Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät
Institut für Mathematik
Prof. Dr. A. Filler

Wintersemester 2019/20

Zusammenfassende Notizen zur Vorlesung

Einführung in die Mathematikdidaktik und Didaktik der Geometrie
Teil 6

6 Begriffsbildung in der Schulgeometrie

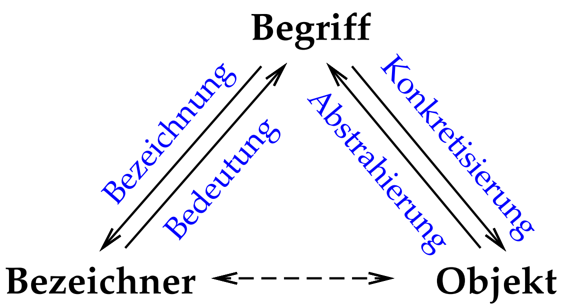
6.1 Fundierung mathematischer Begriffe

Begriffe werden in der Schule i. Allg. anders gebildet als in der Hochschulmathematik. Hier sind zwei Varianten üblich, nämlich die axiomatische Fundierung von Grundbegriffen und darauf basierende Definitionen darauf aufbauender Begriffe sowie der Aufbau mathematischer Gebiete auf der Basis bereits bekannter Theorien (z. B. der Geometrie auf der Grundlage der linearen Algebra).[1] In der Schule hingegen wird stärker von Objekten der Umgebung, von der Anschauung und von Vorstellungen ausgegangen. Begriffe entstehen aus der Auseinandersetzung mit konkreten Objekten und ihren Eigenschaften heraus.

Der Kern von Begriffen besteht *„aus einem ganzen System inner- und außermathematischer Zusammenhänge, das in einem langen und verwickelten didaktischen Forschungs- und Entwicklungsprozeß* [...] *aufbereitet wird* [...]. *Dieser Prozeß hat eigentlich nie ein Ende. Er ist zwar primär stofforientiert, muss aber auch Vermittlungsfragen beachten und hat daher eine ausgeprägt hermeneutische*[2] *Natur. Insbesondere führt er (schon von seiten des Stoffes her!) nicht zu einem eindeutigen Begriff."* Bender (1991)[3]

6.2 Semiotisches Dreieck: Begriff – Bezeichner – Objekt

Begriffe grenzen Klassen von Objekten ein (objektiv), subjektiv werden sie durch Vorstellungen, „gedachte" Bilder, „mentale Modelle" gebildet. Sie umfassen konkrete Objekte („Dinge") und man gibt Begriffen Namen bzw. Symbole (Bezeichner).[4] Das semiotische[5] Dreieck verdeutlicht die Beziehungen zwischen Begriffen, konkreten Objekten und Namen/Symbolen.



6.3 Bestandteile von Begriffsverständnis

Zum *Verstehen eines Begriffes* gehört weit mehr als die Kenntnis einer Definition.

- Vorstellungen über Merkmale oder Eigenschaften eines Begriffs und deren Beziehungen untereinander → Vorstellungen über den *Begriffsinhalt*

[1] Vergleichen Sie die Einführung des Begriffs „Gerade" in Ihren Vorlesungen zur Linearen Algebra und zur Elementargeometrie.

[2] Hermeneutik: Theorie über die Auslegung von Texten und über das Verstehen.

[3] Bender, P. (1991): Ausbildung von Grundvorstellungen und Grundverständnissen – ein tragendes didaktisches Konzept für den Mathematikunterricht – erläutert an Beispielen aus den Sekundarstufen. In H. Postel (Hrsg.): Mathematik lehren und lernen: Festschrift für Heinz Griesel, S. 48-60. Hannover: Schroedel.

[4] Bezeichnungen in dem hier abgebildeten semiotischen Dreieck nach Anselm Lambert; statt „Bezeichner" findet man auch oft „Symbol", statt „Objekt" auch „Ding", „Gegenstand" oder „Referent".

[5] Semiotik: „Bedeutungslehre"; Theorie vom Wesen, von der Entstehung (Semiose) und vom Gebrauch von Zeichen.

