

矩阵的半张量积: 一个便捷的新工具

程代展, 赵寅

中国科学院数学与系统科学研究院系统科学研究所, 北京 100190

E-mail: dcheng@iss.ac.cn

2011-06-26 收稿, 2011-08-17 接受

摘要 矩阵的半张量积是一种新的矩阵乘法. 它将普通矩阵乘法推广到前阵列数与后阵行数不等的情况. 推广后的乘法不仅保持了原矩阵乘法的主要性质, 而且, 具有伪交换性等比推广前更好的性质. 因此, 这是一个便捷而有力的新的数学工具. 在简单介绍它的历史、定义和主要性质之后, 本文对半张量积的本质及其优越性进行了分析, 从而揭示它的合理性及有效性. 接着, 着重介绍它在若干领域的应用. 包括(1) 非线性(控制)系统的半张量积方法; (2) 布尔网络的结构分析与控制; (3) 半张量积在数学、物理中的其他应用. 最后, 本文对目前在研及可能突破的问题作了一个较详细的介绍, 并对其潜在应用前景作了展望.

关键词

半张量积
动态系统
布尔网络
李代数
生物系统
泛代数

矩阵论不仅在各数学学科, 同时也在许多自然科学领域的分析和研究中发挥着重要作用. 在系统与控制理论中更是如此, 这一点可以从黄琳院士著作^[1]中看出. 此外, 矩阵还是数值计算的基础, 在计算机时代, 它起着一种不可替代的核心作用. 但是, 矩阵也不是万能的. 熟悉线性代数的人都知道, 矩阵对处理一维数组(线性函数)和二维数组(双线性函数或二次型)十分有效. 但在处理三维数组时, 直接使用矩阵方法就很困难. 一个自然的想法就是把三维数组摆成立方体. 立体阵的概念最早由 Bates 和 Watts 提出^[2,3]. 随后, 文献[4]对其进行了初步整理, 1986 年我国学者韦博成在其基础上进行了系统的总结和扩充^[5]. 文献[6]中有一个简明的综合介绍. 立体阵在统计中得到一些成功的应用. 但由于它需要引入许多新的运算规则, 使用起来不甚方便. 对于四维或更高维的数组运算, 立体阵更无能为力了. 对此, 我国学者张应山提出了多边矩阵理论^[7], 这是一个创新性的工作, 但由于其计算过于复杂, 没有得到广泛推广.

为了将矩阵方法应用于多线性乃至非线性问题的计算, 从而使计算机和数值方法更方便地应用于非线性系统或更一般的非线性问题的求解, 多线性

函数的矩阵表示成为一个无法绕行的瓶颈问题. 我们研究小组从 1997 年开始思考这个问题. 我们从高维数据在计算机内的存储得到启示: 高维数据在计算机内不必排成立方阵或更高维空间阵的形式, 它们实际上只是排成一个长列. 那么, 它的层次结构如何得到反映呢? C 语言比较反映问题的关键, 它实际上是用“指针”, “指针的指针”, “指针的指针的指针”… 来标识数据的层次结构. 那么, 如果能找到一种运算规则, 它能让每个数组变量自动找到它所对应的数据的层次的指针, 不就可以解决高维数据的排列问题了吗? 这就是矩阵半张量积的原始出发点. 后来发现, 满足这个要求的矩阵乘法——矩阵半张量积的定义极其简单而自然, 它完全掩盖了最初的动机和出发点, 而人们常常因其简单而忽略了它强烈的内在合理性. 读者不妨回头看看它和立体阵的比较^[8].

1998 年清华大学卢强院士与中国科学院系统科学研究所联合申请国家自然科学基金交叉重点项目: 电力系统非线性鲁棒稳定控制代数化几何方法及工程应用. 其理论设想就是发展矩阵半张量积方法, 并用以实现非线性控制系统几何理论中常用的李导数、张量场等非线性计算. 在该项目完成过程中, 矩阵半张

量积的框架逐步形成. 但是, 将一个新的矩阵乘法推向世界是一个艰难的过程, 几乎没有人相信在矩阵乘法这样一个初等概念上会有有意义的突破. 在多次失败的尝试后, 我们尝试将基本概念结合应用问题推出. 第一篇关于矩阵半张量积的文章是结合非线性系统的 Morgan 问题数值解而提出的^[9]. 接着, 文献[10]中给出了关于半张量积较系统的介绍.

此后, 结合电力系统稳定域、非线性控制设计、以及其他数学物理等问题, 矩阵半张量积理论与方法得到应用和发展. 本文以下将对这部分工作做一详细介绍. 在这些工作的基础上出版了一本专著^[11], 属《现代数学基础丛书》中的一本. 关于半张量积的一个简明综述在 2007 年世界华人数学家大会上做了 45 min 报告^[12].

在专著[11]中有一章, 是关于逻辑的半张量积表示. 这个工作的初衷是一种纯数学的兴趣. 我们曾试图将其应用于模糊控制^[13,14], 但不是很成功, 原因是当时我们对模糊控制缺乏深入研究而非方法本身. 2008 年初, 作者在香港第三次中瑞双边控制会议上听到一个关于布尔网络的报告. 当即感到矩阵半张量积, 特别是逻辑的矩阵表示, 可能成为分析布尔网络的拓扑结构的有效工具. 此后三年, 半张量积在布尔网络的研究中取得较大进展, 初步形成了布尔网络控制理论的完整框架, 相应结果形成专著^[15]. 这些工作将在后文中详述. 清华大学梅生伟教授等继续在半张量积的电力系统应用方面工作, 得到一系列新成果^[16].

本文的目的有两个: 其一是将这个方法介绍给读者. 相信这是一个有力的工具. 并且, 这是一个新的方向, 有太多等待解决的问题和太多可以预见的应用. 希望有更多同行学者参与这方面的研究. 其二是对半张量积及相关研究作一反思和梳理. 明确矩阵半张量积的内涵、定位、下一步的发展和可能的突破点.

1 矩阵的半张量积

定义 1 设 $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$, $B \in \mathcal{M}_{p \times q}$. 记 n 与 p 的最小公倍数为 $t = l \text{ cm}\{n, p\}$. 定义 A 与 B 的半张量积为

$$A \times B = (A \otimes I_{t/n}) (B \otimes I_{t/p}). \quad (1)$$

这里 $\mathcal{M}_{m \times n}$ 表示所有 $m \times n$ 矩阵的集合, \otimes 是矩阵的 Kronecker 积^[17].

为叙述方便, 我们称 A 与 B 是等维数的, 如果 $n = p$; 倍维数的, 如果 $n|p$ 或者 $p|n$, 其中 $n|p$ 指 n 可整除 p ; 一般情况, 如果 $n \nmid p$ 且 $p \nmid n$. 定义 1 是对一般情况给出的. 对于等维数的情况, 它退化为普通矩阵乘法. 因此, 半张量积是普通乘法的推广, 并且可以证明, 其保持了普通乘法的所有重要性质. 故在本文中, 在不引起混淆的情况下我们不区分两者, 并将半张量积记号 \times 省略. 倍维数半张量积是最常用的. 如果 $n = tp$, 则记 $A \succ_t B$; 如果 $nt = p$, 则记 $A \prec_t B$. 文献[18]给出倍维数时半张量积的一种等价价的直接定义, 它有更明确的物理意义.

