Université de Montréal

Évaluation du régulateur sur une courbe modulaire et valeurs particulières

par

Nicolas Bouchard

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en mathématiques

Orientation mathématiques pures

octobre 2014

Université de Montréal
Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

Évaluation du régulateur sur une courbe modulaire et valeurs particulières

présenté par

Nicolas Bouchard

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Abraham Broer
(président-rapporteur)

Matilde Lalín
(directeur de recherche)

Andrew Granville
(membre du jury)

Mémoire accepté le :
5 septembre 2014

RÉSUMÉS

Abrégé

Bloch et Beilinson ont proposé plusieurs conjectures sur les liens entre les applications régulateurs du groupe de K-théorie algébrique associée à une courbe modulaire et des valeurs spéciales de fonction L.

Fixons N, un entier naturel et considérons le sous-groupe de congruence $\Gamma_0(N)$. Le présent mémoire démontre une formule explicite entre le régulateur de la courbe modulaire $X_0(N)$ appliqué à une forme primitive et une valeur spéciale de la fonction L associée.

Mots clés: fonctions L, valeurs spéciales, forme modulaire, régulateur, conjectures de Beilinson.

Abstract

Bloch and Beilinson conjectured many relations regarding the regulator of a modular curve. This function from the algebraic K-theory of the modular curve is supposed to be related to special values of L functions.

Let N be a positive integer et consider the congruence subgroup $\Gamma_0(N)$. This thesis relates explicitly the regulator of the modular curve $X_0(N)$ applied to some newform with a special value of the newform's L function.

Keywords: L functions, special values, modular forms, regulator, Beilinson conjectures.

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier Matilde Lalín pour son constant support, autant au point de vue de mes difficultés que d'un côté financier. Je souligne également la présence de ma famille et de mes amis qui m'ont soutenu du début jusqu'à la fin.

INTRODUCTION

La théorie des formes modulaires est l'une des théories les plus fructueuses du XXe siècle et elle a été grandement popularisée par les travaux de Wiles en 1999 démontrant le dernier théorème de Fermat. D'abord issues de la branche des mathématiques étudiant les variables complexes, les formes modulaires s'apprécient aujourd'hui principalement en théorie des nombres et, par le théorème de modularité, en géométrie algébrique. On retrouve également plusieurs applications en géométrie et en physique théorique. Leur renommée s'explique en grande partie parce qu'elles se retrouvent souvent au croisement de différentes théories et elles permettent de faire des liens entre des notions sans points communs de prime abord. Le théorème de modularité est un exemple frappant de ce phénomène où chaque courbe elliptique est liée à une forme modulaire.

Ce mémoire se retrouve lui-même au croisement entre deux théories. D'un côté, nous retrouverons la géométrie des courbes modulaires et, de l'autre, les valeurs spéciales des fonctions L. En effet, nous calculerons explicitement une certaine application de la K-théorie de la courbe modulaire $X_0(N)$, que l'on nomme régulateur, pour obtenir des valeurs spéciales de fonctions L associées à une forme primitive. Ces travaux s'inpirent d'un article de Mellit (2012) et s'inscrivent dans une série de conjectures établie par Bloch et Beilinson dans les années 80 portant sur le régulateur.

Plus particulièrement, considérons $X_0(N)$ la courbe modulaire associée au sous-groupe $\Gamma_0(N)$ pour un entier naturel N non divisible par un carré. Nous noterons r pour le régulateur associé à cette courbe. En considérant les involutions d'Atkin-Lehner, il est possible d'obtenir deux fonctions F_α et F_β dont le support des diviseurs ne comporte que des pointes de $X_0(N)$. Si nous supposons que F_α et F_β sont normalisées de sorte que $\{F_\alpha, F_\beta\}$ est un élément de la K-théorie $K_2(X_0(N))$, nous pouvons y appliquer le régulateur. Nous démontrerons alors que si f est une forme primitive pour $\Gamma_0(N)$ et que L_f est la série L associée, le régulateur $r(\{F_\alpha, F_\beta\})$ appliqué à la forme différentielle $2\pi i\, f(\tau)\, d\tau$ s'écrit sous la forme

$$\left\langle r(\{F_\alpha, F_\beta\}), 2\pi i\, f(\tau)\, d\tau \right\rangle = C_{\alpha,\beta}\, \frac{144N}{\pi}\, L_f(2)\, L_f(1) \ ,$$

où $C_{\alpha,\beta}$ est une constante rationnelle qui dépend, d'une part des diviseurs de F_α et de F_β et, d'autre part des valeurs propres de f sous les involutions d'Atkin-Lehner.

La formule que nous démontrerons s'inscrit dans une lignée de travaux ayant diverses ramifications par l'entremise de la mesure de Mahler. En effet, cette mesure sur les polynômes est étudiée depuis les années 60 et permet d'obtenir des valeurs spéciales de fonction L. De plus, suite au développement de la K-théorie, il apparaît que le régulateur et la mesure de Mahler coïncident dans certains cas. Ainsi, il n'est pas surprenant que le régulateur et les fonctions L soient liés. Certaines formules particulières pour la mesure de Mahler ont même déjà été obtenues à la suite des travaux de Smyth, Boyd, Villegas (1999), Lalín, etc. D'un autre côté, la série de conjectures de Bloch et Beilinson, de même que le présent mémoire, établissent un lien direct entre la K-théorie d'une courbe et les valeurs spéciales de fonctions L, sans passer par la mesure de Mahler. Néanmoins, nous glisserons quelques mots sur les liens avec la mesure de Mahler en guise de conclusion.

Afin de présenter le résultat principal, le présent document est construit en trois parties. D'abord, les trois premiers chapitres tâcheront d'exposer la théorie des formes modulaires nécessaire pour définir les objets de base du calcul. Le premier chapitre traitera des formes modulaires en général et le deuxième traitera plus particulièrement des formes paraboliques pour le cas de $\Gamma_0(N)$. En effet, le sous-groupe $\Gamma_0(N)$ fournit une théorie très riche des formes paraboliques, ce qui permet de définir les formes primitives. Le troisième chapitre mettra fin à cette partie en présentant ce que nous appelerons le discriminant modulaire augmenté. Il s'agit d'une classe de formes automorphes pour $\Gamma_0(N)$ liées aux séries d'Eisenstein réelles par la formule de Kronecker. À la fin de cette partie, nous connaîtrons les fonctions F_α, F_β et f dans la formule plus haut.

La deuxième partie viendra ensuite avec un seul chapitre traitant d'abord d'une convolution entre les fonctions L, puis de la méthode de Rankin-Selberg. Cette méthode permet d'exprimer la convolution à l'aide d'une intégrale. C'est grâce à ce résultat que nous parviendrons à passer du régulateur aux valeurs spéciales des fonctions L.

Viendra ensuite un chapitre exposant les bases de la K-théorie et définissant le régulateur. C'est dans ce chapitre que nous calculerons explicitement le régulateur.

QUELQUES NOTATIONS

Afin de simplifier la lecture, nous ferons les conventions suivantes.

- L'ensemble des entiers naturels, qui exclu 0, est noté $\mathbb{N}$. Lorsque nous voudrons inclure 0, nous écrirons plutôt $\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.
- Nous prendrons pour acquis que la variable p désigne toujours un nombre premier.
- Lorsque nous considérerons les diviseurs d'un entier, par exemple dans une somme, nous nous restreindrons aux diviseurs positifs.
- Lorsque nous ne préciserons pas le domaine des indices d'une sommation, nous sous-entendrons que la somme est sur $\mathbb{Z}$ en entier pour chacun des indices, sauf si le symbole $'$ suit la sommation, auquel cas la situation où tous les indices sont nuls en même temps est omise.
- Finalement, rappelons que la convention en français est de dire qu'un nombre est positif s'il est plus grand ou égal à zéro.

Chapitre 1

FORMES MODULAIRES

1.1. Théorie générale

Avant de commencer, nous prendrons quelques pages pour rappeler les résultats fondamentaux de la théorie des formes modulaires, ce qui aura l'avantage d'exposer les définitions et de fixer leurs notations pour le restant du document. Les résultats énoncés dans cette section se retrouvent dans la plupart des ouvrages sur le sujet. En particulier, pour une approche plus détaillée, nous renvoyons le lecteur aux premiers chapitres de l'ouvrage de Diamond et Shurman (2006) qui fournit une introduction complète à la théorie des formes modulaires. Pour faciliter la lecture, les termes définis seront en italique.

D'abord, écrivons $SL_2(\mathbb{R})$ pour le groupe des matrices 2×2 ne comprenant que des éléments réels et ayant un déterminant unitaire. Ce groupe agit sur le *demi-plan complexe supérieur* que nous noterons $\mathcal{H} = \left\{\tau \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(\tau) > 0\right\}$. L'action est donnée par les *transformations de Möbius*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}\,. \tag{1.1.1}$$

Remarquons que $\operatorname{Im}\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \cdot \tau\right) = |c\tau + d|^{-2} \operatorname{Im}(\tau)$ ce qui assure que les transformations préservent le demi-plan. Comme l'expression $c\tau + d$ reviendra à plusieurs reprises, nous l'appelerons le *facteur de modularité* et nous lui donnons une notation particulière. Pour $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{R})$, nous écrirons

$$j_\gamma(\tau) = c\tau + d\,. \tag{1.1.2}$$

Cette expression est fortement liée aux différentielles. Notamment,

$$d\left(\gamma \cdot \tau\right) = j_\gamma(\tau)^{-2}\, d\tau \tag{1.1.3}$$

$$j_{\gamma_1\gamma_2}(\tau) = j_{\gamma_1}(\gamma_2 \cdot \tau)\, j_{\gamma_2}(\tau) \qquad \text{(Règle de composition)}\,. \tag{1.1.4}$$

Le *groupe modulaire* est le sous-groupe de $SL_2(\mathbb{R})$ formé par les matrices ayant des éléments entiers

$$SL_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \;\middle|\; a, b, c, d \in \mathbb{Z} \text{ et } ad - bc = 1 \right\} . \tag{1.1.5}$$

Plus particulièrement, ce groupe est engendré par $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Par restriction, ce groupe nous fournit aussi une action sur $\mathcal{H}$. En considérant les orbites de $\mathcal{H}$ sous cette action, nous pouvons obtenir une surface de Riemann, mais cette dernière n'est pas compacte. Seulement quelques points manquent pour compactifier le tout.

Rappelons que la compactification de $\mathbb{C}$ s'effectue en ajoutant un point à l'infini, que nous noterons simplement ∞. Par contre, au passage de la compactification de $\mathbb{C}$, plusieurs points autres que ∞ doivent être ajoutés à $\mathcal{H}$ pour conserver une action. Il s'agit de l'orbite de ∞ sous $SL_2(\mathbb{Z})$. Analysant les transformations de Möbius, nous trouvons que ces points sont tous rationnels et, en fait, chaque $r \in \mathbb{Q}$ se retrouve dans l'orbite de ∞. Posons ainsi

$$\overline{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \cup \mathbb{Q} \cup \{\infty\} . \tag{1.1.6}$$

Dans ce mémoire, nous ne nous intéresserons pas spéficiquement au groupe modulaire, mais plus généralement à une famille de ses sous-groupes. Ces sous-groupes sont donnés pour $N \in \mathbb{N}$ par

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{Z}) \;\middle|\; N \mid c \right\} . \tag{1.1.7}$$

Nous dirons que N est le *niveau* de ce sous-groupe. Remarquons que le niveau 1 correspond exactement au groupe modulaire. Afin d'alléger le discours, nous sous-entendrons que le niveau est unitaire lorsqu'il ne sera pas précisé.

En considérant les orbites de $\overline{\mathcal{H}}$ sous $\Gamma_0(N)$, nous obtenons une surface de Riemann compacte. Nous noterons

$$X_0(N) = \Gamma_0(N) \backslash \overline{\mathcal{H}} \tag{1.1.8}$$

et nous dirons que cette surface est *une courbe modulaire*. Cette formulation s'explique par un théorème de géométrie algébrique qui indique que toute surface de Riemann compacte s'obtient d'une courbe algébrique sur $\mathbb{C}$ et vice versa, le lien entre les deux s'exprimant à travers le corps des fonctions méromorphes des deux variétés.

Nous dirons que $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$, ou les orbites issus de cet ensemble, sont les *pointes*[1] de $X_0(N)$. La topologie de $X_0(N)$ à l'extérieur des pointes est donnée par la topologie quotient issue du plan complexe. Les voisinages des pointes sont, quant à eux, donnés par les transformés des voisinage de ∞ sous des éléments de $SL_2(\mathbb{Z})$.Ainsi, si $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$

[1]En anglais, ces points sont nommés *cusps*.

est tel que $\gamma \cdot \infty = r$ pour un certain $r \in \mathbb{Q}$, la transformation donnée par γ permet de passer d'un voisinage local à ∞ à un voisinage local en r.

Intéressons nous maintenant aux fonctions sur la surface que nous venons de définir. Pour appliquer les théorèmes de géométrie riemanienne, les fonctions doivent être, en général, holomorphes ou, au moins, méromorphes. Par contre, pour le cas des courbes modulaires, bien peu de telles fonctions existent. Les formes modulaires, paraboliques et automorphes sont donc définies à l'aide d'un certain poids afin d'obtenir un éventail de fonctions holomorphes et méromorphes plus varié. Par contre, ces dernières ne sont pas définies en tant que tel sur la variété. Seul un quotient de ces fonctions le sera. Cette approche est analogue aux polynômes homogènes pour le plan projectif.

Fixons donc $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ et, pour chaque $\gamma \in SL_2(\mathbb{R})$, définissons l'opérateur *crochet de poids* k sur les applications $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ par

$$f[\gamma]_k(\tau) = j_\gamma(\tau)^{-k} f(\gamma \cdot \tau) \ . \tag{1.1.9}$$

Grâce à la règle de composition du facteur de modularité, cet opérateur est en fait un morphisme, c'est-à-dire que quelque soient $\gamma_1, \gamma_2 \in SL_2(\mathbb{R})$, nous avons $[\gamma_1\gamma_2]_k = [\gamma_1]_k[\gamma_2]_k$ ou, plus concrètement,

$$f[\gamma_1\gamma_2]_k(\tau) = \left(f[\gamma_1]_k\right)[\gamma_2]_k(\tau) = f[\gamma_1]_k[\gamma_2]_k(\tau) \ . \tag{1.1.10}$$

Afin de simplifier les notations, nous étandrons le crochet par linéarité aux sommes formelles d'éléments dans $SL_2(\mathbb{R})$ avec coefficients rationnels. Par contre, il faudra porter une attention particulière pour ne pas confondre ces sommes formelles avec l'addition matricielle.

Nous dirons ainsi que $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ est *faiblement modulaire de poids* k *pour* $\Gamma_0(N)$, ou plus simplement *invariante par* $\Gamma_0(N)$ lorsque $k = 0$, si elle reste inchangée par $\Gamma_0(N)$ à travers le crochet de poids k. Considérant $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(N)$, nous obtenons que toute fonction faiblement modulaire de poids impair est nulle. Il sera sous-entendu par la suite que k est pair.

Pour que l'on dise que f est une forme, cette dernière devra également satisfaire des conditions de méromorphie. Sur $\mathcal{H}$, cette notion reste inchangée, mais il est nécessaire d'exprimer f localement aux pointes pour y observer cette propriété. Commençons par le cas spécial où la pointe en question est ∞. Pour observer localement f en ce point, remarquons que $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(N)$, ce qui indique que f est périodique. La série de Fourier de f est donc de la forme

$$f(\tau) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n q^n \, , \qquad q = e^{2\pi i \tau} \, , \tag{1.1.11}$$

où m représente le plus petit indice des coefficients non nuls (où le cas $m = -\infty$ est possible). Le paramètre q nous fournit un paramètre local autour de l'infini. En effet, $\tau \mapsto q$ transforme $\mathcal{H}$ en un disque unitaire pointé et centré en 0 et où le centre s'obtient en laissant la partie imaginaire de τ augmenter indéfiniement. Nous dirons donc que f *s'annule à l'infini*, est *holomorphe à l'infini* ou est *méromorphe à l'infini* respectivement dans les cas où $m > 0$, $m = 0$ et $m \in \mathbb{Z}$. Aussi, convenons que nous noterons toujours τ pour le paramètre extérieur aux pointes et $q = e^{2\pi i\tau}$ pour le paramètre local à l'infini.

Pour les propriétés locales des autres pointes, il s'agit simplement de se rappeler que leurs voisinages sont donnés par les transformés des voisinages de l'infini. Autrement dit, si $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$ est tel que $\gamma \cdot \infty = r \in \mathbb{Q}$, les propriétés locales de f en r sont donc les mêmes que les propriétés de $f[\gamma]_k$ à l'infini.

Nous serions tentés de dire que la valeur aux pointes de f est donnée par a_0 si sa série de Fourier n'a que des puissances positives en q. Par contre, la valeur de a_0 dépend du choix de γ et cette valeur est bien définie uniquement lorsque a_0 est nul.

Si $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ est faiblement modulaire de poids k, nous dirons qu'il s'agit d'une *forme modulaire* lorsque f est holomorphe sur $\mathcal{H}$ et en chacune de ses pointes. Si de plus f s'annule en chacune de ses pointes, nous dirons que c'est une *forme parabolique*[2]. Finalement, lorsque f est seulement méromorphe sur $\mathcal{H}$ et en chacune de ses pointes, nous dirons que c'est une *forme automorphe*. Nous noterons respectivement l'espace vectoriel des formes paraboliques, des formes modulaires et des formes automorphes de poids k et de niveau N par[3]

$$\mathcal{S}_k(\Gamma_0(N)) \ , \qquad \mathcal{M}_k(\Gamma_0(N)) \ , \qquad \mathcal{A}_k(\Gamma_0(N)) \ . \tag{1.1.12}$$

Remarquons que si $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ est faiblement modulaire de poids k, la forme différentielle de degré $\frac{k}{2}$

$$f(\tau)\underbrace{d\tau \wedge d\tau \wedge \ldots \wedge d\tau}_{\frac{k}{2}\text{ fois}}$$

est bien définie au niveau des orbites de $\mathcal{H}$. Ainsi, les formes automorphes de poids k correspondent aux formes différentielles (méromorphes) de degré $\frac{k}{2}$ sur $\mathcal{H}$ invariante par l'action de $\Gamma_0(N)$. Plusieurs résultats permettent même de passer aux formes différentielles sur $X_0(N)$, pointes comprises. Ainsi, les formes automorphes de poids 2 correspondent aux formes différentielles sur $X_0(N)$ de degré $\frac{k}{2}$. En particulier, les formes paraboliques de poids 2 correspondent très exactement aux formes holomorphes de degré 1 sur $X_0(N)$.

[2]En anglais, les formes paraboliques sont nommées *cusp forms*.

[3]Les formes paraboliques sont nommées *Spitzenform* en allemand d'où la lettre $\mathcal{S}$ pour cette notation.

QUELQUES EXEMPLES

Dans ce mémoire, nous utiliserons principalement deux catégories de formes modulaires. La première est donnée par les séries d'Eisenstein et la deuxième sera construite à partir du discriminant modulaire dans un prochain chapitre. Ces deux formes modulaires pour le groupe modulaire en entier jouent un rôle primordial pour la suite et nous prenons donc la peine de les exposer ici afin de rassembler toutes leurs propriétés dans une même section.

Commençons par les séries d'Eisenstein. Nous noterons ζ pour la fonction zêta de Riemann. Les séries d'Eisenstein (normalisées) sont données pour chaque $k \in \mathbb{N}$ strictement supérieur à 2 par

$$E_k(\tau) = \frac{1}{2\zeta(k)} \sum_{m,n}{}' \frac{1}{(m\tau + n)^k} \,. \tag{1.1.13}$$

La convergence absolue et uniforme des séries d'Eisenstein permet de vérifier qu'elles sont faiblement modulaires de poids k. On vérifie qu'elles sont holomorphes aux pointes, c'est-à-dire uniquement à l'infini pour ce cas, en calculant leur série de Fourier. Si B_k est le k-ième nombre de Bernoulli, un calcul nous donnerait

$$E_k(\tau) = 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n)\, q^n \,, \qquad \text{où } \sigma_{k-1}(n) = \sum_{\lambda \mid n} \lambda^{k-1} \,. \tag{1.1.14}$$

La dernière équation permet d'affirmer que les E_k sont holomorphes à l'infini et sont donc des formes modulaires de poids k.

Le cas où $k = 2$ est particulier. En effet, la définition que nous avons donnée ne converge pas absolument dans cette situation. Néanmoins, la série de Fourier que nous venons d'énoncer est sensée même lorsque $k = 2$ et nous pouvons étendre notre définition pour que

$$E_2(\tau) = 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n)\, q^n \,. \tag{1.1.15}$$

La fonction ainsi définie est bien holomorphe, autant sur $\mathcal{H}$ qu'à l'infini, mais elle n'est pas faiblement modulaire. En procédant avec beaucoup de précaution, il est possible de vérifier que, pour $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$, elle respecte

$$E_2[\gamma]_2(\tau) = E_2(\tau) - \frac{6i}{\pi} \frac{j'_\gamma(\tau)}{j_\gamma(\tau)} \tag{1.1.16}$$

et que la fonction corrigée

$$E_2^*(\tau) = E_2(\tau) - \frac{3}{\pi \mathrm{Im}(\tau)} \tag{1.1.17}$$

est faiblement modulaire de poids 2. Évidemment, cette dernière fonction n'est pas holomorphe. Il apparaît, pour des considérations un peu plus profondes que ce que cette section vise à énoncer, qu'il est impossible d'obtenir une forme modulaire de poids 2 sur $X_0(1)$. Nous resterons donc aux prises avec ces deux séries d'Eisenstein que nous interchangerons selon que nous ayons besoin de l'invariance modulaire ou de l'holomorphie.

