Modified Möbius 反演公式的进一步推广

李 伯 臧

(中国科学院物理研究所，北京 100080)

关键词 反演、Möbius 反演、普遍的 Möbius 反演

最近，Chen 等人[1,2]将数论中的 Möbius 反演公式[3,4]推广到连续变量情形，并做了几例物理应用．他的“Modified Möbius 反演公式”为

$$A(x)=\sum_{n=1}^{\infty}B(n^{\alpha}x)\Longleftrightarrow B(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(n)A(n^{\alpha}x), \tag{1}$$

其中 $A(x)$ 和 $B(x)$ 是一元实变函数，$\alpha=\pm1$，$\mu(n)$ 是定义在正整数集合上的 Möbius 函数，当 n 为 1，r 个不同质数之积和其他正整数时，其取值分别为 $1,(-1)^r$ 和 0．对于非零的任意实数 α，亦不难看出命题(1)是成立的[1)]．

虽然命题(1)在 $\alpha=1$ 的特殊情况下已见于更早的文献，例如文献[5]，但 Chen 将如此抽象的数论公式应用到具体的物理问题中来，仍然引起人们的很大兴趣[6,7]．

本工作的目的是把上述结果做进一步的推广，证明成立更普遍的反演变换：

$$A(x)=\sum_{n=1}^{\infty}B(a_nx)\Longleftrightarrow B(x)=A(x/a_1)+\sum_{n=1}^{\infty}A_n(x/a_1^{n+1}), \tag{2}$$

这里，$\{a_n\}$ 是由两两不等的非零实数构成的数列，而

$$A_n(x)=(-1)^n\sum_{m_1=2}^{\infty}\cdots\sum_{m_n=2}^{\infty}A(a_{m_1}\cdots a_{m_n}x). \tag{3}$$

我们将命题(2)称为“普遍的 Möbius 型反演变换”．

此外，我们还将以上结果推广到多元复变函数和算子函数的情形．

为了使叙述简便，先假定所涉及的级数均是收敛的．对于命题(1)中的收敛性问题，文献[1]中有所说明．下面还将对命题(2)中的收敛性问题进行讨论．

一、普遍的 Möbius 型反演变换

当 $a_n=n^{\alpha}$ 时，不难证明命题(2)可简化成(1)式；(2)式的另一个不同于(1)式的简单特例是 $a_n=\beta^n$ 的情形，此处 β 是不为 0 和 ±1 的实数，此时，命题(2)可简化为

$$A(x)=\sum_{n=1}^{\infty}B(\beta^nx)\Longleftrightarrow B(x)=A(x/\beta)-A(x). \tag{4}$$

命题(2)的证明是容易的：如果有关的级数收敛，则从(2)式的左方等式出发，求出用 $B(\cdot)$

本文 1991 年 4 月 23 日收到．

1) Ren Shang-yuan (私人通讯)．

表达的 $A(x/a_1)$ 和 $A_n(x/a_1^{n+1})$ 后，立即可得到(2)式的右方等式，从而证明了命题的必要性。同样地可证明其充分性。上述必要性还可利用文献[2]所提出的迭代法来证明：将(2)式之左方等式改写成

$$B(x)=A(x/a_1)-\sum_{n=2}^{\infty}B(a_nx/a_1), \tag{5}$$

做迭代 $B_0(x)=0$ 和

$$B_{k+1}(x)=A(x/a_1)-\sum_{n=2}^{\infty}B_k(a_nx/a_1), \tag{6}$$

并令

$$B(x)=\lim_{k\to\infty}B_k(x), \tag{7}$$

便得到(2)式之右方等式。

为使对收敛性问题的讨论变得简便，不失一般性，我们假定 $\{|a_n|\}$ 是单调的。具体地，此处设为单调下降；对单调上升的情形，论述是类似的。此外，如文献[1]中那样，我们还假定存在非负函数 $f(x)$ 和正数 ε，使得

$$|B(bx)|\leqslant f(x)|b|^{\varepsilon}, \text{当 } |b|<1 \text{ 时},$$

$$\delta=\sum_{n=2}^{\infty}|a_n/a_1|^{\varepsilon}<1. \tag{8}$$

这样一来，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}B(a_nx)$ 显然是绝对收敛的，而且有

$$|A_n(x/a_1^{n+1})|\leqslant f(x)(1+\delta)\delta^{n}, \tag{9}$$

因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n(x/a_1^{n+1})$ 亦绝对收敛。同样，若(8)式在 $B(\cdot)$ 被换成 $A(\cdot)$ 后仍成立，则命题(2)中各级数的绝对收敛性以及极限(7)式的存在性，也可得到证明。

二、推广到高维情形

命题(2)及其特例(1)式和(4)式，属于线性的代数变换，故在适当的收敛条件下，于复变函数和算子函数范畴内也是成立的，而且不难推广到高维情形。

设 $x=(x_1,\cdots,x_s)$ 是 s 维复变量，$A(x)$ 和 $B(x)$ 是 s 元复变函数或算子函数，$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 和 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 是复数，每个 $\alpha_i\neq 0,\beta_i\neq 0$ 和 ± 1。命题(1)可立即改写成

$$A(x)=\sum_{n_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{n_s=1}^{\infty}B(n_1^{\alpha_1}x_1,\cdots,n_s^{\alpha_s}x_s)$$

$$\Longleftrightarrow B(x)=\sum_{n_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{n_s=1}^{\infty}\mu(n_1)\cdots\mu(n_s)A(n_1^{\alpha_1}x_1,\cdots,n_s^{\alpha_s}x_s), \tag{1'}$$