在前言中提到, 定义这种新矩阵乘法的初衷是为了解决多线性映射的矩阵表示问题. 下面给出一个张量计算的矩阵(半张量积)表示的例子, 从中可以看出半张量积是如何解决这个问题的. 可以说, 半张量积天生就是用来表示多线性映射的.

例 1 设 \mathcal{V} 为一个 n 维向量空间, $\{e_1, \dots, e_n\}$ 是它的基底, \mathcal{V}^* 是 \mathcal{V} 的对偶空间(即 \mathcal{V} 上的线性函数空间), $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ 是它关于 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 的对偶基底, 满足

$$e_i^*(e_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

在这对基底下, 向量 $X \in \mathcal{V}$ 可表示为一个 n 维列向量, 对偶向量 $\omega \in \mathcal{V}^*$ 可表示为一个 n 维行向量. 即

$$X = \sum_{i=1}^n a_i e_i := (a_1, \dots, a_n)^T, \quad \omega = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i^* := (\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

一个张量 t 是一个多线性函数:

$$t: \underbrace{\mathcal{V} \times \dots \times \mathcal{V}}_r \times \underbrace{\mathcal{V}^* \times \dots \times \mathcal{V}^*}_s \rightarrow \mathbb{R},$$

r 称为它的协变阶, s 称为它的逆变阶^[19].

定义 t 的一组结构常数为

$$r_{j_1 j_2 \dots j_s}^{i_1 i_2 \dots i_r} := t(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_r}, e_{j_1}^*, e_{j_2}^*, \dots, e_{j_s}^*),$$

$$i_p, j_q = 1, \dots, n, \quad p = 1, \dots, r, \quad q = 1, \dots, s.$$

我们可构造一个矩阵, 称为 t 的结构矩阵, 如下:

$$M_t = \begin{bmatrix} r_{11 \dots 1}^{11 \dots 1} & r_{11 \dots 1}^{11 \dots 2} & \dots & r_{11 \dots 1}^{11 \dots n} \\ r_{11 \dots 2}^{11 \dots 1} & r_{11 \dots 2}^{11 \dots 2} & \dots & r_{11 \dots 2}^{11 \dots n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m \dots n}^{11 \dots 1} & r_{m \dots n}^{11 \dots 2} & \dots & r_{m \dots n}^{11 \dots n} \end{bmatrix}.$$

那么

$$t(X_1, \dots, X_r, \omega_1, \dots, \omega_s) = \omega_s \times \omega_{s-1} \times \dots \times \omega_1 \times M_t \times X_1 \times X_2 \times \dots \times X_r. \quad (2)$$

为进一步刻画和应用半张量积, 我们定义换位

矩阵如下.

定义 2 换位矩阵 $W_{[m,n]} \in \mathcal{M}_{mn \times mn}$ 定义如下: 用双指标 $(11,12,\dots,1n,\dots,m1,m2,\dots,mm)$ 标注它的列, 用双指标 $(11,21,\dots,m1,\dots,1n,2n,\dots,mm)$ 标注它的行. 它在 (I,J) 行及 (i,j) 列处的元素定义为

$$w_{(I,J),(i,j)} = \delta_{i,j}^{I,J} = \begin{cases} 1, & I=i \text{ 且 } J=j, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (3)$$

换位矩阵最初的定义方式很不一样, 见文献[20]. 当 $m=n$ 时 $W_{[n,n]}$ 简记作 $W_{[n]}$. 可以证明换位矩阵是正交阵, 即 $W_{[m,n]}^T = W_{[m,n]}^{-1} = W_{[n,m]}$.

它的主要作用是交换两个向量的位置.

命题 1 (1) 设有两列向量 $X \in \mathbb{R}^m, Y \in \mathbb{R}^n$, 则

$$W_{[m,n]} \times X \times Y = Y \times X. \quad (4)$$

(2) 设有两行向量 $X \in \mathbb{R}^m, Y \in \mathbb{R}^n$, 则

$$X \times Y \times W_{[m,n]} = Y \times X. \quad (5)$$

下面的性质与上述命题 1 被称为半张量积的伪交换性.

命题 2 给定 $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$.

(1) 设 $Z \in \mathbb{R}^l$ 为一列向量, 则

$$Z \times A = (I_l \otimes A) \times Z. \quad (6)$$

(2) 设 $Z \in \mathbb{R}^l$ 为一行向量, 则

$$A \times Z = Z \times (I_l \otimes A). \quad (7)$$

矩阵乘法与数乘运算相比, 有两个主要的不便之处: (i) 有维数限制, (ii) 乘法不可交换. 从某种意义上讲, 当把矩阵乘积推广到半张量积时, 这两个弱点都得到相当程度的克服. 这些都使推广后的矩阵乘法比经典矩阵乘法更为方便有效. 下面这个例子在一定意义上说明了这一点.

例 2 设 $X, Y, Z, W \in \mathbb{R}^n$ 为四个列向量. 则

$$(XY^T)(ZW^T) \in \mathcal{M}_{n \times n}$$

为一方阵. 因为 $Y^T Z$ 是一个数, 利用结合律, 则有

$$(XY^T)(ZW^T) = X(Y^T Z)W^T = (Y^T Z)XW^T = Y^T(ZX)W^T. \quad (8)$$

这里 ZX 是什么? 这似乎是标准矩阵乘法的一个“漏洞”: 合法的运算导致了非法的表达式. 然而, 在半张量积意义上, ZX 是有定义的. 并且, 不难证明, (8) 式在半张量积的意义下是成立的.

2 非线性动态系统

矩阵半张量积在非线性动力系统及非线性控制系统中的应用是通过非线性函数(映射)的半张量积

实现来完成的. 其关键是多元多项式及其微分的半张量积表示.

2.1 多元多项式的半张量积表示

记 $x = (x_1, \dots, x_n)$ 为 \mathbb{R}^n 的坐标变量. 我们视 x 为一列向量, 即 $x = (x_1, \dots, x_n)^T$. 因此, x^k 是有定义的. 记关于 x 的 k 次齐次多项式集合为 B_n^k . 设 $f(x) \in B_n^k$, 那么 $f(x)$ 可以表示为

$$f(x) = F \times x^k, \quad F \in \mathcal{M}_{1 \times n^k}. \quad (9)$$

x^k 不是 B_n^k 的一个基底, 因为它包括冗余分量, 将其重复分量去掉后, 得到的基底记作 $x_{(k)}$. 例如, 设 $x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$. 那么

$$x^1 = x = (x_1, x_2)^T$$

$$x^2 = (x_1^2, x_1 x_2, x_2 x_1, x_2^2)^T$$

$$x^3 = (x_3, x_1^2 x_2, x_1 x_2 x_1, x_1 x_2^2, x_2 x_1^2, x_2 x_1 x_2, x_2^2 x_1, x_2^3)^T$$

...

$$x_{(1)} = (x_1, x_2)^T$$

$$x_{(2)} = (x_1^2, x_1 x_2, x_2^2)^T$$

$$x_{(3)} = (x_1^3, x_1^2 x_2, x_1 x_2^2, x_2^3)^T$$

...

