GENERACION PROYECTIVA DE CURVAS W

por

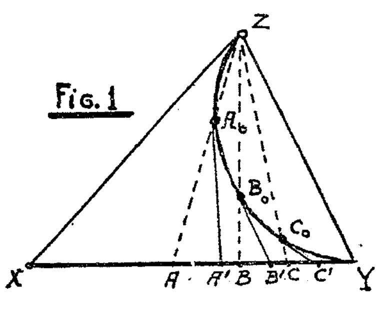
JUSTO PASCALI

Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales
Universidad Nacional de Buenos Aires

Como una sencilla contribución al homenaje que se tributa al ilustre matemático Doctor Julio Rey Pastor, acompañamos una investigación derivada de otra idea que él inspiró a uno de sus alumnos en España, en años ya lejanos, tratando al hacerlo de aproximarnos a la claridad genial que caracteriza a las exposiciones del Maestro.

1. *Dado un triángulo XYZ* (donde XY pueden ser reales y distintos, reales y coincidente o imaginarios) *determinar la curva cuyos puntos proyectados desde* Z (Fig. 1) *forman sobre el lado opuesto* z *una puntual* $A\,B\,C\,\ldots$ *proyectiva con la* $A'B'C'\ldots$ *que determinan sobre ella las tangentes en esos puntos y en que* XY *sean unidos en tal proyectividad.*

FIG. 1



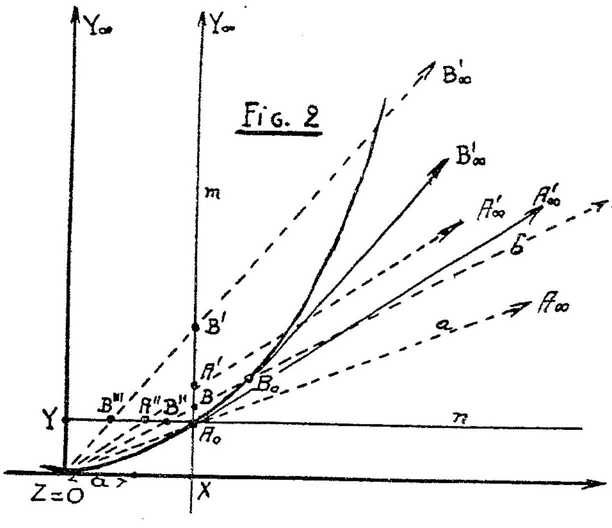
Nos proponemos demostrar que mediante esta propiedad se consigue que las curvas integrales de ecuaciones diferenciales de primer orden pueden definirse proyectivamente de modo análogo a las cónicas y haces de segunda clase.

Es evidente que si existe una curva W de ese tipo existe un haz de ellas que resultan de todas las homologías de centro Z y eje z.

Es también evidente que de existir, una curva queda definida por *un punto y la tangente* en él, pues, sobre la z queda individualizada la homografía en que XY son puntos dobles y correspondientes la proyección del punto dado desde Z y la intersección con z de la tangente.

Al punto Z desde el que se proyectan los puntos de la curva cumpliéndose los requisitos establecidos lo designaremos en lo que sigue con el nombre de *centro proyectivo*.

2. Trabajaremos por comodidad con coordenadas cartesianas, en cuyo caso tomaremos Z en el origen O; X e Y en los impropios de los ejes, por lo cual z será la impropia del plano (Fig. 2).



Si se corta el haz $a\,b\,c\ldots$ con z se tendrá:

$$\uparrow \begin{array}{l} A_\infty \;\; B_\infty \;\; C_\infty \ldots X_\infty \;\; Y_\infty \\ A'_\infty \;\; B'_\infty \;\; C'_\infty \ldots X_\infty \;\; Y_\infty \end{array}$$

Ahora bien: un punto A_∞ queda individualizado por la $\dfrac{y}{x}$ del punto A_0 respectivo de la curva W y su correspondiente A'_∞ por la derivada y' en A_0: como la proyectividad entre A_∞ y A'_∞ es una ecuación bilineal *la ecuación diferencial de la curva W buscada será una relación lineal entre y' e $\dfrac{y}{x}$.*