- Überblick über die Objekte, die unter einem Begriff zusammengefasst werden
  → Vorstellungen über den *Begriffsumfang*
- Beziehungen eines Begriffs zu anderen Begriffen → Vorstellungen über *Begriffsnetze*

6.4 Arten von Begriffen in der Geometrie

Objektbegriffe

- Punkt, Gerade, Strahl, Ebene
- Winkel
- Dreiecke, Vierecke, Vielecke
- spezielle Dreiecke
- Vierecksarten (Haus der Vierecke)
- Kreis
- Sehnenviereck
- Körper (Quader, Würfel, Prisma, Pyramide, Zylinder, Kegel, Kugel)

Relationsbegriffe

- liegt auf, gehört an (ist Element von)
- parallel, senkrecht
- gleich lang, gleich groß (Winkel)
  – Spezialfälle von Kongruenz
- ist Mittelpunkt von
- Nebenwinkel (Scheitel-, Stufen, Wechselwinkel) zueinander sein
- sind symmetrisch zueinander
- kongruent (deckungsgleich), ähnlich, flächengleich

Objektbegriffe, die durch Relationen zu anderen Objekten bestimmt sind

- Schnittpunkt, Schnittgerade
- Mittelsenkrechte, Winkelhalbierende
- Umkreis
- Thaleskreis

Abbildungsbegriffe

- Drehung, Verschiebung, Spiegelung
- Kongruenzabbildung (Bewegung)
- zentrische Streckung
- Ähnlichkeitsabbildung

Zu den Abbildungen gehören weitere ***Begriffe, die Objekte bezeichnen, welche die Abbildungen kennzeichnen***, z. B.:

- Symmetrieachse
- Verschiebungspfeil, Drehzentrum, Drehwinkel
- Streckzentrum, Streckfaktor

Maßbegriffe

- Länge (genauer: Längenmaß)
- Winkelgröße, Winkelweite (genauer: Winkelmaß)
- Umfang
- Flächeninhalt
- Oberflächeninhalt
- Volumen

Maßbegriffe sind aus fachsystematischer Sicht *Abbildungsbegriffe* (eindeutige Zuordnungen reeller Zahlen zu Punktmengen); jedoch erfordert das Erkennen dieser Gemeinsamkeit ein Maß an Abstraktion, das bei Schülern i. Allg. noch nicht gegeben ist.

6.5 Mentale Modelle

Mentale Modelle sind interne Repräsentationen mathematischer Begriffe. Strukturen mentaler Modelle lassen sich nur aufgrund von Äußerungen und Handlungen des Einzelnen erschließen.

Die Begriffsbildung im Sinne der Konstruktion mentaler Modelle ist:

- *Abstraktionsprozess*

  An realen Gegenständen werden Eigenschaften ignoriert, um Vorstellungen über das geometrische Objekt aufzubauen.

  z. B. bei Begriffen von Körpern: Beschriftungen auf Verpackungen, Nahtstellen bei Dosen, Augenzahlen bei Spielwürfeln

- *Idealisierungsprozess*

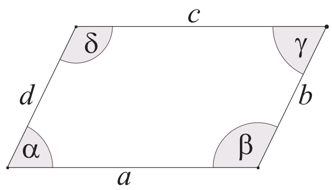
  Eigenschaften werden in ein reales Objekt hineingesehen, die so in der Realität nicht vorhanden sind; z. B.: Vorstellungen über den Begriff „Gerade“ werden aus mit einem Lineal gezogenen Linien, Faltlinien, Zimmerkanten, … entwickelt, indem von Dicke und räumlicher Begrenztheit abgesehen wird und Eigenschaften wie unbegrenzte Länge hineingesehen werden.