因为 x^k 计算方便, 而 $x_{(k)}$ 才是实际基底, 我们两者都需要.

一个 k 次齐次多项式 $f(x)$ 可表示如(9)式, 简记为 $f(x) = Fx^k$. 但这里 F 不唯一. F 称为对称的, 如果它对应同类项的系数相等. 例如 $f(x) = x_1^2 - 4x_1 x_2 + x_2^2$, 可表示为

$$f(x) = F_1 x^2 := [1, -2, -2, 1] x^2, \text{ 或}$$

$$f(x) = F_2 x^2 := [1, -3, -1, 1] x^2.$$

这时, F_1 是对称的, 而 F_2 不是.

为转换表达式, 我们定义两个矩阵 $T_B(n, k) \in \mathcal{M}_{s \times n^k}$ 和 $T_N(n, k) \in \mathcal{M}_{n^k \times s}$, 使得

$$x_{(k)} = T_B(n, k)x^k, \quad x^k = T_N(n, k)x_{(k)}. \quad (10)$$

容易检验

$$T_B(n, k)T_N(n, k) = I_s. \quad (11)$$

并且 $T_N(n, k)$ 是唯一的. 要使 $T_B(n, k)$ 唯一, 我们假定 $x_{(k)}$ 的每个分量在表达式 $T_B(n, k)x^k$ 中有对称系数.

考虑多项式乘法. 设 $X = Fx^k, Y = Gx^s$, 这里 $x \in \mathbb{R}^n$. 那么

$$\begin{aligned} XY &= Fx^k Gx^s = F(I_{n^k} \otimes G)x^{k+s} \\ &= F(I_{n^k} \otimes G)T_N(n, k+s)x_{(k+s)}. \end{aligned}$$

设 $X = Fx_{(k)}$, $Y = Gx_{(s)}$, 这里 $x \in \mathbb{R}^n$. 那么

$$\begin{aligned} XY &= FT_B(n, k)x^k GT_B(n, s)x^s \\ &= FT_B(n, k) \left[I_n^k \otimes (GT_B(n, s)) \right] x^{k+s} \\ &= FT_B(n, k) \left[I_n^k \otimes (GT_B(n, s)) \right] T_N(n, k+s)x_{(k+s)}. \end{aligned}$$

下面考虑函数元矩阵的微分.

定义 3 设 $M(x) \in \mathcal{M}_{p \times q}$ 且其元素为 $x \in \mathbb{R}^n$ 的光滑函数. $M(x)$ 的微分, 记作 $DM(x) \in \mathcal{M}_{p \times nq}$, 由用 $M(x)$ 元素的微分代替该元素而得到. 严格地说

$$DM(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial M_{11}(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial M_{11}(x)}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial M_{1n}(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial M_{1n}(x)}{\partial x_n} \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ \frac{\partial M_{n1}(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial M_{n1}(x)}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial M_{nm}(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial M_{nm}(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

对于乘积微分, 有以下关系式:

命题 3 (1) 设 $A(x) \succ_r B(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, 则

$$\begin{aligned} D(A(x) \times B(x)) \\ &= DA(x) \times B(x) + A(x) \times DB(x) \times (I_s \otimes W_{[r, n]}), \end{aligned} \quad (13)$$

这里 s 是 $B(x)$ 的列数.

(2) 设 $A(x) \in \mathcal{M}_{p \times q}$, $A(x) \prec_r B(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, 则

$$D(A(x) \times B(x)) = DA(x) \times (I_q \otimes W_{[r, n]}) \times B(x) + A \times DB(x). \quad (14)$$

特别地, 对普通矩阵乘法有

$$D(A(x)B(x)) = DA(x) \times B(x) + A \times DB(x). \quad (15)$$

高阶矩阵微分定义为

$$D^{k+1}A(x) = D[D^k A(x)], \quad k \geq 1.$$

利用半张量积, 多元函数与一元函数有相同形式的泰勒展式:

定理 1(泰勒展式) 设 $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 为 C^∞ 映射. 则其泰勒展式为

$$F(x) = F(x_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} D^k F(x_0) \times (x - x_0)^k. \quad (16)$$

以下的多元幂函数的微分公式是一个基本关系式.

定理 2 设 $x \in \mathbb{R}^n$, 则

$$D(x^{k+1}) = \Phi_k^n x^k, \quad k \geq 0, \quad (17)$$

这里

$$\Phi_k^n = \sum_{s=0}^k I_n^s \otimes W_{[n^{k-s}, n]}. \quad (18)$$

下面给出几个应用的例子.

2.2 非线性系统的稳定域

考虑一光滑非线性系统

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (19)$$

这里 $f(x)$ 是光滑向量场. 利用泰勒展式, (19) 式可展开成

$$\dot{x} = F_0(0) + \sum_{i=1}^{\infty} F_i x^i, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (20)$$

设 x_e 为系统(19)的一个平衡点. x_e 的稳定与不稳定子流形分别定义为

$$W^s(x_e) = \left\{ p \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{t \rightarrow \infty} x(t, p) \rightarrow x_e \right\}, \quad (21)$$

$$W^u(x_e) = \left\{ p \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t, p) \rightarrow x_e \right\}.$$

设 x_s 为系统(19)的一个稳定平衡点. x_s 的稳定域定义为

$$A(x_s) = \left\{ p \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{t \rightarrow \infty} x(t, p) \rightarrow x_s \right\}. \quad (22)$$

其边界记作 $\partial A(x_s)$.

一个平衡点 x_e 称为双曲型的, 如果 f 在 x_e 点的雅可比矩阵, 记作 $J_f(x_e)$, 没有零实特征根. 一个双曲平衡点称为 k 型的, 如果 $J_f(x_e)$ 带正实部的特征根有 k 个.

文献[21]和[22]证明: 一个稳定平衡点 x_s 的稳定域边界由边界上的不稳定平衡点的稳定子流形合成, 如果

(1) 边界 $\partial A(x_s)$ 上的平衡点是双曲型的;

(2) 边界 $\partial A(x_s)$ 上的平衡点的稳定子流形与不稳定子流形满足横截条件(transversality condition);

(3) 边界 $\partial A(x_s)$ 上的每条轨线当 $t \rightarrow \infty$ 时收敛于某个平衡点.

由于边界是 $n-1$ 维的, 故只需考虑 1 型不稳定平衡点. 利用泰勒展式的半张量积表示, 我们给出 1 型不稳定平衡点稳定子流形的算法.

定理 3 设 $x_u = 0$ 为系统(19)的 1 型平衡点. 其稳定子流形可表示为

$$W^s(e_u) = \{x \mid h(x) = 0\}. \quad (23)$$

这里, $h(x)$ 由以下方程(24)唯一确定:

$$\begin{cases} h(0) = 0, \\ h(x) = \eta^T x + O(\|x\|^2), \\ L_f h(x) = \mu h(x). \end{cases} \quad (24)$$

这里 $L_f h(x)$ 是 $h(x)$ 对于 f 的李导数; η 是 $J_f^T(0)$ 对于它唯一正特征根 μ 的特征向量.

