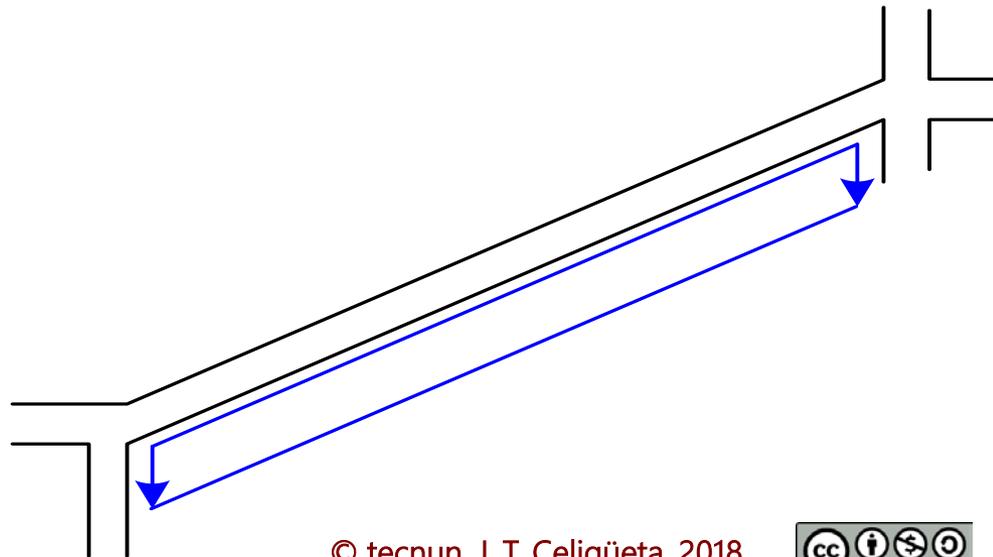




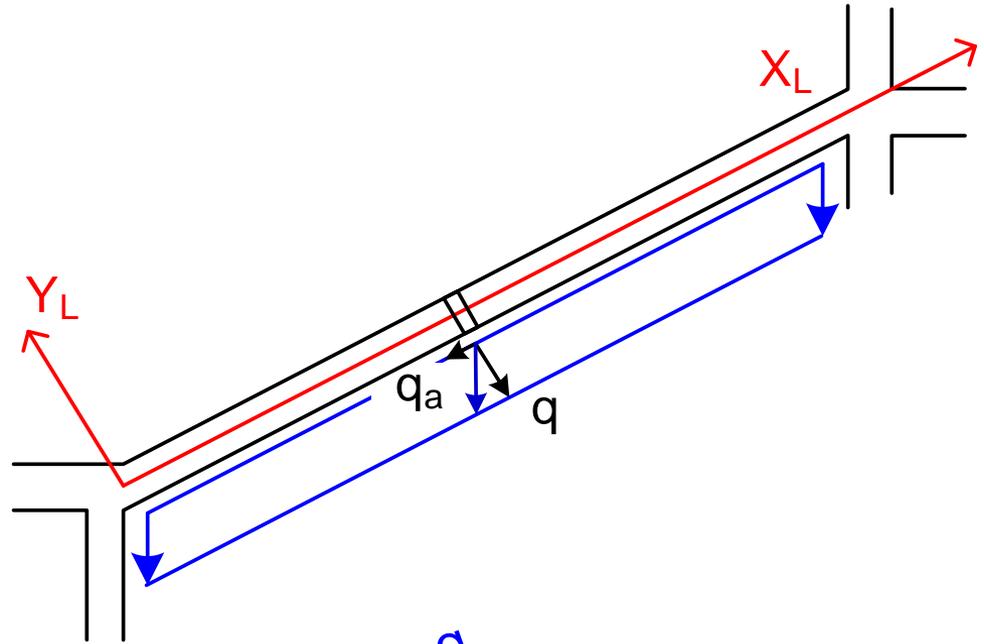
Comportamiento de la barra prismática plana

Resumen



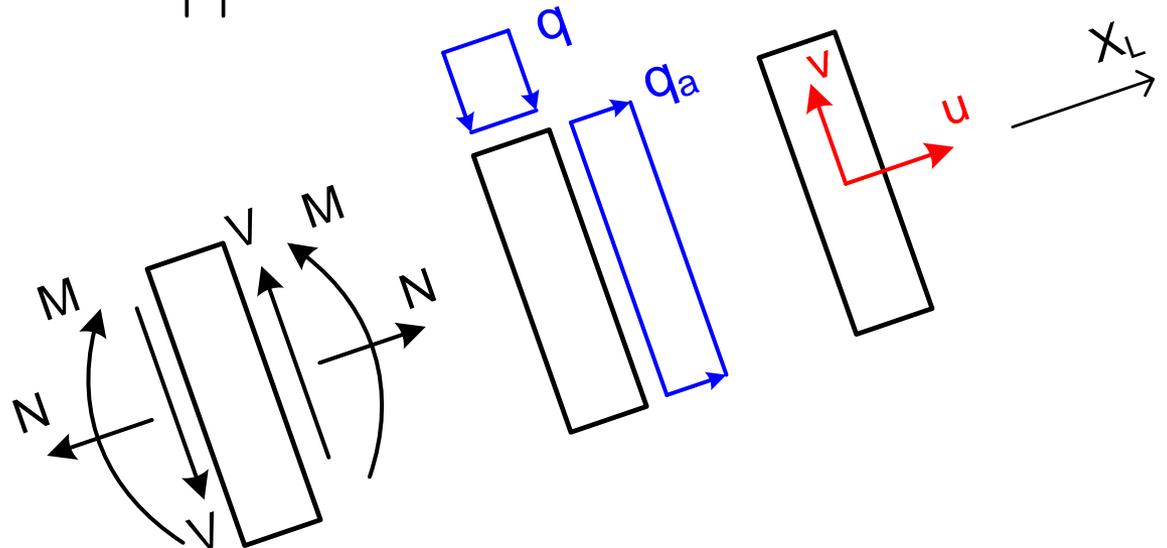
Pieza prismática esbelta plana

Estudio en su sistema local



Criterios de signos

Fuerzas q, q_a por unidad de longitud



Campo de deformaciones en una barra plana

Centro de gravedad G: $u(x)$ $v(x)$

Punto cualquiera (distancia y de G)

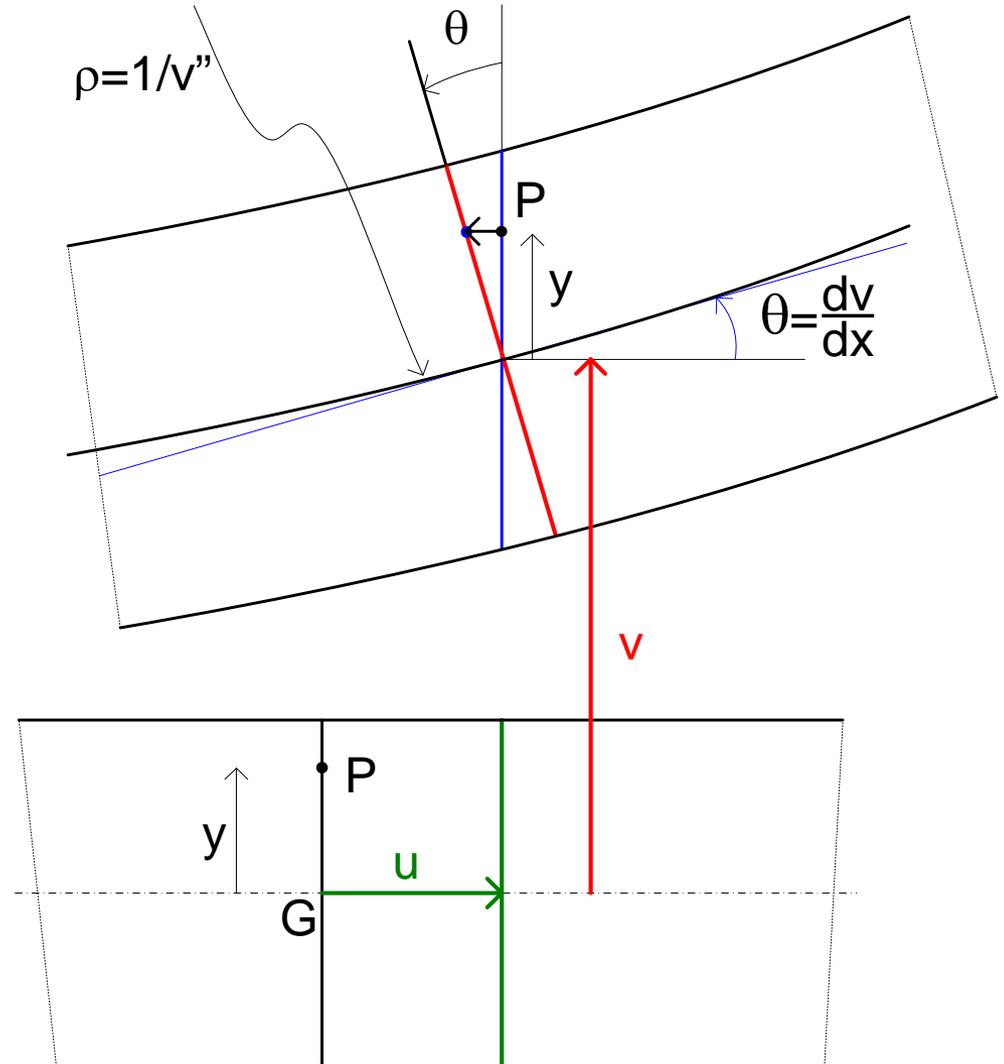
$$u_P = u - \theta y = u - \frac{dv}{dx} y$$

$$v_P = v$$

$$\text{Se supone: } \theta \approx \tan \theta = \frac{dv}{dx}$$

Hipótesis de Navier (piezas esbeltas)

Secciones rectas perpendiculares a la fibra neutra se mantienen rectas y perpendiculares a la fibra neutra en el estado deformado

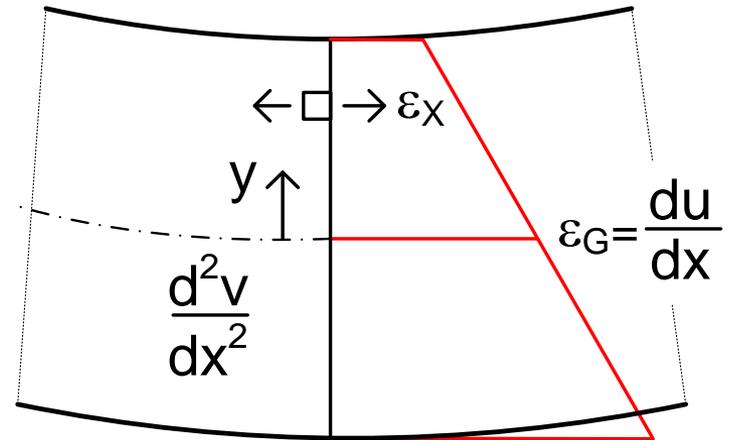


Deformaciones unitarias

$$\epsilon_x = \frac{\partial u_P}{\partial x} = \frac{du}{dx} - \frac{d^2v}{dx^2} y$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v_P}{\partial y} = 0$$

Axial
Flexión

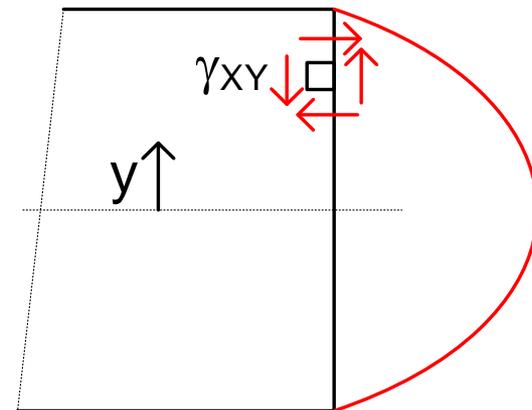


$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_P}{\partial y} + \frac{\partial v_P}{\partial x} = -\frac{dv}{dx} + \frac{dv}{dx} = 0$$

La hipótesis de flexión de Navier no predice la deformación de cortante

La teoría del esfuerzo cortante proporciona la deformación γ_{xy}

$$\gamma_{xy} = \frac{V \bar{A}}{G I b}$$

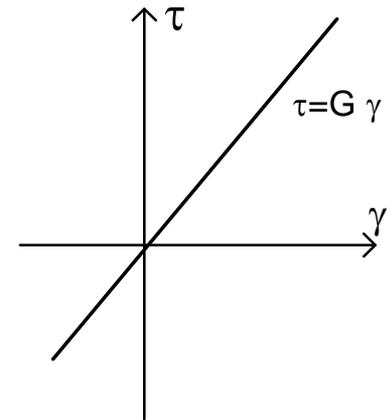
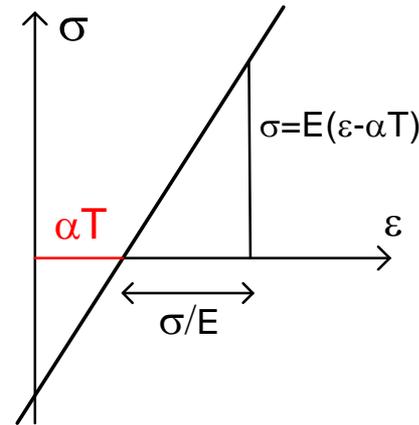


Tensiones. Material lineal

Material lineal

$$\sigma = E(\epsilon - \alpha T)$$

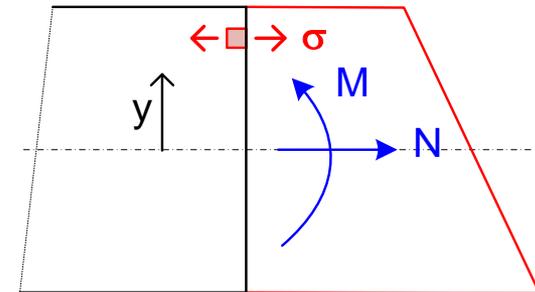
$$\tau = G \gamma$$



Relación entre esfuerzos y tensiones

- Tensión axial

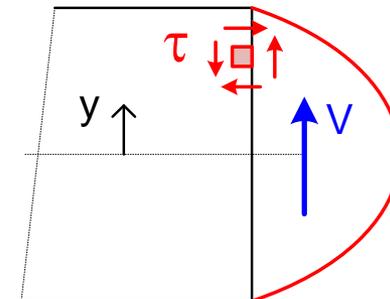
$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M y}{I}$$



- Tensión cortante

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy}$$

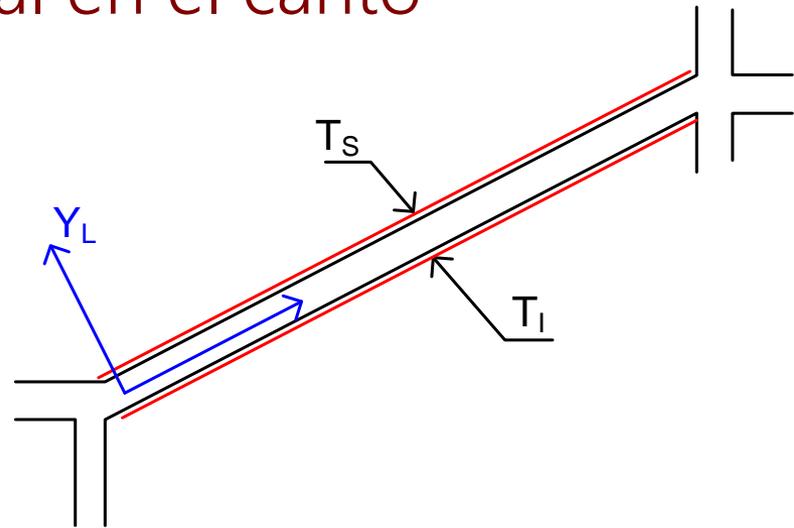
$$\tau = \frac{V \bar{A}}{I b}$$



Temperaturas: variación lineal en el canto

Cara superior: T_S

Cara inferior: T_I



Resulta ventajoso usar:

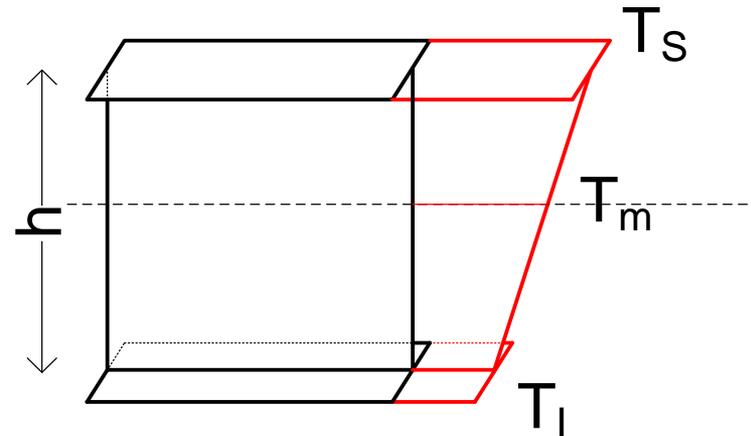
Valor medio en el centro:

$$T_m = \frac{T_S + T_I}{2}$$

Gradiente en el canto de la viga:

$$T_g = \frac{T_S - T_I}{h}$$

Normalmente $T_g = 0$



Variación lineal en el canto de la viga: $T = T_m + y T_g$

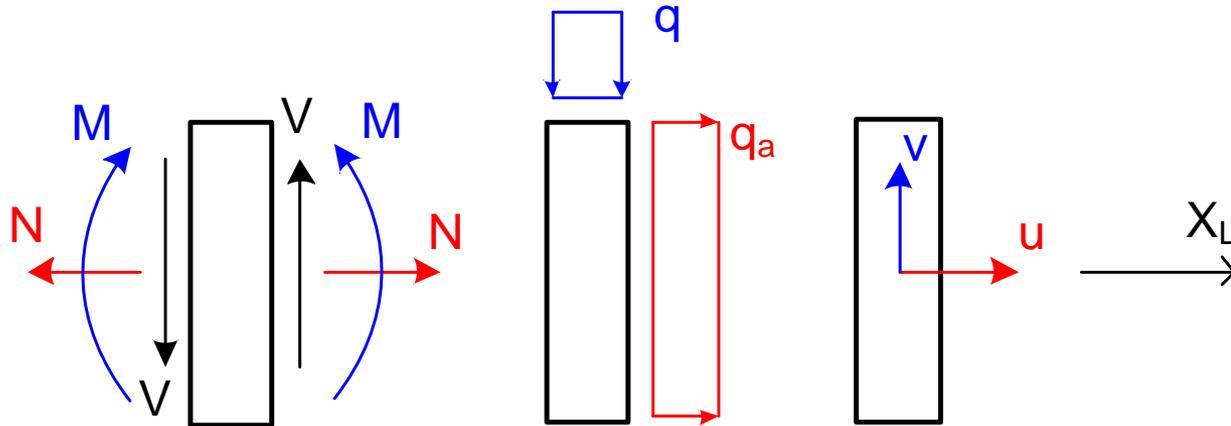
Ecuaciones de equilibrio

Barra de propiedades uniformes

Flexión lateral: $q = -E I \frac{d^4 v}{dx^4}$

Deformación axial: $E A \frac{d^2 u}{dx^2} = -q_a$

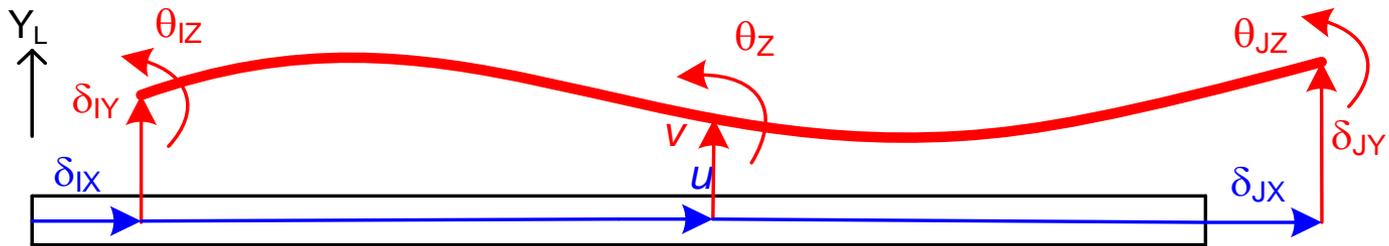
Ecuaciones $u(x), v(x)$
desacopladas en la barra