Mentale Modelle

- repräsentieren einen Begriff aufgrund bestimmter Eigenschaften und Beziehungen zwischen diesen Eigenschaften
- können sprachliche, bildliche und handlungsbezogene Komponenten umfassen
- Vorstellungen beziehen sich auf einen besonders typischen oder auf typische Vertreter – sogenannte Prototypen
- können aber auch auf andere Vertreter des Begriffs übertragen werden

Mentale Modelle am Beispiel des Begriffs *Parallelogramm*

Prototypische Vorstellungen:



Kenntnisse, die den Begriff wesentlich konstituieren:

- parallele Gegenseiten,
- gleich lange Gegenseiten,
- gleich große Gegenwinkel.

Fähigkeiten, die mentale Modelle des Begriffs mit bestimmen:

- erzeugen – durch mentales Variieren von Seiten und Winkeln – von Sonderfällen wie Rechteck, Raute und Quadrat,
- erzeugen von Deckabbildungen durch Drehung um 180° an dem Schnittpunkt der Diagonalen,
- erzeugen einer Parkettierung der Ebene durch Aneinanderlegen.

6.6 Lernen geometrischer Begriffe

Lernen geometrischer Begriffe		
Aufbau angemessener Vorstellungen	*Erwerb von Kenntnissen*	*Aneignen von Fähigkeiten*
Handeln	Eigenschaften	Konstruieren
Wahrnehmen	Beziehungen zwischen Eigenschaften	Berechnen
Verbalisieren	Beziehungen zu anderen Begriffen	Problemlösen

6.6.1 Aufbau angemessener Vorstellungen

Vorstellungen entwickeln sich aus

- *Handlungen* an konkreten Objekten,
- *Wahrnehmungen* an Gegenständen und Bildern sowie aus

- *Beschreibungen* von geometrischen Objekten.

→ Wechselbeziehung

Handlungen

Für die Ausbildung von Vorstellungen ist es wichtig, dass (vorgestellte) Objekte *variiert* werden und dass mit ihnen *operiert* werden kann, d. h. dass Größen verändert oder Objekte als Ganzes transformiert werden.

PIAGET (1896-1970): Denken ist verinnerlichtes oder vorgestelltes Handeln.

- Handeln nicht als Selbstzweck, kein vordergründiges Tätigsein
- Handlungen sind zielgerichtet durchzuführen

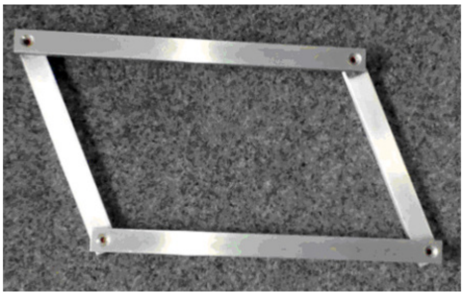
Kennzeichnend für verinnerlichte Handlungen – „*Operationen*“ – sind Flexibilität oder Beweglichkeit, d. h. sie sind

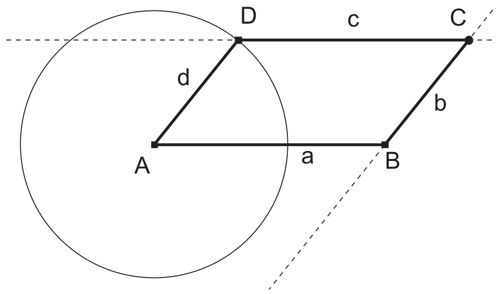
- umkehrbar (reversibel)
- zusammensetzbar (kompositionsfähig)
- assoziativ (Ziel auf verschiedene Weisen erreichbar)

Bewusster Umgang mit Objekten: „Was passiert, wenn ...“ → Grundlage des operativen Prinzips

Beispiel:
Operativer Umgang mit einem Gelenkparallelogramm und einer entsprechenden Computersimulation

Bei einer beweglichen Gelenkkonstruktion aus jeweils zwei gleich langen Stäben können die Winkel verändert werden.