利用半张量积, 可得 $h(x)$ 的二次近似如下:

定理 4 x_u 的稳定子流形方程, $h(x)=0$, 可表示为

$$h(x) = H_1 x + \frac{1}{2} x^T \Psi x + O(\|x\|^3), \quad (25)$$

这里

$$\begin{cases} H_1 = \eta^T \\ \Psi = \mathcal{V}_c^{-1} \left\{ \left[\left(\frac{\mu}{2} I_n - J^T \right) \otimes I_n + I_n \otimes \left(\frac{\mu}{2} I_n - J^T \right) \right]^{-1} \right. \\ \left. \times \mathcal{V}_c \left(\sum_{i=1}^n \eta_i \text{Hess}(f_i(0)) \right) \right\}, \end{cases}$$

记号 μ 和 η 同定理 3, $J := J_f(0) = F_1$, $\text{Hess}(f_i)$ 为 f 的第 i 个分量的海森(Hessian)矩阵.

将 $h(x)$ 的泰勒展式记作

$$h(x) = H_1 x + H_2 x^2 + \dots$$

设系数对称, 即

$$H_k = G_k T_B(n, k), \quad G_k = H_k T_N(n, k). \quad (26)$$

对高阶系数, 我们有

定理 5 设矩阵

$$C_k := \mu I_d - T_B(n, k) \Phi_{k-1} (I_{n^{k-1}} \otimes F_1) T_N(n, k), \quad k \geq 3 \quad (27)$$

非奇异, 则

$$G_k = \left[\sum_{i=1}^{k-1} G_i T_B(n, i) \Phi_{i-1} (I_{n^{i-1}} \otimes F_{k-i+1}) \right] T_N(n, k) C_k^{-1}. \quad (28)$$

细节参见文献[23~27]. 进一步的应用参见文献[28~32].

2.3 非正规反馈线性化

考虑非线性系统

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x) u_i := f(x) + g(x)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m. \quad (29)$$

精确反馈线性化指找到反馈控制

$$u(x) = \alpha(x) + \beta(x)v$$

和一个微分同胚 $z = z(x)$ 使闭环系统成为完全能控线性系统^[33].

若 $\beta(x)$ 为 $m \times m$ 可逆阵, 则控制称为正规反馈控制, 若 $\beta(x)$ 不可逆, 或 $\beta(x) \in \mathcal{M}_{k \times m}$, $k < m$, 则称为非正规反馈控制. 特别是当 $k = 1$ 时, 它称为单输入反馈. 单输入反馈线性化是最一般的^[34]. 我们只考虑这种情况. 记

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1(x) \\ \vdots \\ \alpha_m(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1(x) \\ \vdots \\ \beta_m(x) \end{bmatrix} v,$$

设有自治系统

$$\dot{x} = Ax + F_2 x^2 + F_3 x^3 + \dots \quad (30)$$

设 $\eta_k \in B_n^k$ 且

$$\text{ad}_{Ax} \eta_k = F_k x^k.$$

易证

$$\eta_k = (\Gamma_k^n \odot F_k) x^k, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (31)$$

这里 \odot 是矩阵 Hadamard 积^[35], Γ_k^n 可由下式计算:

$$(\Gamma_k^n)_{ij} = \frac{1}{\left(\sum_{s=1}^n \alpha_s^j \lambda_s \right) - \lambda_i}, \quad i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n^k. \quad (32)$$

这里 $\alpha_1^j, \dots, \alpha_n^j$ 分别为 x^k 的第 j 个分量中 x_1, \dots, x_n 的指数. 例如, 设 $k = 2, n = 3$, 那么

$$x^2 = x_1^2 + x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_1 + x_2^2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 + x_3 x_2 + x_3^2.$$

于是有 $\alpha_1^1 = 2, \alpha_2^1 = 0, \alpha_3^1 = 0; \alpha_1^2 = 1, \alpha_2^2 = 1, \alpha_3^2 = 0; \dots, \alpha_1^3 = 0, \alpha_2^3 = 0, \alpha_3^3 = 2$.

设 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ 为矩阵 A 的特征值. A 称为共鸣的, 如果存在 $m = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}_+^n, |m| \geq 2$, 使得某个特征值

$$\lambda_s = \langle m, \lambda \rangle.$$

于是我们可以得到下面两个定理.

定理 6 设 A 是非共鸣的. 则系统(30)可通过坐标变换 $z = z(x)$ 变为

$$\dot{z} = Az,$$

这里

$$z = x - \sum_{i=2}^{\infty} E_i x^i, \quad (33)$$

其中 E_i 可由如下递推式得到:

$$\begin{aligned} E_2 &= \Gamma_2 \odot F_2 \\ E_s &= \Gamma_s \odot \left(F_s - \sum_{i=2}^{s-1} E_i \Phi_{i-1} (I_{n^{i-1}} \otimes F_{s+1-i}) \right), s \geq 3. \end{aligned} \quad (34)$$

定理 7 系统(29)可单输入线性化, 当且仅当, 存在坐标变换(33)和无零分量的定常向量 b 使得

$$b \in \text{Span} \left\{ \left(I - \sum_{i=2}^{\infty} E_i \Phi_{i-1} x^{i-1} \right) g_j \mid j = 1, \dots, m \right\}. \quad (35)$$

更多的相关结果见文献[34,36].

2.4 非线性控制系统的对称性

考虑解析系统

$$\dot{x} = f_0(x) + \sum_{i=1}^m f_i(x) u_i, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (36)$$

这里 $f_i(x), i = 0, \dots, m$ 为解析向量场. 设 G 为作用于

\mathbb{R}^n (或开集 $M \subset \mathbb{R}^n$) 上的一个李群.

定义 4 系统(36)称为关于 G 状态空间对称, 如果

$$\theta(\alpha)_* f_i(x) = f_i(\theta(\alpha)x), \quad i=0, \dots, m,$$

这里 $\theta(\alpha)_*$ 的导出映射 $\theta(\alpha)$, 它是 \mathbb{R}^n 上的微分同胚. 如果 $G < GL(n, \mathbb{R})$ (即 G 是一般线性群的子群), 则称线性对称.

利用半张量积可证明以下对称性:

定理 8 系统(36) ($n \geq 3$) 关于 $G = SO(n, \mathbb{R})$ 状态空间对称, 当且仅当

$$f_j(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i^j \|x\|^{2i} x, \quad a_i^j \in \mathbb{R}, \quad j=0, 1, \dots, m. \quad (37)$$

利用半张量积得到的更多非线性系统对称性结果可见文献[37,38]. 半张量积在非线性系统控制中还有许多其他应用^[11].