Deformación de la barra prismática uniforme

Axial:

$$E A \frac{d^2 u}{dx^2} = -q_a \quad \left\{ \begin{array}{ll} q_a = 0 & u = C_1 x + C_2 \\ q_a = C^{te} & u = C_1 x + C_2 + \frac{q_a x^2}{2} \end{array} \right.$$

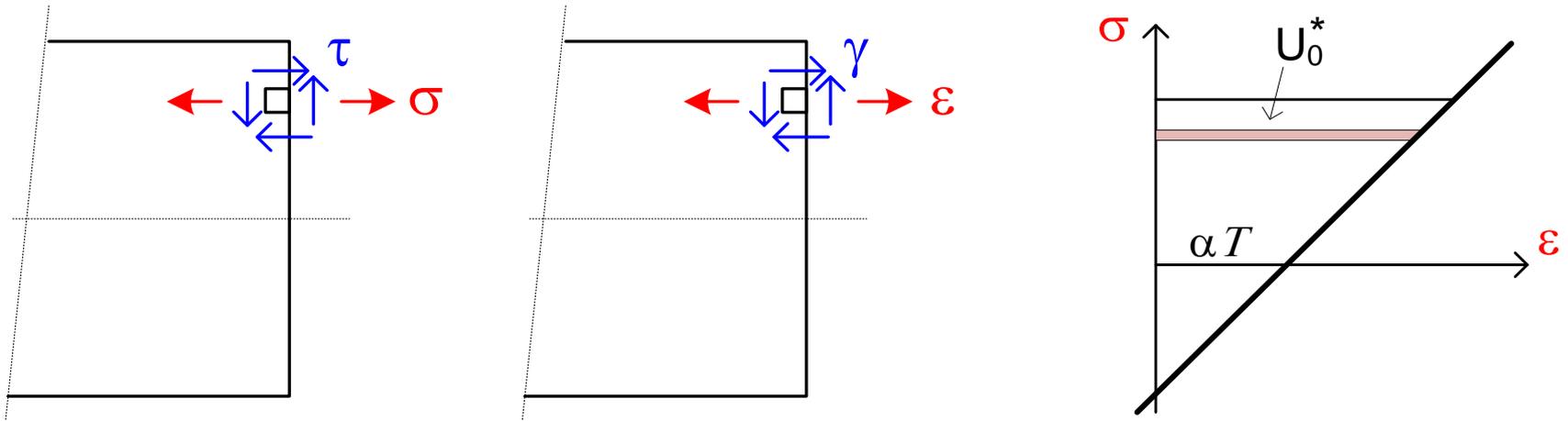


Flexión:

$$q = -E I \frac{d^4 v}{dx^4} \quad \left\{ \begin{array}{ll} q = 0 & v = C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4 \\ q = C^{te} & v = C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4 - \frac{q x^4}{24 E I} \end{array} \right.$$

Densidad de energía elástica complementaria U_0^*

Energía acumulada en un punto, por unidad de volumen



$$U_0^* = \int_0^\sigma \epsilon d\sigma + \int_0^\tau \gamma d\tau$$

Despreciamos U^* debida a las tensiones cortantes τ

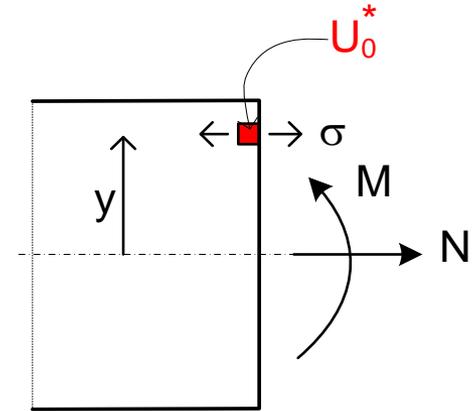
Sustituimos ϵ de la ecuación constitutiva del material: $\sigma = E(\epsilon - \alpha T)$

$$U_0^* = \int_0^\sigma \left(\frac{\sigma}{E} + \alpha T \right) d\sigma = \frac{\sigma^2}{2E} + \alpha T \sigma$$

Energía elástica acumulada en una barra plana

Por unidad de volumen:
$$U_0^* = \frac{\sigma^2}{2E} + \alpha T \sigma$$

Sustituyendo σ :
$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M y}{I}$$

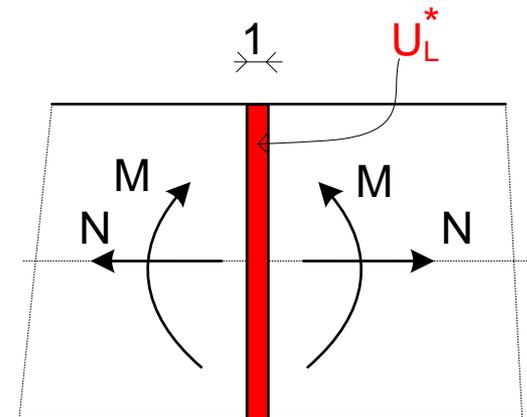


Integrando al área de la barra
(desarrollando y simplificando)

$$U_L^* = \int_A U_0^* dA$$

Energía por unidad de longitud

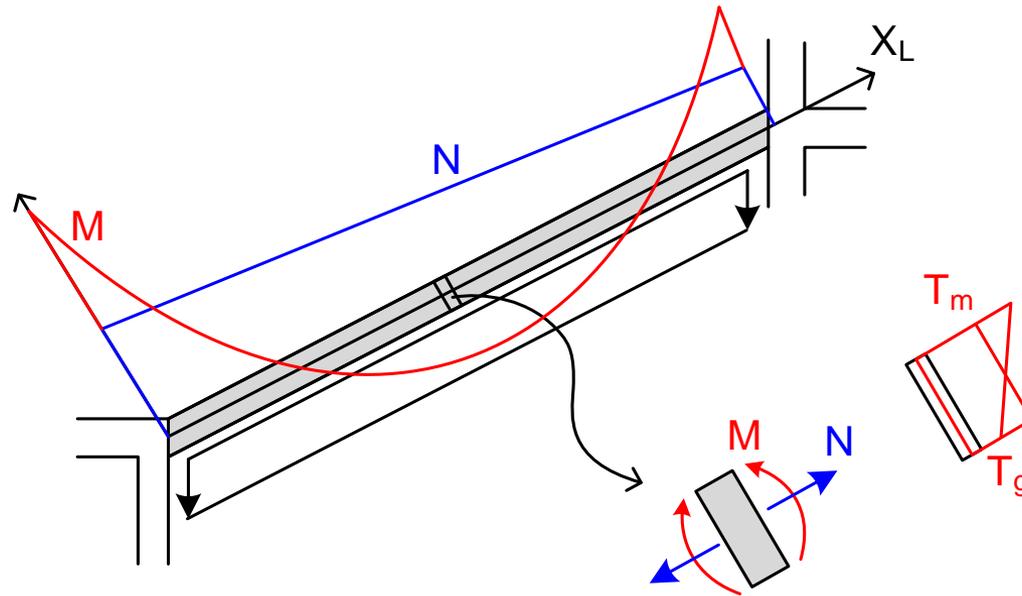
$$U_L^* = \frac{N^2}{2EA} + \frac{M^2}{2EI} + N \alpha T_m - M \alpha T_g$$



Integrando en la longitud de la barra
$$U_b^* = \int_L U_L^* dx$$

Energía elástica acumulada en una barra plana

$$U_b^* = \int \frac{N^2}{2EA} dx + \int \frac{M^2}{2EI} dx + \int N \alpha T_m dx - \int M \alpha T_g dx$$

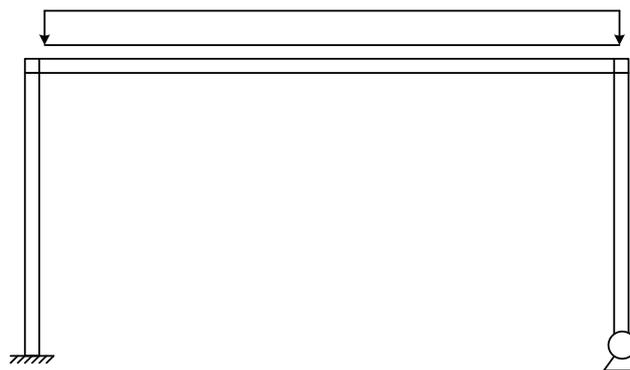


Barra uniforme, con N constante:

$$U_b^* = \frac{N^2 L}{2EA} + \int \frac{M^2}{2EI} dx + N \alpha T_m L - \int M \alpha T_g dx$$

Método general de flexibilidad

Aplicación a pórticos planos



Punto de partida

Energía complementaria acumulada en una barra plana:

$$U_b^* = \int \frac{N^2}{2EA} dx + \int \frac{M^2}{2EI} dx + \int N\alpha T_m dx - \int M\alpha T_g dx$$

Toda la estructura:
$$U^* = \sum_b U_b^*$$

2º Teorema de F. Engesser:
$$\frac{\partial U^*}{\partial X_j} = 0 \quad \forall X_j \in \{N, M, V\}$$

Teorema de Crotti- Engesser:
$$\Delta_i = \frac{\partial U^*}{\partial P_i} \quad i = 1, n$$

1. Fase previa

1. Clasificar el pórtico: hiperestático

$$6b+r > 3n+3b+c \quad h=(6b+r)-(3n+3b+c)$$

2. Elegir h incógnitas hiperestáticas X_j Pueden ser:

Reacciones exteriores (fuerzas o momentos)

$$X_j = R_i \quad X_j = M_i$$

Esfuerzos interiores en las barras (fuerzas o momentos)

$$X_j = N_i \quad X_j = V_i \quad X_j = M_i$$

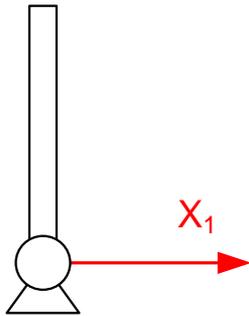
Punto crítico. Heurístico. No hay un método universal

X_j no dependen del sistema de cargas exteriores

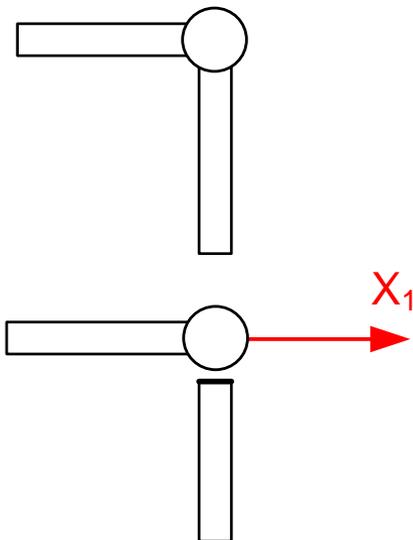
El pórtico obtenido al eliminar las X_j debe ser isostático

Incógnitas hiperestáticas en pórticos

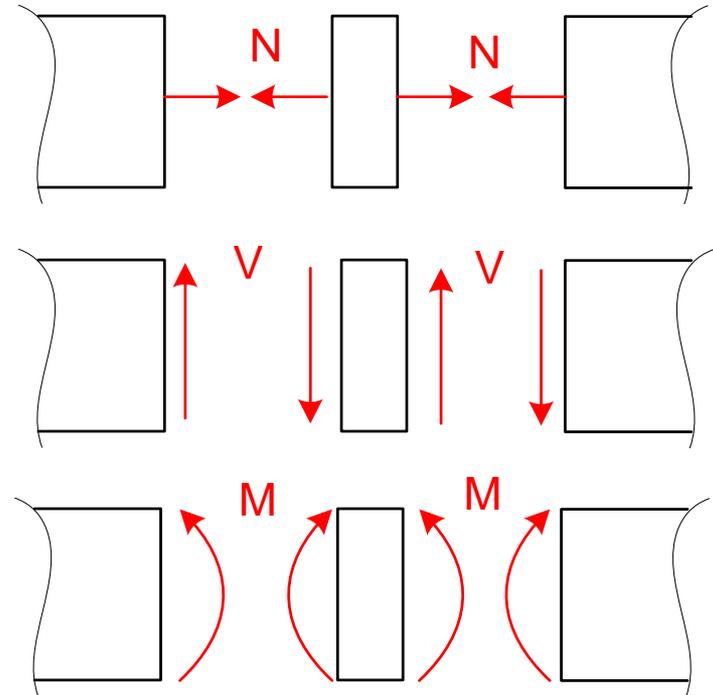
Reacciones exteriores



Fuerzas interiores



Esfuerzos interiores (N, M, V) en las barras



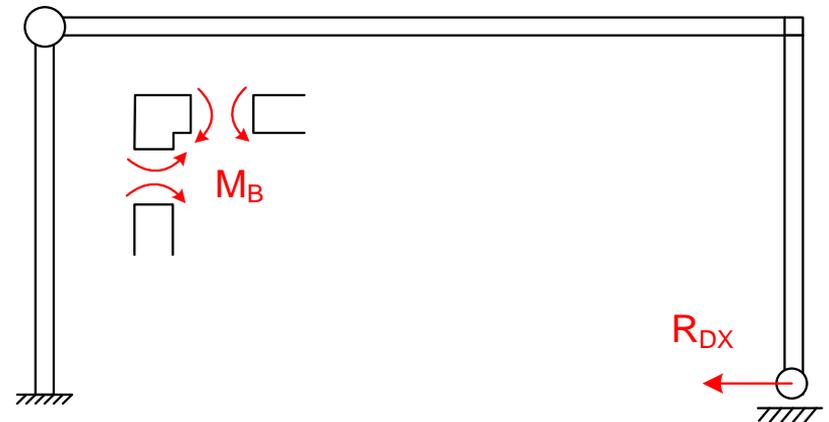
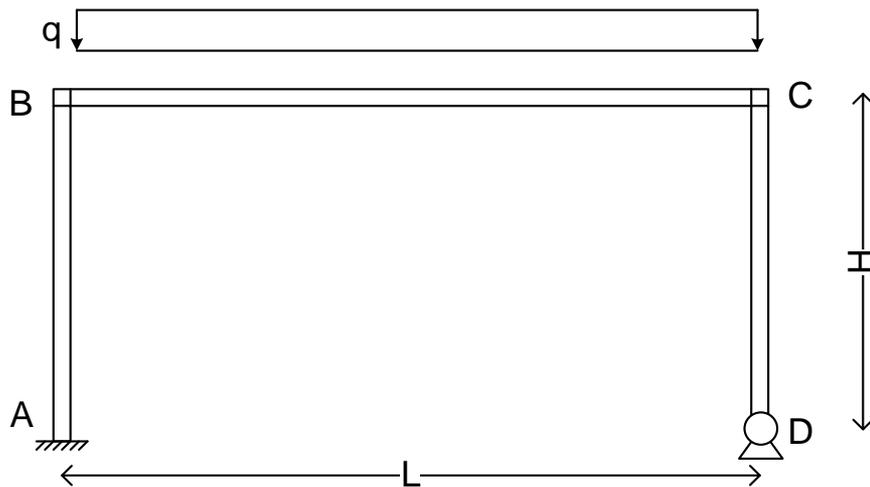
Fase previa. Ejemplo

1. Hallar h $b=3$ $r=5$ $n=4$ $c=0$

$$h = (6 \cdot 3 + 5) - (3 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 0) = 2$$

2. Elegir 2 incógnitas hiperestáticas

Varias posibilidades: $X_1 = R_{DX}$ $X_2 = M_B$



$L=1000$ cm $H=500$ cm $q=4$ kg/cm

$E=2.1 \cdot 10^6$ kg/cm² $A=198$ cm² $I=57680$ cm⁴

Todas las barras HEB 400

2. Superposición de 1+ h casos isostáticos

1. Eliminar las h incógnitas hiperestáticas:

Si X_j están bien elegidas se obtiene un pórtico isostático y estable

2. Superposición de 1+ h casos, todos ellos **isostáticos**

Caso 0: sólo las fuerzas exteriores

Esfuerzos N^0, V^0, M^0

Casos 1 a h : sólo valor unidad de la incógnita X_j

Esfuerzos N^j, V^j, M^j

Siempre se pueden calcular, si la X está bien elegida

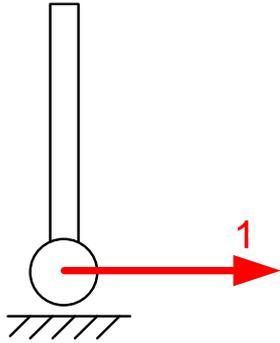
Esfuerzos reales

$$N = N^0 + \sum_{j=1,h} X_j N^j$$

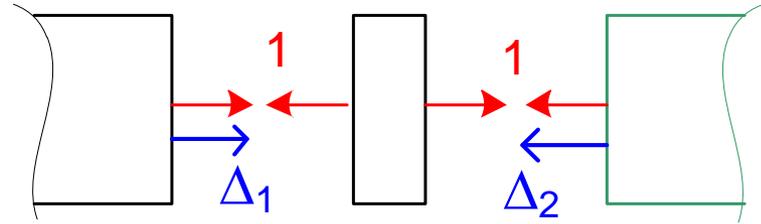
$$M(x) = M^0(x) + \sum_{j=1,h} X_j M^j(x)$$