Le discriminant modulaire est, quant à lui, donné par le produit absoluement et uniformément convergent

$$\Delta(\tau) = \left(2\pi\right)^{12} q \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - q^n\right)^{24} . \tag{1.1.18}$$

Directement de la définition, nous nous apercevons que Δ est holomorphe, tant sur $\mathcal{H}$ qu'à l'infini et même qu'il s'annule à l'infini. C'est d'ailleurs son seul zéro. Par contre, l'invariance par le groupe modulaire n'est pas évidente directement de cette formule. Malgré tout, nous pouvons calculer sa dérivée logarithmique, ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta'(\tau)}{\Delta(\tau)} &= \frac{d}{d\tau} \log(\Delta(\tau)) \\
&= 2\pi i \left(1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n q^n}{1 - q^n}\right) \\
&= 2\pi i \left(1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} n q^n \sum_{m=0}^{\infty} q^{mn}\right) \\
&= 2\pi i \left(1 - 24 \sum_{m,n \in \mathbb{N}} n q^{mn}\right) \\
&= 2\pi i \left(1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n)\, q^n\right) = 2\pi i\, E_2(\tau) .
\end{aligned}$$

La règle de transformation de E_2 nous indique alors que, quelque soit $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau} \log(\Delta(\gamma \cdot \tau)) &= j_\gamma(\tau)^{-2} \frac{\Delta'(\gamma \cdot \tau)}{\Delta(\gamma \cdot \tau)} \\
&= 2\pi i E_2[\gamma]_2(\tau) \\
&= 2\pi i \left(E_2(\tau) - \frac{6i}{\pi} \frac{j_\gamma'(\tau)}{j_\gamma(\tau)}\right) \\
&= \frac{\Delta'(\tau)}{\Delta(\tau)} + 12 \frac{j_\gamma'(\tau)}{j_\gamma(\tau)} \; = \; \frac{d}{d\tau} \log\Big(j_\gamma(\tau)^{12}\, \Delta(\tau)\Big) .
\end{aligned}$$

Par conséquent, pour chaque $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$, il existe une constante C_γ tel que

$$\Delta[\gamma]_{12}(\tau) = C_\gamma\, \Delta(\tau) . \tag{1.1.19}$$

L'opérateur $[\ ]_{12}$ étant un morphisme, nous avons même que $C_{\gamma_1\gamma_2} = C_{\gamma_1}C_{\gamma_2}$. Ainsi, pour vérifier l'invariance modulaire, il suffit de vérifier que C_T et C_S sont unitaires où $T = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $S = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, car ces éléments engendrent le groupe modulaire. On s'aperçoit facilement que ceci est vrai pour T et, pour S, cela peut se vérifier rapidement en posant $\tau = i = S \cdot i$. Le discriminant modulaire est donc une forme parabolique de poids 12.

Mentionnons que cette fonction est très importante dans la théorie des formes modulaires, car elle permet d'expliciter plusieurs résultats et joue un rôle pour les courbes elliptiques. Par exemple, on pourrait l'utiliser pour vérifier que les $\mathcal{M}_k(\Gamma_0(N))$ forment des espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{C}$ en calculant récursivement leur dimension.

Ce résultat explique d'ailleurs toute la puissance des formes modulaires. En effet, la dimension de l'espace qu'elles engendrent étant bornée, on obtient des relations linéaires si l'on considère assez de formes modulaires. En particulier, si l'on parvient à encoder des valeurs d'intérêt dans les coefficients de Fourier, nous pouvons obtenir des résultats joignant plusieurs théories. Notamment, c'est parce qu'il encode des valeurs d'intérêt pour les courbes elliptiques que le théorème de modularité joue un rôle si important dans les mathématiques modernes.

Chapitre 2

FORMES PRIMITIVES

Les formes modulaires pour $\Gamma_0(N)$ présentent des particularités qui les distinguent des formes qui sont modulaires pour le groupe $SL_2(\mathbb{Z})$ en entier. Plus particulièrement, nous observerons des différences fondamentales pour des formes paraboliques. Ces différences nous fourniront une structure très riche qui prendra tout son sens avec les formes primitives[1]. Les résultats de ce chapitre proviennent surtout de l'article de Atkin et Lehner (1970) et traitent de la structure des formes paraboliques en tant qu'espace vectoriel.

2.1. Produit de Petersson et opérateurs de Hecke

Le but de cette section est de présenter quelques résultats fondamentaux sur $\mathcal{S}_k(\Gamma_0(N))$ en tant qu'espace vectoriel. Pour exprimer ces résultats, nous utiliserons deux puissants outils: le produit de Petersson et les opérateurs de Hecke. Ces deux notions sont évidemment définies pour des sous-groupes bien plus généraux que $\Gamma_0(N)$, mais nous n'exposerons que la théorie pour ce cas. Les livres de Diamond et Shurman (2006) et de Serre (1970), qui ont servi de référence pour cette section, couvrent un grand nombre de détails supplémentaires et toutes les preuves omises ici s'y retrouvent.

D'abord, nous allons nous intéresser à une forme volume sur $\mathcal{H}$ qui est invariante sous $\Gamma_0(N)$ et que nous utiliserons pour définir le produit de Petersson. Puisque nous effectuerons des calculs explicites à plusieurs reprises, nous aurons avantage à utiliser plusieurs systèmes de coordonnées sur $\mathcal{H}$: les coordonnées conjuguées $(\tau, \overline{\tau})$ et les parties réelles et imaginaires (x, y). La forme volume est donnée par

$$d\mu(\tau) = \frac{dx \wedge dy}{y^2} = \frac{i}{2}\,\frac{d\overline{\tau} \wedge d\tau}{\mathrm{Im}(\tau)^2}\,. \tag{2.1.1}$$

Il s'agit de la *mesure hyperbolique du demi-plan supérieur* issue du modèle de Poincaré pour une géométrie à courbure négative constante.

[1]En anglais, les formes primitives sont nommées *newforms*.

Utilisant les coordonnées conjuguées, nous pouvons vérifier l'invariance de cette forme. Si $\gamma \in \Gamma_0(N)$ (ou même $\gamma \in SL_2(\mathbb{R})$), l'action commute avec la conjugaison complexe. Ainsi,

$$\begin{aligned} d\mu(\gamma \cdot \tau) &= \frac{i}{2} \frac{d\overline{(\gamma \cdot \tau)} \wedge d(\gamma \cdot \tau)}{\operatorname{Im}(\gamma \cdot \tau)} \\ &= \frac{i}{2} \frac{d(\gamma \cdot \overline{\tau}) \wedge d(\gamma \cdot \tau)}{\operatorname{Im}(\gamma \cdot \tau)} \\ &= \frac{i}{2} \frac{j_\gamma(\overline{\tau})^{-2}\, j_\gamma(\tau)^{-2}\, d\overline{\tau} \wedge d\tau}{|j_\gamma(\tau)|^{-4} \operatorname{Im}(\tau)^2} \\ &= \frac{i}{2} \frac{\overline{j_\gamma(\tau)}^{-2}\, j_\gamma(\tau)^{-2}\, d\overline{\tau} \wedge d\tau}{|j_\gamma(\tau)|^{-4} \operatorname{Im}(\tau)^2} = d\mu(\tau)\,. \end{aligned}$$

Étant invariante, cette forme est bien définie au niveau des orbites et nous permet de calculer des intégrales sur $X_0(N)$. Afin de calculer ces intégrales, on utilise normalement les domaines fondamentaux. Ces domaines sont des sous-ensembles connexes et fermés de $\overline{\mathcal{H}}$ où chaque point de l'intérieur représente un seul orbite pour l'action de $\Gamma_0(N)$. Si l'on identifie correctement la frontière, on obtient alors un modèle pour la surface de Riemann $X_0(N)$.

Pour nos intégrales, nous considérerons des fonctions $\varphi : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ continues, bornées et, évidemment, invariantes sous $\Gamma_0(N)$. De cette façon, nous n'aurons pas à nous préoccuper de l'intégrabilité et de la convergence de l'intégrale. En effet,

$$\left| \iint_{X_0(N)} \varphi(\tau)\, d\mu(\tau) \right| \leqslant \int_{X_0(N)} |\varphi(\tau)|\, d\mu(\tau) \leqslant \sup_{\tau \in \mathcal{H}} \big\{ |\varphi(\tau)| \big\} \operatorname{Vol}(X_0(N)) \tag{2.1.2}$$

et l'intégrale de φ sur $X_0(N)$ existera pour autant que le volume de la courbe modulaire soit fini. Or, le volume est toujours fini et la preuve de ce fait se retrouve dans le livre de Diamond et Shurman (2006) (Chapitre 5, section 4).

Le produit de Petersson entre $f, g \in \mathcal{S}_k(\Gamma_0(N))$ est donné par l'intégrale de

$$\varphi(\tau) = f(\tau)\, \overline{g(\tau)} \operatorname{Im}(\tau)^k \tag{2.1.3}$$

qui est bien continue et invariante par $\Gamma_0(N)$ comme nous pourrions le vérifier en faisant un calcul similaire à celui de $d\mu$. Il ne reste qu'à vérifier que φ est bornée sur $\mathcal{H}$. Mais φ est périodique, car $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(N)$, et il suffit de montrer qu'elle est bornée sur une demi-bande verticale de largeur 1. Si nous bornons la partie imaginaire (en haut et en bas), la demi-bande devient un rectangle qui est compact. Sur cette partie, φ est donc certainement bornée et il suffit de vérifier que φ reste bornée lorsque nous approchons une pointe. En considérant $\varphi[\gamma]_0$ pour un $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$ approprié, nous pouvons supposer que la pointe à traiter est ∞.

Écrivons $f(\tau)\,\overline{g(\tau)} = \sum_{m,n\in\mathbb{N}} a_m\,\overline{b_n}\,q^m\,\overline{q}^n$ pour le produit des séries de Fourier. Alors

$$|\varphi(\tau)| = \left|f(\tau)\overline{g(\tau)}y^k\right| \leqslant \sum_{m,n\in\mathbb{N}} |a_m\,b_n|\,y^k\,e^{-2\pi y(m+n)} \quad \xrightarrow{y\to\infty} \ 0\,,$$

ce qui assure que φ est bien bornée.

Définition 2.1.1. *Soit $N \in \mathbb{N}$. Le produit de Petersson entre deux formes paraboliques f et g de poids k pour $\Gamma_0(N)$ est donné par*

$$\left\langle f, g\right\rangle = \int_{X_0(N)} f(\tau)\,\overline{g(\tau)}\,\mathrm{Im}(\tau)^k\,d\mu(\tau)\ .$$

Rappelant que $\mathcal{S}_k(\Gamma_0(N))$ est de dimension finie, le produit de Petersson fournit sur $\mathcal{S}_k(\Gamma_0(N))$ une structure d'espace hermitien.

Passons maintenant aux opérateurs de Hecke.

Théorème 2.1.2. *Soient $N \in \mathbb{N}$. Il existe une algèbre d'opérateurs linéaires $\mathcal{T}$ engendrée par des applications linéaires*

$$T_n : \mathcal{S}_k(\Gamma_0(N)) \to \mathcal{S}_k(\Gamma_0(N))\ ,$$

où n circule parmi $\mathbb{N}$. On nomme ces générateurs les opérateurs de Hecke et ils respectent les propriétés suivantes.

- *I) T_1 est l'identité.*
- *II) Les opérateurs de Hecke commutent entre eux.*
- *III) Si $(m, n) = 1$, alors $T_m T_n = T_{mn}$.*
- *IV) Si $p \mid N$, alors $T_{p^\nu} = T_p^\nu$ quelque soit $\nu \in \mathbb{N}$.*
- *V) Si $p \nmid N$, alors $T_{p^{\nu+1}} = T_p T_{p^\nu} - p^{k-1} T_{p^{\nu-1}}$ quelque soit $\nu \in \mathbb{N}$.*
- *VI) Lorsque $(n, N) = 1$, l'opérateur T_n est autoadjoint par rapport au produit de Petersson, c'est-à-dire que*

$$\left\langle T_n f, g\right\rangle = \left\langle f, T_n g\right\rangle\ .$$

- *VII) Si la série de Fourier de $f \in \mathcal{S}_k(\Gamma_0(N))$ est donnée par $f(\tau) = \sum_{n=1}^\infty a_n q^n$, alors la série de Fourier de $T_p f$ est donnée par*

$$T_p f(\tau) = \begin{cases} \sum_{n=1}^\infty \left(a_{np} + p^{k-1} a_{\frac{n}{p}}\right) q^n & \textit{si } p \nmid N \\ \sum_{n=1}^\infty a_{np} q^n & \textit{si } p \mid N \end{cases}$$

avec la convention que $a_m = 0$ lorsque m n'est pas entier.

DÉMONSTRATION. Voir le livre de Diamond et Shurman (2006) (chapitre 5) ou l'article de Atkin et Lehner (1970) pour une présentation plus concise. □

Remarquons que les points I à V du théorème précédent indiquent que $\mathcal{T}$ est, en fait, engendré seulement par les T_p. Le point VII donnant la série de Fourier ne souffre donc pas d'un manque de généralité en se restreignant aux T_p.

Rappelons que les opérateurs autoadjoints sont toujours diagonalisables. Un résultat d'algèbre linéaire spéficie même qu'il est possible de diagonaliser simultanément une famille d'opérateurs autoadjoints qui commutent entre eux. Nous obtenons donc le corollaire suivant.

Corollaire 2.1.3. *Soit $N \in \mathbb{N}$. Il existe une base de $\mathcal{S}_k(\Gamma_0(N))$ formée de fonctions propres pour tous les opérateurs de Hecke T_n avec $(n, N) = 1$.*

La condition $(n, N) = 1$ est un problème que la théorie d'Atkin-Lehner vise à solutionner, mais avant d'en discuter, voyons de ce qui se passerait si nous avions des fonctions propres pour l'algèbre de Hecke au complet. Ceci s'obtient d'ailleurs dans le cas particulier où $N = 1$.

Soit donc f une forme parabolique de poids k non nulle et telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$T_n f = \varphi_f(n)\, f \qquad \text{où } \varphi_f(n) \in \mathbb{C}^\times \text{ est la valeur propre.} \tag{2.1.4}$$

Notons également $f(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n$ pour sa série de Fourier. En comparant le premier terme des séries de Fourier de $T_p f$ et de $\varphi_f(p)\, f$, nous obtenons

$$a_p = \varphi_f(p)\, a_1 \,.$$

Mais les relations entre les opérateurs de Hecke se traduisent en les mêmes relations pour φ_f et, puisque les T_p engendrent les T_n, nous trouvons

$$a_n = \varphi_f(n)\, a_1 \,, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}\,. \tag{2.1.5}$$

Deux cas peuvent alors survenir : ou bien $a_1 = 0$, ou bien $a_1 \neq 0$. Dans le premier cas, la dernière égalité indique que f doit être nulle.

Si f n'est pas nulle, $a_1 \neq 0$ et, quitte à normaliser par $\frac{1}{a_1}$, supposons $a_1 = 1$. La relation entre les coefficients de Fourier et les valeurs propres devient donc

$$a_n = \varphi_f(n) \,, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$

Les valeurs propres de f sous l'algèbre de Hecke se retrouvent donc à être précisément ses coefficients de Fourier. Et même, les relations entre les opérateurs de Hecke indiquent que

$$a_{mn} = a_m a_n \qquad \text{si } (m, n) = 1\,, \tag{2.1.6}$$

$$a_{p^\nu} = a_p^\nu \qquad \text{si } p \mid N \text{ et } \nu \in \mathbb{N}\,, \tag{2.1.7}$$

$$a_{p^{\nu+1}} = a_p a_{p^\nu} - p^{k+1} a_{p^{\nu-1}} \qquad \text{si } p \nmid N \text{ et } \nu \in \mathbb{N}\,. \tag{2.1.8}$$

et si nous formons la fonction L

$$L_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \tag{2.1.9}$$

alors nous avons le produit eulérien

$$L_f(s) = \prod_{p|N} \left(\frac{1}{1 - a_p p^{-s}} \right) \prod_{p\nmid N} \left(\frac{1}{1 - a_p p^{-s} + p^{k-1-2s}} \right). \tag{2.1.10}$$

Nous arrêterons notre discussion ici afin de passer à une autre classe d'opérateurs, mais les détails sur la convergence et l'équation fonctionnelle associée à cette fonction L se retrouvent dans le livre de Diamond et Shurman (2006).

2.2. Involutions d'Atkin-Lehner

Dans cette section, nous construirons une autre classe d'opérateurs définie sur les formes modulaires pour un niveau fixé. Prenons donc $N \in \mathbb{N}$ et considérons le sous-ensemble

$$W = \left\{ \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{ll} a, b, c, d \in \mathbb{Z}, & \lambda \in \mathbb{N} \\ N \mid c, & \lambda \mid a, d, N \end{array} \quad ad - bc = \lambda \right\} \subset SL_2(\mathbb{R}). \tag{2.2.1}$$

Dans un premier lieu, commençons par nous intéresser au facteur λ de cette représentation. En fait, ce facteur est unique pour une représentation donnée. Autrement dit, si une matrice possède deux représentations dans W, disons

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix},$$

nous devons avoir $\lambda_1 = \lambda_2$. En effet, en multipliant par l'inverse de la matrice de gauche, nous obtenons[2]

$$\frac{\sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \frac{d_1}{\lambda_1} - b_2 \frac{c_1}{\lambda_1} & (\dots) \\ (\dots) & (\dots) \end{pmatrix}.$$

Mais à cause des conditions de divisibilité de W, nous sommes certains que le premier élément de la matrice de droite est entier. Par conséquent, $\frac{\sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_1}}$ est aussi un entier et nous avons nécessairement $\lambda_1 \mid \lambda_2$.

Symétriquement, si nous avions multiplié par les inverses, mais de l'autre côté, nous aurions obtenu $\lambda_2 \mid \lambda_1$. Au final, nous devons avoir $\lambda_1 = \lambda_2$.

Le facteur λ joue ainsi le rôle d'un invariant et, pour cette raison, nous le nommerons le facteur de cohésion. Ce que nous avons démontré plus haut revient à dire que

[2] À quelques occasions dans cette section, nous devrons calculer des multiplications matricielles. Afin de minimiser les notations, nous n'indiquerons que les éléments pertinents aux raisonnements et noterons les autres éléments à l'aide de $(\dots)$ s'ils sont entiers.

l'application associant un élément de W à son facteur de cohésion est bien définie. En particulier, toute matrice de $\Gamma_0(N) \subset W$ a un facteur de cohésion unitaire. À l'opposé, nous avons même que toute matrice de facteur de cohésion unitaire vient de $\Gamma_0(N)$.

Passons maintenant à une étude un peu plus algébrique de W et remarquons que W est fermé pour l'inversion matricielle. En effet, l'inverse de $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\left(\begin{smallmatrix} \lambda x_1 & x_2 \\ N x_3 & \lambda x_4 \end{smallmatrix}\right) \in W$ est donné par

$$\sqrt{\lambda}\,\frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix} \lambda x_4 & -x_2 \\ -N x_3 & \lambda x_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\begin{pmatrix} \lambda x_4 & -x_2 \\ -N x_3 & \lambda x_1 \end{pmatrix} \in W\,. \tag{2.2.2}$$

En particulier, l'inversion préserve le facteur de cohésion.

Considérons maintenant $w, w' \in W$ et $\gamma \in \Gamma_0\left(N\right)$ où λ et λ' sont les facteurs de cohésion respectif de w et w'. Un calcul nous assurerait que

$$w\gamma w' = \frac{1}{\sqrt{\frac{\lambda\lambda'}{\mu^2}}}\begin{pmatrix} \frac{\lambda\lambda'}{\mu^2}\left(\ldots\right) & \left(\ldots\right) \\ N\left(\ldots\right) & \frac{\lambda\lambda'}{\mu^2}\left(\ldots\right) \end{pmatrix} \in W \qquad \text{où } \mu = (\lambda, \lambda')\ . \tag{2.2.3}$$

De cette simple équation, nous pouvons déduire tous les points suivants.

- W est un groupe. Il ne restait qu'à vérifier qu'il est fermé pour la multiplication. Or, il s'agit de prendre γ comme étant l'identité.
- $\Gamma_0(N) \lhd W$. En effet, si jamais les matrices w et w' partagent le même facteur de cohésion, $w\gamma w' \in \Gamma_0(N)$. Comme l'inversion préserve le facteur de cohésion, nous trouvons bien que $\Gamma_0(N)$ est normal dans W.
- Toute matrice de W est d'ordre 2 modulo $\Gamma_0(N)$. Plus généralement, lorsque w et w' partagent le même facteur de cohésion, $ww' \in \Gamma_0(N)$.
- Les matrices ayant le même facteur de cohésion sont congrues modulo $\Gamma_0(N)$. En effet, d'après le point précédent, $ww' \equiv 1$. Nous avons donc bien $w \equiv w'^{-1} \equiv w'$.
- Des matrices avec des facteurs de cohésion distincts sont aussi distinctes modulo $\Gamma_0(N)$. Pour démontrer ce point, il suffit de vérifier que $ww' \notin \Gamma_0(N)$ si w et w' sont deux telles matrices. Si jamais ce n'était pas le cas, le facteur de cohésion du produit serait unitaire. Or, ce facteur est donné par $\mu = \frac{\lambda\lambda'}{(\lambda,\lambda')^2}$ et il faudrait que $\lambda = \lambda'$.
- ${}^{W}\!/_{\Gamma_0(N)}$ est fini. En effet, les deux derniers points permettent d'affirmer qu'il y a une bijection entre les translatés de $\Gamma_0(N)$ et les facteurs de cohésion. Comme ces facteurs doivent diviser N, il n'y en a qu'un nombre fini.
- ${}^{W}\!/_{\Gamma_0(N)}$ est abélien. Le facteur de cohésion de

  $$ww'w^{-1}w'^{-1} = (ww')(w^{-1}w'^{-1})$$

  est l'unité, car il est préservé par l'inversion. Ainsi, $ww'w^{-1}w'^{-1} \equiv 1$.

Cette série de points permet de former le groupe $\mathbb{AL} = {}^{W}\!/_{\Gamma_0(N)}$ et de déduire sa structure. Ce groupe est nommé le groupe d'involutions[3] d'Atkin-Lehner en l'honneur des premières personnes à l'avoir introduit en 1970 (Atkin et Lehner, 1970). Avant de discuter plus en profondeur des opérateurs associés, terminons de décrire la structure de $\mathbb{AL}$ en rassemblant le tout sous la forme d'une proposition.

Proposition 2.2.1. *Soit $N \in \mathbb{N}$. Si $N = p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}$ est la décomposition en facteurs premiers distincts, alors le groupe d'involutions d'Atkin-Lehner $\mathbb{AL}$ est isomorphe à $\left({}^{\mathbb{Z}}\!/_{2\mathbb{Z}}\right)^n$ et un système de représentants générateur est donné par les matrices w_{p_i} où*

$$w_{p_i} = \frac{1}{\sqrt{p_i^{\alpha_i}}} \begin{pmatrix} p_i^{\alpha_i} x_1 & x_2 \\ N x_3 & p_i^{\alpha_i} x_4 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} \text{où } x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z} \text{ sont tels que} \\ p_i^{2\alpha_i} x_1 x_4 - N x_3 x_2 = p_i^{\alpha_i} \,. \end{array}$$

DÉMONSTRATION. Le groupe $\mathbb{AL} = {}^{W}\!/_{\Gamma_0(N)}$ étant fini, abélien et composé d'éléments d'ordre 2, il admet nécessairement une décomposition de la forme $\prod {}^{\mathbb{Z}}\!/_{2\mathbb{Z}}$. Il ne reste qu'à vérifier que les w_{p_i} forment bien un système de générateurs pour compléter la preuve.

