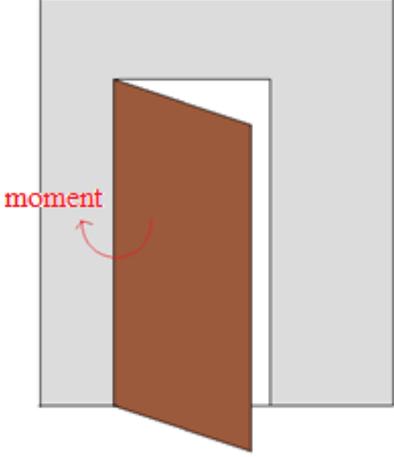


## 2.3 Modélisation des actions mécaniques

### Définition des actions mécaniques

Les actions mécaniques sont la cause de toute modification du mouvement ou du repos d'un corps.

On distingue dans les actions mécaniques, celles qui communiquent un mouvement de translation (les forces) et celles qui communiquent un mouvement de rotation (les moments).

Exemple de force	Exemple de moment
<p>Force de traction exercée sur un wagonnet</p> 	<p>Force sur une poignée de porte <u>excentrée</u> par rapport à l'axe de rotation induisant un moment</p> 

L'objet de ce cours est de traiter la statique. Puisque les forces sont responsables des déplacements en translation et que les moments sont responsables des rotations, il convient de respecter le principe fondamental de la statique (**principe très important pour la suite du cours !**) pour rester dans le domaine statique.

### Principe Fondamental de la Statique (PFS)

Un solide sous l'action de n forces reste en équilibre si :

- 1) La somme vectorielle des forces est nulle

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \vec{0}$$

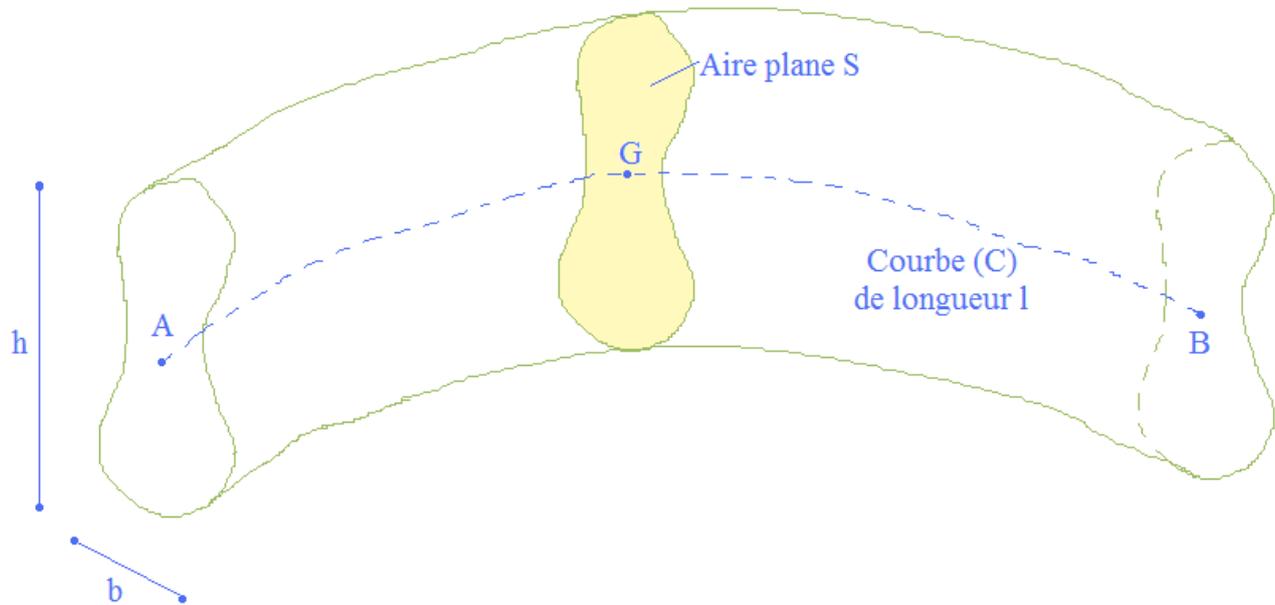
- 2) Le moment résultant de toutes les forces  $M_A$  en tout point A est nul

$$M_A = M_A(\vec{F}_1) + M_A(\vec{F}_2) + \dots + M_A(\vec{F}_n) = 0$$

### 3. Définitions

#### Définition d'une poutre

Une poutre est un solide engendré par une aire plane  $S$ , dont le centre de gravité  $G$  décrit une courbe  $(C)$  orientée.



Le plan incluant l'aire plane  $S$  reste normal à  $(C)$ .

Les dimensions de  $S$  doivent être petites par rapport à celle de  $(C)$ , c'est-à-dire :

$$\frac{1}{40} \leq \frac{h}{l} \leq \frac{1}{5}$$
$$\frac{1}{40} \leq \frac{b}{l} \leq \frac{1}{5}$$

Avec  $l$  la longueur de la courbe  $(C)$ .

#### Définition de la fibre moyenne

La courbe  $(C)$  est appelée fibre moyenne, c'est l'ensemble des centres de gravité des sections droites.

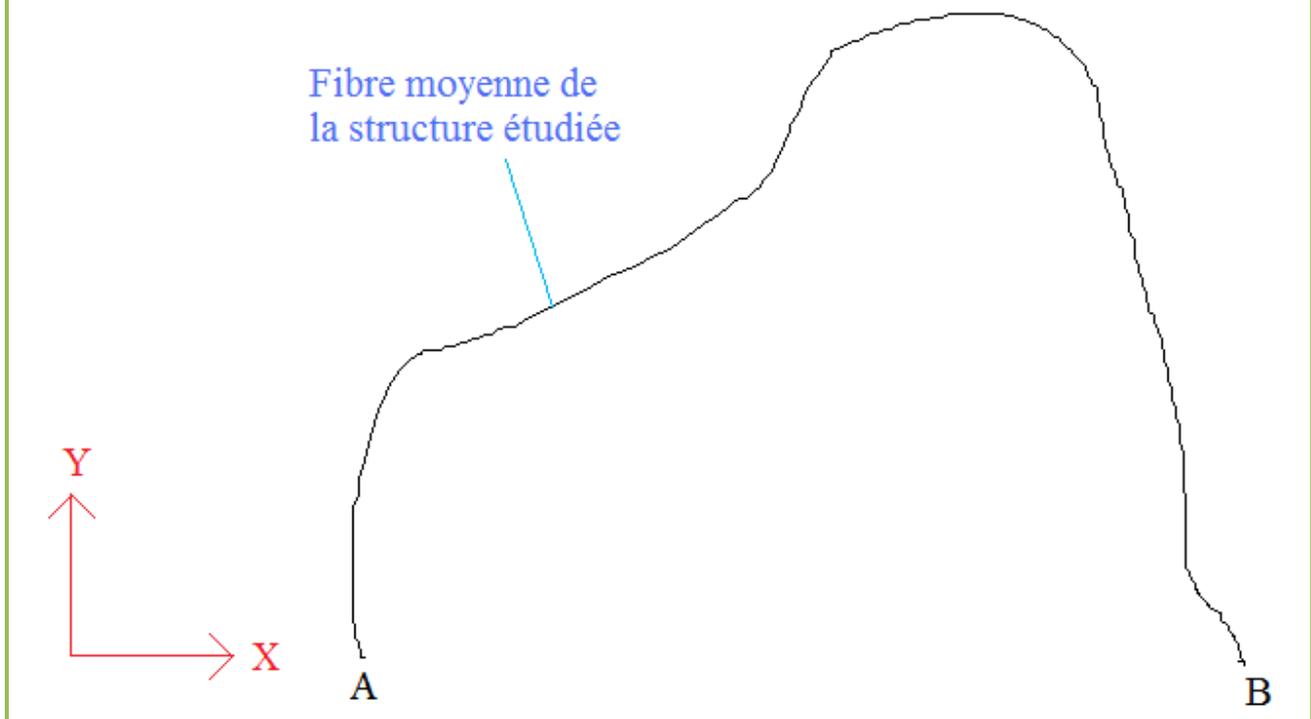
#### Convention

La poutre est représentée par sa fibre moyenne par commodité.

### Définition d'un repère global

Le repère global associé à une structure est le repère :

- Permettant d'identifier les coordonnées des points,
- Utilisé pour écrire les équations d'équilibre avec les forces extérieures et les réactions d'appuis

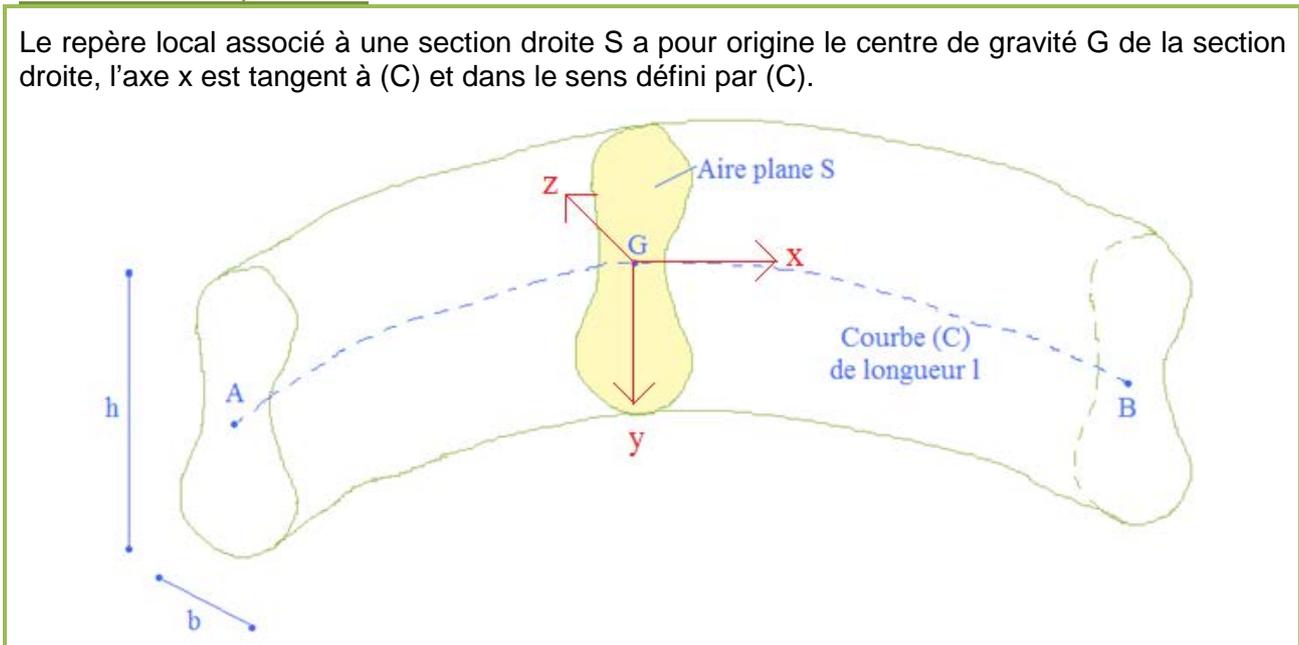


### Convention :

Le repère global est noté avec des majuscules (afin de ne pas le confondre avec le repère local dont la définition est énoncée à la suite).

### Définition d'un repère local

Le repère local associé à une section droite  $S$  a pour origine le centre de gravité  $G$  de la section droite, l'axe  $x$  est tangent à  $(C)$  et dans le sens défini par  $(C)$ .

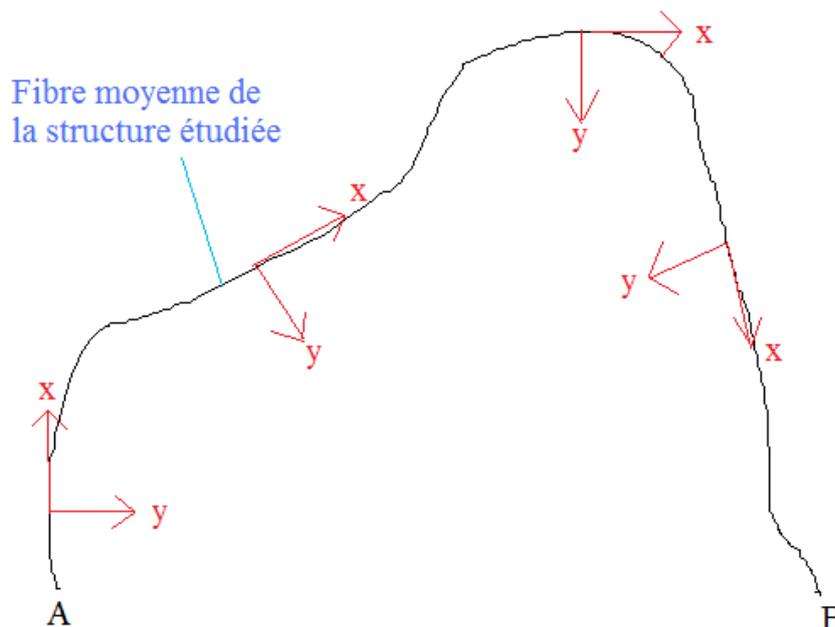


### Conventions (utilisées dans ce cours)<sup>2</sup> :

- L'axe  $x$  est dirigé selon la fibre moyenne.
- L'axe  $y$  est dirigé vers le bas de la section (dans le cas d'une poutre horizontale).
- Le repère  $(x, y, z)$  est direct
- Le repère local est noté avec des minuscules (afin de ne pas le confondre avec le repère global).

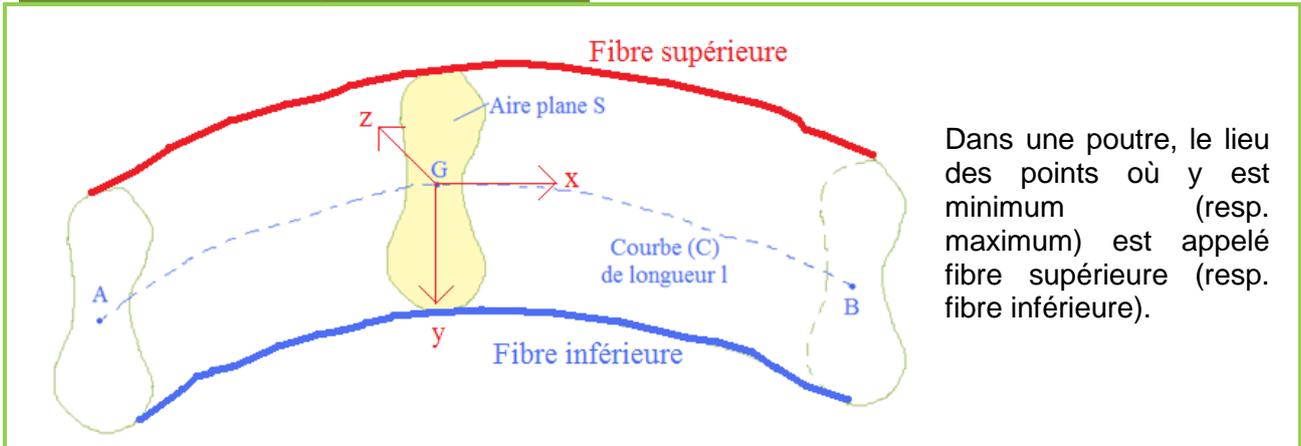
### Représentations dans la structure

Les repères locaux dans la structure sont représentés de la manière suivante :



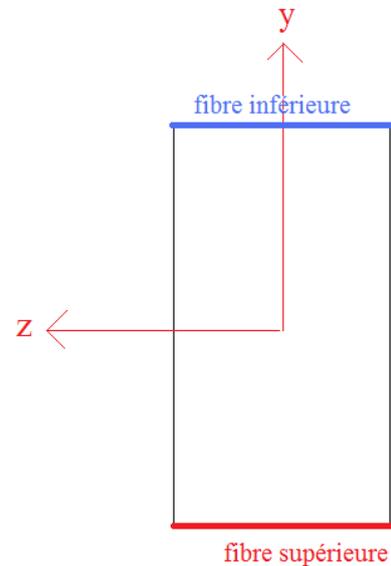
<sup>2</sup> D'autres conventions peuvent être utilisées dans d'autres documents. Il n'existe pas de meilleures conventions. Il faut néanmoins être vigilant sur la clarté de celle-ci au début d'une note de calculs afin que les résultats de calculs soient interprétés de la même manière par tous.

Définition des fibres supérieure et inférieure



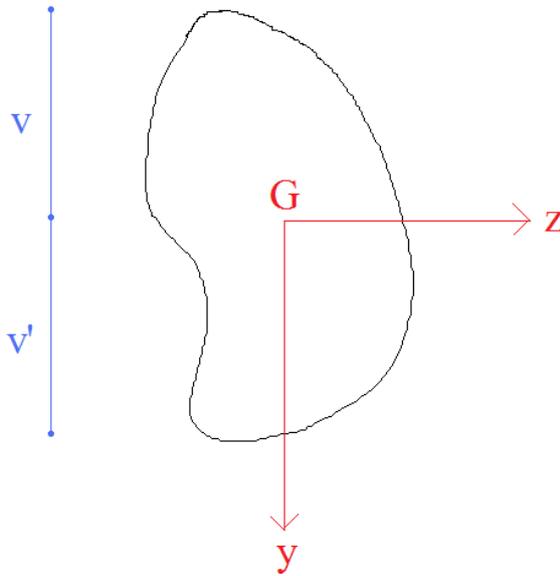
Remarque :

La fibre supérieure peut être située géographiquement en bas. Ainsi, d'après la définition, il est possible d'avoir la situation ci-contre :



Pour éviter des erreurs, il est donc fortement conseillé d'adopter la convention : « l'axe  $y$  est dirigé vers le bas de la section pour une poutre horizontale ».

Représentation dans une section droite



Lorsque l'on représente une section droite en plan, on la positionne tel que l'axe x vienne vers soi.

L'axe y, par convention est dirigé vers le bas, et l'axe z se déduit donc de l'axe y par une rotation de  $\frac{\pi}{2}$  (puisque le repère (x,y,z) est direct).

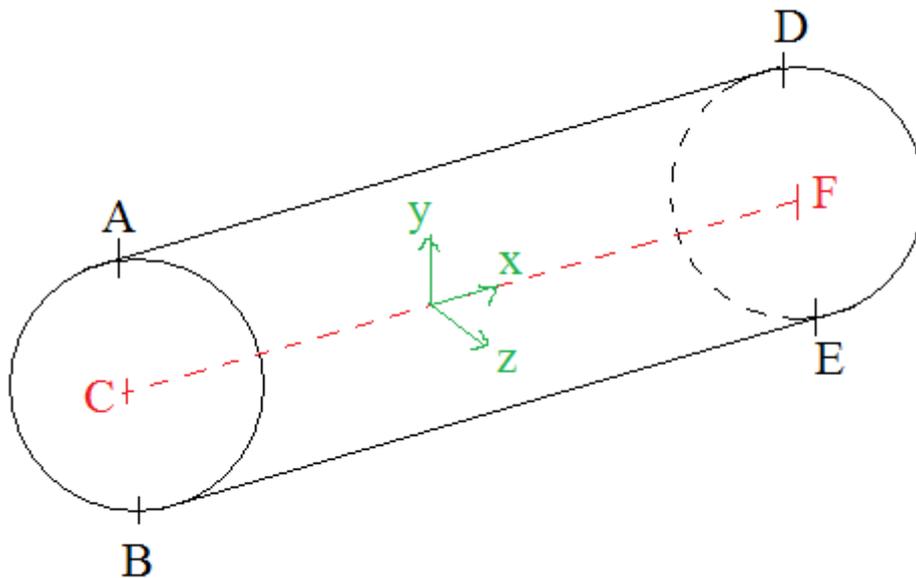
Remarque :

La fibre supérieure se situe à  $y = -v$

La fibre inférieure se situe à  $y = v'$

### 3.1 Exercice

#### Exercice [ 9 ]



- 1) Quelle est la fibre moyenne ?
- 2) Quelle est la fibre supérieure ?
- 3) Quelle est la fibre inférieure ?
- 4) Avec un effort normal nul et un moment fléchissant négatif, quels sont les points les plus comprimés pour chaque section ?
- 5) Avec un effort normal nul et un moment fléchissant positif, quels sont les points les plus tendus pour chaque section ?

ATTENTION : les réponses aux questions 4 et 5 dépendent de la convention de signe choisi dans le cours.

## 4. Hypothèses du cours de R.D.M.

### 4.1 Hypothèses de M.M.C. reprise dans la suite du cours de R.D.M.

#### 4.1.1 Hypothèse des transformations infinitésimales

Les matériaux et les structures utilisés en Génie Civil justifient l'hypothèse des transformations infinitésimales. :

- Petits déplacements
- Petites déformations

L'hypothèse des petites transformations de la M.M.C. est reprise. Cela a pour conséquence :

- De négliger les effets du second ordre (conséquence des petits déplacements)
- D'utiliser *légitimement* la loi de Hooke (conséquence des petites déformations)

##### 4.1.1.1 Effet du second ordre négligé

Les effets du second ordre sont négligés, c'est-à-dire que les moments ou actions supplémentaires résultant d'un déplacement de la structure sont négligés.

Exemple :

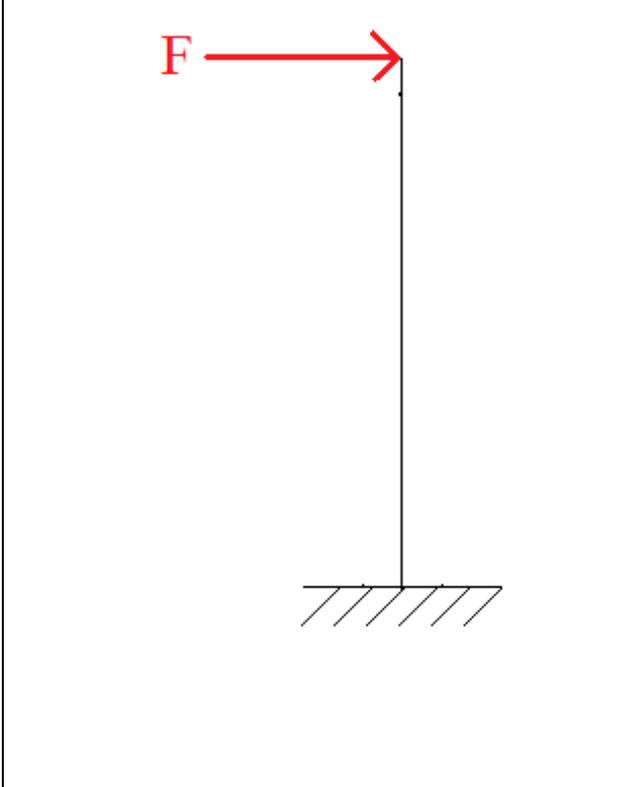
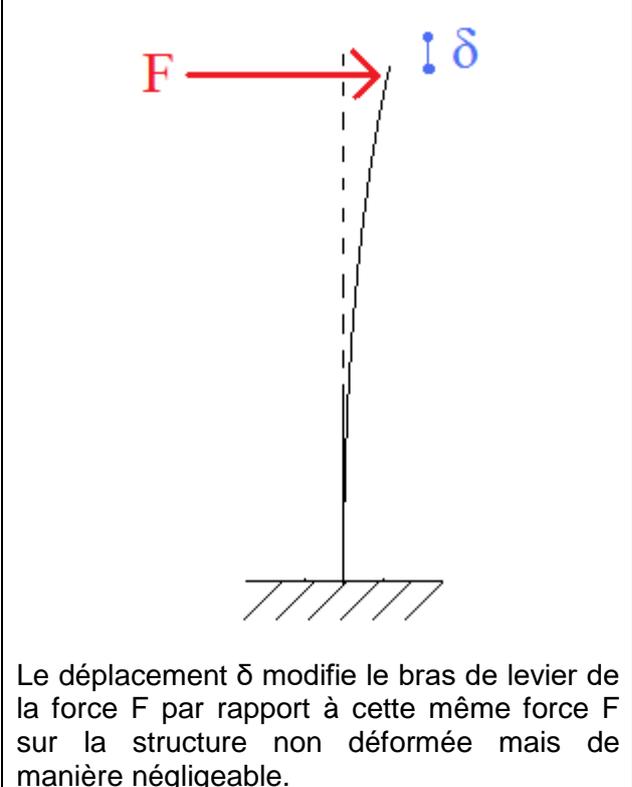
En toute rigueur, il devrait être nécessaire de calculer l'effet de la force  $F$  sur la structure.

Celle-ci impliquerait un déplacement  $\delta$ . Ainsi le moment dû à cette force  $F$  devrait être recalculé avec le nouveau bras de levier.

Il serait obtenu un nouveau déplacement, etc.

Les itérations seraient arrêtées lorsqu'il y a convergence entre la déformée calculée et la déformée prise en compte.

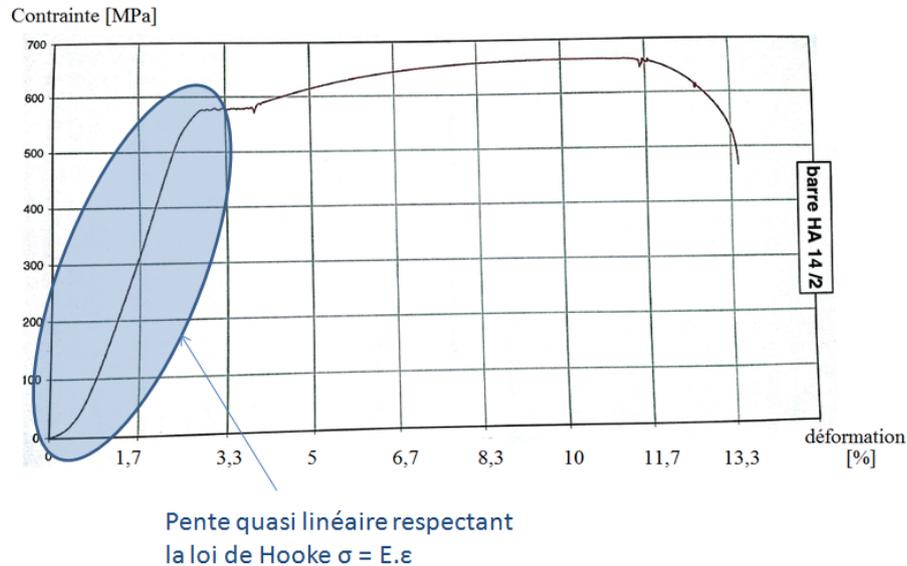
Néanmoins, en pratique ces itérations ne pas calculées : on dit que les effets dits du second ordre sont négligés (car  $\delta$  très petits  $\leftrightarrow$  hypothèses des petits déplacements). Une illustration de la faible influence du déplacement est :

Structure non déformée	Structure déformée
	 <p data-bbox="799 1422 1431 1550">Le déplacement <math>\delta</math> modifie le bras de levier de la force <math>F</math> par rapport à cette même force <math>F</math> sur la structure non déformée mais de manière négligeable.</p>

#### 4.1.1.2 Possibilité d'utiliser la loi de Hooke

Une conséquence de maintenir le matériau dans le domaine des petites déformations montre que l'écart est faible entre la loi de Hooke et la loi de comportement réelle.

Exemple : essai réel de traction d'une barre acier de ferrailage HA14



Pour des déformations plus importantes, la loi de Hooke n'est plus acceptable pour représenter la loi de comportement.

En effet, la loi n'est plus linéaire.

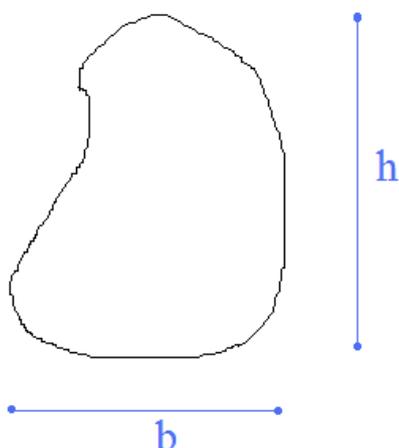
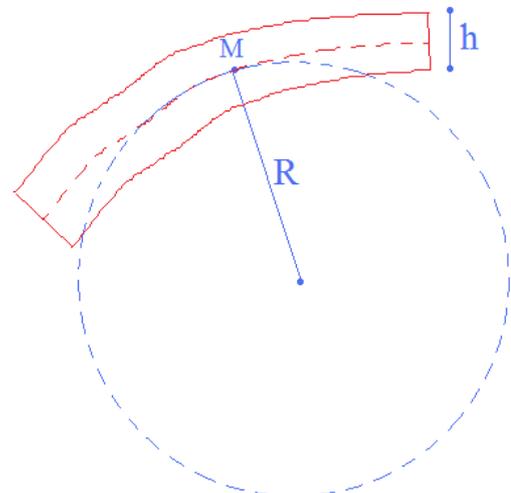
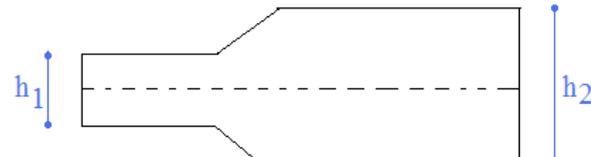
Une loi de type Hooke est donc utilisée dans le cadre de ce cours puisque l'hypothèse des petites déformations doit être vérifiée.

#### 4.1.2 Hypothèses sur la loi de comportement

La loi de comportement est une loi :

- Élastique
- Linéaire
- Homogène
- Isotrope

#### 4.2 Domaine de validité de la théorie des poutres

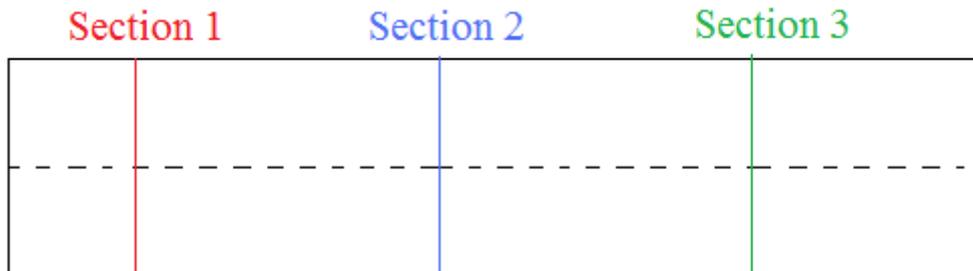
<p>1. Les dimensions transversales doivent être petites par rapport aux dimensions longitudinales. <math>\frac{1}{40} &lt; \frac{h}{l} &lt; \frac{1}{5}</math></p>	
<p>2. La section doit être suffisamment massive. <math>b &lt; h &lt; 10b</math></p>	
<p>3. Pas de variation brusque de courbure R supérieur à 5h</p>	
<p>4. Pas de variation brusque de dimensions transversales : <math>h_1 \approx h_2</math>.</p>	

### 4.3 Principe de NAVIER BERNOULLI

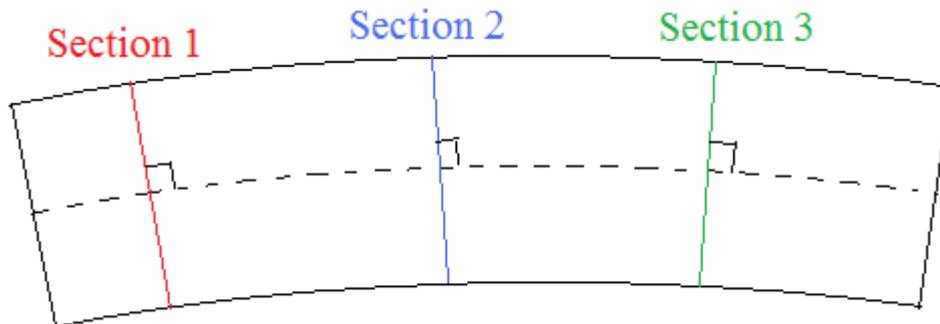
#### Enoncé du principe de Navier Bernoulli

Après déformation de la poutre, les sections normales à la fibre moyenne (les sections droites), restent planes et normales à la fibre moyenne.

Etat initial :



Etat déformé :



#### Enoncé du principe généralisé

Deux sections droites infiniment voisines, restent, après déformations, infiniment voisines et superposables par simple déplacement.

#### Conséquences

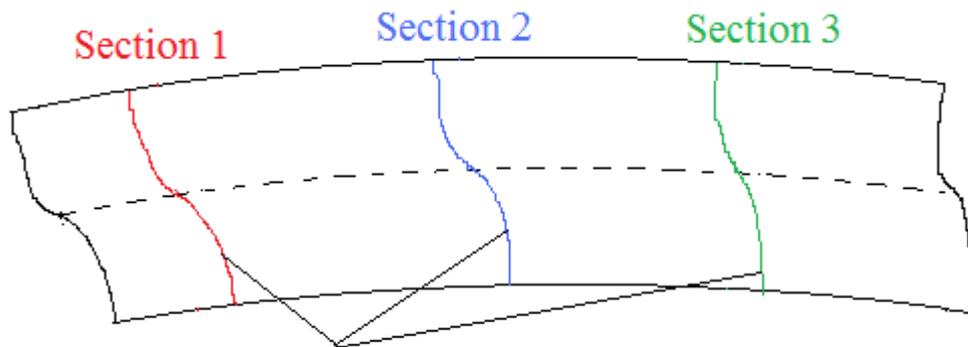
Les déformations longitudinales en un point M de coordonnée  $(y, z)$  dans une section droite, peuvent être approchées par une fonction linéaire des variables  $y$  et  $z$  :

$$\varepsilon = a + by + cz$$

- $\varepsilon$  est la déformation
- $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des *constantes* qui dépendent de  $x$  (position de la section droite considérée).