Valores unidad de las incógnitas X

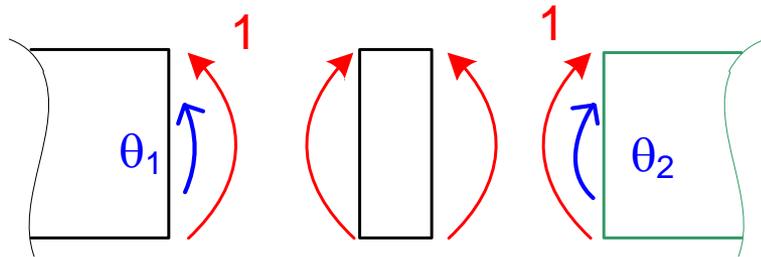
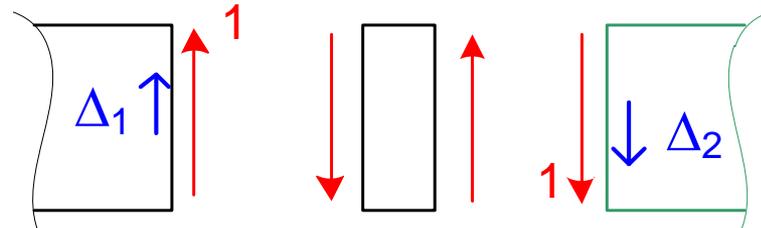
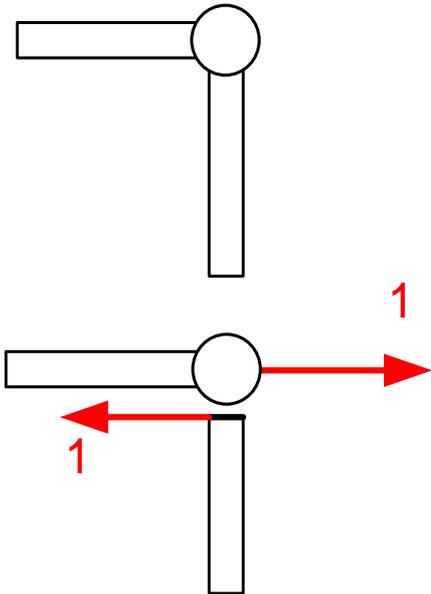
Reacciones



Esfuerzos interiores en las barras

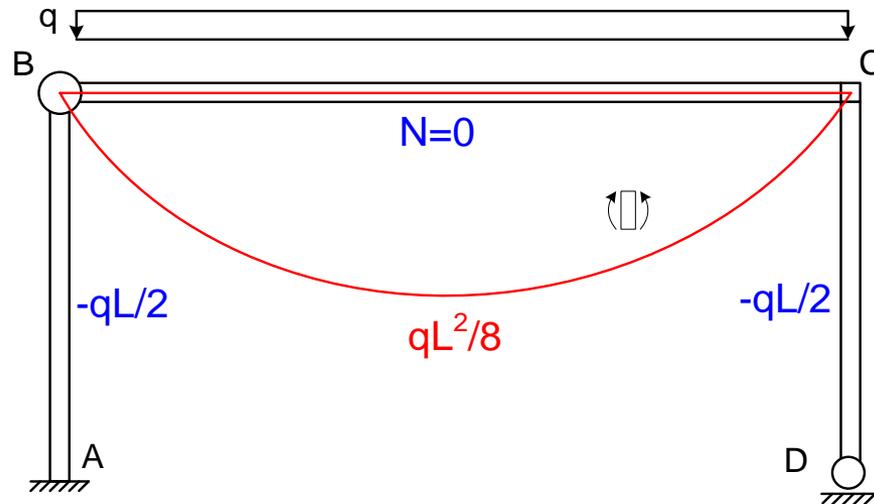


Fuerzas interiores

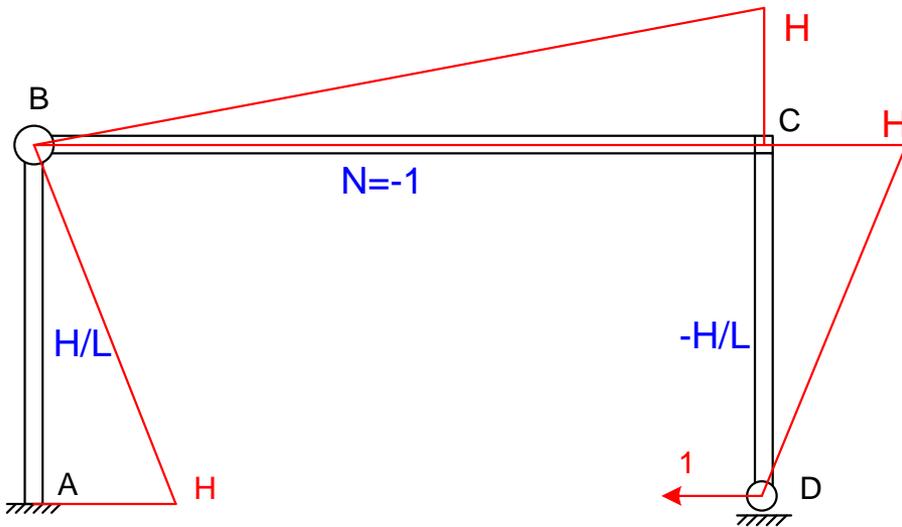


3. Esfuerzos en los 1+h casos isostáticos. Ejemplo

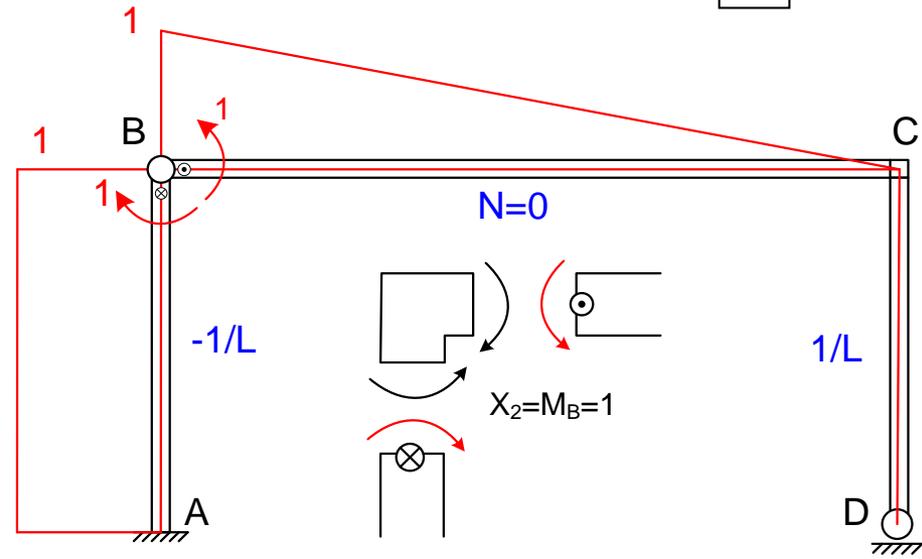
0



1

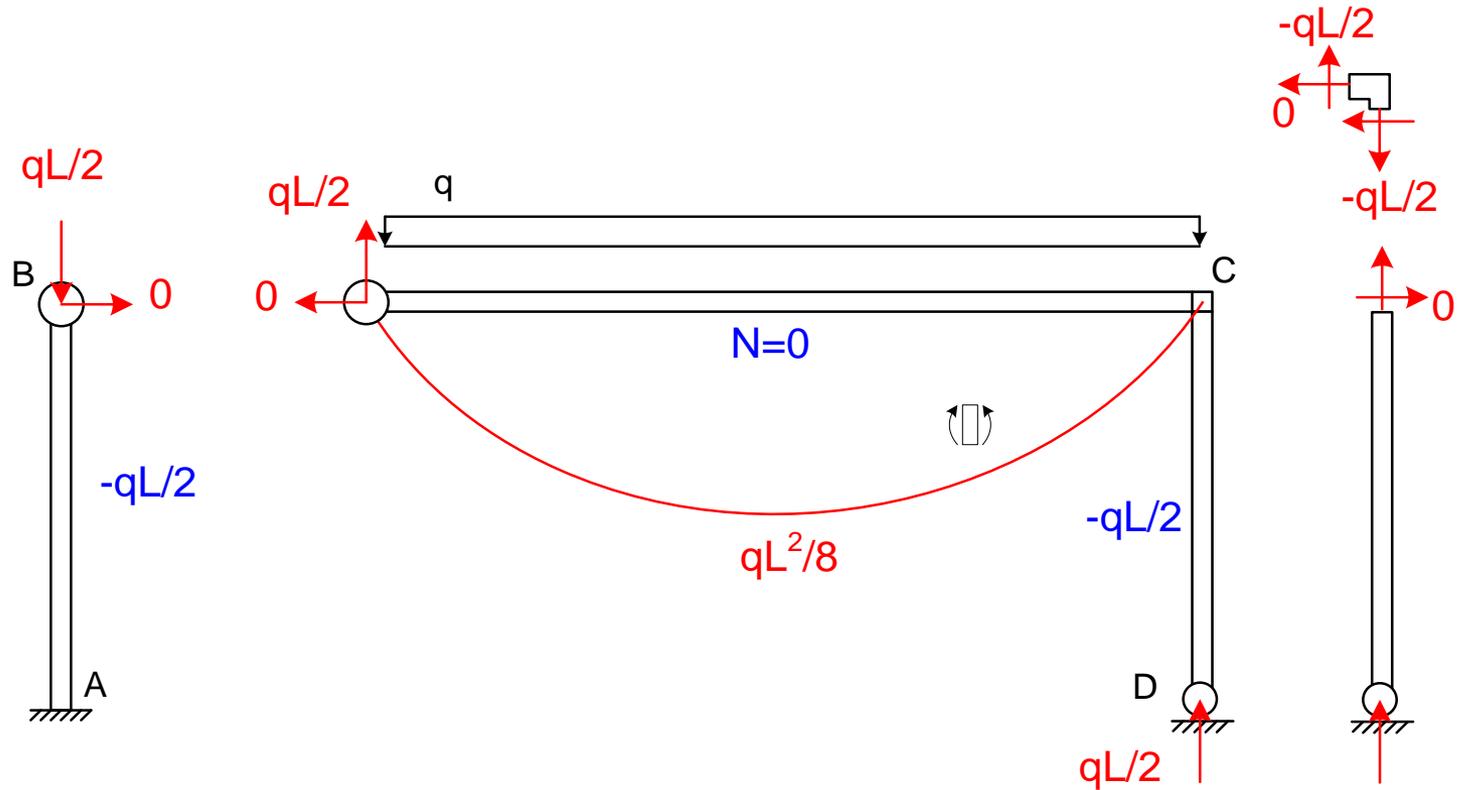


2



Ejemplo. Caso 0

0



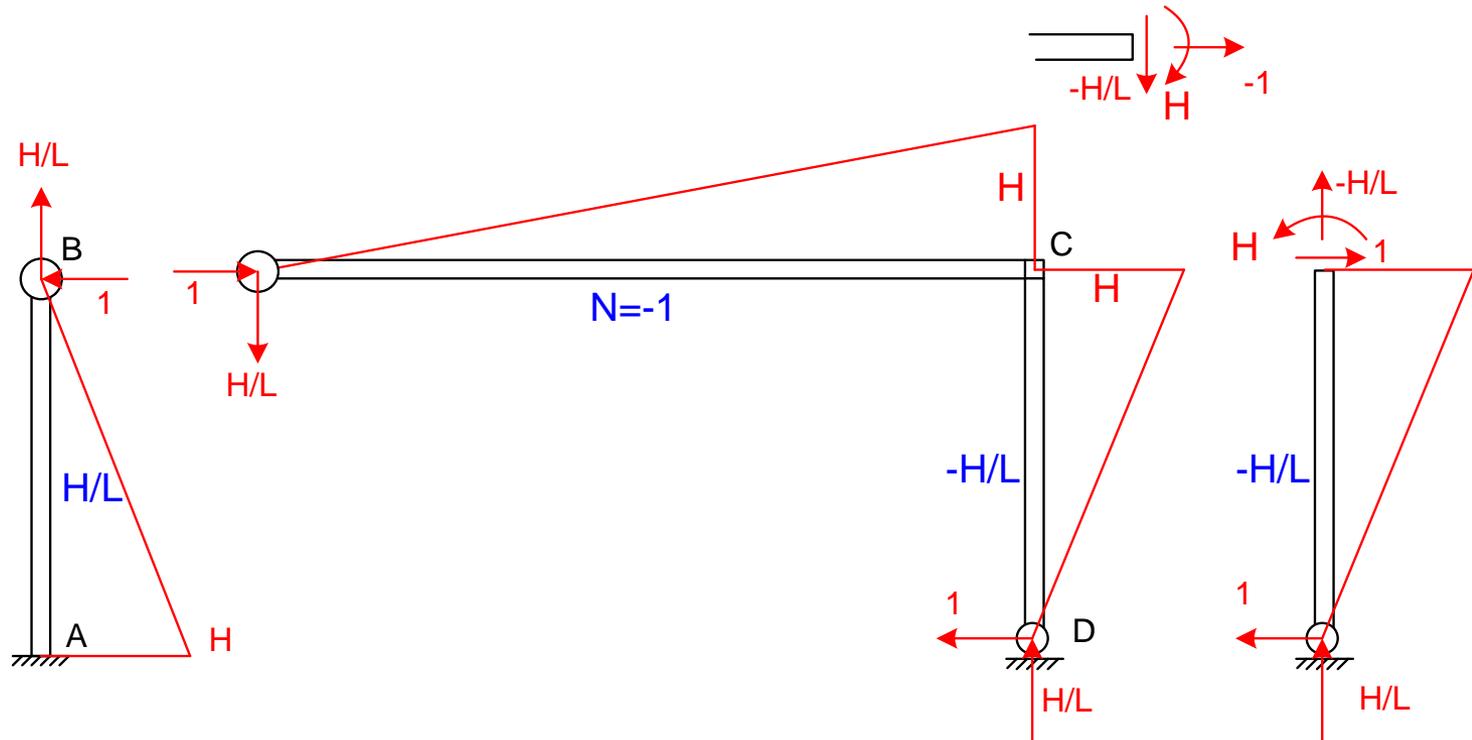
$$\Sigma M_B^{BCD} = 0 \rightarrow R_{DY} = qL/2$$

$$\Sigma F_X^{BCD} = 0 \rightarrow B_X = 0$$

$$\Sigma F_Y^{BCD} = 0 \rightarrow B_Y = qL/2$$

Ejemplo. Caso 1

1



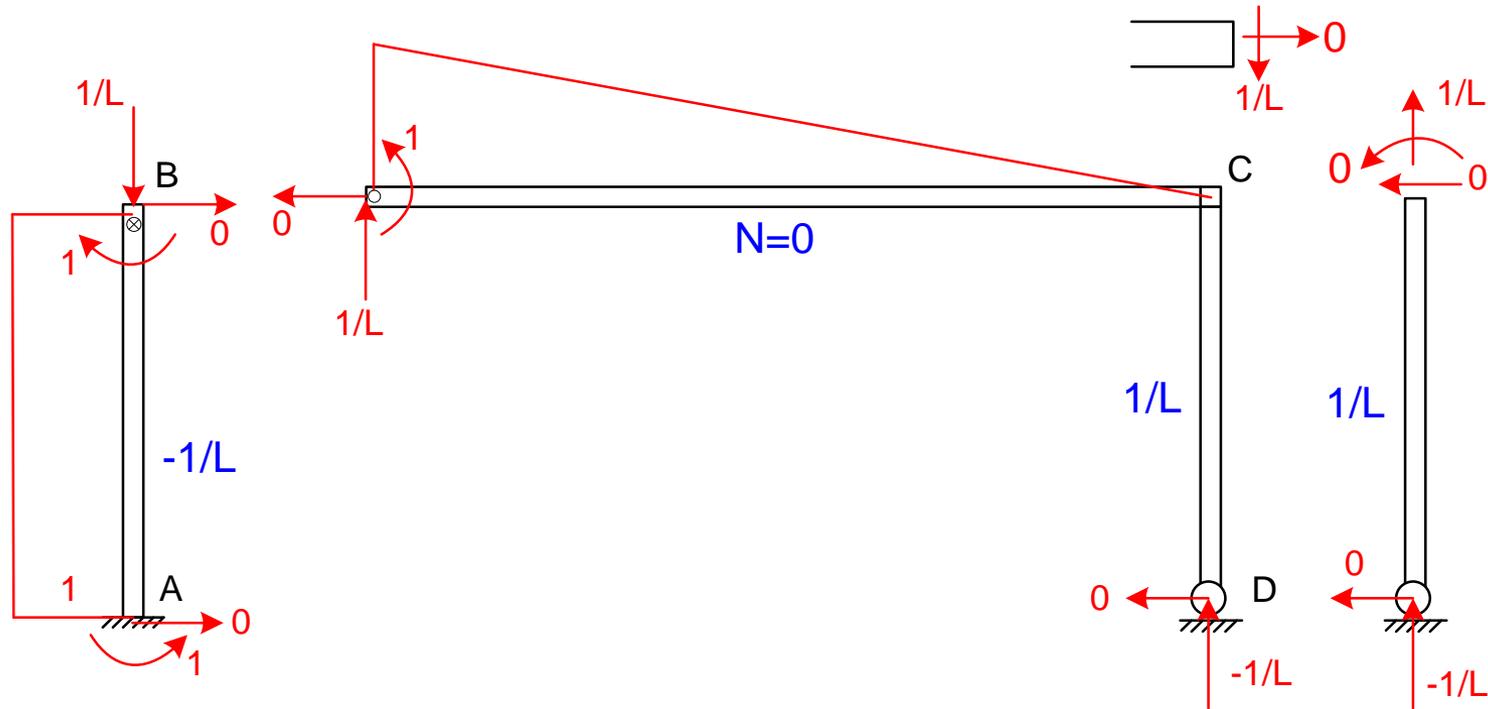
$$\Sigma M_B^{BCD} = 0 \rightarrow R_{DY}L = 1 \cdot H$$

$$\Sigma F_X^{BCD} = 0 \rightarrow B_X = 1$$

$$\Sigma F_Y^{BCD} = 0 \rightarrow B_Y = -R_{DY}$$

Ejemplo. Caso 2

2



$$\Sigma M_B^{BCD} = 0 \rightarrow R_{DY}L + 1 = 0$$

$$\Sigma F_X^{BCD} = 0 \rightarrow B_X = 1$$

$$\Sigma F_Y^{BCD} = 0 \rightarrow B_Y = -R_{DY} = 1/L$$

4. Condiciones de compatibilidad. Planteamiento

X_j es una reacción en un punto fijo:
(Teorema de Crotti - Engesser) $\frac{\partial U^*}{\partial X_i} \equiv \frac{\partial U^*}{\partial R_i} = \Delta_i = 0$