3. Para hallar esa solución proyectemos desde O la puntual A'_∞ $B'_\infty \ldots$ y cortemos el haz con la ordenada m de un punto cualquiera A_0 de la curva, de coordenadas $x\,y$: cortemos también con m el haz que desde O proyecta los puntos $A_0 B_0 \ldots$ de la curva. Como la recta que une O con O se confunde con la tangente en O (para que X_∞ sea doble), se deduce que el punto X en que m corta al eje de las X es un *punto unido* de la proyectividad en m. Como la curva debe ser tangente a la impropia en el punto Y_∞ (para que éste sea doble) se deduce que el otro *punto unido* es el Y_∞ de la m.

Se tendra, pues:

$$\begin{array}{l} m\,(A_0 B\, C \ldots X Y_\infty) \\ \uparrow \\ m\,(A' B' C' \ldots X Y_\infty) \end{array}$$

Siendo estas puntuales semejantes se tiene:

$$\frac{XA_0}{XA'} = \frac{XB}{XB'} = \ldots = K$$

Pero, $XA_0 = y$, $XA' = y'\,x$, de donde

$$\frac{y}{y'\,.\,x} = K,$$

que es la ecuación diferencial buscada.

Se deduce

$$\lg y = \frac{1}{K} \lg x + \lg C, \quad \therefore \quad y = C\,.\,x^{\frac{1}{K}} \tag{1}$$

y haciendo $\frac{1}{K} = m$ la ecuación de la curva buscada es

$$y = C\,.\,x^m. \tag{2}$$

Conviene observar que la relación K (y por tanto m) puede tener *cualquier valor real*, positivo o negativo.

4. Si los mismos haces anteriores se cortaran con la abscisa n que pasa por A_0 siguienddo un camino idéntico se probaría que:

$$\begin{array}{c} n\,(A_0\,B''\,C''\ldots YX_\infty) \\ \uparrow \\ n\,(A''\,B'''\,C'''\ldots YX_\infty) \end{array}$$

y aplicando la misma propiedad se tendría que

$$\frac{YA_0}{YA''}=K', \frac{x \cdot y'}{y}=K',$$

y de aquí

$$\lg y=K' \cdot \lg x+\lg C', \quad \therefore \quad y=C' \cdot x^{K'} \qquad (3)$$

Considerando el punto de la curva de abscisa unidad la (1) y (3) demuestran que $C=C'$, luego,

$$C \cdot x^{\frac{1}{K}}=C \cdot x^{K'} \quad \therefore \quad K'=\frac{1}{K} \qquad (4)$$

Esta relación nos dice que las puntuales m y n tienen un punto unido en su corte con el eje respectivo: otro punto unido impropio y que su relación de semejanza es inversa.

5. Cuando $m=1$, la (2) se transforma en $y=C \cdot x$, que es el haz de rectas de centro en el origen. Como la tangente a una recta de este haz es la recta misma, es evidente que la proyectividad estudiada se transforma en este caso en la *identidad.*

6. Cuando $m=2$, la (2) nos da $y=C \cdot x^2$ y la curva W se transforma, en este caso, en el haz de parábolas de ejes verticales y tangentes al eje de las x en el origen.

Recaemos de este modo a una propiedad conocidísima de la parábola, donde el haz de tangentes es proyectivo con el haz que proyecta los puntos de contacto desde un punto *cualquiera* de la curva, y por lo tanto esos elementos subordinan una proyectividad en la impropia.

7. Si se corre el origen sobre el eje de las x de una cantidad $+a$, llamando x la nueva abscisa, es evidente que la antigua x está ligada a ésta por $X=x+a$ que, sustituído en la (2) nos da

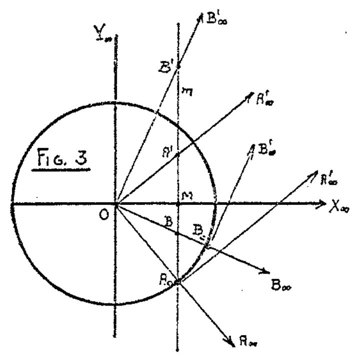
$$y=C(x+a)^m,$$

que es el binomio de Newton.

