

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS

CONSEJO SUPERIOR
DE INVESTIGACIONES CIENTIFICAS

INSTITUTO DE ASTRONOMIA Y GEODESIA

(Centro mixto C.S.I.C. - U.C.M.). MADRID

Publicación núm. 139

ASTRONOMIA GEODESICA

por

M. J. SEVILLA



PUBLICADO EN "TOPOGRAFÍA Y CARTOGRAFÍA"
Vol. I, núm. 6, págs. 30-39

MADRID

1984



ASTRONOMIA GEODESICA

Por M. J. SEVILLA

Instituto de Astronomía y Geodesia (UCM-CSIC)
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense. Madrid.

1. Introducción.

La astronomía geodésica es aquella parte de la geodesia (o de la astronomía) que tiene por objeto la determinación de las coordenadas geográficas astronómicas, *latitud* ϕ y *longitud* λ , de puntos de la superficie terrestre y de acimutes astronómicos A de direcciones en la Tierra. Estas determinaciones se realizan por métodos astronómicos de observación de estrellas en posiciones convenientes, utilizándose principalmente métodos de cálculo de trigonometría esférica y de álgebra matricial junto al ajuste de observaciones por mínimos cuadrados. Las principales aplicaciones geodésicas de los resultados obtenidos son la determinación de la figura de la Tierra (geoide) y la compensación astrogeodésica de redes.

La *precisión* alcanzada en cada determinación está en función del instrumento y método empleados; atendiendo a la desviación típica σ de los resultados las determinaciones astronómicas suelen clasificarse en diferentes órdenes: Se denominan trabajos de observatorio cuando $\sigma \leq 0.09''$ para latitud y longitud; trabajos de primer orden cuando $0.1'' < \sigma \leq 0.3''$ para latitud y longitud y $0.2'' < \sigma \leq 0.4''$ para acimut; y trabajos de segundo orden cuando $0.4'' < \sigma \leq 1''$ para latitud y longitud y $0.5'' < \sigma \leq 1.5''$ para acimut.

Atendiendo a esta clasificación revisaremos algunos instrumentos y métodos de los más comúnmente empleados y estudiaremos los problemas que en determinaciones de alta precisión plantean las variaciones del sistema de referencia local, así como la situación real del sistema de referencia geográfico en el que deberemos obtener los resultados finales.

2. Teoría de instrumentos.

Comencemos con el *anteojo de pasos*; éste es un instrumento destinado a la determina-

ción del instante en que una estrella pasa por un plano vertical dado, es pues, necesario que el movimiento del tubo del anteojo tenga lugar únicamente en este plano vertical. En cualquier posición del anteojo sólo se consideran dos ejes; el eje de rotación que pasa por los puntos centrales de los pivotes sobre los que descansa y que puede considerarse como un diámetro de la esfera celeste local; y el eje de colimación que es perpendicular al anterior y pasa por el centro óptico de la lente del objetivo; el ángulo que el rayo de luz, línea marcada por un hilo del retículo y el centro del objetivo, forma con este eje es la colimación.

En estas circunstancias, sea K el punto de intersección de la esfera celeste con la semirecta que contiene al eje de rotación hacia el oeste. Sean $270^\circ - a$ y b las coordenadas horizontales de K y $90^\circ - m$ y n sus correspondientes coordenadas ecuatoriales horarias; en un lugar de latitud ϕ se verifican las relaciones fundamentales

$$\begin{aligned} \text{sen } n &= \text{sen } b \text{ sen } \phi - \text{cos } b \text{ cos } \phi \text{ sen } a \\ \text{cos } n \text{ sen } m &= \text{sen } b \text{ cos } \phi + \text{cos } b \text{ sen } \phi \text{ sen } a \end{aligned}$$

Si se observa una estrella de coordenadas ecuatoriales ascensión recta α y declinación δ , y si llamamos $\tau = -H$, siendo H el ángulo horario correspondiente, y c a la colimación, se obtiene

$$\text{sen } (\tau - m) = \text{tag } n \text{ tag } \delta + \text{sen } c \text{ sec } n \text{ sec } \delta$$

Estas fórmulas nos permiten estudiar las condiciones óptimas de trabajo en el sentido de disminuir al máximo algunos errores de la observación, resultando que para determinar τ o α interesa que el anteojo esté en el meridiano y para determinar ϕ o δ que esté en el primer vertical.

Instalado el anteojo en el meridiano las coordenadas horizontales de K deberían ser exactamente $(270, 0)$, evidentemente, esto es

imposible de lograr debido a las dificultades reales de puesta en estación, quedando siempre unas pequeñas desviaciones que llamaremos constante acimutal, a , y constante de nivel, b ; además, sigue existiendo la constante de colimación, c . Tanto a , b y c como m , n y τ pueden considerarse infinitésimos de primer orden, por lo que en aproximación lineal las fórmulas fundamentales pueden escribirse

$$\begin{aligned}n &= b \operatorname{sen} \phi - a \operatorname{cos} \phi, \\m &= b \operatorname{cos} \phi + a \operatorname{sen} \phi, \\ \tau &= m + n \operatorname{tag} \delta + c \operatorname{sec} \delta.\end{aligned}$$

La última es la *fórmula de Bessel* que sirve para calcular la corrección que debe ser añadida al tiempo sidéreo T observado de paso de una estrella por el hilo central para obtener el tiempo sidéreo del tránsito de la estrella por el meridiano. Entonces la ascensión recta a de la estrella vendrá dada por $a = T + \delta T + \tau$, siendo δT el estado del reloj. Obsérvese que si a es conocida puede determinarse el estado del reloj (que puede aplicarse a la determinación de la longitud). Es indispensable que la ascensión recta esté corregida de aberración diurna.

A partir de la fórmula de Bessel puede obtenerse la llamada *fórmula de Hansen*:

$$\tau = b \operatorname{sec} \phi + n(\operatorname{tag} \delta - \operatorname{tag} \phi) + c \operatorname{sec} \delta,$$

muy conveniente para reducir observaciones cerca del cénit o cuando hay que reducir muchas estrellas con los mismos valores de las constantes.

Otra variante de estas fórmulas, la más antigua, es la llamada *fórmula de Mayer*:

$$\tau = a \frac{\operatorname{sen}(\phi - \delta)}{\operatorname{cos} \delta} + \frac{\operatorname{cos}(\phi - \delta)}{\operatorname{cos} \delta} + \frac{c}{\operatorname{cos} \delta},$$

que presenta ventajas cuando la constante a se da directamente o cuando se pretende estudiar. Estas fórmulas están dadas para la culminación superior, su adaptación a la culminación inferior es inmediata.

Para la aplicación práctica de estas fórmulas debe procederse, en general, a la determinación previa de las constantes. Sabido es que la colimación se elimina si se observa en posición directa e invertida del instrumento; también puede determinarse observando una estrella a su paso por dos hilos distintos del retículo y en ambas posiciones; sin embargo, el procedimiento más indicado es determinar c directamente con ayuda de anteojos colimadores. La constante acimutal a se puede determinar observando el tránsito de dos estrellas, aplicando a ambas la fórmula de Mayer, restando los resultados así obtenidos y despejando a ; se lograrían determinaciones óptimas tomando una estrella cerca del polo y otra próxima al ecuador, con un intervalo lo más corto posible. En función de a se obtiene n . Para la determinación de la inclina-

ción b del eje horizontal debe usarse el nivel caballero o el baño de mercurio en observatorios.

Si el anteojo se sitúa en el primer vertical, las coordenadas horizontales de K serán $(180, 0)$, entonces $a = 90^\circ$ y $m = 90^\circ$ y las ecuaciones fundamentales se escriben

$$\begin{aligned}\operatorname{cos}(b + \phi) &= f \operatorname{cos} F, \\ \frac{\operatorname{sen}(m - \tau)}{\operatorname{sen} m} \operatorname{sen}(b + \phi) &= f \operatorname{sen} F, \\ \delta &= -F + \frac{c}{f},\end{aligned}$$

útiles cuando se trata de obtener declinaciones, y

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} \delta &= g \operatorname{sen} G, \\ \frac{\operatorname{sen}(m - \tau)}{\operatorname{sen} m} \operatorname{cos} \delta &= g \operatorname{cos} G, \\ \phi &= -G - b - \frac{c}{g},\end{aligned}$$

si se trata de latitudes.