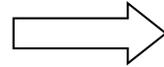
X_j es un esfuerzo interior:
(2º Teorema de Engesser) $\frac{\partial U^*}{\partial X_j} = 0$

Siempre es del tipo: $\frac{\partial U^*}{\partial X_j} = 0 \quad j = 1, h$

Nota: se estudiará más adelante el caso de que exista una deformación de valor conocido impuesto (no nulo) en la dirección de la reacción

4. Condiciones de compatibilidad. Desarrollo (1)

h ecuaciones de compatibilidad



$$\frac{\partial U^*}{\partial X_j} = 0 \quad j = 1, h$$

$$\int N \frac{1}{EA} \frac{\partial N}{\partial X_j} dx + \int M \frac{1}{EI} \frac{\partial M}{\partial X_j} dx + \int \alpha T_m \frac{\partial N}{\partial X_j} dx - \int \alpha T_g \frac{\partial M}{\partial X_j} dx = 0$$

$$\frac{\partial N}{\partial X_j} = N^j$$

$$\frac{\partial M(x)}{\partial X_j} = M^j(x)$$

$$\int N \frac{1}{EA} N^j dx + \int M \frac{1}{EI} M^j dx + \int \alpha T_m N^j dx - \int \alpha T_g M^j dx = 0$$

No nos sirve así

Sustituyendo N, M

Buscamos X_j

$$N = N^0 + \sum_k X_k N^k \quad M = M^0 + \sum_k X_k M^k$$

4. Condiciones de compatibilidad. Desarrollo (2)

$$\int \left(N^0 + \sum_k X_k N^k \right) \frac{1}{EA} N^j dx + \int \left(M^0 + \sum_k X_k M^k \right) \frac{1}{EI} M^j dx + \int \alpha T_m N^j dx - \int \alpha T_g M^j dx = 0$$

Reordenando Σ e \int

$$\sum_k \left(\int N^j \frac{1}{EA} N^k dx + \int M^j \frac{1}{EI} M^k dx \right) X_k = - \int N^0 \frac{1}{EA} N^j dx - \int M^0 \frac{1}{EI} M^j dx - \int \alpha T_m N^j dx + \int \alpha T_g M^j dx$$

$$\sum_k f_{jk} X_k = D_j \quad j = 1, h$$

Sistema de h ecuaciones con h incógnitas X_j

4. Condiciones de compatibilidad. Aplicación

$$\sum_k f_{jk} X_k = D_j \quad j = 1, h \quad \mathbf{f X} = \mathbf{D}$$

Coeficiente de flexibilidad cruzado entre X_j y X_k

$$f_{jk} = \int N^j \frac{1}{EA} N^k dx + \int M^j \frac{1}{EI} M^k dx$$

Término de carga para X_j

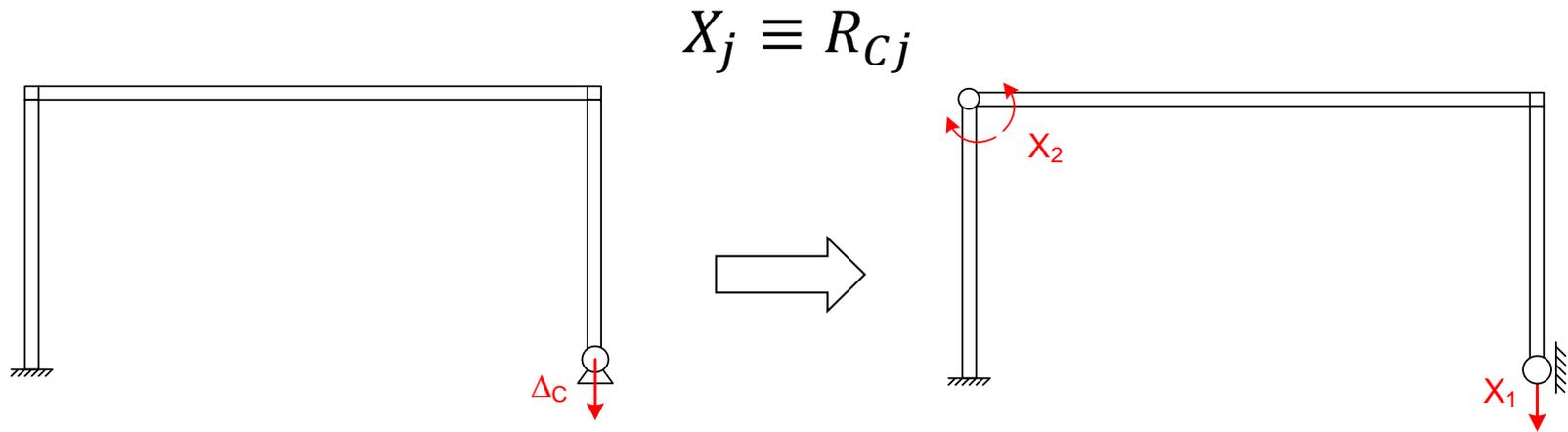
$$D_j = - \int N^0 \frac{1}{EA} N^j dx - \int M^0 \frac{1}{EI} M^j dx - \int \alpha T_m N^j dx + \int \alpha T_g M^j dx$$

- Matriz de coeficientes de flexibilidad [f]
 - (h x h) simétrica
 - Definida positiva si las X_j están bien elegidas (linealmente independientes)

5. Deformaciones impuestas en los apoyos (1)

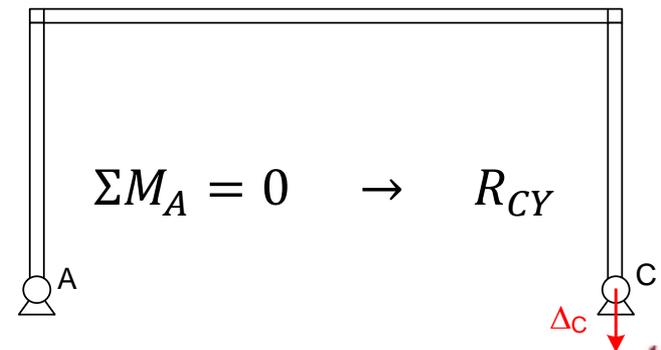
Deformación impuesta conocida Δ_c :

Elegir como incógnita hiperestática X_j la reacción en la dirección de la deformación impuesta



Siempre se puede elegir.

Si no se puede: la reacción es isostática, y la deformación impuesta en su dirección no produce esfuerzos.



5. Deformaciones impuestas en los apoyos (y 2)

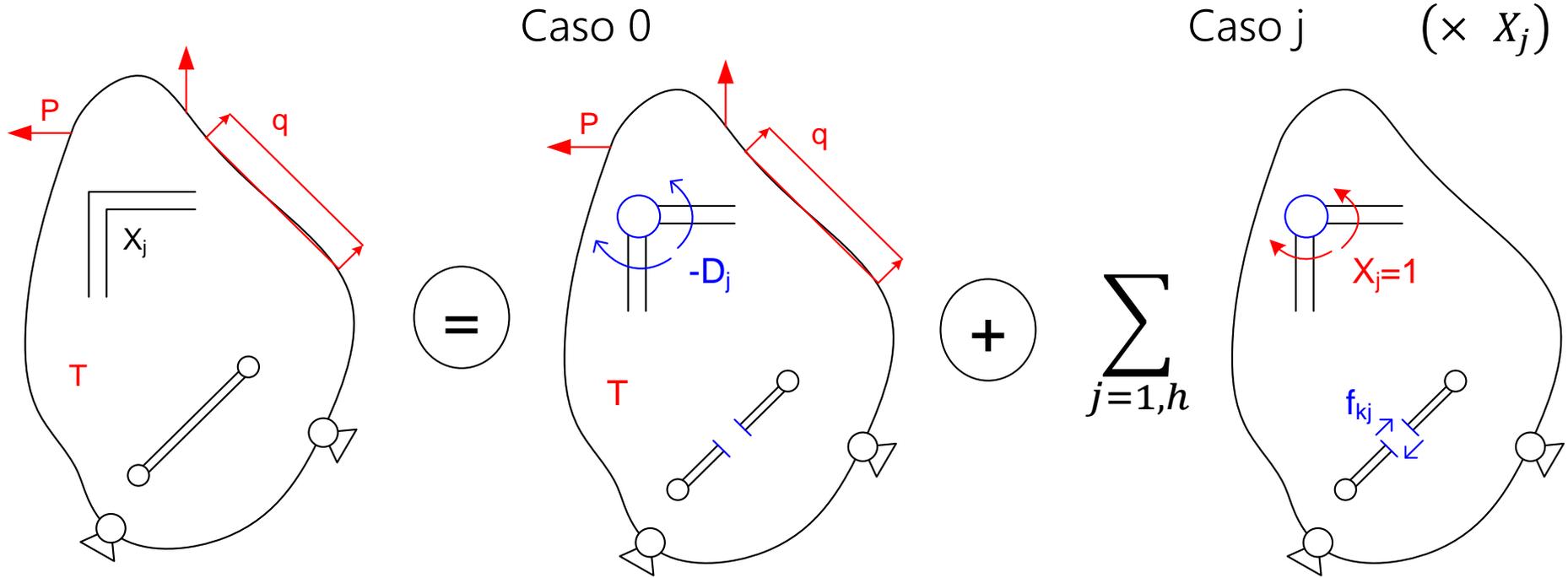
Condición de compatibilidad asociada a la deformación conocida

$$\frac{\partial U^*}{\partial X_j} \equiv \frac{\partial U^*}{\partial R_{Cj}} = \Delta_C$$

Mismo desarrollo. Se obtiene:

$$\sum_k X_k f_{jk} = D_j + \Delta_C$$

Resumen general



$$N = N^0 + \sum_{j=1,h} X_j N^j$$

$$+ \frac{\partial U^*}{\partial X_j} = 0 \quad j = 1, h$$

$$M(x) = M^0(x) + \sum_{j=1,h} X_j M^j(x)$$

$$\sum_k X_k f_{jk} = D_j \quad j = 1, h$$

Unidades

Incógnitas hiperestáticas X_j :

$$X_j = \{N, Q\} \rightarrow |X_j| = F$$

$$X_j = \{M\} \rightarrow |X_j| = FL$$

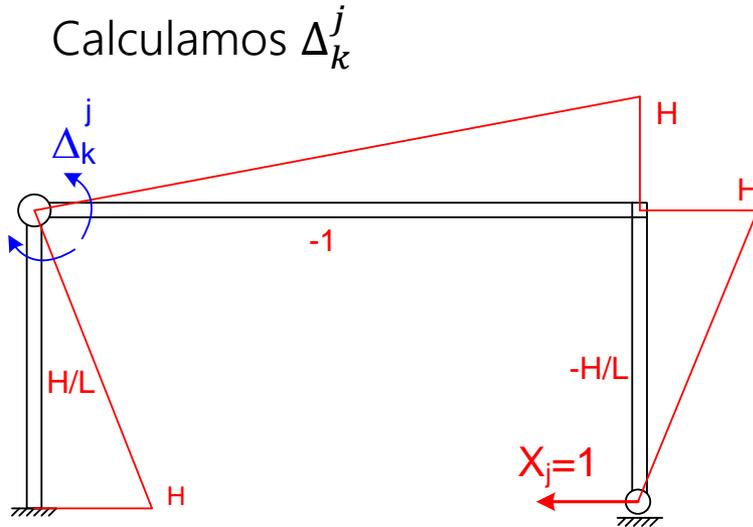
Esfuerzos en los casos $j=1, h$.

	$ N^j $	$ M^j $
$X_j \equiv \{N, V\} \quad X_j = F$	$\frac{F}{F} = 1$	$\frac{FL}{F} = L$
$X_j \equiv \{M\} \quad X_j = FL$	$\frac{F}{FL} = \frac{1}{L}$	$\frac{FL}{FL} = 1$

Significado físico de los coeficientes f_{jk} (1)

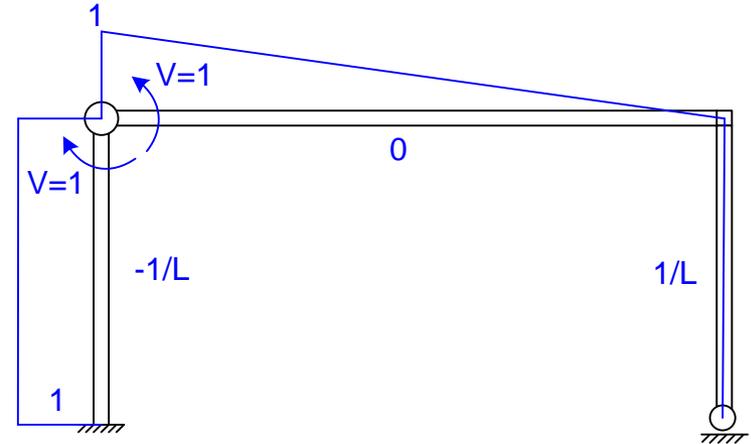
j

Real



k

Virtual

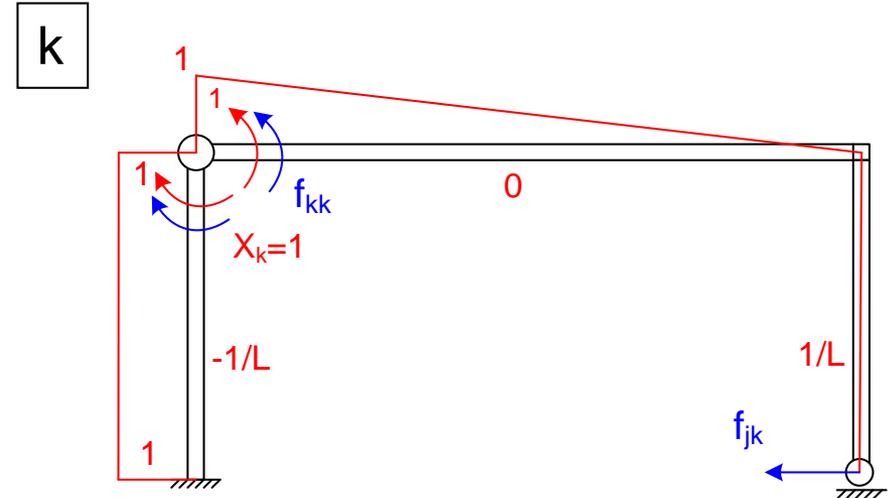
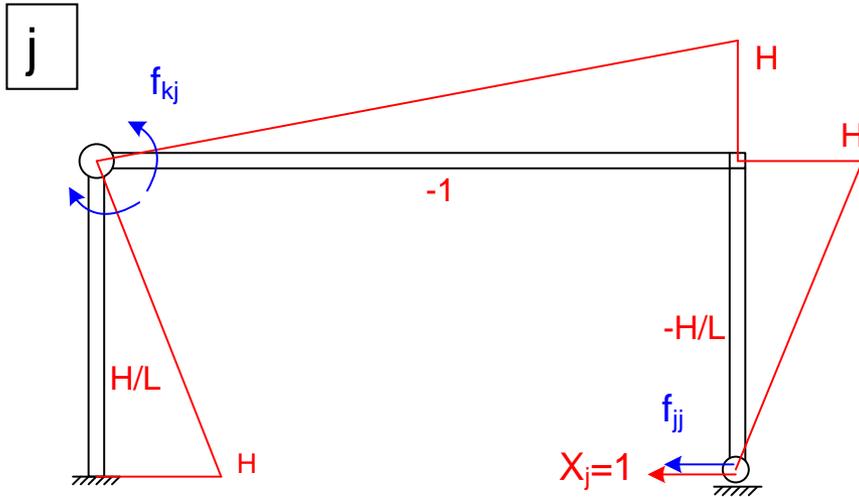


Esfuerzos reales en el caso j: $N \rightarrow N^j$ $M \rightarrow M^j$

$$\Delta_k^j = \int N \frac{1}{EA} N^{0V} dx + \int M \frac{1}{EI} M^{0V} dx = \int N^j \frac{1}{EA} N^k dx + \int M^j \frac{1}{EI} M^k dx = f_{kj}$$

Esfuerzos virtuales en la dirección k: $N^{0V} \rightarrow N^k$ $M^{0V} \rightarrow M^k$

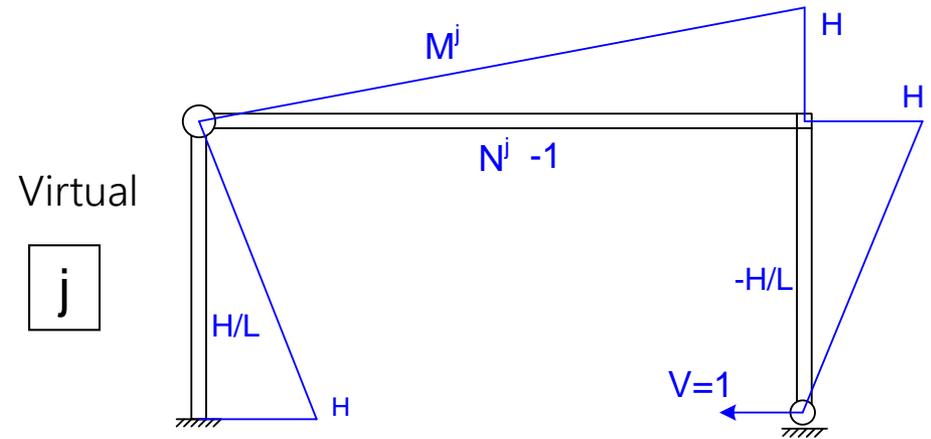
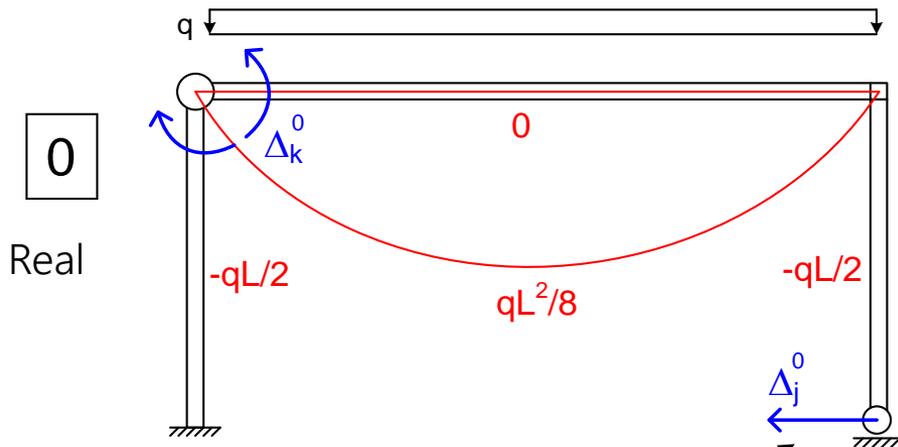
Significado físico de los coeficientes f_{jk} (y 2)



$$\Delta_{jk}^j = \int N^j \frac{1}{EA} N^k dx + \int M^j \frac{1}{EI} M^k dx = f_{kj}$$

f_{kj} = Deformación en la dirección de X_k , en el caso j

Significado físico de los coeficientes D_j (1)