Como m puede tener cualquier valor real, se deduce el siguiente

Teorema: *La curva representativa de todo binomio de Newton es tal que si desde el punto de abscisa* $-a$ (centro proyectivo) *se proyectan los puntos de la curva y se trazan las tangetes* (1) *a ella en esos puntos (o las normales), ambos haces subordinan sobre la impropia una proyectividad hiperbólica donde son puntos dobles los impropios de los ejes coordenados.*

Se deduce también que toda curva binomial queda individualizada por *uno* de sus puntos y la *tangente* en él.



8. Supongamos que XY, puntos dobles de la proyectividad en z, sean los cíclicos del plano: tal proyectividad será entonces la involución absoluta. Al proyectarla desde $O = Z$ se obtiene una involución elíptica, Fig. 3.

Al punto M'_∞ de m corresponde el M de corte con el eje de las X, pues, $M'_\infty OM = 90^\circ$, luego, M es el centro de la involución subordinada sobre m.

Se tendrá: $MA_0 . MA' = MB . MB' = \ldots = -K$.

En el triángulo rectángulo OA_0A' se tiene que:

$$MA_0 . MA' = \overline{OM}^2,$$

pero,

$$MA_0 = y \quad MA' = y' . x \quad OM = x$$

(1) Como los puntos impropios de las tangentes y de sus normales respectivas constituyen pares de conjugados de la involución absoluta por cuanto los puntos impropios del haz del centro proyectivo forman una proyectividad con los impropios de las tangentes también la forman con los impropios de las normales.

y, por lo tanto, sustituyendo en la primera igualdad se obtiene

$$y \cdot y' \cdot x = -x^2,$$

o sea,

$$y \cdot y' = -x$$

que es la ecuación diferencial de la curva buscada.

Se deduce:

$$y\,dy + x\,dx = 0,$$

de donde

$$x^2 + y^2 = C^2.$$

Las curvas W buscadas constituyen, en este caso, el conjunto de círculos con centro en el origen. Y como en el círculo el radio y la tangente de un punto son normales la propiedad adquiere carácter de evidencia.

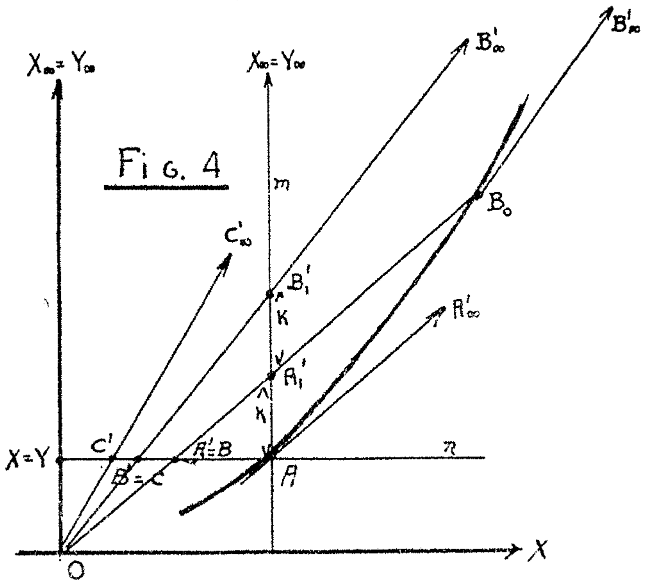
9. Supongamos, finalmente, que XY, puntos dobles de la proyectividad en z, sean reales y coincidentes: tal proyectividad será entonces parabólica con punto doble $X_\infty = Y_\infty$. Sea ahora A un punto cualquiera de la curva buscada y A'_∞ la dirección de la tangente en A, la cual nos fijamos (Fig. 4); sean n y m la abscisa y ordenada que pasan por A.

Al proyectar desde O los puntos de la curva y los puntos impropios de las tangentes se obtiene sobre n una proyectividad parabólica cuyo punto unido $\ddot{X}$ es la sección de n con el eje de las Y, la cual será:

$$\mathcal{P} = \uparrow \begin{matrix} n\,(\ddot{X}A\ldots) \\ n\,(\ddot{X}A'\ldots). \end{matrix}$$

Siendo A y A' un par de correspondientes, si se halla el B'

correspondiente de $A' = B$, pensado como de la primera forma, por una propiedad de la Geometría Proyectiva el grupo $\ddot{X}A'AB'$ es armónico. Análogamente, si se halla el correspondiente en $\mathcal{P}$ de $B' = C$, pensado como de la primera forma, el grupo $\ddot{X}B'A'C'$ es armónico, y así siguiendo.