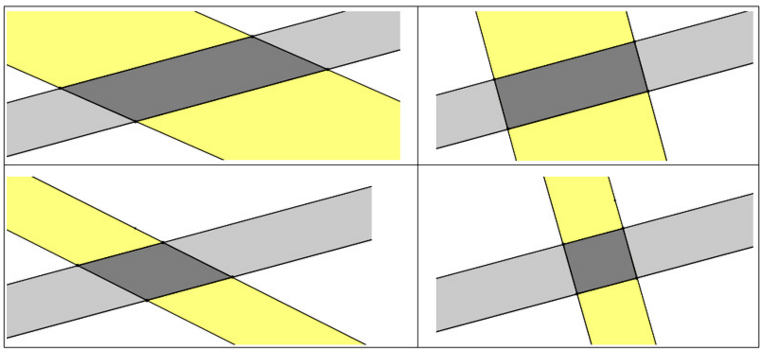


Leitfragen im Sinne des operativen Prinzips:

- Was bleibt gleich? (Parallelität der Gegenseiten, Gleichheit der Gegenwinkel, Winkelsumme benachbarter Innenwinkel)
- Was verändert sich? (Form, Abstand der parallelen Seiten, Flächeninhalt des Parallelogramms)

Beispiel: *Phänomen der Überlappung von Parallelstreifen als Ausgangspunkt zur Begriffsentwicklung Parallelogramm* [6]

Schneide aus farbigem Transparentpapier Parallelstreifen aus und lege zwei Streifen übereinander. Verwende verschieden dicke, aber auch gleich dicke Streifen. Beschreibe die entstehenden Vierecke.



[6]Einführung des Begriffs Parallelogramm in dem Schulbuch GRIESEL: Elemente der Mathematik 1 (5. Klasse)

Folgende *Leitfragen* können die Begriffsbildung unterstützen:

- Welche Seiteneigenschaften besitzt die Figur? Wie kannst du diese Eigenschaften begründen?
- Welche Auswirkungen hat die Breite der beiden Streifen?
- Welche Auswirkungen hat der Winkel, den beide Streifen einschließen?
- Welche Figur erhältst du, wenn die beiden Streifen senkrecht zueinander sind?

Raute, Rechteck und Quadrat sollen als spezielle Parallelogramme erkannt werden, die jedoch zusätzliche Eigenschaften aufweisen.

Schülerinnen und Schüler müssen Handlungen nicht unbedingt selbst durchführen. Die Entwicklung von Vorstellungen kann auch auf beobachteten oder vorgestellten Handlungen beruhen.

Zentral für die Begriffsentwicklung sind:

- *Aufmerksamkeitsfokussierung* auf jeweils bestimmte Beziehungen oder Abhängigkeiten,
- *Reflektieren* der eigenen Tätigkeit,
- *Verbalisierung* der durchgeführten Handlungen.

Wahrnehmungen

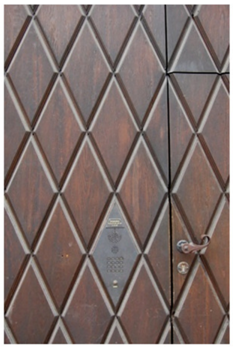
Durch Betrachten entwickeln Schüler ganzheitliche Vorstellungen von Figuren und Körpern, d. h. nicht von speziellen Eigenschaften.

Wichtig:

- Figuren an ihrer Form unabhängig von der Lage erkennen
- Seiten-, Winkel- oder Symmetrieeigenschaften erkennen

Parallelogramme in der Umwelt: hauptsächlich Rauten, Rechtecke und Quadrate → müssen bewusst in ein Begriffsnetz eingeordnet werden.





- Vielfach *dominieren* bei den Begriffsvorstellungen die *Unterschiede* zwischen Figuren (etwa Quadrat und Rechteck) gegenüber den Gemeinsamkeiten.
- Dies kann insbesondere bei den Vierecken zu einer *partitionalen Klassifizierung* führen: Innerhalb einer Klasse von Vierecken er- scheinen die verschiedenen *Unterklassen als zueinander disjunkt*.
- Z. B.: Rechteck wird nicht als Parallelogramm und ein Quadrat nicht als Rechteck erkannt.
- Besonders wichtig daher: „*Haus der Vierecke*“

Übung: *Haus der Vierecke*

Betrachten Sie folgende Arten von Vierecken:

– beliebige Vierecke	– Drachenvierecke	– Rauten (Rhomben)	– Quadrate
– Trapeze	– Parallelogramme	– Rechtecke	

- Stellen Sie diese Vierecke in einer Art Baumdiagramm dar (oben bzw. unten befinden sich die speziellste und die allgemeinste Kategorie von Vierecken).