Puisque que nous savons que chaque classe de $\mathbb{AL}$ est en correspondance avec les facteurs de cohésions, étudions simplement ces facteurs. Si λ est un tel facteur, nous pouvons réécrire les conditions sur W (voir 2.2.1) pour obtenir

$$\begin{aligned} N \mid c, \quad \lambda \mid a, d, N \quad ad - bc = \lambda \quad &\iff \quad \lambda^2 a'd' - bNc' = \lambda \quad \lambda \mid N \text{ et } a', c', d' \in \mathbb{Z} \\ &\iff \quad \lambda a'd' - b\tfrac{N}{\lambda}c' = 1 \quad \lambda \mid N \text{ et } a', c', d' \in \mathbb{Z} \\ &\iff \quad \left(\lambda, \tfrac{N}{\lambda}\right) = 1 \qquad\quad \lambda \mid N \,. \end{aligned}$$

Autrement dit, les facteurs de cohésion sont très exactement donnés par les $\lambda \mid N$ tels que $\left(\lambda, \frac{N}{\lambda}\right) = 1$.

Nous pouvons ainsi terminer la preuve en affirmant que $p_1^{\alpha_1}, \dots, p_n^{\alpha_n}$ forment bien un système de générateurs pour les facteurs de cohésion sous l'opération

$$\lambda, \lambda' \mapsto \frac{\lambda\lambda'}{(\lambda, \lambda')^2} \,. \tag{2.2.4}$$

□

Établissons dès maintenant la convention que w_λ représente une involution ayant λ comme facteur de cohésion. Cette convention restera valable jusqu'à la fin du document. La proposition précédente indique que le groupe d'Atkin-Lehner est donné

[3]Une involution est un endomorphisme qui est son propre inverse. Nous considèrons ici le plongement de ce groupe dans les endomorphismes de $X_0(N)$.

par

$$\mathcal{AT} = \left\{ w_\lambda \mid \lambda \mid N \quad \left(\lambda, \tfrac{N}{\lambda}\right) = 1 \right\} \qquad w_\lambda w_{\lambda'} = w_{\frac{\lambda\lambda'}{\mu^2}} \qquad \text{où } \mu = (\lambda, \lambda')\ . \tag{2.2.5}$$

En particulier, si N n'est pas divisible par un carré, les conditions $\lambda \mid N$ et $\left(\lambda, \frac{N}{\lambda}\right) = 1$ sont équivalentes à la seule condition $\lambda \mid N$. À chaque divisieur de N correspond alors une et une seule involution.

Bien que l'action d'une involution w soit bien définie sur $X_0(N)$, il est important de remarquer qu'elle ne l'est pas nécessairement sur $\mathcal{H}$. En effet, puisque deux mêmes représentants de w diffèrent par un élément de $\Gamma_0(N)$ et que ce groupe n'agit pas nécessairement comme l'identité sur $\mathcal{H}$, l'action de deux représentants peuvent différer.

Remarquons que chacune des involutions amène des pointes sur des pointes. Nous pouvons ainsi nous demander si la restriction aux pointes nous fournit une action transitive. En général, ce n'est pas le cas, car il y a plus de pointes que d'involutions. Il faudra donc faire une hypothèse sur N pour avoir cette propriété.

Proposition 2.2.2. *Soit $N \in \mathbb{N}$ non divisible par un carré. Alors toute pointe de $X_0(N)$ s'obtient de ∞ transformé par un unique élément de $\mathcal{AT}$. Autrement dit, un système de représentants pour les pointes est donné par*

$$w_\lambda \cdot \infty \qquad \text{où } \lambda \mid N\,.$$

DÉMONSTRATION. Évidement, en considérant l'identité, nous obtenons le cas trivial où la pointe en question est ∞. Considérons maintenant $\frac{s}{t} \in \mathbb{Q}$ une fraction réduite. Nous cherchons $\lambda \mid N$ et un représentant d'une involution w_λ tel que $w_\lambda \cdot \infty = \frac{s}{t}$.

Posons $\lambda = \frac{N}{(t,N)}$. Nous avons alors les trois relations suivantes

$$\lambda \mid N\,, \qquad \tfrac{N}{\lambda} \mid t\,, \qquad (t,\lambda) = 1\,,$$

où la dernière relation n'est valide que parce que N n'est pas divisible par un carré. Ces trois relations nous permettent de construire l'involution voulue. En effet, ayant $(t,\lambda) = 1$ et $(t,s) = 1$, nous avons $(t,\lambda s) = 1$ et il existe $b, d \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\lambda s d - bt = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lambda^2 s d - b(\lambda t) = \lambda\,.$$

Mais comme $\frac{N}{\lambda} \mid t$, nous avons $N \mid \lambda t$ et

$$w_\lambda = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \begin{pmatrix} \lambda s & b \\ \lambda t & \lambda d \end{pmatrix} \in W\,.$$

Ainsi, nous avons bien $w_\lambda \cdot \infty = \frac{s}{t}$ et toutes pointes s'obtiennent bien de l'infini.

Pour compléter la preuve, il ne reste qu'à vérifier que deux involutions différentes fournissent des pointes distinctes. Or

$$w_{\lambda_1} \cdot \infty = w_{\lambda_2} \cdot \infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad w_{\lambda_1} w_{\lambda_2} \cdot \infty = \infty\,.$$

Nous pouvons donc montrer simplement que les seuls éléments de W fixant ∞ ont un facteur de cohésion unitaire. Si nous notons $w_\lambda = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\left(\begin{smallmatrix} \lambda a & b \\ Nc & \lambda d \end{smallmatrix}\right)$, alors w_λ fixe l'infini si et seulement si la transformation méromorphe

$$\tau \mapsto \frac{\lambda a \tau + b}{Nc\tau + \lambda d}$$

a son pôle à l'infini. Il faut donc que $c = 0$. Mais comme $w_\lambda \in W$, nous trouvons $\lambda^2 ad = \lambda$ d'où $\lambda = 1$. □

Grâce au crochet de poids k, ce groupe agit sur les fonctions faiblement modulaires pour $\Gamma_0(N)$ et nous fournit une nouvelle classe d'opérateurs. La prochaine proposition détaille le cas où la fonction est non seulement faiblement modulaire pour $\Gamma_0(N)$, mais pour le groupe modulaire au complet.

Proposition 2.2.3. *Soient* $N \in \mathbb{N}$, $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ *une application faiblement modulaire de poids* k *et* w_λ *une involution d'Atkin-Lehner. Alors l'identité suivante est vérifiée quelque soit* $\tau \in \mathcal{H}$

$$f[w_\lambda]_k(\tau) = \lambda^{\frac{k}{2}} f(\lambda\tau)\ .$$

DÉMONSTRATION. Disons que $w_\lambda = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\left(\begin{smallmatrix} \lambda a & b \\ Nc & \lambda d \end{smallmatrix}\right) \in W$ est un certain représentant pour l'involution. De la définition de W, nous avons que $\lambda^2 ad - Nbc = \lambda$ et $\lambda \mid N$. En divisant cette dernière équation par λ, nous obtenons

$$\lambda ad - \left(\tfrac{N}{\lambda}\right) bc = 1\,.$$

Posons alors $\omega = \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{N}{\lambda}c & \lambda d \end{pmatrix}$. La dernière équation nous assure que $\omega \in SL_2(\mathbb{Z})$. Or

$$\sqrt{\lambda}\ j_w(\tau) = Nc\tau + \lambda d = \tfrac{N}{\lambda} c(\lambda\tau) + \lambda d = j_\omega(\lambda\tau)\ ,$$

$$w \cdot \tau = \begin{pmatrix} \lambda a & b \\ Nc & \lambda d \end{pmatrix} \cdot \tau = \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{N}{\lambda}c & \lambda d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \tau = \omega \cdot \lambda\tau\,,$$

et nous trouvons bien

$$f(w \cdot \tau) = f(\omega \cdot \lambda\tau) = j_\omega(\lambda\tau)^k f(\lambda\tau) = \lambda^{\frac{k}{2}} j_w(\tau)^k f(\lambda\tau) \quad \Longleftrightarrow \quad f[w]_k(\tau) = \lambda^{\frac{k}{2}} f(\lambda\tau)\ .$$

□

En dernier lieu, exprimons deux relations entre les involutions d'Atkin-Lehner et les opérateurs de Hecke.

Proposition 2.2.4. *Soit* $N \in \mathbb{N}$. *Les involutions d'Atkin-Lehner commutent avec les opérateurs de Hecke* T_p *pour* $p \nmid N$. *Autrement dit, si* $f \in \mathcal{S}_k(\Gamma_0(N))$ *et* w_λ *est une telle involution,*

$$\left(T_p f\right)[w_\lambda]_k = T_p(f[w_\lambda]_k) \ .$$

De plus, si $(p, N) = p$, *alors*

$$T_p f + p^{\frac{k}{2}-1} f[w_p]_k \in \mathcal{S}_k\left(\Gamma_0\left(\tfrac{N}{p}\right)\right) \ .$$

DÉMONSTRATION. Voir l'article original de Atkin et Lehner (1970). □

2.3. FORMES PRIMITIVES

Dans cette section, nous discuterons du problème lié au corollaire 2.1.3. Ce dernier assurait l'existence d'une base de $\mathcal{S}_k(\Gamma_0(N))$ propre pour les opérateurs de Hecke T_n avec $(n, N) = 1$. Rappelons que nous avions vu que si f est une telle fonction et que nous notons $f(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n$ pour sa série de Fourier, alors

$$a_p = \varphi_f(p)\, a_1 \,, \qquad\qquad \text{pour } p \nmid N$$

où φ_f est la valeur propre de f sous T_p avec $p \nmid N$. Or ces opérateurs engendrent les T_n avec $(n, N) = 1$, ce qui nous fournit la relation

$$a_n = \varphi_f(n)\, a_1 \,, \qquad\qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \text{ tel que } (n, N) = 1 \,. \tag{2.3.1}$$

Deux cas se présentent alors à nous selon que le premier coefficient de Fourier est nul ou non.

Laissons ce problème de côté un instant et remarquons que pour $\lambda \mid N$,

$$\Gamma_0(N) \subset \Gamma_0(\lambda) \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{S}_k(\Gamma_0(\lambda)) \subset \mathcal{S}_k(\Gamma_0(N)) \ . \tag{2.3.2}$$

En fait, nous avons plus généralement que si $\lambda \mid N$ est un diviseur propre, alors pour chaque $d \mid \frac{N}{\lambda}$, il y a une injection

$$B_d : \mathcal{S}_k(\Gamma_0(\lambda)) \to \mathcal{S}_k(\Gamma_0(N)) \tag{2.3.3}$$

donnée par $B_d f(\tau) = f(d\tau)$. Au moins lorsque $d \neq 1$, nous pouvons vérifier, en comparant les séries de Fourier, que B_d ne produit que des formes dont le premier coefficient de Fourier est nul. Or nous voulons justement distinguer le cas où ce dernier est nul de celui où il est non nul. Séparons donc $\mathcal{S}_k(\Gamma_0(N))$ en deux sous-espaces d'après l'image des B_d.

Définition 2.3.1. *Soit* $N \in \mathbb{N}$. *L'espace des formes anciennes, que nous noterons* $\mathcal{S}_k(\Gamma_0(N))^\flat$, *est le sous-espace de* $\mathcal{S}_k(\Gamma_0(N))$ *engendré par les images des* B_d *où* $d \mid \frac{N}{\lambda}$ *et* $\lambda \mid N$ *est un diviseur propre. L'espace des formes nouvelles, que nous noterons* $\mathcal{S}_k(\Gamma_0(N))^\sharp$, *est donné par le complément orthogonal de* $\mathcal{S}_k(\Gamma_0(N))^\flat$ *par le produit de Petersson.*

Les formes anciennes sont, en quelques sortes, les formes paraboliques qui proviennent d'un niveau inférieur. Ainsi, les formes nouvelles représentent les formes qui apparaissent uniquement au niveau considéré. Cette situation est analogue aux caractères de Dirichlet primitifs. Nous porterons notre attention uniquement sur les formes nouvelles, car toute forme parabolique est nouvelle pour un certain niveau.

En ayant défini les formes nouvelles par une propriété d'orthogonalité, nous pouvons déduire plusieurs propriétés. D'abord, les formes paraboliques admettent la décomposition

$$\mathcal{S}_k(\Gamma_0(N)) = \mathcal{S}_k(\Gamma_0(N))^\flat \oplus \mathcal{S}_k(\Gamma_0(N))^\sharp \ . \tag{2.3.4}$$

Ensuite, puisque les involutions d'Atkin-Lehner sont autoadjointes, elles respectent l'orthogonalité. Elles se restreignent donc aux formes nouvelles. Similairement pour les T_n avec $(n, N) = 1$ qui se restreingnent également aux formes nouvelles. Notre corollaire 2.1.3 se spécialise donc à $\mathcal{S}_k(\Gamma_0(N))^\sharp$ et il existe ainsi une base formée de fonction propres pour les T_n avec $(n, N) = 1$. En fait, la contrainte sur les facteurs de N peut même être levée, ce qui nous fournit une base propre pour l'algèbre $\mathcal{T}$ en entier. Pour démontrer ce résultat, nous aurons besoin du lemme fondamental de la théorie d'Atkin-Lehner.

Lemme 2.3.2 (Lemme fondamental[4])**.** *Soient* $N \in \mathbb{N}$ *et* $f \in \mathcal{S}_k(\Gamma_0(N))$. *Notons* $f(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n$ *pour sa série de Fourier et supposons que nous ayons* $a_n = 0$ *aussitôt que* $(n, N) = 1$*. Alors* f *est de la forme*

$$f = \sum_{p|N} B_p f_p$$

où les $f_p \in \mathcal{S}_k\left(\Gamma_0\left(\frac{N}{p}\right)\right)$ *et les* $B_p : \mathcal{S}_k\left(\Gamma_0\left(\frac{N}{p}\right)\right) \to \mathcal{S}_k(\Gamma_0(N))$ *ont été définies plus haut.*

DÉMONSTRATION. Ce résultat très technique se retrouve dans l'article original de Atkin et Lehner (1970) et dans le livre de Diamond et Shurman (2006). □

En conséquence de ce lemme, nous pouvons obtenir plusieurs courtes propositions.

Proposition 2.3.3. *Soit* $f \in \mathcal{S}_k(\Gamma_0(N))^\sharp$ *non nulle. Si* f *est propre pour les* T_n *avec* $(n, N) = 1$, *alors son premier coefficient de Fourier est non nul.*

DÉMONSTRATION. Si nous notons $f(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n$ et $\varphi_f(n)$ pour la valeur propre sous T_n avec $(n, N) = 1$, nous avions vu au début de la section que

$$a_n = \varphi_f(n)\, a_1 \,, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \text{ tel que } (n, N) = 1 \,.$$

[4]Il s'agit du théorème 1 de l'article de Atkin et Lehner (1970) que l'on nomme en anglais *main lemma*.

Si jamais $a_1 = 0$, alors $a_n = 0$ lorsque $(n, N) = 1$. Le lemme fondamental indique alors que f est une forme ancienne. Étant nouvelle et ancienne à la fois, cette forme doit être nulle, ce qui avait été exclu. $\square$

Proposition 2.3.4. *Soient* $f, g \in \mathcal{S}_k(\Gamma_0(N))^\sharp$ *deux fonctions propres pour les* T_n *avec* $(n, N) = 1$. *Si* f *et* g *partagent les mêmes valeurs propres, alors elles sont colinéaires.*

DÉMONSTRATION. Écrivons $f(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n$ et $g(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n q^n$ et posons

$$h = b_1 f - a_1 g = \sum_{n=2}^{\infty} \left(b_1 a_n - a_1 b_n\right) q^n .$$

Puisque f et g ont les mêmes valeurs propres, nous avons que h est propre pour les T_n avec $(n, N) = 1$. De plus, il s'agit d'une forme nouvelle ayant un premier coefficient de Fourier nul. Le lemme précédent indique donc que $h = 0$. Il indique également que a_1 et b_1 sont non nuls. Nous avons ainsi

$$b_1 f = a_1 g \qquad \Longleftrightarrow \qquad f = \frac{a_1}{b_1} g .$$

$\square$

Proposition 2.3.5. *Soit* $f \in \mathcal{S}_k(\Gamma_0(N))^\sharp$ *non nulle. Si* f *est propre pour les* T_n *avec* $(n, N) = 1$, *alors* f *est propre pour l'algèbre de Hecke en entier. Autrement dit,*

$$T_n f = \varphi_f(n)\, f , \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} .$$

DÉMONSTRATION. Prenons $m \in \mathbb{N}$ tel que $(m, N) > 1$. Nous voulons vérifier que f est propre pour T_m. Notons $\varphi_f(n)$ pour la valeur propre de f sous T_n avec $(n, N) = 1$ et considérons la fonction $T_m f$. Puisque les opérateurs de Hecke commutent (point II du théorème 2.1.2), nous avons

$$T_n T_m f = T_m T_n f = \varphi_f(n)\, T_m f$$

pour tous les $n \in \mathbb{N}$ tel que $(n, N) = 1$. Ainsi, $T_m f$ est une fonction propre pour les T_n avec $(n, N) = 1$ partageant les mêmes valeurs propres que f. La proposition précédente indique alors que $T_m f$ et f sont colinéaires, c'est-à-dire qu'il existe une constante $\varphi_f(m)$ tel que

$$T_m f = \varphi_f(m)\, f .$$

$\square$

Puisque les involutions d'Atkin-Lehner commutent avec les opérateurs de Hecke, nous obtenons un résultat similaire.

Proposition 2.3.6. *Soit* $f \in \mathcal{S}_k(\Gamma_0(N))^\sharp$ *non nulle. Si* f *est propre pour les* T_n *avec* $(n, N) = 1$, *alors* f *est propre pour les involutions d'Atkin-Lehner. Autrement dit,*

$$f[w_\lambda]_k = \psi_f(\lambda)\, f \qquad\qquad \textit{où } \psi_f(\lambda) = \pm 1\,.$$

DÉMONSTRATION. Pour vérifier que f est une fonction propre pour w_λ, il suffit de reproduire la preuve de la proposition précédente. Si $f[w_\lambda]_k = \psi_f(\lambda)\, f$, alors

$$f = f[w_\lambda^2]_k = f[w_\lambda]_k[w_\lambda]_k = \psi_f(\lambda)^2\, f\,,$$

d'où $\psi_f(\lambda) = \pm 1$. □

Afin d'encapsuler toutes les propositions que nous venons de voir, donnons la définition d'une forme primitive.

Définition 2.3.7. *Soit* $f \in \mathcal{S}_k(\Gamma_0(N))^\sharp$ *une forme nouvelle non nulle. Nous dirons que* f *est une forme primitive si elle est propre pour les* T_n *avec* $(n, N) = 1$ *et normalisée pour que son premier coefficient de Fourier soit unitaire, c'est-à-dire*

$$f(\tau) = q + \sum_{n=2}^{\infty} a_n q^n\,.$$

Nous obtenons ainsi une version plus complète du corollaire 2.1.3.

Corollaire 2.3.8. *Il existe une base de* $\mathcal{S}_k(\Gamma_0(N))$ *composée de formes primitives.*

La proposition suivante regroupe les résultats fondamentaux sur les formes primitives.

Proposition 2.3.9. *Soit* $f \in \mathcal{S}_k(\Gamma_0(N))^\sharp$ *une forme primitive et notons* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n$. *Alors* f *est propre pour l'algèbre de Hecke en entier et pour les involutions d'Atkin-Lehner. Les valeurs propres de* f *sont données par*

$$\begin{aligned} T_n f &= a_n f\,, && \forall\, n \in \mathbb{N}\,,\\ f[w_p]_k &= -a_p p^{1-\frac{k}{2}} f\,, && \textit{si } (p, N) = p\,. \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. Pour la première égalité, cela découle directement de la discussion du début de la section. Lorsque $(p, N) = p$, la proposition 2.2.4 indique que $T_p f + p^{\frac{k}{2}-1} f[w_p]_k$ est une forme ancienne. Cette dernière forme est à la fois nouvelle et ancienne et doit être nulle d'où

$$a_p f = T_p f = -p^{\frac{k}{2}-1} f[w_p]_k \qquad \Longleftrightarrow \qquad f[w_p]_k = -a_p p^{1-\frac{k}{2}} f\,.$$

□

Finalement, puisque les formes primitives sont normalisées et propres pour l'algèbre de Hecke, nous pouvons appliquer la discussion à la fin de la section 2.1 sur les fonction L pour obtenir

Proposition 2.3.10. *Soit* $f \in \mathcal{S}_k(\Gamma_0(N))^\sharp$ *une forme primitive. Si* $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n$*, alors la série* L *associée à* f *possède le produit eulérien*

$$L_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = \prod_{p \mid N} \left(\frac{1}{1 - a_p p^{-s}} \right) \prod_{p \nmid N} \left(\frac{1}{1 - a_p p^{-s} + p^{k-1-2s}} \right).$$

Chapitre 3

FORMULE DE KRONECKER

3.1. Discriminant modulaire augmenté

Rappelons d'abord que le discriminant modulaire est donné par

$$\Delta(\tau) = (2\pi)^{12}\, q \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)^{24} \qquad \text{où } q = e^{2\pi i \tau}$$

et qu'il s'agit d'une forme parabolique de poid 12.

À partir de n'importe quel forme modulaire, nous pouvons obtenir une fonction modulairement invariante simplement en considérant un quotient adéquat. Par contre, nous y perdrons au passage l'holomorphie à l'infini. Nous parlerons alors d'une forme automorphe plutôt que d'une forme modulaire. Ici, nous nous intéresserons aux quotients de Δ qui font intervenir les involutions d'Atkin-Lehner.