Ainsi, le principe précédent est une nouvelle conséquence du respect du domaine des petites déformations. En effet, si les déformations n'étaient plus dans ce domaine, il existerait un risque de gauchissement des sections comme l'illustre la figure suivante.



## gauchissement des sections

Par conséquent, en cas de gauchissement des sections, la déformation en un point M d'une section ne pourrait donc pas être calculée par l'équation d'un plan.

### 4.3.1 Principe de Saint Venant

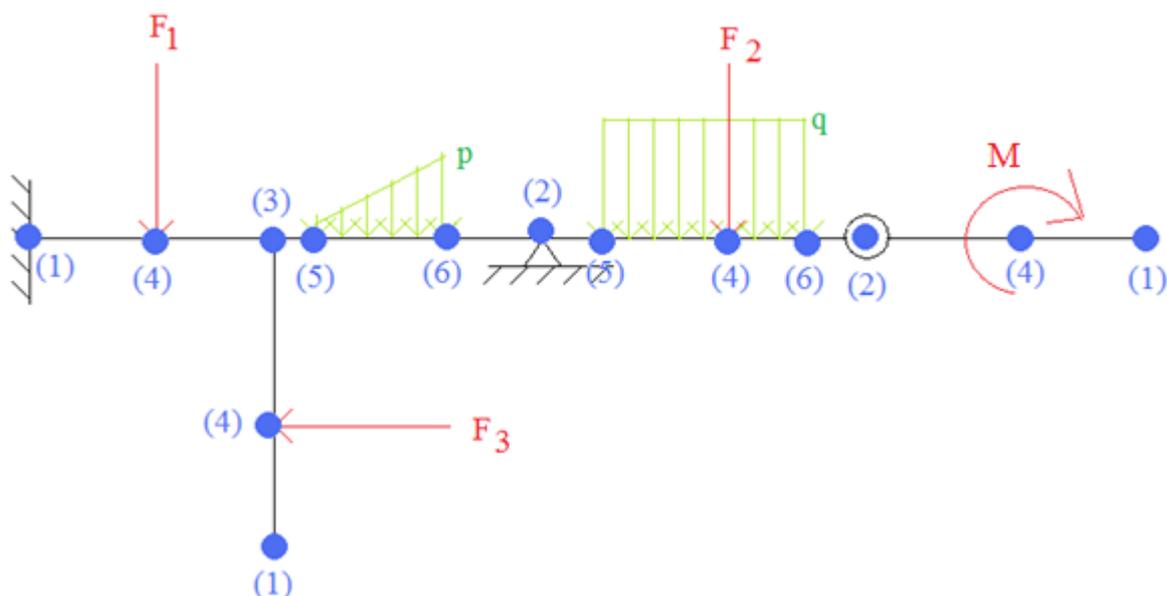
#### Définition d'une singularité

Une singularité de la structure ou du chargement est :

- Une extrémité de la structure (avec ou sans liaison) (1)
- Une liaison intérieure ou extérieure (2)
- Un changement de poutre (3)
- Une force ponctuelle (ou un moment ponctuel) (4)
- Un début de charge répartie (en force ou en moment) (5)
- Une fin de charge répartie (en force ou en moment) (6)

Exemples de singularités :

Les positions des singularités sont représentées par le symbole suivant ●.

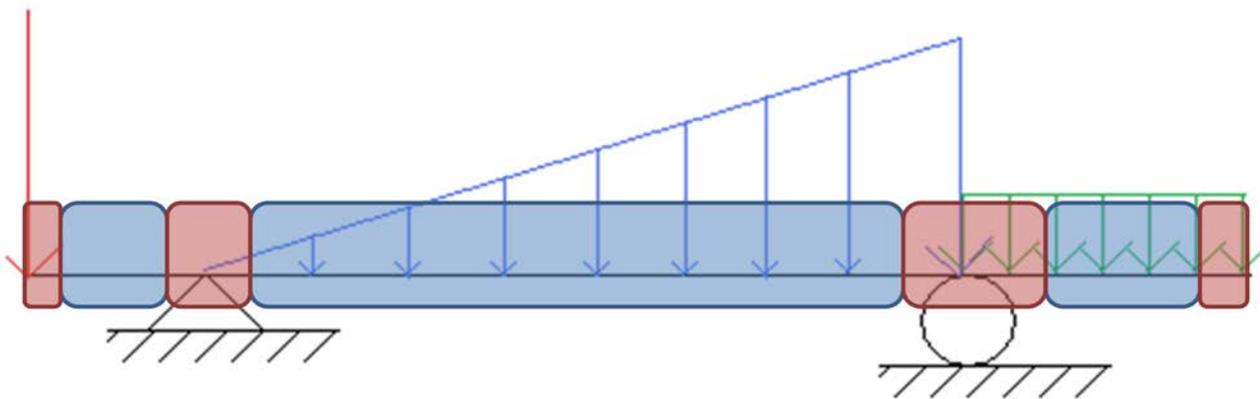


### Enoncé du principe de Saint Venant

Les contraintes (et par suite les déformations) dans une section droite, éloignée des points d'application des efforts extérieurs et des singularités, ne dépendent que de la résultante et du moment résultant des efforts appliqués à l'une des deux parties séparées par la section droite envisagée.

**En d'autres termes, la principale conséquence pratique est que les résultats de RDM restent valables pour des sections éloignées des singularités.**

*Exemple*



Légende

Sections au niveau desquelles les résultats de RDM sont proches de la réalité  
(éloignement suffisant des singularités)

Sections au niveau desquelles les résultats de RDM sont potentiellement  
éloignés de la réalité (éloignement trop faible des singularités)

#### **4.4 Hypothèse sur l'effort tranchant**

Hypothèse abordée dans la deuxième partie du cours.

## 4.5 Exercices

### Exercice [ 10 ]

En un point donné, supposons qu'une force  $F_1$  extérieure seule produit une contrainte interne  $\sigma_1$  et qu'une force  $F_2$  extérieure seule produit une contrainte interne  $\sigma_2$ .

En supposant les hypothèses de R.D.M. respectées, laquelle de ces propositions est correcte (et pourquoi) ? :

- a) L'effet conjugué des forces  $F_1$  et  $F_2$  produit une contrainte différente de  $\sigma_1 + \sigma_2$
- b) L'effet conjugué des forces  $F_1$  et  $F_2$  produit une contrainte égale à  $\sigma_1 + \sigma_2$

### Exercice [ 11 ]

Parmi ces matériaux de construction, quels sont ceux qui ne respectent pas les hypothèses du cours de R.D.M ?

- Béton
- Béton armé
- Acier
- Bois massif
- Verre

## 5. Calculs des réactions d'appuis

### 5.1 Action - réaction

#### Principe d'action-réaction

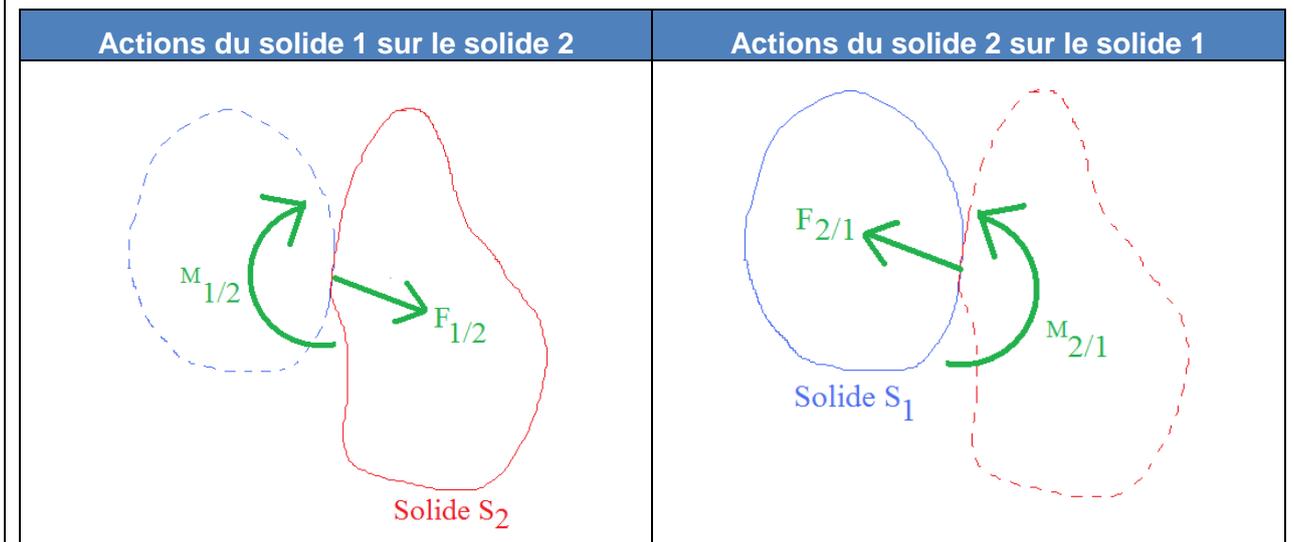
Lorsque deux solides  $S_1$  et  $S_2$  sont en contact, ils exercent l'un sur l'autre des actions de contact. Les actions de  $S_1$  sur  $S_2$  ont les mêmes directions et intensité, mais sont de sens contraire par rapport aux actions de  $S_2$  sur  $S_1$ .

Exemple : dans le cas où le contact entre deux solides  $S_1$  et  $S_2$  permet la transmission d'une force et d'un moment, nous avons :  $\vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1}$  et  $\vec{M}_{1/2} = -\vec{M}_{2/1}$

Ou en conformité avec l'approche de ce cours, il vient qu'à chaque coupure, la somme en force et en moment, est nulle :

$$\vec{F}_{1/2} + \vec{F}_{2/1} = 0$$

$$\vec{M}_{1/2} + \vec{M}_{2/1} = 0$$



### 5.2 Torseurs

Une action mécanique peut s'exprimer à l'aide d'un torseur.

#### Définition du torseur

Le torseur est défini par un vecteur force, un vecteur moment et un point de réduction autour duquel on calcule le moment vectoriel.

Exemple 1 : torseur d'une force ponctuelle  $F$  réduit au point  $A$ :

$${}_A \{T\} = \left\{ \vec{F} \quad \vec{M}_A(\vec{F}) \right\}$$

Dans les problèmes plans, il n'existe pas de force selon l'axe z, ni de moments autour des axes x

et y donc le torseur s'écrit sous la forme :

$${}_A\{T\} = \begin{Bmatrix} F_x & 0 \\ F_y & 0 \\ 0 & M_A(\vec{F}) \end{Bmatrix}$$

**Exemple 2** : torseur d'un moment ponctuel M réduit au point A. Il n'existe donc pas de force donc le torseur s'écrit sous la forme :

$${}_A\{T\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} & \vec{M} \end{Bmatrix}$$

Dans les problèmes plans, les moments autour des axes x et y sont nuls donc l'exemple 2

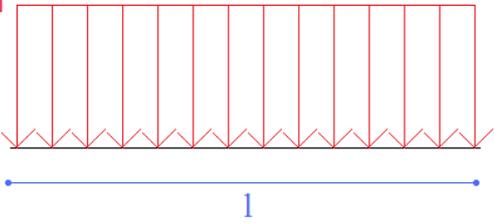
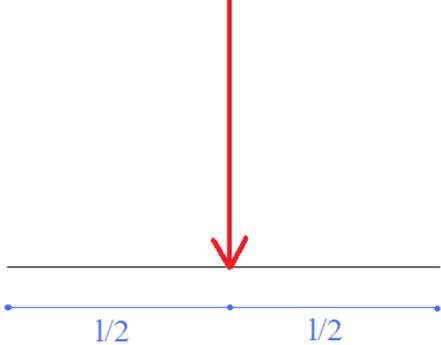
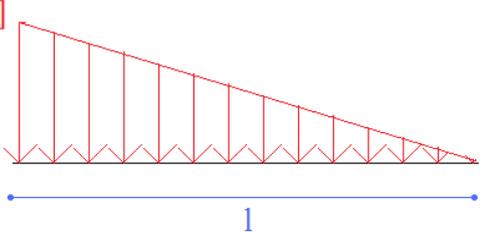
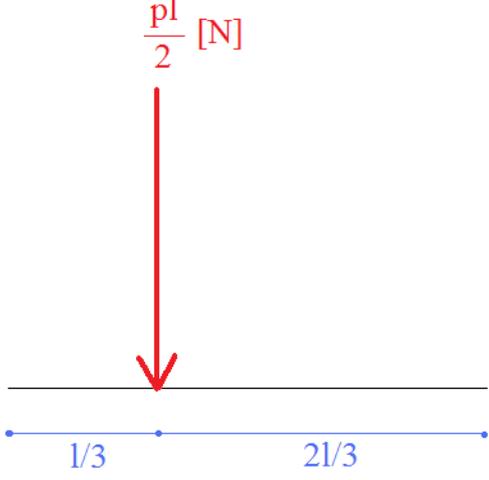
deviendrait :

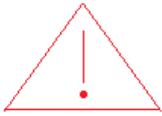
$${}_A\{T\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & M \end{Bmatrix}$$

### 5.3 Force globalement équivalente à une force répartie

#### Propriété

Une force globalement équivalente à une force répartie est une force ponctuelle égale à la résultante des forces réparties, dont le moment par rapport à un point est le même que celui des forces réparties.

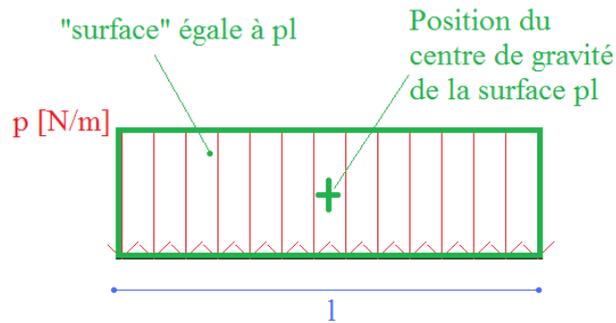
Force répartie	Force globalement équivalente
<p>Force répartie rectangulaire (ou uniformément)</p> <p><math>p</math> [N/m]</p> 	<p><math>pl</math> [N]</p> 
<p>Force répartie triangulaire</p> <p><math>p</math> [N/m]</p> 	<p><math>\frac{pl}{2}</math> [N]</p> 



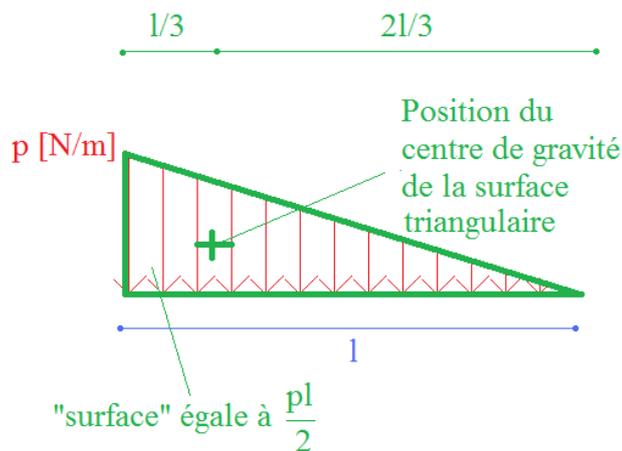
**Le tableau précédent est à connaître par cœur ! Car il est très souvent utilisé pour résoudre des problèmes de RDM.**

Néanmoins, il est facile de retrouver ces résultats puisque la force ponctuelle est égale à la *surface équivalente* et est située au niveau du centre de gravité de cette même *surface*.

Exemple force rectangulaire répartie



Exemple : force répartie triangulaire



## 5.4 Liaisons

### Définition des liaisons internes et externes

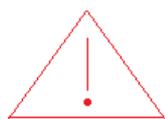
Les liaisons peuvent être des liaisons entre poutres ou bien entre une poutre et l'extérieur ; elles seront dénommées respectivement liaisons internes et liaisons externes.

### Notation

L'extérieur sera noté par le symbole : 

### Définition d'une étude cinématique

Une étude cinématique est l'étude d'une liaison entre deux solides  $S_1$  et  $S_2$  en étudiant les mouvements possibles entre ces deux solides.



Il s'agit bien de mouvements possibles et non réels, étant entendu qu'en génie civil, les solides ne sont (généralement) pas en mouvement par rapport à d'autres (exception des calculs dynamique qui ne font pas l'objet de ce cours).

### Propriété

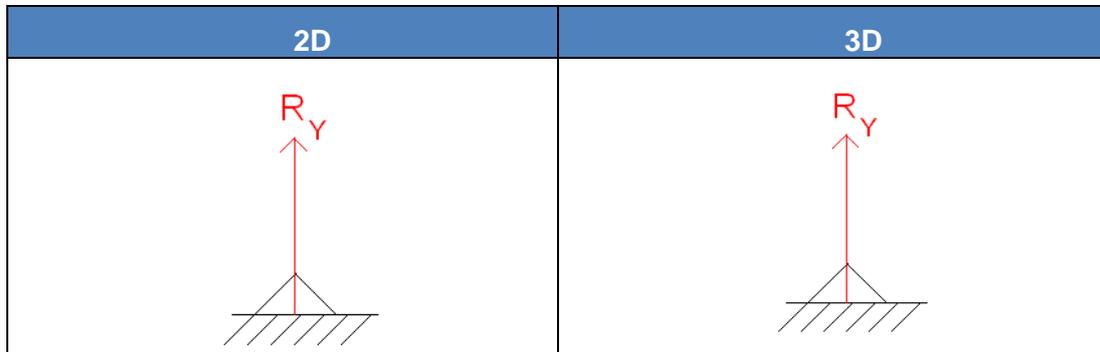
Lorsqu'un degré de liberté est bloqué par la liaison, il existe nécessairement une action mécanique appelée action ou effort de liaison dans la direction du degré de liberté bloqué.

Remarque : Les symboles présentés suivants ne sont pas normalisés mais couramment rencontrés.

### 5.4.1 Appui simple

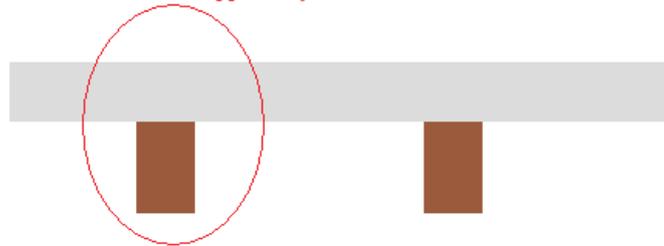
Cinématique : une translation (axe x ou y) et une rotation autorisée.

⇒ Réactions d'appuis : force selon la direction dont le déplacement est empêché.



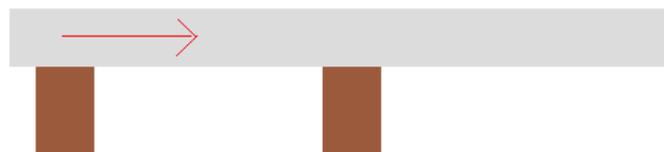
Exemple d'appui simple 2D : poutre (en gris) sur deux appuis (en marron)

Condition d'appui analysée

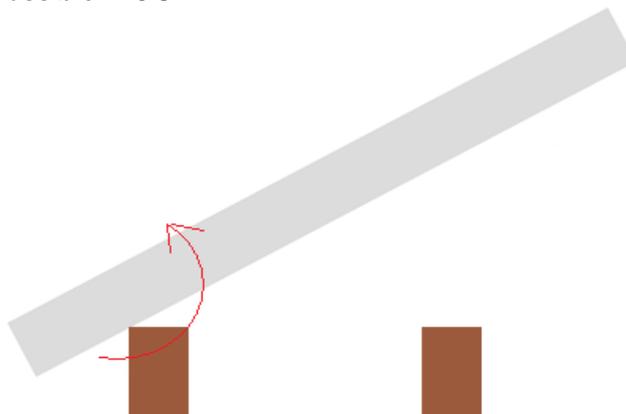


Etude cinématique

- Le déplacement horizontal est-il possible ? OUI



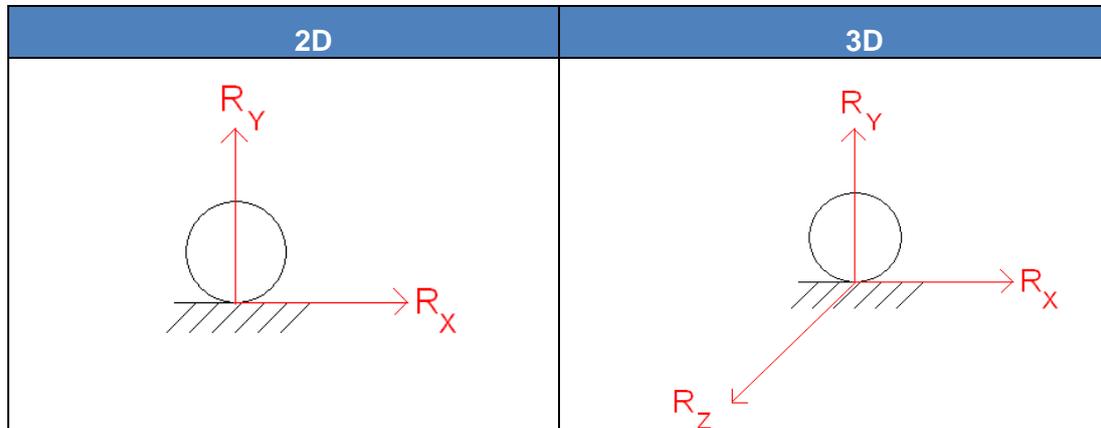
- Le déplacement vertical est-il possible ? NON pas dans le sens haut vers le bas qui est le sens qui nous intéresse en génie civil. Il existe donc une réaction d'appui verticale.
- La rotation est-elle possible ? OUI



### 5.4.2 Articulation

Cinématique : une rotation autorisée.

⇒ Réactions d'appuis : force selon toutes les directions

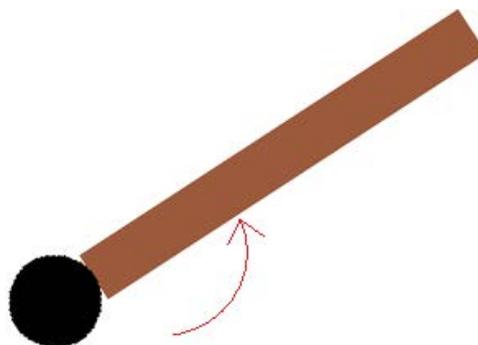


Exemple d'une rotule: porte (en marron) rotulée par un gond (en noir)



Etude cinématique

- Le déplacement horizontal est-il possible ? NON, le gond bloque ce déplacement. Il existe donc une réaction d'appui horizontale.
- Le déplacement vertical est-il possible ? NON, le gond bloque ce déplacement. Il existe donc une réaction d'appui verticale.
- La rotation est-elle possible ? OUI

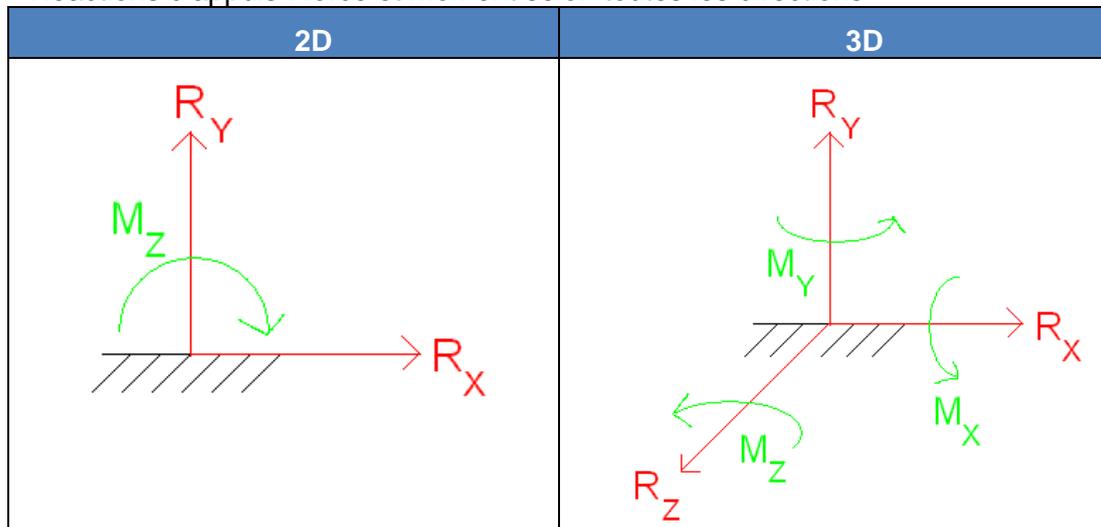


Remarque : l'exemple précédent est une rotule 2D au sens génie civil. Il ne s'agit pas d'une liaison glissière qui n'est pas utilisée en génie civil courant.

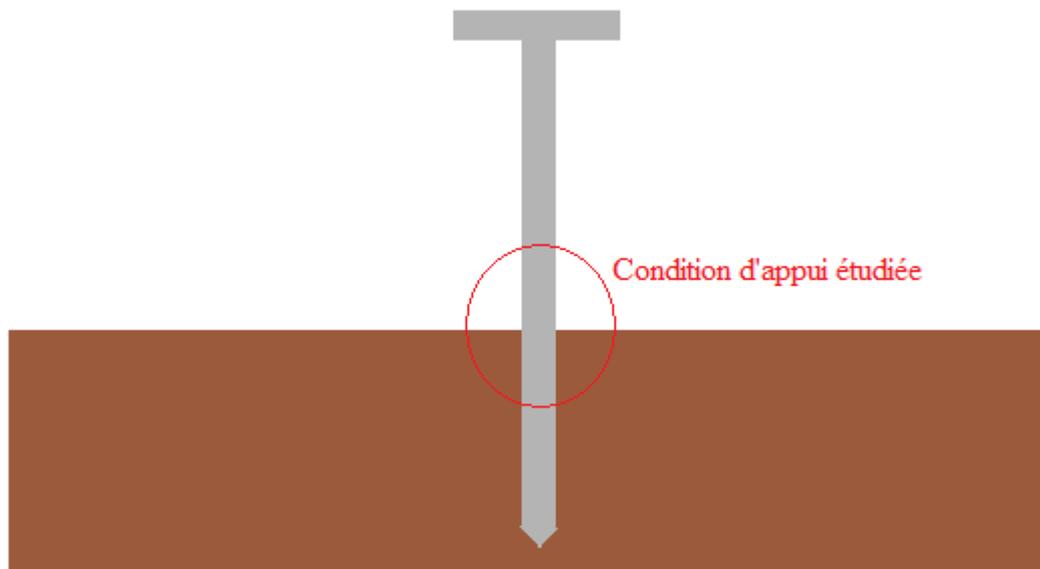
### 5.4.3 Encastrement

Cinématique : aucun mouvement possible.

⇒ Réactions d'appuis : force et moment selon toutes les directions



Exemple d'un encastrement : clou (en gris) planté dans une planche (en marron)



Etude cinématique

- Le déplacement horizontal est-il possible ? NON. Il existe donc une réaction d'appui horizontale.
- Le déplacement vertical est-il possible ? NON. Il existe donc une réaction d'appui verticale.
- La rotation est-elle possible ? NON. Il existe donc une réaction d'appuis en moment.

#### 5.4.4 Liaisons parfaites – liaisons non parfaites

##### Définition d'une Liaison parfaite

Une liaison est dite parfaite si dans toute cinématique compatible avec la liaison, le travail des actions de liaison est nul.

Remarque : Les trois liaisons types précédemment définies sont des liaisons parfaites.

##### Définition d'une Liaison non parfaite

Une liaison non parfaite est une liaison qui n'est pas parfaite.

Exemple de liaison non parfaite :



Dans ce cas, la liaison autorise un mouvement relatif vertical, mais fait également apparaître un effort de liaison vertical (due à la raideur du ressort modélisé).

Remarque :

Ces liaisons, parfois utilisées en génie civil (calculs sismiques par exemple), sortent du cadre de ce cours.

#### 5.4.5 Liaisons réelles

Un des problèmes majeurs de l'ingénieur structures est de modéliser un problème réel, notamment au niveau des liaisons.

Le choix de la modélisation doit être aussi proche que possible du comportement réel de la liaison, compte tenu de sa réalisation technique.



Néanmoins, il convient de choisir les liaisons dans la modélisation qui sont dans le sens de la sécurité !

### 5.5 Problème plan

#### Définition d'un problème plan

On appelle problème plan, un problème modélisé par une structure plane à plan moyen, avec des liaisons planes et chargée dans ce plan.

#### Conséquence

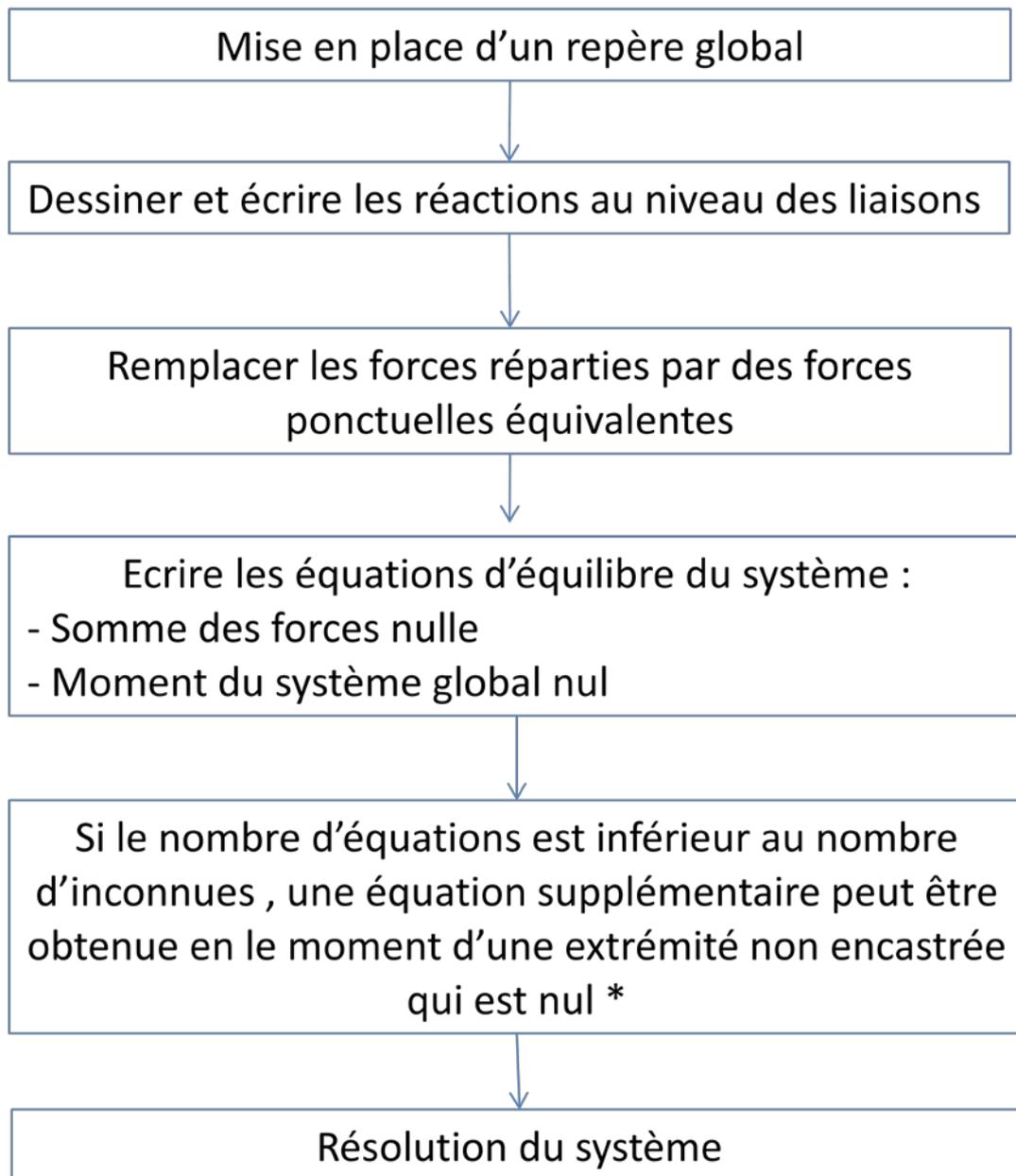
Un chargement dans un plan signifie que les forces n'ont pas de composantes sur l'axe Z et que les moments n'ont pas de composantes sur les axes X et Y.

