Procesos Estocasticos

Jose Antonio Camarena Ibarrola

UMSNH

camarena@umich.mx

15 de marzo de 2017

Overview

Introducción a los procesos estocásticos

- Esta disciplina se enfoca en la dinámica de las probabilidades
- El concepto de variable aleatoria se generaliza para incluir el tiempo
- Una variable aleatoria X mapea un evento s del espacio muestral a un valor numérico $X(s)$
- En un proceso estocástico un evento s, en un instante t se mapea a un valor numérico $X(t, s)$;$t \in T$, donde T se denomina *conjunto parámetro* del proceso (conjunto de tiempos)
- Dejando fija la muestra s, $X(t)$ es una función del tiempo

Introducción

- $X(t, s)$ puede verse como una colección de funciones del tiempo, una para cada muestra s
- Si dejamos fijo t, entonces $X(s)$ es una variable aleatoria (mapea un evento a un número)
- Un proceso estocástico se convierte en una variable aleatoria si se deja fijo el tiempo
- Entonces podemos definir un proceso estocástico como una familia de variables aleatorias $X(t, s)$; $t \in T$, $s \in S$ definidas sobre un espacio de probabilidades e indexadas por el parámetro t
- $X(t, s)$ se puede ver como una colección de funciones del tiempo, una para cada s
- A los procesos estocásticos se les conoce también como *procesos aleatorios*

Clasificación de los procesos estocásticos

- Los valores de $X(t, s)$ $(t \in T)$ son llamados estados del proceso estócástico y el conjunto de todos los posibles valores de $X(t, s)$ forman el *espacio de estados* E
- Proceso Estocástico de tiempo continuo. T es un intervalo del dominio del eje del tiempo (un intervalo de números reales)
- Proceso Estocástico de tiempo discreto. T es un conjunto contable. también se llaman a estos *secuencias aletorias* y se denotan mediante $\{X[n] | n = 1, 2, ...\}$
- Proceso Estocástico de estados contínuos. E es contínuo
- Proceso Estocástico de estados discretos. E es discreto

Caracterización de los procesos estocásticos

- Un proceso estocástico queda completamente caracterizado por la Función de Distribución Acumulada (CDF) conjunta
- Por economía de notación representemos $X(t,s)$ por $X(t)$. El valor de un proceso estocástico $X(t)$ en el instante t_i, es decir $X(t_i)$ es una variable aleatoria

$$\begin{aligned} F_X(x_1, t1) &= P[X(t_1) \leq x_1] \\ F_X(x_2, t2) &= P[X(t_2) \leq x_2] \\ &\ldots \\ F_X(x_n, tn) &= P[X(t_n) \leq x_n] \\ 0 < t_1 < t_2 < \ldots &< t_n \end{aligned} \tag{1}$$

Caracterización de los procesos estocásticos

- Un proceso estocástico queda completamente caracterizado por la CDF conjunta

$$F_X(x_1, x_2, ..., x_n; t_1, t_2, ..., t_n) = P[X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, ..., X(t_n) \leq x_n,] \ \forall n$$

- Similarmente, si el proceso estocástico es de tiempo discreto, lo podemos caracterizar mediante una colección de funciones de distribución de probabilidad:

$$f_X(x_1, x_2, ..., x_n; t_1, t_2, ..., t_n) = P[X(t_1) = x_1, X(t_2) = x_2, ..., X(t_n) = x_n,] \ \forall n$$

Media, Varianza y Autocorrelación de un proceso estocástico

- Una manera de caracterizar un proceso aleatorio es mediante su media y su varianza. La media de un proceso aleatorio suele denominarse *ensemble average* *ensemble*.- conjunto de resultados de un experimento aleatorio en cierto proceso

$$\mu_X = E[X(t)]$$
$$\sigma_X^2 = E[(X(t) - \mu_X)^2] = E[X^2(t)] - \mu_X^2$$

- La autocorrelación proveé una medida de similitud entre dos instantes de un proceso estocástico

$$R_{XX}(t,s) = E[X(t)X(s)] = R_{XX}(s,t)$$
$$R_{XX}(t,t) = E[X^2(t)]$$

Un proceso aleatorio $X(t)$ se denomina de *segundo orden* si $E[X^2(t)] < \infty$ para todo $t \in T$