Conviene aclarar que pensar en A' como de la primera forma significa que se le imagina como un punto B que proviene de proyectar cierto punto B_0 de la curva.

Por ser armónicos los grupos $XA'AB'$; $XB'A'C' \ldots$ etc., se deduce que la sucesión $AA'B'C' \ldots X$ es una *escala armónica* con punto de condensación en $\ddot{X}$. Si esta escala se proyecta desde O sobre m, por cuanto $\ddot{X}$ se proyecta en X_∞, ella se transforma en una escala topográfica $AA'_1B'_1C'_1 \ldots$ etc., de donde se deduce que, euclídeamente, $AA'_1 = A'_1B'_1$.

Ahora bien, AA'_1 es un segmento que en cada caso se fija arbitrariamente y que llamaremos K, pues depende de la elección de la tangente en A.

Se tendrá (*):

$$LB'_1 = LA'_1 + A'_1B'_1.$$

Pero,

$$LB'_1 = y + 2K, \quad LA'_1 = x \cdot y', \quad A'_1B'_1 = K,$$

de donde

$$y + 2K = x \cdot y' + K,$$

o sea,

$$y' - \frac{1}{x} \cdot y = \frac{K}{x}. \tag{5}$$

Esta es la ecuación diferencial de la curva buscada y resulta una ecuación lineal completa con segundo miembro, que se resuelve por el método clásico.

Hacemos

$$y = u \cdot v, \tag{6}$$

de donde

$$y' = u' \cdot v + u \cdot v',$$

que en (5) da:

$$u\left[v' - \frac{1}{x} \cdot v\right] + u' \cdot v = \frac{K}{x}. \tag{7}$$

Hacemos

$$v' - \frac{1}{x} \cdot v = 0 \quad \therefore \quad \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x},$$

de donde

$$Lv = Lx + LC_1, \quad v = C_1 \cdot x \tag{8}$$

(*) En esta figura quiera el lector añadir la letra L en el punto de intersección de la recta m con el eje x.

Pero, en (7) quedó

$$u' . v = \frac{K}{x} \quad .\because. \quad u' . C_1 . x = \frac{K}{x}$$

de donde

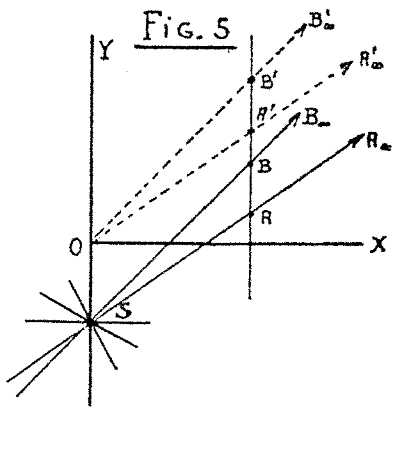
$$du = \frac{K}{C_1} X^{-2}\, dx, \quad .\because. \quad u = -\frac{K}{C_1} \cdot \frac{1}{x} + C_2. \tag{9}$$

Sustituyendo (8) y (9) en (6) se obtiene:

$$y = C_1 . C_2 . x - K, \tag{10}$$

que es la ecuación de la curva buscada.

Para cada valor de K la 10 representa, con el variar de C_1 y C_2, el haz de rectas que pasa por un punto situado sobre el eje de las Y a $-K$ del origen, o sea, la curva buscada es el haz de rectas de centro S, (Fig. 5).



Es evidente que la tangente en A, B, ... a las rectas SA, SB, ... son las mismas rectas y las paralelas a estas tangentes desde O determinan segmentos $AA' = BB' = \ldots = K = OS$.

Es evidente también que la proyectividad $\mathcal{P}$ subordinada en la impropia cuando es parabólica se convierte en la *identidad*, con lo que queda analizado el caso propuesto.