Remarque :

- l'axe z des repères locaux (G,x,y,z) ne coïncide pas nécessairement avec l'axe Z du repère global.
- De nombreux problèmes de génie civil sont définis dans un plan ; la modélisation correspondante pourra donc se faire dans un plan (O,X,Y).

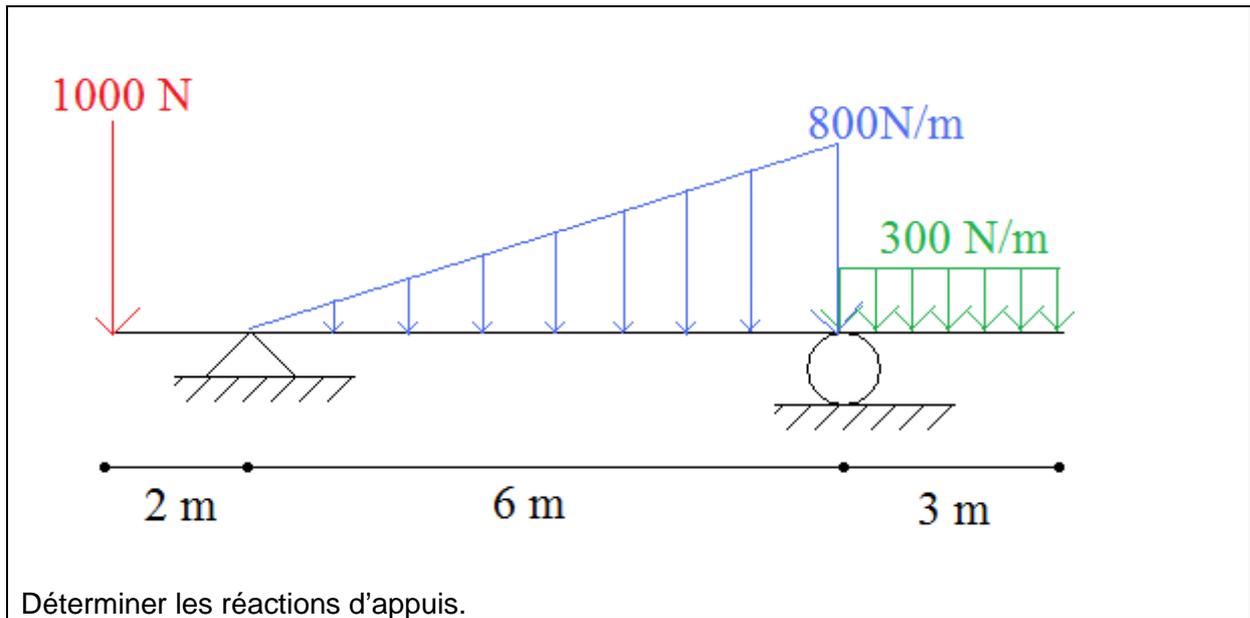
## 5.6 Méthode

### 5.6.1 Logigramme

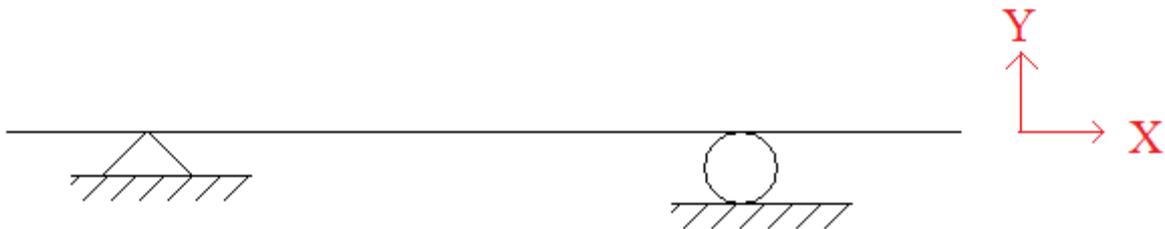


\* dans la pratique, il est possible de calculer un moment pour n'importe quel point de la structure si le calcul du moment conserve la partie droite et la partie gauche. En effet, en statique, ce moment global est nécessairement nul.

### 5.6.2 Exemple



#### Mise en place d'un repère global

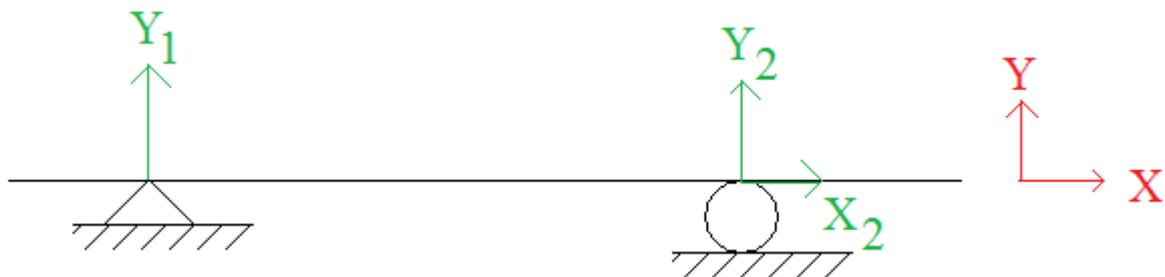


Remarque : la convention y dirigé vers le bas est une convention du repère local et non global.

#### Dessiner et écrire les réactions d'appuis

Au niveau de l'appui simple, il n'existe qu'une seule réaction verticale en force.

Au niveau de la rotule, il existe une réaction verticale et une réaction horizontale.



### Remplacer les forces réparties par des forces ponctuelles équivalentes

#### Charge répartie rectangulaire :

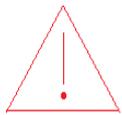
Elle vaut 300N/m et sollicite 3 m, donc la charge ponctuelle équivalente vaut :  $300 \times 3 = 900 \text{ N}$

La position de la charge ponctuelle équivalente est placée au centre de gravité de la charge répartie, c'est-à-dire qu'elle est placée au centre du rectangle et donc à 1,5 m à droite de l'appui rotule.

#### Charge répartie triangulaire :

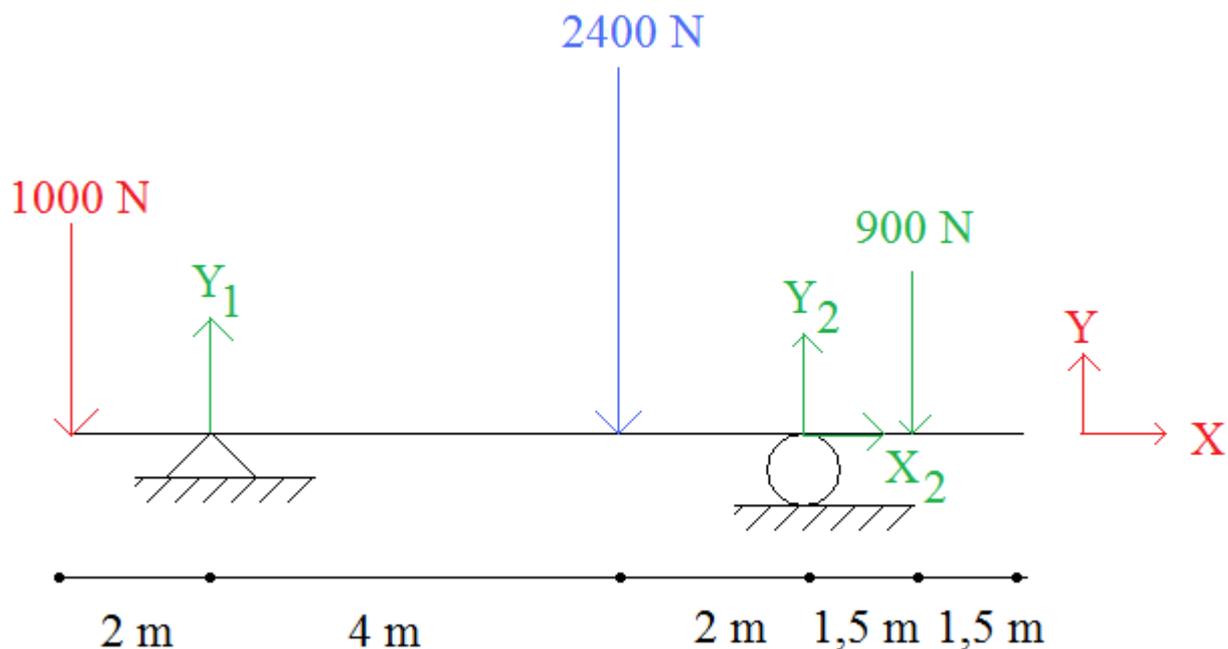
Elle vaut au maximum 800N/m et sollicite 6 m, donc la charge ponctuelle vaut :  $800 \times \frac{6}{2} = 2400 \text{ N}$

La position de la charge ponctuelle équivalente est placée au centre de gravité de la charge répartie, c'est-à-dire qu'elle est placée au  $\frac{2}{3}$  de la pointe du triangle : à 4 m à droite de l'appui simple (et donc à 2 m à gauche de l'appui rotule).



il ne faut pas oublier les charges qui sont déjà ponctuelles dans le problème.

Il vient alors :



#### Ecrire les équations d'équilibre du système

Somme des forces horizontales nulles :  $X_2 = 0$

Somme des forces verticales nulles :  $Y_1 + Y_2 - 1000 - 2400 - 900 = 0$

$$\Leftrightarrow Y_1 + Y_2 - 4300 = 0$$

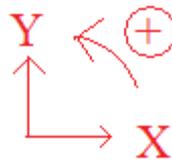
### Calcul d'un moment global pour obtenir une équation supplémentaire

Il y a 3 inconnues et 2 équations. Cette étape est donc obligatoire pour résoudre le système.

Pour éliminer  $Y_1$  de cette équation, le moment global au niveau de l'appui 1 est calculé. Le moment global (en tenant compte de la partie droite et la partie gauche) au niveau de cet appui est nul.

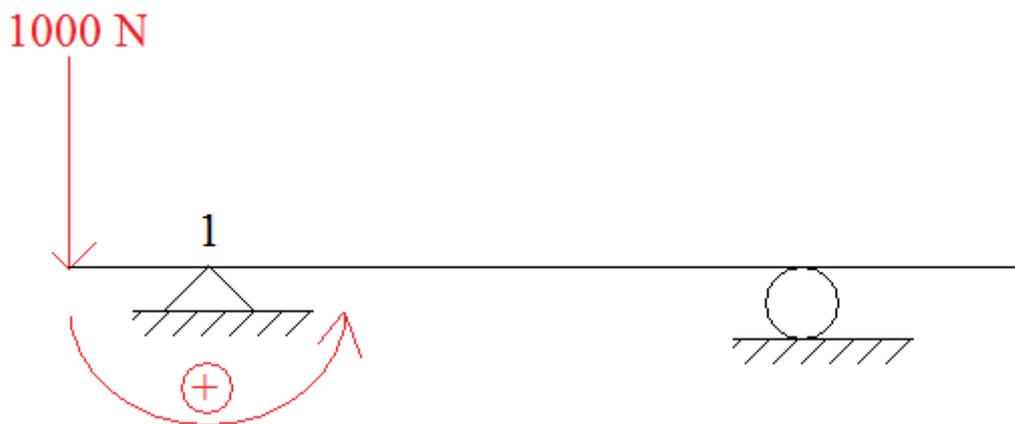
#### Rappel :

- le moment en valeur absolue vaut la force multipliée par le bras de levier.
  - Le signe est fonction du sens dans lequel fait tourner la force considérée
- Le signe positif est dans le sens suivant :

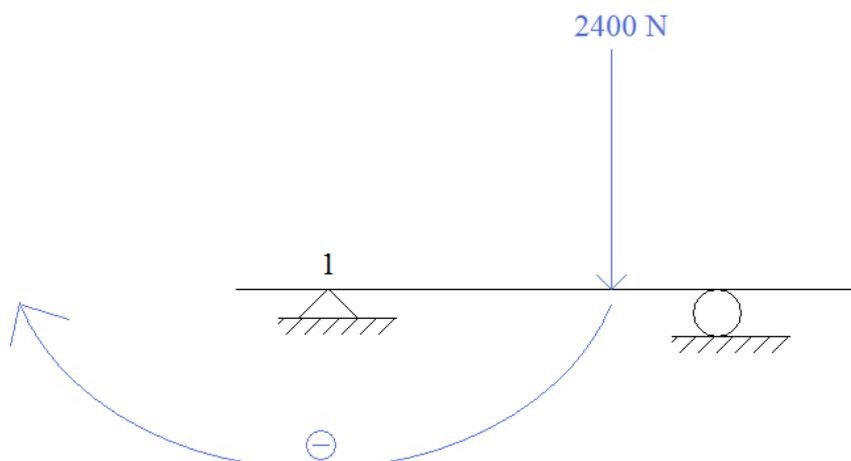


#### Exemple :

La force de 1000 N fait tourner dans le sens positif le nœud au niveau de l'appui 1 avec un bras de levier de 2 m.



La force de 2400 N fait tourner dans le sens négatif le nœud au niveau de l'appui 1 avec un bras de levier de 4 m.



En procédant de même pour les autres forces, on obtient :

$$1000 \times 2 - 2400 \times 4 + Y_2 \times 6 - 900 \times (6 + 1,5) = 0$$
$$\Leftrightarrow Y_2 \approx 2392 \text{ N}$$

Remarque :

Il aurait tout à fait été possible de prendre en compte que le moment était nul au niveau de l'appui rotule. Ou encore au niveau des deux extrémités libres. Le résultat final aurait été (heureusement...) identique.

### Résolution du système

$$\begin{cases} Y_1 + Y_2 - 4300 = 0 \\ Y_2 \approx 2392 \text{ N} \\ X_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} Y_1 \approx 1908 \text{ N} \\ Y_2 \approx 2392 \text{ N} \\ X_2 = 0 \text{ N} \end{cases}}$$

## 5.7 Exercices

### Exercice [ 12 ]

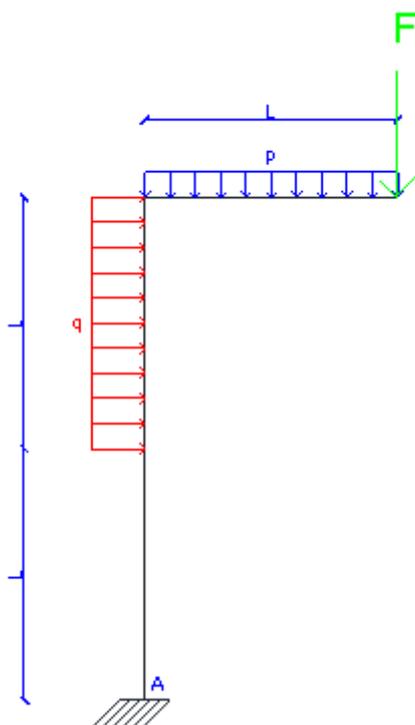


Modéliser la poutre supérieure de la balançoire ci-contre (géométrie et chargement)

Données :

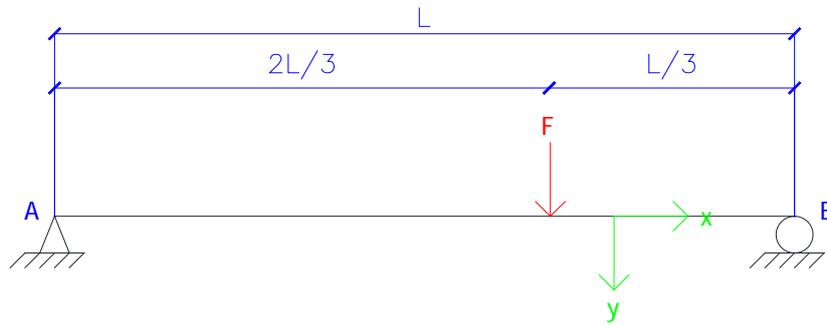
- Masse volumique de la neige : 50 à 150  $\text{kg/m}^3$
- Hauteur de chute de neige : 20 cm
- Diamètre de la poutre en bois : 15 cm
- Masse volumique du bois : 350 à 1200  $\text{kg/m}^3$
- Longueur de la poutre : 3 m
- Longueur entre appuis : 2,5 m
- Masse du banc et des chaînes : 25 kg (chaînes situées à 30 cm des appuis)
- Surface horizontale du banc : 1,2  $\text{m}^2$

### Exercice [ 13 ]



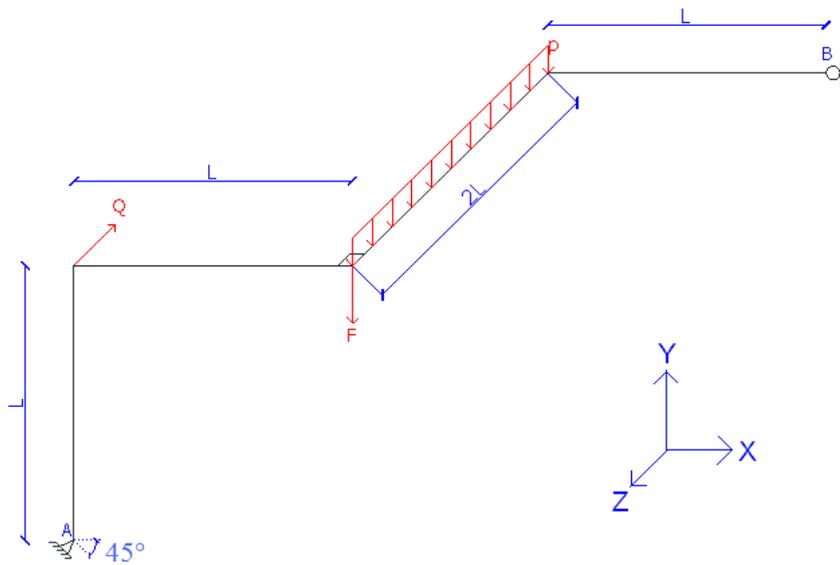
Donner les réactions d'appui au point A.

Exercice [ 14 ]



Donner les réactions  
d'appui aux points A  
et au point B.

Exercice [ 15 ]

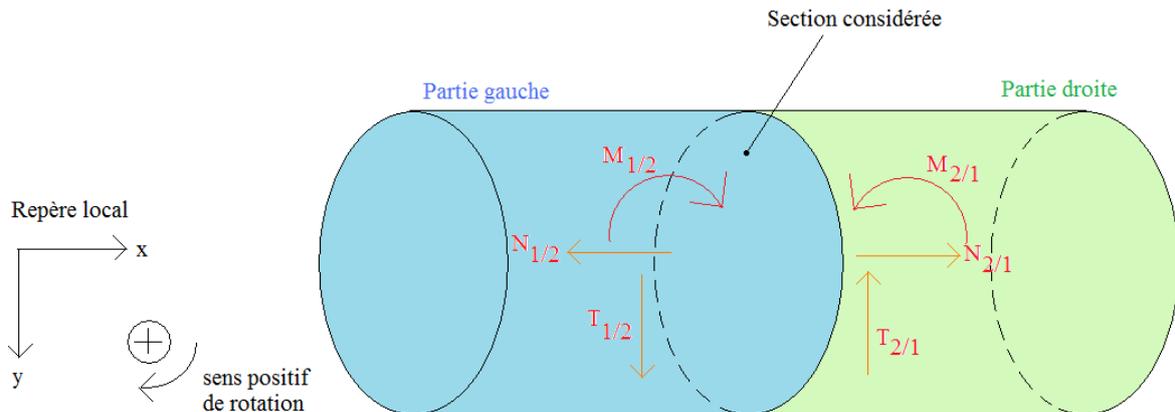


Donner les réactions  
d'appui aux points A et B

## 6. Calculs des diagrammes de sollicitations par la méthode des coupures

### 6.1 Applications du principe de Saint Venant

Pour une section donnée, il y a équilibre des forces et des moments entre la partie droite et la partie gauche d'une section considérée.

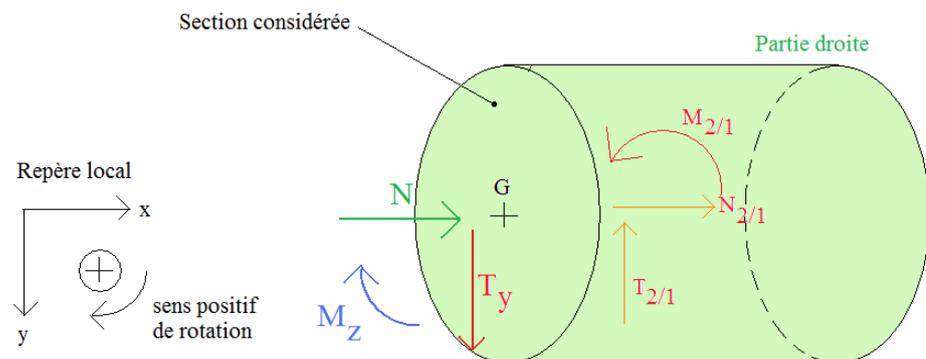


#### 6.1.1 Conservation de la partie droite

##### Définition du torseur de cohésion « par les forces de gauche »

Le torseur de cohésion dans une section droite est le torseur des efforts appliqués à gauche de cette section réduit au centre de gravité G de la section :  ${}_G\{T_g\}$ .

La conservation de la partie droite est :

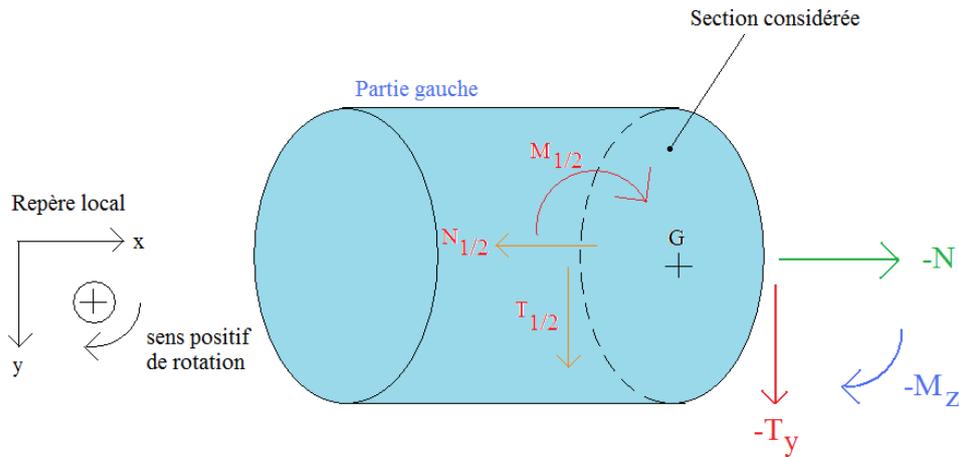


#### 6.1.2 Conservation de la partie gauche

##### Définition du torseur de cohésion « par les forces de droite »

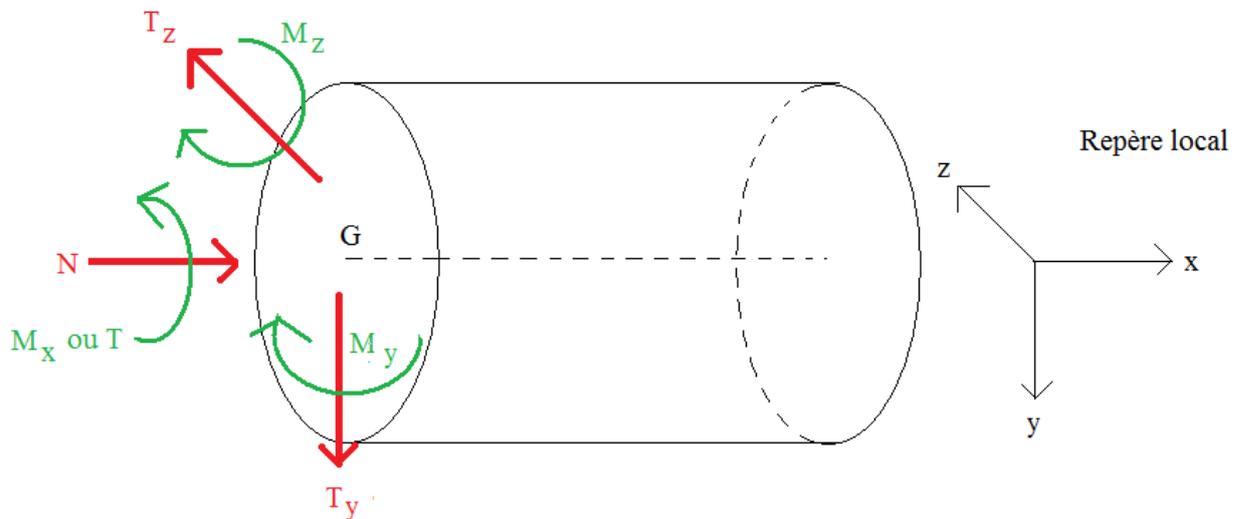
Le torseur de cohésion dans une section droite est l'opposé du torseur des efforts appliqués à droite de cette section réduit au centre de gravité G de la section :  $-{}_G\{T_d\}$ .

La conservation de la partie gauche est :



## 6.2 Cas général : modélisation 3D

Exemple avec une partie droite conservée :



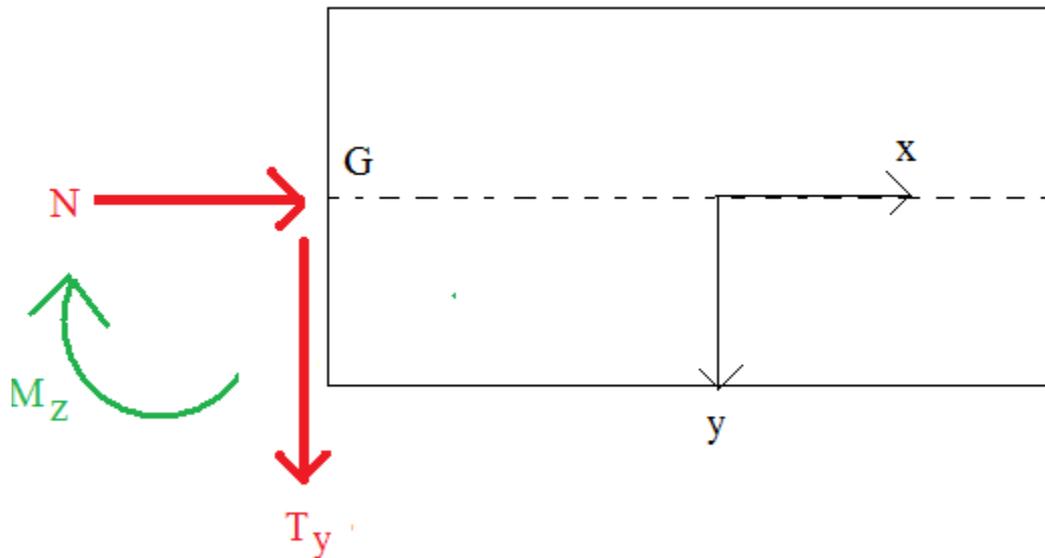
Avec :	N	Effort normal.
	$T_y$	Effort tranchant selon y.
	$T_z$	Effort tranchant selon z.
	$M_x$ (ou T)	Moment de torsion.
	$M_y$	Moment fléchissant selon l'axe y.
	$M_z$	Moment fléchissant selon l'axe z.

Dans le repère local, les éléments de réductions du torseur de cohésion s'écrit :

$${}_G\{T_G\} = \begin{Bmatrix} N & T \\ T_y & M_y \\ T_z & M_z \end{Bmatrix}$$

### 6.3 Problème plan : modélisation 2D

Exemple avec une partie droite conservée :



- Avec N : Effort normal.  
T<sub>y</sub> : Effort tranchant (selon y).  
M<sub>z</sub> : Moment fléchissant (selon l'axe z).

Dans le repère local, les éléments de réductions du tenseur de cohésion s'écrit :

$${}_G\{T_G\} = \begin{Bmatrix} N & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & M_z \end{Bmatrix}$$

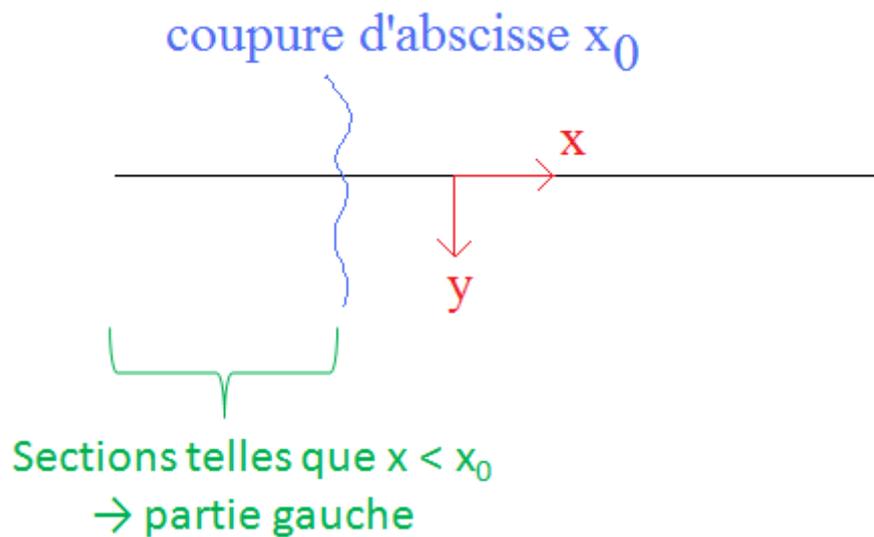
## 6.4 Méthodes

### 6.4.1 Définitions des parties droite et gauche

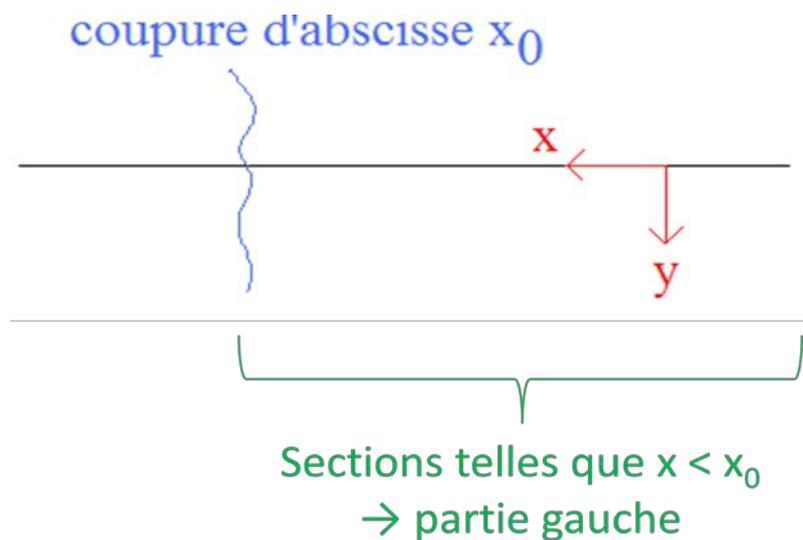
#### Définition de la partie gauche

La partie gauche d'une coupure est constituée des sections d'abscisses inférieures à l'abscisse de la coupure

Exemple :



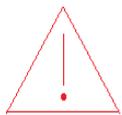
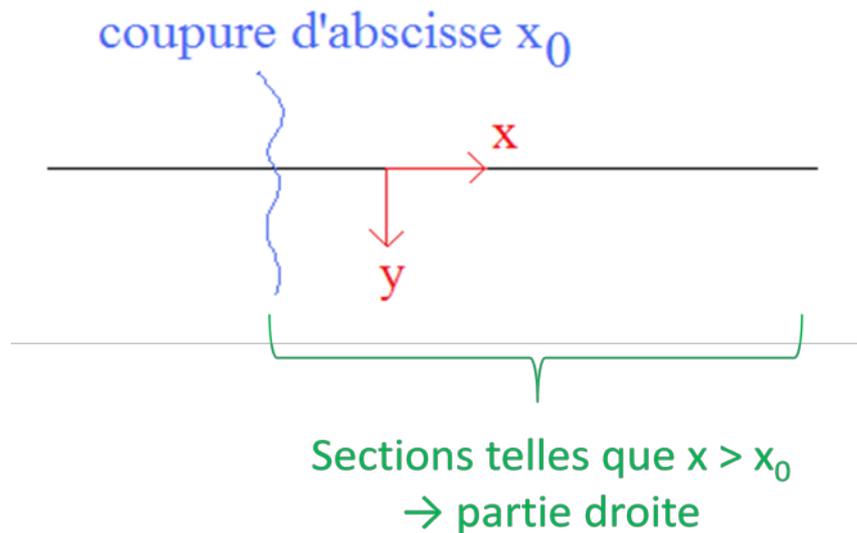
il faut être vigilant sur le sens du vecteur  $x$  du repère local, car s'il est orienté vers la gauche, la partie gauche peut être géographiquement... à droite comme l'illustre l'exemple suivant :



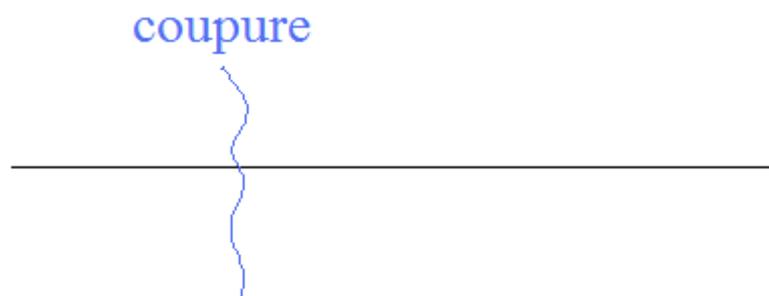
### Définition de la partie droite

La partie droite d'une coupure est constituée des sections d'abscisses supérieures à l'abscisse de la coupure.

