UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Percorrendo a Curva de Koch

Danyelle Horobinski
Jéssica Gomes Furtado

Curitiba, novembro de 2019.

Sumário

1 Conhecendo a Curva de Koch **1**
1.1 Conceitos básicos dos fractais 1
1.2 Curva de Koch 1
1.3 Construindo a curva 2
1.4 Analisando a curva 3
1.5 Floco de Neve de Koch 4
1.6 Dimensão da Curva de Koch 5

2 Implementando a Curva de Koch **7**
2.1 Apresentando a tartaruguinha 7
2.2 Construindo a Curva de Koch passo a passo 8
2.3 Construindo a Curva de Koch para qualquer interação k 10
2.4 Implementando o Floco de Neve de Koch 13

3 Sugestões de atividades **16**
3.1 Investigando a Curva de Koch 16

Referências Bibliográficas **18**

Capítulo 1

Conhecendo a Curva de Koch

Nesse capítulo serão abordadas questões referentes às características fundamentais dos fractais, características essas presentes nos mais famosos fractais como o Conjunto de Cantor, o Triângulo de Sierpinski, a Curva de Peano e, é claro, a Curva de Koch. Sendo que tais características serão analisadas com mas tranquilidade no que se refere a esta útima curva.

Será apresentado também, ao longo desse capítulo, os processos geométricos que dão origem a encantadora Curva de Koch, assim como os que originam a curva conhecida como Floco de Neve de Koch. E, para encerrar o capítulo, conceitos de dimensão topológica e dimensão espacial serão discutidos já que com suas características singulares, os fractais apresentam um resultado bem interessante em relação às suas dimensões.

1.1 Conceitos básicos dos fractais

Os fractais são figuras que apresentam características peculiares, as quais os tornam diferentes das demais figuras geométricas. Agumas dessas características são consideradas fundamentais em grande parte das categorias de fractais, são elas: estrutura fina, auto-similaridade e a simplicidade de lei de formação.

A estrutura fina caracteríza-se pelo detalhamento do fractal, detalhamento esse que não diminui mesmo quando analísa-se uma pequena parte do fractal. Ou seja, se o fractal é ampliado, ainda assim é possível observar a riqueza de detalhes que apresenta a curva inteira.

Já a auto-similaridade refere-se a semelhança que partes menores dos fractais apresentam em relação à partes maiores do mesmo, isto é, ao analisar uma pequena porção da curva esta será muito semelhante a uma parte maior ou até mesmo à totalidade do fractal. Além disso, há fractais que possuem auto-similaridade estrita, na qual as partes menores passam a ser cópias das maiores.

Por fim, os fractais são, normalmente, gerados através de processos iterativos, isto é, processos que repetem-se infinitas vezes. Tais processos possuem algoritmos relativamente simples, ou seja, a lei de formação dos fractais é simples, o que não impede sua beleza, complexidade e detalhamento.

1.2 Curva de Koch

A Curva de Koch recebe esse nome em homenagem à Niels Fabian Helge von Koch, matemático sueco que imaginou a curva. Helge von Koch nasceu dia 25 de janeiro na cidade de Estocolmo, na Suécia e logo após completar seus estudos em uma boa escola na cidade em que nasceu, em 1888, entrou para a Universidade de Estocolmo, a terceira a ser criada na Suécia. Ao terminar seu doutorado, atuou como professor adjunto de Matemática e seguiu carreia em Matemática Pura.

A Curva de Koch foi citada pela primeira vez em 1904 em um artigo no qual Koch descreve a criação de curvas contínuas sem tangentes que ficou conhecida como Curva de Koch.

Koch faleceu em 11 de março de 1924, em Estocolmo.

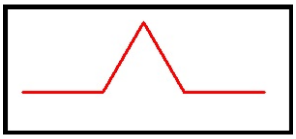
1.3 Construindo a curva

A obtenção da Curva de Koch por meio de processos geométricos, dá-se de uma forma bem simples, basta seguir os seguintes passos:

1. Iniciar com um seguimento de comprimento l:

2. Retirar o terço médio do seguimento inicial:

3. Substituir o terço médio por um triângulo equilátero sem a base de lado $\frac{l}{3}$:



Ao final do terceiro passo obtêm-se a interação 1 da Curva de Koch. Os três passos apresentados devem ser repetidos para cada um dos quatro seguimentos da interação 1 para obter-se a interação 2, e assim sucessivamente, repetindo esse processo infinitamente.