10. Es fácil ahora demostrar lo siguiente: *en una curva W no hay más que un centro proyectivo O y si hay más de uno existen infinitos, siendo la curva una cónica.*

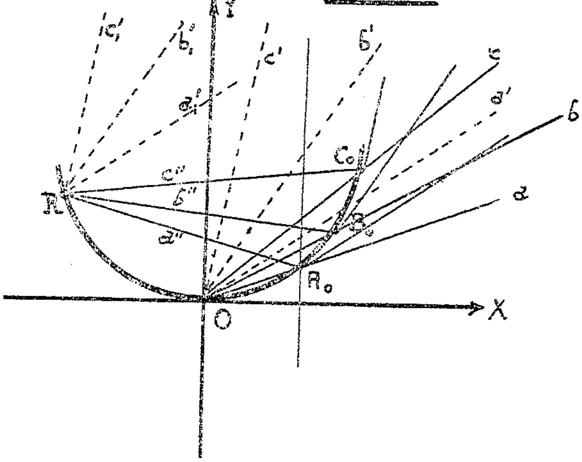
Sea, (Fig. 6), $O\,(a\,b\,c \ldots)$ el haz que desde el centro proyectivo proyecta los puntos de la curva y $O\,(a'\,b'\,c' \ldots)$ el que proyecta los puntos impropios de las tangentes.

Por definición de la curva

$$O(a\,b\,c\ldots) \uparrow O(a'\,b'\,c'\ldots).$$

Si R es otro centro proyectivo llamemos $a_1\,b_1\,c_1\ldots$ las rectas que desde él proyectan los mismos puntos de la curva

FIG. 6



y $a'_1\,b'_1\,c'_1\ldots$ el haz que proyecta los impropios de las tangentes, en cuyo caso se tendrá,

$$R(a'_1\,b'_1\,c'_1\ldots). \uparrow R(a_1\,b_1\,c_1\ldots)$$

Pero,

$$O(a'\,b'\,c'\ldots) \uparrow R(a'_1\,b'_1\,c'_1\ldots)$$

por cuanto ambos proyectan la misma puntual impropia, luego,

$$O(a\,b\,c\ldots) \uparrow R(a_1\,b_1\,c_1\ldots).$$

Pero, la curva dada, por resultar como intersección de rayos correspondientes de dos haces proyectivos, es una cónica en cuyo caso hay infinitos centros proyectivos.

Sería sencillo ahora considerar el caso en que las cónicas degeneran en rectas.

11. Puede resolverse por similitud el siguiente problema: *dado un triángulo* $X_\infty Y_\infty Z$ (donde $X_\infty Y_\infty$ pueden ser reales y distintos, reales y coincidentes o imaginarios) *determinar las curvas cuyos puntos proyectados desde* Z (Fig. 7) *formen sobre el lado opuesto una puntual* ABC ... *proyectiva con la* $A'B'C'$ ... *que determinan sobre ella las normales a la curva en esos puntos y en que* XY *sean unidos en tal proyectividad.*

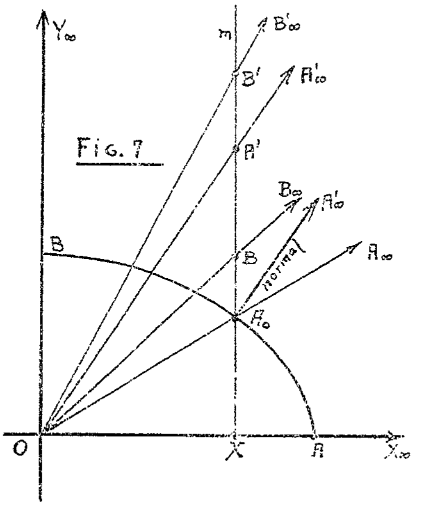


Fig. 7

Sea A_0 un punto de la curva de coordenadas $x\ y$; sea OA'_∞ la paralela por O a la normal en A_0 y cortemos con la ordenada de A_0 los rayos proyectantes de O y la puntual impropia que determinan los normales. Se tendrá:

$$\begin{array}{l} m\,(A_0\,B\,C\ldots XY_\infty) \\ \uparrow \\ m\,(A'\,B'\,C'\ldots XY_\infty). \end{array}$$

Para que X_∞ sea doble se requiere que la normal pase por X_∞ por lo cual será $\|$ por lo menos al eje de las X y para que Y_∞ sea doble se requiere que la normal pase por Y_∞ por lo cual será $\|$ por lo menos al eje de las Y.