Procesos estocásticos estacionarios

- Un proceso estocástico estacionario es un proceso cuyas propiedades estadísticas no varian con el tiempo
- *Procesos estacionarios en sentido estricto*.

$$F_X(x_1, x_2, ..., x_n; t_1, t_2, ..., t_n) = F_X(x_1, x_2, ..., x_n; t_1+\epsilon, t_2+\epsilon, ..., t_n+\epsilon)$$

- Y si F_X es diferenciable

$$f_X(x_1, x_2, ..., x_n; t_1, t_2, ..., t_n) = f_X(x_1, x_2, ..., x_n; t_1+\epsilon, t_2+\epsilon, ..., t_n+\epsilon)$$

- *Procesos estacionarios en sentido amplio*. Son procesos en los que la media, la variancia y la autocorrelación no depende del tiempo, son constantes

Procesos estocásticos Ergódicos

- Una propiedad deseable en un proceso estocástico es el poder estimar sus parámetros a partir de datos (mediciones)
- Promedio temporal

$$\bar{x} = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} x(t)dt \tag{2}$$

- En un proceso estocástico ergódico el promedio estadístico (ensemble average) es igual al promedio temporal $E[X(t)] = \bar{x}$
- Un proceso estocástico ergódico es un proceso en el cual los momentos del proceso pueden ser determinados por promedios temporales o por promedios estadísticos (ensemble averages) $E[X^n] = \bar{X}^n$
- Por lo tanto podemos inferir propiedades estadísticas del proceso a partir de una única realización del proceso (un miembro del ensemble)

Algunos modelos de procesos estocásticos

- Martingales
- Procesos de conteo
- Procesos de incrementos independientes
- Procesos de incrementos estacionarios
- Procesos de Poisson

Martingales

- Un proceso estocástico es un proceso martingale si $E[X_{n+1}|X_1, X_2, ..., X_n] = X_n$, es decir, la mejor predicción para el próximo valor es el valor actual.
- Un proceso es *supermartingale* si $E[X_{n+1}|X_1, X_2, ..., X_n] \leq X_n$
- Un proceso es *submartingale* si $E[X_{n+1}|X_1, X_2, ..., X_n] \geq X_n$
- martingale captura la escencia de un juego justo en el sentido de que independientemente de su suerte, su capital esperado será el mismo que su capital actual.
- En un submartingale se espera que su capital se incremente en el futuro y en un supermartingale se espera que su capital se reduzca en el futuro
- Martingales son una herramienta importante en matemáticas financieras modernas.

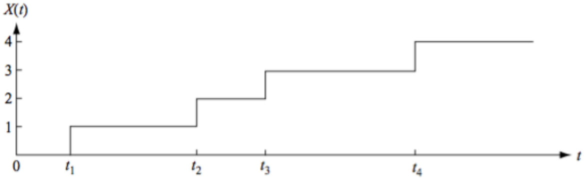
Martingales

- Si $\Im_n = \{Y_1, Y_2, ..., Y_n\}$ es la información potencial que se le revela al proceso a medida el el tiempo progresa
- Un martingale es un proceso cuyo valor esperado, condicionado a cierta información potencial, es igual al valor revelado por la última información disponible
- Sean $X_1, X_2, ...,$ variables aleatorias independientes con media cero y $Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. entonces:

$$\begin{aligned} E[Y_{n+1}|Y_1, ..., Y_n] &= E[Y_n + X_{n+1}|Y_1, ..., Y_n] \\ &= E[Y_n|Y_1, ..., Y_n] + E[X_{n+1}|Y_1, ..., Y_n] \\ &= Y_n + E[X_{n+1}] \\ &= Y_n \end{aligned}$$