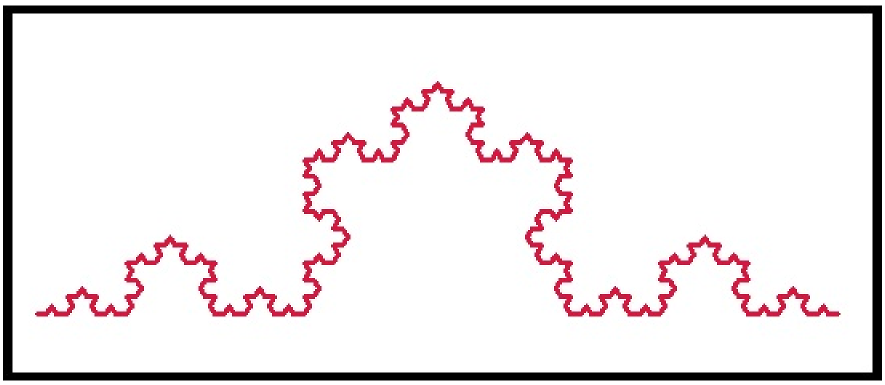


Figura 1.1: Interação 4

1.4 Analisando a curva

A Curva de Koch pode ser analisada observando a cada interação: o número de seguimentos, o comprimento de cada seguimento e o comprimento total da curva. Dessa forma, obtêm-se o seguinte:

Interação	Número de seguimentos	Comprimento de cada seguimento	Comprimento total
0	1	l	l
1	4	$\frac{l}{3}$	$4\frac{l}{3}$
2	$4{\cdot}4$	$\frac{l}{3\cdot3}$	$4\cdot4\frac{l}{3\cdot3}$
3	4^3	$\frac{l}{3^3}$	$4^3\frac{l}{3^3}$
4	4^4	$\frac{l}{3^4}$	$(\frac{4}{3})^4\cdot l$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k	4^k	$\frac{l}{3^k}$	$(\frac{4}{3})^k\cdot l$

Por meio do princípio de indução é possível verificar que as generaliações para a etapa de interação k são válidas. Por exemplo, provando por indução em k que o comprimento total da Curva de Koch é $C_k = \left(\frac{4}{3}\right)^k \cdot l$ para $k \geq 0$:

Para $k = 0$ a expressão é válida:

$$C_0 = \left(\frac{4}{3}\right)^k \cdot l = \left(\frac{4}{3}\right)^0 \cdot l = 1 \cdot l = l$$

De fato, o comprimento total da curva na interação 0 é l.
Supondo, agora, que a expressão é válida para algum $k \geq 0$, têm-se que:

$$C_k = \left(\frac{4}{3}\right)^k \cdot l$$

Agora é preciso provar para $k+1$:

A cada nova interação um seguimento é substituído por outros quatro que possuem $\frac{1}{3}$ do comprimento de cada seguimento da interação anterior. Sendo assim:

$$C_{k+1} = \frac{4}{3} \cdot C_k$$

Pela hipótese de indução, têm-se que:

$$C_{k+1} = \frac{4}{3} \cdot C_k = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^k \cdot l = \left(\frac{4}{3}\right)^{k+1} \cdot l$$

Concluindo, dessa forma, a demonstração.

Como a Curva de Koch é um fractal e, portanto, suas interações são infnitas, $k \to \infty$. Ao calcular o limite do número de seguimentos, do comprimento de cada seguimento e do comprimento total da curva, obtêm-se:
Limite do número de seguimentos:

$$\lim_{k\to\infty} 4^k = \infty$$

Limite do comprimento de cada seguimento:

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{l}{3^k}\right) = 0$$

Limite do comprimento total da Curva de Koch:

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^k \cdot l = \infty$$

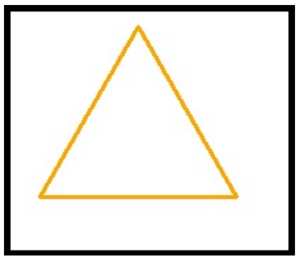
Sendo assim, o comprimento de cada seguimento vai aproximando-se de zero a cada nova interação, enquanto o comprimento total da Curva de Koch tende para o infinito.

