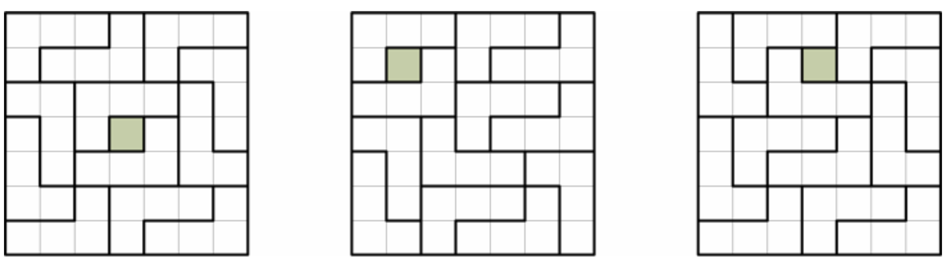
IV СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА
I ДАН (РЕШЕЊА)

1. Четвороугао $BFEC$ је тетиван јер је $\angle BEC = \angle BFC = 90^\circ$, па је $\angle AFE = \angle ACB = \gamma$ (спољашњи угао тетивног четвороугла једнак је наспрамном унутрашњем углу). Даље је $\gamma = \angle AFE = \angle BFN$ као унакрсни углови. Четвороугао $MBNF$ је тетиван ($\angle FNB = \angle FMA = 90^\circ$) одакле је $\gamma = \angle BFN = \angle BMN$. Дакле, $\gamma = \angle BMN = \angle ACB$ одакле следи тврђење задатка.

2. Почетна неједнакост је еквивалентна са $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \le \frac{5}{2}$. Нека је $\frac{x}{y} = k$. Из услова задатка да је $x, y \in [1, 2]$ следи $k \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$. Дакле, за такво k треба доказати неједнакост $k + \frac{1}{k} \le \frac{5}{2}$, односно $k^2 - \frac{5}{2}k + 1 \le 0$. Како је $k^2 - \frac{5}{2}k + 1 = (k-2)\left(k - \frac{1}{2}\right)$ неједнакост је доказана за $k \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$.

3. За $p = 2$ добијамо да је $2^{p^2} + 3^{p^2} + 4^{p^2} - 5 = 348$, а то није дељиво са 13.
За $p = 3$ добијамо да јесте решење јер је
$2^{p^2} + 3^{p^2} + 4^{p^2} - 5 = 512 + 27^3 + 512^2 - 5 \equiv 5 + 1^3 + 5^2 - 5 \equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod{13}$.
Ако је $p > 3$ онда је $p = 6k \pm 1$, па је $p^2 = 36k^2 \pm 12k + 1 = 12l + 1$ за неко $k, l \in \mathrm{N}$. Како је $2^{12} \equiv 3^{12} \equiv 4^{12} \equiv 1 \pmod{13}$ (Мала Фермаова теорема) то је $2^{12l} \equiv 3^{12l} \equiv 4^{12l} \equiv 1 \pmod{13}$ за неко $l \in \mathrm{N}$. Сада је
$2^{p^2} + 3^{p^2} + 4^{p^2} - 5 = 2^{12l+1} + 3^{12l+1} + 4^{12l+1} - 5 = 2 \cdot 2^{12l} + 3 \cdot 3^{12l} + 4 \cdot 4^{12l} - 5 \equiv 2 + 3 + 4 - 5 \equiv 4 \pmod{13}$,
па ни у овом случају нема решења. Дакле, једино решење је $p = 3$.

4. Бојењем табеле у црно-бело у шаховском стилу, добијамо 25 црних и 24 белих поља. Како L фигура покрива два црна и два бела поља, морамо избацити ЦРНО поље. Сада обојимо таблу по колонама црно-бело. Нека је x број L фигура које прекривају три црна и једно бело поље. Разлика броја црних и белих поља у овом случају може бити 8 или 6, у зависности да ли смо избацили бело или црно поље. Како је x + y = 12, због парности следи x – y = 4, па морамо избацити БЕЛО поље. Добили смо девет кандидата и пробањем за три случаја лако налазимо тражења поплочавања. Због симетрије, довољно је посматрати поља (2, 2), (2, 4) и (4, 4).