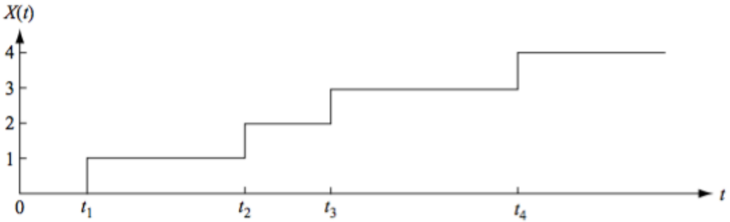
Procesos de conteo

- Un proceso estocástico $\{X(t)|t \geq 0\}$ es un *proceso de conteo* si $X(t)$ representa el número de eventos que han ocurrido en el interval $[0, t]$
- Por ejemplo el número de clientes que han llegado a un banco desde el momento en que el banco abrió sus puertas hasta un determinado instante t.
- En un proceso de conteo:
  1. $X(t) \geq 0$
  2. $X(0) = 0$
  3. Si $s < t$, entonces $X(s) \leq X(t)$
  4. $X(t) - X(s)$ representa el número de eventos ocurridos en el intervalo $[s, t]$



Procesos de incrementos independientes

- Un proceso de conteo es un proceso de incrementos independientes si el número de eventos que ocurren en intervalos disjuntos es una variable aleatoria independiente
- Por ejemplo en la figura considere los intervalos $[0, t_1]$ y $[t_2, t_4]$, si el número de eventos que ocurren en un intervalo es independiente del número de incrementos que ocurren en el otro intervalo, entonces $X(t)$ es un proceso de incrementos independientes



Procesos de incrementos estacionarios

- Un proceso de conteo $X(t)$ poseé incrementos estacionarios si para cada conjunto de instantes de tiempo los incrementos están idénticamente distribuidos
- En general, la media de un proceso de incrementos estacionarios tiene la forma $E[X(t)] = mt$, donde m es la media en el instante $t = 1$, es decir $m = E[X(1)]$
- De manera similar, la varianza de un proceso de incrementos estacionarios tiene la forma $Var[X(t)] = \sigma^2 t$, donde σ^2 es la varianza en el instante $t = 1$, es decir, $\sigma^2 = Var[X(1)]$

Procesos de Poisson

- Los procesos de Poisson son ampliamente utilizados para modelar *arribos* (ocurrencias de eventos) en un sistema
- Modelar incidencias de llamadas telefónicas a un conmutador
- Arribos de órdenes de clientes a una empresa de servicios
- Fallas aleatorias de equipos
- Hay dos maneras de definir procesos de Poisson
  - Como un proceso de conteo en el cual el número de eventos en cualquier intervalo de longitud t tiene una distribución de Poisson con media λt
    $$P[X(s+t) - X(s) = n] = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \tag{3}$$
  - Como un proceso de conteo con incrementos independientes y estacionarios con $\lambda > 0$

Procesos de Markov

- Se denomina proceso de Markov de primer orden a un proceso estocástico en el cual:

$$P[X(t_n) \leq x_n | X(t_{n-1}) = x_{n-1}, X(t_{n-2}) = x_{n-2}, ..., X(t_0) = x_0] =$$
$$= P[X(t_n) \leq x_n | X(t_{n-1}) = x_{n-1}]$$

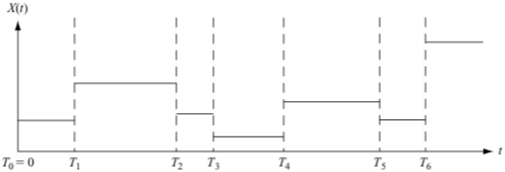
- Es decir, dado el estado actual del proceso, el estado futuro no depende del pasado, esta propiedad se conoce como la *propiedad de Markov*
- En un proceso de Markov de segundo orden, el estado futuro depende del estado actual y del anterior y así sucesívamente

Tipos de Procesos de Markov

- Un proceso de Markov puede ser de estado discreto o de estado continuo
- A los procesos de Markov de estado discreto se les conoce como Cadenas de Markov
- Un proceso de Markov puede ser de tiempo discreto o de tiempo continuo
  - Cadenas de Markov de tiempo discreto
  - Cadenas de Markov de tiempo continuo
  - Procesos de Markov de tiempo discreto
  - Procesos de Markov de tiempo continuo