El *teodolito*, como se sabe, dispone de círculos horizontal y vertical que permiten medir acímutes y alturas, por consiguiente, deberemos establecer en cada caso las correspondientes fórmulas fundamentales. El ajuste del instrumento consistirá en: a) hacer que el eje principal del anteojo sea perpendicular al eje horizontal, b) hacer que los ejes de rotación, horizontal y vertical sean perpendiculares entre sí, c) hacer que el eje principal y el rayo de luz marcado por el hilo central del retículo coincidan y d) hacer que el eje vertical del instrumento coincida con la vertical física de la estación. En estas condiciones el teodolito materializará el sistema de referencia horizontal local.

El ajuste del instrumento no será perfecto por lo que siempre quedarán pequeños defectos residuales que deberán eliminarse, bien por el procedimiento seguido en la observación, bien con la ecuación general del instrumento. Consideremos entonces las siguientes desviaciones: inclinación del eje horizontal respecto al horizonte del lugar que designaremos por b y que será positiva cuando el extremo del eje al lado del círculo quede elevado sobre el horizonte; colimación, c , positiva cuando el hilo está en el lado opuesto del eje principal respecto del círculo vertical; e inclinación del eje vertical con respecto a la vertical física del lugar que designaremos por i .

En estas condiciones, para la medida de *ángulos horizontales* se obtiene la ecuación:

$$A = R + \Delta A \pm b \operatorname{cotg} z \pm c \operatorname{cosec} z,$$

donde ΔA es la corrección de índice que habrá que determinar, R es la lectura del

círculo horizontal con CD (círculo vertical a la derecha) que difiere 180° de la lectura CI (círculo vertical a la izquierda). Los signos superiores se emplean para CI y los inferiores para CD.

Para la medida de *ángulos verticales* se obtienen las ecuaciones en distancia cenital:

$$z = Z - (V+l) + \Delta z \quad (\text{para CI})$$

y

$$z = (V'+l') - Z + \Delta z' \quad (\text{para CD}),$$

siendo V y V' las lecturas del círculo vertical; l y l' la mitad de la suma algebraica de las lecturas de los extremos de la burbuja del nivel del círculo vertical; la constante Z representa el punto cenital del instrumento; y Δz es la corrección por colimación e inclinación del eje horizontal que, si c y b están dados en segundo de arco, viene dado por

$$\Delta z = \left(\frac{c+b}{2}\right) \text{sen } 1'' \text{cotg } \frac{1}{2} z' - \left(\frac{c-b}{2}\right) \text{sen } 1'' \text{tag } \frac{1}{2} z',$$

donde z' es la distancia cenital observada.

La determinación de las constantes se hace con la observación de estrellas conocidas o con anteojos colimadores y niveles. En las determinaciones muy precisas se observan varias estrellas conocidas y se aplica el método de mínimos cuadrados. Obsérvese que estas constantes, en realidad no son tales pues cambian con cada determinación.

3. Métodos de astronomía geodésica.

Para determinar el *acimut astronómico* de una dirección terrestre basta medir el ángulo horizontal que dicha dirección forma con el plano vertical de una estrella y sumar o restar este ángulo al o del acimut astronómico de la estrella. Si se conoce la posición del observador (ϕ, λ) y las coordenadas de la estrella (α, δ) sólo hay que determinar en un instante conocido bien el ángulo horario H, o bien la distancia cenital z, de la estrella, a partir de los cuales se determina el acimut de la estrella por una de las fórmulas:

$$\text{tag } A = \frac{\text{senH}}{\text{sen}\phi \cos H - \cos\phi \text{tag}\delta},$$

$$\cos A = \frac{\text{sen}\delta - \cos z \text{sen}\phi}{\text{senz} \cos\phi}.$$

La precisión del acimut obtenido depende de muchos factores, fundamentalmente del instrumento utilizado y del método seguido en la observación; es por esto por lo que interesará, además de conocer perfectamente el instrumento, seleccionar un método de trabajo que elimine o minimice los errores

de observación. Así van apareciendo los diferentes procedimientos de observación: de ángulos horarios (tiempos) de estrellas cerca de las máximas digresiones, ángulos horarios cerca de las culminaciones, o por combinaciones de observaciones como alturas de estrellas simétricas respecto del meridiano, alturas iguales de estrellas, etc. y en cada uno habrá que indicar las fórmulas que hay que aplicar con las correcciones oportunas.

Podemos concluir que en determinaciones de primer orden de acímetros dos son los métodos recomendados: el método del ángulo horario de la estrella Polar para nuestras latitudes, evidentemente el mejor instante será en las máximas digresiones, y el método micrométrico; se utilizará un instrumento de alta precisión tipo Wild T4, o Kern DKM 3-A, o Zeiss 002, etc. Para determinaciones de segundo orden, con teodolitos geodésicos, pueden utilizarse métodos de ángulo horario, de alturas de estrellas, o de alturas iguales. Existen, además, otros métodos que podríamos llamar de tercer orden entre los que se encuentran el método de los ángulos horarios en el cruce con un almicanatarat, el de variación de la distancia cenital, etc.

Teóricamente la determinación de latitudes está basada en la observación de estrellas y resolución del correspondiente triángulo de posición. En principio, si se observan distancias cenitales, la latitud se obtiene resolviendo en ϕ la ecuación

$$\cos z = \text{sen } \delta \text{sen } \phi + \cos \delta \cos \phi \cos H,$$

y si lo que se miden son ángulos acimutales se resolverá esta otra

$$\text{tag } A = \frac{\text{senH}}{\text{sen}\phi \cos H - \cos\phi \text{tag}\delta}.$$

Ahora bien, al igual que para el acimut, habrá que seleccionar el método de trabajo que elimine o minimice los errores de observación. Hecho esto, van apareciendo los métodos fundamentales como son la observación de distancias cenitales meridianas cuyo principal inconveniente es la influencia que sobre las distancias cenitales tiene la refracción atmosférica. Una variante de este método es el de distancias cenitales circunmeridianas en el que es preciso efectuar una reducción al meridiano de la distancia cenital observada para lo que suele utilizarse la conocida fórmula de Delambre. Otros métodos que se presentan ventajosos son los de distancias cenitales iguales de dos estrellas, el de acímetros de dos estrellas cerca de las máximas digresiones, el método de Littrow por distancias cenitales de la estrella Polar, etc.

En el proceso de aplicación de cualquier método deben distinguirse tres fases bien delimitadas: la preparación de listas puntero, la observación propiamente dicha y la reducción de las observaciones; en la primera y tercera se recomienda el uso de

ordenadores.

Podemos concluir que en determinaciones de primer orden de latitudes los métodos recomendados son: los de distancias cenitales meridianas, directo o de Sterneck o la variante de Horrebow-Talcott y el método de Pevtsov de distancias cenitales iguales de dos estrellas; en ellos se utilizan teodolitos astronómicos. Para determinaciones de segundo orden, usando teodolitos geodésicos, pueden emplearse métodos de distancias cenitales meridianas y circunmeridianas, método de Littrow, de alturas iguales o de ángulos horizontales. Otros métodos menos precisos o de tercer orden son los de distancias cenitales cualesquiera, distancias cenitales iguales de una misma estrella, ángulos horarios en el primer vertical, etc.

La determinación de longitudes astronómicas está basada en la relación

$$\lambda = \theta - \theta_G,$$

donde θ es el tiempo sidéreo aparente local, que se determina por observación, y θ_G es el tiempo sidéreo aparente en Greenwich, que se obtiene por sincronización del reloj patrón. Si se utiliza un reloj de tiempo medio el problema se resuelve por un cambio de escala, debiendo emplearse un UT1, es decir libre del movimiento del polo.

Como $\theta = \alpha + H$, siendo α la ascensión recta de la estrella y H su ángulo horario correspondiente, si λ_0 es un valor aproximado de la longitud, la ecuación fundamental se escribe

$$\Delta \lambda = \lambda - \lambda_0 = \alpha + H + \Delta \lambda_p - (T_S + \Delta T_S)$$

donde $\Delta \lambda_p$ es la corrección por movimiento del polo, T_S es el tiempo sidéreo local observado o calculado con el λ_0 provisional y con el UT1 y ΔT_S es el estado del reloj. Obsérvese que si λ se conociese exactamente podría determinarse ΔT_S , es decir el tiempo local.