Exemple :



Les notions de partie droite ou de partie gauche n'ont donc de sens que s'il existe un repère local pour déterminer les abscisses. Dans le cas contraire, il n'est pas possible de déterminer les parties droite et gauche comme l'illustre l'exemple suivant :



Si le repère local n'est pas indiqué, le sens géographique est pris par défaut (gauche à gauche et droite à droite).

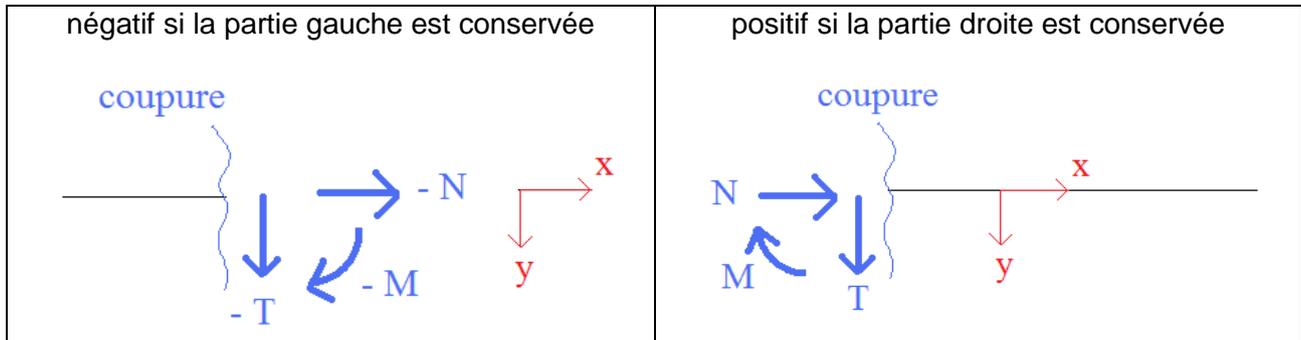
A noter que ne pas préciser le repère local est une très mauvaise pratique... car cela peut amener à des erreurs de calculs ou d'interprétations (exemple : pour un élément vertical, il est impossible de déterminer la droite et la gauche).

### 6.4.2 Dessiner les torseurs en fonction du choix de conserver la partie droite ou la partie gauche

Il existe 2 méthodes.

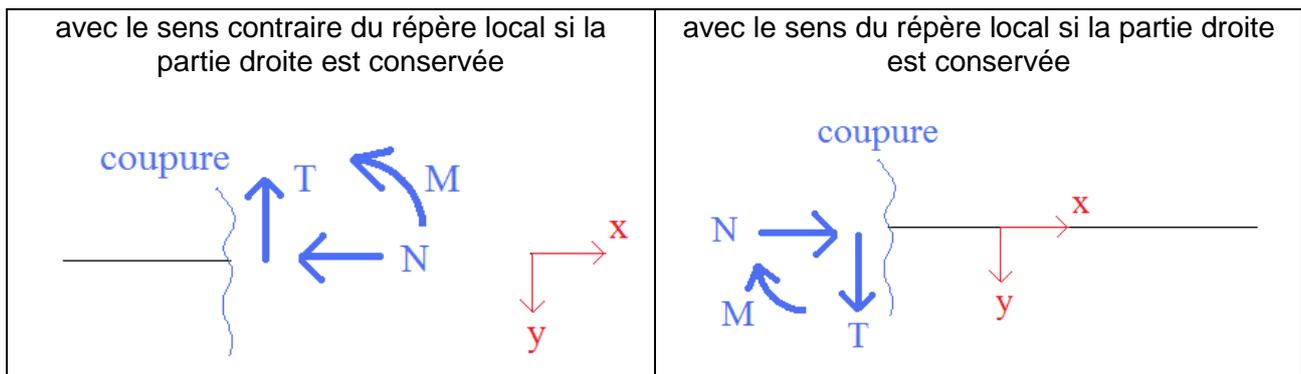
#### 6.4.2.1 Méthode 1

Il convient de dessiner les vecteurs avec le même sens que le repère local puis d'écrire le torseur N, T (ou V) et M avec un signe :



#### 6.4.2.2 Méthode 2

Il convient de dessiner les vecteurs du torseur N, T (ou V) :



#### 6.4.2.3 Choix pour la suite du cours

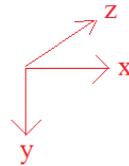
Les deux méthodes sont équivalentes et obtiennent les mêmes résultats.

Pour la suite, la méthode 1 est retenue car elle est facile à mémoriser :

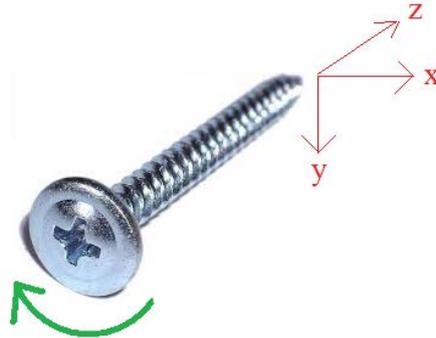


Pour la direction de la flèche courbe représentant le moment, il faut se souvenir de la règle du tire-bouchon ou de la vis.

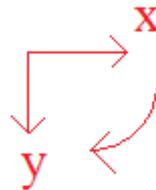
Le repère local est :



Ainsi, pour enfoncer une vis dans le sens de z, il convient de visser dans le sens :



Ainsi, le sens de la flèche courbe représentant le moment est :



Une autre manière de décrire est : la flèche courbe « *part* » du vecteur x en direction du vecteur y.

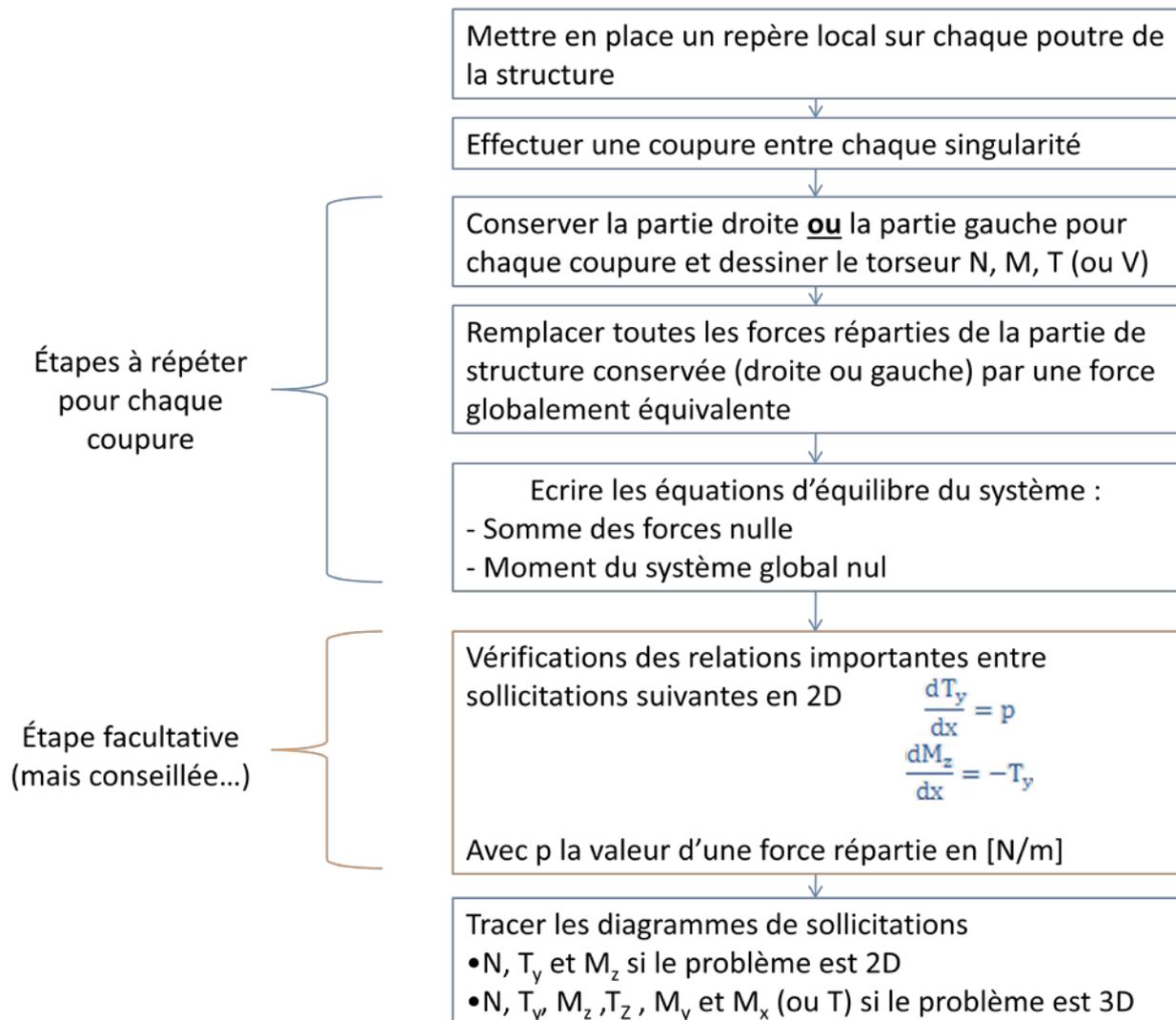
Il est facile de retenir ce sens puisque  $x \rightarrow y$  correspond au sens... alphabétique.



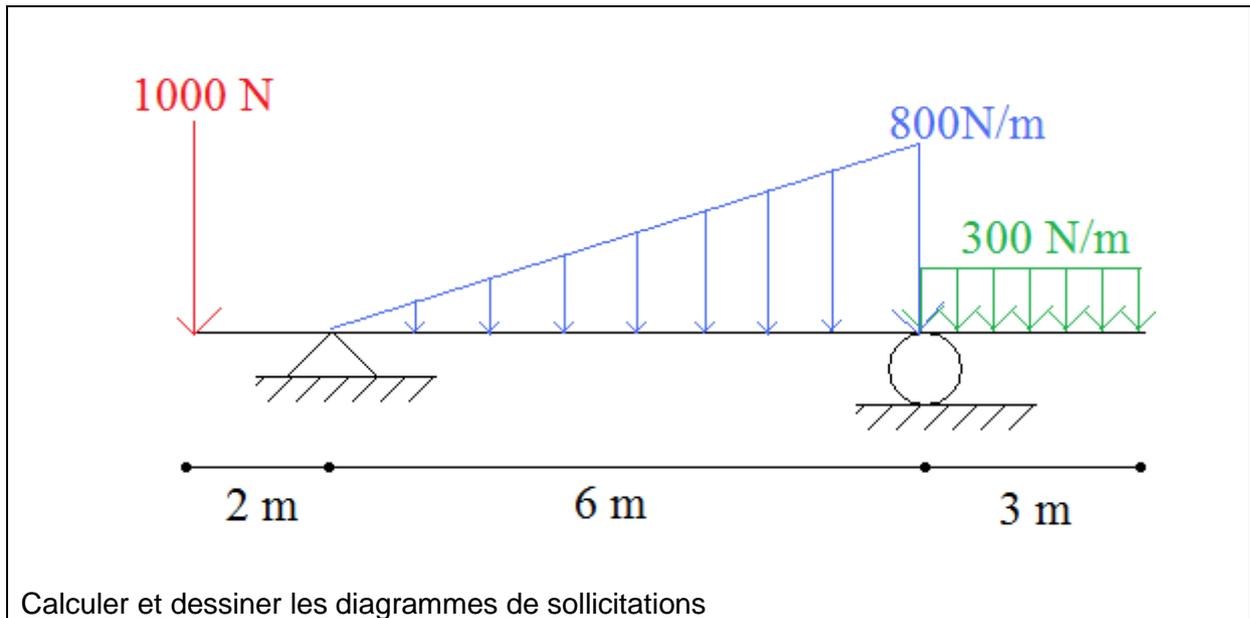
### 6.4.3 Logigramme

Travail préalable : déterminer les réactions d'appuis.

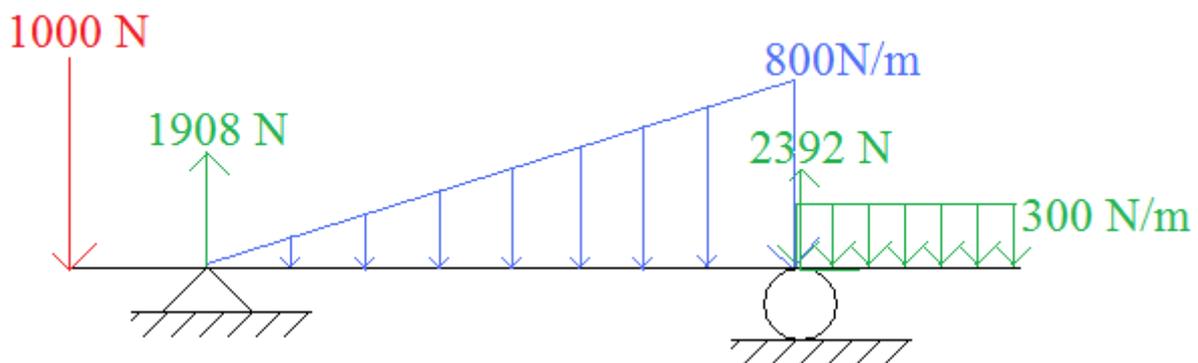
Remarque : cette étape peut être évitée uniquement dans le cas où le diagramme de sollicitation est souhaité pour une barre d'extrémité libre puisqu'il suffit de conserver après coupure la partie de structure ne comprenant pas d'appuis.



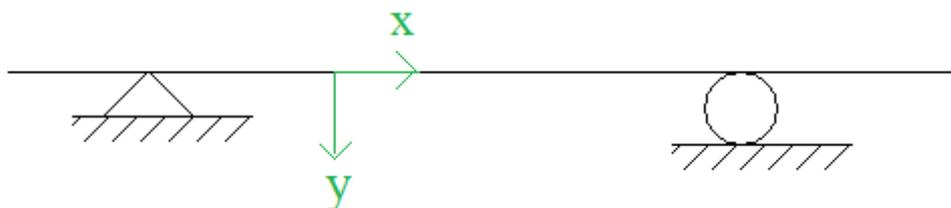
### 6.4.4 Exemple



Le travail préalable, qui consiste à déterminer les réactions d'appuis, a été effectué à l'exemple du chapitre précédent et n'est pas rappelé *ici* :



**Mettre en place un repère local sur chaque poutre de la structure**



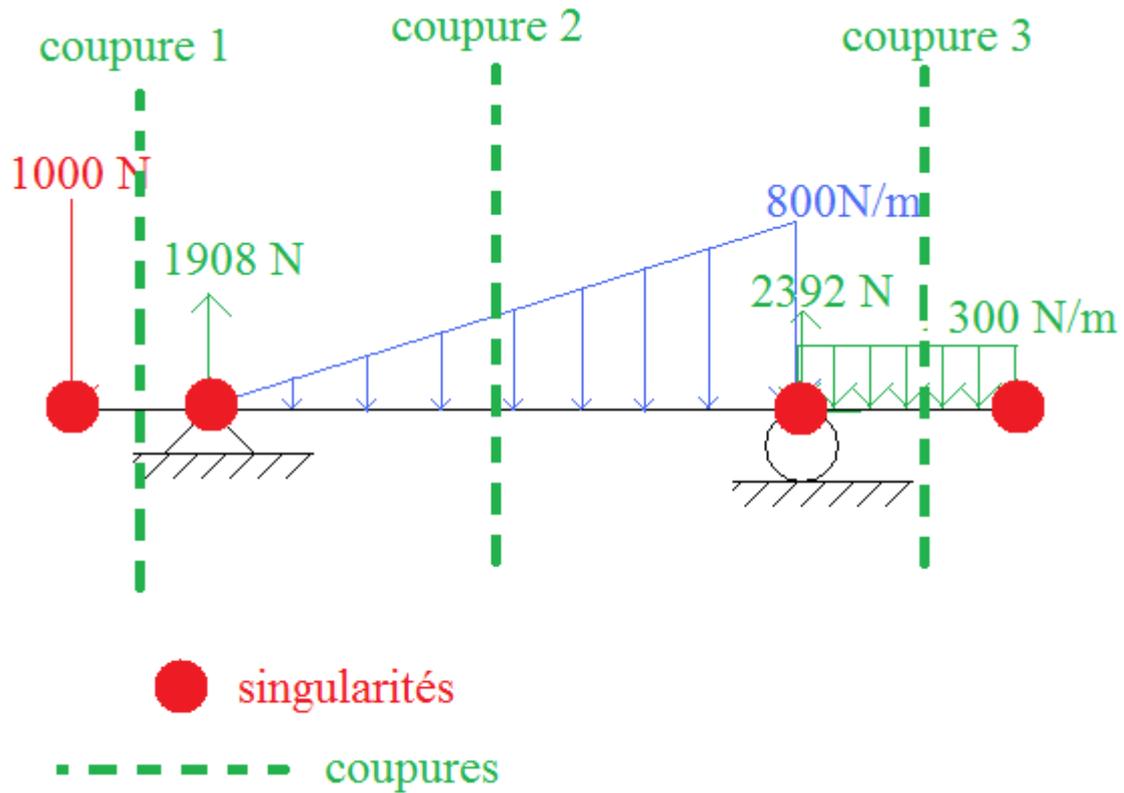
Remarques : le repère local n'est pas pris identique au repère global. Avec les conventions de signe utilisées, il est préférable de diriger  $\vec{y}$  vers le bas.

De plus contrairement au repère global où des lettres MAJUSCULES sont utilisées, pour le repère local, les lettres minuscules sont privilégiées.

### Effectuer une coupure entre chaque singularité

La définition de singularité est donnée dans le chapitre précédent (§4.3.1 page 38).

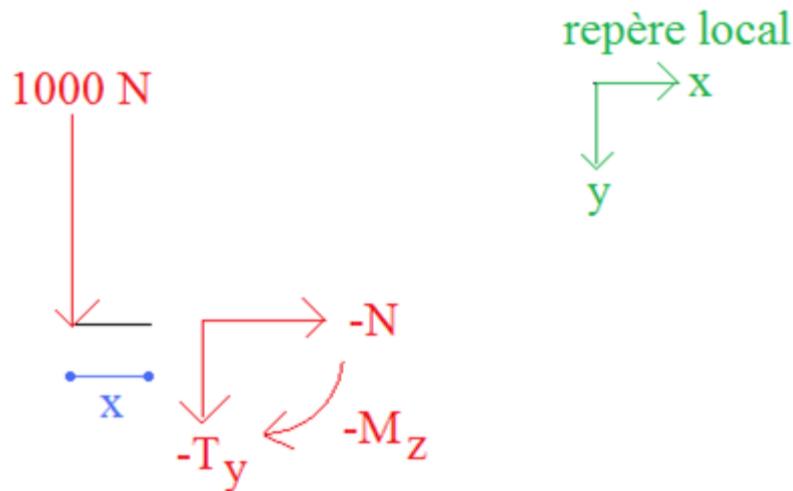
3 coupures sont ainsi à réaliser.



Coupure 1 (tronçon à gauche de l'appui simple)

**Conserver la partie droite ou la partie gauche et dessiner le torseur**

La partie gauche est conservée. La section considérée se situe à « x mètres » de l'extrémité gauche :



**Remplacer toutes les forces réparties de la partie de structure conservée par une force ponctuelle globalement équivalente**

Etape inutile puisqu'il n'y a pas de force répartie

**Ecrire les équations d'équilibre du système**

Somme des forces horizontales nulle :

$$-N = 0 \Leftrightarrow N = 0$$

Somme des forces verticale nulle :

$$1000 - T_y = 0 \Leftrightarrow T_y = 1000$$

Moment au niveau de la coupure nul :

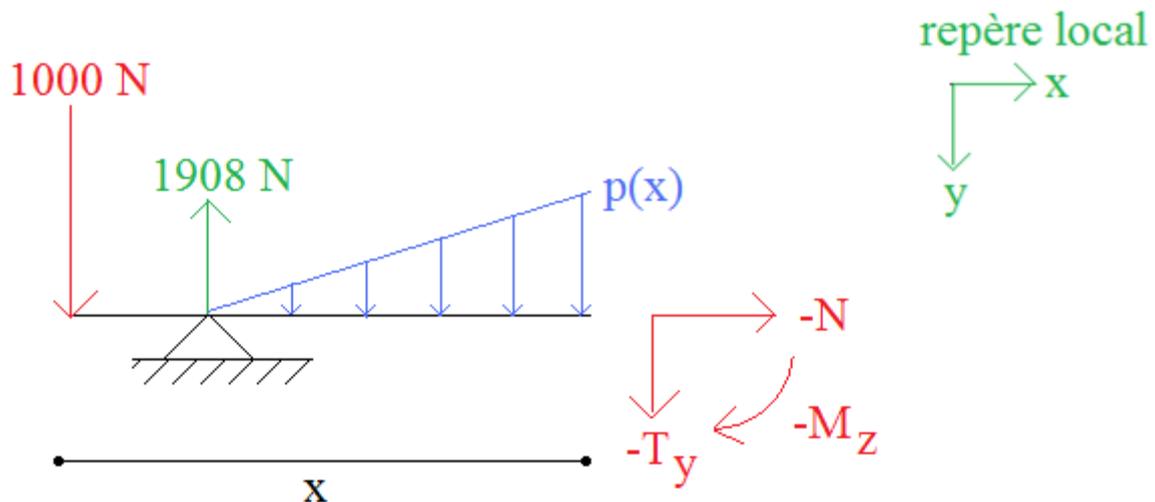
$$-1000 \cdot x - M_z = 0 \Leftrightarrow M_z = -1000 \cdot x$$

Remarque : pour la coupure 1, il est à noter que les réactions d'appuis étaient inutiles à connaître.

Coupure 2 (tronçon entre les appuis simple et rotule)

Conserver la partie droite ou la partie gauche et dessiner le torseur

La partie gauche est conservée. La section considérée se situe à « x mètres » de l'extrémité gauche :



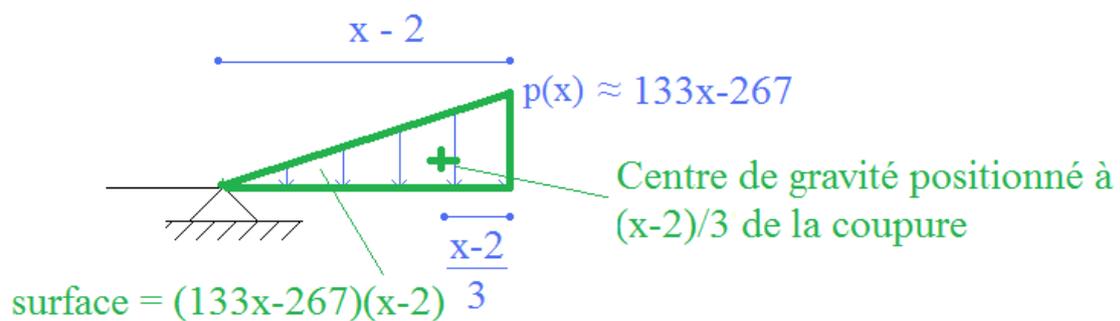
Remplacer toutes les forces réparties de la partie de structure conservée par une force ponctuelle globalement équivalente

Pour déterminer la force répartie équivalente, il convient de connaître  $p(x)$ .

$p(x)$  est une fonction affine de la forme  $a \cdot x + b$

$$\text{avec : } \begin{cases} p(x = 2 \text{ m}) = 0 \\ p(x = 8 \text{ m}) = 800 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 0 \\ 8a + b = 800 \end{cases} \Leftrightarrow p(x) \approx 133x - 267$$

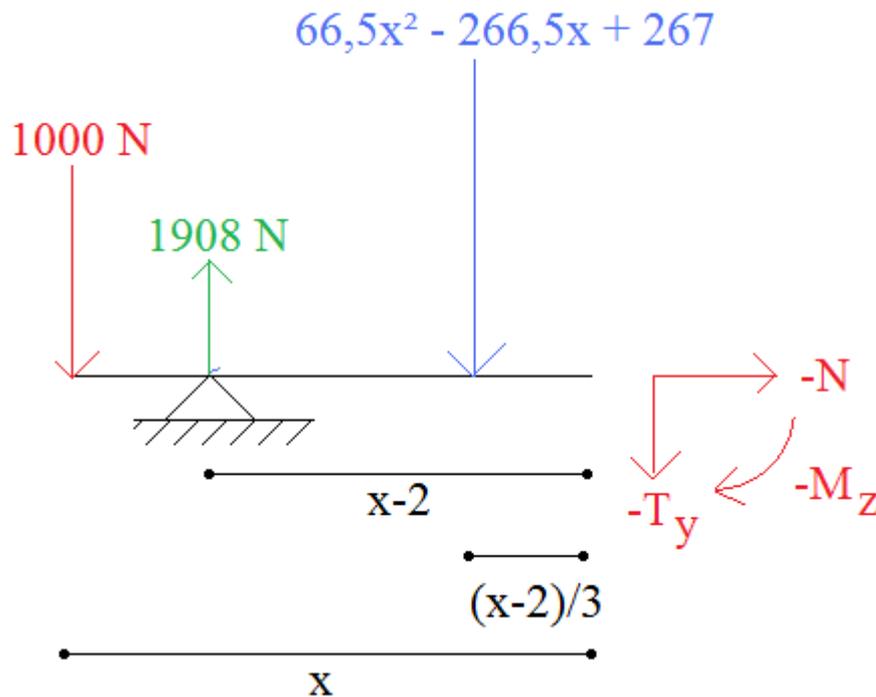
En isolant la force répartie triangulaire :



La charge triangulaire est répartie sur une longueur de  $(x-2)$  mètres donc la force équivalente vaut :

$$(133x - 267) \cdot \frac{x - 2}{2} = 66,5 \cdot x^2 - 265,5 \cdot x + 267$$

La position de la force ponctuelle globalement équivalente se situe au niveau du centre de gravité du triangle, donc à  $\frac{2}{3} \cdot (x - 2)$  à droite de l'appui simple (ou à  $\frac{1}{3} \cdot (x - 2)$  à gauche de la coupure)



**Ecrire les équations d'équilibre du système**

Somme des forces horizontales nulle :

$$-N = 0 \Leftrightarrow N = 0$$

Somme des forces verticale nulle :

$$1000 - 1908 + 66,5 \cdot x^2 - 265,5 \cdot x + 267 - T_y = 0 \Leftrightarrow T_y = 66,5 \cdot x^2 - 265,5 \cdot x - 641$$

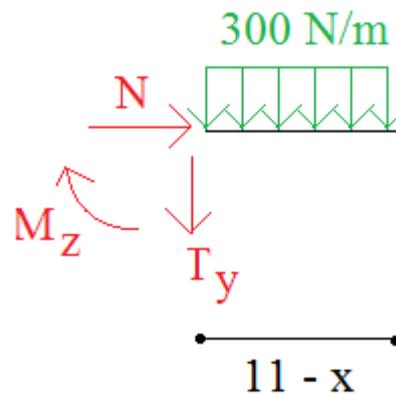
Moment au niveau de la coupure nul :

$$\begin{aligned} -1000 \cdot x + 1908 \cdot (x - 2) - (66,5 \cdot x^2 - 265,5 \cdot x + 267) \cdot \frac{x - 2}{3} - M_z &= 0 \\ \Leftrightarrow M_z &\approx -22,2 \cdot x^3 + 132,8 \cdot x^2 + 642 \cdot x - 3638 \end{aligned}$$

Coupure 3 (tronçon à droite de l'appui rotule)

**Conserver la partie droite ou la partie gauche et dessiner le torseur**

La partie droite est conservée. La section considérée se situe à « x mètres » de l'extrémité gauche. C'est-à-dire à « 11 - x mètres » de l'extrémité droite :

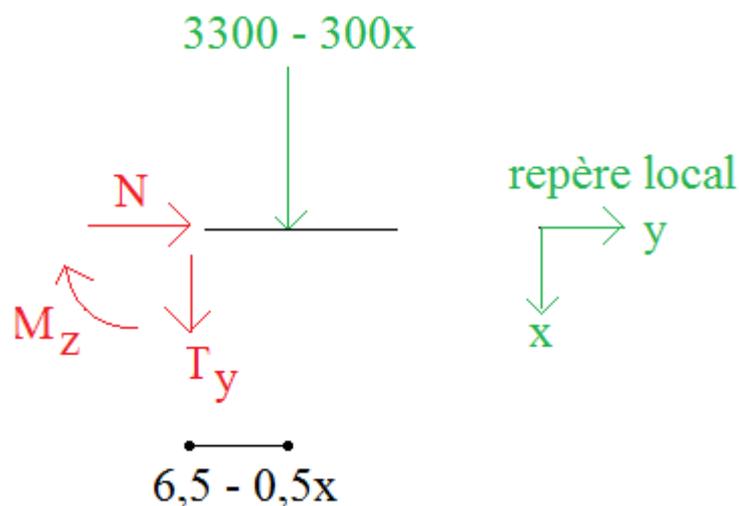


**Remplacer toutes les forces réparties de la partie de structure conservée par une force ponctuelle globalement équivalente**

La charge rectangulaire est répartie sur une longueur de  $(11-x)$  m donc la force équivalente vaut :

$$300 \cdot (11 - x) = 3300 - 300 \cdot x$$

La position de la force ponctuelle globalement équivalente se situe au niveau du centre de gravité du rectangle, donc à  $\frac{11-x}{2} = 5,5 - 0,5 \cdot x$  à droite de la coupure.



**Ecrire les équations d'équilibre du système**

Somme des forces horizontales nulle :

$$N = 0$$

Somme des forces verticale nulle :

$$3300 - 300x + T_y = 0 \Leftrightarrow T_y = 300x - 3300$$

Moment au niveau de la coupure nul :

$$(3300 - 300x) \times (5,5 - 0,5x) + M_z = 0 \Leftrightarrow M_z = -150x^2 + 3300x - 18150$$

Remarque : pour la coupure 3, il est à noter que les réactions d'appuis étaient inutiles à connaître.

### Vérification

Cette étape est facultative mais est conseillée.