Estructura de un proceso de Markov

- Un proceso de Markov hace transiciones entre estados en instantes fijos o aleatorios
- El sistema entra a un estado y se queda un tiempo denominado tiempo de espera, después de el cual cambia a otro estado y se queda otro tiempo de espera, etc.
- En un proceso explosivo puede haber un número infinito de transiciones en un intervalo infinito
- En un proceso no-explosivo (también denominado puro) hay un número finito de transiciones en un intervalo finito



Proceso de Winer

- No todo proceso físico puede ser modelado por una cadena de Markov de tiempo discreto y estado discreto
- Un ejemplo de proceso de tiempo continuo y estado continuo es el Movimiento Browniano
- En 1828 el Botánico Robert Brown observó partículas de polen suspendidas en fluido que se movían de manera irregular y aleatoria
- En 1900, Bachelier escribió su teoría matemática de especulación y usó el movimiento browniano para modelar el precio de las acciones
- En 1905 Einstein escribió ecuaciones para el movimiento browniano
- En 1923 Wiener lo modeló como un proceso estocástico al que llamó Proceso de Wiener

Proceso de ramificación. Un ejemplo de proceso de Markov de tiempo discreto

- Considere un sistema que consiste inicialmente de un conjunto finito de elementos.
- Al pasar el tiempo, cada elemento puede desaparecer con probabilidad P_0
- O bien puede producir k nuevos elementos con probabilidad P_k
- El comportamiento de cada elemento nuevo es similar al del padre que lo produjo
- Si X_n denota el tamaño de la población después de n eventos, el proceso $\{X_n | n > 0\}$ es una cadena de Markov denominada *Proceso de ramificación*

Aplicaciones de Procesos de ramificación

- Crecimiento de una población
- Esparcimiento de una epidemia
- Fisión Nuclear

Mobilidad Social. Una aplicación de cadenas de Markov

- Sociólogos [Prais,1955] han utilizado cadenas de Markov para modelar como la clase social del padre, del abuelo, etc. Afectan la clase social de una persona
- El modelo considera tres estados, clase alta, clase media y clase baja
- Una vez determinadas las probabilidades de transición se pueden usar para modelar la mobilidad social mediante una cadena de Markov

- Sirven para modelar sistemas dinámicos con incertidumbre en donde el estado es función del tiempo
- El proceso requiere de un agente que tome una serie (secuencia) de decisiones a medida que transcurre el tiempo
- Cada decisión tiene una consecuencia, puede tener una ganancia o un costo
- El objetivo es encontrar la secuencia óptima de acciones que maximize la recompensa esperada para un intervalo dado (finito o infinito)

Aplicaciones de procesos de Markov de tiempo continuo

- Un sistema de encolamiento consiste de uno o mas servidores que atienden a clientes que llegan de manera aleatoria
- Si un cliente llega cuando hay al menos un servidor desocupado es atendido si que tenga que esperar
- Si al llegar un cliente, todos los servidores están ocupados, entonces deberá esperar a ser atendido de acuerdo a una política (Ej FIFO)
- Sea n el número de clientes en el sistema
- Si el proceso de arribo es un proceso de Poisson y el tiempo de servicio se distribuye exponencialmente, entonces el proceso $\{n|n = 0, 1, ...\}$ es una cadena de Markov

Sistemas de almacenamiento estocástico

- Un recurso se mantiene almacenado hasta que es solicitado (Sistemas de inventario, Reclamos de seguros, etc)
- Las solicitudes son aleatorias
- Sea c la capacidad de almacenamiento
- En cada periodo n hay una demanda de D_n unidades
- Y_n denota el stock residual después del periodo n
- Si la política establece que el almacén se llene al inicio del periodo $n+1$ cada vez que $Y_n < m$ (m umbral dado)

$$Y_{n+1} = max(0, c - D_{n+1}); \; Y_n < m$$
$$Y_{n+1} = max(0, Y_n - D_{n+1}); \; Y_n > m$$

- Si D_1, D_2,... son iid entonces $\{Y_n | n > 0\}$ es una cadena de Markov

References

Oliver C. Ibe *Markov Processes for Stochastic Modeling*. Elsevier Academic Press, 2009.

The End