Ao observar as etapas de construção da Curva de Koch, bem como as figuras que são geradas é possível perceber que a curva apresenta auto-similaridade estrita, isto é, ao analisar uma pequena parte da curva percebe-se que esta é uma cópia de uma parte maior, sua lei de formação é simples, possui estrutura fna, a qual permite que mesmo sendo ampliada a riqueza de detalhes não diminui, e, além disso, não é possível descrevê-la analiticamente de uma maneira simples.

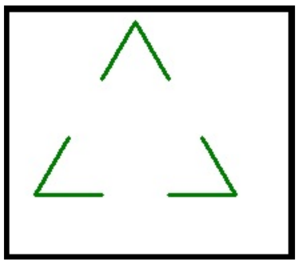
1.5 Floco de Neve de Koch

A Curva de Koch dá origem a outro fractal chamado de Floco de Neve de Koch, por assemelhar-se a um floco de neve. Os processos geométricos envolvidos nesse novo fractal são os mesmos processos que geram a Curva de Koch, porém ao invés de começar com um único seguimento inicial, os processos inicíam-se a partir de um triângulo equilátero:

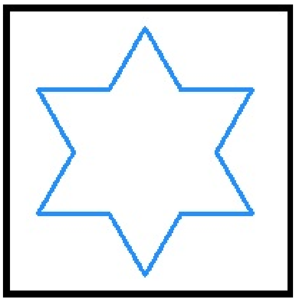
1. Iniciar com um triângulo equilátero de lado m:



2. Retirar o terço médio de cada lado do triângulo:



3. Substituir o terço médio de cada lado por um triângulo equilátero sem a base de lado $\frac{m}{3}$:



E assim o processo repete-se infinitamente.

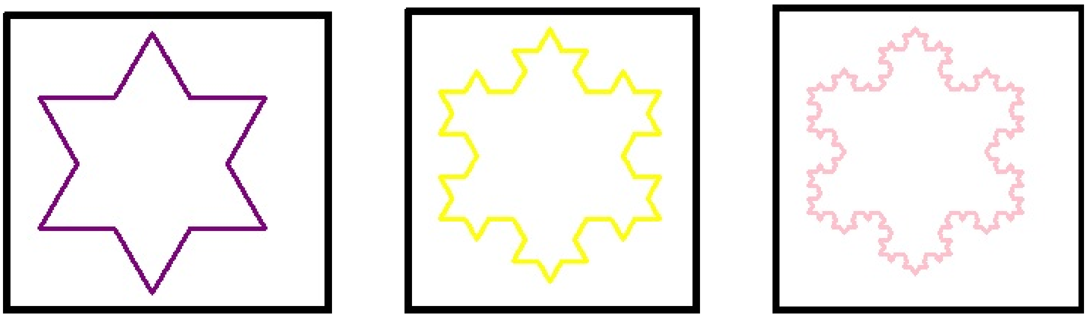


Figura 1.2: Floco do Neve de Koch

1.6 Dimensão da Curva de Koch

A dimensão de uma figura geométrica convencional é determinada, ou seja, é representada sempre por um número inteiro. Por exemplo, as linhas têm dimensão 1, os planos dimensão 2 e os sólidos dimensão 3. Essa dimensão é dimensão topológica, a qual independe da forma ou do tamanho da figura.

A Curva de Koch possui dimensão topológica 1, já que se trata de uma curva. Todavia, devido às suas caracteristicas diferenciadas, a mesma ocupa mais espaço que uma curva comum de dimensão 1, porém, também não preenche um plano e, portanto, possui uma dimensão menor que 2.

A dimensão espacial relaciona justamente o espaço que a figura ocupa, e, quando a curva apresenta auto-similaridade estrita, como é o caso da Curva de Koch, a dimensão espacial pode ser determinada por um método simples que relaciona a passagem de uma interação para a seguinte.