Tronçon 1 :

$$T_y = 1000$$

$$M_z = -1000 \cdot x$$

$$\frac{dM_z}{dx} = -T_y \text{ est vérifié.}$$

Tronçon 2 :

$$T_y = 66,5x^2 - 265,5x - 641$$

$$\Leftrightarrow M_z \approx -22,2x^3 + 132,8x^2 + 642x - 3638$$

$$\frac{dM_z}{dx} = -T_y \text{ est vérifié.}$$

Tronçon 3 :

$$T_y = 300x - 3300$$

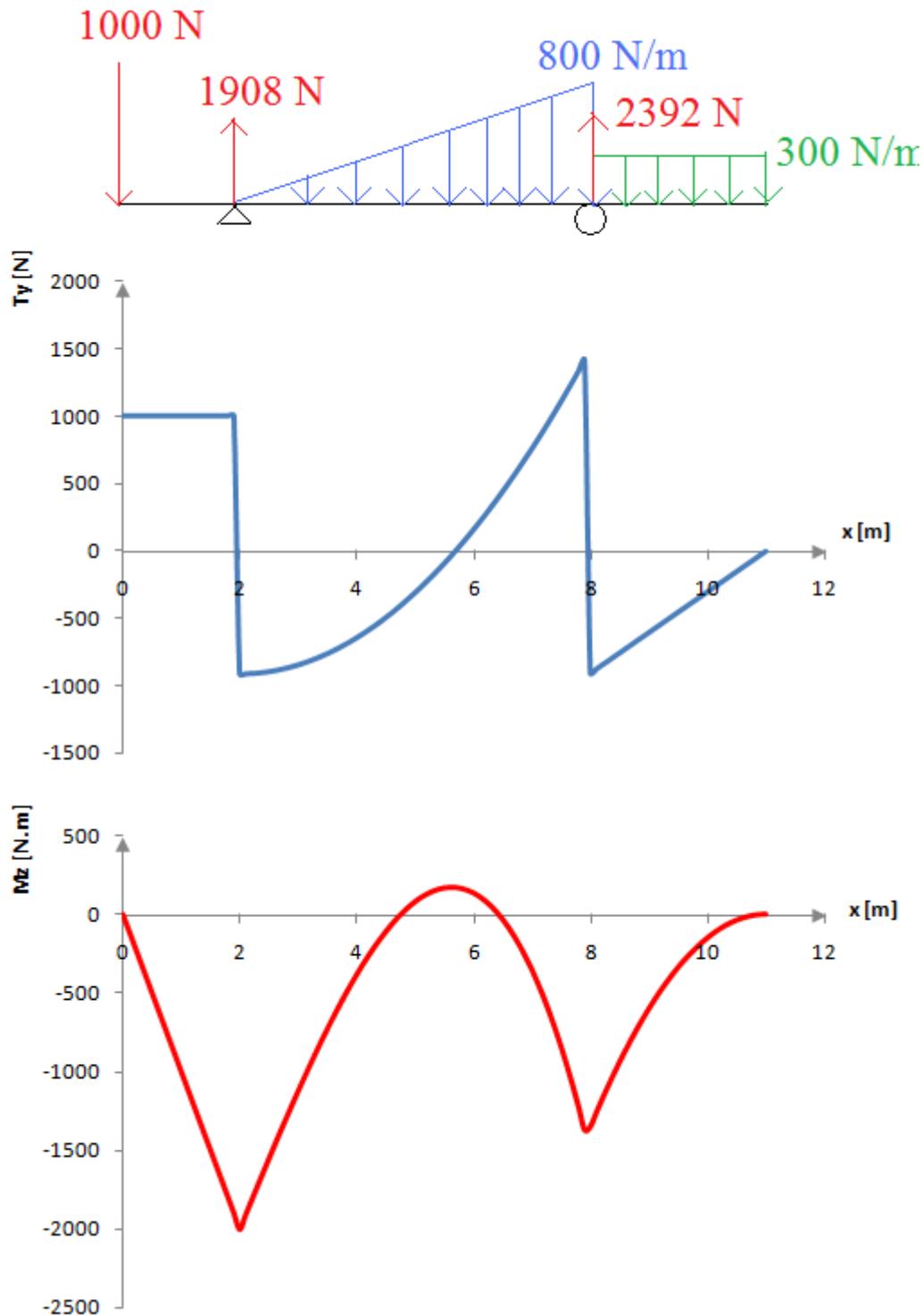
$$M_z = -150x^2 + 3300x - 18150$$

$$\frac{dM_z}{dx} = -T_y \text{ est vérifié.}$$

$$\frac{dT_y}{dx} = p = 300N/m \text{ est vérifié.}$$

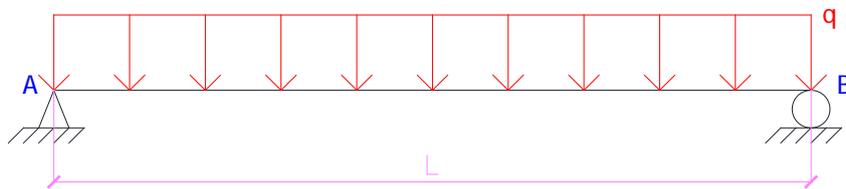
### Tracer les diagrammes de sollicitations

L'effort normal est nul en tout point. Il est donc inutile de tracer ce diagramme.



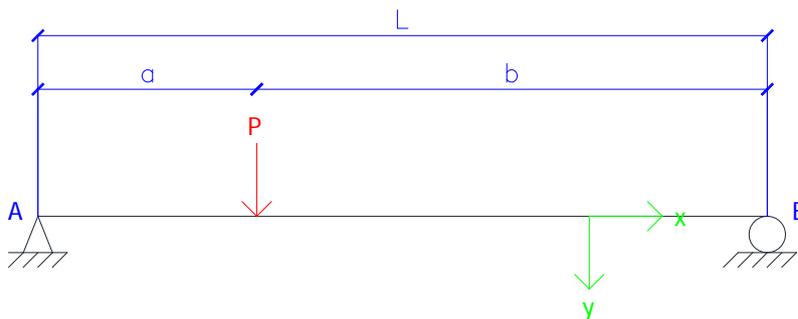
## 6.5 Exercices

### Exercice [ 16 ]



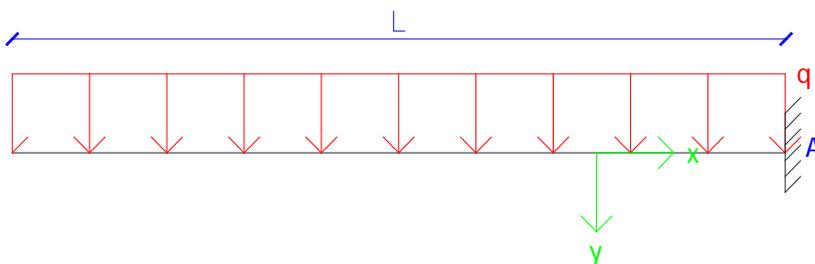
Donner les diagrammes des sollicitations.

### Exercice [ 17 ]



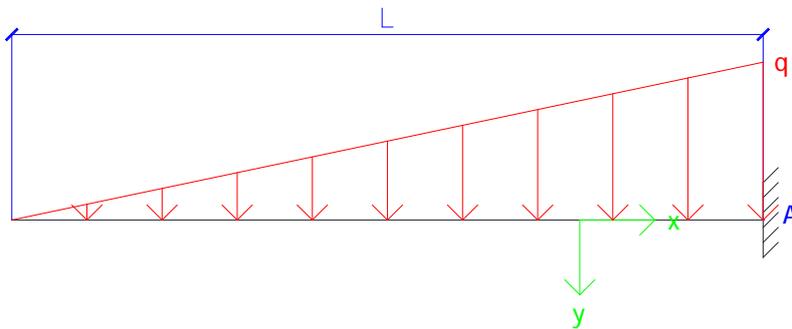
Donner les diagrammes des sollicitations.

### Exercice [ 18 ]



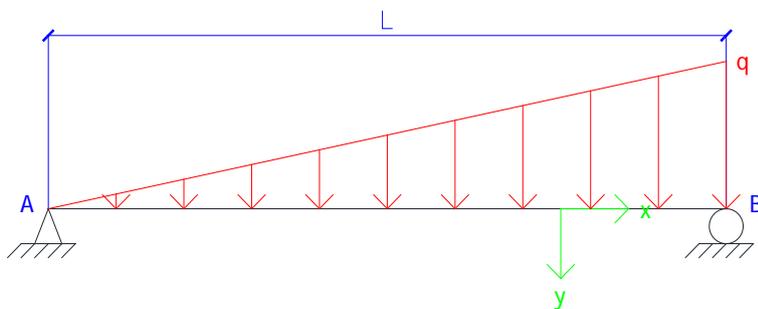
Donner les diagrammes des sollicitations.

Exercice [ 19 ]



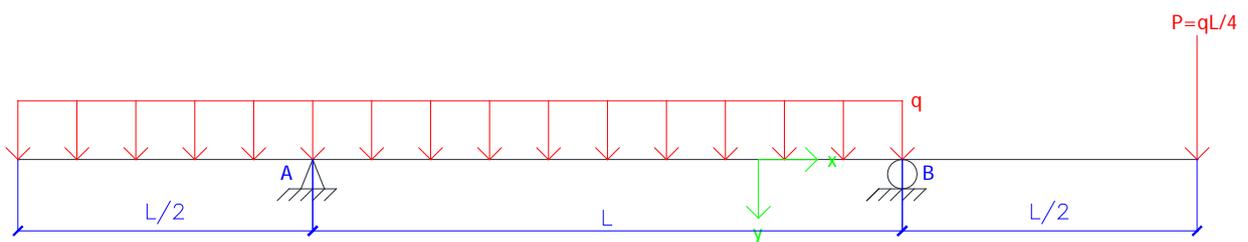
Donner les diagrammes des sollicitations.

Exercice [ 20 ]



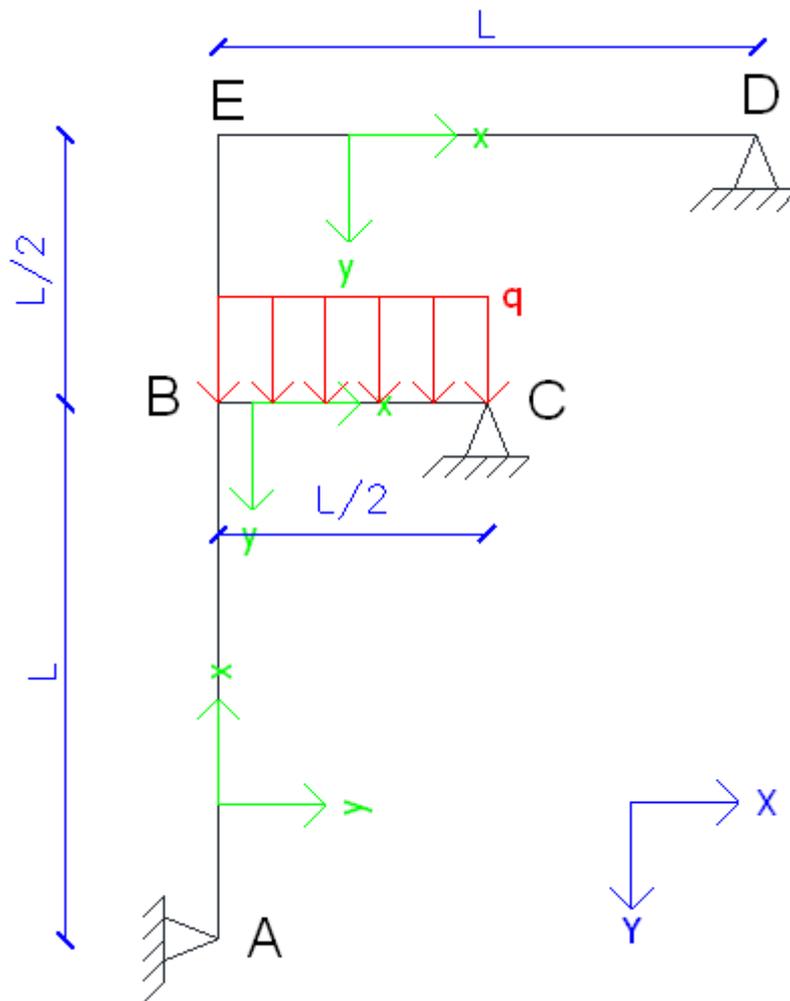
Donner les diagrammes des sollicitations.

Exercice [ 21 ]



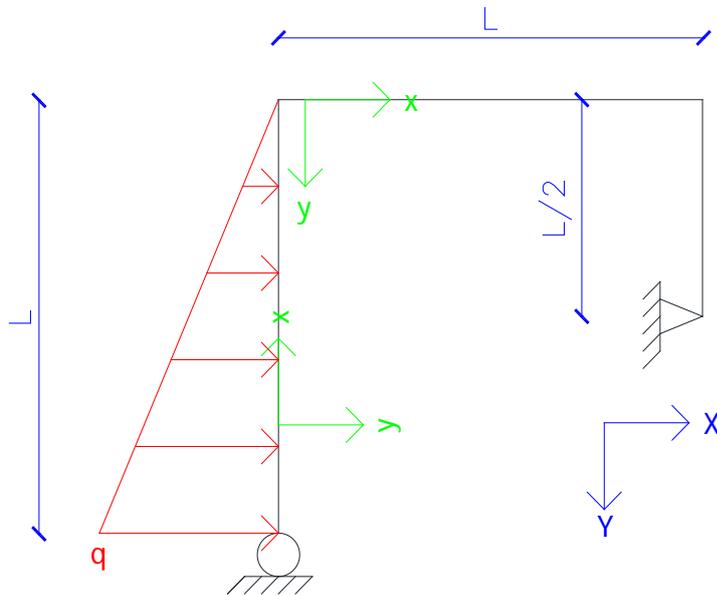
Donner les diagrammes des sollicitations.

Exercice [ 22 ]



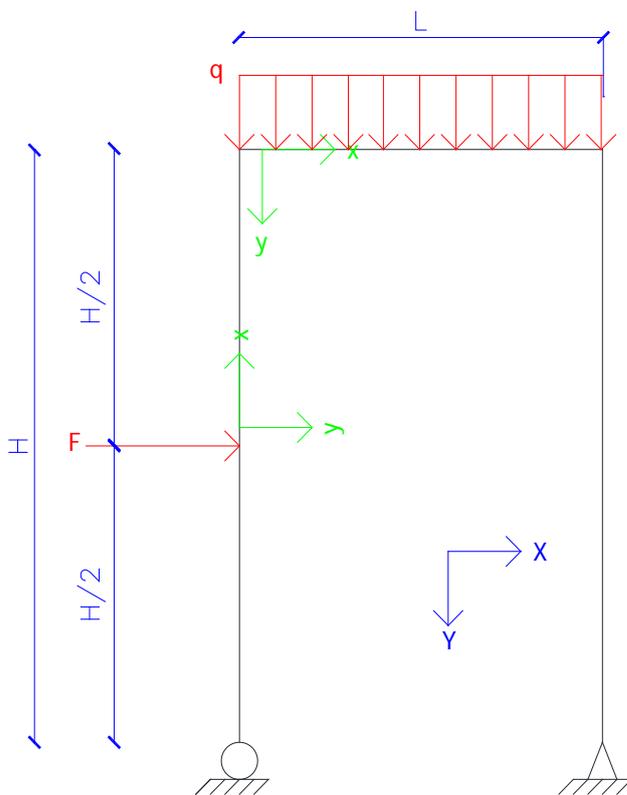
Donner les diagrammes des sollicitations.

Exercice [ 23 ]



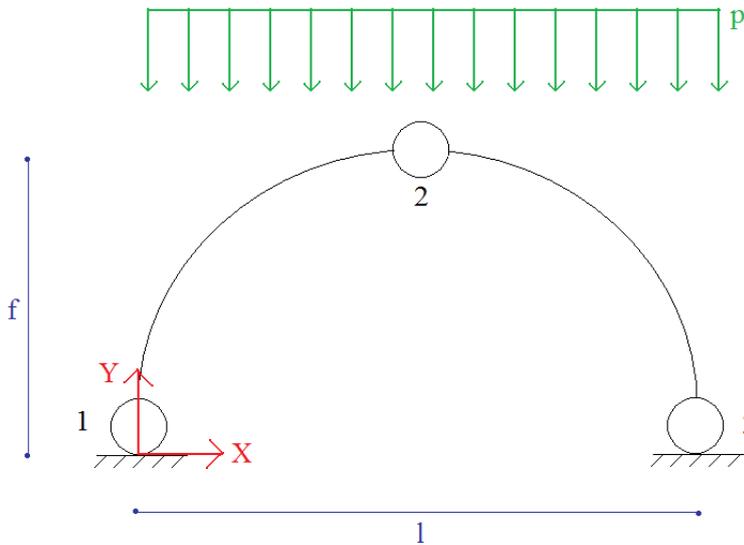
Donner les diagrammes des sollicitations.

Exercice [ 24 ]



Donner les diagrammes des sollicitations.

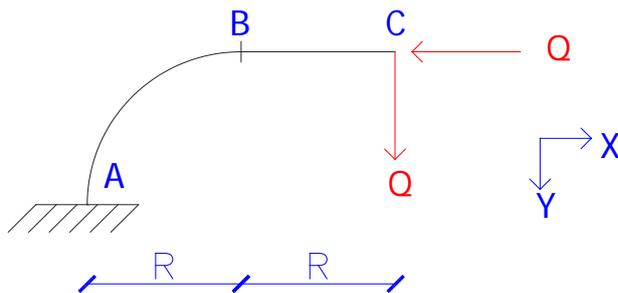
Exercice [ 25 ]



On considère un arc parabolique à 3 articulations de portée  $l$  et de hauteur  $f$ , soumis à une charge répartie  $p$  :

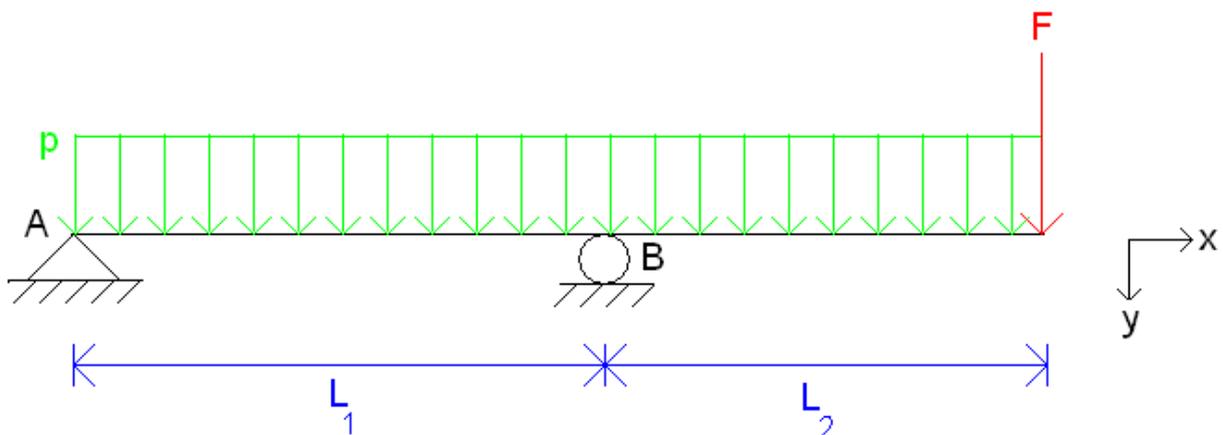
- Déterminer les actions de liaison
- Donner les sollicitations dans une section quelconque

Exercice [ 26 ]



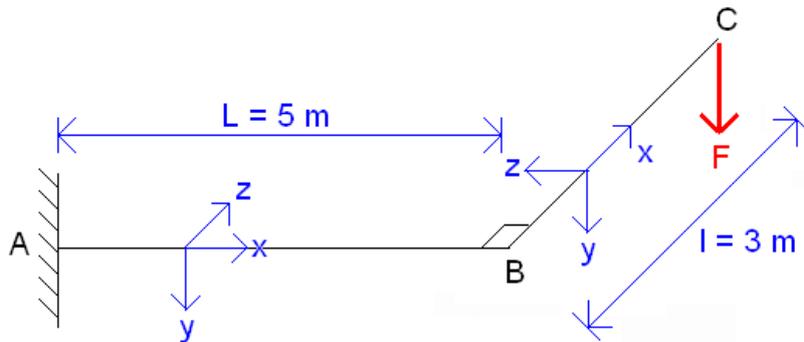
Déterminer le torseur en tout point.

Exercice [ 27 ]



- 1) Déterminer les réactions d'appuis en A et B.
- 2) A partir de quelle valeur de  $F$  la poutre bascule ?
- 3) Tracer les diagrammes pour les valeurs numériques suivantes :
  - $L_1 = 2$  m
  - $L_2 = 1$  m
  - $p = 150$  N/m
  - $F = 200$  N

Exercice [ 28 ]



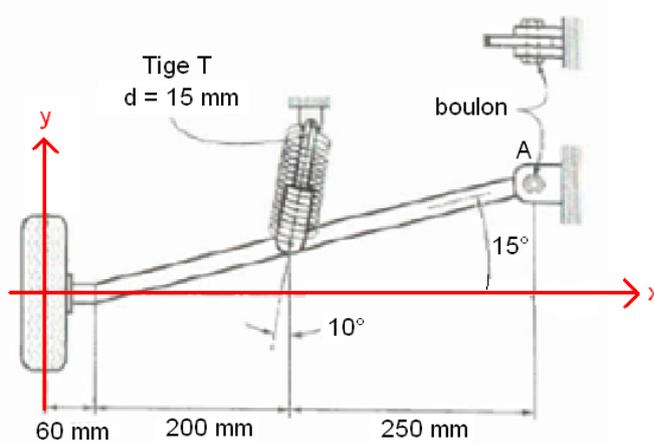
A, B et C sont dans le même plan horizontal  $(A, \vec{x}, \vec{z})$ .

$(AB)$  et  $(BC)$  sont perpendiculaires.

Calculer le torseur en tout point

Donner  $M_{zmax}$ ,  $M_{zmin}$ ,  $N_{max}$ ,  $|V_y|_{max}$  et  $|M_x|_{max}$  en fonction de F.

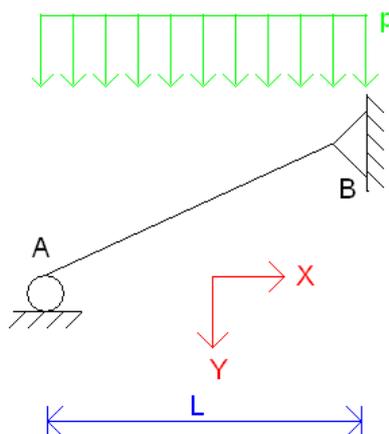
Exercice [ 29 ]



La figure correspond à la roue avant d'une voiture de 1400 kg. Cette masse est supposée également répartie entre les 4 roues. En considérant un coefficient d'impact de 2, c'est-à-dire que les forces statiques sont multipliées par 2 pour tenir compte de l'effet dynamique du chargement, calculer :

- La contrainte normale maximale agissant dans la tige T de l'amortisseur dans le cas où le ressort est brisé (seule la tige T peut s'appuyer le choc)
- Le diamètre du boulon A de manière à ce que la contrainte de cisaillement n'excède pas 52 MPa.

Exercice [ 30 ]

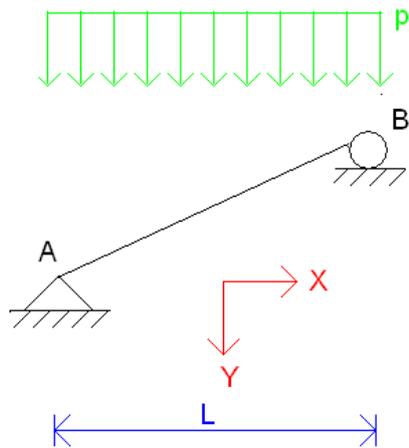


L'angle AB avec l'horizontale est égal à  $30^\circ$ .

Déterminer les réactions d'appuis.

Calculer les torseurs en tout point.

Exercice [ 31 ]



L'angle AB avec l'horizontale est égal à  $30^\circ$ .

Déterminer les réactions d'appuis.

Calculer les torseurs en tout point.

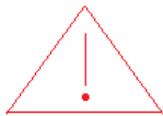
## 7. Tracé direct des diagrammes de sollicitations

### 7.1 Relations à connaître

Dans le cas de poutres droites et dans des problèmes plans.

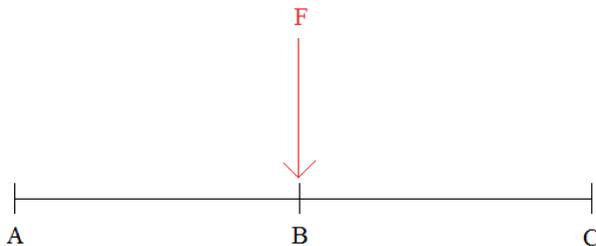
$$\begin{cases} \frac{dV}{dx} = p \\ \frac{dM}{dx} = -V \end{cases}$$

$$M(x_2) = M(x_1) - \int_{x_1}^{x_2} V(x) dx$$

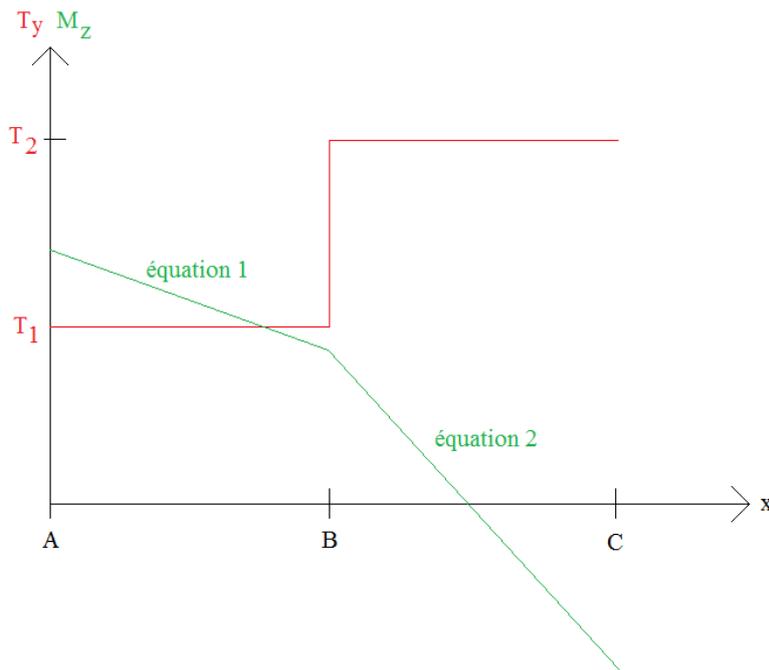


ces relations sont valables pour des poutres droites. Pour des poutres courbes, ces relations ne sont plus correctes car il serait nécessaire d'utiliser d'autres types de repérage (par exemple : coordonnées polaires pour une poutre de fibre moyenne circulaire).

### 7.2 Effet d'une force ponctuelle (selon la direction y)



Les diagrammes d'effort tranchant et de moment fléchissant sont :



Points remarquables au niveau du point B :

Saut d'effort tranchant égal à  $F$ , c'est-à-dire que :  $T_2 - T_1 = F$

L'équation 1 est de la forme :

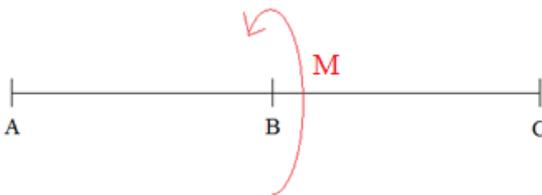
$$M_z(x) = -T_1 \times x + a$$

L'équation 2 est de la forme :

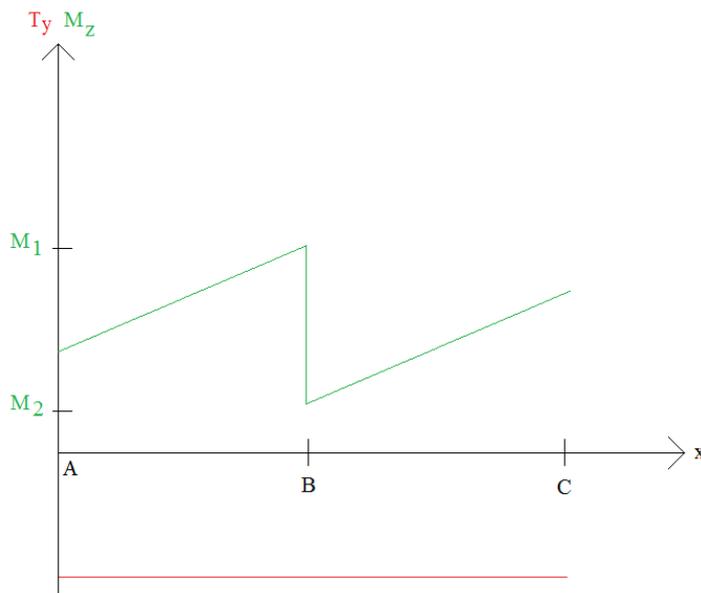
$$M_z(x) = -T_2 \times x + b$$

La différence de pente entre la partie 1 et la partie 2 est :  $T_1 - T_2 = -F$

### 7.3 Effet d'un moment ponctuel autour de z



Les diagrammes d'effort tranchant et de moment fléchissant sont :



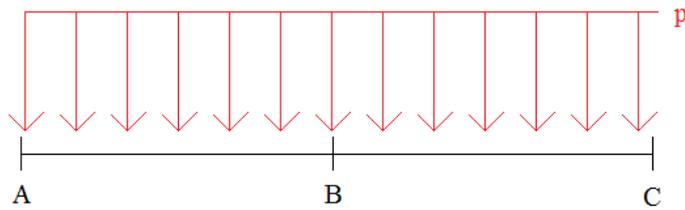
Points remarquables au niveau du point B :

Aucun effet sur l'effort tranchant

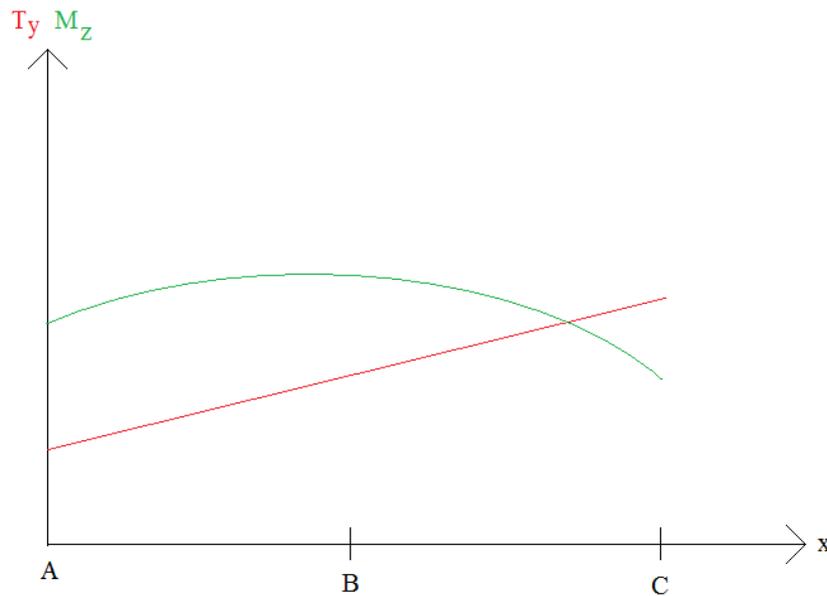
Aucun effet sur la pente à droite ou à gauche du diagramme du moment fléchissant

Saut de moment fléchissant égal à  $-M$ , c'est-à-dire que :  $M_2 - M_1 = -M$

## 7.5 Effet d'une charge répartie (selon la direction y)



Les diagrammes d'effort tranchant et de moment fléchissant sont :



### Points remarquables

La pente du diagramme de l'effort tranchant est égale à  $p$ , c'est-à-dire que son équation est de la forme :

$$T_y(x) = p \times x + a$$

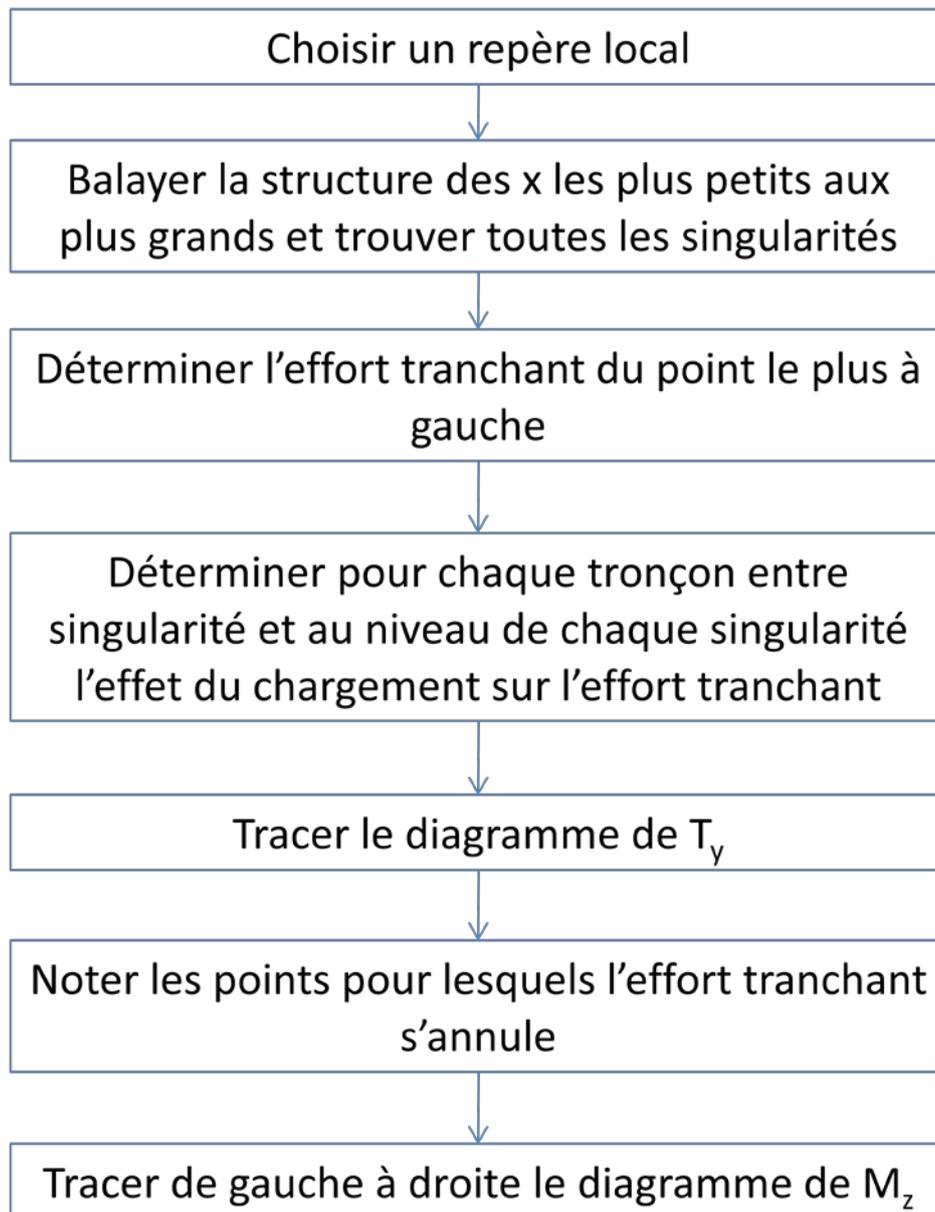
Le diagramme du moment fléchissant est une parabole de la forme :

$$M_z(x) = -\frac{p \times x^2}{2} - a \times x + b$$

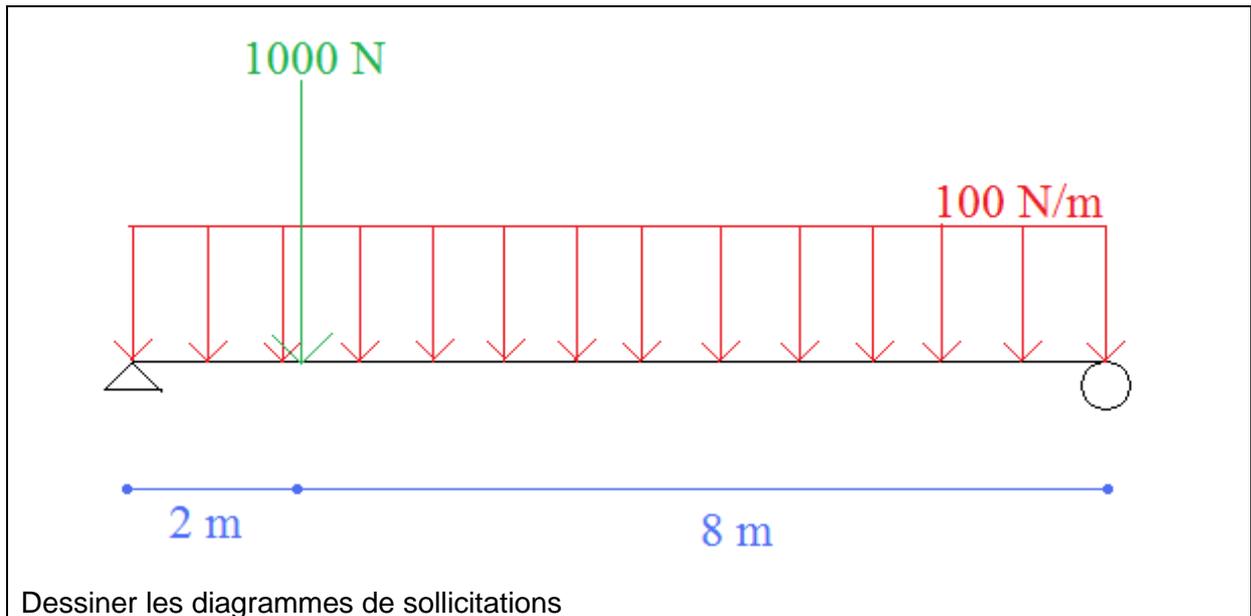
## 7.6 Méthode

### 7.6.1 Logigramme

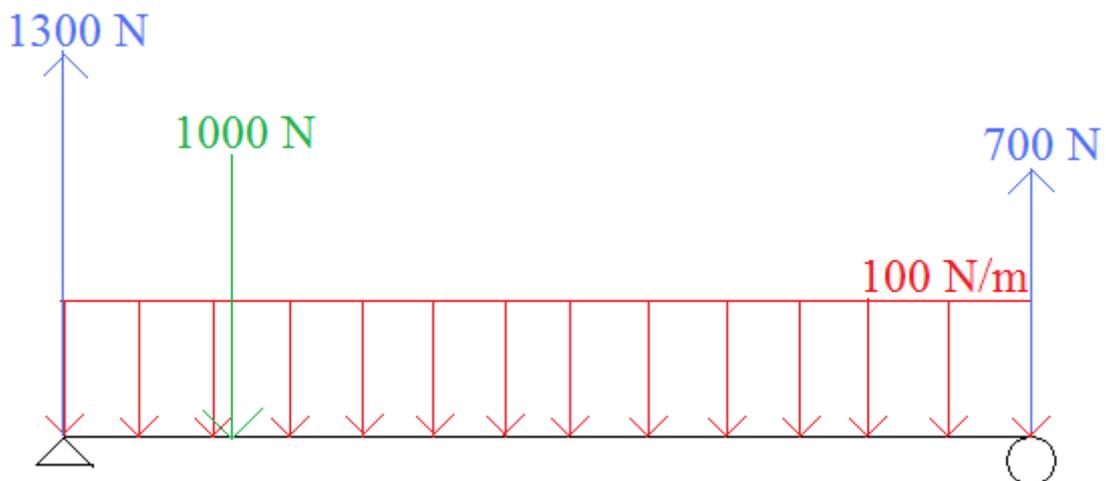
Travail préalable : déterminer les réactions d'appuis.