Commençons par rappeler que $\mathbb{AT}$ représente le groupe d'involutions d'Atkin-Lehner et considérons l'idéal augmenté de l'anneau engendré par $\mathbb{AT}$ sur les rationnels, c'est-à-dire

$$\mathbb{Q}[\mathbb{AT}]_0 = \left\{ \sum_{\lambda} \alpha_\lambda w_\lambda \in \mathbb{Q}[\mathbb{AT}] \;\middle|\; \alpha_\lambda \in \mathbb{Q} \;\text{ et }\; \sum_{\lambda} \alpha_\lambda = 0 \right\} \tag{3.1.1}$$

où il est sous-entendu que λ circulent parmi les facteurs de cohésion et que, malgré que les notations ne mettent pas en évidence ce fait[1], cet anneau dépend de N. Notons également que contrairement au cas général d'un anneau engendré, il n'y a aucune puissance supérieure à deux dans celui-ci. Il s'agit d'une conséquence de l'idempotence.

Rappelons que nous avions étendu par linéarité le crochet de poids k afin que nous puissions y appliquer des sommes formelles, comme les éléments de $\mathbb{Q}[\mathbb{AT}]_0$. Cela nous permettra d'écrire les propositions de ce chapitre de façon élégante.

[1]L'indice 0 de cette notation indique surtout que nous considérons l'idéal augmenté dans $\mathbb{Q}[\mathbb{AT}]$, contrairement à la plupart des autres fois où nous faisons appel à cet indice pour exprimer la dépendance à $\Gamma_0(N)$. Il s'agit d'une heureuse coïncidence que ces deux significations s'allient dans cette notation.

Donnons nous $\alpha \in \mathbb{Q}[\mathbb{AT}]_0$, disons $\alpha = \sum_\lambda \alpha_\lambda w_\lambda$, et posons le *discriminant modulaire augmenté par* α comme

$$\Delta^\alpha(\tau) = \prod_\lambda \Delta[w_\lambda]_{12}(\tau)^{\alpha_\lambda} \ . \tag{3.1.2}$$

Puisque la somme des coefficients de α est nulle, nous sommes bien en présence d'une forme automorphe pour $\Gamma_0(N)$.

Prenons un instant pour remarquer que cette définition respecte la linéarité sur $\mathbb{Q}[\mathbb{AT}]_0$ de la même façon que les lois des exposants, ce qui veut dire qu'elle est bien définie peu importe comment nous écrivons α. Par contre, cette définition ne respecte pas nécessairement la multiplication dans $\mathbb{Q}[\mathbb{AT}]_0$.

Le discriminant modulaire est lié à la série d'Eisenstein de poids 2 et, par conséquent, il en va de même pour le discriminant modulaire augmenté. Rappelons que pour les séries d'Eisenstein de poids 2, nous ne pouvions avoir à la fois l'holomorphie à l'infini et l'invariance modulaire. Nous avions donc les deux séries

$$\begin{aligned} E_2(\tau) &= 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n)\, q^n & &\text{(holomorphe)} \\ E_2^*(\tau) &= E_2(\tau) - \frac{3}{\pi \operatorname{Im}(\tau)} & &\text{(faiblement modulaire)} \end{aligned}$$

et nous avions vérifié dans le chapitre 1 que $2\pi i\, E_2$ était la dérivée logarithmique de Δ. Dans le cas du discriminant modulaire augmenté, nous pouvons aller plus loin et exprimer sa dérivée logarithmique à l'aide de la fonction corrigée E_2^*.

Proposition 3.1.1. *Soit* $\alpha \in \mathbb{Q}[\mathbb{AT}]_0$. *Alors la dérivée logarithmique du discriminant modulaire augmenté est donnée par*

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{d}{d\tau} \log(\Delta^\alpha(\tau)) = E_2^*[\alpha]_2(\tau) \ .$$

DÉMONSTRATION. Suivant notre habitude, notons $\alpha = \sum_\lambda \alpha_\lambda w_\lambda$. Puisque Δ est parabolique pour tout le groupe $SL_2(\mathbb{Z})$, nous pouvons réécrire l'action des involutions dans la définition du discriminant modulaire augmenté sous la forme plus facilement dérivable (proposition 2.2.3)

$$\Delta^\alpha(\tau) = \prod_\lambda \Delta[w_\lambda]_{12}(\tau)^{\alpha_\lambda} = \prod_\lambda \left(\lambda^6 \Delta(\lambda\tau)\right)^{\alpha_\lambda} \ .$$

Nous avons ainsi

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{d\tau} \log(\Delta^\alpha(\tau)) &= \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{d\tau} \sum_\lambda \alpha_\lambda \left(\log(\Delta(\lambda\tau)) + 6\log(\lambda)\right) \\ &= \sum_\lambda \alpha_\lambda \lambda E_2(\lambda\tau) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_\lambda \alpha_\lambda \lambda E_2(\lambda\tau) - \frac{3}{\pi\,\mathrm{Im}(\tau)} \sum_\lambda \alpha_\lambda \\
&= \sum_\lambda \alpha_\lambda \lambda \left(E_2(\lambda\tau) - \frac{3}{\pi\,\mathrm{Im}(\lambda\tau)} \right) \\
&= \sum_\lambda \alpha_\lambda \lambda E_2^*(\lambda\tau) \\
&= \sum_\lambda \alpha_\lambda E_2^*[w_\lambda]_2(\tau) = E_2^*[\alpha]_2(\tau) \ .
\end{aligned}
$$

□

Prenons un instant pour remarquer que, contrairement à E_2^*, la fonction $E_2^*[\alpha]_2$ est une forme modulaire de poids 2. En effet, puisque E_2^* est déjà faiblement modulaire, il ne suffit que de vérifier l'holomorphie. Or, dans la démonstration précédente, nous avons obtenu

$$
E_2^*[\alpha]_2 = \sum_\lambda \alpha_\lambda \lambda E_2(\lambda\tau)
$$

et le membre de droite est bien holomorphe, autant sur $\mathcal{H}$ qu'à l'infini.

Avant de passer à la section suivante, nous vérifierons que le discriminant modulaire augmenté présente bien la propriété mentionnée dans l'introduction, c'est-à-dire que le support de ses diviseurs ne contient que des pointes. Si X est une variété Riemannienne compacte et que l'ordre en z d'une certaine fonction $f : X \to \mathbb{C}$ est noté par $\mathrm{ord}_z(f)$, rappelons que le diviseur de f est donné par la somme formelle

$$
\mathrm{div}(f) = \sum_{z\in\mathbb{C}} \mathrm{ord}_z(f)\,(z) \ , \tag{3.1.3}
$$

qui est toujours une somme finie, et que le support de f est donné par l'ensemble de ses zéros et de ses pôles, c'est-à-dire

$$
\left\{ z \in X \;\middle|\; \mathrm{ord}_z(f) \neq 0 \right\} \ . \tag{3.1.4}
$$

En restreignant ces définitions à la variété $X_0(N)$, nous pouvons calculer le diviseur du discriminant modulaire augmenté.

Proposition 3.1.2. *Soient* $N \in \mathbb{N}$ *non divisible par un carré et* $\alpha \in \mathbb{Q}[\mathcal{AT}]_0$. *Notons* $\alpha = \sum_\lambda \alpha_\lambda w_\lambda$ *et considérons* $\delta \in \mathbb{Q}[\mathcal{AT}]$ *donné par*

$$
\delta = \prod_{p\mid N} \left(\frac{w_1 - w_p}{1 - p^2} \right) \ ,
$$

alors les diviseurs de $\Delta^{\delta\alpha}$ *sont donnés par*

$$
\mathrm{div}\big(\Delta^{\delta\alpha}\big) = \sum_\lambda \alpha_\lambda \,(w_\lambda \cdot \infty)
$$

DÉMONSTRATION. Laissons agir les éléments de $\mathbb{Q}[\mathbb{A}T]$ par linéarité sur les diviseurs de sorte que

$$\alpha \cdot (\infty) = \sum_{\lambda} \alpha_\lambda \, (w_\lambda \cdot \infty) \tag{3.1.5}$$

et remarquons que l'action ainsi donnée est bien définie. Puisque

$$\delta^{-1} \;=\; \prod_{p|N} \left(w_1 + p w_p\right) \;=\; \sum_{\lambda|N} \lambda w_\lambda \,, \tag{3.1.6}$$

nous pouvons calculer plus simplement que les diviseurs de Δ^α sont donnés par $\delta^{-1}\alpha \cdot (\infty)$. Rappelons que Δ sur $X_0(1)$ ne possède qu'un seul zéro d'ordre 1 à l'infini. Ainsi, Δ, comme fonction sur $X_0(N)$, possède un zéro en chacune des pointes de $X_0(N)$ et ces pointes sont données par les involutions, car N n'est pas divisible par un carré (proposition 2.2.2). De plus, la proposition 2.2.3 indique

$$\Delta[w_\lambda]_k(\tau) = \lambda^6 \Delta(\lambda\tau) = \lambda^6 \left(2\pi^{12}\right) q^\lambda \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - q^{\lambda n}\right)^{24}$$

et Δ s'annule avec ordre λ en $w_\lambda \cdot \infty$. Permuttant les pointes par w_{λ_1}, nous avons donc

$$\mathrm{ord}_{w_{\lambda_2}\cdot\infty}(\Delta[w_{\lambda_1}]_{12}) = \mathrm{ord}_{w_{\lambda_1} w_{\lambda_2}\cdot\infty}(\Delta) = \frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1,\lambda_2)^2} \,.$$

Finalement, utilisant l'idempotence, nous trouvons

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}(\Delta^\alpha) &= \sum_{\lambda_1} \alpha_{\lambda_1} \; \mathrm{div}(\Delta[w_{\lambda_1}]_{12}) \\
&= \sum_{\lambda_1} \alpha_{\lambda_1} \left(\sum_{\lambda_2} \frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1,\lambda_2)^2} \, (w_{\lambda_2} \cdot \infty) \right) \\
&= \left(\sum_{\lambda_1} \alpha_{\lambda_1} w_{\lambda_1} \right) \left(\sum_{\lambda_2} \frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1,\lambda_2)^2} w_{\lambda_1} w_{\lambda_2} \right) \cdot (\infty) \\
&= \alpha\delta^{-1} \cdot (\infty) \;.
\end{aligned}$$

□

Remarquons que l'élément δ permet de faire le lien entre le discriminant modulaire augmenté et ses diviseurs. Il s'agit d'un élément important et nous le retrouverons plus loin dans le texte avec des propriétés similaires (proposition 3.3.2).

3.2. Série d'Eisenstein réelle

Dans cette section, nous allons considérer une série d'Eisenstein réelle propre au groupe $\Gamma_0(N)$ que nous étudierons grâce à la formule de Kronecker. Avant de commencer, détaillons un lemme qui nous permettra de passer d'une définition intrinsèque à une forme plus appropriée pour les calculs.

Lemme 3.2.1. *Soit Γ_∞ le stabilisateur de ∞ dans $\Gamma_0(N)$. Alors il y a une bijection*

$$\Gamma_\infty\backslash\Gamma_0(N) \leftrightarrow \left\{ (m,n) \in \mathbb{Z}^2 \;\middle|\; m > 0,\ N|m \ \textit{et}\ (m,n) = 1 \right\} \cup \left\{ (0,1) \right\} .$$

En particulier, la bijection est donnée par

$$\begin{aligned} \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ m & n \end{smallmatrix}\right) &\mapsto \operatorname{sgn}(m)\,(m,n) && \textit{lorsque } m \neq 0 \\ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & n \end{smallmatrix}\right) &\mapsto (0,1) && \textit{si } m = 0\,. \end{aligned}$$

Démonstration. Remarquons d'abord que $\Gamma_\infty = \left\{ \pm \left(\begin{smallmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{Z} \right\}$. En effet, la transformation méromorphe

$$\tau \mapsto \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

fixe ∞ si et seulement si son pôle est à l'infini, c'est-à-dire si $c = 0$. Comme $\det \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) = 1$ et que a, d sont entiers, nous avons $a = d = \pm 1$.

Nommons φ la fonction de l'énoncé. Avant de vérifier que φ est bijective, il convient de s'assurer qu'elle est bien définie. Deux cas sont possibles. Commençons par supposer que les deux matrices $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ m & n \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ m' & n' \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(N)$ diffèrent par un élément de la forme $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_\infty$, c'est-à-dire que

$$\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ m & n \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ m' & n' \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} * & * \\ m' & n' \end{smallmatrix}\right) \quad \Rightarrow \quad (m,n) = (m',n')\,.$$

Dans ce cas, φ est évidemment bien définie, même si $m = 0$. Si maintenant les deux matrices diffèrent par un élément de la forme $-\left(\begin{smallmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_\infty$, nous obtenons plutôt $(m,n) = -(m',n')$. Si jamais m était nul, alors m' serait nul également et φ serait bien définie. Nous pouvons donc supposer que $m \neq 0$ et nous avons bien

$$\begin{aligned} \varphi\left(\left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ m' & n' \end{smallmatrix}\right)\right) &= \operatorname{sgn}(m')\,(m',n') \\ &= -\operatorname{sgn}(m)\,(m',n') \\ &= \operatorname{sgn}(m)\,(-m',-n') \\ &= \operatorname{sgn}(m)\,(m,n) = \varphi\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ m & n \end{smallmatrix}\right)\right)\,. \end{aligned}$$

Passons maintenant à l'injectivité. Le cas particulier où $\varphi(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ m & n \end{smallmatrix}\right)) = (0,1)$ n'est possible que lorsque $m = 0$ et alors notre matrice fixe ∞, ce qui indique que la seule préimage de $(0,1)$ est la classe donnée par Γ_∞. Pour le cas général, et supposons que

$m \neq 0$ et que

$$\varphi\big(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ m & n \end{smallmatrix}\right)\big) = \varphi\big(\left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ m' & n' \end{smallmatrix}\right)\big) \quad \Rightarrow \quad (m, n) = \pm(m', n')\,.$$

Nous avons alors

$$\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ m & n \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ m' & n' \end{smallmatrix}\right)^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ m & n \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ \pm m & \pm n \end{smallmatrix}\right)^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ m & n \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} \pm n & -b' \\ \mp m & a' \end{smallmatrix}\right) = \pm\left(\begin{smallmatrix} 1 & a'b-ab' \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_\infty\,,$$

ce qui montre que les deux matrices sont dans le même orbite.

Pour terminer, la surjectivité découle directement du lemme de Bézout. En effet, si (m, n) est un couple d'entiers copremiers tel que $N|m$, il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $an - bm = 1$ et la matrice $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ m & n \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(N)$ réprésente bien un orbite ayant pour image (m, n). □

Conservant la notation Γ_∞ pour représenter le stabilisateur de ∞ dans $\Gamma_0(N)$, définissons la *série d'Eisenstein réelle associée à* $\Gamma_0(N)$ par

$$E_0(\tau, s) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma_0(N)} \mathrm{Im}(\gamma \cdot \tau)^s \qquad \text{pour } \tau \in \mathcal{H} \text{ et } \mathrm{Re}(s) > 1\,. \tag{3.2.1}$$

Cette définition intrinsèque met en lumière l'invariance modulaire de cette série, mais n'est pas pratique pour les calculs. En utilisant le lemme précédent, nous obtenons

$$E_0(\tau, s) = \mathrm{Im}(\tau)^s + \sideset{}{'}\sum_{\substack{m,n \\ (m,n)=1 \\ N|m,\ m>0}} \frac{\mathrm{Im}(\tau)^s}{|m\tau + n|^{2s}}\,.$$

De même que pour les séries d'Eisenstein (holomorphes), cette dernière série converge absolument et uniformément lorsque $\mathrm{Re}(s) > 1$.

Beaucoup de conditions se retrouvent sous la sommation et le restant de cette section consiste à les éliminer les unes après les autres. D'abord, commençons par retirer l'inégalité des conditions. Nous avons

$$\begin{aligned} 2E_0(\tau, s) &= \mathrm{Im}(\tau)^s + \sideset{}{'}\sum_{\substack{m,n \\ (m,n)=1 \\ N|m,\ m>0}} \frac{\mathrm{Im}(\tau)^s}{|m\tau + n|^{2s}} + \mathrm{Im}(\tau)^s + \sideset{}{'}\sum_{\substack{m,n \\ (m,n)=1 \\ N|m,\ m>0}} \frac{\mathrm{Im}(\tau)^s}{|m\tau + n|^{2s}} \\ &= \mathrm{Im}(\tau)^s + \sideset{}{'}\sum_{\substack{m,n \\ (m,n)=1 \\ N|m,\ m>0}} \frac{\mathrm{Im}(\tau)^s}{|m\tau + n|^{2s}} + \mathrm{Im}(\tau)^s + \sideset{}{'}\sum_{\substack{m,n \\ (m,n)=1 \\ N|m,\ m<0}} \frac{\mathrm{Im}(\tau)^s}{|m\tau + n|^{2s}} \\ &= \sideset{}{'}\sum_{\substack{m,n \\ (m,n)=1 \\ N|m}} \frac{\mathrm{Im}(\tau)^s}{|m\tau + n|^{2s}}\,, \end{aligned}$$

d'où

$$E_0(\tau, s) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{m,n \\ (m,n)=1 \\ N|m}}{}' \frac{\mathrm{Im}(\tau)^s}{|m\tau + n|^{2s}} . \tag{3.2.2}$$

Une façon facile de retirer la condition de divisibilité consiste à se restreindre au cas où $N = 1$, mais nous perdrions alors trop de généralité. Une alternative plus pertinente consiste à exprimer la série de niveau N à partir de la série de niveau 1. Pour ce faire dénotons la série de niveau 1 par

$$E(\tau, s) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash SL_2(\mathbb{Z})} \mathrm{Im}(\gamma \cdot \tau)^s = \frac{1}{2} \sum_{\substack{m,n \\ (m,n)=1}}{}' \frac{\mathrm{Im}(\tau)^s}{|m\tau + n|^{2s}} . \tag{3.2.3}$$

Avant d'exprimer la série de niveau N à partir de la série de niveau 1, levons la condition de coprimalité entre les éléments de la somme pour le niveau 1. Posons

$$G(\tau, s) = \sum_{m,n}{}' \frac{\mathrm{Im}(\tau)^s}{|m\tau + n|^{2s}} . \tag{3.2.4}$$

Comme il est d'usage, notons ζ la fonction de Riemann. Nous avons alors

$$\begin{aligned}
2\zeta(2s)\, E(\tau, s) &= 2\zeta(2s) \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma_0(1)} \mathrm{Im}(\gamma \cdot \tau)^s \\
&= \left(\sum_r{}' \frac{1}{|r|^{2s}} \right) \left(\sum_{\substack{m,n \\ (m,n)=1}}{}' \frac{\mathrm{Im}(\tau)^s}{|m\tau + n|^{2s}} \right) \\
&= \sum_r{}' \sum_{\substack{m,n \\ (m,n)=1}}{}' \frac{\mathrm{Im}(\tau)^s}{|rm\tau + rn|^{2s}} \\
&= \sum_{m,n}{}' \frac{\mathrm{Im}(\tau)^s}{|m\tau + n|^{2s}} = G(\tau, s) ,
\end{aligned}$$

d'où

$$E(\tau, s) = \frac{1}{2\zeta(2s)} G(\tau, s) . \tag{3.2.5}$$

Retournant au cas général de E_0, il ne nous reste qu'à lever la condition de coprimalité entre les éléments de la somme. Cette condition peut être levée à l'aide de la fonction μ de Möbius. Mais avant de passer aux calculs, définissons la fonction ζ_N qui représente la fonction ζ locale en N. Il s'agit de la fonction donnée par le produit partiel

$$\zeta_N(s) = \prod_{p|N} \left(1 - p^{-s}\right)^{-1} . \tag{3.2.6}$$

Proposition 3.2.2. *Soit* $N \in \mathbb{N}$. *Si* ζ_N *dénote la fonction* ζ *locale en* N, μ *la fonction de Möbius et* E, E_0 *les séries d'Eisenstein associées respectivement aux groupes* $SL_2(\mathbb{Z})$ *et* $\Gamma_0(N)$, *alors nous avons l'identité*

$$E_0(\tau, s) = \zeta_N(2s) \sum_{\lambda | N} \mu(\lambda) \left(\lambda N\right)^{-s} E\left(\tfrac{N}{\lambda}\tau, s\right) \qquad \text{pour } \tau \in \mathcal{H} \text{ et } \mathrm{Re}(s) > 1\,.$$

DÉMONSTRATION. Le calcul qui suit se divise en deux étapes. D'abord, nous utiliserons le fait que

$$\sum_{d|M} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{si } M = 1 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

pour lever la condition de coprimalité et, ensuite, nous utiliserons le fait que $\mathbb{N}$ se paramétrise selon les diviseurs de N, c'est-à-dire

$$\mathbb{N} \leftrightarrow \left\{ \lambda\delta \;\middle|\; \lambda | N \text{ et } \delta \in \mathbb{N} \text{ tel que } \left(\tfrac{N}{\lambda}, \delta\right) = 1 \right\}$$

pour nous ramener à une somme finie.