Considerando N o número seguimentos em uma interação, R o fator de redução da curva e D a dimensão espacial, o cálculo pode ser feito da seguinte forma:

$$D = \frac{\log N}{\log \frac{1}{R}}$$

Portanto, para calcular a dimensão espacial da Curva de Koch basta substituir os valores referentes à curva em questão. Da interação 0 para a interação 1 aparecem

4 seguimentos, portanto, $N = 4$ e cada seguimento é reduzido $\frac{1}{3}$ do comprimento do seguimento da interação anteior, sendo assim, $R = \frac{1}{3}$. Substituindo, obtêm-se:

$$D = \frac{\log N}{\log \frac{1}{R}} = \frac{\log 4}{\log \frac{1}{\frac{1}{3}}} = \frac{\log 4}{\log 3} = 1,26186$$

As figuras geométrias comuns possuem dimensão topológica igual a dimensão espacial, o que não ocorre com os fractais. Portanto, por meios das dimenssões, é possível estabalecer um conceito para fractal: fractais são figuras cuja a dimensão espacial é estritamente maior que a dimensão topológica.

Capítulo 2

Implementando a Curva de Koch

Os fractais são figuras belíssimas e, como visto no capítulo anterior são gerados por processos iterados, o que torna inviável admirar toda sua beleza produzindo apenas algumas interações com lápis e papel.

Por esse motivo, os recursos computacionais são fundamentais para que seja possível visualizar a riqueza de detalhes contida nos fractais e embora não possa reproduzir infinitamente os processos, permite que um número maior de interações sejam realizadas.

Tendo como esse objetivo, de utilizar os recursos computacionais para melhorar a experiência de visualização dos fractais, nesse capítulo será apresentada a biblioteca Turtle Graphics disponível no Python, a qual, por seus comandos razoavelmente simples de serem utilizados, é um potencial recurso pedagógico a ser explorado e, por esse motivo foi utilizada para implementar a Curva de Koch.

2.1 Apresentando a tartaruguinha

O Turtle Graphics é uma biblioteca que permite desenhar gráficos com comandos simples e intuitivos.

Alguns dos comandos básicos:

Comando	Ação
forward(a)	Andar para frente a unidades
backward(a)	Andar para trás a unidades
right(α)	Virar para a direita sobre o ângulo α
left(α)	Virar para a esquerda sobre o ângulo α
goto(x, y)	Posicionar a tartaruga na posicão x e na posição y
penup()	Levantar a caneta (parar de desenhar)
pendown()	Abaixar a caneta (voltar a desenhar)
shape()	Aparência da caneta (turtle, arrow, circle, square, triangle, classic)
pensize()	Espessura da caneta
speed()	Velocidade da tartaruga
color(“cor”)	Trocar a cor da caneta
clear()	Limpar a tela

Tabela 2.1: Comandos básicos

Com os comandos apresentados acima é possível passar instruções para a tartaruguinha. Como por exemplo:

```
#===============Customizando a tartaruga===============#
import turtle #importando a biblioteca Turtle
turtle=turtle.Turtle() #atribuindo nome para a tartaruga (caneta)
turtle.shape("turtle") #escolhendo o formato da caneta
turtle.speed(5) #escolhendo a velocidade da tartaruga

#=================Movendo a tartaruga=================#
turtle.forward(150) #ande para frente 150 unidades
turtle.left(90) #vire para a esquerda 90º
turtle.forward(150) #ande para frente 150 unidades
#=========================================#
```

Ao compilar o código obtêm-se o seguinte resultado:

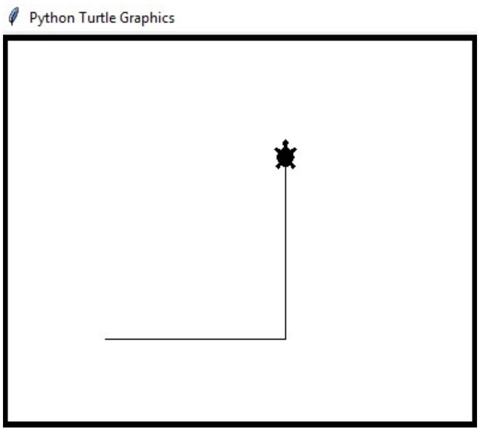


Figura 2.1: Primeiros passos

2.2 Construindo a Curva de Koch passo a passo

Para construir a Curva de Koch, dado um seguimento inicial de comprimento L, é preciso retirar o terço médio desse seguimento e substituí-lo por um triângulo equilátero sem a base de lado $\frac{L}{3}$. Sendo assim, para que a tartaruguinha percorra a Curva de Koch, é necessário passar para ela exatamente essas instruções.