En la práctica el problema de la determinación del tiempo será el de la determinación del ángulo horario, como indica la fórmula, de estrellas de coordenadas conocidas. Si se observan distancias cenitales en un instante T_S , el ángulo horario correspondiente viene dado por

$$\cos H = \frac{\cos z - \text{sen} \phi \text{sen} \delta}{\cos \phi \cos \delta};$$

si se observa en el meridiano, entonces $H = 0^h$ o 12^h , y $\theta = \alpha$ o $\alpha \pm 12^h$.

También en determinaciones de longitudes interesará observar estrellas en las posiciones más favorables, entre éstas conviene destacar: distancias cenitales de estrellas cerca del primer vertical, pasos de estrellas por el plano vertical de la Polar, distancias cenitales iguales, y en especial la observación de pasos meridianos de es-

trellas donde el tiempo determinado obedece a las fórmulas de la teoría del antejo meridiano. En cada método habrá que tener en cuenta las correcciones que deban aplicarse.

Podemos concluir que en determinaciones de primer orden de longitudes, ante todo debe utilizarse un antejo de pasos o un teodolito astronómico provisto de micrómetro impersonal y un equipo de tiempo de precisión; en estas condiciones los métodos recomendados son: el método de Mayer (pasos meridianos), el método de Doellen (pasos por el vertical de la Polar) y el método de Tsinger (distancias cenitales iguales); todos ellos aplicados con la máxima precisión. Para determinaciones de segundo orden con teodolitos geodésicos pueden utilizarse métodos de distancias cenitales próximas al primer vertical, de pasos meridianos, de alturas iguales, de ángulos horizontales, etc. y estos mismos con menor precisión valen para determinaciones expeditas.

Además de los métodos de determinaciones individuales de coordenadas astronómicas y acimutes, existen otros que determinan simultáneamente dos o las tres coordenadas. Algunos de estos métodos se emplean en segundo orden pero otros, como veremos, se emplean en determinaciones de observatorio con instrumentos especiales.

Un método para la determinación simultánea de latitud y acimut fue propuesto por Ghosh en 1953 y está basado en la observación de una simple estrella cuyas coordenadas no necesitan ser conocidas; se miden alturas y ángulos horizontales desde una referencia en tres posiciones distintas de la estrella separadas por lo menos una hora, es necesario corregir por refracción; si se observan varias estrellas puede aplicarse un ajuste por mínimos cuadrados. La observación de ángulos horizontales da lugar también a un método de determinación simultánea de longitud, latitud y acimut.

El método más interesante de determinación simultánea de latitud y longitud consiste en la medida de distancias cenitales y utilizar la relación

$$\cos z = \text{sen} \phi \text{sen} \delta + \cos \phi \cos \delta \cos (\theta_G - \lambda - \alpha),$$

este método se simplifica y es del mayor interés cuando todas las estrellas se observan en una misma distancia cenital en cuyo caso recibe el nombre de método de alturas iguales, que en su resolución gráfica se conoce como método de rectas de alturas.

En el método de alturas iguales uno de los principales problemas que se presenta es el de la confección de la lista puntero de las estrellas para observar a su paso por un almicantarat prefijado; la utilización de ordenadores y catálogos de estrellas lo resuelven perfectamente. En contrapartida la ejecución de la observación es muy fácil, pues basta determinar el instante en que la estrella cruza el hilo horizontal del instrumento o tiene lugar

la coincidencia de imágenes en el astrolabio supuesto instalado con la distancia cenital prefijada. Las ecuaciones de observación se plantean de la forma

$$\Delta Z + a\Delta\phi + b\Delta A + c = 0,$$

siendo

$$a = \cos \phi_{0,},$$

$$b = \cos \phi_{0,} \operatorname{sen} A_{0,},$$

$$c = \cos \phi_{0,} \operatorname{sen} A_{0,} [\theta_{0,} - (a+H_{0,})],$$

donde los subíndices indican valores aproximados calculados con los provisionales $z_{0,}, \phi_{0,}, A_{0,}$. Resuelto el sistema de ecuaciones, las coordenadas buscadas se obtienen por

$$\phi = \phi_{0,} + \Delta\phi, \quad A = A_{0,} + \Delta A.$$

El instrumento especialmente indicado para efectuar la observación en este método es el astrolabio de prisma y la máxima precisión se logra con el astrolabio impersonal Danjon.

Un método recientemente desarrollado para la determinación simultánea de latitud y longitud es el método de fotografías cenitales de estrellas. En él una cámara fotográfica en posición cenital toma fotografías del cielo en la misma placa y en cuatro posiciones simétricas. La reducción de la placa por las técnicas de lastrimetría clásica nos permite obtener la dirección espacial del punto principal imagen que debidamente transformados nos da la latitud y longitud del punto estación.

4. Variaciones de los sistemas de referencia.

Hemos visto que en el proceso de la astronomía geodésica para determinar coordenadas geográficas astronómicas (dirección de la vertical) y acimutes astronómicos de referencias situadas en la superficie terrestre, tres sistemas de referencia juegan un papel primordial: un sistema celeste de coordenadas (supuesto inercial) en el que se conocen las coordenadas de las estrellas observadas (sistema de catálogo); un sistema de referencia terrestre en el que se desean obtener las coordenadas del punto estación (ϕ, A) y que ha de ser el mismo para todos los puntos de la Tierra y un sistema de referencia local en el que se realizan las observaciones (definido por el instrumento en estación) distinto para cada punto. El primero tiene como eje fundamental la dirección espacial del eje de la Tierra, el segundo la dirección de dicho eje pero en la propia Tierra y el tercero la dirección de la vertical física en cada punto.

La determinación de coordenadas geográficas astronómicas y de acimutes astronómicos por los métodos de la astronomía geodésica está basada en la observación de estrellas en un sistema de referencia local instantáneo, el sistema horizontal, y en la relación de dicho sistema con el de coordena-

nadas geográficas; sistema terrestre. El sistema horizontal depende fuertemente de la dirección de la vertical y el sistema terrestre de la dirección instantánea del eje de la Tierra (de momento el eje de rotación), la relación entre ambos se tiene a través del meridiano astronómico. Entonces, es evidente que las variaciones relativas que sufran estas direcciones van a repercutir en los sistemas de referencia considerados y, por lo tanto, se van a producir variaciones en las coordenadas que se determinen; sin embargo, está claro que cuando dichas variaciones afecten por igual a todos los puntos de la Tierra, los sistemas de referencia y sus correspondientes coordenadas no se verán afectados por ellas; este es el caso de las variaciones en el espacio del eje de la Tierra (fenómenos de precesión y nutación) que nos relacionan los sistemas de referencia celeste (inercial) y terrestre instantáneo.

En cuanto a la relación del sistema celeste con el sistema horizontal, es claro que, como el eje de rotación de la Tierra queda invariable respecto a las estrellas, el cenit local, debido a la rotación terrestre, se desplaza en la esfera celeste; entonces puesto que polo (una paralela al eje de rotación) y cenit (vertical) definen el meridiano celeste, éste también es móvil sobre la esfera celeste (movimiento diurno); pero puesto que la vertical física sufre por su parte diversas variaciones, el movimiento del meridiano en la esfera celeste (manteniéndose paralelo al eje instantáneo de rotación) acusará estas variaciones y este meridiano celeste resultante es una referencia primaria estelar de la astronomía geodésica. Además, la intersección del plano meridiano real con la superficie de la Tierra, que define la meridiana, otra referencia primaria de la astronomía geodésica, tampoco se mantiene estacionaria sobre la superficie de la Tierra. En definitiva el plano meridiano sufrirá una rotación alrededor de la línea que conecta el punto estación con el polo y la meridiana oscilará sobre la Tierra.

El ángulo que forman sobre el meridiano la dirección vertical y la del eje de rotación es el complemento de la latitud, por consiguiente, la variación relativa de cualquiera de dichas direcciones provoca una variación de la latitud astronómica. El ángulo que forman dos meridianos (el meridiano origen y el local) es la longitud, por lo que la variación relativa de cualquiera de dichos planos provoca una variación de la longitud astronómica; y como el meridiano queda definido por las direcciones de la vertical y del eje de rotación, cualquier variación relativa de estas direcciones será causa de variación de la longitud astronómica.