Nous avons

$$\begin{aligned}
E_0(\tau, s) &= \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}(\tau)^s \sum_{\substack{m,n \\ (m,n)=1 \\ N|m}}{}' \, |m\tau + n|^{-2s} \\
&= \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}(\tau)^s \sum_{\substack{m,n \\ N|m}}{}' \, |m\tau + n|^{-2s} \left(\sum_{d|(m,n)} \mu(d) \right) \\
&= \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}(\tau)^s \sum_{\substack{m,n \\ N|m}}{}' \sum_{\substack{d \in \mathbb{N} \\ d|m \\ d|n}} \mu(d)\, |m\tau + n|^{-2s} \\
&= \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}(\tau)^s \sum_{d \in \mathbb{N}} \sum_{\substack{m,n \\ N|m \\ d|m \\ d|n}}{}' \mu(d)\, |m\tau + n|^{-2s}\,.
\end{aligned}$$

Or $N \mid m$ et $d \mid m$ si et seulement si $\frac{Nd}{(N,d)} = \mathrm{ppcm}(N, d) \mid m$, ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
E_0(\tau, s) &= \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}(\tau)^s \sum_{d \in \mathbb{N}} \mu(d) \sum_{m,n}{}' \left| \tfrac{Nd}{(N,d)} m\tau + dn \right|^{-2s} \\
&= \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}(\tau)^s \sum_{d \in \mathbb{N}} \mu(d)\, d^{-2s} \sum_{m,n}{}' \left| m \left(\tfrac{N}{(N,d)}\tau \right) + n \right|^{-2s} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{d \in \mathbb{N}} \mu(d)\, d^{-2s} \left(\tfrac{N}{(N,d)} \right)^{-s} G\left(\tfrac{N}{(N,d)}\tau, s \right)
\end{aligned}$$

$$= \zeta(2s) \sum_{d\in\mathbb{N}} \mu(d)\, d^{-2s} \left(\tfrac{N}{(N,d)}\right)^{-s} E\left(\tfrac{N}{(N,d)}\tau, s\right) .$$

Nous pourrions nous arrêter ici, mais nous conserverions une somme infinie de série d'Eisenstein. Grâce à la paramétrisation discutée plus haut, nous pouvons transformer cette somme en somme finie. Sous la paramétrisation, $\lambda = (N, d)$ et $d = \lambda\delta$ et la série devient

$$\begin{aligned} E_0(\tau, s) &= \zeta(2s) \sum_{\lambda|N} \sum_{\substack{\delta\in\mathbb{N} \\ (N,\lambda\delta)=\lambda}} \mu(\lambda\delta) \left(\lambda\delta\right)^{-2s} \left(\tfrac{N}{\lambda}\right)^{-s} E\left(\tfrac{N}{\lambda}\tau, s\right) \\ &= \zeta(2s) \sum_{\lambda|N} \left(\tfrac{N}{\lambda}\right)^{-s} E\left(\tfrac{N}{\lambda}\tau, s\right) \left(\sum_{\substack{\delta\in\mathbb{N} \\ (N,\lambda\delta)=\lambda \\ (\lambda,\delta)=1}} \mu(\lambda\delta) \left(\lambda\delta\right)^{-2s} + \sum_{\substack{\delta\in\mathbb{N} \\ (N,\lambda\delta)=\lambda \\ (\lambda,\delta)>1}} \mu(\lambda\delta) \left(\lambda\delta\right)^{-2s} \right) . \end{aligned}$$

Remarquons que la série à l'extrème droite est identiquement nulle puisque λ et δ ont des diviseurs communs, ce qui entraine que leur produit est divisible par un carré. Pour terminer, remarquons que $(N, \lambda\delta) = \lambda$ est équivalent à $\left(\tfrac{N}{\lambda}, \delta\right) = 1$ d'où

$$\left(\tfrac{N}{\lambda}, \delta\right) = 1 \text{ et } (\lambda, \delta) = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (N, \delta) = 1 ,$$

ce qui nous donne bien

$$\begin{aligned} E_0(\tau, s) &= \zeta(2s) \sum_{\lambda|N} \mu(\lambda) \left(N\lambda\right)^{-s} E\left(\tfrac{N}{\lambda}\tau, s\right) \sum_{\substack{\delta\in\mathbb{N} \\ (N,\delta)=1}} \mu(\delta)\, \delta^{-2s} \\ &= \zeta(2s) \sum_{\lambda|N} \mu(\lambda) \left(N\lambda\right)^{-s} E\left(\tfrac{N}{\lambda}\tau, s\right) \prod_{p\nmid N} \left(1 - p^{-2s}\right) \\ &= \zeta_N(2s) \sum_{\lambda|N} \mu(\lambda) \left(N\lambda\right)^{-s} E\left(\tfrac{N}{\lambda}\tau, s\right) . \end{aligned}$$

□

3.3. Formule de Kronecker

Nous nous intéressons au développement de Laurent de $E_0(\tau, s)$ en s. Or, la formule classique de Kronecker établit les premiers termes de ce développement pour $E(\tau, s)$.

Proposition 3.3.1 (Formule de Kronecker[2]). *Si Δ représente le discriminant modulaire, alors quelque soit $\tau \in \mathcal{H}$,*

$$\lim_{s\to 1} \left(E(\tau, s) - \frac{3}{\pi} \frac{1}{s-1} \right) = -\frac{1}{2\pi} \log\left(\mathrm{Im}(\tau)^6 \left|\Delta(\tau)\right|\right) + C$$

où C est une constante connue.

[2] Il existe plusieurs formules de Kronecker. Il s'agit ici de la formule du premier type.

DÉMONSTRATION. Ce résultat étant bien connu, plusieurs démonstrations sont disponibles. Par exemple, les livres de Zagier (1992) et de Lang (1987) présentent cette formule sans détour et leurs calculs précisent la constante. □

Dans le cas de E_0, nous pouvons obtenir une formule similaire puisque nous avons exprimé la série de niveau N en terme de la série de niveau 1. Ainsi, les deux premiers termes de la série de Laurent de E_0 se calculent en multipliant les premiers termes des séries de Laurent de $\zeta_N(2s)$, de $(\lambda N)^{-s}$ et de $E(\frac{N}{\lambda}\tau, s)$. Si nous convenons que K dénote une constante absorbant les termes constants, ce calcul nous donne

$$\begin{aligned} E_0(\tau, s) &= \sum_{\lambda | N} \mu(\lambda)\, \zeta_N(2s)\, (\lambda N)^{-s}\, E\big(\tfrac{N}{\lambda}\tau, s\big) \\ &= \frac{3\zeta_N(2)}{\pi N \zeta_N(1)} \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2\pi} \sum_{\lambda|N} \frac{\mu(\lambda)\, \zeta_N(2)}{\lambda N} \log\Big(\mathrm{Im}(\tau)^6 \left|\big(\tfrac{N}{\lambda}\big)^6 \Delta\big(\tfrac{N}{\lambda}\tau\big)\right|\Big) + K + \cdots \end{aligned}$$

où nous avons utilisé l'identité

$$\frac{1}{\zeta_N(1)} = \sum_{\lambda|N} \frac{\mu(\lambda)}{\lambda} \tag{3.3.1}$$

En changeant l'ordre de sommation pour les diviseurs complémentaires, nous obtenons la formule de Kronecker pour E_0 suivante

$$\lim_{s\to 1} \left(E_0(\tau, s) - \frac{3\zeta_N(2)}{\pi N \zeta_N(1)} \frac{1}{s-1} \right) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{\lambda|N} \frac{\mu\big(\frac{N}{\lambda}\big)\, \zeta_N(2)}{N^2} \lambda \log\Big(\mathrm{Im}(\tau)^6 \left|\lambda^6 \Delta(\lambda\tau)\right|\Big) + K\,.$$

En particulier, cette formule devient plus compacte lorsque N n'est pas divisible par un carré. En effet, sous cette hypothèse, les involutions d'Atkin-Lehner sont paramétrées par les diviseurs λ de N et

$$\lambda^6 \Delta(\lambda\tau) = \Delta[w_\lambda]_{12}(\tau)\ .$$

De plus, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\zeta_N(2)}{N\zeta_N(1)} &= \prod_{p|N} \frac{p\,(1-p^{-1})}{p^2\,(1-p^{-2})} \\ &= \frac{\mu(N)}{\mu(N)} \prod_{p|N} \frac{(1-p)}{(1-p^2)} \\ &= \frac{\zeta_N(-2)}{\zeta_N(-1)} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \frac{\mu\big(\frac{N}{\lambda}\big)\, \zeta_N(2)}{N^2} &= \mu\big(\tfrac{N}{\lambda}\big) \prod_{p|N} p^{-2}\,(1-p^{-2})^{-1} \\ &= \mu\big(\tfrac{N}{\lambda}\big)\, \mu(N) \prod_{p|N} (1-p^2)^{-1} \\ &= \mu(\lambda)\, \zeta_N(-2) \end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$\lim_{s\to 1} \left(E_0(\tau, s) - \frac{3\zeta_N(-2)}{\pi \zeta_N(-1)} \frac{1}{s-1} \right) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{\lambda|N} \zeta_N(-2)\, \mu(\lambda)\, \lambda \log\Big(\mathrm{Im}(\tau)^6 \left|\Delta[w_\lambda]_{12}(\tau)\right|\Big) + K\,.$$

Nous conservons l'hypothèse que N n'est pas divisible par un carré.

Cette formule nous indique que la série d'Eisenstein E_0 possède un pôle d'ordre 1 en $s = 1$, et que le résidu associé est indépendant de τ. Par conséquent, en considérant une combinaison linéaire appropriée de cette séries et en variant le paramètre τ pour ne pas obtenir une fonction nulle, nous pouvons éliminer le pôle et obtenir une fonction holomorphe en $s = 1$.

Pour ce faire, rappelons que nous avions noté l'idéal augmenté de l'anneau engendré sur $\mathbb{Q}$ des involutions d'Atkin-Lehner par

$$\mathbb{Q}[\mathbb{AT}]_0 = \left\{ \sum_{\lambda} \alpha_\lambda w_\lambda \in \mathbb{Q}[\mathbb{AT}] \;\middle|\; \alpha_\lambda \in \mathbb{Q} \text{ et } \sum_{\lambda} \alpha_\lambda = 0 \right\} .$$

Si nous considérons $\alpha \in \mathbb{Q}[\mathbb{AT}]_0$, disons $\alpha = \sum \alpha_\lambda w_\lambda$, et bien

$$E_0[\alpha]_0(\tau, s) = \sum_{\lambda|N} \alpha_\lambda E_0(w_\lambda \cdot \tau, s) \tag{3.3.2}$$

présente la particularité d'être holomorphe en $s = 1$. Plus particulièrement, nous pouvons calculer sa valeur en ce point.

Proposition 3.3.2. *Soient $N \in \mathbb{N}$ non divisible par un carré, $\alpha \in \mathbb{Q}[\mathbb{AT}]_0$ et E_0 la série d'Eisenstein réelle associée à $\Gamma_0(N)$. De plus, notons $\delta \in \mathbb{Q}[\mathbb{AT}]$ l'élément donné par*

$$\delta = \prod_{p|N} \frac{w_1 - p w_p}{1 - p^2} .$$

Alors quelque soit $\tau \in \mathcal{H}$, nous avons

$$E_0[\alpha]_0(\tau, 1) = -\frac{1}{2\pi} \log\left(\left|\Delta^{\delta\alpha}(\tau)\right|\right) .$$

DÉMONSTRATION. Dans un premier lieu, remarquons que

$$\delta = \prod_{p|N} \left(\frac{w_1 - p w_p}{1 - p^2} \right) = \sum_{\lambda_1|N} \zeta_N(-2)\, \mu(\lambda_1)\, \lambda_1 w_{\lambda_1}$$

et, si nous notons $\alpha = \sum_{\lambda_2} \alpha_{\lambda_2} w_{\lambda_2}$,

$$\delta\alpha = \sum_{\lambda_1, \lambda_2 \,|\, N} \zeta_N(-2)\, \mu(\lambda_1)\, \lambda_1 \alpha_{\lambda_2} w_{\lambda_1} w_{\lambda_2} . \tag{3.3.3}$$

De plus, $\delta\alpha \in \mathbb{Q}[\mathbb{AT}]_0$ ce qui nous permet de considérer le discriminant modulaire augmenté par cet élément.

Utilisant la formule de Kronecker et le fait que $\sum_{\lambda_2} \alpha_{\lambda_2} = 0$, nous avons

$$E_0[\alpha]_0(\tau, 1) = \lim_{s \to 1} (E_0[\alpha]_0(\tau, s))$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{s\to 1}\left(E_0[\alpha]_0(\tau, s) - \left(\sum_{\lambda_2|N} \alpha_{\lambda_2}\right) \frac{3\zeta_N(-2)}{\pi\zeta_N(-1)} \frac{1}{s-1}\right) \\
&= \sum_{\lambda_2|N} \alpha_{\lambda_2} \lim_{s\to 1}\left(E_0(w_{\lambda_2}\cdot\tau, s) - \frac{3\zeta_N(-2)}{\pi\zeta_N(-1)} \frac{1}{s-1}\right) \\
&= -\frac{1}{2\pi} \sum_{\lambda_1\lambda_2|N} \zeta_N(-2)\,\mu(\lambda_1)\,\lambda_1\alpha_{\lambda_2} \log\Big(\mathrm{Im}(w_{\lambda_2}\cdot\tau)^6\,|\Delta[w_{\lambda_1}]_{12}(w_{\lambda_2}\cdot\tau)|\Big) \\
&= -\frac{1}{2\pi} \sum_{\lambda_1\lambda_2|N} \zeta_N(-2)\,\mu(\lambda_1)\,\lambda_1\alpha_{\lambda_2} \log\left(\mathrm{Im}(\tau)^6 \left|\frac{\Delta[w_{\lambda_1}]_{12}(w_{\lambda_2}\cdot\tau)}{j_{w_{\lambda_2}}(\tau)^{12}}\right|\right) \\
&= -\frac{1}{2\pi} \sum_{\lambda_1\lambda_2|N} \zeta_N(-2)\,\mu(\lambda_1)\,\lambda_1\alpha_{\lambda_2} \log(|\Delta[w_{\lambda_1}w_{\lambda_2}]_{12}(\tau)|) \\
&= -\frac{1}{2\pi} \log\left(\left|\prod_{\lambda_1,\lambda_2\,|\,N} \Delta[w_{\lambda_1}w_{\lambda_2}]_{12}(\tau)^{\zeta_N(-2)\mu(\lambda_1)\lambda_1\alpha_{\lambda_2}}\right|\right) = -\frac{1}{2\pi}\log\big(\Delta^{\delta\alpha}(\tau)\big) \ .
\end{aligned}
$$

□

Ce calcul termine cette section présentant la formule de Kronecker pour le niveau N et ses particularités lorsque N n'est pas divisible par un carré. Il met aussi fin à la première partie du document où il était question des formes modulaires d'un point de vue général. Rappelons que nous avons d'abord discuté des formes modulaires, puis des formes primitives, pour finalement discuter du discriminant modulaire augmenté et de ses propriétés. Tous ces éléments devaient être présentés afin de pouvoir calculer explicitement le régulateur, puisque nous appliquerons le régulateur directement sur les éléments que nous avons définis dans cette première partie.

Chapitre 4

MÉTHODE DE RANKIN-SELBERG

4.1. Convolution de séries L

Au chapitre 2, nous avions vu qu'à chaque série de Fourier $f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$ nous pouvions associer, au moins formellement, une série L donnée par

$$L_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \, .$$

Il est facile de se convaincre que ce processus est linéaire, mais il respecte aussi la multiplication de l'argument de la façon suivante : si $\nu \in \mathbb{N}$ et que nous considérons $f_\nu(\tau) = f(\nu\tau)$, alors

$$L_{f_\nu}(s) = \nu^{-s} L_f(s) \, . \tag{4.1.1}$$

Nous pouvons le voir en écrivant la série de Fourier de f_ν,

$$f_\nu(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^{\nu n} = \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \\ \nu | n}} a_{\frac{n}{\nu}} q^n \quad \Rightarrow \quad L_{f_\nu}(s) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ \nu | n}} \frac{a_{\frac{n}{\nu}}}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(\nu n)^s} = \nu^{-s} L_f(s) \, .$$

Ces propriétés nous permettent par exemple de calculer la série L associée à $E_2^*[\alpha]_2$ pour $\alpha \in \mathbb{Q}[\mathbb{A}\mathbb{T}]_0$. En effet, dans la section sur le discriminant modulaire augmenté, nous avions vu que si $\alpha = \sum_\lambda \alpha_\lambda w_\lambda$, alors

$$E_2^*[\alpha]_2 = \sum_\lambda \alpha_\lambda \lambda E_2(\lambda\tau) \, .$$

Et puisque

$$E_2(\tau) = 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n) \, q^n \, ,$$

nous avons

$$\begin{aligned}
L_{E_2^*[\alpha]_2}(s) &= \sum_{\lambda} \alpha_\lambda \lambda^{1-s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-24\sigma_1(n)}{n^s} \\
&= -24 \sum_{\lambda} \alpha_\lambda \lambda^{1-s} \sum_{m,n\in\mathbb{N}} \frac{n}{(mn)^s} \\
&= -24 \sum_{\lambda} \alpha_\lambda \lambda^{1-s} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s}\right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^s}\right) \\
&= -24 \sum_{\lambda} \alpha_\lambda \lambda^{1-s} \zeta(s)\, \zeta(s-1)\ . \qquad (4.1.2)
\end{aligned}$$

Ainsi, la série L associée à $E_2^*[\alpha]_2$ dépend uniquement de la fonction ζ de Riemann.

Dans ce chapitre, nous définirons une convolution entre les séries L, puis nous verrons comment représenter cette convolution à l'aide du produit de Petersson.

Définition 4.1.1. *Soient* L_a *et* L_b *deux séries* L. *Si nous notons*

$$L_a(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \qquad \textit{et} \qquad L_b(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}\,,$$

alors la convolution des séries L_a *et* L_b *est la série* L *notée et définie par*

$$L_a \otimes L_b(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n b_n}{n^s}\,.$$

Afin de simplifier les notations, nous abuserons de cette définition pour l'appliquer directement aux séries. Par exemple, nous écrirons à l'occasion

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \otimes \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n b_n}{n^s}\,.$$

Remarquons que le choix d'utiliser le même symbole que pour le produit tensoriel n'est pas anodin, car la convolution est une opération bilinéaire. En plus, elle respecte les produits eulériens si les séries L admettent de tels produits.

Proposition 4.1.2. *Soient* L_a *et* L_b *deux séries* L. *Si* L_a *et* L_b *admettent chacune un produit eulérien, alors leur convolution est donnée localement par la convolution de leurs facteurs locaux. En d'autres termes, si*

$$L_a(s) = \prod_p \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{p^k} T^k\right) \qquad L_b(s) = \prod_p \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_{p^k} T^k\right) \qquad \textit{où } T = p^{-s}\,,$$

nous avons

$$L_a \otimes L_b(s) = \prod_p \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{p^k} T^k \otimes \sum_{k=0}^{\infty} b_{p^k} T^k\right)\,.$$

DÉMONSTRATION. Le résultat découle directement de la multiplicativité des coefficients. En effet, puisque L_a et L_b admettent des produits eulériens, leurs coefficients sont multiplicatifs. Par conséquent, le produit des coefficients l'est tout autant et nous avons

$$L_a \otimes L_b(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n b_n}{n^s} = \prod_p \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{p^k} b_{p^k} T^k \right) = \prod_p \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{p^k} T^k \otimes \sum_{k=0}^{\infty} b_{p^k} T^k \right) .$$

□

En guise d'exemple, reprenons la série $L_{E_2[\alpha]_2}$ pour $\alpha \in \mathbb{Q}[\mathcal{AT}]_0$ et calculons sa convolution avec la série L associée à une forme primitive.

Supposons que $N \in \mathbb{N}$ ne soit pas divisible par un carré et considérons f une forme primitive de niveau N et de poids k. Rappelons que si les a_n sont les coefficients de Fourier de f, alors L_f s'écrit comme le produit eulérien

$$L_f(s) = \prod_{p|N} \left(\frac{1}{1 - a_p T} \right) \prod_{p \nmid N} \left(\frac{1}{1 - a_p T + pT^2} \right) \qquad \text{où } T = p^{-s} .$$

D'un autre côté, si nous notons $L_\lambda(s) = \lambda^{-s} \zeta(s)\, \zeta(s-1)$, nous avons vérifié plus haut que

$$L_{E_2^*[\alpha]_2} = -24 \sum_\lambda \alpha_\lambda \lambda L_\lambda(s) .$$

Ainsi,

$$L_f \otimes L_{E_2^*[\alpha]_2}(s) = -24 \sum_\lambda \alpha_\lambda \lambda L_f \otimes L_\lambda(s) \tag{4.1.3}$$

et le calcul revient à déterminer $L_f \otimes L_\lambda(s)$. Mais L_λ, tout comme L_f, possède un produit eulérien. Il est donnée par

$$L_\lambda(s) = \lambda^{-s} \zeta(s)\, \zeta(s-1) = \prod_{p|\lambda} \left(\frac{T}{(1-T)\,(1-pT)} \right) \prod_{p \nmid \lambda} \left(\frac{1}{(1-T)\,(1-pT)} \right) . \tag{4.1.4}$$

En calculant la convolution localement, nous avons lorsque $p \mid \lambda$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-a_p T} \otimes \frac{T}{(1-T)\,(1-pT)} &= \frac{1}{1-p} \sum_{k=1}^{\infty} a_{p^k} \left(1 - p^k\right) T^k \\ &= \frac{a_p T}{(1-a_p T)\,(1 - a_p\,(pT))} , \end{aligned}$$

lorsque $p|\frac{N}{\lambda}$

$$\frac{1}{1-a_p T} \otimes \frac{1}{(1-T)\,(1-pT)} = \frac{1}{1-p} \sum_{k=0}^{\infty} a_{p^k} \left(1 - p^{k+1}\right) T^k$$

$$= \frac{1}{\left(1 - a_p T\right)\left(1 - a_p\left(pT\right)\right)}$$

et lorsque $p \nmid N$

$$\frac{1}{1 - a_p T + pT^2} \otimes \frac{1}{\left(1 - T\right)\left(1 - pT\right)} = \frac{1}{1 - p} \sum_{k=0}^{\infty} a_{p^k}\left(1 - p^{k+1}\right) T^k$$
$$= \frac{1 - \left(pT\right)^2}{\left(1 - a_p T + pT^2\right)\left(1 - a_p\left(pT\right) + p\left(pT\right)^2\right)},$$

ce qui nous donne

$$L_f \otimes L_\lambda(s) = a_\lambda \lambda^{-s} L_f(s)\, L_f(s-1) \prod_{p \nmid N}\left(1 - \left(pT\right)^2\right)$$
$$= \frac{a_\lambda \lambda^{-s} \zeta_N(2s-2)}{\zeta(2s-2)} L_f(s)\, L_f(s-1)\ .$$

Au final, nous avons vérifié que

$$L_f \otimes L_{E_2^*[\alpha]_2}(s) = -24 \frac{\zeta_N(2s-2)}{\zeta(2s-2)} L_f(s)\, L_f(s-1) \sum_{\lambda \mid N} \alpha_\lambda a_\lambda \lambda^{1-s}\,. \tag{4.1.5}$$

En utilisant les propriétés des coefficients de Fourier des formes primitives pour un niveau non divisible par un carré, nous pouvons simplifier cette expression. Pour ce faire, considérons l'application ϵ donnée sur les involutions d'Atkin-Lehner par $\epsilon(w_\lambda) = 1$ lorsque $\lambda = 1$ et nulle autrement.