Dessa forma, para percorrer a interação 0, basta que a tartaruguinha ande um seguimento de comprimento L:

```
#===================Interação 0=====================#
import turtle
Koch=turtle.Turtle() #Nomeando a tartaruguinha
Koch.shape("turtle")
L=900 #Comprimento do seguimento
Koch.penup() #Levantando a caneta
Koch.goto(-600,-50) #Posicionar a tartaruga no canto da tela para visualizar
melhor os movimentos
Koch.pendown() #Abaixar a caneta
```

```
Koch.forward(L) #Andar L unidades
#=========================================#
```

Compilando o código acima obtêm-se:

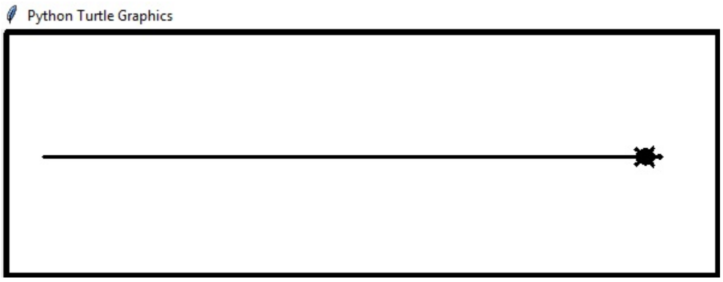


Figura 2.2: Interação 0

Já para a primeira interação serão necessárias mais instruções, pois agora é preciso formar um triângulo equilátero sem a base. Dessa forma, após a tartaruguinha percorrer a primeira parte da curva (caminhar $\frac{L}{3}$ unidades), deve começar a percorrer a parte de cima do triângulo ilustrado na figura 2.3:

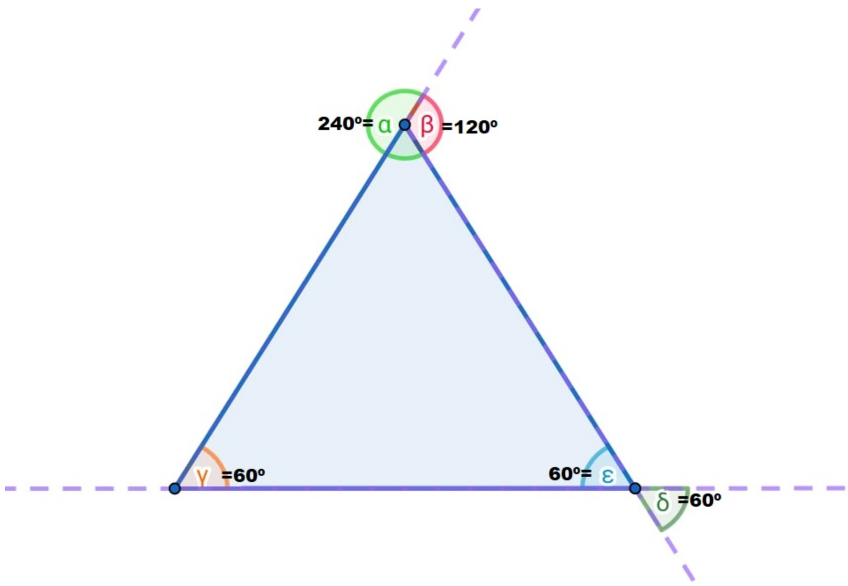


Figura 2.3: Ângulos a serem percorridos

Portanto, a tartaruguinha deverá virar para a esquerda 60º (γ), em seguida virar para a esquerda 240º (α) ou virar para a direita 60º (β) e por fim virar 60º (δ). Colocando essas instruções em Python, o resultado é:

```
#==================Interação 1====================#
import turtle
Koch=turtle.Turtle()
Koch.shape("turtle")
L=900 #Comprimento do seguimento
Koch.penup()
Koch.goto(-600,-50) #Posicionar a tartaruguinha
```

```
Koch.pendown()
Koch.forward(L/3) #Agora só é preciso percorrer 1/3 do seguimento inicial
Koch.left(60) # Virar 60º para a esquerda
Koch.forward(L/3) #Percorrer mais L/3 unidades
Koch.left(240) #Virar para a esquerda 240º
Koch.forward(L/3) #Percorrer mais L/3 unidades
Koch.left(60) # Virar 60º para a esquerda novamente
Koch.forward(L/3) #E finalmente percorrer 1/3 do seguimento inicial
#=========================================#
```