IV СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА
II ДАН (РЕШЕЊА)

1. Нека је $A=\overline{abc}$. Добијени деветоцифрени број може се написати у облику $1000000\cdot\overline{abc}+2000\cdot\overline{abc}+\cdot\overline{abc}=\overline{abc}\cdot 1002001=\overline{abc}\cdot 1001\cdot 1001=\overline{abc}\cdot 7^2\cdot 11^2\cdot 13^2$.
Следи да $\sqrt{A}$ мора бити прост број или степен простог броја различит од 7, 11 и 13, и при томе $10<\sqrt{A}<23$. Сада се лако види да $\sqrt{A}$ може бити само 2^4 = 16, 17 или 19. Дакле, тражени бројеви су 256, 289 и 361.

2. Посматрајмо следеће АГ неједнакости

$$a^3+b^3+c^3\geq 3abc,$$

$$ab^2+bc^2+ca^2\geq 3abc,$$

$$ac^2+ba^2+cb^2\geq 3abc.$$

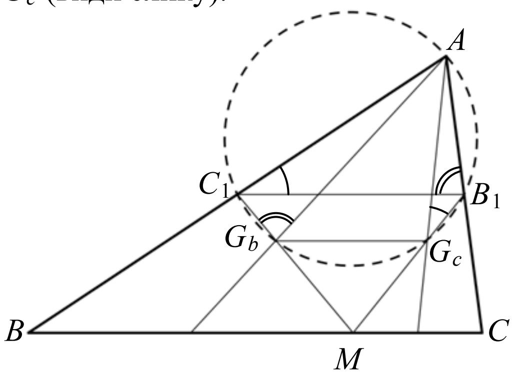
Ако помножимо прву неједнакост са 1, другу са 2, а трећу са 4, имамо

$$\left(a^3+2ab^2+4ac^2\right)+\left(b^3+2bc^2+4ba^2\right)+\left(c^3+2ca^2+4cb^2\right)\geq 21abc.$$

Дељењем леве и десне стране са abc добија се решење. Једнакост важи акко је $a=b=c$.

3. Сви бројеви су међусобно различити јер ако би два броја била једнака онда би њихова разлика била 0, а како она није природан број она се не може појавити на табли. Нека је $a_1<a_2<\ldots<a_{2010}$. Онда је $a_2-a_1<a_3-a_1<\ldots<a_{2009}-a_1<a_{2010}-a_1$. Сви ови бројеви су на табли па је: $a_{2009}=a_{2010}-a_1$, $a_{2008}=a_{2009}-a_1$, ..., $a_1=a_2-a_1$. Одавде је $a_2=2a_1$, $a_3=3a_1$, ..., $a_{2010}=2010a_1$, односно $a_k=ka_1$. Како је 2011 прост број који је записан на табли, то је $a_1=2011$, одакле следи тврђење задатка.

4. Нека су средишта страница AB и AC редом C_1 и B_1, а тежишта троуглова ABM и ACM редом G_b и G_c (види слику).



Како је четвороугао $ABMG_c$ тетивни, то је $\angle ABM=180^\circ-\angle AG_cM=\angle AG_cB_1$. Из паралелности $C_1B_1\parallel BC$ следи да је $\angle ABM=\angle AC_1B_1$, па је $\angle AG_cB_1=\angle AC_1B_1$. Како су оба угла над дужи AB_1 то је четвороугао $AC_1G_cB_1$ тетивни, тј. тачка G_c припада кружници описаној око троугла AB_1C_1. Аналогно се доказује да и тачка G_b припада кружници описаној око троугла AB_1C_1. Дакле, тачке A, C_1, G_b, G_c и B_1 припадају једној кружници. Како је $G_cG_b\parallel B_1C_1$, то је $MG_b:G_bC_1=MG_c:G_cC_1=2:1$, јер су G_b и G_c тежишта троуглова ABM и ACM. Како је четвороугао $C_1B_1G_cG_b$ тетивни трапез, то је $\angle G_bC_1B_1=180^\circ-\angle C_1B_1G_c=\angle G_cB_1C_1$, што значи да је трапез једнакокрак. Према томе и $MB_1=MC_1$, што је и требало доказати.