Rappelons que la multiplication des involutions d'Atkin-Lehner est donnée au niveau des facteurs de cohésion par

$$\left(\lambda_1, \lambda_2\right) \mapsto \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\left(\lambda_1, \lambda_2\right)^2}\,.$$

Ainsi, nous obtenons 1 uniquement lorsque $\lambda_1 = \lambda_2$. Si nous étandons ϵ par linéarité, nous avons alors que

$$\sum_{\lambda \mid N} \alpha_\lambda a_\lambda \lambda^{1-s} = \epsilon\left(\sum_{\lambda_1, \lambda_2 \mid N} \alpha_{\lambda_1} a_{\lambda_2} \lambda_2^{1-s} w_{\lambda_1} w_{\lambda_2}\right) = \epsilon\left(\alpha \sum_{\lambda \mid N} a_\lambda \lambda^{1-s} w_\lambda\right)$$

ce qui devient, en utilisant la multiplicativité des involutions d'Atkin-Lehner et des coefficients de Fourier,

$$\sum_{\lambda \mid N} \alpha_\lambda a_\lambda \lambda^{1-s} = \epsilon\left(\alpha \prod_{p \mid N}\left(w_1 + a_p p^{1-s} w_p\right)\right)\,.$$

De plus, nous avions vu à la proposition 2.3.6 que f était propre pour les involutions d'Atkin-Lehner. Ainsi,

$$f[w_\lambda]_2 = \psi_f(\lambda)\, f$$

avec $\psi_f(\lambda) = \pm 1$. Posons l'endomorphisme Ψ_f de $\mathbb{A}\mathbb{T}$ qui nous est fourni par les valeurs propres de f, c'est-à-dire

$$\Psi_f(w_\lambda) = \psi_f(\lambda)\, w_\lambda\,,$$

et étandons le par linéarité aux sommes formelles. Alors Ψ_f^2 est l'identité et nous avons la relation $\epsilon \circ \Psi_f = \epsilon$.

Puisque la proposition 2.3.9 indiquait que $\psi_f(p) = -a_p$, nous obtenons

$$\sum_{\lambda | N} \alpha_\lambda a_\lambda \lambda^{1-s} = \epsilon\left(\alpha\, \Psi_f\left(\prod_{p|N} (w_1 - p^{1-s} w_p)\right)\right)$$

et, si nous ramenons $\zeta_N(2s-2)$ sous le produit, notre convolution devient

$$L_f \otimes L_{E_2^*[\alpha]_2}(s) = -\frac{24}{\zeta(2s-2)}\epsilon\left(\alpha\, \Psi_f\left(\prod_{p|N}\left(\frac{w_1 - p^{1-s}w_p}{1-p^{2-2s}}\right)\right)\right) L_f(s)\, L_f(s-1)\ .$$

Mais remarquons que

$$\prod_{p|N}\left(\frac{w_1 - p^{1-s}w_p}{1-p^{2-2s}}\right) = \prod_{p|N}\left(\frac{p^{1-s}w_p\left(p^{s-1}w_p - w_1\right)}{p^{2-2s}\left(p^{2s-2}-1\right)}\right) = N^{s-1} w_N \prod_{p|N}\left(\frac{w_1 - p^{s-1}w_p}{1-p^{2s-2}}\right)\ ,$$

ce qui indique que

$$L_f \otimes L_{E_2^*[\alpha]_2}(s) = -\frac{24N^{s-1}}{\zeta(2s-2)}\epsilon\left(\alpha\, \Psi_f\left(w_N \prod_{p|N}\left(\frac{w_1 - p^{s-1}w_p}{1-p^{2s-2}}\right)\right)\right) L_f(s)\, L_f(s-1)\ .$$

Puisque nous nous intéresserons au cas particulier où $s = 2$, cette dernière équation se spécialise à

$$L_f \otimes L_{E_2^*[\alpha]_2}(2) = -\frac{144N}{\pi^2}\epsilon(\alpha\, \Psi_f(w_N \delta))\, L_f(2)\, L_f(1) \tag{4.1.6}$$

où

$$\delta = \prod_{p|N} \frac{w_1 - p w_p}{1-p^2}\,.$$

4.2. Transformée de Rankin-Selberg

Dans cette section nous allons discuter de la méthode de Rankin-Selberg et s'en servir pour lier le produit de Petersson et la convolution de série L que nous avons vue au début de ce chapitre. Le fil conducteur entre ces deux concepts réside dans la série d'Eisenstein réelle que nous avons vu à la section 3.2.

Dans un premier lieu, discutons de la transformée de Rankin-Selberg d'une fonction réelle invariante par $\Gamma_0(N)$ sur le demi-plan supérieur. Pour ce faire, fixons $F : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ une telle fonction que nous considérerons comme une fonction de x et y, les parties réelles et imaginaires de $\tau \in \mathcal{H}$. Supposons de plus que F soit lisse en x et en y et, pour assurer la convergence de certaines intégrales, que F décroit au moins exponentiellement avec y lorsque $y \to \infty$. En d'autres termes,

$$\limsup_{y\to\infty} \left(\left| \frac{F(x+iy)}{e^{-\nu y}} \right| \right) \text{ est bornée pour un certain } \nu > 0\,.$$

Puisque F est invariante par l'action de $\Gamma_0(N)$, elle satisfait en particulier

$$F(\tau+1) = F(\tau) \qquad \Longleftrightarrow \qquad F((x+1)+iy) = F(x+iy)\ ,$$

c'est-à-dire que, comme fonction de x, F est périodique de période unitaire. Nous pouvons donc considérer sa série de Fourier. Pour nos besoins, seul le premier coefficient sera utile. Il est donné par

$$c_0(y) = \int_0^1 F(x+iy)\,dx\,.$$

La linéarité de l'intégrale nous assure que la décroissance de F se transfère à c_0. De plus, en éliminant x comme variable, nous nous assurons que c_0 est une fonction borné.

La *transformée de Rankin-Selberg de* F est donnée par

$$R_F(s) = \int_0^\infty c_0(y)\, y^{s-2} dy \qquad \text{pour } \mathrm{Re}(s) > 1\,. \tag{4.2.1}$$

Grâce à notre hypothèse sur la décroissance exponentielle de F, nous pouvons affirmer que c_0 décroit également rapidement et est borné, ce qui indique que la transformée converge absolument et uniformément pour $\mathrm{Re}(s) > 1$.

Cette transformée est fortement lié au produit de Petersson comme le montre le théorème suivant.

Théorème 4.2.1. *Soit* $F : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ *une fonction invariante par l'action de* $\Gamma_0(N)$ *sur* $\mathcal{H}$ *et décroissante exponentiellement lorsque sa partie imaginaire augmente indéfiniement. Supposons aussi que* F *soit lisse comme fonction de sa partie réelle et comme fonction de sa partie imaginaire. Si nous notons* E_0 *la série d'Eisenstein réelle associée à* $\Gamma_0(N)$*, alors la transformée de Rankin-Selberg de* F *satisfait l'identité*

$$R_F(s) = \int_{X_0(N)} F(\tau)\, E_0(\tau, s)\, d\mu \qquad \textit{quelque soit } \mathrm{Re}(s) > 1\,.$$

HEURISTIQUE. Nous ne prouverons pas cette égalité dans ses moindres détails, car une étude technique des domaines fondamentaux est nécessaire pour qu'elle soit complète. Néanmoins, l'idée de la preuve, qui est même connue sous le nom de la technique du déploiement[1], est pertinente et c'est pourquoi nous en discuterons. Les détails se retrouvent dans l'article de Zagier (1992).

Rappelons que nous avions défini la série d'Eisenstein réelle de $\Gamma_0(N)$ comme

$$E_0(\tau, s) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma_0(N)} \mathrm{Im}(\gamma \cdot \tau)^s \qquad \text{où } \tau \in \mathcal{H},\ \mathrm{Re}(s) > 1$$

où Γ_∞ est le stabilisateur de ∞ dans $\Gamma_0(N)$.

L'idée de la preuve est de considérer les domaines fondamentaux pour $\Gamma_0(N)$ et Γ_∞. Si $\mathcal{F}$ est un domaine fondamental pour $\Gamma_0(N)$ et $\mathcal{F}_\infty$ en est un pour Γ_∞, une étude appronfondie nous révèlerait $\mathcal{F}_\infty$ est donnée par l'union

$$\mathcal{F}_\infty = \bigcup_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma_0(N)} \gamma \cdot \mathcal{F}\,. \tag{4.2.2}$$

Mais puisque l'action de Γ_∞ est donnée par les translations, engendrées par $\tau \mapsto \tau + 1$, un domaine fondamental pour cette action est donné simplement par une bande vertical de largeur 1 dans $\mathcal{H}$. Par conséquent, en tant qu'opérateur de fonctions de période unitaire, nous avons les identités

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma_0(N)} \int_{\gamma \cdot \mathcal{F}} = \int_{\mathcal{F}_\infty} = \int_{y=0}^{\infty} \int_{x=0}^{1} \tag{4.2.3}$$

Nous pouvons donc calculer

$$\begin{aligned}
\int_{X_0(N)} F(\tau)\, E_0(\tau, s)\, d\mu &= \int_{\mathcal{F}} F(\tau)\, E_0(\tau, s)\, d\mu \\
&= \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma_0(N)} \int_{\mathcal{F}} F(\tau)\, \mathrm{Im}(\gamma \cdot \tau)^s\, d\mu \\
&= \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma_0(N)} \int_{\gamma \cdot \mathcal{F}} F(\tau)\, \mathrm{Im}(\tau)^s\, d\mu \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^1 F(x + iy)\, dx \right) y^{s-2} dy = R_F(s)\ .
\end{aligned}$$

$\square$

Le résultat fondamental que nous venons de voir semble anodin au premier coup d'oeil, car il est difficile de voir à quoi peut correspondre exactement la transformée de Rankin-Selberg. En guise d'exemple, calculons une telle transformée, ce qui nous

[1] *Unfoldind method* en anglais.

permettra d'écrire la convolution entre deux formes parabolique sous la forme d'une intégrale.

Soient f et g deux formes paraboliques de poids k pour $\Gamma_0(N)$. Comme à la section précédente, posons

$$\varphi(\tau) = \mathrm{Im}(\tau)^k\, f(\tau)\, \overline{g(\tau)}\,.$$

Cette dernière fonction est bien lisse comme fonction de x et de y en plus d'être invariante sous $\Gamma_0(N)$ comme nous l'avions précédemment discuté. Avant de considérer sa transformée de Rankin-Selberg, il est important de vérifier que cette fonction décroit exponentiellement lorsque y augmente indéfiniement. Pour ce faire, notons les séries de Fourier

$$f(\tau) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m q^m \qquad g(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n q^n \qquad\quad \text{où } q = e^{2\pi i\tau}\,.$$

Un petit calcul nous indique alors que

$$\varphi(\tau) = y^k \sum_{m,n\in\mathbb{N}} a_m \overline{b_n} e^{-2\pi y\left(m+n\right)} e^{2\pi i x\left(m-n\right)}\,. \tag{4.2.4}$$

Choisissons ν tel que $0 < \nu < 2\pi$. Nous avons alors $\nu - 2\pi\left(m+n\right) < 0$ quelque soit $m, n \in \mathbb{N}$, ce qui indique que

$$\limsup_{y\to\infty}\left(\left|\frac{F(\tau)}{e^{-\nu y}}\right|\right) \leqslant \sum_{m,n\in\mathbb{N}} \left|a_m\overline{b_n}\right| \limsup_{y\to\infty}\left(\left|y^k e^{\left(\nu-2\pi\left(m+n\right)\right)y}\right|\right) = 0\,.$$

Pour calculer la transformée de Rankin-Selberg, nous aurons besoin du terme constant de la série de Fourier. Isoler la série en entier n'est pas aisé, mais le développement (4.2.4) permet d'isoler au moins le terme constant. En effet, il s'agit de sélectionner les termes pour lesquels $m - n = 0$.

$$c_0(y) = y^k \sum_{n=1}^{\infty} a_n \overline{b_n} e^{-4\pi n y}\,.$$

La transformée de Rankin-Selberg de φ est

$$\begin{aligned}
R_\varphi(s) &= \int_0^\infty c_0(y)\, y^{s-2} dy \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} a_n\overline{b_n} \int_0^\infty y^{k+s-2} e^{-4\pi n y} dy \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n\overline{b_n}}{\left(4\pi n\right)^{s+k-1}} \int_0^\infty \nu^{k+s-2} e^{-\nu} d\nu \qquad \text{où } \nu = 4\pi n y \\
&= \frac{\Gamma(s+k-1)}{\left(4\pi\right)^{s+k-1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n\overline{b_n}}{n^{s+k-1}}
\end{aligned}$$

$$= \frac{\Gamma(s+k-1)}{(4\pi)^{s+k-1}}\ L_f \otimes \overline{L_g}(s+k-1)\ .$$

Autrement dit, la transformée de Rankin-Selberg correspond à la convolution des séries L et, grâce au théorème précédent, nous pouvons écrire que pour $\mathrm{Re}(s) > 1$

$$\int_{X_0(N)} \mathrm{Im}(\tau)^k\, f(\tau)\, \overline{g(\tau)}\, E_0(\tau, s)\, d\mu \ = \ \frac{\Gamma(s+k-1)}{(4\pi)^{s+k-1}}\ L_f \otimes \overline{L_g}(s+k-1)\ . \tag{4.2.5}$$

Nous pourrons ainsi utiliser cette intégrale afin de passer aux séries L dans le calcul de notre régulateur.

Chapitre 5

K-THÉORIE ET RÉGULATEUR

L'objectif de ce chapitre est de définir le régulateur d'une courbe modulaire et de calculer son action sur une forme primitive donnée. Puisque le régulateur est une application de la K-théorie d'une courbe vers son premier groupe de cohomologie, il sera nécessaire d'exposer la base de la K-théorie d'une courbe algébrique. Plus spécifiquement, nous ne considérerons que le foncteur de niveau 2 que l'on note K_2. Par contre, ce chapitre présentera uniquement les résultats pertinents pour définir le régulateur et ramener sa définition à l'intégrale d'une forme différentielle. Pour une exposition plus complète de la K-théorie, il vaut mieux consulter l'ouvrage de Milnor (1971) ou, plus particulièrement pour nos applications, celui de Bloch (2000) qui traite des régulateurs.

5.1. Quelques notions de K-théorie

La K-théorie dans un sens large définit une famille de foncteurs algébriques sur la catégorie des espaces topologiques. Cette construction fait intervenir les classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels sur l'espace topologique et est un exemple de cohomologie extraordinaire. Cette approche dépasse largement le cadre de ce mémoire, mais suite aux travaux de Jean-Pierre Serre, ces foncteurs s'appliquent également à la catégorie des anneaux. On parle alors de la K-théorie algébrique et cette dernière s'expose à l'aide de notions d'algèbre élémentaire dans le cas où l'anneau est en particulier un corps.

Rappelons que les courbes algébriques peuvent présenter trois facettes. En plus de la définition par une équation algébrique usuelle, nous pouvons considérer ces courbes comme des surfaces de Riemann. En plus, nous pouvons aussi considérer leurs corps de fonctions rationnelles. Deux groupes de K-théorie sont ainsi associés à une courbe algébrique, la K-théorie topologique et la K-théorie algébrique associée au corps de fonctions rationnelles sur la surface. En fait, ces deux groupes sont liés entre eux. En effet, si $X\backslash\mathbb{Q}$ est une courbe définie sur les rationnels et $\mathbb{Q}(X)$ est son corps de fonctions rationnelles, un théorème (voir le livre de Bloch (2000)) nous indique qu'il existe une suite exacte

$$K_2(X) \longrightarrow K_2(\mathbb{Q}(X)) \xrightarrow{\partial} \prod_{P \in X} \overline{\mathbb{Q}}^\times \tag{5.1.1}$$

où ∂ est une fonction définie localement pour tous les points $P \in X$ que nous décrirons plus bas. De plus, ce même résultat indique que le noyau de l'application de gauche forme un sous-groupe de torsion.

Ainsi, si nous parvenons à construire un élément du noyau de ∂, nous obtiendrons automatiquement un élément de $K_2(X)$ défini modulo des éléments de torsion. Le régulateur s'annulant sur les éléments de torsion, cette stratégie nous permettra d'obtenir des éléments de son domaine que nous noterons $K_2^\partial(X) = \ker(\partial)$. Pour la suite de ce chapitre, nous définirons donc successivement la K-théorie du corps de fonctions, l'application ∂, puis nous considérerons le noyau de cette application avant de calculer le régulateur explicitement.

Afin de limiter les notations, passons au cas général et fixons F un corps. Grâce à un théorème de Matsumoto, nous pouvons définir le groupe $K_2(F)$ par une propriété universelle.

Si G un groupe multiplicatif et que $c : F^\times \times F^\times \to G$ est une application bimultiplicative, nous dirons que c est un symbole de Steinberg si elle respecte la relation de Steinberg

$$c(x, 1-x) = 1 \qquad \text{quelque soit } x \in F^\times, x \neq 1\,. \tag{5.1.2}$$

Le théorème de Matsumoto affirme que $K_2(F)$ est un domaine universel pour les symboles de Steinberg. Concrètement, cela signifie qu'il existe un symbole de Steinberg $\phi : F^\times \times F^\times \to K_2(F)$ tel que pour n'importe quel symbole de Steinberg c, ce dernier se prolonge uniquement en un homomorphisme $\widetilde{c}$ au niveau de la K-théorie. Plus brièvement, le diagramme suivant est commutatif quelque soit c et G.

$$\begin{tikzcd} F^\times \times F^\times \arrow[r, "c"] \arrow[d, "\phi"] & G \\ K_2(F) \arrow[ur, dotted, "\exists ! \widetilde{c}"] & \end{tikzcd}$$

Si nous écrivons $\{x, y\} = \phi(x, y)$ nous obtenons la définition suivante.

Définition 5.1.1 (Théorème de Matsumoto). *Soit F un corps. Le groupe abélien de K-théorie $K_2(F)$ est engendré par les éléments notés $\{x, y\}$ pour $x, y \in F^\times$ soumis aux relations*

$$\{xy, z\} = \{x, z\}\{y, z\}\,, \qquad \{x, yz\} = \{x, y\}\{x, z\}\,, \qquad \{x, 1-x\} = 1\,.$$

En guise d'exemple, nous considérerons le symbole modéré[1]. Ce symbole, défini pour la première fois par Tate, nous permettra d'exprimer ∂ dans notre suite exacte (5.1.1).

Supposons qu'il existe une valuation discrète ν sur F. Notons alors $\mathcal{M} \subset R$ pour l'idéal maximal de l'anneau de valuation, k pour le corps résiduel et $\bar{r} \in k$ pour le résidu[2] de $r \in R$. Le symbole modéré associé à ν est alors l'application à valeurs dans $k^\times$ donnée par

$$\left(x, y\right)_\nu = \left(-1\right)^{\nu(x)\nu(y)} \overline{\left(\frac{x^{\nu(y)}}{y^{\nu(x)}}\right)} . \tag{5.1.3}$$

Les propriétés des valuations nous assurent que $\nu\left(\frac{x^{\nu(y)}}{y^{\nu(x)}}\right) = 0$ et que cette définition est bien à valeur dans k. Malgré tout, il n'est pas clair que cette application respecte bien la relation de Steinberg. Nous présenterons donc cette preuve, car elle met en lumière l'importance du facteur -1.

Proposition 5.1.2. *Le symbole modéré défini ci-haut est un symbole de Steinberg.*

DÉMONSTRATION. La bimultiplicativité découle directement des lois des exposants. Afin de vérifier que $\left(x, 1-x\right)_\nu = 1$ pour $x \neq 0, 1$, procédons par cas.

- $\nu(x) > 0$: Dans cette situation, $x \in \mathcal{M}$ et, puisque R est un anneau local, nous devons avoir $1 - x \in R^\times$, c'est-à-dire que $\nu(1-x) = 0$. Ainsi,

$$\left(x, 1-x\right)_\nu = \overline{\left(1-x\right)^{-\nu(x)}} = \left(1-\bar{x}\right)^{-\nu(x)} = 1 .$$

- $\nu(x) = 0$: Nous avons alors $\nu(1-x) \geqslant \min\left\{\nu(1), \nu(-x)\right\} = 0$. Si jamais $\nu(1-x) = 0$, le résultat est clair, et si jamais $\nu(1-x) > 0$, nous avons $1 - x \in \mathcal{M}$ et $\bar{x} = 1$. Ainsi,

$$\left(x, 1-x\right)_\nu = \overline{x^{\nu(1-x)}} = \bar{x}^{\nu(1-x)} = 1 .$$

- $\nu(x) < 0$: Remarquons que $\nu(1-x) < 0$, car sinon $1 - x \in R$ et nous aurions $x = -(1-x) + 1 \in R$ d'où $\nu(x) \geqslant 0$, ce qui est impossible. Ainsi,

$$\nu(1-x) \geqslant \min\left\{\nu(1), \nu(x)\right\} = \nu(x)$$
$$\nu(x) = \nu(1-(1-x)) \geqslant \min\left\{\nu(1), \nu(1-x)\right\} = \nu(1-x)$$

d'où $\nu(x) = \nu(1-x)$. D'un autre côté, nous avons $\nu\left(x^{-1}\right) > 0$, c'est-à-dire que $x^{-1} \in \mathcal{M}$. Ainsi,

$$\overline{\left(\frac{x}{1-x}\right)} = \overline{\left(\frac{1-x}{x}\right)^{-1}} = \overline{\left(x^{-1}-1\right)^{-1}} = \left(\overline{x^{-1}} - 1\right)^{-1} = -1 .$$

[1] En anglais, ce symbole est connu sous le nom de *tame symbol*.

[2] Le résidu est ici la classe de $r \in R$ modulo $\mathcal{M}$ et non le résidu en un point d'une fonction méromorphe.

et nous avons

$$\left(x, 1-x\right)_v = \left(-1\right)^{v(x)^2} \overline{\left(\frac{x}{1-x}\right)^{v(x)}} = \left(-1\right)^{v(x)} \left(-1\right)^{v(x)} = \left(-1\right)^{2v(x)} = 1\,.$$

□

Laissons maintenant le cas général et donnons nous une courbe algébrique lisse, projective et irréductible X définie sur $\mathbb{Q}$. Pour chaque point $P \in X$, nous avons une valuation sur le corps des fonctions rationnelles $\mathbb{Q}(X)$ donnée par l'ordre de la fonction en P. Notons $\mathrm{ord}_P(f)$ l'ordre de f en P et ∂_P le symbole modéré associé à cette valuation discrète. Sous ces hypothèses, $\partial_P : \mathbb{Q}(X) \to \overline{\mathbb{Q}}^{\times}$. Notre fonction ∂ est ainsi simplement le coproduit de tous les symboles modérées en chaque point de X

$$\partial = \left(\partial_P\right)_{P\in X}\,. \tag{5.1.4}$$

Un élément de $K_2(\mathbb{Q}(X))$ se retrouve dans le noyau de ∂ si et seulement si les symboles modérées sont unitaires en chaque point de X.