Como estas puntuales tienen un punto unido impropio, ellas son semejantes y se tiene:

$$\frac{XA_0}{XA'}=\frac{XB}{XB'}=\ldots=K.$$

Pero,

$$XA_0=y;\quad XA'=x\,.\,\mathrm{tag}\,A'OX=x\,.\,\frac{-1}{y'}$$

de donde

$$-\frac{yy'}{x}=K, \quad \therefore \quad y\,.\,y'=-K\,.\,x$$

que es la ecuación diferencial de la curva buscada.

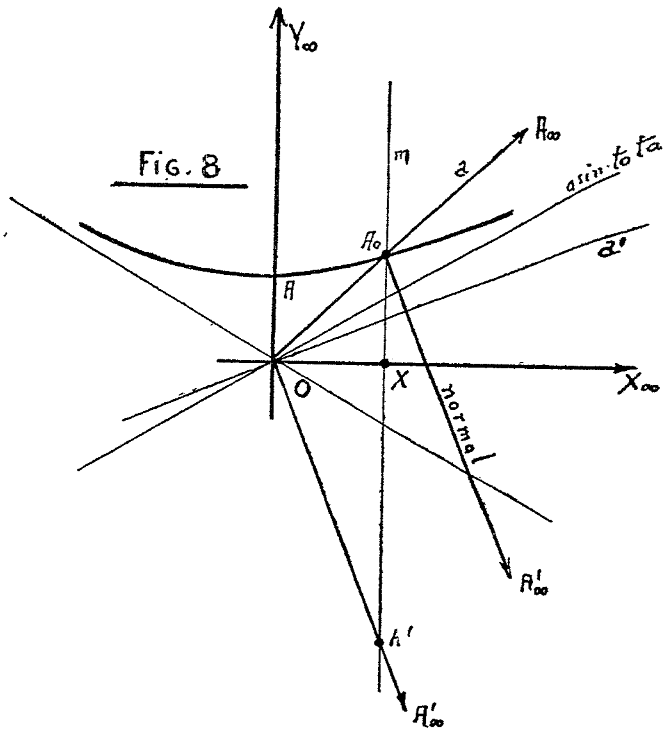
Se deduce:

$$y\,.\,dy=-Kx\,.\,dx,$$

y de aquí,

$$\frac{y^2}{2}=-K\frac{x^2}{2}+C', \quad y^2=C-Kx^2. \qquad (11)$$

Si $K>0$ esta curva es una elipse cuyo centro es O, Fig. 7; en este caso en los vértices A y B los rayos proyectantes se



confunden con las normales y la proyectividad que se subordina en la impropia es hiperbólica de elementos unidos $X_\infty Y_\infty$.

Si $K < 0$ los segmentos XA_0 y XA' tienen sentido contrario y la curva es una hipérbola con su eje principal vertical, Fig. 8. La dirección de las asíntotas es $\pm\sqrt{K}$ y la normal en el vértice A se confunde con el rayo proyectante, por lo cual el punto Y_∞ es un punto unido de la proyectividad subordinada sobre la impropia.

Como todos los diámetros de la hipérbola están comprendidos en uno de los ángulos que forman las asíntotas y sus diámetros conjugados están en el ángulo suplementario, se deduce que las normales a estos diámetros conjugados, que tienen las direcciones de las normales a la hipérbola, no pueden coincidir con sus diámetros conjugados respectivos salvo que el ángulo de dos diámetros sea recto. Como esto sólo ocurre con los ejes, la proyectividad subordinada sobre la impropia es hiperbólica con los puntos unidos en $X_\infty Y_\infty$.

Si $K = 0$ la (11) se transforma en el sistema de dos rectas paralelas al eje de las X y es un caso límite del recién analizado.