- Stellen Sie alle zwischen diesen Klassen von Vierecken bestehenden Teilmengenbeziehungen durch Pfeile dar.
- Geben Sie drei verschiedene Definitionen des Begriffs „Raute“ durch die Wahl verschiedener Oberbegriffe an.

Verbalisierungen

Vorstellungen werden u. a. durch Erläuterungen aufgebaut – häufig mit optischen Darstellungen und Handlungen verbunden. Schülerinnen und Schüler sollen aber auch lernen, Vorstellungen über Objekte durch rein verbal formulierte Problemstellungen aufzubauen. Hierzu eignen sich u. a. *Übungen zur Kopfgeometrie*.

Stellt euch ein Parallelogramm vor. Denkt die Diagonalen eingezeichnet.

- Wie viele Teildreiecke seht ihr?
- Stellt euch eine Parallele zu einem Seitenpaar durch den Mittelpunkt (Schnittpunkt der Diagonalen) vor. Wie viele Teildreiecke sind es jetzt?

- Verbalisierungen gehen mit Vorstellungen oder gedanklichen (mentalen) Bildern einher.
- Üblicherweise prägt ein typischer Vertreter – *Prototyp* – die Vorstellungen über eine gesamte Begriffsklasse.
- *Wechselbeziehung* der drei Aktivitäten *Handeln*, *Wahrnehmen* und *Beschreiben* im Unterrichtsprozess

6.6.2 Erwerb von Kenntnissen

Geometrische Begriffe haben bestimmte Eigenschaften, die sie charakterisieren. Zum Verstehen eines Begriffs gehören Kenntnisse

- über Eigenschaften,
- über die Beziehungen zwischen diesen Eigenschaften und
- über die Beziehungen des Begriffs zu anderen Begriffen.

Eigenschaften des Parallelogramms

1. Gegenüberliegende Seiten sind parallel.
2. Gegenüberliegende Seiten sind gleich lang.
3. Gegenüberliegende Winkel sind gleich groß.
4. Benachbarte Winkel ergänzen sich zu 180°.
5. Die Diagonalen halbieren sich gegenseitig.

Beziehungen zwischen Eigenschaften

1. Gegenüberliegende Seiten sind parallel, also sind sie auch gleich lang.
2. Gegenüberliegende Winkel sind gleich groß, also ergänzen sich benachbarte Winkel zu 180°.
3. Halbieren der einen und Verdoppeln der anderen Seitenlänge lässt den Flächeninhalt unverändert.

Beziehungen zu anderen Begriffen

1. Sind in einem Parallelogramm alle Seiten gleich lang, dann ist es eine *Raute*.
2. Sind in einem Parallelogramm benachbarte Winkel gleich groß, so müssen alle Winkel 90° sein. Das Parallelogramm ist dann ein *Rechteck*.
3. Gegenbeispiele zu einem Parallelogramm sind der *Drachen* (falls er keine Raute ist) und das *Trapez* (falls nicht beide gegenüberliegende Seitenpaare jeweils parallel sind).

Das Vorhandensein derartiger Kenntnisse über Begriffe und Eigenschaften zeigt sich vor allem dann, wenn sie im Rahmen von Aufgaben- und Problemstellungen angewandt werden können.

6.6.3 Aneignung von Fähigkeiten

Zum Verstehen eines geometrischen Begriffs gehören Fähigkeiten im Umgang mit dem Begriff:

- Konstruieren
- Berechnen (von Streckenlängen, Winkelgrößen, Flächeninhalten und Volumina)
- Fähigkeit zum Problemlösen (einschließlich Beweisprobleme)

Konstruieren können

> Konstruiere ein Parallelogramm aus zwei benachbarten Seiten und dem eingeschlossenen Winkel, z. B. $\overline{AB} = 6$ cm; $\overline{BC} = 4$ cm und $\beta = 60°$.