El acimut astronómico de una dirección terrestre queda definido por el meridiano (plano vertical del polo) y el plano vertical del punto observado, por consiguiente, toda variación de la vertical del punto de observación, del eje de rotación de la

Tierra o de la posición del punto observado respecto del punto de observación repercutirá en el acimut determinado.

Las principales causas que hacen que varíe la vertical física respecto del eje de la Tierra son: (a) acción gravitatoria de marea lunisolar, (b) movimiento de la Tierra en su conjunto respecto de su eje de rotación (movimiento del polo), y son causas menores: (c) movimientos de placas tectónicas, (d) movimientos locales: sísmicos, meteorológicos... etc.

Los componentes este-oeste de estas fuerzas son las que tienen efecto en el movimiento (rotación) del meridiano local. En el caso a) se produce una variación de la vertical respecto a la Tierra misma, en el caso b) la vertical no varía con respecto a la Tierra sino con respecto a la esfera celeste y como la dirección local del polo no varía respecto de las estrellas, la meridiana ha de variar necesariamente respecto de la superficie de la Tierra.

Las componentes norte-sur provocan las variaciones de la latitud astronómica, complemento del ángulo entre la vertical y el eje de rotación. Las componentes este-oeste son las responsables de las variaciones de la longitud astronómica (y de los ángulos horarios), ángulos entre meridianos, así como de las variaciones de los acimutes astronómicos, al variar la meridiana sobre la superficie terrestre.

Las variaciones por marea que alteran las posiciones del cenit sobre la esfera celeste son efectos puramente geométricos que no producen cambios visibles, mientras que las variaciones por movimiento del polo sí son visibles puesto que se producen por un desplazamiento real del observador en el espacio.

Volviendo a la situación general, la distancia cenital de un cuerpo celeste observada desde la superficie de la Tierra, por ejemplo, en su culminación superior está afectada por la nutación y el movimiento del polo, pero estos efectos son en general separables. La nutación afecta la posición del polo celeste respecto a las estrellas, mientras que el movimiento del polo afecta a la dirección del polo celeste con respecto a una dirección de referencia local, es decir, la nutación cambia las coordenadas celestes (α, δ) observadas y el movimiento del polo cambia las coordenadas astronómicas (ϕ, λ) de los observatorios.

Todos estos efectos son cuantitativamente significativos si se efectúan observaciones astronómicas precisas y, en consecuencia, deben ser detenidamente estudiados y tenidos en cuenta a la hora de presentar los resultados finales. También es cierto que en la observación real todo se obtiene mezclado e incluso con inevitables errores de observación de todo tipo y con los posibles errores en las posiciones aparentes de las estrellas observadas. Sin embargo, gran parte de ellos son conocidos de antemano y pueden eliminarse por cálculo, otros lo son a posteriori y también pueden tener-

se en cuenta, aunque otros, los más pequeños, todavía no son conocidos con la precisión que se necesita o son enteramente desconocidos.

5. Variaciones por efecto de marea.

El potencial gravífico terrestre es la suma de tres potenciales: el potencial gravitatorio de todas las masas interiores del planeta, el potencial creado por la fuerza centrífuga debida al movimiento de rotación y el potencial gravitatorio creado por las masas exteriores que originará el potencial de marea.

El vector gravedad en cada punto podemos considerarlo como el gradiente del potencial gravífico; este vector estará dirigido hacia el centro de masas de la Tierra, su longitud representa la intensidad de la gravedad en el punto considerado y su dirección define la dirección de la vertical del lugar.

Ahora bien, este vector gravedad no es constante ni en magnitud ni en dirección, dado que las fuerzas atractivas que crean el potencial de marea dependen principalmente de las posiciones del Sol y de la Luna y éstas varían a lo largo del tiempo, siendo éste el fenómeno que da lugar a la periodicidad de las mareas.

Si suponemos la Tierra perfectamente rígida, podrían esperarse desviaciones de la vertical del orden de 0.04 segundo de arco y unas variaciones de la intensidad de la gravedad de 0.2 miligales, valores teóricos proporcionados por la mecánica celeste. En realidad la Tierra no puede suponerse rígida, sino que se admite la existencia de una cierta elasticidad y de una cierta viscosidad e incluso de un núcleo líquido, en estas circunstancias la tierra se deformará bajo la influencia del potencial lunisolar, cambiarán por tanto los valores de la desviación de la vertical e intensidad de la gravedad obtenidos en la hipótesis inicial y no sólo esto, sino que, además, el fenómeno dará lugar a tensiones y dilataciones cúbicas que no existirían si la Tierra fuera absolutamente rígida.

La teoría estática de mareas en la hipótesis de tierra rígida nos permite obtener las siguientes expresiones que escribimos para el caso de la Luna, pues para el Sol serían análogas.

Componente este-oeste de la desviación de la vertical

$$h^{EW} = G \frac{3Lr}{2d^3} \text{ sen } 2z \text{ sen } \lambda$$

$$= - G \frac{3Lr}{2d^3} (\text{sen } \phi \text{ sen } 2\delta \text{ sen } H + \text{cos } \phi \text{ cos } \delta \text{ sen } 2H),$$

donde G es la constante de gravitación, L es la masa de la Luna, r es el radio vector geocéntrico del punto estación y ϕ su latitud geocéntrica, d es la distancia entre

los centros de la tierra y la Luna, A y z son el acimut y distancia cenital de la Luna y H y δ su ángulo horario y declinación, respectivamente.

Si consideramos este desplazamiento como un arco de paralelo de declinación que pasa por el cenit, entonces el desplazamiento hacia el oeste del meridiano celeste en ángulo horario (longitud) es

$$\Delta H = h^{EW} \operatorname{sen} \phi$$

Esto aumenta el ángulo horario de la estrella y produce un anticipo en el tiempo de tránsito. La variación este-oeste provocada por la Luna con un coeficiente numérico es $0.0173'' \operatorname{sen} 2z \operatorname{sen} A$ y para el Sol $0.0082'' \operatorname{sen} 2z \operatorname{sen} A_s$.

Componente norte-sur de la desviación de la vertical

$$\begin{aligned} h^{NS} &= G \frac{3Lr}{2d^3} \operatorname{sen} 2z \operatorname{cos} A \\ &= -G \frac{3Lr}{2d^3} \left[\frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\psi (1 - 3\operatorname{sen}^2 \delta) - \operatorname{cos} 2\psi \operatorname{cos}^2 \delta \operatorname{cos} H \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\psi \operatorname{cos}^2 \delta \operatorname{cos} 2H \right]. \end{aligned}$$

Para la Luna y el Sol alcanza valores del mismo orden que la componente h^{EW} . La variación h^{NS} es precisamente la variación de la latitud debida al fenómeno de marea.

Estos valores teóricos en la hipótesis de Tierra rígida no responden ciertamente a la realidad aunque se aproximan; las medidas experimentales indican que dichas variaciones deben multiplicarse por un factor de reducción del orden de 0.7. También hay que indicar que incluso los valores reales que se obtienen por registros de marea terrestre y que son los que realmente deberían utilizarse, no son enteramente debidos a las causas antes indicadas, pues se encuentran perturbados por otros fenómenos indirectos como son los efectos de la marea oceánica, los movimientos sísmicos, y esto variando de un lugar a otro.

Los acimutes y distancias cenitales, como consecuencia de las variaciones del meridiano y del cenit, también se encuentran afectados por estos fenómenos. Digamos por último que las variaciones en las coordenadas hoy día son detectadas por el análisis de series de datos obtenidos en observatorios.

6. Variaciones por movimiento del polo.

Hemos visto que tanto las coordenadas astronómicas de una estación como el acimut de una dirección obtenidos por observación terrestre instantáneo variable con el tiempo. Sin embargo, nuestro interés está en obtener dichas coordenadas en un sistema de referencia terrestre que de alguna manera pueda considerarse fijo y por ello el mismo para todos los puntos de la superficie terrestre. Debemos por tanto efectuar

una transformación de sistema de referencia, que evidentemente es tan pequeña que pueden utilizarse fórmulas lineales.