Calculamos Δ_j^0

$$\Delta_j^0 = \int (N) \frac{1}{EA} (N^{0V}) dx + \int (M) \frac{1}{EI} (M^{0V}) dx + \int \alpha T_m N^{0V} dx - \int \alpha T_g M^{0V} dx$$

Esfuerzos reales: caso 0

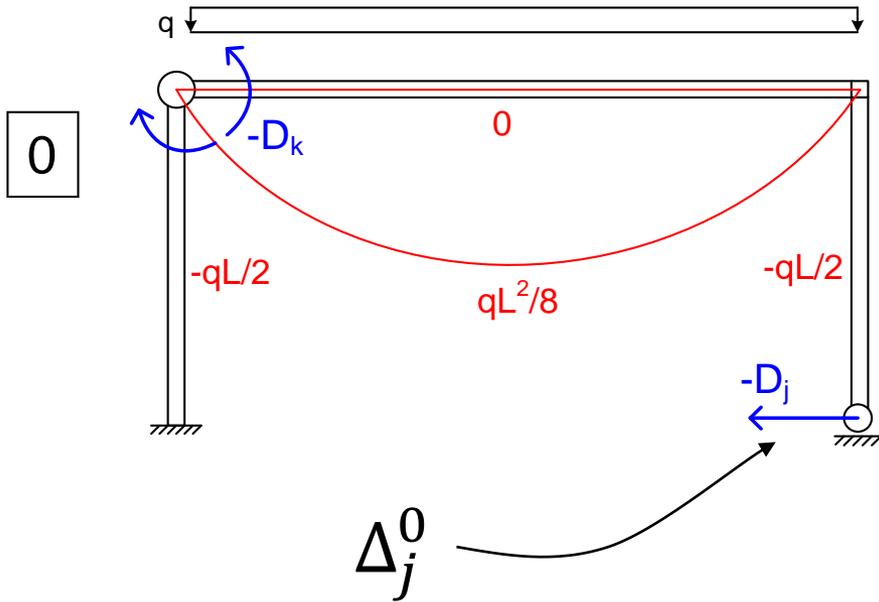
$$N \rightarrow N^0 \quad M \rightarrow M^0$$

Esfuerzos virtuales: caso j

$$N^{0V} \rightarrow N^j \quad M^{0V} \rightarrow M^j$$

$$\Delta_j^0 = \int N^0 \frac{1}{EA} N^j dx + \int M^0 \frac{1}{EI} M^j dx + \int \alpha T_m N^j dx - \int \alpha T_g M^j dx = -D_j$$

Significado físico de los coeficientes D_j (y 2)



$$\Delta_j^0 = \int N^0 \frac{1}{EA} N^j dx + \int M^0 \frac{1}{EI} M^j dx + \int \alpha T_m N^j dx - \int \alpha T_g M^j dx = -D_j$$

$$\Delta_j^0 = -D_j$$

D_j = Deformación en dirección de X_j , en el caso 0, con signo (-)

Significado físico de las ecuaciones de compatibilidad

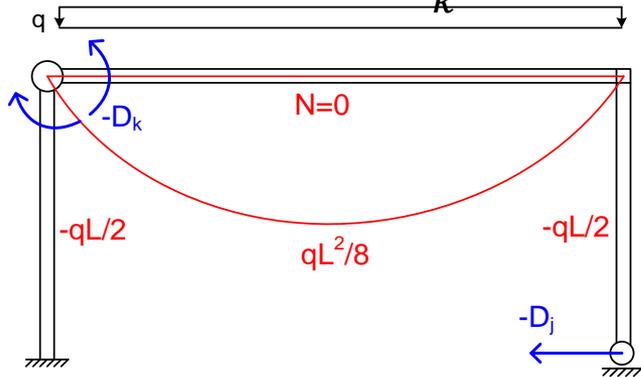
$$f_{jk} = \Delta_j^k \longrightarrow \sum_k X_k f_{jk} = D_j$$

$$D_j = -\Delta_j^0$$

$$\sum_k X_k \Delta_j^k + \Delta_j^0 = 0$$

$$\Delta_j^{total} = 0$$

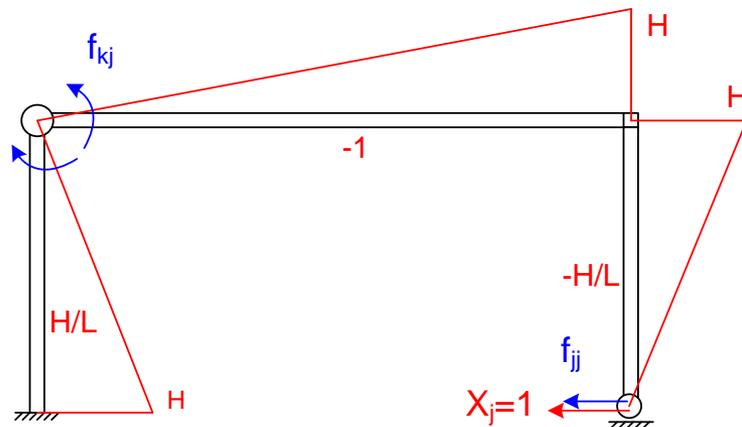
0



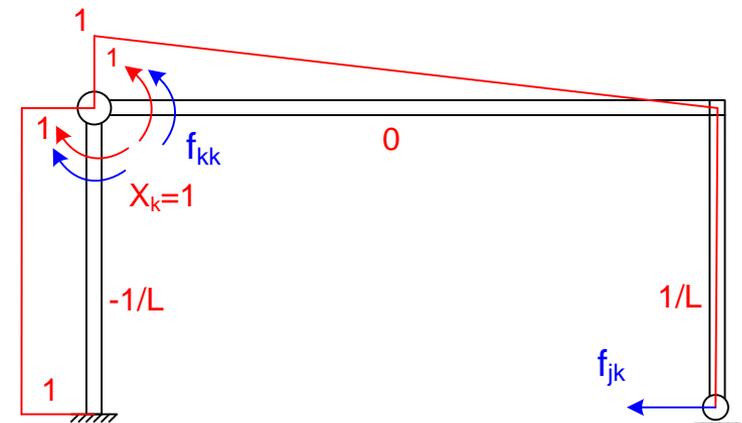
Deformación total en la dirección de $X_j = 0$.

Auténticas ecuaciones de compatibilidad de deformaciones

j



k



Ejemplo. Condiciones de compatibilidad (1)

$$f_{jk} = \int N^j \frac{1}{EA} N^k dx + \int M^j \frac{1}{EI} M^k dx$$

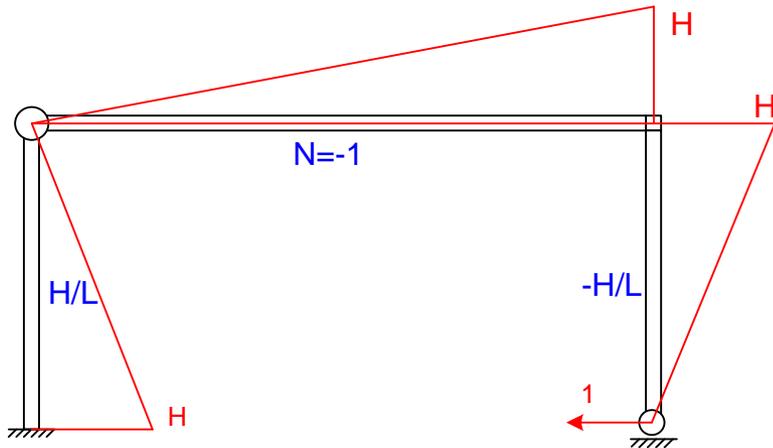
$$f_{11} = \frac{L}{EA} + \frac{2H^3}{EAL^2} + \frac{LH^2}{3EI} + \frac{2H^3}{3EI}$$

$$f_{22} = \frac{2H}{EAL^2} + \frac{L}{3EI} + \frac{H}{EI}$$

$$f_{11} = 1.379 \cdot 10^{-3} \frac{cm}{kg}$$

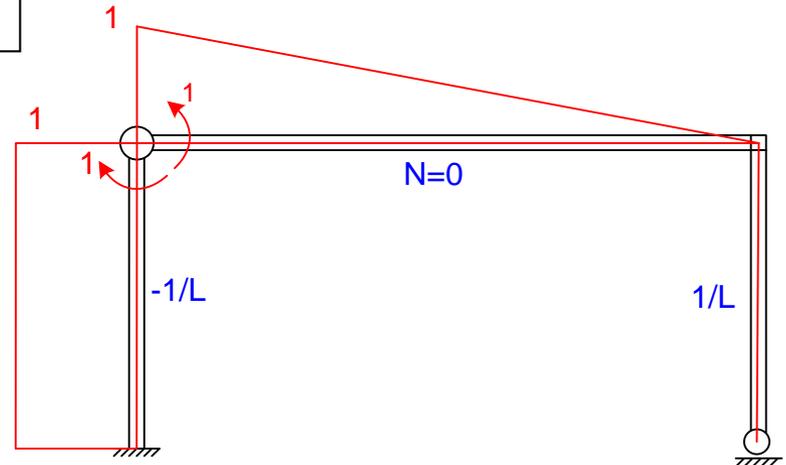
$$f_{22} = 6.8822 \cdot 10^{-6} \frac{rad}{cm \cdot kg}$$

1



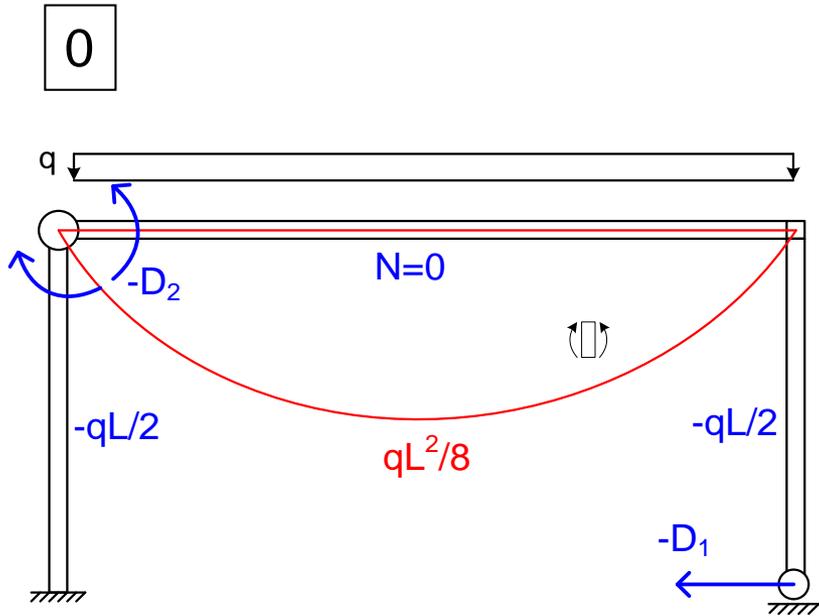
$$f_{12} = -\frac{2H^2}{EAL^2} + \frac{HL}{6EI} - \frac{H^2}{2EI}$$

2

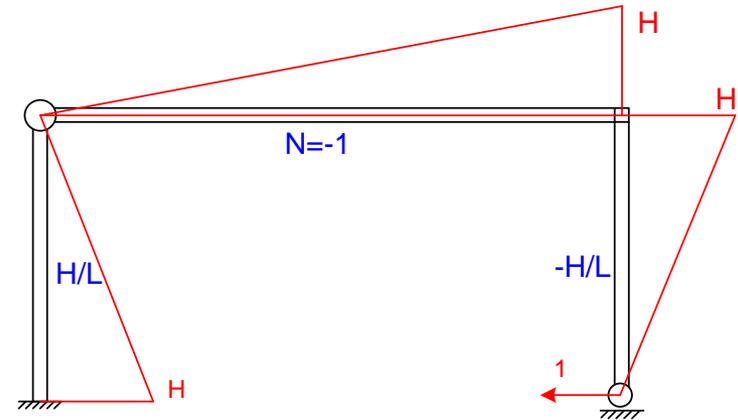


$$f_{12} = -0.3452 \cdot 10^{-6} \frac{cm}{cm \cdot kg}$$

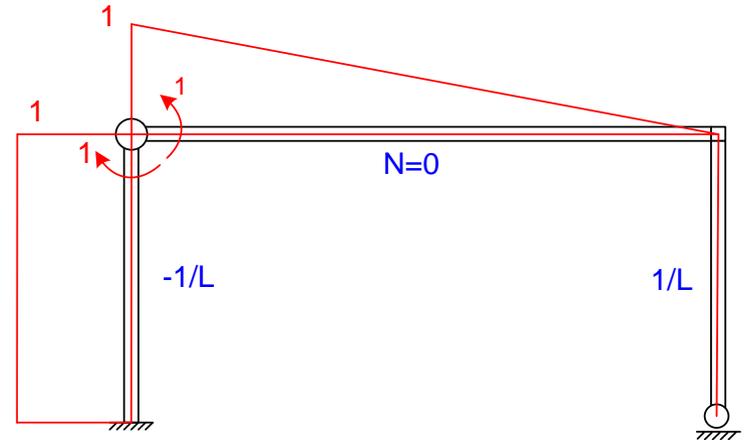
Ejemplo. Condiciones de compatibilidad (2)



1



2



$$D_j = - \int N^0 \frac{1}{EA} N^j dx - \int M^0 \frac{1}{EI} M^j dx$$

$$D_1 = \frac{q L^3 H}{24 EI} = 0.6880 \text{ cm}$$

$$D_2 = \frac{q L^3}{24 EI} = 1.376 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

Ejemplo. Esfuerzos finales.

$$\begin{array}{l} f_{11}X_1 + f_{12}X_2 = D_1 \\ f_{21}X_1 + f_{22}X_2 = D_2 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} X_1 = 556 \text{ kg} = R_{Dx} \\ X_2 = 227814 \text{ cm kg} = M_B \end{array}$$

$$N_i = N_i^0 + 556 N_i^1 + 227814 N_i^2$$

$$M(x) = M^0(x) + 556 M^1(x) + 227814 M^2(x)$$

Momentos en las barras (positivo horario)

$$M_{AB} = H X_1 - X_2 = 50154 \text{ cm kg} \qquad M_{BA} = X_2 = 227814 \text{ cm kg}$$

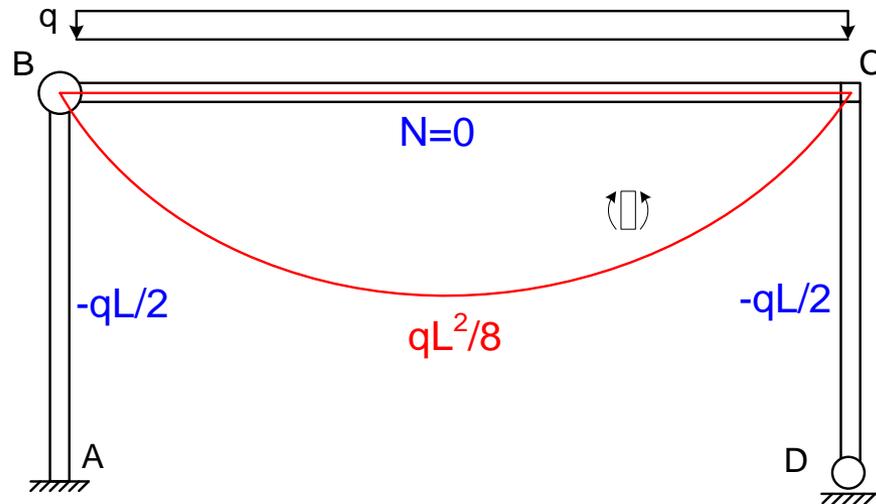
$$M_{CB} = H X_1 = 277968 \text{ cm kg} \qquad M_{CD} = -H X_1 = -277968 \text{ cm kg}$$

Momento en el centro del dintel (positivo tracciones abajo)

$$M_E = \frac{qL^2}{8} - \frac{1}{2} H X_1 - \frac{1}{2} X_2 = 247108 \text{ cm Kg}$$

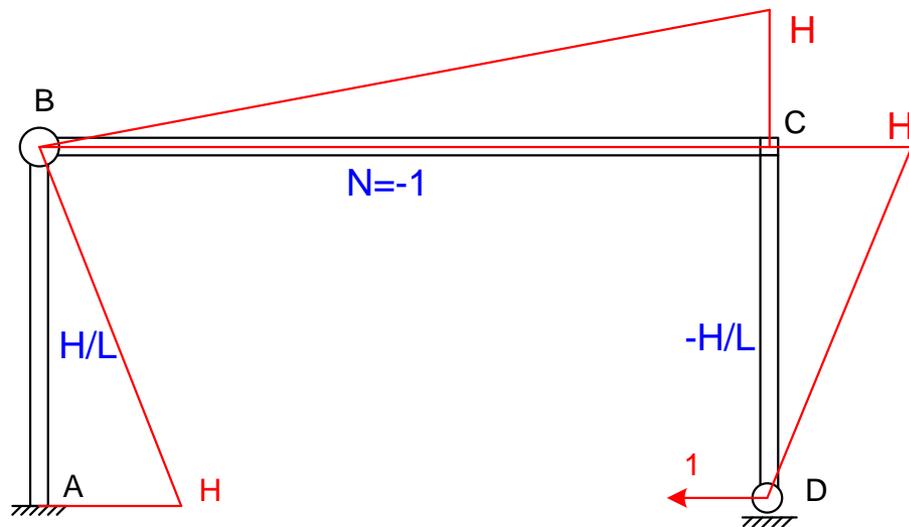
Ejemplo. Superposición de esfuerzos en los 1+h casos