而命题(4)可改写成

$$A(x)=\sum_{n_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{n_s=1}^{\infty}B(\beta_1^{n_1}x_1,\cdots,\beta_s^{n_s}x_s)\Longleftrightarrow B(x)$$

$$= (-1)^s A(\boldsymbol{x}) + \sum_{m=1}^{s} A^{(m)}(\boldsymbol{x}). \tag{4'}$$

其中

$$A^{(m)}(\boldsymbol{x}) = \sum_{\substack{i_1=1 \\ (i_1<\cdots<i_m)}}^{s} \cdots \sum_{i_m=1}^{s} A_{i_1\cdots i_m}(\boldsymbol{x}), \tag{10}$$

而 $A_{i_1\cdots i_m}(\boldsymbol{x})$ 是将 $A(\boldsymbol{x})$ 中的 $x_{i_1},\cdots,x_{i_m}$ 分别换成 $x_{i_1}/\beta_{i_1},\cdots,x_{i_m}/\beta_{i_m}$ 后所得到的函数，例如 $A^{(s)}(\boldsymbol{x}) = A(x_1/\beta_1,\cdots,x_s/\beta_s)$.

命题(2)的高维推广是

$$A(\boldsymbol{x}) = \sum_{n_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{n_s=1}^{\infty} B(a_{n_1}^{(1)}x_1,\cdots,a_{n_s}^{(s)}x_s) \Longleftrightarrow B(\boldsymbol{x}) = C(\boldsymbol{x}), \tag{2'}$$

此处 $\{a_n^{(1)}\},\cdots,\{a_n^{(s)}\}$ 均是两两不等的非零复数列. $C(\boldsymbol{x})$ 也是如(2)式右端那样的含 $A(\cdot)$ 的多重级数，但其表达式更加繁复. 因此我们只给出其类似于(6)和(7)式的迭代求法. 令

$$b_n^{(i)} = a_n^{(i)}/a_n^{(1)}. \tag{11}$$

设 $s = 2$，由(2′)之左方等式得到

$$B(x_1,x_2) = A(x_1/a_1^{(1)},x_2/a_1^{(2)}) - \sum_{n=2}^{\infty}[B(x_1,b_n^{(2)}x_2) + B(b_n^{(1)}x_1,x_2)]$$

$$- \sum_{m=2}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty} B(b_m^{(1)}x_1,b_n^{(2)}x_2). \tag{12}$$

做迭代 $B_0(x_1x_2) = 0$ 和

$$B_{k+1}(x_1,x_2) = A(x_1/a_1^{(1)},x_2/a_1^{(2)}) - \sum_{n=2}^{\infty}[B_k(x_1,b_n^{(2)}x_2) + B_k(b_n^{(1)}x_1,x_2)]$$

$$- \sum_{m=2}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty} B_k(b_m^{(1)}x_1,b_n^{(2)}x_2), \tag{13}$$

并置

$$B(x_1,x_2) = C(x_1,x_2) = \lim_{k\to\infty} B_k(x_1,x_2). \tag{14}$$

当 $s > 2$ 时，$B(\boldsymbol{x}) = C(\boldsymbol{x})$ 的迭代求法是类似的，兹不赘述.

三、结语和讨论

本文给出了普遍的 Möbius 型反演变换(2)式，它是对 Chen 的 Modified Möbius 反演公式(1)的推广. 虽然命题(2)中的 $\sum_n A_n(\cdot)$ 是多重级数 $A_n(\cdot)$ 的级数，当 $a_n \neq n^\alpha$ 和 δ^n 时，它一般不能化成如(1)和(4)式那样的简单求和，但在计算机和数值计算技术高度发展的今天，这类级数，或 $B(x)$ 的迭代求解，当是不难驾驭的.

我们还将上述结果做了高维推广. 特例(1′)和(4′)式仍有较紧凑的表达式. 对于普遍情形(2′)式，函数 $C(\boldsymbol{x})$ 的表达式很复杂，宜用迭代法求出.

此外我们还指出，上述反演公式属于线性的代数变换，因此所涉及的变量和参数可实可

复，而函数亦可以是实变的或复变的，甚至是算子的。

致谢：感谢陈难先、蒲富恪和戴向民诸教授对本工作的关心与支持，他们给作者介绍了有关的文献，并同作者进行过有益的讨论。

参 考 文 献

[1] Chen Nanxian, *Phys. Rev. Lett.*, 64(1990), 1193.
[2] Chen Nanxian, Chen Ying & Li Guangying, *Phys. Lett.* A, 149(1990), 357.
[3] 华罗庚，数论导引，科学出版社，北京，1957，121—122.
[4] Shapiro, H. N., *Introduction to the Theory of Numbers*, John Wiley & Sons Pub., New York, 1983, 64.
[5] Bellman, R., *Analytic Number Theory*, Benjamin/Cummings Pub., London, 1980, 59—60.
[6] Maddox, J., *Nature*, 344(1990), 377.
[7] Hughes, B. D., Frankel, N. E. & Ninham, B. W., *Phys. Rev.*, A 42(1990), 3654.