Los parámetros de la transformación van a ser las coordenadas (x_p, y_p) del polo instantáneo respecto del polo medio en un plano tangente a la esfera precisamente en dicho polo. En definitiva para obtener las coordenadas geográficas corregidas, las coordenadas obtenidas por observación deberán corregirse con las siguientes expresiones para latitud, longitud y acimut respectivamente

$$\Delta \phi = -x_p \operatorname{cos} A + y_p \operatorname{sen} A,$$

$$\Delta \lambda = - (x_p \operatorname{sen} A + y_p \operatorname{cos} A) \operatorname{tag} \phi,$$

$$\Delta A = - (x_p \operatorname{sen} A + y_p \operatorname{cos} A) \operatorname{sec} \phi.$$

7. Sistema de referencia geodésico.

Una vez efectuadas las correcciones anteriormente mencionadas, nuestras coordenadas geográficas astronómicas nos resultan en un sistema de referencia terrestre, el mismo para todo punto de la superficie de la Tierra y que puede suponerse independiente del tiempo. Sin embargo, aún debemos precisar exactamente cuál es este sistema de referencia.

De manera inmediata podemos decir que éste es el sistema cuyo eje polar es aquel respecto al que conocemos las coordenadas del polo instantáneo de observación, por consiguiente es un sistema de referencia convencional, precisamente el utilizado para monitorizar el movimiento del polo, sobre esto volveremos más tarde.

Pero también hay que especificar cuál es el polo instantáneo a que nos referimos, pues, evidentemente, en principio son varias las posibilidades dada la diversidad de ejes que intervienen en el estudio teórico de la rotación de la Tierra, supuesta deformable (eje de rotación, de momento angular, de figura, etc.). No obstante, debemos pensar que dicho eje ha de cumplir dos condiciones fundamentales; una de tipo físico: ha de ser el polo al que realmente se refieren las observaciones, y al mismo tiempo otra de tipo teórico: ha de ser el polo que esté relacionado con el sistema celeste por la precesión y nutación adoptadas.

Los métodos de observación de alta precisión mencionados anteriormente, y en particular la determinación de latitudes, nos indican que se opera con posiciones de estrellas en sus culminaciones superior e inferior intervaladas con períodos de 12 horas. De esta forma, el eje al que realmente nos referimos no deberá tener movimientos periódicos casi diurnos pues si los tuviera (caso del eje de rotación) éstos no serían detectados por la observación. En consecuencia, el polo de observación es el correspondiente a un eje que no tenga movimientos casi diurnos ni respecto a un sistema de referencia fijo en la Tierra

(al que referiremos las coordenadas del polo) ni respecto a un sistema de referencia fijo en el espacio; esto último se consigue con una apropiada elección de las series de nutación. Este polo es el llamado Polo Celeste de Efemérides (PCE) que ciertamente no coincide con el tradicional eje de rotación, sino que será el centro de las trayectorias diurnas casi circulares de las estrellas en el cielo.

Hasta 1979 la Unión Astronómica Internacional (UAI) ha venido considerando como eje de referencia celeste el eje de rotación de la Tierra; ahora bien este eje, además de sufrir movimientos diarios de 60 cm de amplitud, sufre también movimientos con respecto al sistema inercial. En 1976, en Cambera, y en 1977, en Kiev, se introdujo por la UAI una nueva definición ligada al eje momento angular que no presenta variaciones diurnas en el espacio; tampoco fue oportuna esta elección y en 1979 en Montreal, se decidió tomar el polo celeste de efemérides que se obtiene al eliminar las variaciones diurnas con respecto a la Tierra del movimiento del eje momento angular. Entonces este polo queda determinado por la astronomía de posición y está perfectamente relacionado con el sistema inercial por medio de la precesión y nutación UAI-1980. En Astronomía comenzó a utilizarse el 1 de Enero de 1984.

Así pues, las coordenadas de las estrellas se toman de un catálogo (FK5) que definirá un sistema estelar inercial; la transformación a posiciones aparentes con la precesión (UAI-1976) y nutación (UAI-1980) nos lleva al sistema de observación cuyo polo es el celeste de efemérides; en este sistema obtendremos las coordenadas geográficas astronómicas observadas que una vez corregidas por movimiento del PCE respecto al polo convencional obtenemos las coordenadas astronómicas del punto de observación en el sistema de referencia terrestre que llamaremos sistema geodésico de referencia.

Ahora debemos explicar, por una parte cómo se define, determina y mantiene el sistema de referencia terrestre convencional, y por otra cómo se determinan las coordenadas del polo celeste de efemérides respecto al polo convencional anterior.

La definición de un eje para el sistema geodésico de referencia no es fácil. El polo celeste de efemérides se mueve respecto a la Tierra, por lo que no nos sirve (si esto no sucediera los problemas se simplificarían enormemente). Como hemos dicho repetidamente de lo que se trata es de buscar un polo terrestre que "no se mueva" al cual referir el movimiento del polo de efemérides. En los últimos años el movimiento del polo de rotación se refería al polo OCI (Origen Convencional Internacional) definido por las posiciones medias de ciertos observatorios situados más o menos en el paralelo geográfico de 39° de latitud norte. Este polo, con una precisión del orden del metro, no satisface hoy día las

necesidades de la geodesia que requiere precisiones del orden del centímetro.

También en la solución de este problema ha sido decisiva la intervención de la Unión Astronómica Internacional y de la Unión Internacional de Geodesia y Geofísica. Para ello se han creado las comisiones COTES (Comisión Terrestrial System) y el grupo MERIT (Monitory Earth Rotation by Intercomparison of Techniques). En resumidas cuentas se deben buscar unos ejes geográficos convencionales fijados por los observatorios que colaboren en los proyectos antes mencionados. El eje polar z estará próximo al OCI y al mismo tiempo ha de ser susceptible de relacionar la teoría (ejes de Tisserand) con la observación; el eje x , origen de longitudes, estará próximo al meridiano de Greenwich para no tener que cambiar todas las coordenadas geográficas existentes. Para determinar este sistema geodésico se necesitan muchos observatorios distribuidos sobre la superficie de la Tierra y equipados con las más modernas técnicas de observación para alcanzar las precisiones requeridas. Los datos obtenidos en estos observatorios deben ser estadísticamente ajustados tratando de obtener las posiciones óptimas de los ejes que hay que mantener a lo largo del tiempo. La definición de poliedros óptimos de puntos de observación y la técnica de constreñimientos internos juegan un papel decisivo en los cálculos correspondientes.

Terminemos dando algunas indicaciones sobre los métodos modernos para la determinación del movimiento del polo.

Los primeros resultados de observación que pusieron de manifiesto el movimiento del polo fueron los obtenidos por Chandler en 1891; entonces se comprobó que el movimiento observado tenía dos componentes principales: una revolución del polo verdadero respecto al polo de figura de 1.2 años en sentido directo, conocida como período Chandleriano, que difería del movimiento teórico de 305 días predicho por Euler en 1765 para una Tierra rígida, y superpuesto a éste otro de período anual.

Newcomb explicó que el alargamiento del período Chandleriano era debido a la elasticidad de la Tierra y el término anual se achaca a la redistribución de masas terrestres en procesos geofísicos y meteorológicos, por lo que cabe deducir la imposibilidad real de monitorizar teóricamente el movimiento del polo que sólo podrá determinarse por observación.

En 1899 se crea el ILS (International Latitude Service) que con métodos astronómicos desde estaciones localizadas en el paralelo de latitud 39° 08' N consigue monitorizar el movimiento del polo verdadero respecto al polo OCI definido como la posición media del polo terrestre entre 1900 y 1905. En 1962 se fundó el IPMS (International Pole Motion Service) que continúa publicando valores de las coordenadas del polo con datos obtenidos por los telesco-

pios cenitales visuales del ILS junto con datos de tubos fotográficos cenitales, astrolabios impersonales y círculos meridianos en aproximadamente 75 estaciones, reduciendo los datos con las fórmulas de la sección 6. Por otra parte, en 1955 en el BIH (Bureau International de L'heure) se estableció el RLS (Rapid Latitude Service) y en 1968 el BIH ajusta las posiciones de los observatorios para que el polo definido por el BIH coincida con el OCI; el ajuste de observaciones se efectúa por el método de Whitaker-Vondrak. Hasta 1972 sólo se utilizan observaciones astronómicas y es entonces cuando el BIH comienza a incluir observaciones Doppler a satélites, pero no así el IPMS.