Remarquons que l'ordre d'une fonction est nulle presque partout et, donc, le symbole modéré de deux fonctions est également unitaire presque partout. Seuls les points dans le support d'une des deux fonctions peuvent poser un problème, car seuls ces points n'ont pas un symbole modéré unitaire. D'un autre côté, la *formule du produit* nous assure au moins que les valeurs prisent par les symboles modérés se simplifient entres elles. Elle indique que quelque soit $f, g \in \mathbb{Q}(X)$,

$$\prod_{P\in X} \partial_P(f,g) = 1\,. \tag{5.1.5}$$

Si nous nous restreignons à des fonctions possédant peu de diviseurs, cette dernière équation peut nous permettre de construire facilement des éléments de $K_2(\mathbb{Q}(X))$. En effet, suivant les idées de Dokchitser et collab. (2006), supposons que nous ayons deux fonctions $f, g \in \mathbb{Q}(X)$ ayant pour diviseurs

$$\mathrm{div}(f) = m_f\left((P_f) - (Q)\right)$$
$$\mathrm{div}(g) = m_g\left((P_g) - (Q)\right)$$

pour trois points distincts $Q, P_f, P_g \in C(\mathbb{Q})$. Nous pouvons toujours normaliser ces fonctions de sortes que

$$f(P_g) = 1\,,$$
$$g(P_f) = 1\,.$$

Ainsi, nous avons

$$\partial_{P_f}(f,g) = g(P_f)^{-m_f} = 1\,,$$

$$\partial_{P_g}(f,g) = f(P_g)^{m_g} = 1 \, .$$

Le seul point qui reste à vérifier est Q, car tout autre point ne fait pas partie du support de f et g. Mais la formule du produit indique que

$$1 = \prod_{P \in X} \partial_P(f,g) = \partial_{P_f}(f,g)\, \partial_{P_g}(f,g)\, \partial_Q(f,g) = \partial_Q(f,g) \ ,$$

d'où $\{f,g\} \in K_2^{\partial}(X)$.

Remarquons que la construction que nous venons de réaliser peut s'appliquer facilement au discriminant modulaire augmenté, car nous contrôlons les diviseurs de cette fonction (proposition 3.1.2). De plus, lorsque X est une courbe elliptique, de telles fonctions existent si nous prenons les P comme des points de torsion et Q comme le point à l'infini. Ceci s'explique par un résultat sur les courbes elliptiques qui établit un isomorphisme entre le groupe de points sur la courbe et le groupe de Picard de la courbe vue comme une variété algébrique (corollaire III.3.5 du livre de Silverman (2000)). En choisissant des points de torsion, nous sommes donc assurés de trouver des fonctions qui respecteront les conditions qui nous avons imposées plus haut. Nous utiliserons cette particularité plus loin à la section 5.4 en guise d'exemple.

5.2. L'APPLICATION RÉGULATEUR

Introduit par Beilinson suite aux travaux de Bloch, le régulateur est une application sur la K-théorie d'une courbe vers son premier groupe de cohomologie. Pour le définir, commençons par fixer deux fonctions $f, g \in \mathbb{Q}(X)$ et posons la forme différentielle lisse, réelle et de degré 1

$$\eta(f,g) = \log|f| \, d\arg(g) - \log|g| \, d\arg(f) \ . \tag{5.2.1}$$

Remarquons que η est bien définie à l'extérieur des zéros et des pôles de f et g que nous noterons S. En effet, sur $X \backslash S$, seul l'argument peut poser problème, car il n'est pas déterminé de façon univoque. Malgré tout, les valeurs de l'argument ne peuvent différer que par un multiple de 2π et ces derniers sont annulés par la dérivée extérieur.

Afin d'obtenir la définition du régulateur, nous devrons d'abord discuter d'homologie et de cohomologie singulière de degré 1. Rappelons que la cohomologie est donnée par le dual de l'homologie et, donc, pour définir un élément en cohomologie, il suffit de considérer une application sur l'espace des lacets en s'assurant que deux lacets homologues donnent la même valeur. Comme candidat pour notre application, nous considérerons l'intégrale de la forme $\eta(f,g)$. Si γ est un lacet de $X \backslash S$, nous écrirons

$$\big(\eta(f,g), \gamma\big) = \int_{\gamma} \eta(f,g) \ . \tag{5.2.2}$$

Mais η est une forme close, puisque

$$d\eta(f,g) = \mathrm{Im}(\mathrm{dlog}(f) \wedge \mathrm{dlog}(g)) = 0 \tag{5.2.3}$$

où la dernière égalité s'explique du fait qu'il n'existe pas de forme complexe de degré 2 sur une surface de Riemann ; ces surfaces ont une dimension complexe égale à 1. Puisque $\eta(f,g)$ est close, le théorème de Stokes nous assure que pour deux chemins homologuent, l'intégrale ci-haute prendra la même valeur. Si nous notons $[\gamma] \in H_1(X\backslash S;\mathbb{Z})$ pour la classe de γ, notre application, étendue par linéarité, devient

$$\big(\eta(f,g),[\gamma]\big) = \int_\gamma \eta(f,g)\ . \tag{5.2.4}$$

Ainsi, nous avons bien une application en homologie, mais seulement pour $X\backslash S$. Pour passer à l'homologie de X en entier, remarquons que lorsque γ encercle un point de S, disons en P, notre intégrale diffère par un multiple du résidu de $\eta(f,g)$ en P. Or un résultat de Villegas (1999) nous indique que

$$\mathrm{Res}_P(\eta(f,g)) = \log|\partial_P(f,g)|\ . \tag{5.2.5}$$

Ainsi, si le symbole modéré de f et g est unitaire en P, la valeur de l'intégrale ne changera pas, même si γ encercle P. En choisissant f et g avec un symbole modéré unitaire partout sur X, c'est-à-dire que ces fonctions sont telles que $\{f,g\} \in K_2^\partial(X)$, nous obtenons une application bien définie au niveau de l'homologie $H_1(X;\mathbb{Z})$.

Laissons maintenant f et g varier. Nous voulons vérifier que $f,g \mapsto \big(\eta(f,g),\cdot\big)$ est un symbole de Steinberg. Si c'est le cas, le paragraphe précédent nous assurera que nous avons une application bien définie en K-théorie, pour autant que nous considérons uniquement des éléments du noyau du symbole modéré. Or, on vérifie[3] facilement quelque soit $[\gamma] \in H_1(X;\mathbb{Z})$ que

$$\begin{aligned}\big(\eta(f_1f_2,g),[\gamma]\big) &= \big(\eta(f_1,g)+\eta(f_2,g),[\gamma]\big) = \big(\eta(f_1,g),[\gamma]\big) + \big(\eta(f_2,g),[\gamma]\big)\ ,\\ \big(\eta(f,g_1g_2),[\gamma]\big) &= \big(\eta(f,g_1)+\eta(f,g_2),[\gamma]\big) = \big(\eta(f,g_1),[\gamma]\big) + \big(\eta(f,g_2),[\gamma]\big)\ ,\end{aligned}$$

et il ne reste donc que la relation de Steinberg à vérifier. Cette relation découle du fait que $\eta(f,1-f)$ est une forme exacte. En effet, $\eta(f,1-f) = dD(f)$ où D est le dilogarithm de Bloch-Wigner. (Voir (Bloch, 2000) pour plus de détails.) Ainsi, le théorème de Stokes nous indique que l'intégrale de $\eta(f,1-f)$ est toujours nulle sur les lacets.

Nous avons donc un morphisme $r : K_2^\partial(X) \to H^1(X;\mathbb{R})$ donné sur les générateurs par

$$\big\langle r(\{f,g\}),[\gamma]\big\rangle = \int_\gamma \eta(f,g)\ . \tag{5.2.6}$$

[3]Le groupe d'arrivé est $H^1(X;\mathbb{R})$ qui est noté additivement contrairement à la section précédente.

Nous dirons que r est le *régulateur de la courbe X*.

Avant de passer à la suite, remarquons deux points. Premièrement, puisque r est un morphisme, tout élément de torsion de $K_2^{\partial}(X)$ est envoyé sur les éléments de torsion de $\mathbb{R}$. Mais $\mathbb{R}$ n'a que 0 comme élément de torsion. Nous pourrions donc réduire $K_2^{\partial}(X)$ par sa torsion sans perdre d'information sur le régulateur. Pour éviter de surcharger l'écriture, nous conserverons néanmoins l'application telle qu'elle est donnée plus haut.

Secondement, nous pouvons remarquer que les applications en homologie fournies par le régulateur sont toujours nulles sur les classes d'homologie fixées par la conjugaison complexe. En effet, notons ρ pour la conjugaison complexe sur X. Puisque $f, g \in \mathbb{Q}(X)$, elles commutent certainement avec la conjugaison. Le tiré de $\eta(f, g)$ par la conjugaison respecte alors

$$\rho^*\eta(f, g) = \eta(f \circ \rho, g \circ \rho) = \eta(\rho \circ f, \rho \circ g) = -\eta(f, g) \tag{5.2.7}$$

et si γ est fixé en homologie par ρ, nous trouvons bien

$$\left\langle r(\{f, g\}), [\gamma] \right\rangle = \left\langle \{f, g\}, [\rho \circ \gamma] \right\rangle = \int_{\rho\circ\gamma} \eta(f, g) = \int_{\gamma} \rho^*\eta(f, g) = -\left\langle r(\{f, g\}), [\gamma] \right\rangle , \tag{5.2.8}$$

d'où

$$\left\langle r(\{f, g\}), [\gamma] \right\rangle = 0 . \tag{5.2.9}$$

Pour nos applications, nous étendrons notre définition du régulateur aux formes holomorphes sur X. Pour ce faire, il s'agit d'appliquer la dualité de Poincaré et le théorème de De Rham. En clair, si X est une courbe algébrique, $\{f, g\} \in K_2^{\partial}(X)$ et $\omega \in \Omega_1(X)$ est une forme différentielle holomorphe (de degré 1), nous avons

$$\left\langle r(\{f, g\}), \omega \right\rangle = \big(\eta(f, g) \wedge \omega, [X]\big) = \int_X \eta(f, g) \wedge \omega . \tag{5.2.10}$$

Comme nous planifions de calculer le régulateur explicitement, profitons des propriétés des formes différentielles holomorphes pour éviter des calculs en double. Commençons par noter que

$$d\log|f| = d\mathrm{Re}(\log(f)) = \frac{1}{2}\left(\frac{df}{f} + \frac{d\bar{f}}{\bar{f}}\right) , \tag{5.2.11}$$

$$d\arg(f) = d\mathrm{Im}(\log(f)) = \frac{1}{2i}\left(\frac{df}{f} - \frac{d\bar{f}}{\bar{f}}\right) . \tag{5.2.12}$$

Puisque nous ne considérons que des $f \in \mathbb{Q}(X)$, nos fonctions commuterons toujours avec la conjugaison. Ainsi, le produit extérieur de $d\bar{f}$ avec une forme holomorphe est nul. Nous avons donc

$$\mathrm{i}\,\mathrm{dlog}|f| \wedge \omega = \mathrm{i}\frac{1}{2}\frac{d\bar{f}}{\bar{f}} \wedge \omega = -\frac{1}{2\mathrm{i}}\frac{d\bar{f}}{\bar{f}} \wedge \omega = \mathrm{darg}(f) \wedge \omega\,.$$

Finalement, rappelant que les formes holomorphes sont fermées, nous trouvons

$$\begin{aligned} d\big(\mathrm{i}\ \log|f|\log|g| \wedge \omega\big) &= d\big(\mathrm{i}\ \log|f|\log|g|\big) \wedge \omega \\ &= \mathrm{i}\log|g|\,\mathrm{dlog}|f| \wedge \omega + \mathrm{i}\log|f|\,\mathrm{dlog}|g| \wedge \omega \\ &= \big(\log|g|\,\mathrm{darg}(f) + \log|f|\,\mathrm{darg}(g)\big) \wedge \omega\,. \end{aligned}$$

Le théorème de Stokes nous donne donc

$$\int_X \log|f|\,\mathrm{darg}(g) \wedge \omega = -\int_X \log|g|\,\mathrm{darg}(f) \wedge \omega\,.$$

Au final, le régulateur est donné par

$$\big\langle r(\{f,g\}), \omega\big\rangle = 2\int_X \log(f)\,\mathrm{darg}\,g \wedge \omega\,. \tag{5.2.13}$$

5.3. Calcul explicite

L'objectif de cette section est d'exprimer le résultat principal de ce mémoire, c'est-à-dire d'effectuer le calcul explicite du régulateur pour l'exprimer à l'aide de valeurs spéciales de fonctions L.

Fixons donc $N \in \mathbb{N}$ un entier naturel non divisible par un carré et considérons la courbe $X_0(N)$. Afin de faire le calcul explicite, nous aurons besoin d'une paire de fonctions $f, g \in \mathbb{Q}(X_0(N))$ telles que $\{f,g\} \in K_2^{\partial}(X_0(N))$ et d'une certaine forme holomorphe $\omega \in \Omega_1(X_0(N))$.

Pour f et g, nous prendrons des discriminants modulaires augmentés vu au chapitre 3 et nous supposerons qu'il est possible de les normaliser pour obtenir un élément de K-théorie. Malgré cette supposition, nous avions vu à la fin de la section sur la K-théorie (section 5.1) que cette hypothèse est vérifiée si nous choisissons judicieusement les diviseurs de nos fonctions.

Pour ω, nous ferons plutôt appel aux propriétés des formes primitives que nous avons discuté à la section 2.3. Comme nous l'avions vu au premier chapitre, les formes parabolique de poids 2 fournissent des formes holomorphes sur la courbe modulaire. De plus, une fonction L leur est associée et ce sont les valeurs particulières de cette fonction qui nous intéresseront.

Théorème 5.3.1. *Soient $N \in \mathbb{N}$ un entier non divisible par un carré et $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}[\mathbb{AT}]_0$. Supposons qu'il existe des constantes C_α et C_β telles que $\left\{C_\alpha\Delta^\alpha, C_\beta\Delta^\beta\right\} \in K_2^{\partial}(X_0(N))$. De plus, soit f une forme primitive pour $\Gamma_0(N)$ et notons Ψ_f l'endomorphisme de $\mathbb{AT}$ donné par les valeurs propres de f sous $\mathbb{AT}$. Notons également L_f et $\omega_f = 2\pi\mathrm{i}\, f(\tau)\, d\tau$ respectivement pour la fonction*

L *et la forme holomorphe associée à* f*. Si* r *est le régulateur de* $X_0(N)$*, alors*

$$\left\langle r\left(\left\{C_\alpha\Delta^\alpha, C_\beta\Delta^\beta\right\}\right), \omega_f\right\rangle = -\frac{144N}{\pi}\epsilon\left(w_N\ \alpha\,\Psi_f(\beta)\right) L_f(2)\, L_f(1)$$

où $\epsilon : \mathbb{Q}[\mathbb{AT}] \to \mathbb{Q}$ *est l'application linéaire définie nulle sur toutes les involutions sauf l'identité où elle vaut l'unité.*

DÉMONSTRATION. La preuve consiste simplement à coller par quelques manipulations algébriques les morceaux déjà démontrés dans les chapitres précédents. Afin de simplifier les notations et être consistent entre les différentes sections, nous prouverons ce théorème avec $\delta\alpha$ et $\delta\beta$ au lieu de α et β où $\delta \in \mathbb{Q}[\mathbb{AT}]$ est l'élément donné par

$$\delta = \prod_{p|N}\left(\frac{w_1 - p w_p}{1-p^2}\right) . \tag{5.3.1}$$

Ce changement n'affecte en rien la généralité du résultat, car δ est inversible, son inverse étant donné par $\delta^{-1} = \prod_{p|N}\left(w_1 + p w_p\right)$.

Sans plus tarder, notons par I la valeur du régulateur que nous voulons calculer. Par définition

$$I = \left\langle r\left(\left\{C_\alpha\Delta^{\delta\alpha}, C_\beta\Delta^{\delta\beta}\right\}\right), \omega_f\right\rangle = 2\int_{X_0(N)} \log\left|C_\alpha\Delta^{\delta\alpha}(\tau)\right| \operatorname{darg}\left(C_\beta\Delta^{\delta\beta}(\tau)\right) \wedge \omega_f(\tau)\ .$$

Commençons par éliminer les constantes de cette expression. Premièrement, puisque la dérivée d'une constante est nulle, l'additivité de l'argument nous assure que nous pouvons omettre C_β. Ensuite, en séparant le logarithme, il faut montrer que l'expression suivante est nulle.

$$2\log|C_\alpha|\int_{X_0(N)} \operatorname{darg}\left(\Delta^{\delta\beta}(\tau)\right) \wedge \omega_f(\tau)\ .$$

Les formes holomorphes étant fermées, nous avons

$$d\left(\arg\left(\Delta^{\delta\beta}(\tau)\right) \wedge \omega_f(\tau)\right) = \operatorname{darg}\left(\Delta^{\delta\beta}(\tau)\right) \wedge \omega_f(\tau)$$

et l'intégrale est bien nulle par le théorème de Stokes.

Nous avons ainsi

$$I = 2\int_{X_0(N)} \log\left|\Delta^{\delta\alpha}(\tau)\right| \operatorname{darg}\left(\Delta^{\delta\beta}(\tau)\right) \wedge \omega_f(\tau)\ .$$

Exprimons maintenant le tout en coordonées conjuguées en notant que Δ commute avec la conjugaison complexe. Nous avons

$$\operatorname{darg}\left(\Delta^{\delta\beta}(\tau)\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{d}{d\tau}\log\left(\Delta^{\delta\beta}(\tau)\right) d\tau - \frac{d}{d\overline{\tau}}\log\left(\Delta^{\delta\beta}(\overline{\tau})\right) d\overline{\tau}\right) ,$$

d'où

$$\begin{aligned}\operatorname{darg}\big(\Delta^{\delta\beta}(\tau)\big) \wedge \omega_f(\tau) &= \operatorname{darg}\big(\Delta^{\delta\beta}(\tau)\big) \wedge \big(2\pi i f(\tau)\, d\tau\big) \\ &= 2i\pi^2\ f(\tau)\ \overline{\frac{1}{2\pi i}\frac{d}{d\tau}\log(\Delta^{\delta\beta}(\tau))}\ d\bar\tau \wedge d\tau\end{aligned}$$

pour

$$I = 4i\pi^2 \int_{X_0(N)} f(\tau)\ \log\left|\Delta^{\delta\alpha}(\tau)\right|\ \overline{\left(\frac{1}{2\pi i}\frac{d}{d\tau}\log(\Delta^{\delta\beta}(\tau))\right)} d\bar\tau \wedge d\tau\,.$$

Mais nous avions calculé la dérivée logarithmique du discriminant modulaire augmenté et, à l'aide de la formule de Kronecker, le logarithme de sa valeur absolue (proposition 3.1.1 et 3.3.2) de sorte que

$$I = -8i\pi^3 \int_{X_0(N)} f(\tau)\ E_0[\alpha]_0(\tau,1)\ \overline{E_2^*[\delta\beta]_2(\tau)}\, d\bar\tau \wedge d\tau$$

où E_0 est la série d'Eisenstein réelle associée au groupe $\Gamma_0(N)$ et E_2^* est la série d'Eisentein faiblement modulaire de poids 2.

L'astuce ici est de développer cette intégrale sur chacune des involutions afin d'utiliser leur propriété d'idempotence. Suivant notre habitude, notons $\alpha = \sum_\lambda \alpha_\lambda w_\lambda$ et considérons la limite lorsque $s \to 1^+$. Le régulateur devient alors

$$\begin{aligned} I &= -8i\pi^3 \lim_{s\to1^+}\left(\int_{X_0(N)} f(\tau)\ E_0[\alpha]_0(\tau,s)\ \overline{E_2^*[\delta\beta]_2(\tau)}\, d\bar\tau \wedge d\tau\right) \\ &= -8i\pi^3 \lim_{s\to1^+}\left(\sum_{\lambda|N}\alpha_\lambda \int_{X_0(N)} f(\tau)\ E_0(w_\lambda\cdot\tau,s)\ \overline{E_2^*[\delta\beta]_2(\tau)}\, d\bar\tau \wedge d\tau\right)\ .\end{aligned}$$

Pour chacune de ces intégrales, appliquons le changement de variable $\tau \rightsquigarrow w_\lambda\cdot\tau$ de sorte que la différentielle devienne

$$d\big(\overline{w_\lambda\cdot\tau}\big) \wedge d\big(w_\lambda\cdot\tau\big) = \overline{j_{w_\lambda}(\tau)}^{-2} j_{w_\lambda}(\tau)^{-2}\, d\bar\tau \wedge d\tau\,,$$

pour obtenir

$$I = -8i\pi^3 \lim_{s\to1^+}\left(\sum_{\lambda|N}\alpha_\lambda \int_{X_0(N)} f[w_\lambda]_2(\tau)\ E_0(\tau,s)\ \overline{E_2^*[\delta\beta w_\lambda]_2(\tau)}\, d\bar\tau \wedge d\tau\right)\ .$$

Puisque f est une fonction propre pour les involutions d'Atkin-Lehner, ramenons ses valeurs propres dans les coefficients de α, c'est-à-dire que nous aurons plutôt $\Psi_f(\alpha)$. Nous obtenons

$$I = -8i\pi^3 \lim_{s\to1^+}\left(\int_{X_0(N)} f(\tau)\ E_0(\tau,s)\ \overline{E_2^*[\delta\beta\Psi_f(\alpha)]_2(\tau)}\, d\bar\tau \wedge d\tau\right)$$

et sous les coordonnées $x = \mathrm{Re}(\tau)$ et $y = \mathrm{Im}(\tau)$, le régulateur est

$$I = 16\pi^3 \lim_{s\to 1^+} \left(\int_{X_0(N)} \mathrm{Im}(\tau)^2 \ f(\tau) \ E_0(\tau, s) \ \overline{E_2^*[\delta\beta\Psi_f(\alpha)]_2(\tau)} \, \frac{dx \wedge dy}{y^2} \right) .$$

Cette dernière intégrale peut s'écrire comme la convolution des fonctions L de f et de $E_2^*[\delta\beta\Psi_f(\alpha)]_2$ comme nous l'avions vu à la section 4.2 sur la méthode de Rankin-Selberg. Nous avons alors

$$\begin{aligned} I &= 16\pi^3 \lim_{s\to 1^+} \left(\frac{\Gamma(s+1)}{(4\pi)^{s+1}} L_f \otimes \overline{L_{E_2^*[\delta\beta\Psi_f(\alpha)]_2}}(s+1) \right) \\ &= \pi \, L_f \otimes \overline{L_{E_2^*[\delta\beta\Psi_f(\alpha)]_2}}(2) \\ &= \pi \, L_f \otimes L_{E_2^*[\delta\beta\Psi_f(\alpha)]_2}(2) \ . \end{aligned}$$

Finalement, à la fin de la section 4.1 (équation 4.1.6), nous avions calculé la convolution entre une forme primitive et une transformée de E_2^* ce qui nous donne bien

$$I = -\frac{144N}{\pi} \epsilon\big(\delta\beta\Psi_f(w_N\delta\alpha)\big) \, L_f(2) \, L_f(1) \ .$$

Pour terminer la preuve, il suffit de remarquer que $\epsilon \circ \Psi_f = \epsilon$ puisque la valeur propre par l'identié est évidemment 1 et que $\Psi_f^2 = 1$, car les valeurs propres de f par les involutions ne peuvent être que 1 ou -1. □

Avant de passer à la prochaine section, rappelons les étapes importantes de ce calcul. D'abord, nous avons considéré le régulateur sur des fonctions normalisées pour obtenir un élément de K-théorie. Malgré cette normalisation, la première étape du calcul consistait à éliminer les constantes multiplicatives de sorte que le résultat ne dépende pas de la normalisation. En fait, en éliminant ces constantes, nous avons en quelque sorte vérifié que le régulateur ne dépend pas des valeurs de fonctions considérées, mais plutôt de ses diviseurs. Un résultat plus général trace d'ailleurs un lien entre le régulateur et le dilogarithme s'exprimant uniquement en terme des diviseurs (Bloch, 2000). Par la suite, nous avons utilisé les propriétés des discriminants modulaires augmentés et des involutions d'Atkin-Lehner pour ramener le régulateur sous la forme d'une intégrale de Rankin-Selberg, ce qui nous a fourni un coefficient rationnel qui dépend non seulement de l'élément de K-théorie, mais aussi de la forme primitive. Finalement, en utilisant la méthode de Rankin-Selberg, nous avons pu passer aux séries L et obtenir notre résultat.