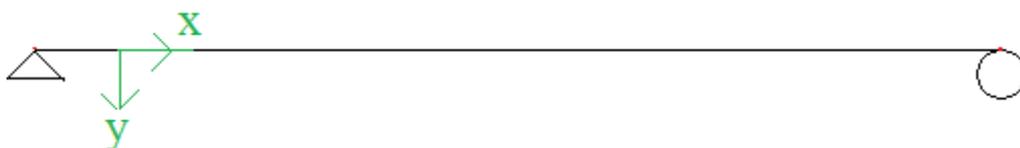
### 7.6.2 Exemple



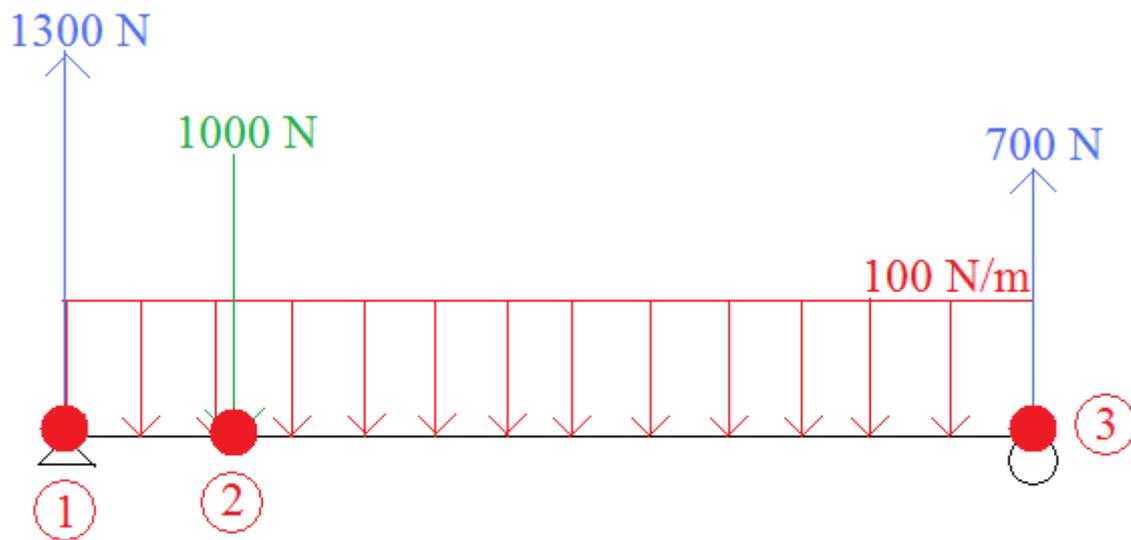
Le travail préalable, qui consiste à déterminer les réactions d'appuis (non l'objet de ce chapitre) donne le résultat suivant :



Choisir un repère local



**Balayer la structure des x les plus petits aux plus grands et trouver toutes les singularités**



● singularité

**Déterminer l'effort tranchant du point le plus à gauche**

En dehors de la structure, il est considéré (artificiellement) que l'effort tranchant est nul.

Ainsi, infiniment proche à droite du point le plus à gauche (qui correspond donc à la singularité 1), on a une force ponctuelle égale à -1300 N (le signe est fonction du repère local choisi). Donc l'effort tranchant subit un saut de -1300 N donc vaut  $0 - 1300 \text{ N} = -1300 \text{ N}$ .

**Déterminer pour chaque tronçon entre singularité et au niveau de chaque singularité l'effet du chargement sur l'effort tranchant**

Tronçon entre les singularités 1 et 2 :

Il existe un chargement réparti égal à 100 N/m donc l'effort tranchant est une droite de pente 100 N/m.

Infiniment proche à gauche de la singularité 2, l'effort tranchant vaut :

$$T_{y,2} = T_{y,1} + 100 \frac{\text{N}}{\text{m}} \times 2 \text{ m} = -1300 + 100 \times 2 = -1100 \text{ N}$$

Singularité 2 :

La singularité 2 correspond à une force ponctuelle égale à +1000 N (le signe est fonction du repère local choisi). Donc l'effort tranchant subit un saut de 1000 N donc vaut infiniment proche à droite de la singularité :

$$-1100 + 1000 = -100 \text{ N}$$

Tronçon entre les singularités 2 et 3 :

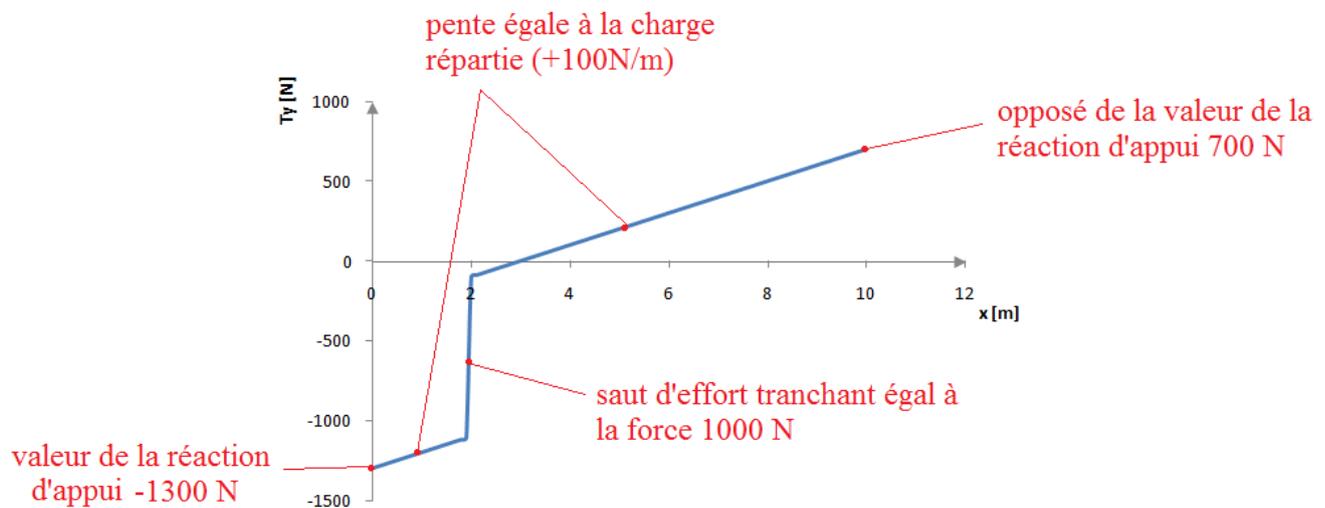
Il existe un chargement réparti égal à 100N/m donc l'effort tranchant est une droite de pente 100N/m.

Infiniment proche à gauche de la singularité 3, l'effort tranchant vaut :

$$T_{y,3} = T_{y,2} + 100 \frac{N}{m} \times 8 m = -100 + 100 \times 8 = 700 N$$

Remarque : la valeur de droite correspond en valeur absolue à la réaction d'appui à droite. Cela signifie que les résultats trouvés sont a priori corrects (sauf si plusieurs erreurs se compensent parfaitement dans l'enchaînement du calcul...).

### Tracer le diagramme de $T_y$



### Noter les points pour lesquels l'effort tranchant s'annule

L'effort tranchant s'annule pour  $x = 3 m$

### Tracer de gauche à droite le diagramme de $M_z$

#### Singularité 1

Au niveau de la singularité 1, le moment est nul (appui simple en extrémité de structure).

#### Tronçon entre les singularités 1 et 2

L'effort tranchant est représenté par une droite, donc le moment est représenté par une parabole.

$$M_2 = M_1 - \int_1^2 T$$

$\int_1^2 T$  est la surface de la courbe entre les singularités 1 et 2 et vaut donc :

$$\frac{-1300 - 1100}{2} \times 2 = -2400 N.m$$

Ainsi :

$$M_2 = 0 - (-2400) = 2400 \text{ N.m}$$

Singularité 2 :

La singularité 2 correspond à une force ponctuelle égale à +1000 N. Donc le moment fléchissant subit un saut de pente égal -1000 N/m

Point pour lequel l'effort tranchant s'annule :

Le moment possède une asymptote horizontale au niveau de ce point et vaut :

$$M_{x=3m} = M_{x=2m} - \int_{x=2m}^{x=3m} T$$

$\int_{x=2m}^{x=3m} T$  est la surface de la courbe entre les singularités les abscisses égales à 2m et 3m donc :

$$\frac{-100 + 0}{2} \times 1 = -50 \text{ N.m}$$

Ainsi :

$$M_{x=3m} = M_{x=2m} - \int_{x=2m}^{x=3m} T = 2400 - (-50) = 2450 \text{ N.m}$$

Tronçon entre les singularités 2 et 3 :

L'effort tranchant est représenté par une droite, donc le moment est représenté par une parabole.

$$M_3 = M_{x=3m} - \int_{x=3m}^3 T$$

$\int_{x=3m}^3 T$  est la surface de la courbe entre le point annulant l'effort tranchant et la singularité 3 et vaut donc :

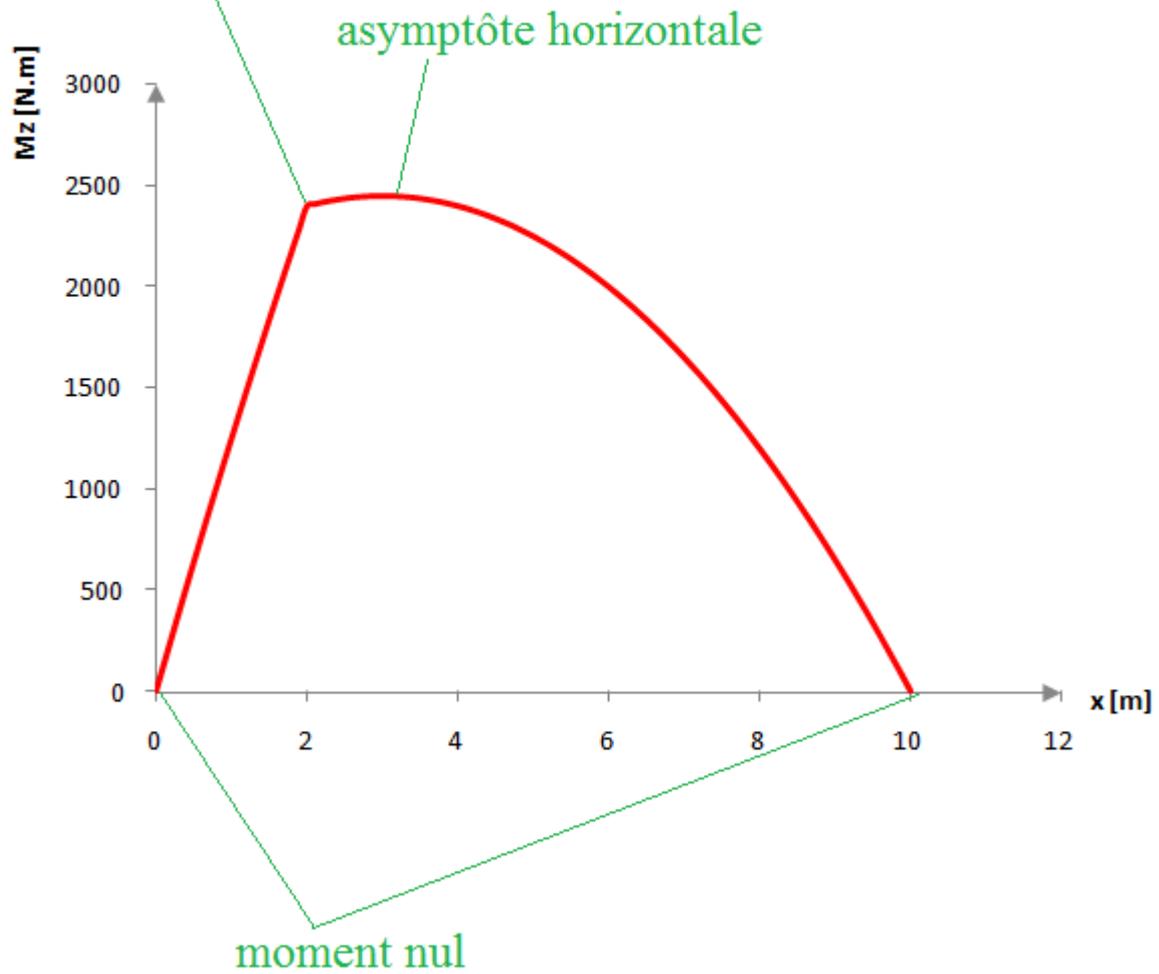
$$\frac{0 + 700}{2} \times 7 = 2450 \text{ N.m}$$

Ainsi :

$$M_3 = 2450 - 2450 = 0 \text{ N.m}$$

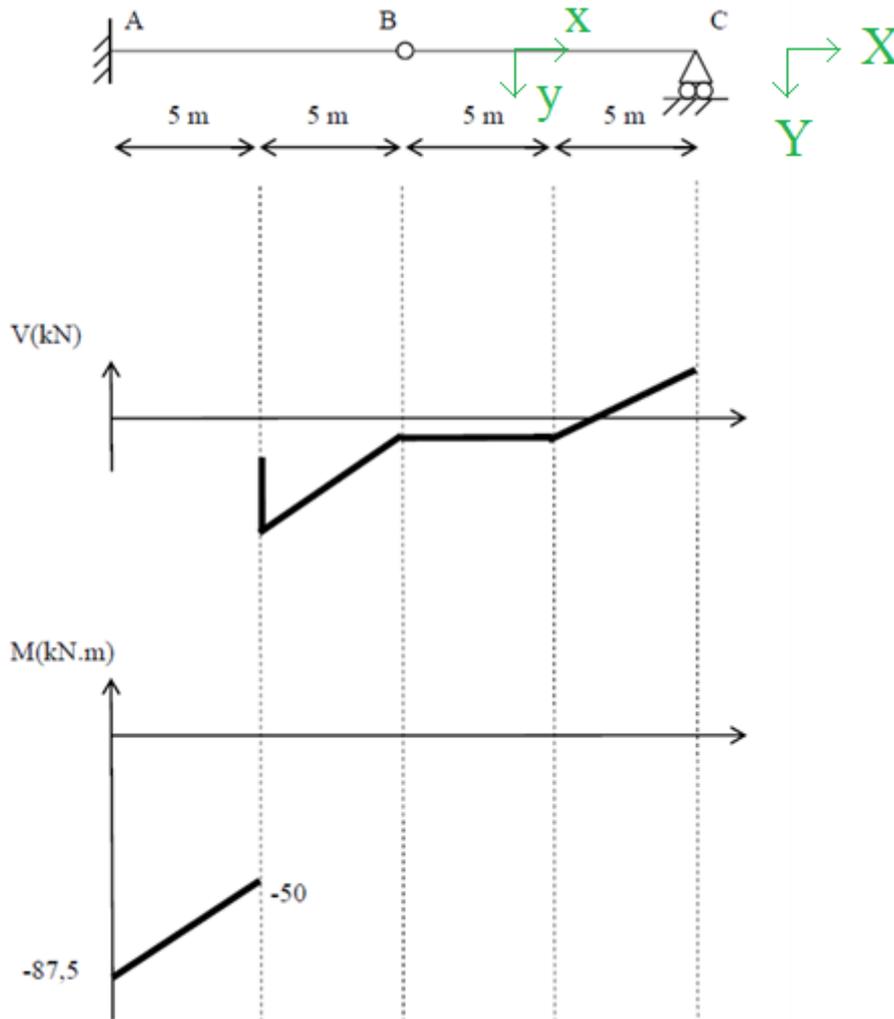
Remarque : la valeur de droite est nulle et correspond à la réaction d'appui à droite (car appui rotule en extrémité). Cela signifie que les résultats trouvés sont corrects (sauf si plusieurs erreurs se compensent parfaitement dans l'enchaînement du calcul...).

rupture de pente égale à  
-1000 N/m



## 7.7 Exercices

### Exercice [ 32 ]

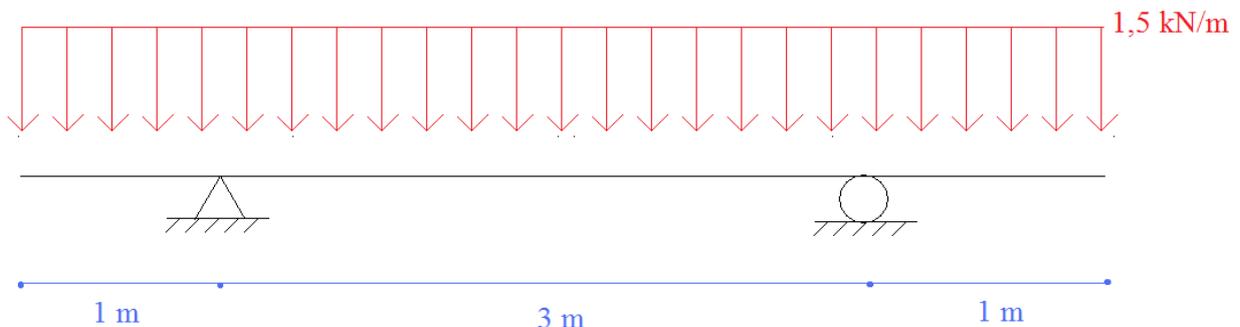


Retrouver le cas de charge correspondant aux courbes suivantes avec les indications suivantes :

- les actions de liaison en A et C ont la même composante verticale
- la poutre est soumise à des charges verticales uniformes et ponctuelles

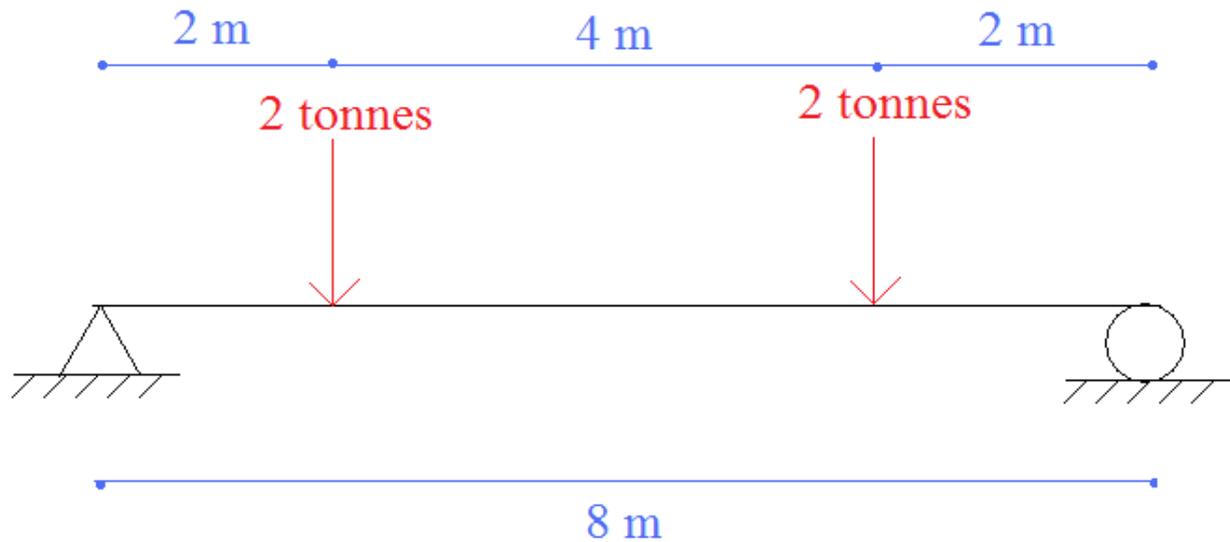
### Exercice [ 33 ]

Tracer, sans passer par la méthode des coupures, les diagrammes du problème suivant :



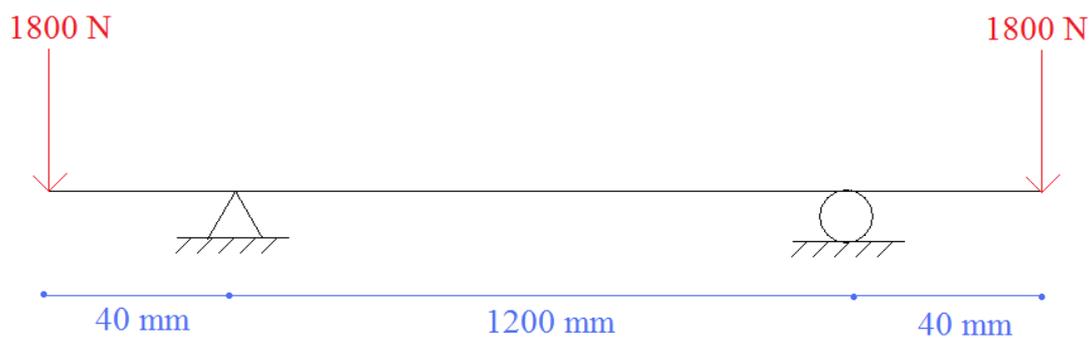
Exercice [ 34 ]

Tracer, sans passer par la méthode des coupures, les diagrammes du problème suivant :



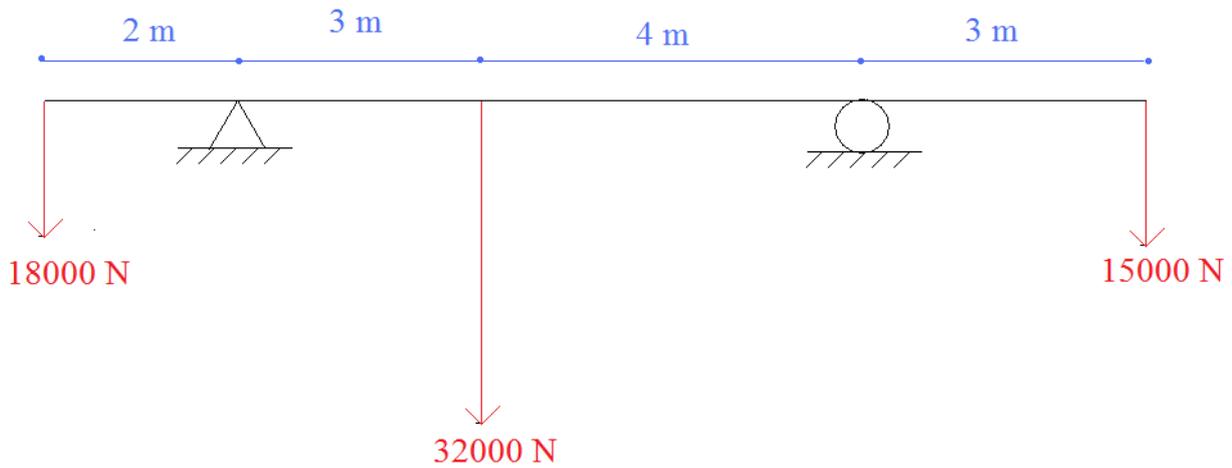
Exercice [ 35 ]

Déterminer les réactions d'appuis.  
Calculer les torseurs en tout point.

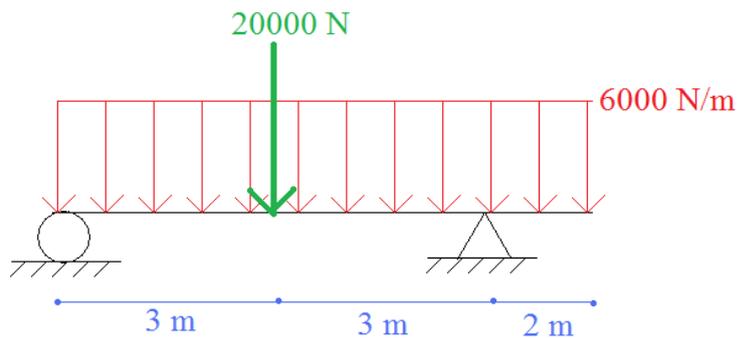


Exercice [ 36 ]

Déterminer les réactions d'appuis.  
Calculer les torseurs en tout point.



Exercice [ 37 ]



Déterminer les réactions d'appuis.  
Calculer les torseurs en tout point.

## 8. Degré d'hyperstaticité - iso/hyperstaticité

### Définition de l'isostaticité

L'équilibre isostatique est atteint si **tout mouvement du solide est impossible** et si le **nombre d'inconnues de liaison appliquées à ce solide est égal au nombre d'équations**.

Remarque : dans le plan, cela donne 3 équations et 3 inconnues.

### Définition de l'hypostaticité

S'il reste **une seule possibilité de mouvement** et/ou si le **nombre d'inconnues est inférieur au nombre d'équations**, alors l'équilibre est dit "**hypostatique**".

On l'appelle aussi mécanisme. En fait, cela se traduit par une absence d'équilibre car le système peut bouger.

### Définition de l'hyperstaticité

S'il n'y a **aucune possibilité de mouvement** et que le **nombre d'inconnues est strictement supérieur au nombre d'équations**, l'équilibre est dit "**hyperstatique**".

Remarque : la très grande majorité des structures en génie civil sont hyperstatiques afin d'être dans le sens de la sécurité.

### Définition du degré d'hyperstaticité

Le **degré d'hyperstaticité** est la différence entre le nombre d'inconnues et le nombre d'équations.

### Calcul du nombre d'équations

S'il y a **n** solides dans le système matériel, puisqu'il existe **3** équations d'équilibre par solide, on obtient **3.n équations** au total.

### Calcul du nombre d'inconnues

On calcule ensuite le nombre d'inconnues de liaisons qui existent entre deux solides du système matériel :

- 1 inconnue pour un appui simple,
- 2 inconnues pour une articulation entre deux solides,
- 3 inconnues pour un encastrement entre deux solides.

Remarque : si la liaison est entre **m** solides, on compte alors **(m-1)** liaisons.

### Exemple :

Pour une articulation entre 3 solides, il y a 2 liaisons à 2 inconnues, ce qui donne 4 inconnues.

Pour un encastrement entre 5 solides, il y a 4 liaisons à 3 inconnues, ce qui donne 12 inconnues.

Calcul du degré d'hyperstaticité

$$d = (1 \cdot L_1 + 2 \cdot L_2 + 3 \cdot L_3) - 3n$$

Avec :

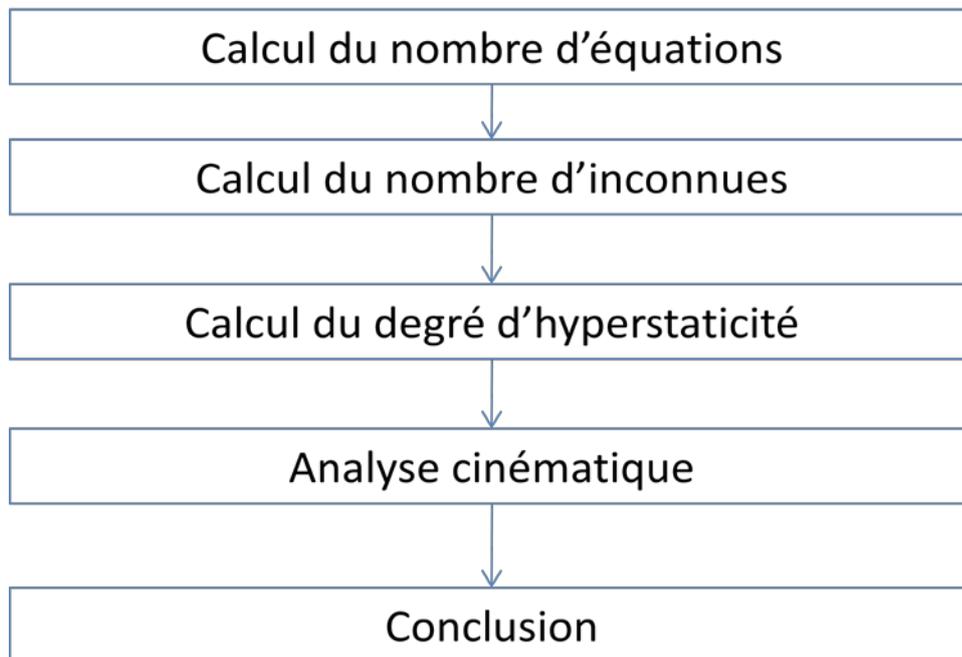
- 1 est le nombre d'inconnue pour un appui simple.
- 2 est le nombre d'inconnues pour une articulation.
- 3 est le nombre d'inconnues pour un encastrement.
- $L_1$  est le nombre d'appuis simples.
- $L_2$  est le nombre d'articulations.
- $L_3$  est le nombre d'encastrement.
- $n$  est le nombre de solides.