0



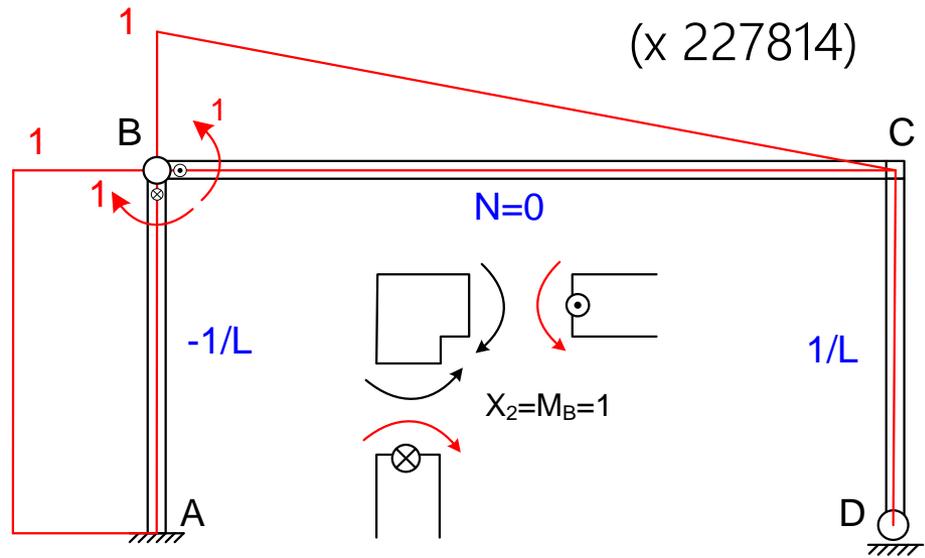
1

(x 556)

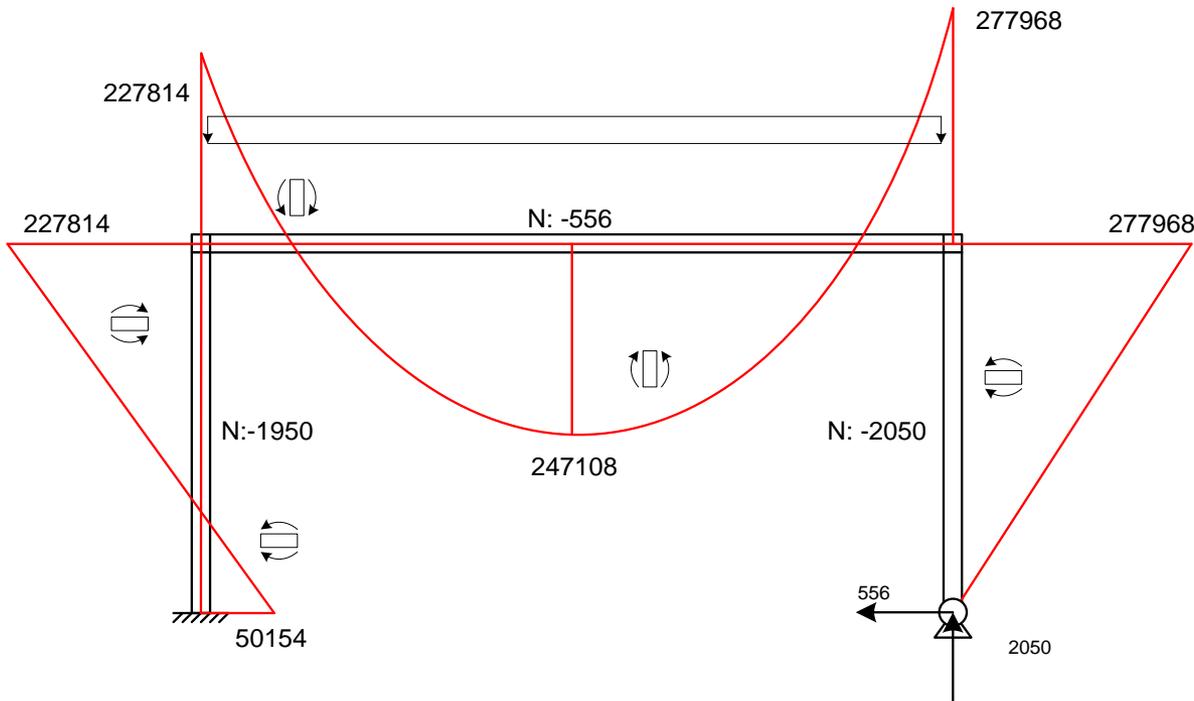


2

(x 227814)

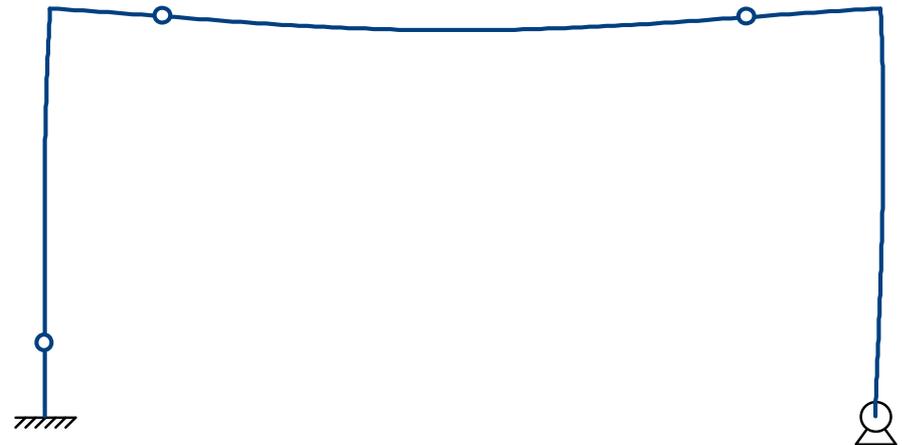


Ejemplo. Resultados

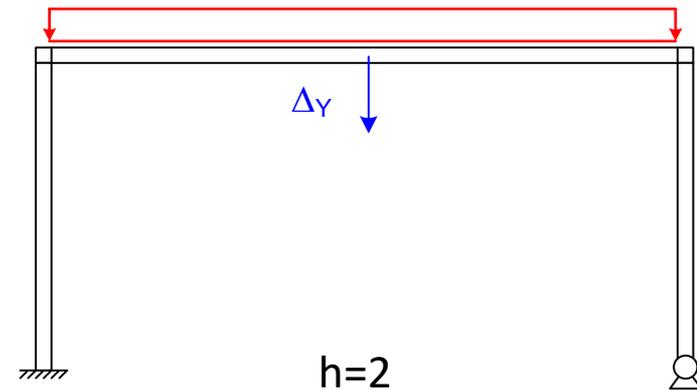
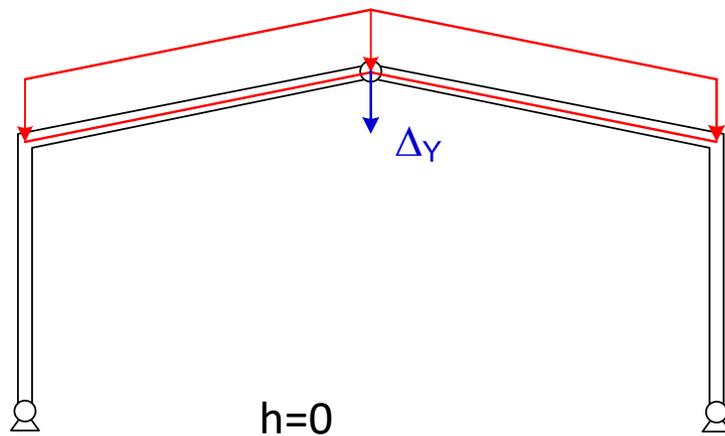


Energía acumulada (numéricamente)

Flexión: 202 cm-kg Axial: 5.2 cm-kg



Cálculo de deformaciones en pórticos planos



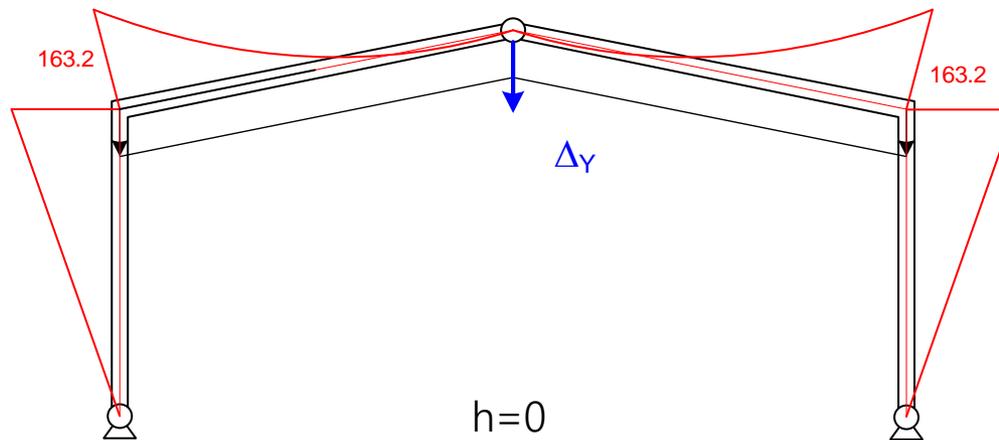
Cálculo de deformaciones en pórticos planos

1. Pórticos isostáticos

Punto de partida

Pórtico ya calculado.

Conocidos los *valores numéricos* de los esfuerzos $N(x)$, $M(x)$, $V(x)$



Deseamos hallar una deformación o giro cualquiera Δ_r

Energía:
$$U^* = \int \frac{N^2}{2EA} dx + \int \frac{M^2}{2EI} dx + \int N \alpha T_m dx - \int M \alpha T_g dx$$

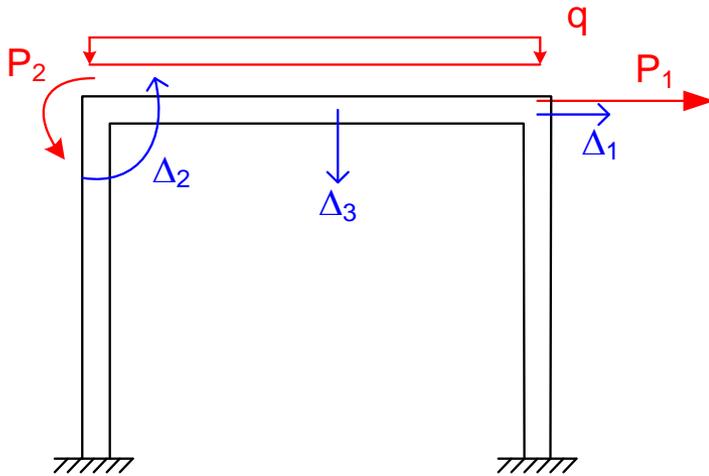
Fundamento teórico

Estructura elástica cualquiera, sometida a un conjunto de fuerzas y temperaturas

$$\Delta_r = \frac{\partial U^*}{\partial P_r}$$

Segundo Teorema de C. A. Castigliano (1879)

Teorema de F. Crotti (1888) - Engesser (1889)



Basado en el PTV -> equilibrio
Válido para todo tipo de estructuras,
elásticas, isostáticas e hiperestáticas

No se conoce U^* en función de P_r luego no se puede derivar.
Puede que no haya una P_r en la dirección de Δ_r .

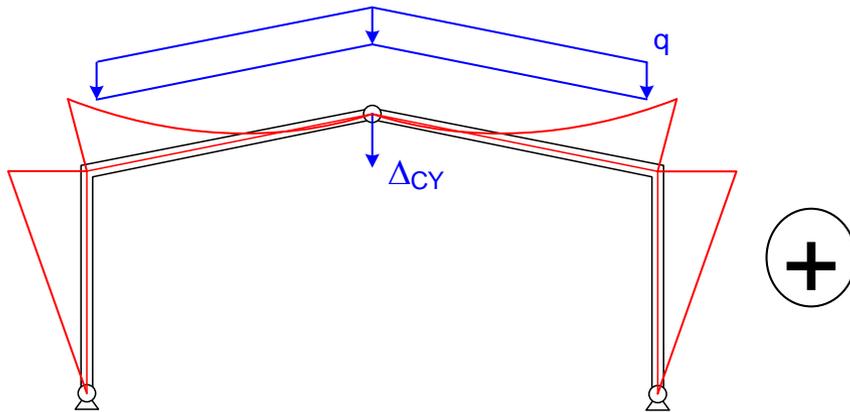


C. A. Castigliano
1847-1884

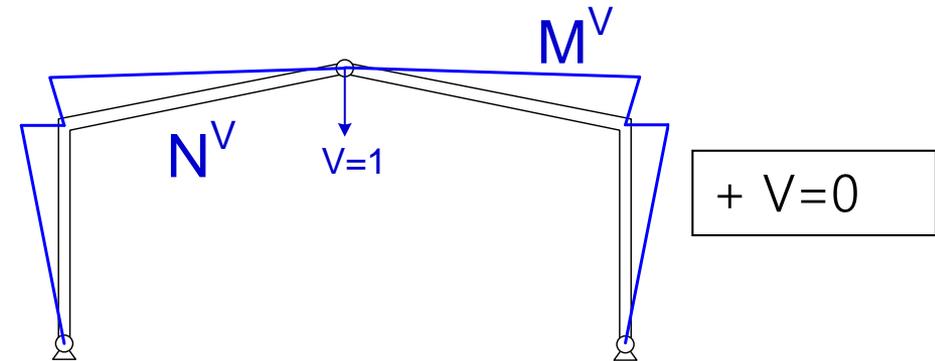
Planteamiento práctico: sistema modificado $RV=R+V$

Añadir al sistema una fuerza virtual V , en la dirección de la deformación buscada, para poder derivar $U^*(V)$ respecto a ella, y después hacer $V = 0$

Caso real



Caso virtual V



Calculamos N^V, M^V :
esfuerzos para $V = 1$

Esfuerzos en el
sistema modificado

$$N^{RV} = N + N^V V$$

$$M^{RV} = M + M^V V$$

Serán variables, función de x

Desarrollo

Energía en el caso modificado real + virtual $RV=R+V$

$$U^{*RV} = \int \frac{(N^{RV})^2}{2EA} dx + \int \frac{(M^{RV})^2}{2EI} dx + \int N^{RV} \alpha T_m dx - \int M^{RV} \alpha T_g dx$$

$$N^{RV} = N + N^V V \quad M^{RV} = M + M^V V$$

Deformación buscada en el caso real $\Delta_r = \left(\frac{\partial U^{*RV}}{\partial V} \right)_{V=0}$

Derivando U^{*RV} en cadena respecto de V

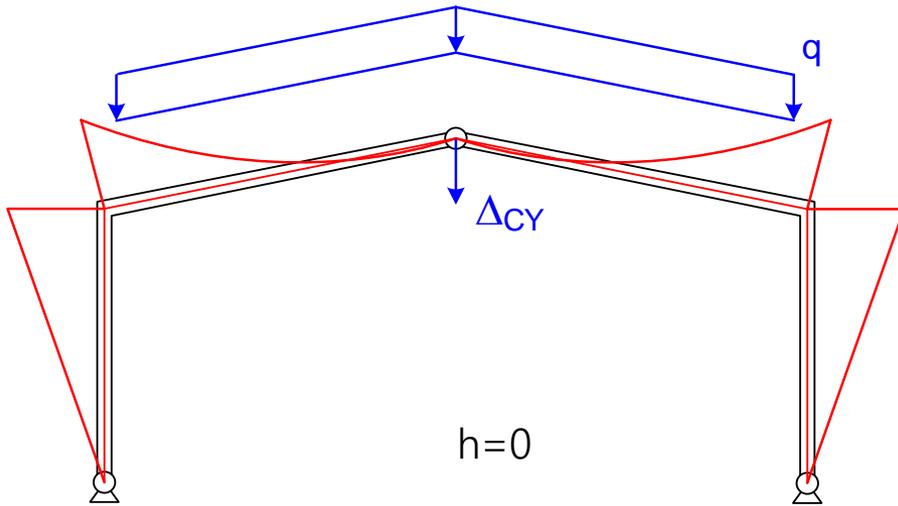
$$\Delta_r = \left(\int \frac{N^{RV}}{EA} N^V dx + \int \frac{M^{RV}}{EI} M^V dx + \int N^V \alpha T_m dx - \int M^V \alpha T_g dx \right)_{V=0}$$

Haciendo $V = 0 \rightarrow N^{RV} = N$ y $M^{RV} = M$

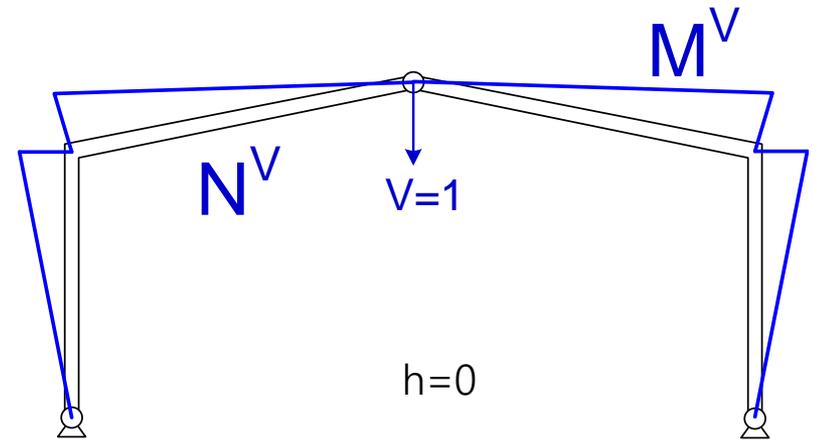
Resultado. Deformación en un pórtico plano

$$\Delta_r = \int N \frac{1}{EA} N^V dx + \int M \frac{1}{EI} M^V dx + \int N^V \alpha T_m dx - \int M^V \alpha T_g dx$$

Caso real (N, M)



Caso Virtual (N^V, M^V)



Nuevo caso a resolver: caso $V=1$

Es la misma estructura, cargada sólo con la fuerza $V=1$

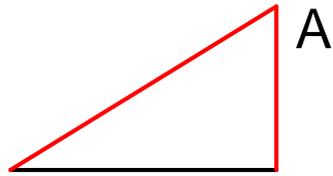
Se resuelve igual que la estructura original.