5.4. EXEMPLE

Dans cette section, nous suivrons l'exemple de Mellit (2012) afin d'obtenir une relation concrète. Considérons ainsi la courbe elliptique donnée en coordonnées affines par

$$E : y^2 + 5xy + 7y = x^3 \tag{5.4.1}$$

et notons $\mathcal{O}$ l'unique point à l'infini dans la fermeture projective de cette courbe.

Puisqu'il s'agit d'une courbe elliptique définie sur les rationnels, nous pouvons appliquer le théorème de modularité. Ce théorème exprime non seulement une paramétrisation modulaire de E, mais également un lien entre la fonction L associée à E et une certaine forme primitive. Plus particulièrement pour notre cas, la paramétrisation est donnée par

$$\varphi : X_0(14) \to E$$

où φ est de degré 1 (Cremona, 2014). De plus, si ω est la forme différentielle invariante[4] sur E et que nous notons la série L associée à E par

$$L_E(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s},$$

alors le tiré de ω par φ est donné par

$$\varphi^* \omega = 2\pi i\, f(\tau)\, d\tau$$

où f est une certaine forme primitive de poid 2 pour $\Gamma_0(14)$ donnée par

$$f(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n .$$

En particulier, les séries L associées à f et à E sont identiques.

Puisque φ est de degré 1, il s'agit d'un isomorphisme et la courbe elliptique est isomorphe à la courbe modulaire. Si nous appliquons la formule du théorème 5.3.1, nous pourrons ainsi exprimer le régulateur en terme de la série L associée à la courbe elliptique.

Les premiers termes des séries de Laurent de la paramétrisation modulaire, ainsi que ceux de f, peuvent être calculés à l'aide de PARI/GP

$$\varphi^* x = q^{-2} + q^{-1} + 2q + 2q^2 + 3q^3 + 4q^4 - 2q^5 - q^6 + q^7 + \cdots \tag{5.4.2}$$

$$\varphi^* y = -q^{-3} - 4q^{-2} - 6q^{-1} - 8 - 13q - 12q^2 - 14q^3 - 20q^4 - 2q^5 + \cdots \tag{5.4.3}$$

$$f = q - q^2 - 2q^3 + q^4 + 2q^6 + q^7 - q^8 + q^9 + \cdots . \tag{5.4.4}$$

Pour appliquer la discussion à la fin de la section 5.1 et obtenir des éléments de K-théorie, nous aurons besoin de points de torsion. Considérons donc les points

$$P = (0, 0) \qquad \text{et} \qquad Q = (-1, -1) \tag{5.4.5}$$

[4]Voir la section III.5 du livre de Silverman (2000) pour tous les détails sur cette forme.

qui sont respectivements d'ordre 3 et 2. Nous pouvons vérifier que ces points apparaissent comme les diviseurs des fonctions

$$\operatorname{div}(y) = 3\,(P) - 3\,(\mathcal{O}) \qquad \text{et} \qquad \operatorname{div}(x+1) = 2\,(Q) - 2\,(\mathcal{O})\,. \tag{5.4.6}$$

Remarquons que l'existence de telles fonctions nous était garantie par le fait que le groupe E est isomorphe au groupe de Picard de E comme variété algébrique (corollaire III.3.5 du livre de Silverman (2000)). Notre discussion à la fin de la section 5.1 nous assure que y et $x+1$ peuvent être normalisées pour obtenir un élément de $K_2^{\partial}(E)$. Puisque nous avions vu que les constantes multiplicatives n'affectent pas la valeur du régulateur, nous abuserons les notations et écrirons $r(\{x+1, y\})$, en gardant à l'esprit qu'une normalisation serait nécessaire pour obtenir des éléments de $K_2^{\partial}(E)$.

Intéressons nous maintenant aux dérivées logarithmiques des tirés de ces fonctions, c'est-à-dire

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{d}{d\tau}\log(\varphi^* y) = -3 + 4q - 4q^2 + 16q^3 - 20q^4 + 24q^5 + \cdots \tag{5.4.7}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{d}{d\tau}\log\big(\varphi^*\left(x+1\right)\big) = -2 + q + q^2 + 4q^3 + q^4 + 6q^5 + \cdots \tag{5.4.8}$$

Remarquons qu'en changeant de variable, $\frac{1}{2\pi i}\frac{d}{d\tau} = q\frac{d}{dq}$ et que ces dérivées logarithmiques ne sont plus invariantes par $\Gamma_0(14)$, mais bien modulaires de poid 2. Or, $\mathcal{M}_2(\Gamma_0(14))$ est un espace vectoriel de dimension 4. En effet, si nous notons g pour le genre de $X_0(14)$ et ε_∞ pour le nombre de pointes, le théorème 3.5.1 du livre de Diamond et Shurman (2006) indique que la dimension de cet espace est

$$\dim \mathcal{M}_2(\Gamma_0(14)) = g - 1 + \varepsilon_\infty\,. \tag{5.4.9}$$

Puisque les pointes s'obtiennent des involutions d'Atkin-Lehner et que ces dernières sont en bijection avec le nombre de diviseurs de 14 (proposition 2.2.2), nous trouvons $\varepsilon_\infty = 4$. La courbe modulaire $X_0(14)$ étant isomorphe à E qui est de genre 1, nous obtenons bien que la dimension est 4.

Pour exprimer la dérivé logarithmique des tirés de nos fonctions, nous pourrions construire une base de $\mathcal{M}_2(\Gamma_0(14))$ en considérant quatre transformées du type $E_2^*[\alpha]_2$ pour $\alpha \in \mathbb{Q}[\mathbb{AT}]_0$ une somme formelle d'involutions d'Atkin-Lehner dont la somme des coefficients est nulle. Il faudrait ensuite calculer une expression pour les dérivées logarithmiques dans cette base. Mais puisque le crochet est linéaire, ce processus est équivalent à trouver directement des α exprimant les dérivées logarithmiques.

Rappelons qu'à la section 3.1 nous avions vu que si nous notions $\alpha = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \alpha_7 w_7 + \alpha_{14} w_{14}$, alors

$$E_2^*[\alpha]_2 = \alpha_1\,E_2(\tau) + 2\alpha_2\,E_2(2\tau) + 7\alpha_7\,E_2(7\tau) + 14\alpha_{14}\,E_2(14\tau) \tag{5.4.10}$$

où

$$\begin{aligned} E_2(\tau) &= 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n)\, q^n \\ &= 1 - 24q - 72q^2 - 96q^3 - 168q^4 - 144q^5 - 288q^6 - 192q^7 + \cdots . \end{aligned} \tag{5.4.11}$$

Par conséquent, en considérant les termes 1, 2, 7, et 14 des séries de Laurent, nous obtenons un système permettant d'obtenir les coefficients voulus. Nous avons ainsi

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{d}{d\tau}\log(\varphi^* y) = -\frac{1}{6}\left(E_2(\tau) - 4E_2(2\tau) - 7E_2(7\tau) + 28E_2(14\tau)\right) \tag{5.4.12}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{d}{d\tau}\log(\varphi^*(x+1)) = -\frac{1}{24}\left(E_2(\tau) - 2E_2(2\tau) - 49E_2(7\tau) + 98E_2(14\tau)\right)\ , \tag{5.4.13}$$

et en posant

$$\alpha = -\frac{1}{6}\left(w_1 - 2w_2\right)\left(w_1 - w_7\right) \tag{5.4.14}$$

$$\beta = -\frac{1}{24}\left(w_1 - w_2\right)\left(w_1 - 7w_7\right)\ , \tag{5.4.15}$$

ces relations deviennent

$$E_2^*[\alpha]_2 = \frac{1}{2\pi i}\frac{d}{d\tau}\log(\varphi^* y) \tag{5.4.16}$$

$$E_2^*[\beta]_2 = \frac{1}{2\pi i}\frac{d}{d\tau}\log(\varphi^*(x+1))\ . \tag{5.4.17}$$

D'un autre côté, nous avions exprimé la dérivée logarithmique du discriminant modulaire augmenté en terme de E_2^* (section 3.1). Nous avons donc les égalités

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i}\frac{d}{d\tau}\log(\Delta^\alpha(\tau)) &= \frac{1}{2\pi i}\frac{d}{d\tau}\log(\varphi^* y) \\ \frac{1}{2\pi i}\frac{d}{d\tau}\log\left(\Delta^\beta(\tau)\right) &= \frac{1}{2\pi i}\frac{d}{d\tau}\log\left(\varphi^*\left(x+1\right)\right) \end{aligned}$$

et il existe des constantes C_α et C_β telles que

$$C_\alpha \Delta^\alpha = \varphi^* y \qquad\qquad C_\beta \Delta^\beta = \varphi^*\left(x+1\right)\ , \tag{5.4.18}$$

mais comme nous l'avions observé à la suite du théorème principal (théorème 5.3.1), ces constantes n'affecterons pas la valeur du régulateur et nous abuserons encore une fois les notations en les omettant lorsque nous évaluerons le régulateur. Afin d'appliquer notre théorème, il ne nous reste qu'à trouver les valeurs propres de f sous les involutions d'Atkin-Lehner. Nous pouvons utiliser directement la proposition 2.3.9 qui indique que

$$f[w_2]_2 = -a_2\, f = f\,, \qquad\qquad f[w_7]_2 = -a_7\, f = -f\,.$$

Nous pouvons maintenant appliquer notre théorème 5.3.1 en reprenant ses notations, ce qui nous donne

$$\begin{aligned}\left\langle r(\{x+1,y\}),\omega\right\rangle &= \left\langle r\left(\left\{\Delta^{\alpha},\Delta^{\beta}\right\}\right), 2\pi i\, f(\tau)\, d\tau\right\rangle \\ &= -\frac{2016}{\pi}\epsilon(w_{14}\alpha\Psi_f(\beta))\, L_f(2)\, L_f(1)\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}\epsilon(w_{14}\alpha\Psi_f(\beta)) &= \frac{1}{144}\epsilon\left(w_{14}\left(w_1-2w_2\right)\left(w_1-w_7\right)\left(w_1-w_2\right)\left(w_1+7w_7\right)\right) \\ &= \frac{1}{144}\epsilon\left(w_{14}\left(3w_1-3w_2\right)\left(6w_1-6w_7\right)\right) \\ &= -\frac{1}{144}\epsilon\left(w_{14}\left(3w_1-3w_2\right)\left(6w_1-6w_7\right)\right) \\ &= -\frac{1}{8}\epsilon\left(w_{14}\left(w_1-w_2\right)\left(w_1-w_7\right)\right) = -\frac{1}{8}\end{aligned}$$

ce qui nous donne finalement

$$\left\langle r(\{x+1,y\}),\omega\right\rangle = \frac{252}{\pi}L_f(2)\, L_f(1) = \frac{252}{\pi}L_E(2)\, L_E(1)\ . \tag{5.4.19}$$

Chapitre 6

CONCLUSION

6.1. Relation avec la Mesure de Mahler

Pour conclure ce document et fournir des nouvelles avenues de recherche, nous détaillons la relation entre le régulateur et la mesure de Mahler que nous avions brièvement discuté en introduction. Cette relation encore récente (Villegas, 1999) constitue un domaine de recherche actif où plusieurs identités numériquement vérifiées suggèrent des liens profonds entre la mesure de Mahler, les valeurs spéciales des fonctions L et les régulateurs.

Si $P \in \mathbb{C}[x, y]$ est un polynôme, la *mesure de Mahler (logarithmique) de* P est donnée par l'intégrale

$$m(P) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \log|P(x, y)| \, \frac{dx}{x} \frac{dy}{y} \tag{6.1.1}$$

où $\mathbb{T}^2$ est le tore de dimension 2,

$$\mathbb{T}^k = \left\{ (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{C}^k \;\middle|\; |x_1| = 1 \, , \, \ldots , |x_k| = 1 \right\} . \tag{6.1.2}$$

Afin de lier notre discussion avec les résultats précédents, nous supposerons que l'équation affine $P(x, y) = 0$ définit une courbe elliptique que nous noterons E. Pour simplifier, nous supposerons aussi que cette dernière est écrite sous la forme de Weierstrass, c'est-à-dire

$$P(x, y) = y^2 + a_1 xy + a_3 y - \left(x^3 + a_2 x^2 + a_4 x + a_6\right) .$$

En utilisant la formule de Jensen issue de l'analyse complexe, il est possible d'exprimer la mesure de Mahler à l'aide du régulateur. Cette formule indique en particulier que pour n'importe quel $\alpha \in \mathbb{C}$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log\left|e^{i\theta} - \alpha\right| d\theta = \log\left(\max\left\{1, |\alpha|\right\}\right) . \tag{6.1.3}$$

En considérant P comme un polynôme quadratique en y, nous pouvons toujours écrire

$$P(x,y) = \big(y - y_1(x)\big)\big(y - y_2(x)\big) \ . \tag{6.1.4}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} m(P) &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{T}^2} \log|P(x,y)| \frac{dx}{x}\frac{dy}{y} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2}\left(\int_{\mathbb{T}^2} \log|y - y_1(x)| \frac{dx}{x}\frac{dy}{y} + \int_{\mathbb{T}} \log|y - y_2(x)| \frac{dx}{x}\frac{dy}{y}\right) . \end{aligned}$$

En posant $y = e^{i\theta}$, nous avons $\frac{dy}{y} = id\theta$ et en intégrant d'abord selon y,

$$\begin{aligned} m(P) &= \frac{i}{2\pi}\left(\int_{\mathbb{T}^1}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|e^{i\theta} - y_1(x)\right| d\theta\right)\frac{dx}{x} + \int_{\mathbb{T}^1}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|e^{i\theta} - y_2(x)\right| d\theta\right)\frac{dx}{x}\right) \\ &= \frac{i}{2\pi}\left(\int_{\mathbb{T}^1}\log\big(\max\{1,|y_1(x)|\}\big)\frac{dx}{x} + \int_{\mathbb{T}^1}\log\big(\max\{1,|y_2(x)|\}\big)\frac{dx}{x}\right) . \end{aligned}$$

Si nous posons γ comme le chemin donné par

$$\gamma = \left\{ (x,y) \in \mathbb{C}^2 \ \middle|\ P(x,y) = 0,\ |x| = 1,\ |y| \geqslant 1 \right\} , \tag{6.1.5}$$

nous pouvons réécrire la mesure de Mahler comme

$$m(P) = \frac{i}{2\pi}\int_\gamma \log|y| \frac{dx}{x} .$$

Puisque $\log|x|$ est identiquement nul le long de γ, nous avons

$$\frac{dx}{x} = d\log(x) = d\log|x| + i d\arg(x) = i d\arg(x) , \tag{6.1.6}$$

et, toujours en utilisant que $\log|x|$ est nul le long de γ, nous obtenons bien

$$m(P) = \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \log|x|\, d\arg(y) - \log|y|\, d\arg(x) = \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \eta(x,y) . \tag{6.1.7}$$

Sous cette forme, il est clair que la mesure de Mahler peut s'obtenir à partir du régulateur de E, mais cela n'est possible que dans certains cas. En effet, rien dans ce qui précède ne nous garantit que $\{x,y\} \in K_2^{\partial}(E)$, ni même que γ est un lacet. Certaines conditions nécessaires pour ces deux situations ont déjà été établies par Villegas (1999) en considérant des familles de polynômes dites tempérées. Pour les polynômes de ces familles, γ représente alors en homologie un cycle générant $H_1(E;\mathbb{Z})^-$, le sous-groupe de $H_1(E;\mathbb{Z})$ où l'action de la conjugaison complexe correspond à la multiplication par -1. (Voir, par exemple, le court article de Rodriguez-Villegas (2006)).

Si nous reprenons l'exemple du chapitre précédent (5.4.19), le polynôme qui définissait la courbe elliptique est un exemple issue d'une de ces familles tempérées et il est possible de vérifier (Mellit, 2012) que

$$\begin{aligned} m\big(y^2+5xy+7y-x^3\big) &= \frac{1}{12\pi L_E(1)}\left\langle r(\{x,y\}),\omega\right\rangle \\ &= \frac{1}{12\pi L_E(1)}\left\langle r(\{x+1,y\}),\omega\right\rangle \ . \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$m\big(y^2+5xy+7y-x^3\big) = \frac{21}{\pi^2}\, L_E(2)\ . \tag{6.1.8}$$

Plusieurs questions reliant la mesure de Mahler et les valeurs spéciales des fonctions L demeurent. L'intérêt d'obtenir ce genre de relation réside dans l'importance des séries L en théorie des nombres et en géométrie algébrique. En effet, ces dernières sont construites à partir de renseignements[1] géométriques sur la courbe où chacun est facile à obtenir, mais pour lesquels il n'est pas évident de trouver une formule générale. Or, plusieurs propriétés géométriques, et même algébriques, de la courbe se retrouvent encodées (ou conjecturellement encodées) dans sa série L sous la forme d'informations analytiques. Par exemple, citons la célèbre conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer qui énonce que le rang d'une courbe elliptique coïncide avec l'ordre en zéro de sa fonction L. Notre résultat principal, en obtenant une relation entre le régulateur et les valeurs spéciales des séries L, permet donc d'obtenir une autre forme pour traiter des séries L, ce qui se traduit par plus de renseignements sur les séries L, d'une part en offrant la possibilité de considérer la mesure de Mahler, ou plus directement si l'on étudie les régulateurs et la K-théorie.

[1]Les séries L sont obtenues en considérant le nombre de points à coordonnées dans un corps fini sur la courbe.

Bibliographie

Atkin, A. O. L. et J. Lehner. 1970, «Hecke operators on $\Gamma_0(m)$», *Math. Ann.*, vol. 185, p. 134–160.

Bloch, S. 2000, *Higher Regulators, Algebraic K-theory, and Zeta Functions of Elliptic Curves*, CRM monograph series, American Mathematical Society.

Brunault, F. 2006, «Version explicite du théorème de Beilinson pour la courbe modulaire», *Comptes Rendus Mathematique*, vol. 343, n° 8, p. 505 – 510.

Conrey, J. B. et H. Iwaniec. 2000, «The cubic moment of central values of automorphic L-functions», *Annals of mathematics*, vol. 151, n° 3, p. 1175–1216.

Cremona, J. 2014, «Elliptic Curve Data», URL `homepages.warwick.ac.uk/~masgaj`.

Diamond, F. et J. Shurman. 2006, *A First Course in Modular Forms*, *Graduate texts in mathematics*, vol. 228, Springer-Verlag.

Dokchitser, T., R. de Jeu et D. Zagier. 2006, «Numerical verification of Beilinson's conjecture for K2 of hyperelliptic curves», *Compositio Mathematica*, vol. 142, p. 339–373.

Dummit, D. S. et R. M. Foote. 2004, *Abstract Algebra*, 3e éd., John Wiley & Sons.

Iwaniec, H. 1997, *Topics in Classical Automorphic Forms*, *Graduate studies in mathematics*, vol. 17, American Mathematical Society.

Koblitz, N. 1993, *Introduction to Elliptic Curves and Modular Forms Second Edition*, *Graduate texts in mathematics*, vol. 97, Springer-Verlag.

Lang, S. 1987, *Elliptic Functions*, Graduate Texts in Mathematics, Springer.

Mellit, A. 2012, «Elliptic dilogarithms and parallel lines», *ArXiv e-prints 1207.4722*.

Milnor, J. 1971, *Introduction to Algebraic K-theory*, Annals of mathematics studies, Princeton University Press.

Rodriguez-Villegas, F. 2006, «Identities between Mahler measures», *ArXiv e-prints math/0612670*.

Rudin, W. 1987, *Analyse réelle et complexe*, troisième éd., Sciences sup, Dunod.

Serre, J.-P. 1970, *Cours d'arithmétique*, *Le mathématicien*, vol. 2, Presse universitaire de France.

Silverman, J. H. 2000, *The Arithmetic of Elliptic Curves*, *Graduate Texts in Mathematics*, vol. 106, 2e éd., Springer.

Villegas, F. 1999, «Modular Mahler Measures I», dans *Topics in Number Theory*, *Mathematics and Its Applications*, vol. 467, édité par S. Ahlgren, G. Andrews et K. Ono, Springer US, p. 17–48.

Zagier, D. 1992, «Introduction to modular forms», dans *From number theory to physics (Les Houches, 1989)*, Springer, Berlin, p. 238–291.