通过以上几个应用不难看出: 应用多元多项式的半张量积表示及函数矩阵微分, 一个非线性多元映射的泰勒展式可表示为与一元映射相同的形式. 再利用多元幂函数的微分公式, 向量场或函数等的李导数运算等可通过矩阵及半张量积实现. 这些方法使矩阵半张量积或矩阵方法成为处理非线性动态系统的一个有力工具. 相关计算的矩阵化又使相应问题易于在计算机上解决.

3 布尔网络的分析与控制

布尔网络最早是由 Kauffman 提出的, 用以描述细胞与基因调控网络^[39]. 随着系统生物学的发展, 它已成为生物学、物理学以及系统与控制科学等学科的一个新研究热点^[40,41]. 半张量积在布尔网络的分析与控制中得到较大进展. 我们先介绍它的基本原理.

一个逻辑变量取值于 $\mathcal{D} := \{0, 1\}$. 常用的 1 元逻辑算子是“非”(\neg , $\neg(0) = 1$, $\neg(1) = 0$). 常用的二元逻辑算子及其真值表见表 1^[42].

为介绍逻辑算子的矩阵表达式, 我们先介绍如下记号:

(1) δ_n^i : 单位阵 I_n 的第 i 列;

表 1 $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ 的真值表

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

(2) Δ_n : $\Delta_n = \{\delta_n^i | i=1, 2, \dots, n\}$, $\Delta := \Delta_2$;

(3) $L \in \mathcal{M}_{m \times r}$ 称为一个逻辑矩阵, 如果其每一列都属于 Δ_m , $m \times r$ 逻辑矩阵全体记作 $\mathcal{L}_{m \times r}$;

(4) 设 L 为一逻辑矩阵, 即 $L \in \mathcal{L}_{m \times r}$, 那么 $L = [\delta_m^{i_1} \delta_m^{i_2} \dots \delta_m^{i_r}]$. 为简洁计, 将它记作

$$L = \delta_m [i_1 \ i_2 \ \dots \ i_r].$$

将 1 等同于 δ_2^1 : $1 \sim \delta_2^1$, 将 0 等同于 δ_2^2 : $0 \sim \delta_2^2$. 于是, 一个逻辑变量 $x \in \Delta$. 在这个向量形式下一个逻辑函数 $f: \mathcal{D}^n \rightarrow \mathcal{D}$ 变为一个映射 $f: \Delta_{2^n} \rightarrow \Delta$. 下面这个定理至关重要^[11].

定理 9 设 $f(x_1, \dots, x_n)$ 为一个逻辑函数, 在向量形式下 $f: \Delta_{2^n} \rightarrow \Delta$. 则存在唯一逻辑矩阵 $M_f \in \mathcal{L}_{2 \times 2^n}$, 称为 f 的结构矩阵, 使得

$$f(x_1, \dots, x_n) = M_f \bowtie x, \quad (38)$$

这里 $x = \bowtie_{i=1}^n x_i$.

下面介绍布尔网络. 图 1 是人类荷尔蒙结构的示意图^[43], 图 2 是抽象出的布尔网络结构示意图. 一个布尔网络就是一个由一组结点, $\mathcal{N} = \{1, 2, \dots, n\}$ 和其上的一组连线, $\mathcal{S} \subset \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ 构成的有向图. 每个结点只能取 0 或 1. 它的动态过程要用下面一组逻辑动态方程来表示.

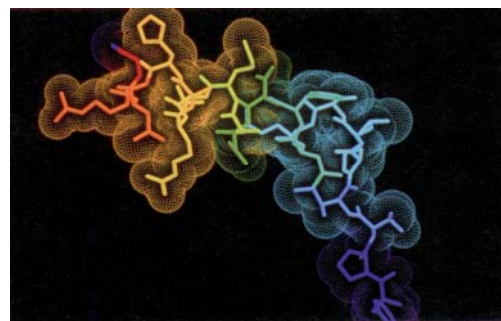


图 1 荷尔蒙结构示意图^[43]

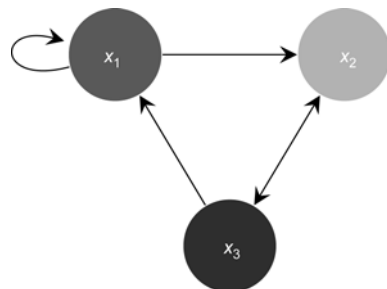


图 2 布尔网络结构示意图

$$\begin{cases} x_1(t+1) = f_1(x_1(t), \dots, x_n(t)), \\ x_2(t+1) = f_2(x_1(t), \dots, x_n(t)), \\ \vdots \\ x_n(t+1) = f_n(x_1(t), \dots, x_n(t)), \end{cases} \quad (39)$$

这里 $x_i(t) \in \mathcal{D}$, $i=1, \dots, n$ 为状态变量, $f_i: \mathcal{D}^n \rightarrow \mathcal{D}$, $i=1, \dots, n$ 为逻辑函数.

利用向量形式及定理 9, 容易证明^[44]:

定理 10 考虑布尔方程(39). 在向量形式下记 $x = \times_{i=1}^n x_i$. 则系统(39)有其代数形式:

$$x(t+1) = Lx(t), \quad (40)$$

这里 $L \in \mathcal{L}_{2^n \times 2^n}$ 为系统转移矩阵, 它是唯一的.

例如, 设图 2 中布尔网络的动态方程为

$$\begin{cases} x_1(t+1) = x_1(t) \wedge x_3(t), \\ x_2(t+1) = x_1(t) \vee x_3(t), \\ x_3(t+1) = x_2(t). \end{cases} \quad (41)$$

那么可以算出其转移矩阵为

$$L = \delta_8 [15265768].$$

通过这种方法, 我们将逻辑系统转化为普通的离散动态系统. 一般而言, 所有的动态演化过程大致可分为两类: 一类是基于数量变化的, 如行星运动、波传播、热传导等. 另一类是基于逻辑过程的, 如博弈、基因调控等. 对前者, 人们发展了大量有效的数学工具来处理它, 如微分方程、差分方程等. 而对后者, 却显得十分无力. 半张量积将逻辑动态(控制)系统转化为普通离散时间系统, 从而使经典数学工具能够用于逻辑系统, 这是一个关键的步骤.

利用这种代数形式我们研究了布尔网络的拓扑结构^[44,45], 与文献[46,47]不同, 我们得到了一般解; 进而得到能控能观的判断和系统实现^[48,49]; 发现了空间与子空间构造及判别方法^[50]; 利用文献[51]提出的方法考虑了布尔网络的稳定和镇定^[52]; 设计最优控制^[53]; 以及控制或非控制布尔网的辨识^[54,55]. 初步形成了确定型布尔网络控制理论^[15]. 这方面的工作得到国际同行很高的评价, 文献[48]获得国际自动控制联合会颁发的 *Automatica* (三年一篇) 最佳理论/方法论奖. 同时, 引发了一系列后继研究^[56-58]. 具体介绍可见布尔网络综述文献[18].

4 在物理及数学中的应用

半张量积在一些数学或物理问题的理论分析中也得到若干有意的应用. 一个有趣的例子是: 张量

场的缩并公式在相对论中很有用, 但因为证明麻烦一般书上都只给出结论而不证明^[59]. 我们用半张量积给出了一个简单证明^[60]. 考虑到读者群的兴趣和篇幅的限制, 我们在这一部分只介绍一个简单结果: 如何用半张量积刻画李代数^[61]. 关于李代数的概念见文献[62]. 这方面的更多应用可参见文献[60,61,63].