Integrales tabuladas (1)

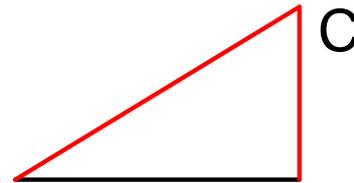
$$I = \int_0^L F_1(x) F_2(x) dx$$

F_1

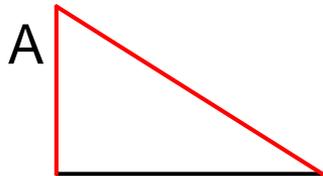
F_2



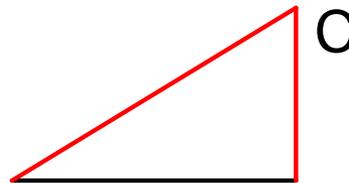
x



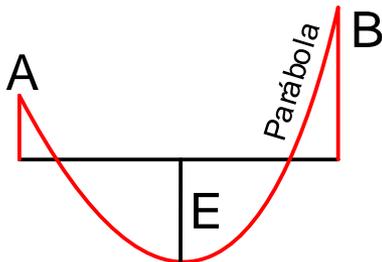
$$I = \frac{L}{3} AC$$



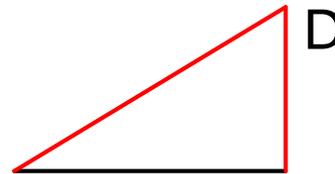
x



$$I = \frac{L}{6} AC$$



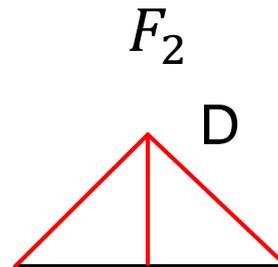
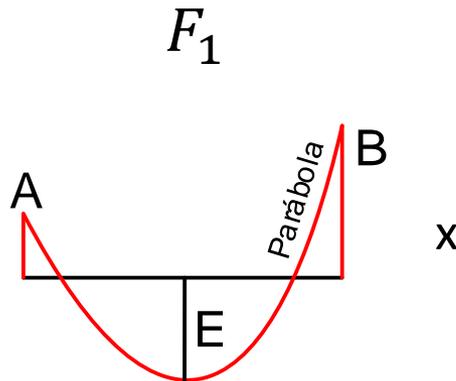
x



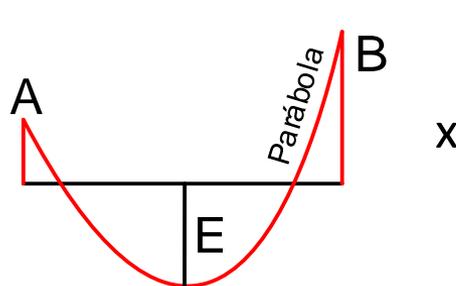
$$I = \frac{L}{6} (B - 2E)D$$

Integrales tabuladas (2)

$$I = \int_0^L F_1(x) F_2(x) dx$$

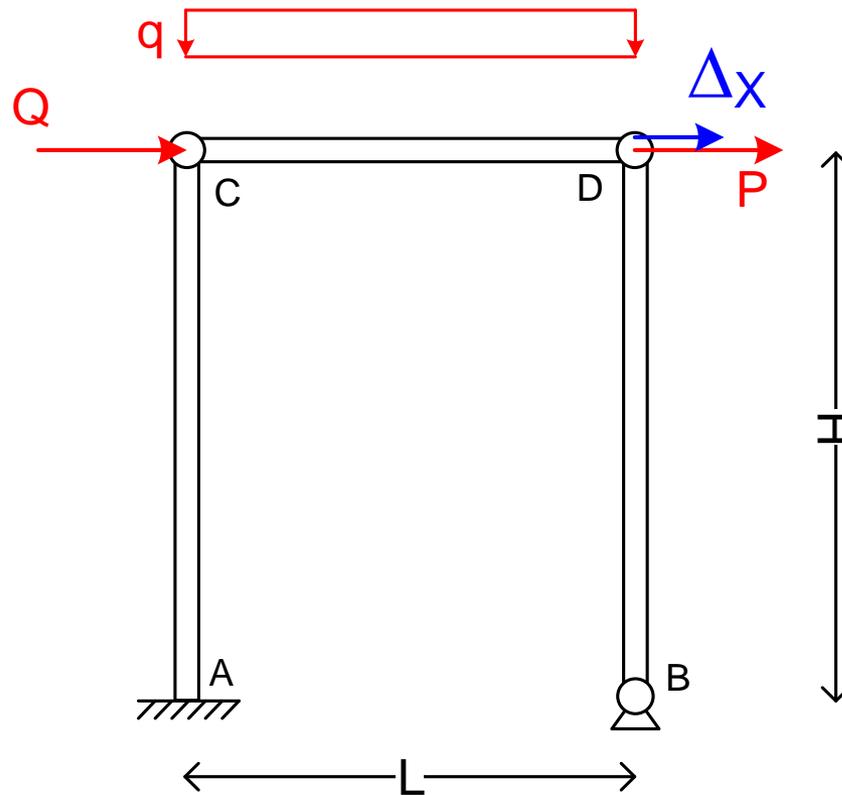


$$\frac{L}{24} (A + B - 10E) D$$

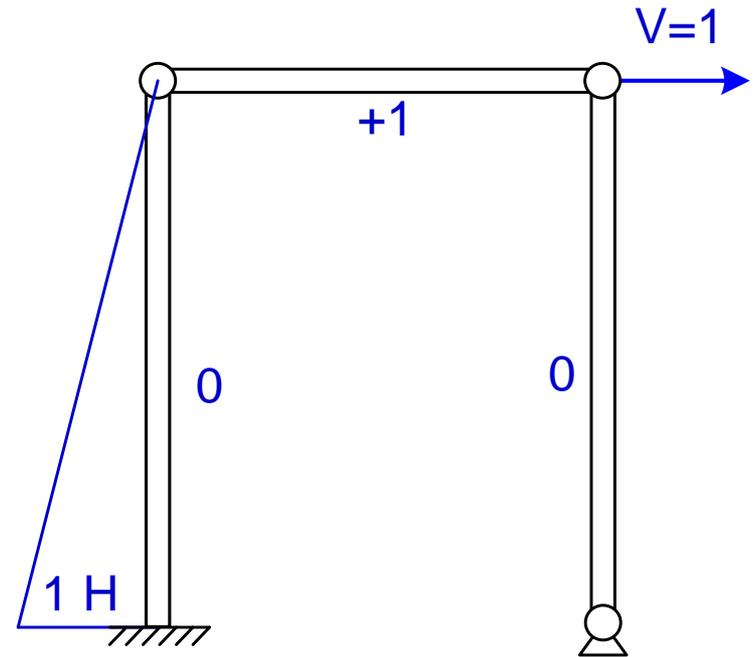
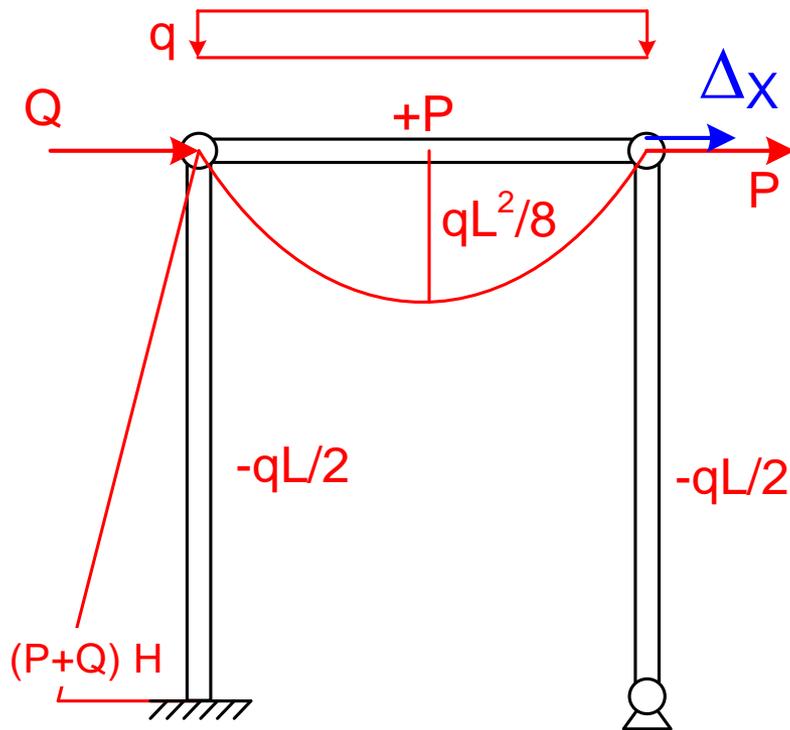


$$\frac{L}{6} (A + B - 4E) D$$

Ejemplo. Pórtico isostático



Ejemplo. Pórtico isostático



$$\Delta_X = \int N \frac{1}{EA} N^V dx + \int M \frac{1}{EI} M^V dx$$

$$\Delta_X = \frac{1}{EA_v} L (+P)(+1) + \frac{1}{EI_p} \frac{H}{3} ((P + Q)H) (1 H) = \frac{PL}{EA_v} + \frac{(P + Q)H^3}{3EI_p}$$



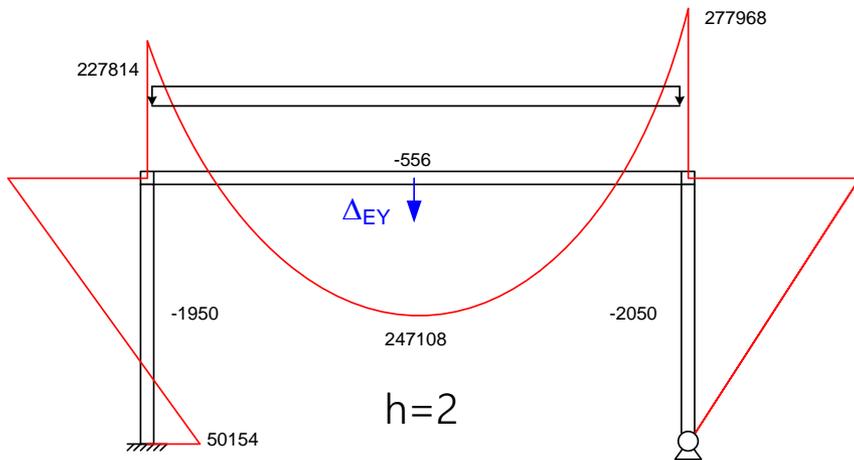
Cálculo de deformaciones en pórticos planos

2. Pórticos hiperestáticos

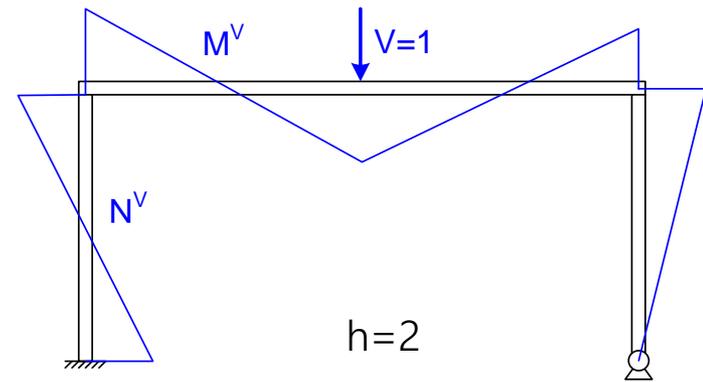
Aplicación a pórticos hiperestáticos

Se ha obtenido que, *siempre*, la deformación es:

$$\Delta_r = \int N \frac{1}{EA} N^V dx + \int M \frac{1}{EI} M^V dx + \int \alpha T_m N^V dx - \int \alpha T_g M^V dx$$



Caso real (h=2): esfuerzos conocidos (N, M)



Caso virtual V:

Ahora es hiperestático ☹ (h=2)

No lo queremos hacer para cada deformación !

Haciendo el desarrollo de forma teórica, siguiendo el método general sale: ➡

Desarrollo en el Anejo

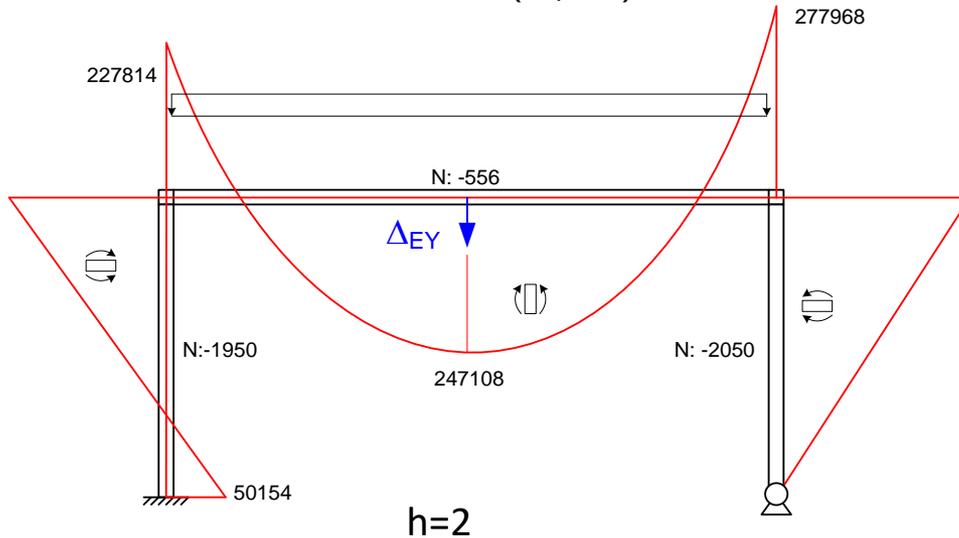
Deformaciones en pórticos hiperestáticos. Resultado

$$\Delta_r = \int N \frac{1}{EA} N^{0V} dx + \int M \frac{1}{EI} M^{0V} dx + \int \alpha T_m N^{0V} dx - \int \alpha T_g M^{0V} dx$$

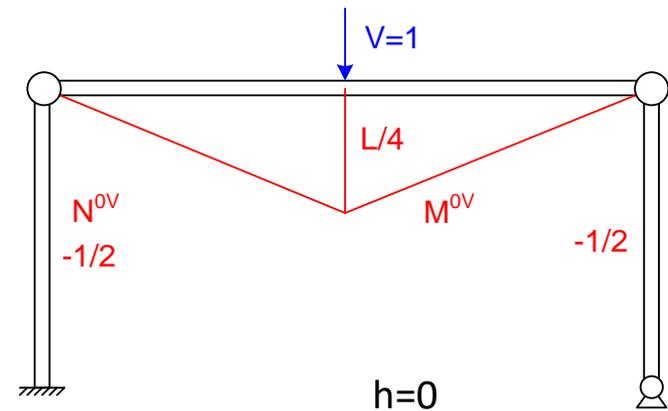
No hace falta hallar N^V M^V . Basta con hallar N^{0V} M^{0V}

Resolver el caso **0V**: isostático con la carga virtual unidad

Caso real $h=2$ (N, M)



Caso 0V isostático (fácil)





Anejo

Demostración de la expresión de la deformación en pórticos $h > 0$

Anejo. Deformaciones en pórticos hiperestáticos (1)

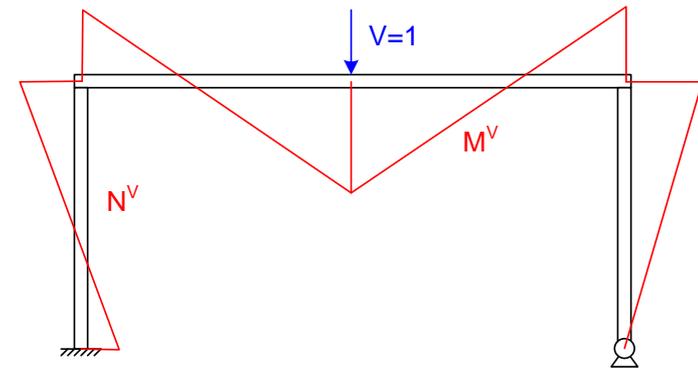
$$\Delta_r = \int N \frac{1}{EA} N^V dx + \int M \frac{1}{EI} M^V dx + \int \alpha T_m N^V dx - \int \alpha T_g M^V dx$$

Para hallar $N^V, M^V \rightarrow$ hay que resolver el caso V, que es hiperestático

Se hace el desarrollo de forma teórica, siguiendo el método general para grado h

Descomposición en casos: 0, 1, 2, ... h

Elegimos cualquier conjunto de incógnitas $X_j \quad j = 1, h$



$$N^V = N^{0V} + \sum_{j=1, h} X_j N^j$$

$$M^V(x) = M^{0V}(x) + \sum_{j=1, h} X_j M^j(x)$$

Caso 0V: Isostático con la carga exterior $V=1$. Nuevo

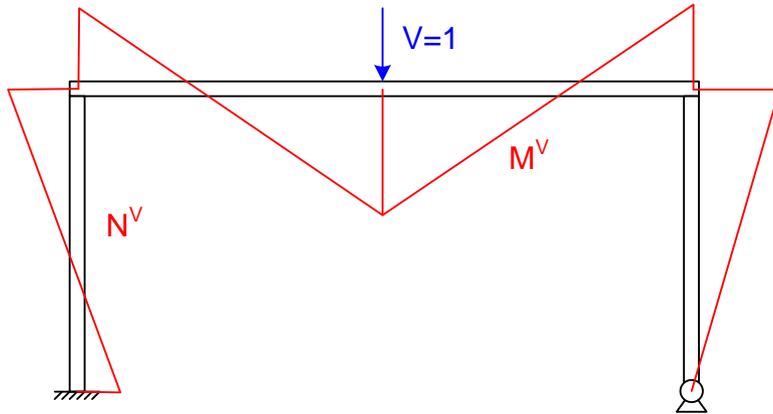
Casos 1, 2, ... h: ya se hicieron cuando se calculó la estructura

Anejo. Deformaciones en pórticos hiperestáticos (2)

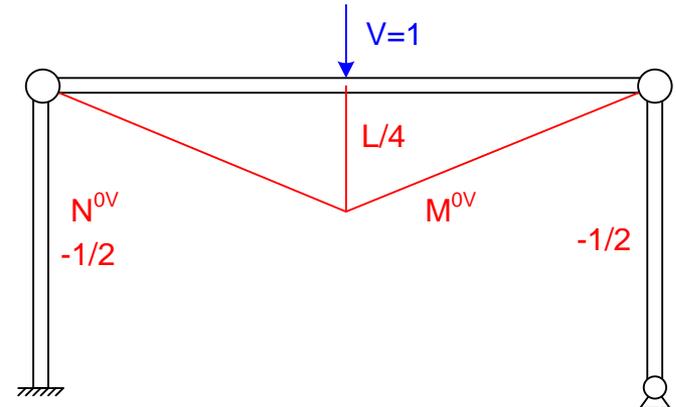
$$N^V = N^{0V} + \sum_{j=1,h} X_j N^j$$

$$M^V(x) = M^{0V}(x) + \sum_{j=1,h} X_j M^j(x)$$

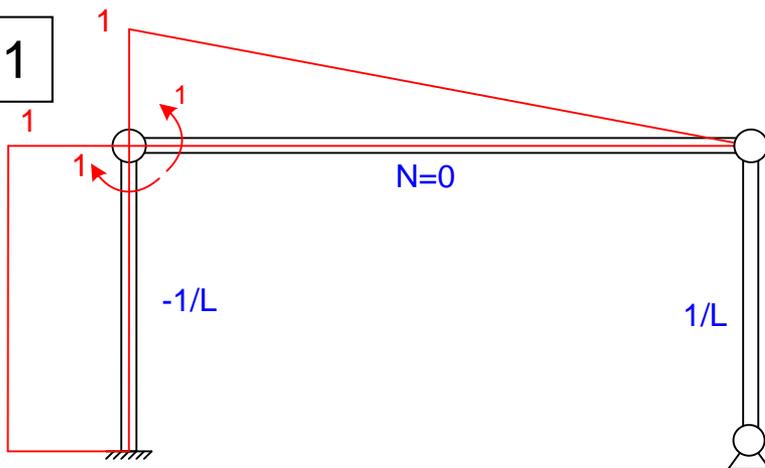
Caso V



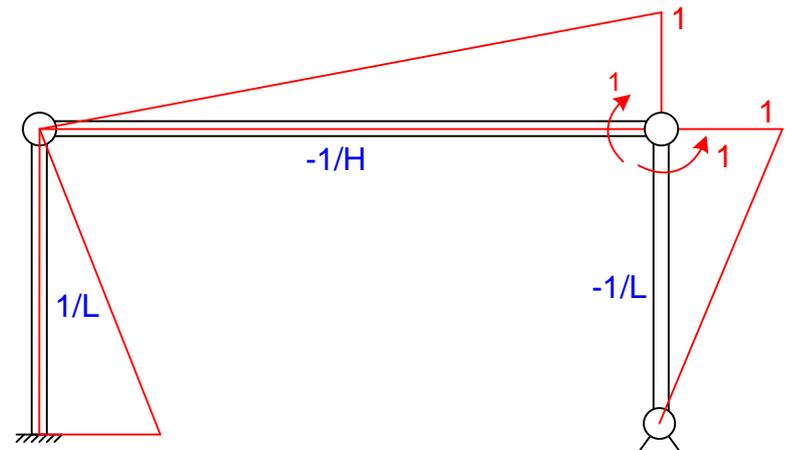
0V



1



2



Anejo. Deformaciones en pórticos hiperestáticos (3)