- Konstruieren kann hier ein Arbeiten „mit Zirkel und Lineal“ bedeuten, es kann sich aber auch auf die Werkzeuge Geodreieck oder DGS beziehen.
- Wichtig bei derartigen Aufgabenstellungen ist es, dass Lernende die Eigenschaften des Parallelogramms für die Konstruktion nutzen.

Berechnen können

> Berechne den Flächeninhalt eines Parallelogramms, von dem eine Seite $a = 6$ cm und die zugehörige Höhe $h_a = 4$ cm bekannt sind.

- Diese Aufgabe ist eine „reine“ Berechnungsaufgabe – lediglich Werte müssen in eine Formel eingesetzt werden.
- Berechnungsaufgaben lassen sich aber auch in Problemkontexte einbinden.

Probleme lösen können

> Gegeben sind der Flächeninhalt A eines Parallelogramms und die Länge einer Seite a.
>
> a) Berechne die Länge der Höhe h_a.
>
> b) Sind dadurch auch die Längen der anderen Seite b und der Höhe h_b festgelegt? (Begründung)

Bei diesem (wenngleich für problemorientierte Aufgaben recht einfachen) Beispiel lässt sich die Formel zur Berechnung des Flächeninhalts nicht unmittelbar anwenden.

6.7 Definieren

Definieren lernen ist ein Ziel des Mathematikunterrichts

→ begriffliche Präzision
→ Herauskristallisieren des (logisch) Wesentlichen
→ Erkennen von Zusammenhängen

Nicht alle Begriffe lassen sich definieren, wie die folgenden Definitionsversuche zeigen.

- Ein *Punkt* ist der Anfang einer Linie (PLATO, ca. 380 v. Chr.).
- Ein *Punkt* ist eine unteilbare Einheit, die eine Position besitzt (ARISTOTELES, ca. 340 v. Chr.).
- Was keine Teile hat, ist ein *Punkt* (EUKLID, ca. 325 v. Chr.).
- Ein *Punkt* ist, was keine Teile hat oder eine Begrenzung ohne Dimension oder die Grenze einer Linie (HERON, ca. 50 n. Chr.).
- *Punkte* sind Anfänge von Größen und das, woraus diese erwachsen. Weiterhin sind *Punkte* die einzigen Objekte, die über eine Position verfügen (SIMPLICIUS, 6. Jh. n. Chr.).

Bestimmte *Grundbegriffe* sind bei einem Aufbau der Geometrie „aus dem Nichts“ bzw. aus sich selbst heraus *nicht definierbar*.

DAVID HILBERT (1899): Wir denken 3 Systeme von Dingen;

die Dinge des 1. Systems nennen wir *Punkte* ...;
die Dinge des 2. Systems nennen wir *Geraden* ...;
die Dinge des 3. Systems nennen wir *Ebenen* ... .

Wir denken die Punkte, Geraden und Ebenen in gewissen gegenseitigen Beziehungen und bezeichnen diese Beziehungen durch Worte wie „*liegen*“, „*zwischen*“, „*parallel*“, „*kongruent*“, „*stetig*“; die ... Beschreibung dieser Beziehungen erfolgt durch die Axiome der Geometrie.

„Man muss jederzeit anstelle von Punkten, Geraden und Ebenen Tische, Stühle und Bierseidel sagen können.“

Dieser Abstraktionsanspruch ist allerdings in der Schule nicht realisierbar. Vielmehr sind Grundbegriffe mit anschaulichen Vorstellungen und Erfahrungen verknüpft.

Minimalität vs. Anschaulichkeit von Definitionen

- Ein Rechteck ist ein Viereck mit vier rechten Winkeln.

Es würde auch reichen:

- Ein Rechteck ist ein Viereck mit drei rechten Winkeln.