设 e_1, \dots, e_n 为有穷维代数 \mathcal{W} 的一个基底. 该代数上的乘法记作 $*$: $\mathcal{W} \times \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$. 记

$$e_i * e_j = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k e_k, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (42)$$

定义 \mathcal{W} 的结构矩阵为

$$M_{\mathcal{W}} = \begin{bmatrix} c_{11}^1 & c_{12}^1 & \dots & c_{1n}^1 & \dots & c_{n1}^1 & c_{n2}^1 & \dots & c_{nn}^1 \\ c_{11}^2 & c_{12}^2 & \dots & c_{1n}^2 & \dots & c_{n1}^2 & c_{n2}^2 & \dots & c_{nn}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{11}^n & c_{12}^n & \dots & c_{1n}^n & \dots & c_{n1}^n & c_{n2}^n & \dots & c_{nn}^n \end{bmatrix}. \quad (43)$$

设 $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \sim (x_1, \dots, x_n)^T$, $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i \sim (y_1, \dots, y_n)^T$,

那么在向量形式下, 利用半张量积可得如下等式:

$$z = x * y = M_{\mathcal{W}} \times x \times y. \quad (44)$$

定义 5 一个代数 \mathcal{W} 称为李代数, 如果它满足

(1) (反对称性)

$$x * y = -y * x, \quad x, y \in \mathcal{W}. \quad (45)$$

(2) (Jacobi 恒等式)

$$x * (y * z) + y * (z * x) + z * (x * y) = 0, \quad x, y, z \in \mathcal{W}. \quad (46)$$

其实, 一个代数的结构矩阵包含了该代数的全部信息. 因此, 只要检验结构矩阵就知道该代数的性质. 例如, 李代数可由如下定理检验.

定理 11 一个代数 \mathcal{W} 是李代数, 当且仅当其结构矩阵满足

(1) (反对称性)

$$M_{\mathcal{W}} (I_{n^2} + W_{[n]}) = 0. \quad (47)$$

(2) (Jacobi 恒等式)

$$M_{\mathcal{W}}^2 (I_{n^2} + W_{[n,n^2]} + W_{[n^2,n]}) = 0. \quad (48)$$

例 3 容易验证, 在 \mathbb{R} 上满足(47)和(48)式的结构矩阵为

$$M_{\mathcal{W}} = \begin{bmatrix} 0 & a & d & -a & 0 & g & -d & -g & 0 \\ 0 & b & e & -b & 0 & h & -e & -h & 0 \\ 0 & c & f & -c & 0 & i & -f & -i & 0 \end{bmatrix},$$

其中, 参数满足

$$\begin{cases} bg + gf - ah - di = 0, \\ ae - bd + hf - ei = 0, \\ af + bi - cd - ch = 0. \end{cases}$$

据此,容易检验, \mathbb{R}^3 上的向量叉积是李代数,同时,文献[60]构造出多个 \mathbb{R}^3 上的李代数.

5 探讨与展望

5.1 解读矩阵的半张量积

矩阵的半张量积使用起来自然、简洁而有效. 研究报告《面向 2020 年的科学》^[64]称:“从计算机支持科学家做传统的科学研究转变为计算机科学嵌入到科学的具体结构和从事科研的方式中,这一转变将会是一项意义重大的根本性变革.”“关键性新概念工具(如微积分)或技术工具(如望远镜、电子显微镜)的发明,构成了曾经在历史和社会进程的科学革命基石的典型代表. 此类概念和技术工具现在正出现在计算机科学、数学、生物学、化学和工程学的交叉领域.” 矩阵的半张量积就是这样的新概念或新工具之一. 它处理高维数组的想法来自计算机内存,它的一个重要目标是要解决多线性及非线性问题在计算机上的一般的矩阵算法,而它的任何一个有意义的例子和应用都必须在计算机上验证或实现. 也许,这就是它难以在缺少计算机的时代出现的原因. 随着科学和技术的发展,多线性及非线性成为科学研究及技术开发中亟待解决的关键问题. 半张量积的内涵是多线性映射的矩阵化,它的难点是计算的复杂性,因此,它为使用计算机解决非线性问题提供了有力工具. 如果把矩阵半张量积理论称为计算机时代的矩阵理论或矩阵算法,大概是有道理的.

5.2 半张量积的潜在应用

十几年来,我们发现半张量积可以用到许多领域,因此,埋头从一个问题接着另一个问题地做. 近来,常有同行,特别是青年学生、学者问及:这方面还有什么问题可研究的? 这提醒我们停下来思考:“半张量积可能在哪些方面有用?”“哪些问题最可能成为下一个生长点?” 这一小节是我们的一些思考.

(i) 半张量积理论的完善. 矩阵的半张量积作为一个新的概念和方法,在理论上还有许多不完善之处,进一步的深入研究是十分必要的. 例如,它与立体积及多边矩阵的关系. 原则上说,半张量积可以方便地进行多线性运算,它完全代替立体积或多边矩阵应当是可行的. 但在具体实现中,特别是立体积等中的一些性质,如向量特征值等,在半张量积中如何体

现?聊城大学研究群体在这方面做了许多工作^[65,66].

半张量积的另一个问题是算法复杂性问题. 这个问题不解决就会成为应用的拦路虎.

(ii) 泛代数. 泛代数是一个很广泛的数学类. 一个集合,上面带有若干运算就可以称为一个泛代数^[67,68]. 群、环、域、集合运算、图、布尔代数、网络等都可以用泛代数来刻画. 从前面的介绍大家也许已注意到,从三维空间的叉积、布尔网络,到有穷维李代数等,都可以用结构矩阵来刻画. 我们初步的探讨发现,只要有有穷分量集上的泛代数,它的每一个运算都可以用一个结构矩阵来表示,从而纳入半张量积的研究范畴. 结构矩阵可望成为泛代数的矩阵表示而将本质不同的集合上的泛代数联系起来.

(iii) 多线性代数. 多线性代数自身有丰富的成果^[69]. 矩阵半张量积本质上是多线性映射的矩阵表示,它的许多性质可以多线性代数中得到,或得到启示. 因此,多线性代数可望成为完善半张量积理论的一个重要工具. 同时,半张量积也应当成为研究多线性代数的一个新工具.

(iv) 布尔函数与布尔矩阵. 布尔函数及其微分在密码学^[70], 线路设计^[71], 等方面有许多应用,同样,布尔矩阵在图论及计算机科学工程也有许多应用^[72]. 矩阵半张量积和它们有天生的密切关系,可望在这些问题的研究中发挥作用.

(v) 博弈论. 在无穷重复博弈中具有有限记忆的策略可以通过半张量积表示为逻辑动态过程^[73,74]. 策略的优化可转化为在策略空间的寻优. 策略空间可表示为一组逻辑矩阵空间. 向量距离^[51]以及布尔矩阵的性质^[72]可望成为讨论逻辑矩阵空间拓扑结构与优化的有力工具. 策略优化可能直接导致 Nash 均衡.