Expresión obtenida para la deformación:

$$\Delta_r = \int N \frac{1}{EA} N^V dx + \int M \frac{1}{EI} M^V dx + \int \alpha T_m N^V dx - \int \alpha T_g M^V dx$$

Sustituyendo $N^V = N^{0V} + \sum_{j=1,h} X_j N^j$ $M^V(x) = M^{0V}(x) + \sum_{j=1,h} X_j M^j(x)$

$$\begin{aligned} \Delta_r = & \int N \frac{1}{EA} \left(N^{0V} + \sum_{j=1,h} X_j N^j \right) dx + \int M \frac{1}{EI} \left(M^{0V} + \sum_{j=1,h} X_j M^j \right) dx \\ & + \int \alpha T_m \left(N^{0V} + \sum_{j=1,h} X_j N^j \right) dx - \int \alpha T_g \left(M^{0V} + \sum_{j=1,h} X_j M^j \right) dx \end{aligned}$$

Reordenando los Σ para agrupar las X_j

Anejo. Deformaciones en pórticos hiperestáticos (4)

Reordenando los Σ para agrupar las X_j

$$\Delta_r = \int N \frac{1}{EA} N^{0V} dx + \int M \frac{1}{EI} M^{0V} dx + \int \alpha T_m N^{0V} dx - \int \alpha T_g M^{0V} dx$$
$$+ \sum_{j=1,h} X_j \left(\int N \frac{1}{EA} N^j dx + \int M \frac{1}{EI} M^j dx + \int \alpha T_m N^j dx - \int \alpha T_g M^j dx \right)$$

Siempre =0

Condición de compatibilidad de X_j

Resultado final

$$\Delta_r = \int N \frac{1}{EA} N^{0V} dx + \int M \frac{1}{EI} M^{0V} dx + \int \alpha T_m N^{0V} dx - \int \alpha T_g M^{0V} dx$$

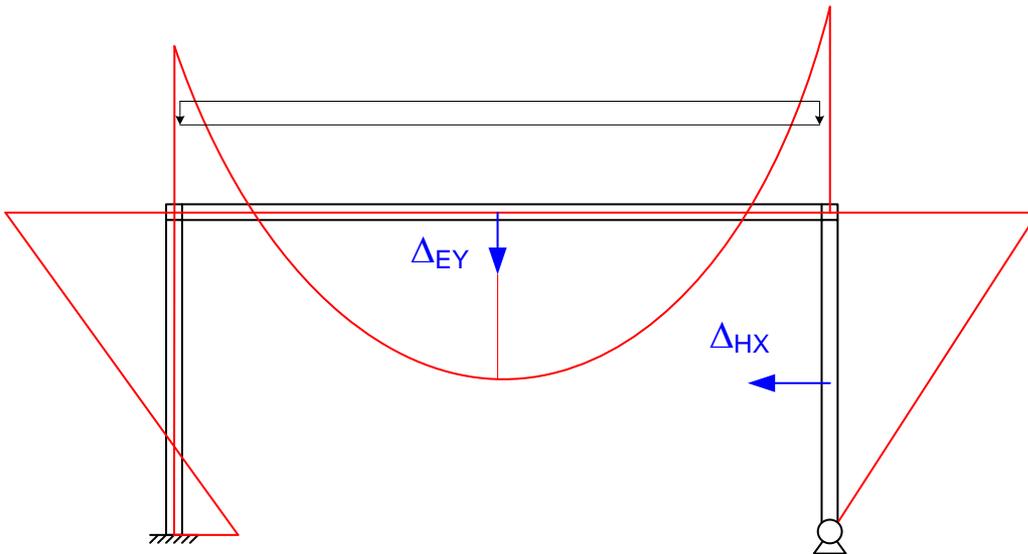
Anejo. Deformaciones en pórticos. Generalización

$$\Delta_r = \int N \frac{1}{EA} N^{0Vm} dx + \int M \frac{1}{EI} M^{0Vm} dx + \int \alpha T_m N^{0Vm} dx - \int \alpha T_g M^{0Vm} dx$$

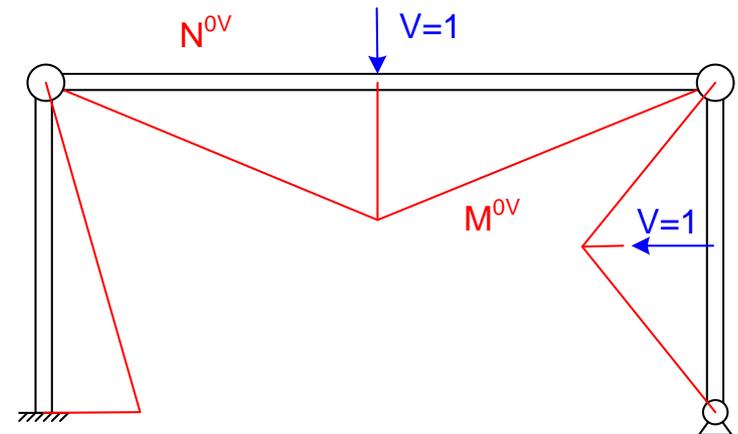
Permite hallar **la suma** de varias deformaciones

Aplicar cargas $V=1$ **en todas** las direcciones buscadas

Caso real (N, M)



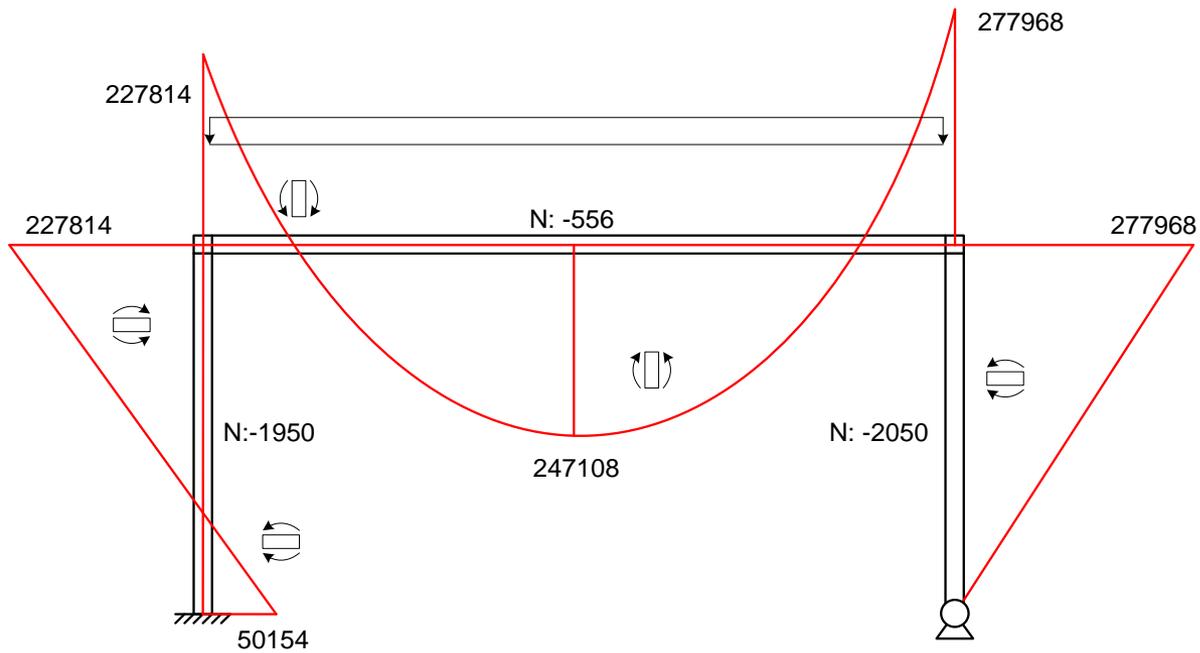
Caso $0Vm$ (múltiples $V=1$)



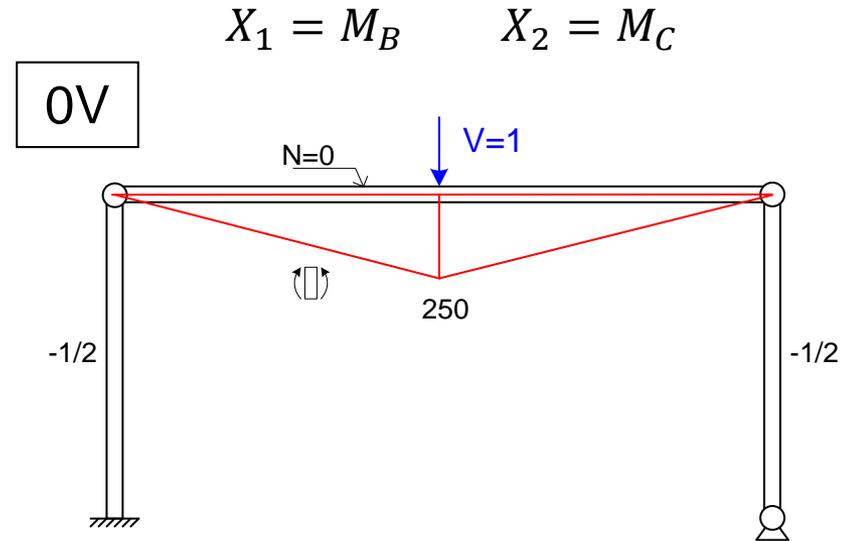
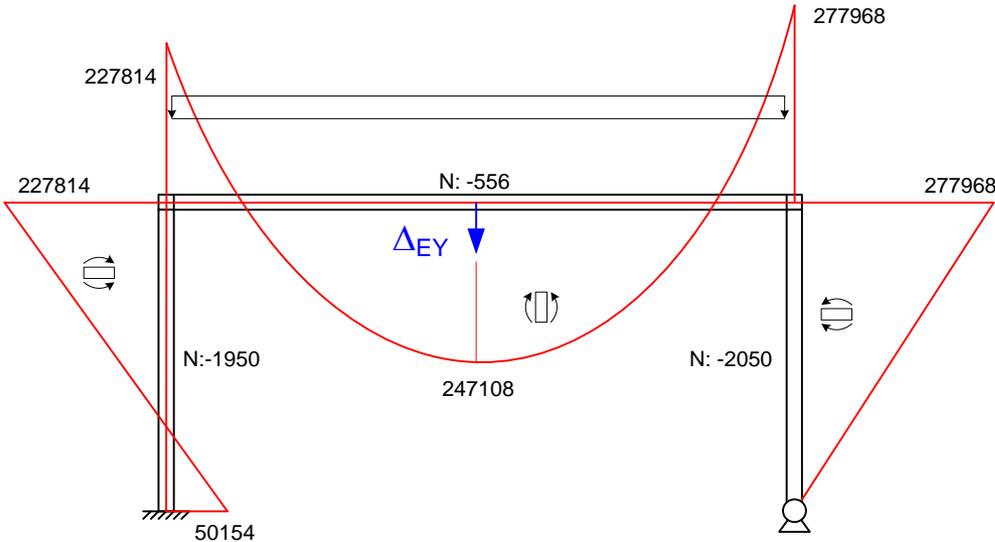
Ejemplo de cálculo de deformaciones

Pórtico hiperestático $h=2$

Pórtico ya calculado. Diagramas



Deformación vertical centro del dintel

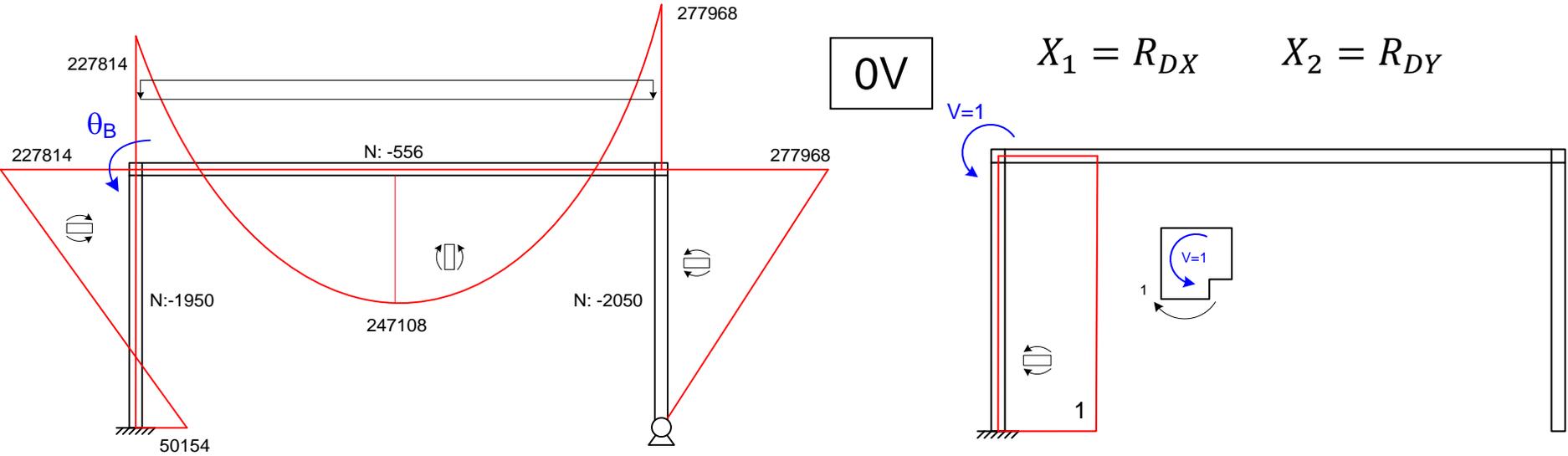


$$\Delta_{EY} = \int N \frac{1}{EA} N^{0V} dx + \int M \frac{1}{EI} M^{0V} dx$$

$$\Delta_{EY} = (-1950) \frac{H}{EA} \left(-\frac{1}{2}\right) + (-2050) \frac{H}{EA} \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{EI} L \frac{(227814 + 277968 - 10 \times 247108)}{24} (-250)$$

$$\Delta_{EY} = 0.0024 + 0.1690 = 0.1714 \text{ cm}$$

Giro nudo B

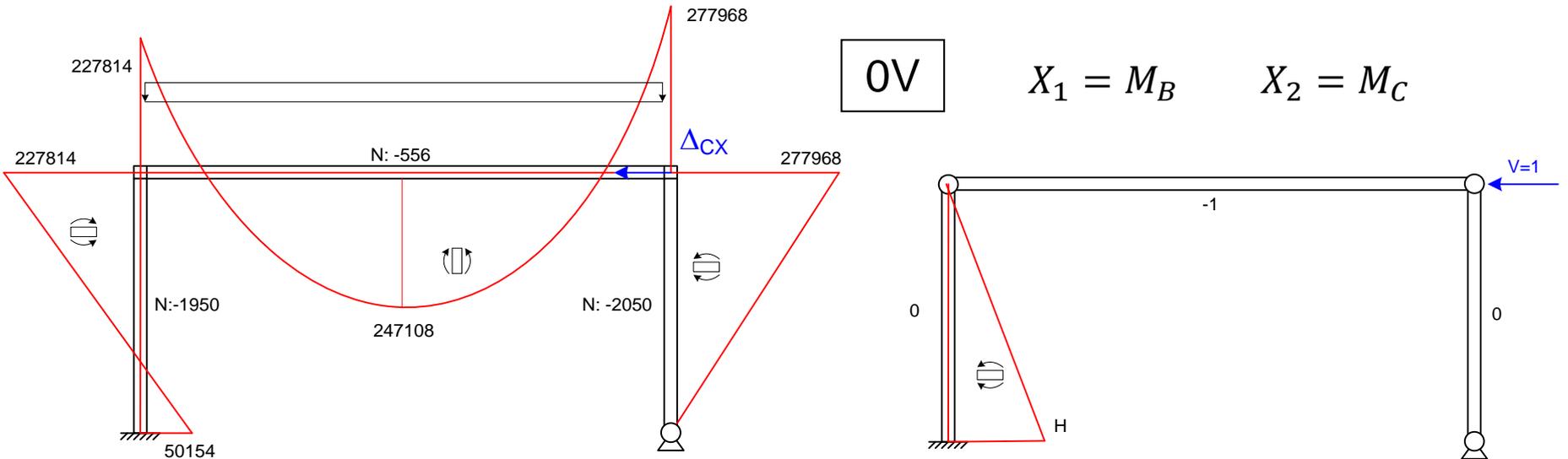


$$\theta_B = \int N \frac{1}{EA} N^{0V} dx + \int M \frac{1}{EI} M^{0V} dx$$

$$\theta_B = 0 + \frac{H}{2EI} (50154 - 227814)(1) = -3.667 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

1º Mohr entre A y B

Deformación horizontal en C



$$\Delta_{CX} = \int N \frac{1}{EA} N^{0V} dx + \int M \frac{1}{EI} M^{0V} dx$$

$$\Delta_{CX} = \frac{L}{EA} (-556)(-1) + \frac{H}{6EI} (-227814 + 2 \cdot 50154)(H)$$

$$\Delta_{CX} = 0.0014 - 0.0439 = -0.0425 \text{ cm}$$

Primer sumando: compresión del dintel

Segundo sumando: flexión lateral poste izquierda (2º Mohr)