Verschiedene Definitionen aufgrund verschiedener Oberbegriffe

- Ein Rechteck ist ein Parallelogramm mit einem rechten Winkel.

Verschiedene Definitionen aufgrund der Wahl anderer artbestimmender Merkmale

- Ein Rechteck ist ein Viereck, bei dem gegenüberliegende Seiten gleich lang sind und das einen rechten Winkel hat.
- Ein Rechteck ist ein Parallelogramm, bei dem die Seiten senkrecht aufeinander stehen.
- Ein Rechteck ist ein Parallelogramm mit gleich langen Diagonalen.

Definitionen bestehen aus *Oberbegriffen* und *artbestimmenden* Merkmalen (oder Angaben zur *Entstehung* von Objekten, die durch einen Begriff bezeichnet werden).

Da ein vollständiger axiomatischer Aufbau der Geometrie im Mathematikunterricht nicht betrieben wird, kommt auch bei Definitionen das Prinzip des *lokalen Ordnens* zur Anwendung.
$\rightarrow$ Aufbau von *Begriffsnetzen*.

Für Begriffe, die definiert und für Begriffe, die dafür benutzt werden, müssen ausreichend fundierte mentale Modelle vorliegen.

Begriffe lassen sich – je nach bereits vorhandenem Wissen – auf verschiedene Weisen definieren.

- Ein *Parallelogramm* ist ein Viereck, bei dem die Gegenseiten jeweils parallel sind.
- Ein *Parallelogramm* ist ein Viereck mit jeweils zwei gleich langen Gegenseiten.
- Ein *Parallelogramm* ist ein Viereck, bei dem sich die Diagonalen gegenseitig halbieren.
- Ein *Parallelogramm* ist ein punktsymmetrisches Viereck.

Je nach verwendeter Definition ergeben sich andere Eigenschaften des Parallelogramms dann als Folgerungen und können bewiesen werden. („Rollentausch“: Definitionen $\leftrightarrow$ Sätze)

6.7.1 Genetische und charakterisierende Definitionen

Genetische Definitionen

Im Geometrieunterricht werden häufig Definitionen verwendet, bei denen angegeben wird, wie der Begriff entsteht (genetische Definitionen).

- Ein *Parallelogramm* ist ein Viereck, das entsteht, wenn sich zwei Parallelstreifen schneiden.
- Ein *Kreis* entsteht, wenn sich ein Punkt einmal im festen Abstand um einen (festen) Punkt bewegt.
- Ein *Prisma* ist ein Körper, der durch Parallelverschiebung eines ebenen Vielecks entlang einer nicht in der Ebene liegenden Strecke entsteht.

- Ein *Kegel* ist ein Körper, der entsteht, wenn alle Punkte eines Kreises mit einem Punkt außerhalb der Ebene, in der der Kreis liegt, verbunden werden.

Charakterisierende Definitionen

Bei charakterisierenden Definitionen werden Begriffe durch ihre Eigenschaften beschrieben.

- Ein *Parallelogramm* ist ein Viereck, bei dem gegenüberliegende Seiten parallel sind.
- Ein *Kreis* ist die Menge aller Punkte, die von einem gegebenen Punkt denselben Abstand haben.
- Ein *Prisma* ist ein Körper, der zwei in parallelen Ebenen gelegene kongruente Vielecke als Grund- und Deckfläche und Parallelogramme als Seitenflächen hat.
- Ein *Kegel* ist ein Körper, der von einem Kreis und einer Mantelfläche in Form eines Kreissektors begrenzt wird.

Die Vorteile genetischer Definitionen liegen in ihrer Anschaulichkeit und in der Nachvollziehbarkeit auf der enaktiven und ikonischen Ebene. Sie stellen allerdings keine Definitionen im Sinn einer axiomatisch aufgebauten Theorie dar.

6.8 Mittelfristiges Lehren geometrischer Begriffe

Schlüsselbegriffe

- beziehen sich auf grundlegende Phänomene und geben Unterrichtsreihen ein Gepräge,
- treten im Unterricht mehrfach wieder auf,
- werden in einem mittelfristigen Prozess gelernt und langfristig vertieft und „angereichert".