Se ve entonces que las precisiones de los métodos astronómicos casi habían llegado a su límite debido a incertidumbres en: corrección de refracción atmosférica, posiciones y movimientos propios de las estrellas observadas, número limitado y mala distribución de observatorios, errores instrumentales, etc. También entonces es cuando se desarrollan los potentes métodos de la era espacial que mejoran las precisiones por lo menos en un orden de magnitud, pues, en la actualidad, mientras las precisiones de los métodos clásicos son de ± 40 cm. ($0.01''$), el seguimiento Doppler de satélites da ± 15 cm, la distanciometría láser a satélites ± 10 cm y la VLBI ± 4 cm ($0.001''$).

En la determinación del movimiento del polo por *seguimiento Doppler* de satélites artificiales, los satélites (serie Transit) en órbitas polares casi circulares a altitudes de unos 1.000 Km., emiten continuamente radioseñales en frecuencias de 399.968 MHz y 149.988 MHz generadas por el mismo patrón. La observación Doppler obtiene datos que permiten establecer sistemas de ecuaciones de observación bidireccionales para cada satélite, en las cuales las incógnitas fundamentales son: además de las coordenadas x_p, y_p del polo, seis parámetros orbitales, un factor de escala de arrastre, una frecuencia y un factor de escala troposférico para cada paso de satélite y las coordenadas de la estación (si son desconocidas); los parámetros del campo de gravedad terrestre y las posiciones de las estaciones de la red base se consideran fijos y las incógnitas se obtienen por un proceso de mínimos cuadrados. En este método la principal fuente de error la constituyen las perturbaciones en el movimiento del satélite. Las primeras experiencias Doppler para determinar el movimiento del polo se desarrollaron en el Naval Weapons Laboratory de los Estados Unidos en 1967 aunque sólo a partir de 1972 se obtuvieron datos del polo de cierta calidad para el DPMS (Doppler Pole Motion Service).

En el método de *distanciometría láser* a satélites (SLR) los satélites van provistos de retroreflectores que permiten obtener distancias estación-satélite por técnicas láser. Operando desde una sola estación se comparan las observaciones hechas en perio-

dos de 6 a 12 horas con una órbita, previamente calculada, de referencia muy precisa; se suelen analizar las variaciones de la inclinación de la órbita que están relacionadas con cambios en la latitud de la estación; de esta forma sólo puede monitorizarse una componente del movimiento del polo; la situación más ventajosa se da cuando la estación está situada cerca del apex (norte o sur) de la órbita pues entonces el satélite en la observación se estará moviendo en una trayectoria este-oeste al norte (u oeste-este al sur) de la estación. El principal problema es la estabilidad de la órbita de referencia.

Las primeras experiencias láser para determinar el movimiento del polo fueron efectuadas por el Goddard Space Flight Center de la NASA en 1970 utilizando el satélite Beacon Explorer C. Si se dispone de una red de estaciones, cuyas coordenadas sean conocidas, entonces pueden determinarse las componentes x_p, y_p del polo y no se necesita tanta precisión en el conocimiento de la órbita de referencia. Los primeros resultados de una red láser fueron presentados en 1976 obtenidos con el satélite LAGEOS que fue especialmente diseñado con una órbita de 6.000 Km de altitud, un radio de 30 cm y un peso de 400 Kg, esto reduce los efectos perturbadores de la presión de radiación solar, freno mecánico de la atmósfera, etc. Otros satélites para láser son el GEOSC y el francés Starlet.

En las aplicaciones de la *interferometría de muy larga base* (VLBI) al estudio del movimiento del polo los observables retraso y variación del retraso están relacionados con las coordenadas del polo por medio del modelo matemático establecido; situaciones especiales de las bases que conectan las estaciones de observación, de acuerdo con la sensibilidad de la VLBI a las variaciones de la orientación de la Tierra en el espacio, dan los mejores resultados en las coordenadas del polo. El experimento más característico de esta técnica es el llevado a cabo por el JPL (Jet Propulsion Laboratory, California) durante los últimos quince años; en él se han desarrollado sistemas VLBI para medir movimientos del polo, movimientos de la corteza y posiciones para un catálogo de radiofuentes extragalácticas. Las estaciones de observación son las de la DSN (Deep Space Network) de la NASA en California, España y Australia. Los primeros experimentos se hicieron en banda S (2,3 GHz), en 1977 se introdujo también banda X (8,4 GHz) y desde entonces se obtienen coordenadas del polo en forma rutinaria. En los sistemas de ajuste de observaciones por mínimos cuadrados entran un total de 744 parámetros incógnita clasificados en dos categorías: parámetros específicos de la estación y parámetros universales. Al primer grupo pertenecen cantidades tales como las que describen los equipos de tiempo de las estaciones, retrasos troposféricos y posiciones de estaciones y al segundo pertenecen el UT1, movimiento

del polo, posiciones de radiofuentes y constantes de precisión.

Desde 1980 también producen coordenadas del polo por VLBI el NGS (National Geodetic Survey) de los Estados Unidos usando datos con Mark III de las campañas MERIT y algunos grupos europeos como el de la Univer-

sidad de Bonn (Alemania Occidental) con el que vienen colaborando organizaciones españolas como el INTA, el IGN y el IAG. En definitiva diremos que la técnica VLBI es la que proporciona mayor precisión por lo que se espera que en el futuro sea fundamental en el problema de monitorizar el movimiento del polo.



MAPAS

TODO EN:

CARTOGRAFIA NACIONAL Y
EXTRANJERA
MAPAS DE NAVEGACION
MAPAS DE MONTAÑA
MAPAS ESCOLARES

MAPAS MUNDIS Y ATLAS
FOTOGRAFIAS AEREAS
GUIAS
APARATOS TOPOGRAFICOS
ETC...

PHOENIX 
S.A.

mapas

C/ Fdez. de los Ríos, 95
(Madrid-15)
Tfnos.:
449 31 07 - 449 30 00

PUBLICACIONES DEL INSTITUTO DE ASTRONOMIA Y GEODESIA
DE LA UNIVERSIDAD COMPLUTENSE — MADRID

(Antes Seminario de Astronomía y Geodesia)

- 1.—Efemérides de 63 Asteroides para la oposición de 1950 (1949).
- 2.—E. PAJARES: Sobre el cálculo gráfico de valores medios (1949).
- 3.—J. PENSADO: Órbita del sistema visual σ^2 U Maj (1950).
- 4.—Efemérides de 79 Asteroides para la oposición de 1951 (1950).
- 5.—J. M. TORROJA: Corrección de la órbita del Asteroide 1395 "Aribeda" (1950).
- 6.—R. CARRASCO y J. M. TORROJA: Rectificación de la órbita del Asteroide 1371 "Resi" (1971).
- 7.—J. M. TORROJA y R. CARRASCO: Rectificación de la órbita del Asteroide 1560 (1942 XB) y efemérides para la oposición de 1951 (1951).
- 8.—M. L. SIEGRIST: Órbita provisional del sistema visual Σ 728-32 Orionis (1951).
- 9.—Efemérides de 79 Asteroides para la oposición de 1952 (1951).
- 10.—J. PENSADO: Órbita provisional de Σ 1883 (1951).
- 11.—M. L. SIEGRIST: Órbita provisional del sistema visual Σ 2052 (1952).
- 12.—Efemérides de 88 Asteroides para la oposición de 1953 (1952).
- 13.—J. PENSADO: Órbita de ADS 9380 = Σ 1879 (1952).
- 14.—F. ALCÁZAR: Aplicaciones del Radar a la Geodesia (1952).
- 15.—J. PENSADO: Órbita de ADS 11897 = Σ 2438 (1952).
- 16.—B. RODRÍGUEZ-SALINAS: Sobre varias formas de proceder en la determinación de períodos de las marcas y predicción de las mismas en un cierto lugar (1952).
- 17.—R. CARRASCO y M. PASCUAL: Rectificación de la órbita del Asteroide 1528 "Conrada" (1953).
- 18.—J. M. GONZÁLEZ-ABOIN: Órbita de ADS 1709 = Σ 228 (1953).
- 19.—J. BALTÁ: Recientes progresos en Radioastronomía. Radiación solar hiperfrecuente (1953).
- 20.—J. M. TORROJA y A. VÉLEZ: Corrección de la órbita del Asteroide 1452 (1938 DZ₁) (1953).
- 21.—J. M. TORROJA: Cálculo con Cracovianos (1953).
- 22.—S. AREND: Los polinomios ortogonales y su aplicación en la representación matemática de fenómenos experimentales (1953).
- 23.—J. M. TORROJA y V. BONGERA: Determinación de los instantes de los contactos en el eclipse total de Sol de 25 de febrero de 1952 en Cogo (Guinea Española) (1954).
- 24.—J. PENSADO: Órbita de la estrella doble Σ 2 (1954).
- 25.—J. M. TORROJA: Nueva órbita del Asteroide 1420 "Radcliffe" (1954).
- 26.—J. M. TORROJA: Nueva órbita del Asteroide 1557 (1942 AD) (1954).
- 27.—R. CARRASCO y M. L. SIEGRIST: Rectificación de la órbita del Asteroide 1290 "Albertine" (1954).
- 28.—J. PENSADO: Distribución de los períodos y excentricidades y relación período-excentricidad en las binarias visuales (1955).
- 29.—J. M. GONZÁLEZ-ABOIN: Nueva órbita del Asteroide 1372 "Haremari" (1955).
- 30.—M. DE PASCUAL: Rectificación de la órbita del Asteroide 1547 (1929 CZ) (1955).
- 31.—J. M. TORROJA: Órbita del Asteroide 1554 "Yugoslavia" (1955).
- 32.—J. PENSADO: Nueva órbita del Asteroide 1401 "Lavonne" (1956).
- 33.—J. M. TORROJA: Nuevos métodos astronómicos en el estudio de la figura de la Tierra (1956).
- 34.—D. CALVO: Rectificación de la órbita del Asteroide 1466 "Mündleira" (1956).
- 35.—M. L. SIEGRIST: Rectificación de la órbita del Asteroide 1238 "Predappia" (1956).