(vi) 系统生物学. Kauffman 提出布尔网络的初衷就是为了研究基因调控网络. 我们后来相对独立地发展了一套布尔网络控制理论. 将它运用于细胞与基因网络,是一个很有吸引力而又可行性很高的研究方向. 它可望揭示基因调控的内在规律.

另一方面,由于人类基因组计划的完成,一本巨大的由 A-T G-C 写成的书正等待着完全的破译. 它与四值逻辑的关系是显然的. 通过半张量积找出 DNA 片断的拓扑结构与遗传信息的关系,相信是值得试一试的合理方向.

将半张量积用于细胞网络目前最大的困难是计

算复杂性. Newman 提出的 Modularity 方法^[75]用于分组逼近, 很可能是一个有效途径.

6 结束语

美国科学院编写的《科学前沿》^[76]一书中有一章标题为: 理论与实验之外, 通过科学计算观察世界. 计算已经成为计算机时代一个新的认识世界的手段. 回顾矩阵半张量积及其应用的研究, 我们相信: 它是

计算机时代对付复杂计算的一个便捷而有力的工具, 具有广泛的应用前景. 本文介绍的只是我们相关工作的一部分. 除我们之外, 国内还有一些单位的专家们在这方面工作, 如清华大学、山东大学、同济大学、北京大学、聊城大学、哈尔滨工程大学等, 国外的有以色列 Tel Aviv 大学、英国 Glasgow 大学等. 相信矩阵半张量积会在许多领域得到更广泛的应用, 希望本文能引起更多学者的注意和参与.

参考文献

- 1 黄琳. 系统与控制科学中的线性代数. 北京: 科学出版社, 2004
- 2 Bates D M, Watts D G. Relative curvature measure of nonlinearity. *J R Statist Soc B*, 1980, 42: 1–25
- 3 Bates D M, Watts D G. Parameter transformations for improved approximate confidence regions in nonlinear least squares. *Ann Statist*, 1981, 9: 1152–1167
- 4 Tsai C L. Contributions to the design and analysis of nonlinear models. Doctoral Dissertation. Minneapolis: University of Minnesota, 1983
- 5 韦博成. 非线性回归模型 LS 估计量的二阶矩. *高校应用数学学报*, 1986, 1: 279–285
- 6 王新洲. 非线性模型参数估计—理论与应用. 武汉: 武汉大学出版社, 2002
- 7 张应山. 多边矩阵理论. 郑州: 中国统计出版社, 1993
- 8 张利军, 程代展. 矩阵立体积的一般结构. *系统科学与数学*, 2005, 25: 439–450
- 9 Cheng D. Semi-tensor product of matrices and its application to Morgan's problem. *Sci China Ser F: Inf Sci*, 2001, 44: 195–212
- 10 Cheng D. *Matrix and Polynomial Approach to Dynamics Control Systems*. Beijing: Science Press, 2002
- 11 程代展, 齐洪胜. 矩阵的半张量积: 理论与应用. 北京: 科学出版社, 2007
- 12 Cheng D. Semi-tensor product of matrices and its applications: A survey. In: *Proceedings of ICCM 2007*, 2007, Dec 17–22, Hangzhou. Somerville: International Press, 2007. 641–668
- 13 Cheng D. On logic-based intelligent systems. In: *Proceedings of. ICCA 2005*, 2005, June 27–29, Budapest. Piscataway: IEEE, 2005. 71–76
- 14 Cheng D, Qi H. Matrix expression of logic and fuzzy control. In: *Proceedings of 44th IEEE CDC*, 2005, Dec 12–15, Seville. Piscataway: IEEE, 2005. 3273–3278
- 15 Cheng D, Qi H, Li Z. *Analysis and Control of Boolean Networks: A Semi-tensor Product Approach*. London: Springer, 2011
- 16 梅生伟, 刘锋, 薛安成. 电力系统暂态分析中的半张量积方法. 北京: 清华大学出版社, 2010
- 17 张贤达. 矩阵分析与应用. 北京: 清华大学出版社, 2004
- 18 程代展, 齐洪胜, 赵寅. 布尔函数的分析与控制—矩阵半张量积方法. *自动化学报*, 2011, 37: 529–540
- 19 Boothby W M. *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*. 2nd Ed. New York: Academic Press, 1986
- 20 Horn R A, Johnson C R. *Topics in Matrix Analysis*. Cambridge: Cambridge Press, 1991
- 21 Zaborszky J G, Huang G, Zheng B, et al. On the phase portraits of a class of large nonlinear dynamic systems such as the power systems. *IEEE Trans Auto Contr*, 1988, 33: 4–15
- 22 Chiang H D, Hirsch M, Wu F. Stability regions of nonlinear autonomous dynamical systems. *IEEE Trans Auto Contr*, 1988, 33: 16–27
- 23 Cheng D, Ma J. Calculation of stability region. In: *Proceedings of 42nd IEEE CDC*, 2003, Dec 8–12, Maui. Piscataway: IEEE, 2003. 5615–5620
- 24 Cheng D, Ma J, Lu Q, et al. Quadratic form of stable sub-manifold for power systems. *Int J Robust Nonlinear Contr*, 2004, 14: 773–788
- 25 Ma J, Cheng D, Hong Y, et al. On complexity of power systems. *J Sys Sci Compl*, 2003, 16: 391–403
- 26 马进, 程代展, 梅生伟, 等. 电力系统稳定域边界基于半张量积的渐近算法, 第一部分: 理论基础. *电力系统自动化*, 2006, 30: 1–5
- 27 马进, 程代展, 梅生伟, 等. 电力系统稳定域边界基于半张量积的渐近算法, 第二部分: 应用. *电力系统自动化*, 2006, 30: 1–6
- 28 薛安成, 梅生伟, 卢强, 等. 基于网络约化模型的电力系统动态安全域近似. *电力系统自动化*, 2005, 29: 18–23
- 29 Xue A C, Wu F F, Ni Y, et al. Power system transient stability assessment based on quadratic approximation of stability region. *Electric Power Sys Res*, 2006, 76: 709–715
- 30 Xue A C, Shen C, Mei S, et al. A new transient stability index of power systems based on theory of stability region and its applications. In: *Proceedings of 2006 IEEE PES General Meeting*, 2006, June 17–23, Montreal. Piscataway: IEEE, 2006