Beispiel: *Kongruenz*

A. Klärung eines neuen Phänomens

- Schlüsselbegriffe erwachsen aus Problemstellungen, die der Klärung grundlegender Phänomene dienen.

Beispiel Kongruenz:

- Wie kann man feststellen kann, dass zwei Figuren die gleiche Form und die gleiche Größe haben?

B. Erzeugung neuartiger Problemstellungen

- Schlüsselbegriffe erzeugen typische Problemstellungen.

Beispiel Kongruenz:

- Woran erkennt man, dass zwei Figuren kongruent sind?
- Wie kann man zu einer Figur eine kongruente Figur erzeugen?

C. Erzeugung neuer Methoden

- Schlüsselbegriffe liefern häufig neue Methoden zum Lösen von Problemen.

Beispiel Kongruenz:

- Kongruenzbetrachtungen: wirkungsvolle Methode zum Beweis geometrischer Sätze.

D. Erzeugung neuer Einsichten

- Schlüsselbegriffe sind geeignet, neue Einsichten in Eigenschaften von Objekten zu gewinnen und Beziehungen zwischen Objekten zu entdecken.

Beispiel Kongruenz:

- So kann man entdecken, dass eine spezielle Strecke eine Figur in zwei zueinander kongruente Teile zerlegt, oder dass zwei Figuren zueinander kongruente Teilfiguren besitzen.

E. Erzeugung neuer Begriffsbildungen

- Häufig führt ein Schlüsselbegriff zur Bildung neuer Begriffe.

Beispiel Kongruenz:

- Spezialisierung → Begriffe der gleichsinnigen Kongruenz bzw. der gegensinnigen Kongruenz
- Generalisierung → Begriff der Ähnlichkeit

6.9 Das Stufenmodell von van Hiele

PIERRE und DINA VAN HIELE, Freudenthal-Institut Utrecht, 1964;
vgl. FRANKE, Didaktik der Geometrie in der Grundschule, Spektrum, 2007.

Fünf Niveaustufen geometrischen Denkens

0. Niveaustufe: *Räumlich-anschauungsgebundenes Denken (Visualization)* – Primarstufe[7]

- geometrische Objekte werden als einprägsames Ganzes wahrgenommen;
- Figuren wie Quadrat, Rechteck, Dreieck, Viereck und Kreis können benannt werden (ohne nähere Begründung);
- kein Erkennen der Bestandteile und Eigenschaften;

1. Niveaustufe: *Geometrisch-analysierendes Denken (Analysis)* – Primarstufe

- Wahrnehmung auch von Eigenschaften von Objekten
- Beschreibung und Erkennen von beschriebenen geom. Objekten
- Klassifizierung (Sortieren), aber i. d. R. keine Klasseninklusionen

2. Niveaustufe: *Geometrisch-abstrahierendes Denken (Abstraction)* – Primarstufe / Sekundarstufe I

- Klasseninklusion (z.B. Rechteck vs. Quadrat, Haus der Vierecke)
- erste Ableitungen und logische Schlüsse

3. Niveaustufe: *Geometrisch-schlussfolgerndes Denken (Deduction)* – Sekundarstufe I/II

- verstärkter Einsatz logischer Schlussfolgerungen (Deduktion)
- Rolle von Definitionen, Axiomen, Sätzen u. Beweisen wird erkannt

4. Niveaustufe: *Strenge, abstrakte Geometrie (Rigor)* – Sekundarstufe II / Hochschule

- Formale, abstrakte Geometrie
- Gleichwertigkeit verschiedener Definitionen wird erkannt
- Aufbau und Vergleich von Axiomensystemen

[7] Die Stufen sind nicht unbedingt altersabhängig. Schülerinnen und Schüler können in demselben Alter unterschiedliche Stufen erreichen. Die Angaben „Primarstufe“ usw. sind daher als ungefähre Zuordnungen zu betrachten.