- 36.—J. PENSADO: Distribución de las inclinaciones y de los polos de las órbitas de las estrellas dobles visuales (1956).
- 37.—J. M. TORROJA y V. BONGERA: Resultados de la observación del eclipse total de Sol de 30 de junio de 1954 en Sydkoster (Suecia) (1957).
- 38.—ST. WIERZBINSKI: Solution des équations normales par l'algorithme des cracoviens (1958).
- 39.—J. M. GONZÁLEZ-ABOIN: Rectificación de la órbita del Asteroide 1192 "Prisma" (1958).
- 40.—M. LÓPEZ ARROYO: Sobre la distribución en longitud heliográfica de las manchas solares (1958).
- 41.—F. MÚGICA: Sobre la ecuación de Laplace (1958).
- 42.—F. MARTÍN ASÍN: Un estudio estadístico sobre las coordenadas de los vértices de la triangulación de primer orden española (1958).
- 43.—ST. WIERZBINSKI: Orbite améliorée de h 4530 = γ Cen = Cpd -48° , 4965 (1958).
- 44.—D. CALVO BARRENA: Rectificación de la órbita del Asteroide 1164 "Kobolda" (1958).
- 45.—M. LÓPEZ ARROYO: El ciclo largo de la actividad solar (1959).
- 46.—F. MÚGICA: Un nuevo método para la determinación de la latitud (1959).
- 47.—J. M. TORROJA: La observación del eclipse de 2 de octubre de 1959 desde El Aaiun (Sahara) (1960).
- 48.—J. M. TORROJA, P. JIMÉNEZ-LANDI y M. SOLÍS: Estudio de la polarización de la luz de la corona solar durante el eclipse total de Sol del día 2 de octubre de 1959 (1960).
- 49.—E. PAJARES: Sobre el mecanismo diferencial de un celóstato (1960).
- 50.—J. M. GONZÁLEZ-ABOIN: Sobre la diferencia entre los radios vectores del elipsoide internacional y el esferoide de nivel (1960).
- 51.—J. M. TORROJA: Resultado de las observaciones del paso de Mercurio por delante del disco solar del 7 de noviembre de 1960 efectuadas en los observatorios españoles (1961).
- 52.—F. MÚGICA: Determinación de la latitud por el método de los verticales simétricos (1961).
- 53.—M. LÓPEZ ARROYO: La evolución del área de las manchas solares (1962).
- 54.—F. MÚGICA: Determinación simultánea e independiente de la latitud y longitud mediante verticales simétricos (1962).
- 55.—P. DíEZ-PICAZO: Elementos de la órbita de la variable eclipsante V 499 Scorpionis (1964).
- 56.—J. M. TORROJA: Los Observatorios Astronómicos en la era espacial (1965).
- 57.—F. MARTÍN ASÍN: Nueva aportación al estudio de la red geodésica de primer orden española y su comparación con la red compensada del sistema europeo (1966).
- 58.—F. SÁNCHEZ MARTÍNEZ: La Luz Zodiacal. Luz del espacio interplanetario (1966).
- 59.—J. M. GONZÁLEZ-ABOIN: Variaciones de las coordenadas geodésicas de los vértices de una red, por cambio de elipsoide de referencia (1966).
- 60.—F. SÁNCHEZ MARTÍNEZ y R. DUMONT: Fotometría absoluta de la raya verde y del continuo atmosférico en el Observatorio Astronómico del Teide (Tenerife), de enero de 1964 a julio de 1965 (1967).
- 61.—M. REGO: Estudio del espectro de la estrella 31 Aql. en la región $\lambda\lambda$ 4000-6600 A (1969).
- 62.—C. MACHÍN: Mareas terrestres (1969).
- 63.—J. M. TORROJA: La estación para la observación de satélites geodésicos de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Madrid (1969).
- 64.—M. J. SEVILLA: Reducción automática de posiciones de estrellas (1970).
- 65.—J. M. TORROJA: Memoria de las actividades del Seminario de Astronomía y Geodesia de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Madrid en 1969 (1970).
- 66.—M. J. SEVILLA: Los cálculos de estación en triangulación espacial (1970).
- 67.—MANUEL E. REGO: Determinación de las abundancias de los elementos en la atmósfera de la estrella de alta velocidad 31 Aql. (1970).
- 68.—M. J. FERNÁNDEZ-FIGUEROA: Análisis cualitativo del espectro de la estrella peculiar HD 18474 (1971).
- 69.—J. M. TORROJA: Memoria de las actividades del Seminario de Astronomía y Geodesia de la Universidad Complutense de Madrid en 1970 (1971).