Corolaire

<u>Conditions</u>	<u>Situation</u>
$d = 0$ <b><u>ET</u></b> pas de mouvement possible entre solides	Le système est isostatique
$d > 0$ <b><u>ET</u></b> pas de mouvement possible entre solides	Le système est hyperstatique
$d < 0$ <b><u>OU</u></b> mouvement possible entre solides	Le système est hypostatique.

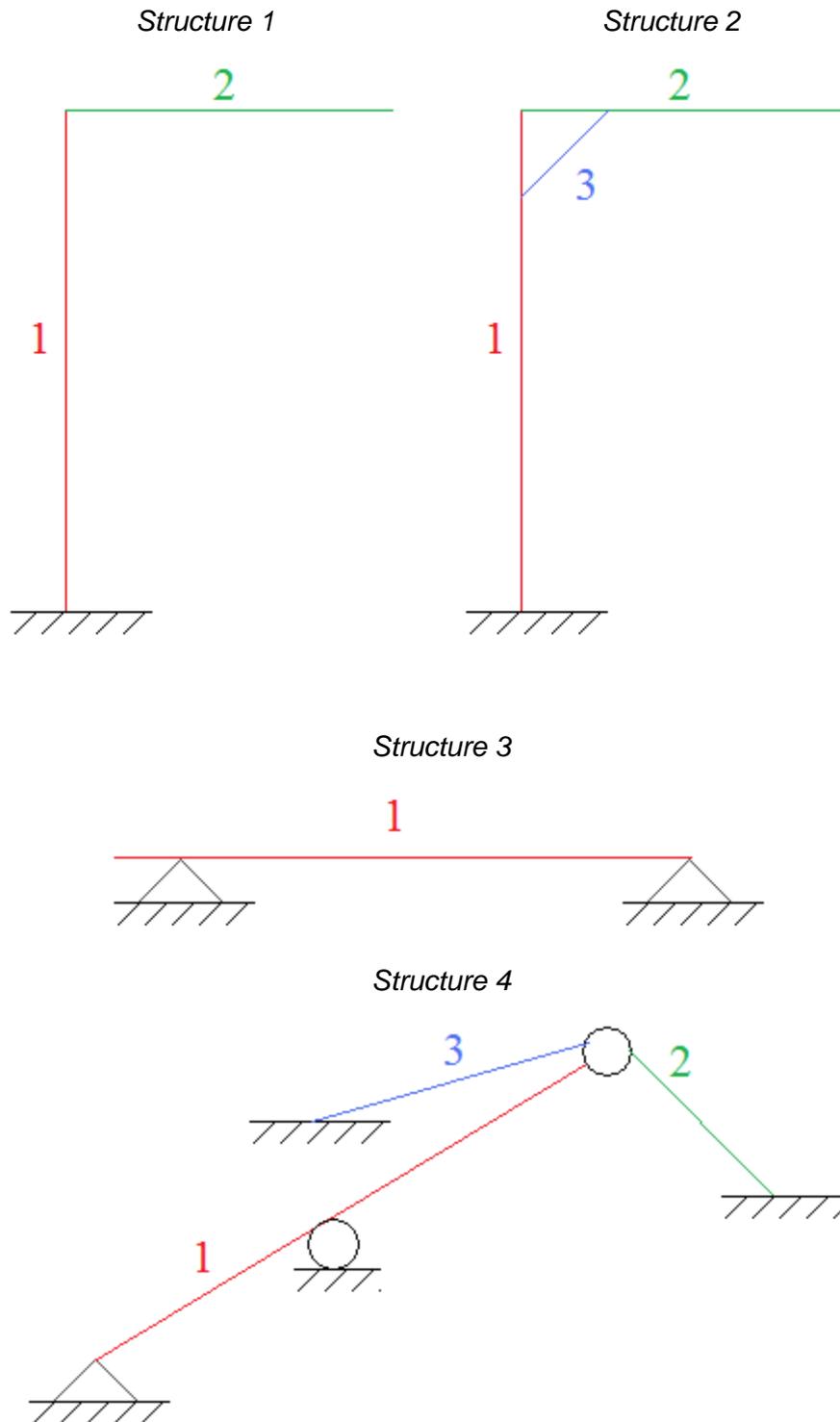
## 8.1 Méthode

### 8.1.1 Logigramme



## 8.2 Exemples

Déterminer le de degré et type de staticité (iso/hypo/hyper) des structures suivantes :



Structure 1

**Calcul du nombre d'équations**

2 solides  $\rightarrow 2 \times 3 = 6$  équations

**Calcul du nombre d'inconnues**

Type	Eléments concernés	Nombre associé d'inconnues
Encastrement	Extérieur et 1	3
Encastrement	1 et 2	3

Le nombre total d'inconnues est 6

**Calcul du degré d'hyperstaticité**

$$6 - 6 = 0$$

**Analyse cinématique**

Pas de mouvement possible.

**Conclusion**

Le système est isostatique.

Structure 2

**Calcul du nombre d'équations**

3 solides  $\rightarrow 3 \times 3 = 9$  équations

**Calcul du nombre d'inconnues**

Type	Eléments concernés	Nombre associé d'inconnues
Encastrement	Extérieur et 1	3
Encastrement	1 et 2	3
Encastrement	2 et 3	3
Encastrement	1 et 3	3

Le nombre total d'inconnues est 12

**Calcul du degré d'hyperstaticité**

$$12 - 9 = 3$$

### Analyse cinématique

Pas de mouvement possible.

### Conclusion

Le système est hyperstatique de degré 3.

Structure 3

### Calcul du nombre d'équations

1 solide  $\rightarrow 1 \times 3 = 3$  équations

### Calcul du nombre d'inconnues

Type	Éléments concernés	Nombre associé d'inconnues
Appui simple	Extérieur et 1	1
Appui simple	Extérieur et 1	1

Le nombre total d'inconnues est 2

### Calcul du degré d'hyperstaticité

$$2 - 3 = -1$$

### Analyse cinématique

Inutile de faire l'analyse puisque le degré d'hyperstaticité est négatif donc il existe forcément un mouvement possible (dans ce cas, il s'agit d'un mouvement horizontal).

### Conclusion

Le système est hypostatique de degré 1.

Structure 4

**Calcul du nombre d'équations**

3 solides →  $3 \times 3 = 9$  équations

**Calcul du nombre d'inconnues**

Type	Eléments concernés	Nombre associé d'inconnues
Rotule	1, 2 et 3	$2 \times 2 = 4$
Rotule	1 et extérieur	2
Appui simple	1 et extérieur	1
Encastrement	2 et extérieur	3
Encastrement	3 et extérieur	3

Le nombre total d'inconnues est 13

**Calcul du degré d'hyperstaticité**

$$13 - 9 = 4$$

**Analyse cinématique**

Pas de mouvement possible.

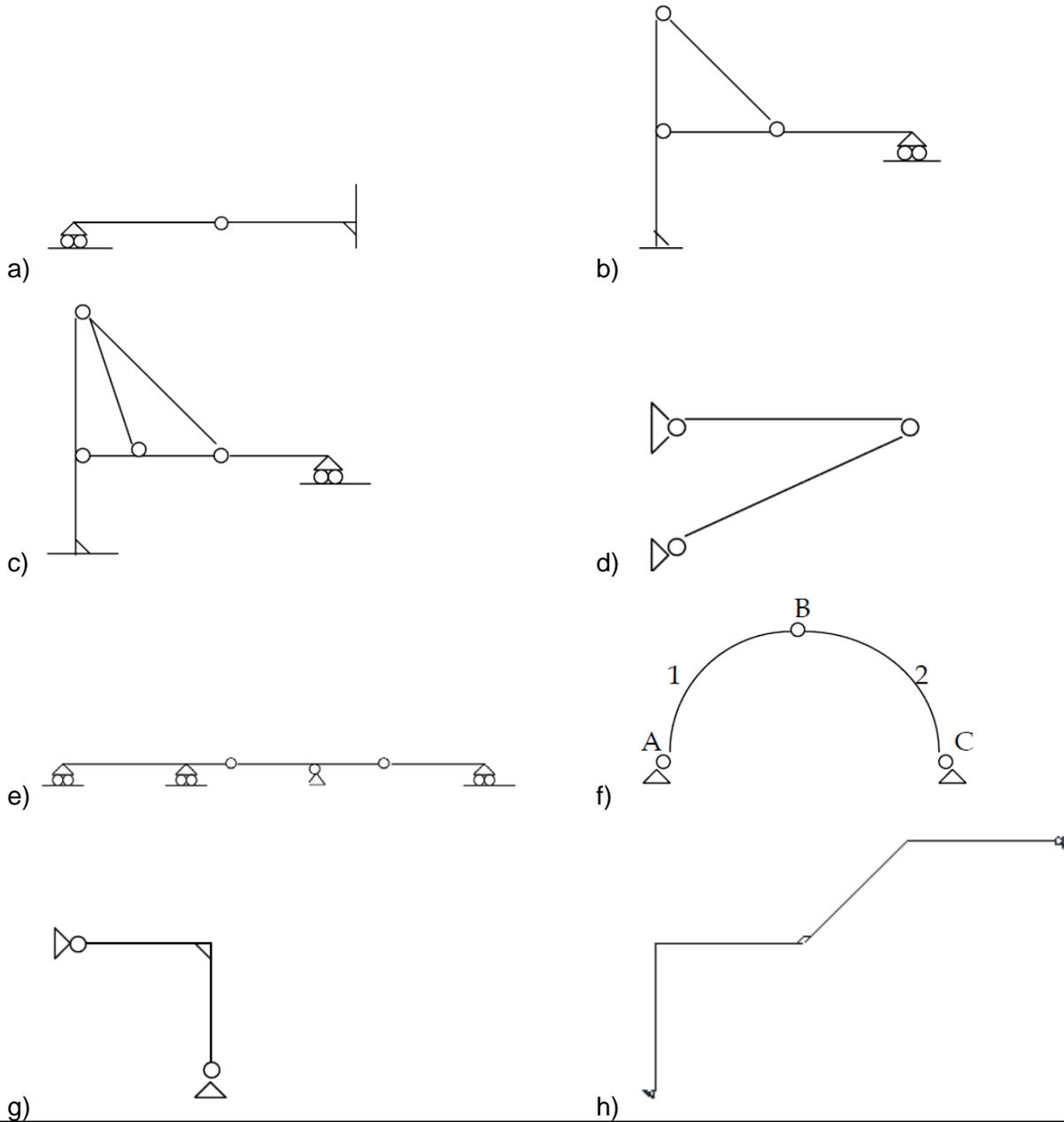
**Conclusion**

Le système est hyperstatique de degré 4.

### 8.3 Exercices

#### Exercice [ 38 ]

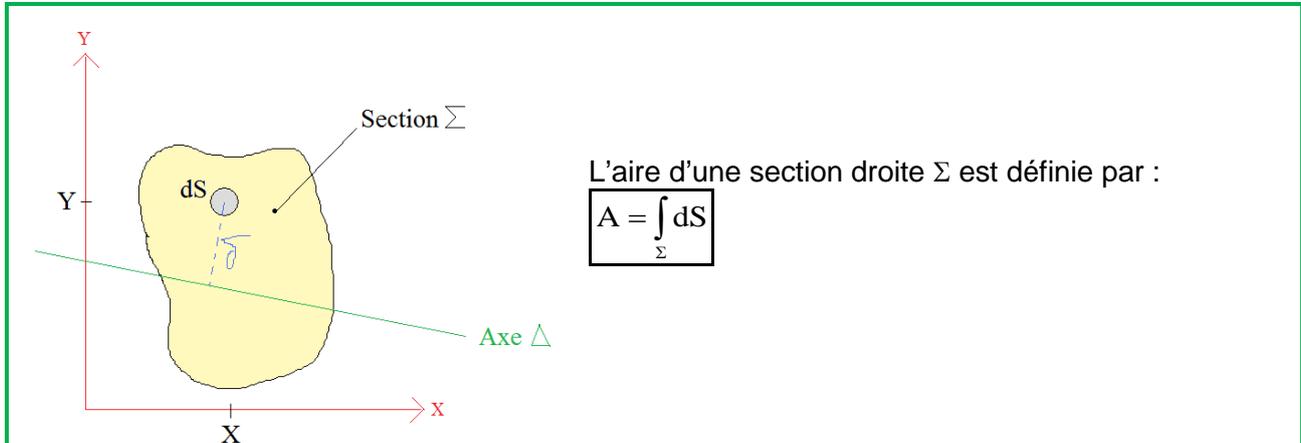
Déterminer le degré d'hyperstaticité des structures suivantes :



## 9. Caractéristiques des sections droites

### 9.1 Aire d'une section

Définition : Aire d'une section



### 9.2 Moment statique

Définition : Moment statique

Le moment statique d'une section droite  $\Sigma$  par rapport à un axe  $\Delta$  est définie par :

$$S_{\Delta} = \int_{\Sigma} \delta dS$$

On en déduit :

$$S_x = \int_{\Sigma} Y dS \text{ et } S_y = \int_{\Sigma} X dS$$

Remarque : Si l'axe  $\Delta$  est un axe de symétrie, nous avons :  $S_{\Delta} = 0$

### 9.3 Centre de gravité

Définition : Centre de gravité

Le centre de gravité d'une section droite est le point G, à l'intersection des axes x et y tels que :

$$S_x = 0 \text{ et } S_y = 0$$

Relations pour trouver le centre de gravité :

$$Y_G = \frac{\int Y dS}{A} \text{ et } X_G = \frac{\int X dS}{A}$$

Remarque : Pour tout axe de symétrie  $\Delta$  :  $S_{\Delta} = 0$ , donc le centre de gravité G appartient à tout axe de symétrie de la section droite.

### 9.3.1 Rappel concernant la méthode de calcul du centre de gravité

1)

Choisir un point de référence  $O$  et un repère  $(\vec{Y}, \vec{Z})$

2)

Décomposer la section en  $n$  surfaces élémentaires

3)

Pour chaque surface élémentaire  $[i]$ , déterminer les coordonnées du centre de gravité dans le repère  $O(\vec{Y}, \vec{Z})$

$$G_{[i]} \begin{pmatrix} Y_{G[i]} \\ Z_{G[i]} \end{pmatrix}_{O(\vec{Y}, \vec{Z})}$$

4)

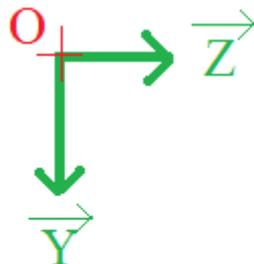
Calculer la surface  $S_{[i]}$  de chaque surface élémentaire  $[i]$

La surface totale  $S$  de la section est alors égale à :

$$S = \sum_{i=1}^n S_{[i]}$$

5)

La position du centre de gravité  $G$  par rapport au point  $O$  est donné par le vecteur  $\vec{OG}$  dans le repère  $O(\vec{Y}, \vec{Z})$

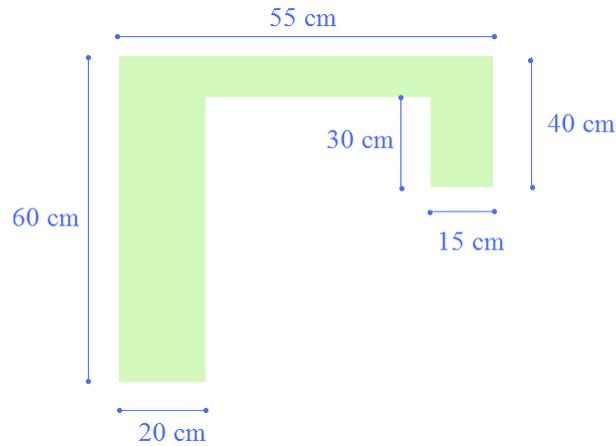


$$\vec{OG} \begin{pmatrix} \frac{\sum_{i=1}^n Y_{G[i]} \times S_{[i]}}{S} \\ \frac{\sum_{i=1}^n Z_{G[i]} \times S_{[i]}}{S} \end{pmatrix}_{O(\vec{Y}, \vec{Z})}$$

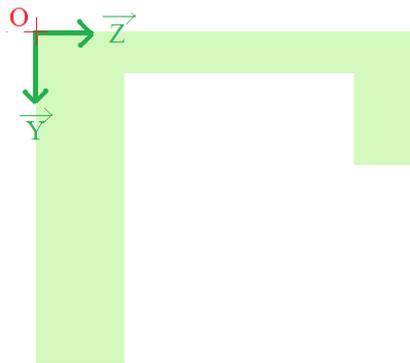
La position de  $G$  est ainsi parfaitement définie.

### 9.3.2 Exemple de calcul

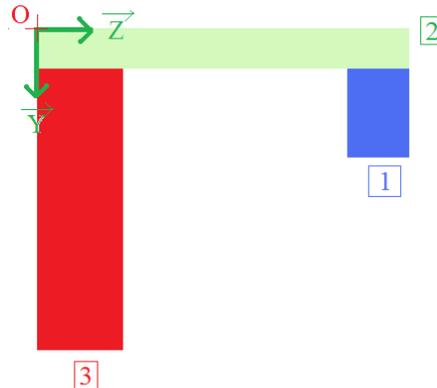
Déterminer la position du centre de gravité de cette section.



1) Choisir un point de référence  $O$  et un repère  $(\vec{Y}, \vec{Z})$

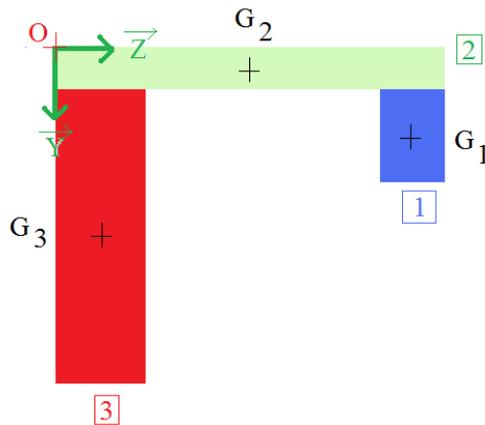


2) Décomposer la section en  $n$  surfaces élémentaires



Pour chaque surface élémentaire  $\boxed{i}$ , déterminer les coordonnées du centre de gravité ans le repère  $O (\vec{Y}, \vec{Z})$

$$G_{\boxed{i}} \begin{pmatrix} Y_{G\boxed{i}} \\ Z_{G\boxed{i}} \end{pmatrix}_O (\vec{Y}, \vec{Z})$$



Avec

$$G_{\boxed{1}} \begin{pmatrix} 25 \\ 47,5 \end{pmatrix}_{o(\vec{y}, \vec{z})}$$

$$G_{\boxed{2}} \begin{pmatrix} 5 \\ 27,5 \end{pmatrix}_{o(\vec{y}, \vec{z})}$$

$$G_{\boxed{3}} \begin{pmatrix} 35 \\ 10 \end{pmatrix}_{o(\vec{y}, \vec{z})}$$

et

$$S_{\boxed{1}} = 450 \text{ cm}^2$$

$$S_{\boxed{2}} = 550 \text{ cm}^2$$

$$S_{\boxed{3}} = 1000 \text{ cm}^2$$

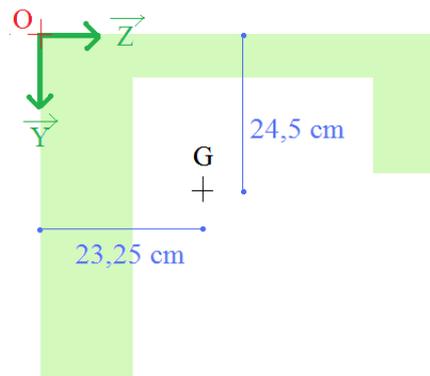
La surface totale  $S$  de la section est alors égale à :

$$S = 2000 \text{ cm}^2$$

5) La position du centre de gravité  $G$  par rapport au point  $O$  est donné par le vecteur  $\overrightarrow{OG}$  dans le repère  $O(\vec{Y}, \vec{Z})$

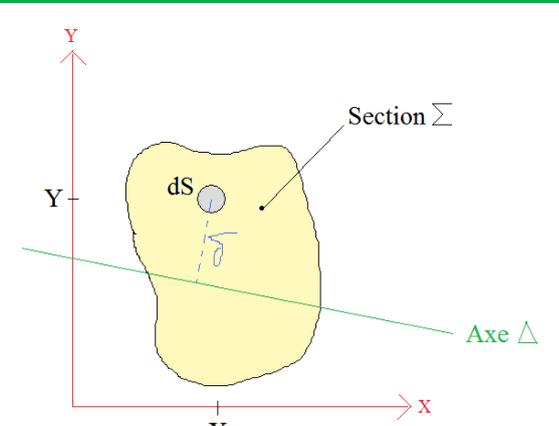
$$\overrightarrow{OG} \begin{pmatrix} \frac{25 \times 450 + 5 \times 550 + 35 \times 1000}{2000} = 24,5 \text{ cm} \\ \frac{47,5 \times 450 + 27,5 \times 550 + 10 \times 1000}{2000} = 23,25 \text{ cm} \end{pmatrix}_{o(\vec{y}, \vec{z})}$$

La position du centre de gravité  $G$  est alors :



## 9.4 Moment et produit d'inertie

### Définition du moment d'inertie



Le moment d'inertie autour d'un axe  $\Delta$  est défini par :

$$I_{\Delta} = \int_{\Sigma} \delta^2 dS$$

### Calcul du moment d'inertie

$$I_X = \int_{\Sigma} Y^2 dS \quad \text{et} \quad I_Y = \int_{\Sigma} X^2 dS$$

### Définition du produit d'inertie

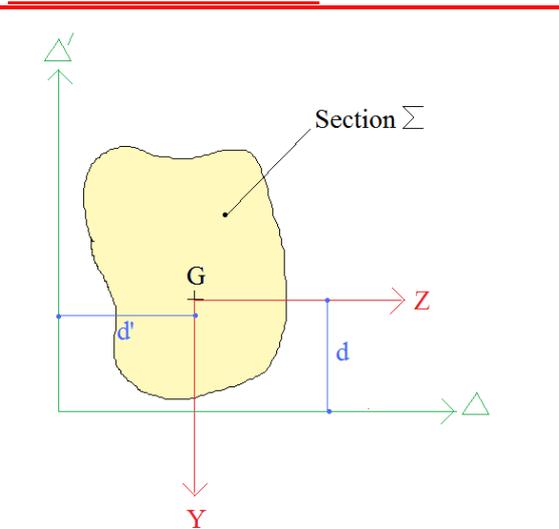
Le produit d'inertie par rapport à deux axes perpendiculaires est défini par :

$$I_{XY} = \int_{\Sigma} XY dS$$

Remarque : Pour tout axe X de symétrie, nous avons :  $I_{XY} = 0$ .

## 9.5 Théorème d'HUYGENS

### Théorème d'HUYGENS



Les axes  $y$  et  $z$  intervenant dans le théorème d'HUYGENS doivent nécessairement être des axes passant par le centre de gravité.

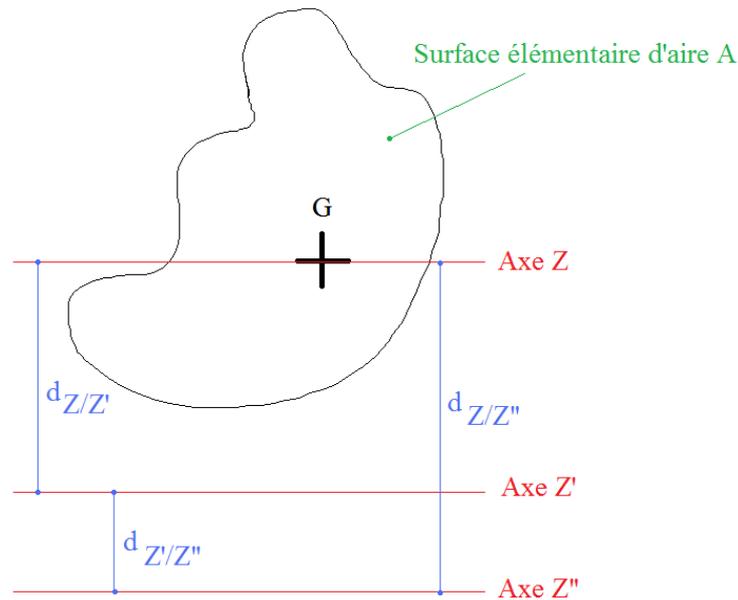
Nous pouvons déterminer les moments et produits d'inertie par rapport à  $I_y$ ,  $I_z$  et  $I_{yz}$  :

$$I_{\Delta} = I_z + Ad^2, \quad I_{\Delta'} = I_y + Ad'^2 \quad \text{et} \quad I_{\Delta\Delta'} = I_{yz} + Add'$$

Remarque :  $d'$  et  $d$  sont les coordonnées de  $G$  dans le repère  $(O, \Delta, \Delta')$

### 9.5.1 Exemple d'application du théorème de Huygens

Soit une surface élémentaire d'aire  $A$  et de centre de gravité  $G$



L'application du théorème de Huygens est :

$$I_{Z'} = I_Z + A \cdot (d_{Z/Z'})^2$$

Ou encore

$$I_{Z''} = I_Z + A \cdot (d_{Z/Z''})^2$$

Remarque :

$$I_{Z''} = I_Z + A \cdot (d_{Z/Z''})^2$$

Dans tous les cas, il s'agit du moment d'inertie autour d'un axe passant par le centre de gravité de la section élémentaire

Ainsi il n'est **pas correct** d'écrire que :  $I_{Z''} = I_{Z'} + A \cdot (d_{Z'/Z''})^2$

Car

~~$$I_{Z''} = I_{Z'} + A \cdot (d_{Z'/Z''})^2$$~~ FAUX

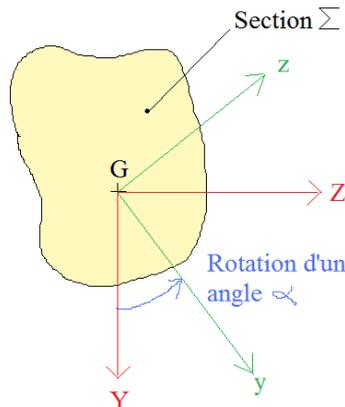
Mauvaise application du théorème de Huygens car  $Z'$  ne passe pas par le centre de gravité de la section élémentaire

## 9.6 Rayon de giration

### Définition du rayon de giration

Les rayons de giration sont définis par :  $i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}$  et  $i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$

## 9.7 Variation d'inertie



On considère le repère mobile (G,y,z) repéré par l'angle  $\alpha$  par rapport au repère fixe (G,Y,Z)

Remarque : 
$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix}$$

### Principe

$I_y$  passe par un maximum ( $I_z$  minimum) et un minimum ( $I_z$  maximum) lorsque  $I_{yz} = 0$ , soit pour les deux angles  $\alpha_1$  et  $\alpha_1 \pm \frac{\pi}{2}$  tels que  $I_{yz} = 0$ , soit :

$$\operatorname{tg} 2\alpha_1 = \frac{2I_{yz}}{I_z - I_y}$$

Les valeurs des maximums  $I_1$  et minimum  $I_2$  sont :

$$I_1 = \frac{I_z + I_y}{2} + \frac{I_z - I_y}{2 \cos 2\alpha_1} = \frac{I_z + I_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_z - I_y}{2}\right)^2 + I_{yz}^2}$$

$$I_2 = \frac{I_z + I_y}{2} - \frac{I_z - I_y}{2 \cos 2\alpha_1} = \frac{I_z + I_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_z - I_y}{2}\right)^2 + I_{yz}^2}$$

### Définition des inerties principales

Les inerties principales sont les inerties maximum et minimum autour d'un axe variable passant par G.

### Définition des axes principaux d'inertie

Les axes principaux d'inertie sont les axes passant par G autour desquels on obtient les inerties principales.

Le repère correspondant est appelé repère principal d'inertie.

## 9.8 Variation d'inertie par rapport aux inerties principales

### Relations

Si le repère fixe (G,Y,Z) est le repère principal d'inertie ( $I_z = I_1$  et  $I_y = I_2$ ), nous avons :

$$I_y = \frac{I_1 + I_2}{2} - \frac{I_1 - I_2}{2} \cos 2\alpha$$

$$I_z = \frac{I_1 + I_2}{2} + \frac{I_1 - I_2}{2} \cos 2\alpha$$

$$I_{yz} = -\frac{I_1 - I_2}{2} \sin 2\alpha$$

## 9.9 Matrice d'inertie

### écriture matricielle

Les expressions des inerties par rapport au repère mobile (G,y,z) en fonction des inerties par rapport à un repère fixe (G,Y,Z), peuvent encore s'écrire sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} I_y & -I_{yz} \\ -I_{yz} & I_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_Y & -I_{YZ} \\ -I_{YZ} & I_Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

### Définition de la matrice d'inertie

On appelle matrice d'inertie par rapport à un repère (G,Y,Z), la matrice :

$$\begin{pmatrix} I_Y & -I_{YZ} \\ -I_{YZ} & I_Z \end{pmatrix}$$

### Caractéristiques

C'est une matrice :

- symétrique à coefficients réels
- Il existe un repère orthonormé dans lequel la matrice est diagonale défini par les axes principaux d'inertie.
- Les valeurs propres de la matrice d'inertie sont les inerties principales.

### Recherche de valeurs propres

$$\det \begin{pmatrix} I_Y - I & -I_{YZ} \\ -I_{YZ} & I_Z - I \end{pmatrix} = 0$$

Soit :

$$I^2 - (I_Z + I_Y)I + (I_Z I_Y - I_{YZ}^2) = 0$$

D'où les racines de cette équation caractéristique :

$$I_1 = \frac{I_Z + I_Y}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_Z - I_Y}{2}\right)^2 + I_{YZ}^2}$$

$$I_2 = \frac{I_Z + I_Y}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_Z - I_Y}{2}\right)^2 + I_{YZ}^2}$$

### Directions principales

La direction principale ( $\alpha_1$ ) correspondant à  $I_1$  est donnée par la relation :

$$\begin{pmatrix} I_Y - I_1 & -I_{YZ} \\ -I_{YZ} & I_Z - I_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 \\ \sin \alpha_1 \end{pmatrix} = 0, \text{ soit : } \tan \alpha_1 = \frac{I_Y - I_1}{I_{YZ}} = \frac{I_{YZ}}{I_Z - I_1}$$

De même, la direction principale ( $\alpha_2$ ) correspondant à  $I_2$  est donnée par la relation :

$$\tan \alpha_2 = \frac{I_Y - I_2}{I_{YZ}} = \frac{I_{YZ}}{I_Z - I_2}$$

### Orthogonalité des directions principales

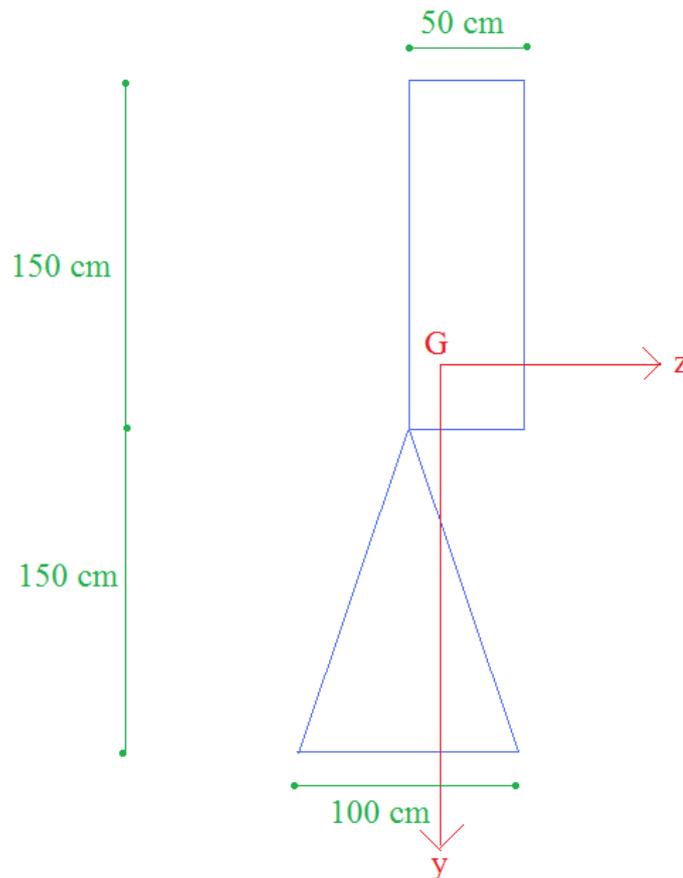
On peut vérifier que ces deux directions sont orthogonales :  $\tan \alpha_1 \cdot \tan \alpha_2 = -1$

## **9.10 Méthode**

### **9.10.1 Logigramme**

### 9.10.2 Exemple

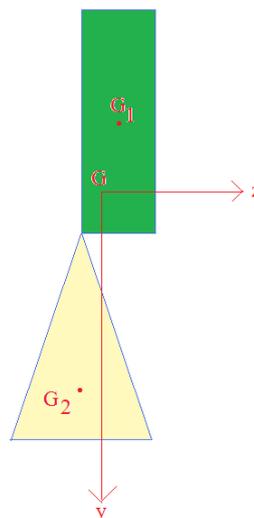
Déterminer les inerties principales et les directions principales de la section suivante :



ATTENTION : le point G est placé de manière arbitraire et ne correspond pas à la réalité.