- 31 Xue A C, Wu F F, Lu Q, et al. Power system dynamic security region and its approximation. *IEEE Trans Circuits Sys I*, 2006, 53: 2849–2859
- 32 Xue A C, Hu W, Mei S, et al. Comparison of linear approximations for the dynamic security region of network-reduction power system. In: *Proceedings of 2006 IEEE PES General Meeting*, 2006, June 17–23, Montreal. Piscataway: IEEE, 2006
- 33 Isidori A. *Nonlinear Control Systems*. 3rd Ed. Berlin: Springer, 1995
- 34 Cheng D, Hu X, Wang Y. Non-regular feedback linearization of nonlinear systems via a normal form algorithm. *Automatica*, 2004, 40: 439–447
- 35 Zhang F. *Matrix Theory, Basic Results and Techniques*. New York: Springer-Verlag, 1999
- 36 Zhong J, Karasalo M, Cheng D, et al. New results on non-regular linearization of nonlinear systems. *Int J Contr*, 2007, 80: 1651–1664
- 37 Cheng D, Yang G, Xi Z. Nonlinear systems possessing linear symmetry. *Int J Robust Nonlin Contr*, 2007, 17: 51–81
- 38 杨同增, 程代展. 具有旋转对称的 m 阶非线性系统的结构. *系统科学与数学*, 2004, 24: 138–144
- 39 Kauffman S A. Metabolic stability and epigenesis in randomly constructed genetic nets. *J Theor Biol*, 1969, 22: 437–467
- 40 Kauffman S A. *The Origins of Order: Self-organization and Selection in Evolution*. New York: Oxford University Press, 1993
- 41 Kauffman S A. *At Home in the Universe*. Oxford: Oxford Univ Press, 1995
- 42 Hamilton A. *Logic for Mathematicians*. Revised ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1988
- 43 Snustad D P, Simmons M J. *Principles of Genetics*. 4th eds. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 2006
- 44 Cheng D, Qi H. A linear representation of dynamics of Boolean networks. *IEEE Trans Aut Contr*, 2010, 55: 2251–2258
- 45 Cheng D. Input-state approach to Boolean networks. *IEEE Trans Neural Networks*, 2009, 20: 512–521
- 46 Farrow C, Heidel J, Maloney H, et al. Scalar equations for synchronous Boolean networks with biological applications. *IEEE Trans Neural Networks*, 2004, 15: 348–354
- 47 Heidel J, Maloney J, Farrow J, et al. Finding cycles in synchronous Boolean networks with applications to biochemical systems. *Int J Bifurcat Chaos*, 2003, 13: 535–552
- 48 Cheng D, Qi H. Controllability and observability of Boolean control networks. *Automatica*, 2009, 45: 1659–1665
- 49 Cheng D, Li Z, Qi H. Realization of Boolean control networks. *Automatica*, 2010, 46: 62–69
- 50 Cheng D, Qi H. State space analysis of Boolean networks. *IEEE Trans Neural Networks*, 2010, 21: 584–594
- 51 Robert F. *Discrete Iterations: A Metric Study*. Rokne J, translated. Berlin: Springer-Verlag, 1986
- 52 Cheng D, Qi H, Li Z, et al. Stability and stabilization of Boolean networks. *Int J Robust Nonlinear Contr*, 2011, 21: 134–156
- 53 Zhao Y, Li Z, Cheng D. Optimal control of logical control networks. *IEEE Trans Auto Contr*, doi:10.1109/TAC.2010.2092290
- 54 Cheng D, Qi H, Li Z. Model construction of Boolean network via observed data. *IEEE Trans Neural Networks*, 2010, 22: 525–536
- 55 Cheng D, Zhao Y. Identification of Boolean control networks. *Automatica*, 2011, 47: 702–710
- 56 Laschov D, Margaliot M. A maximum principle for single-input Boolean control networks. *IEEE Trans Aut Contr*, 2011, 56: 913–917
- 57 Li F, Sun J. Controllability of Boolean control networks with time delays in states. *Automatica*, 2011, 47: 603–607
- 58 Li F, Sun J, Wu Q. Observability of Boolean control networks with state time delays. *IEEE Trans Neural Network*, 2011, 22: 948–954
- 59 Foster J, Nightngale J D. *A Short Course in General Relativity*. New York: Springer-Verlag, 1995
- 60 Cheng D, Dong Y. Semi-tensor product of matrices and its some applications to physics. *Methods Appl Anal*, 2003, 10: 565–588
- 61 Cheng D. Some applications of semi-tensor product of matrix in algebra. *Comp Math with Appl*, 2006, 52: 1045–1066
- 62 Hall B C. *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary Introduction*. New York: Springer-Verlag, 2003
- 63 Cheng D. Semi-tensor product of matrices and its applications to dynamic systems. In: Dayawansa W, Lindquist A, Zhou Y, eds. *New Directions and Applications in Control Theory*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Berlin: Springer, 2005. 61–79
- 64 Emmott S. *Towards 2020 Science*. Cambridge: Microsoft Prsearch Ltd, 2006
- 65 李东方, 赵建立, 李聪慧, 等. 广义换位矩阵及其应用. *数学的实践与认识*, 2008, 38: 173–178
- 66 宋彩芹, 赵建立, 王晓东. 三矩阵左半张量积的加权 Moore-Penrose 逆的反序律. *山东大学学报(理学版)*, 2009, 44: 80–86
- 67 Barnes D W, Mack J M. *An Algebraic Introduction to Mathematical Logic*. New York: Springer-Verlag, 1975
- 68 Burris S, Sankappanavar H P. *A Course in Universal Algebra*. New York: Springer-Verlag, 1981
- 69 Greub W. *Multilinear Algebra*. 2nd ed. Berlin: Springer-Verlag, 1978
- 70 温巧燕, 钮心忻, 杨义先. *现代密码学中的布尔函数*. 北京: 科学出版社, 2000
- 71 余党军, 陈偕雄. 基于布尔偏导数的组合电路双故障检测的新方法. *浙江大学学报(理学版)*, 2003, 30: 536–538
- 72 Kim K H. *Boolean Matrix Theory and Applications*. New York: Marcel Dekker Inc, 1982
- 73 Cheng D, Zhao Y, Mu Y. Strategy optimization with its application to dynamic games. In: *Proceedings of 49th IEEE CDC*, 2010, Dec 15–17, Atlanta. Piscataway: IEEE, 2010. 5822–5827
- 74 Mu Y, Guo L. Optimization and identification of in a non-equilibrium dynamic game. In: *Proceedings of. CDC-CCC'09*, 2009, Dec 16–18, Shanghai. Piscataway: IEEE, 2009. 5750–5755

- 75 Newman M. Modularity and community structure in networks. *Proc Natl Acad Sci USA*, 2006, 103: 2577–2582
76 Greenwood A. *Science at the Frontier*. Washington: National Academy Press, 1992
-

Semi-tensor product of matrices—A convenient new tool

CHENG DaiZhan & ZHAO Yin

Institute of Systems Science, AMSS, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China

Semi-tensor product of matrices is a new matrix product. It generalizes the conventional matrix product to the case when the column number of the leading factor matrix does not equal to the row number of the following factor matrix. The generalized product keeps all major properties of the conventional matrix product unchanged. After introducing its history, definitions and main properties, this survey is emphasized on its applications to the analysis and control of dynamic systems, which mainly contain the followings: (1) semi-tensor product approach to nonlinear dynamic systems; (2) structure analysis and control of Boolean networks; (3) some other applications. Finally, a prediction for the potential applications of semi-tensor product is provided.

semi-tensor product, dynamic system, Boolean network, Lie algebra, biological system, universal algebra

doi: 10.1360/972011-1262