Si $K = 1$ la (11) se convierte en un círculo de radio $\sqrt{C}$ y como en la circunferencia el haz proyectante de O se confunde con el haz de las normales se deduce que la homografía subordinada sobre la impropia es la identidad.

12. Si XY, elementos dobles de la homografía impropia, son los cíclicos del plano ella se convierte en la involución absoluta. Al proyectar ésta desde O sobre m, Fig. 9, ella se transforma en una involución elíptica y como el conjugado de M es Y_∞ el M es centro de tal involución, por lo cual puede escribirse

$$MA_0 \,.\, MA' = K.$$

Pero,

$$MA_0 = y; \quad MA' = x \,.\, \operatorname{tg} A'OM = \frac{x}{y'},$$

o sea

$$\frac{y \,.\, x}{y'} = K.$$

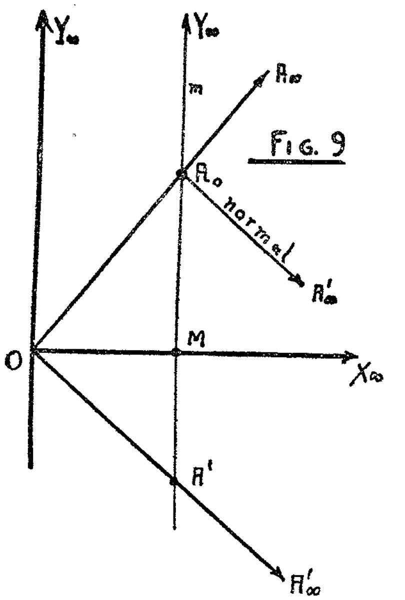


FIG. 9

Además, en el triángulo A_0OA' se tiene que

$$MA_0 \, . \, MA' = \overline{OM}^2 \;\therefore\; K = x^2,$$

luego

$$\frac{y \, . \, x}{y'} = x^2, \quad y' = \frac{y}{x}$$

que es la ecuación diferencial de la curva buscada. Integrando se obtiene

$$y = C_1 \, . \, x.$$

Esta expresión representa el haz de rectas de centro O y es evidente que la proyección de sus puntos desde O y las normales a una recta en sus puntos subordinan sobre la impropia la involución absoluta.

13. La propiedad estudiada en el nº. 11 nos permite enunciar el siguiente:

Teorema: *Si desde el centro de una cónica se proyectan sus puntos y se trazan en ellos las normales* (o las tangentes (2)) *dad que con respecto a las normales es hiperbólica con puntos unidos en los impropios de sus ejes.*

Con respecto a las tangentes esa proyectividad es involutoria, pues es la que subordina sobre la impropia los pares de diámetros conjugados, recayéndose en este caso en una propiedad conocida de las cónicas.

14. La propiedad estudiada en el nº. 7 permite, cuando se tienen puntos de una curva binomial y la tangente en uno de esos puntos, trazar las tangentes o normales en otros puntos, construyendo la proyectividad que queda subordinada sobre la impropia.

Análogamente: cuando se conocen los ejes de una cónica,

---

(2) Ver llamada (1).

puntos de ella y la normal en uno de esos puntos pueden trazarse las normales (o tangentes) en ellos construyendo la proyectividad subordinada sobre la impropia según termina de exponerse en el nº. 13.

Este método es mucho más orgánico y sencillo, cuando se trate de un número apreciable de puntos donde hay que trazar normales (o tangentes), que el conocido de determinar la tangente (o normal) mediante un exágono de Pascal, pues, esto exigiría la construcción de n exágonos, lo que complica enormemente el dibujo.

15. Hemos estudiado las curvas que satisfacen los enunciados de los números I y II utilizando el sistema cartesiano de vértices $X_\infty\ OY_\infty$. Si a esta figura se le aplica una homografía
tices $X_\infty\ OY_\infty$. Si a esta figura se le aplica una homografía
general proyectiva los ejes se transforman en un triángulo vulgar XOY y como en la transformación homográfica se conservan las propiedades proyectivas y el grado de las curvas no varía en la transformación ocurrida, queda contestado el problema general propuesto en esos párrafos, siendo ahora cuestión de *traducir* al lenguaje de la homografía general lo antes expuesto.