1) Décomposition en  $n$  surfaces élémentaires  $[i]$

On décomposera la section en deux surfaces élémentaires (un rectangle noté  $[1]$  et un triangle noté  $[2]$ )



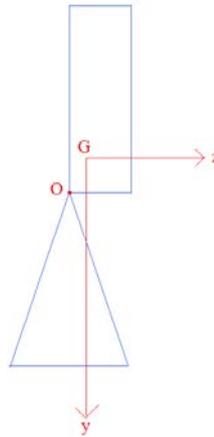
2) Détermination pour chaque surface élémentaire :

a) De la surface  $S^{[i]}$

$$S^{[1]} = 50 \times 150 = 7500 \text{ cm}^2$$

$$S^{[2]} = \frac{100 \times 150}{2} = 7500 \text{ cm}^2$$

b) De la position du centre de gravité  $G_i$   
En prenant l'origine du repère le point O



Les centres de gravité élémentaires sont :

$$G_1 : \begin{pmatrix} -75 \\ 25 \end{pmatrix}_{0,\vec{y},\vec{z}}$$

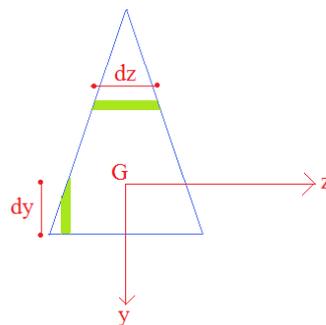
$$G_2 : \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \end{pmatrix}_{0,\vec{y},\vec{z}}$$

c) Du moment d'inertie autour de l'axe  $G_{i,\vec{z}}$  noté  $I^{[i]}_{G_{i,\vec{z}}}$

Le moment d'inertie d'un rectangle est un résultat connu (inutile de faire un calcul d'intégrale) :

$$I^{[1]}_{G_{1,\vec{z}}} = \frac{50 \times 150^3}{12} \approx 1,4 \cdot 10^7 \text{ cm}^4$$

Le résultat d'un triangle n'étant pas forcément connu, un calcul d'intégrale doit être réalisé :



$$dz(y) = ay + b \Rightarrow \begin{cases} dz(y = 50) = 50a + b = 100 \\ dz(y = -100) = -100a + b = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow dz(y) = \frac{2y + 200}{3}$$

$$I^{[2]}_{G_{2,\vec{z}}} = \int_{-100}^{50} y^2 \times dz \times dy = \int_{-100}^{50} y^2 \times \left( \frac{2y + 200}{3} \right) \times dy$$

$$= \left[ \frac{y^3 \times (3y + 400)}{18} \right]_{-100}^{50} \approx 9,4 \cdot 10^6 \text{ cm}^4$$

Il est également possible de connaître l'inertie par cœur et donc directement :

$$I_{G_{2,\bar{z}}}^{[2]} = \frac{100 \times 150^3}{36} \approx 9,4 \cdot 10^6 \text{ cm}^4$$

d) Du moment d'inertie autour de l'axe  $G_{i,\bar{y}}$  noté  $I_{G_{i,\bar{y}}}^{[i]}$

Le moment d'inertie d'un rectangle est un résultat connu (inutile de faire un calcul d'intégrale) :

$$I_{G_{1,\bar{y}}}^{[1]} = \frac{150 \times 50^3}{12} \approx 1,6 \cdot 10^6 \text{ cm}^4$$

Le résultat d'un triangle n'étant pas forcément connu, un calcul d'intégrale doit être réalisé à l'aide du même schéma que précédemment :

$$dy(z) = ay + b \Rightarrow \begin{cases} dy(z=0) = b = 150 \\ dy(z=50) = 50a + b = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow dy(z) = -3z + 150$$

$$\begin{aligned} I_{G_{2,\bar{y}}}^{[2]} &= \int_{-50}^{50} z^2 \times dz \times dy = 2 \times \int_0^{50} z^2 \times dz \times dy = 2 \times \int_0^{50} z^2 \times (-3z + 150) \times dz \\ &= 2 \times \left[ \frac{-z^3 \times (3z - 200)}{4} \right]_0^{50} \approx 3,1 \cdot 10^6 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

e) Du moment d'inertie  $I_{G_{i,\bar{y}\bar{z}}}^{[i]}$

$$I_{G_{1,\bar{y}\bar{z}}}^{[1]} = I_{G_{2,\bar{y}\bar{z}}}^{[2]} = 0$$

3) Calcul du centre de gravité G

$$y_G = \frac{y_{G1} \times S^{[1]} + y_{G2} \times S^{[2]}}{S^{[1]} + S^{[2]}} = \frac{-75 \times 7500 + 100 \times 7500}{7500 + 750} = 45,25 \text{ cm}$$

$$z_G = \frac{z_{G1} \times S^{[1]} + z_{G2} \times S^{[2]}}{S^{[1]} + S^{[2]}} = \frac{25 \times 7500 + 0 \times 7500}{7500 + 750} = 1,25 \text{ cm}$$

4) Détermination de la distance entre axe pour chaque surface élémentaire

a.  $d_{z,i}$  = distance entre  $G_{i,\bar{z}}$  et  $G_{\bar{z}}$

$$d_{z,1} = y_G - y_{G,1} = 45,25 - (-75) = 120,25$$

$$d_{z,2} = y_G - y_{G,2} = 45,25 - 100 = -54,75$$

b.  $d_{y,i}$  = distance entre  $G_{i,\bar{y}}$  et  $G_{\bar{y}}$

$$d_{y,1} = z_G - z_{G,1} = 1,25 - 25 = -23,25$$

$$d_{y,2} = z_G - z_{G,2} = 1,25 - 0 = 1,75$$

5) Utilisation du théorème de Huygens

$$a. I_{G_{\bar{z}}} = \sum_{i=1}^n (I_{G_{i,\bar{z}}}^{[i]} + S^{[i]} \times d_z^2)$$

$$I_{G_{\bar{z}}} = (I_{G_{1,\bar{z}}}^{[1]} + S^{[1]} \times d_{z,1}^2) + (I_{G_{2,\bar{z}}}^{[2]} + S^{[2]} \times d_{z,2}^2)$$

$$I_{G_{\bar{z}}} = (1,4 \cdot 10^7 + 7500 \times 120,25^2) + (9,4 \cdot 10^6 + 7500 \times (-54,75)^2) = 1,5 \cdot 10^8 \text{ cm}^4$$

$$b. I_{G_{\bar{y}}} = \sum_{i=1}^n (I_{G_{i,\bar{y}}}^{[i]} + S^{[i]} \times d_y^2)$$

$$I_{G_{\bar{y}}} = (I_{G_{1,\bar{y}}}^{[1]} + S^{[1]} \times d_{y,1}^2) + (I_{G_{2,\bar{y}}}^{[2]} + S^{[2]} \times d_{y,2}^2)$$

$$I_{G_{\bar{y}}} = (1,6 \cdot 10^6 + 7500 \times (-23,25)^2) + (3,1 \cdot 10^6 + 7500 \times (1,75)^2) = 8,8 \cdot 10^6 \text{ cm}^4$$

$$c. I_{G_{\bar{y}\bar{z}}} = \sum_{i=1}^n (I_{G_{i,\bar{y}\bar{z}}}^{[i]} + S^{[i]} \times d_y \times d_z)$$

$$I_{G_{\bar{y}\bar{z}}} = (I_{G_{1,\bar{y}\bar{z}}}^{[1]} + S^{[1]} \times d_{y,1} \times d_{z,1}) + (I_{G_{2,\bar{y}\bar{z}}}^{[2]} + S^{[2]} \times d_{y,2} \times d_{z,2})$$

$$I_{G_{\bar{y}\bar{z}}} = (0 + 7500 \times (-23,25) \times 120,25) + (0 + 7500 \times 1,75 \times (-54,75)) = -2,2 \cdot 10^7 \text{ cm}^4$$

- 6) Diagonalisation de matrice (à faire seulement s'il est demandé de trouver les inerties et directions principales)

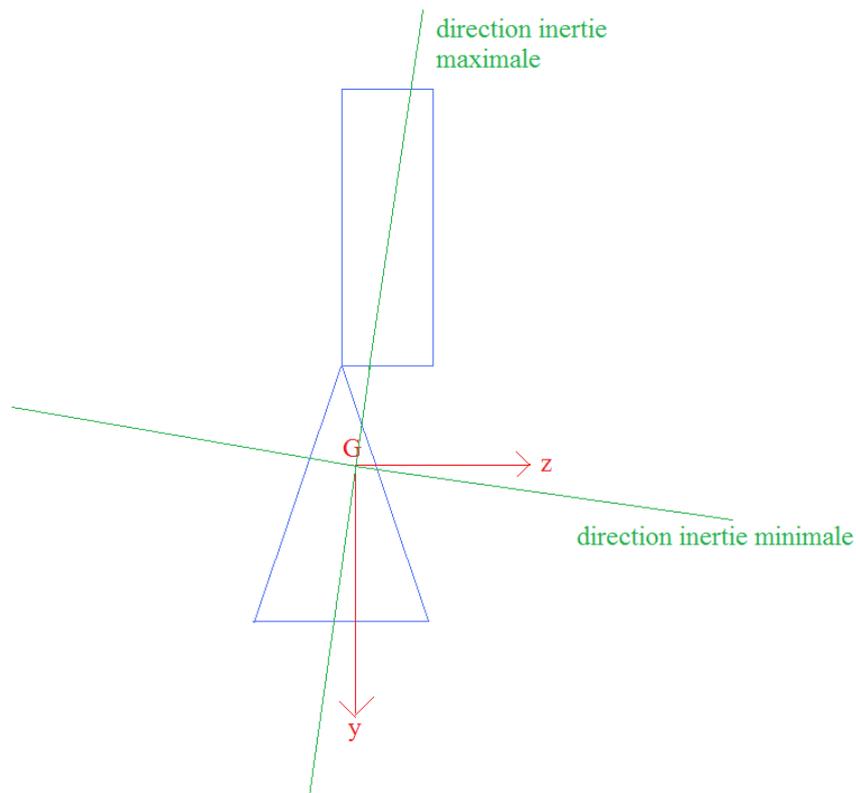
$$\begin{pmatrix} I_{G_{i\bar{y}}} & -I_{G_{i\bar{y}\bar{z}}} \\ -I_{G_{i\bar{y}\bar{z}}} & I_{G_{i\bar{z}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8,8 \cdot 10^6 & 2,2 \cdot 10^7 \\ 2,2 \cdot 10^7 & 1,5 \cdot 10^8 \end{pmatrix}$$

Les inerties principales sont les valeurs propres de la matrice précédente

$$\begin{cases} I_{max} = 1,5 \cdot 10^8 \\ I_{min} = 5,5 \cdot 10^6 \end{cases}$$

Les directions principales sont les directions des vecteurs propres de la matrice précédente qui sont :

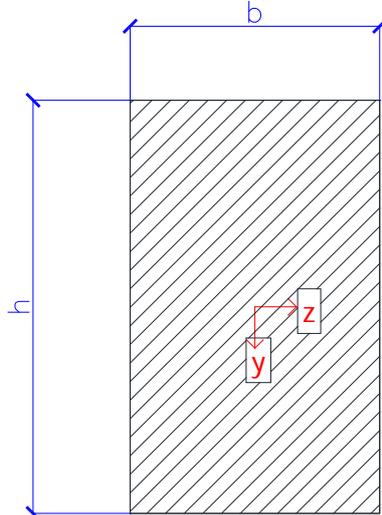
$$\begin{pmatrix} -0,99 \\ 0,15 \end{pmatrix}_{G,\bar{y},\bar{z}} \text{ et } \begin{pmatrix} -0,15 \\ -0,99 \end{pmatrix}_{G,\bar{y},\bar{z}}$$



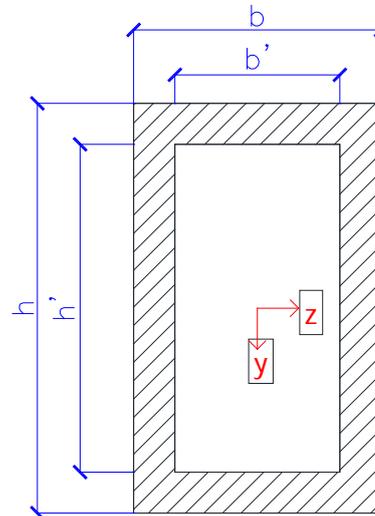
## 9.11 Exercices

### Exercice [ 39 ]

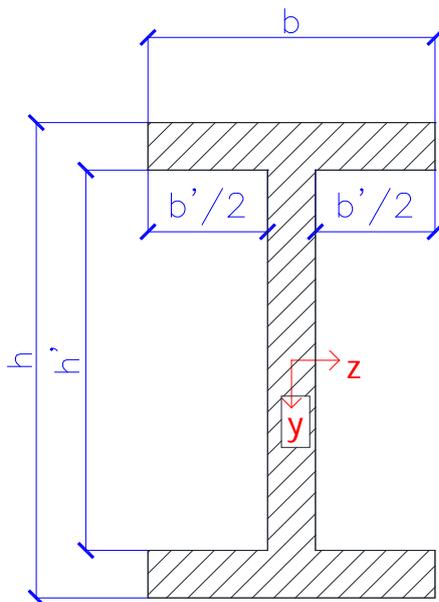
Calculer les moments d'inertie des sections suivantes :



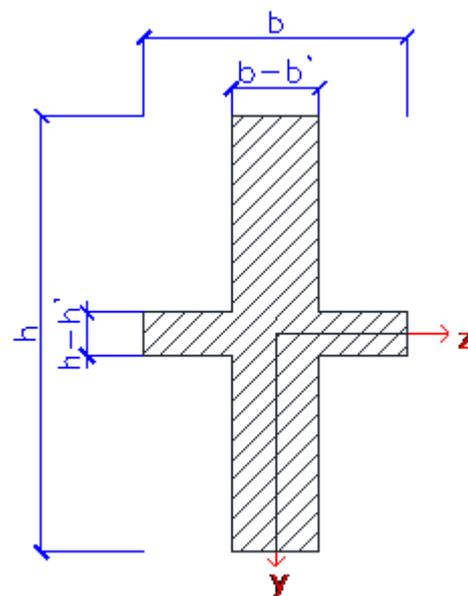
a)



b)



c)



d)

Applications numériques :  $h = 1,2\text{m}$  ;  $b = 0,7\text{ m}$  ;  $b' = 0,3\text{ m}$  ;  $h' = 0,9\text{ m}$

**Exercice [ 40 ]**

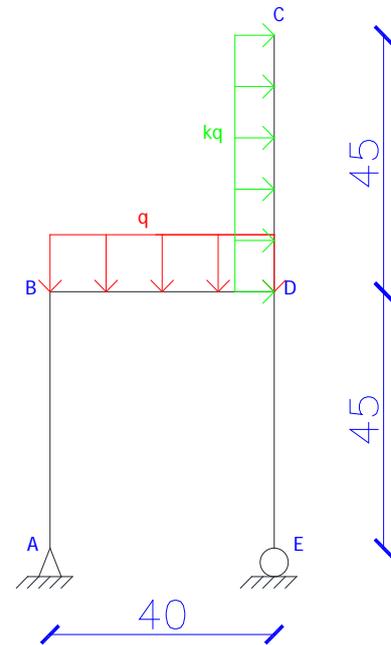
L'objectif de cet exercice est le dimensionnement d'une chaise. Le cahier des charges est le suivant :

- Le bois doit être un sapin de classe visuelle A
- la chaise doit pouvoir résister à une personne de 150 kg
- les pieds et les poutres portant le dossier et l'assise sont carrés
- Le poids propre pourra être négligé

Unités : les côtes sont en cm.

1-Calculer  $k_{max}$  pour qu'il n'y ait pas basculement de la chaise

2-Dimensionner la chaise avec  $k = 0,1$ .



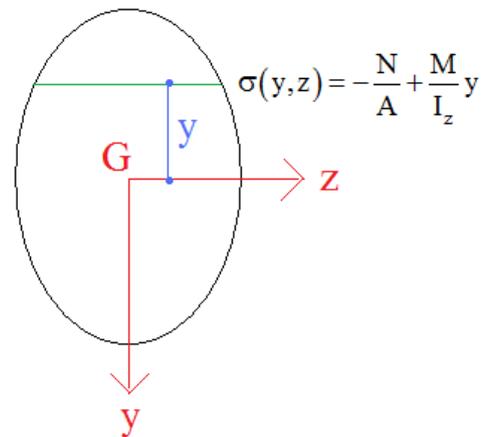
Données :

Dans un problème plan, la contrainte en flexion composée est donnée par la relation suivante :

$$\sigma(y,z) = -\frac{N}{A} + \frac{M}{I_z} y$$

Avec :

- N l'effort normal
- M le moment fléchissant
- A l'aire de la section
- $I_z$  le moment d'inertie par rapport à l'axe z
- y la position de la fibre pour laquelle la contrainte est calculée



**Caractéristiques mécaniques des bois**

	Classes visuelles (NF B52.001)		
	A	B	C
<b>Sapin, épicéa</b>	C22	C24	C30
<b>Douglas</b>	C22	C24	C30
<b>Pin noir, pin laricio</b>	C18	C18	C27
<b>Pin maritime</b>	C18	-	-
<b>Peuplier</b>	C22	-	C27

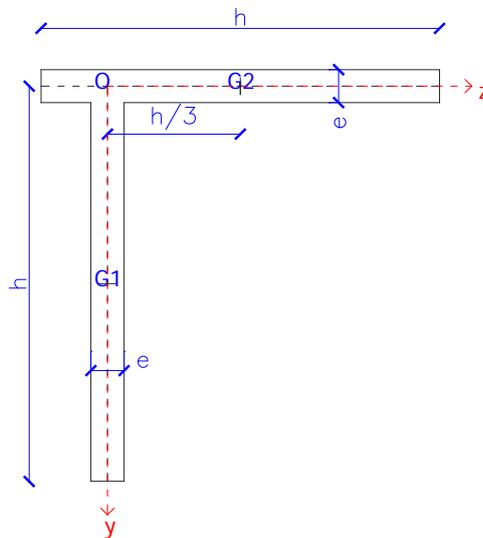
Propriété de résistance [N/mm <sup>2</sup> ]	C18	C22	C24	C27	C30
<b>Flexion</b>	18	22	24	27	30
<b>Traction axiale</b>	11	13	14	16	18
<b>Compression axiale</b>	18	20	21	22	23
<b>cisaillement</b>	2,0	2,4	2,5	2,8	3,0

Exercice [ 41 ]

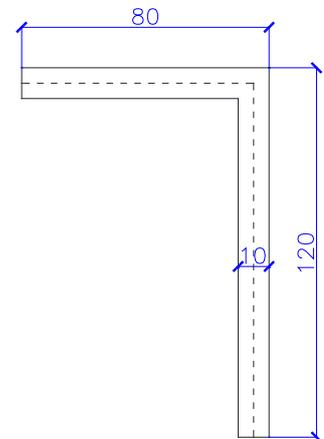
On admettra que  $e \ll h$ .  
Calculer pour les sections A, B et C :

- 1) la position du centre de gravité G
- 2) la matrice d'inerties dans le repère (G,y,z)
- 3) les inerties majeures et mineures
- 4) les directions principales

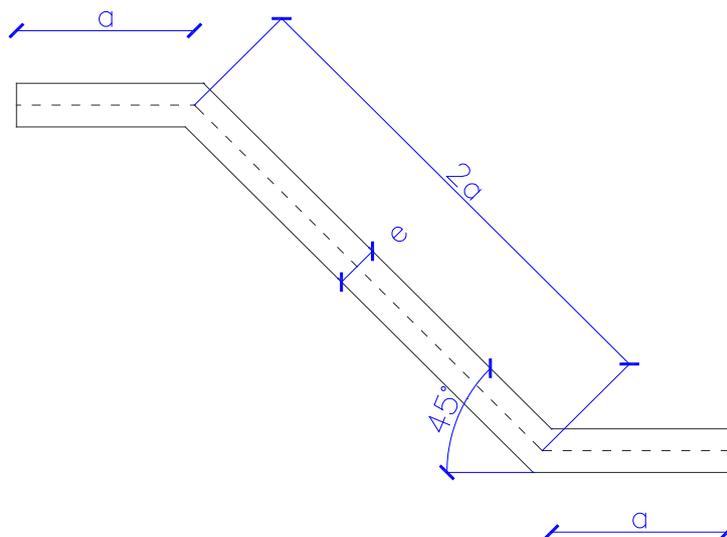
Section A



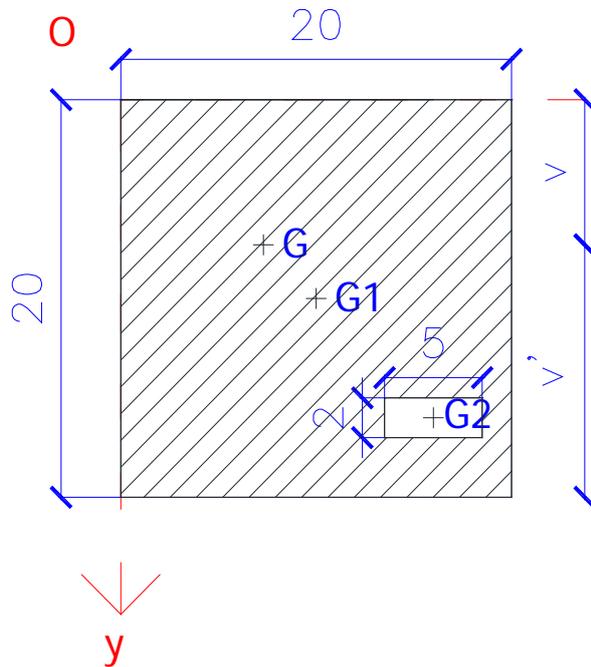
Section B (côte en mm)



Section C



Exercice [ 42 ]



Les côtes sont en cm

La position de  $G_1$  est (10 ;10) dans le repère (O,y,z)

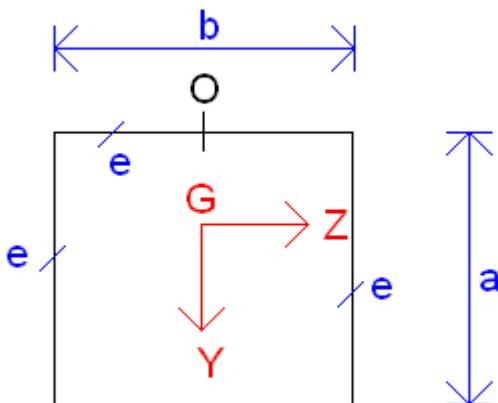
La position de  $G_2$  est (16 ;16) dans le repère (O,y,z)

- 1) Calculer l'inertie  $I_{Gz}$
- 2) Calculer  $I_{Gz}/V$

Exercice [ 43 ]

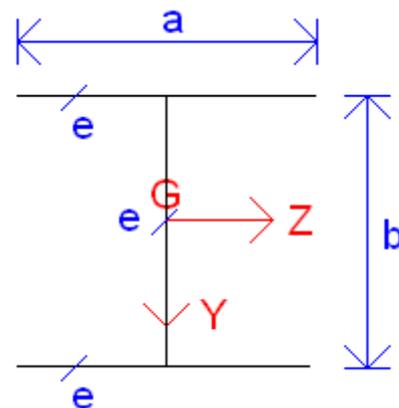
Section 1

- 1) Calculer  $\overline{OG}$
- 2) Calculer la surface
- 3) Calculer  $I_z$



Section 2

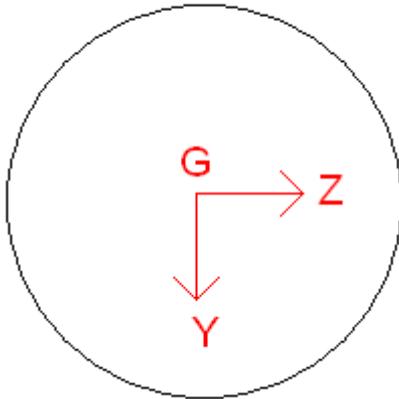
- 1) Calculer la surface
- 2) Calculer  $I_z$



Données :

- $e = 2 \text{ cm}$
- $a = 60 \text{ cm}$
- $b = 100 \text{ cm}$

Exercice [ 44 ]

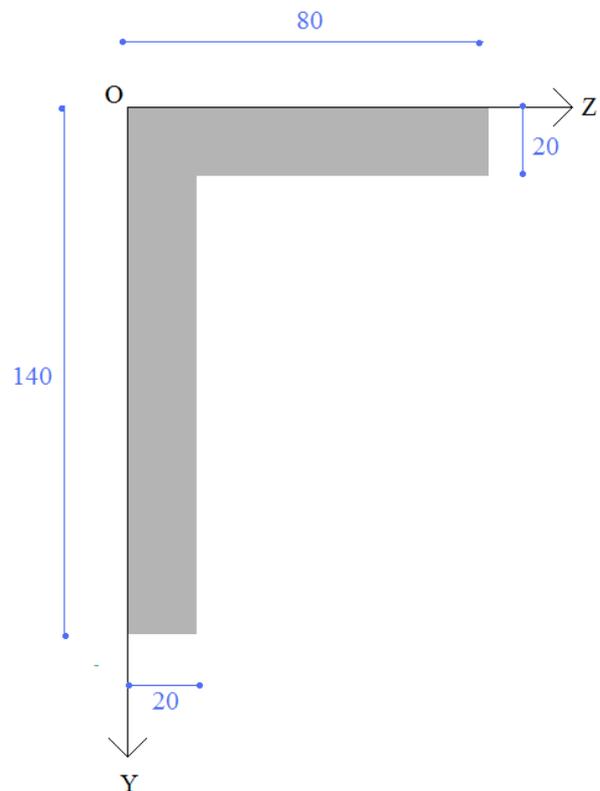


Calculer  $I_z$  avec un rayon égal à  $R$ .

Exercice [ 45 ]

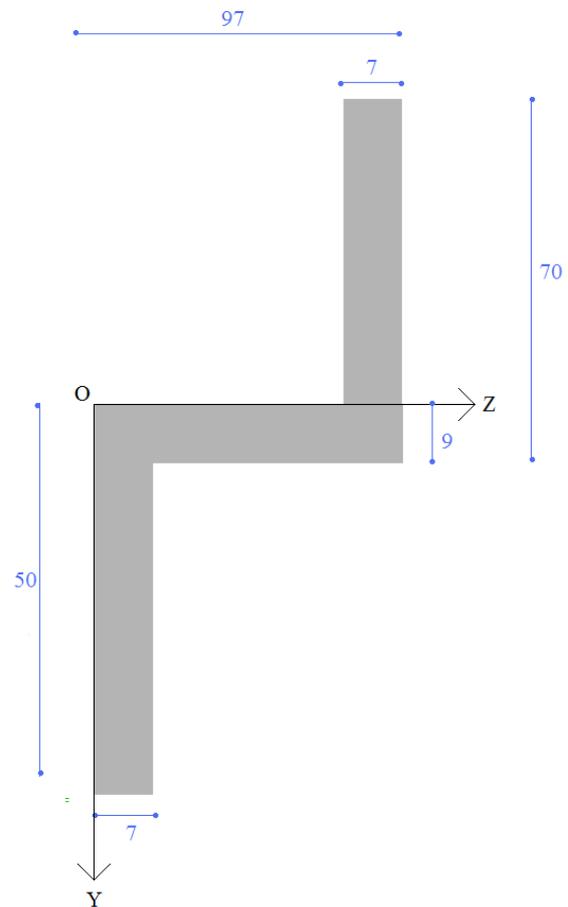
Calculer les moments d'inertie  $I_{Gz}$  et  $I_{Gy}$  de la cornière suivante.

Déterminer les axes principaux et les moments d'inertie principaux

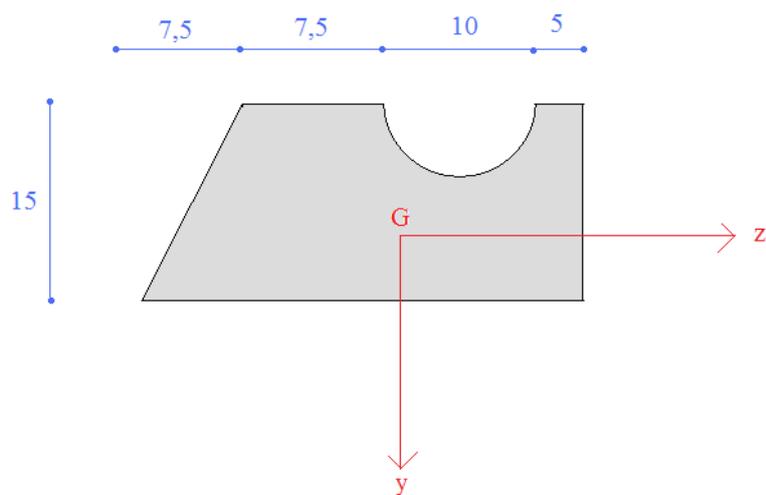


Exercice [ 46 ]

Calculer les moments d'inertie  $I_{Gz}$  et  $I_{Gy}$  de la cornière suivante.  
Déterminer les axes principaux et les moments d'inertie principaux

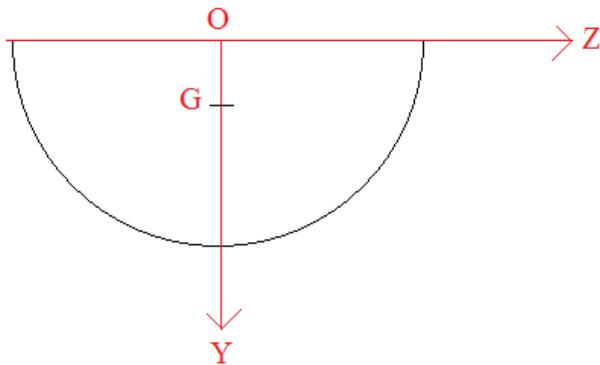


Exercice [ 47 ]



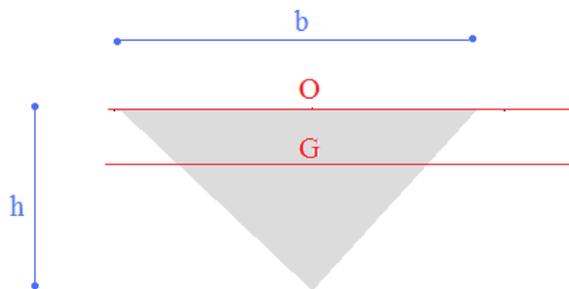
Calculer le moment d'inertie  $I_{Gz}$

Exercice [ 48 ]



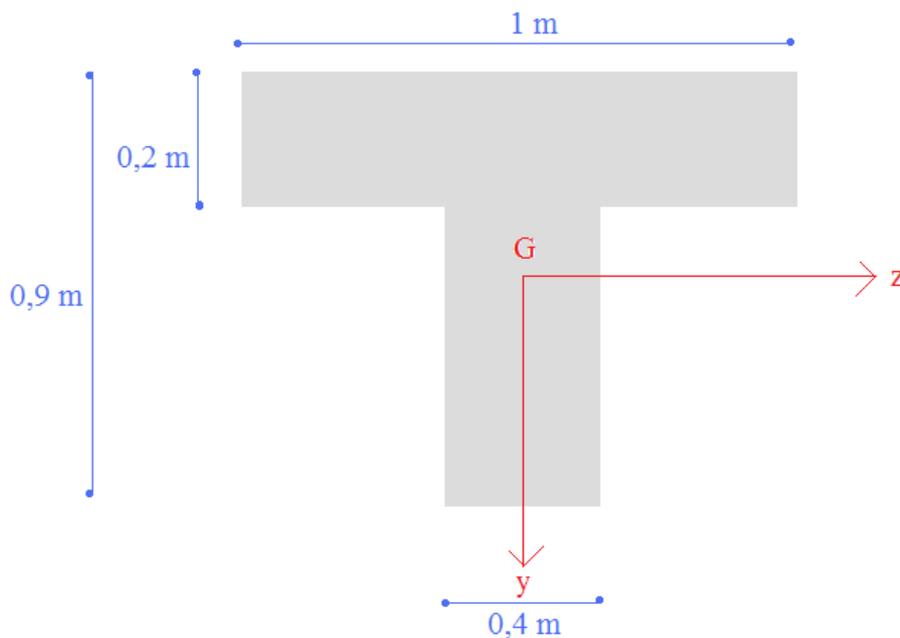
Calculer les moments d'inertie  $I_{GZ}$  et  $I_{Oz}$  d'un demi-cercle de rayon R.

Exercice [ 49 ]



Calculer les moments d'inertie  $I_{GZ}$  et  $I_{Oz}$  d'un triangle de base b et de hauteur h.

Exercice [ 50 ]



Calculer le moment d'inertie  $I_{Gz}$ .