- 70.—R. VIEIRA y R. ORTIZ: Descripción de un aparato para medida de coordenadas (1971).
- 71.—J. M. TORROJA: Memoria de las actividades del Seminario de Astronomía y Geodesia de la Universidad Complutense de Madrid en 1971 (1972).
- 72.—M. J. FERNÁNDEZ-FIGUEROA: Observación y estudio teórico del espectro de la estrella peculiar HD 18474 (1972).
- 73.—M. J. SEVILLA: Cálculo de las constantes de distorsión y parámetros del disco obturador para cámaras balísticas (1973).
- 74.—R. PARRA y M. J. SEVILLA: Cálculo de efemérides y previsiones de pasos de satélites geodésicos (1973).
- 75.—M. REGO y M. J. FERNÁNDEZ-FIGUEROA: Resultado de las observaciones de α Peg efectuadas desde el satélite europeo TDI (1973).
- 76.—E. SIMONNEAU: Problemas en la determinación de abundancias de elementos en las estrellas en condiciones de equilibrio termodinámico local y alejadas del equilibrio termodinámico local (1974).
- 77.—J. ARANDA: Construcción de modelos de estructura interna para estrellas en la secuencia principal inicial (1974).
- 78.—R. ORTIZ, M. J. SEVILLA y R. VIEIRA: Estudio de la calibración, técnica de medida y automatización de datos en un comparador para medidas de placas estelares (1974).
- 79.—M. J. SEVILLA: Método autocorrector para el cálculo de direcciones de satélites geodésicos y análisis de los errores en la restitución de un arco de órbita (1974).
- 80.—M. A. ACOSTA, R. ORTIZ y R. VIEIRA: Diseño y construcción de un fotómetro fotoeléctrico para la observación de ocultaciones de estrellas por la Luna (1974).
- 81.—T. J. VIVES, C. MORALES, J. GARCÍA-PELAYO y J. BARBERO: Fotometría fotográfica UVB del cúmulo galáctico King 19 (1974).
- 82.—R. ORTIZ y R. VIEIRA: Control automático en posición y tiempo de los sistemas de obturación de las cámaras de observación de satélites geodésicos (1974).
- 83.—J. M. TORROJA: Memoria de las actividades del Seminario de Astronomía y Geodesia de la Universidad Complutense de Madrid en 1972 y 1973 (1974).
- 84.—M. J. FERNÁNDEZ-FIGUEROA y M. REGO: α CrB en el ultravioleta lejano (1975).
- 85.—J. M. TORROJA, R. VIEIRA, R. ORTIZ y M. J. SEVILLA: Estudio de mareas terrestres en España (1975).
- 86.—M. J. SEVILLA y R. PARRA: Levantamiento gravimétrico de Lanzarote (1975).
- 87.—P. KUNDANMAL SUKHWANI: Modelos teóricos de curvas de luz. Su aplicación al sistema β Lyrae (1975).
- 88.—M. J. SEVILLA: Coordenadas astronómicas y geodésicas. Desviación relativa de la vertical (1975).
- 89.—C. TEJEDOR: Fotometría fotoeléctrica R. G. U. del cúmulo galáctico IC 2581 (1976).
- 90.—M. J. SEVILLA: Nuevos coeficientes para la reducción automática de posiciones de estrellas (1976).
- 91.—M. REGO: Técnicas observacionales en espectroscopía astrofísica (1976).
- 92.—M. J. SEVILLA: Determinación de la latitud por distancias cenitales de la polar, método de Littrow (1976).
- 93.—T. J. VIVES: Determinación fotométrica del tipo espectral de la componente desconocida de una estrella binaria eclipsante (1976).
- 94.—M. REGO y M. J. FERNÁNDEZ-FIGUEROA: Contraste y determinación por métodos astrofísicos de fuerzas de oscilador (1977).
- 95.—M. J. SEVILLA y R. CHUECA: Determinación de acimutes por observación de la Polar. Método micrométrico (1977).
- 96.—JOSÉ M. GARCÍA-PELAYO: Fotometría R G U en un campo del anticentro galáctico, cerca del NGC 581 (1977).
- 97.—JOSÉ M. GARCÍA-PELAYO: Datos fotométricos de 2.445 estrellas estudiadas en la región de Casiopea, entre los cúmulos abiertos Trumpler 1 y NGC 581 (1977).
- 98.—PREM K. SUKHWANI y RICARDO VIEIRA: Spectral Analysis of Earth Tides (1977).
- 99.—JOSÉ M. TORROJA y RICARDO VIEIRA: Earth Tides in Spain. Preliminary results (1977).

(Continúa en la cuarta de cubierta)

- 100.—PREM K. SUKHWANI y RICARDO VIEIRA: Three different methods for taking in account the gaps in spectral analysis of Earth Tides records (1978).
- 101.—R. VIEIRA: Mareas terrestres (1978).
- 102.—M. J. SEVILLA y A. NÚÑEZ: Determinación de la longitud por el método de Mayer. Programas de cálculo automático (1979).
- 103.—M. J. SEVILLA y A. NÚÑEZ: Determinación de la latitud por el método de Sterneck. Programas de cálculo automático (1979).
- 104.—M. J. SEVILLA: Determinación de la latitud y la longitud por el método de alturas iguales. Programas de cálculo automático (1979).
- 105.—P. K. SUKHWANI y A. GIMÉNEZ: Corrección de efectos atmosféricos para imágenes tomadas desde satélites Landsat (1979).
- 106.—M. J. SEVILLA: Inversión de matrices simétricas en el método de mínimos cuadrados (1979).
- 107.—A. GIMÉNEZ: Análisis de la curva de luz del sistema binario eclipsante S Velorum (1979).
- 108.—M. J. SEVILLA: Determinación del acimut de una referencia por observación de la estrella polar. Programa de cálculo automático (1979).
- 109.—M. J. SEVILLA: El sistema IAU (1976) de constantes astronómicas y su repercusión en la reducción de posiciones de estrellas (Primera parte) (1980).
- 110.—M. J. SEVILLA y R. PARRA: Determinación de la latitud por el método de Horrebow-Talcott. Programas de Cálculo Automático (1980).
- 111.—M. J. SEVILLA: Determinación de la latitud y la longitud por fotografías cenitales de estrellas (1980).
- 112.—R. VIEIRA y M. OREJANA: Comunicaciones presentadas en las XLI y XLII Jornadas del Grupo de Trabajo de Geodinámica del Consejo de Europa. Luxemburgo (1979-80).
- 113.—M. J. SEVILLA: Sobre un método de cálculo para la resolución de los problemas geodésicos directo e inverso (1981).
- 114.—R. VIEIRA, J. M. TORROJA, C. TORO, F. LAMBAS, M. OREJANA y P. K. SUKHWANI: Comunicaciones presentadas en el IX Symposium Internacional de Mareas Terrestres. Nueva York (1981).
- 115.—M. A. MONTULL, M. J. SEVILLA y A. GONZÁLEZ-CAMACHO: Aplicación de la V. L. B. I. al estudio del movimiento del Polo (1981).
- 116.—A. GONZÁLEZ-CAMACHO y M. J. SEVILLA: Algunas relaciones entre diferentes ejes que se consideran en la rotación de la Tierra (1981).
- 117.—R. VIEIRA, F. LAMBAS y E. GIMÉNEZ: Modificaciones realizadas en un gravímetro LaCoste Romberg mod. G para su utilización en registro continuo de la gravedad (1981).
- 118.—R. VIEIRA: La microitid de mareas gravimétricas del Sistema Central (1981).
- 119.—J. M. TORROJA y R. VIEIRA: Informe sobre el desarrollo del programa de investigación sobre mareas terrestres en el último bienio (1981).
- 120.—F. LAMBAS y R. VIEIRA: Descripción, estudio de la precisión y aplicaciones geodésicas y geofísicas de los nuevos niveles de lectura electrónica (1981).
- 121.—M. J. SEVILLA: Programación del método de la cuerda (1981).
- 122.—J. M. TORROJA: Historia de la Ciencia Árabe. Los Sistemas Astronómicos (1981).
- 123.—M. J. SEVILLA y R. VIEIRA: Comunicaciones presentadas en la Sesión Científica de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, celebrada el día 13 de enero de 1982 (1982).
- 124.—M. J. SEVILLA y P. ROMERO: Aplicación del método de colocación a la reducción de placas fotográficas de estrellas (1982).
- 125.—M. J. SEVILLA y A. G. CAMACHO: Deformación rotacional de una tierra elástica (1982).
- 126.—M. J. SEVILLA y P. ROMERO: Obtención de las medidas de la precisión en la determinación de la latitud y la longitud por fotografías cenitales de estrellas (1982).
- 127.—M. J. SEVILLA, A. G. CAMACHO y P. ROMERO: Comunicaciones presentadas en la IV Asamblea Nacional de Astronomía y Astrofísica. Santiago de Compostela (1983).
- 128.—M. J. SEVILLA: El sistema IAU (1976) de constantes astronómicas y su repercusión en la reducción de posiciones de estrellas (Segunda parte) (1983).

(Continúa en la segunda de cubierta)

- 129.—M. J. SEVILLA: Geodesia por satélites y navegación (1983).
- 130.—L. GARCÍA ASENSIO, A. G. CAMACHO, P. ROMERO y M. J. SEVILLA: Comunicaciones presentadas en la V Asamblea Nacional de Geodesia y Geofísica (1983).
- 131.—M. J. SEVILLA: Anomalías de la gravedad basadas en el sistema geodésico de referencia 1980 (1983).
- 132.—J. M. TORROJA: Historia de la Física hasta el siglo XIX. La Mecánica Celeste (1983).
- 133.—A. G. CAMACHO y M. J. SEVILLA: The Molodensky Problem for an homogeneous liquid core (1984).
- 134.—J. M. TORROJA: La obra astronómica de Alfonso X El Sabio (1984).
- 135.—H. MORITZ: Sistemas de referencia en Geodesia (1984).
- 136.—H. MORITZ: Rotación de la Tierra (1984).
- 137.—A. G. CAMACHO y M. J. SEVILLA: Autofrecuencias del movimiento del Polo para un modelo de Tierra de tipo Jeffreys Molodensky (1984).
- 138.—J. M. TORROJA: Nuevas definiciones en el problema de la medida del tiempo (1984).
- 139.—M. J. SEVILLA: Astronomía Geodésica (1984).