Compilando o código obtêm-se o seguinte:

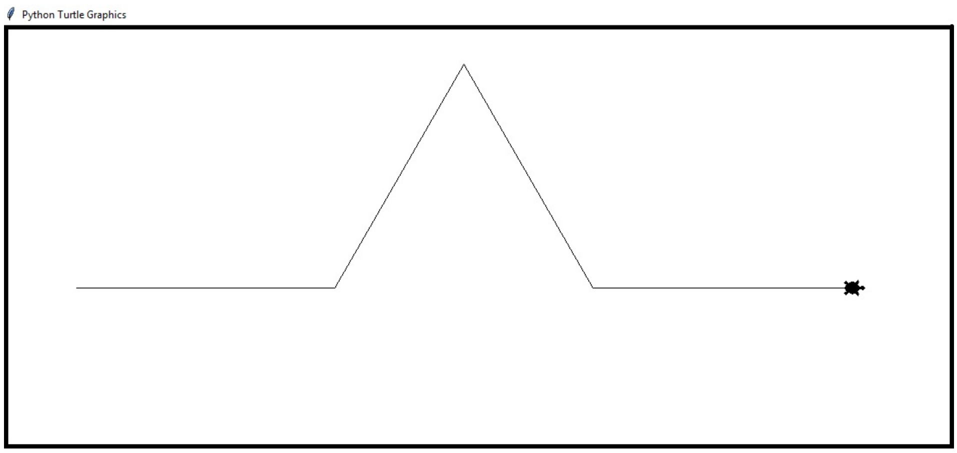


Figura 2.4: Interação 1

2.3 Construindo a Curva de Koch para qualquer interação k

Como visto na seção anterior, para percorrer a Curva de Koch até a primeira interação foi preciso muitas instruções e, a partir do momento que o número de interações aumenta, a quantidade de instruções também aumenta, chegando a um momento que o código fica inviável, pois para cada nova interação é necessário um novo conjunto de instruções.

Por esse motivo, é preciso implementar um código que se adeque a qualquer interação k. Para isso será utilizada a técnica da recursão, a qual divide um problema em vários problemas menores até encontrar um com resolução trivial. Ou seja, para essa técnica é necessário um caso base, no qual a resolução já é conhecida, e um caso geral, o qual será quebrado em outros casos até chegar no caso base.

Por exemplo, ao somar todos os elementos de uma lista:

$$total = sum(1, 2, 3, 4, 5)$$

Subdividindo o problema em problemas menores, têm-se:

$$total = (sum(1, 2, 3, 4, 5))$$

$$total = (1 + (sum(2, 3, 4, 5)))$$

$$total = (1 + (2 + (sum(3, 4, 5))))$$

$$total = (1 + (2 + (3 + (sum(4, 5)))))$$

$$total = (1 + (2 + (3 + (4 + (sum(5))))))$$

O caso $sum(5)$ é o caso base, pois tem solução trivial, $sum(5) = 5$. Agora, com esse resultado basta percorrer o caminho contrário:

$$total = (1 + (2 + (3 + (4 + (sum(5))))))$$

$$total = (1 + (2 + (3 + (4 + 5))))$$

$$total = (1 + (2 + (3 + 9)))$$

$$total = (1 + (2 + 12))$$

$$total = (1 + 14)$$

$$total = 15$$

Sendo assim, a recursão permite resolver problemas complexos de uma maneira "simples", probemas, como por exemplo, a implementação da Curva de Koch em qualquer interação.

Na maioria das vezes, ao utilizar a recursão, em algum momento uma função chamará ela própria, o que será utilizado para a construção da Curva de Koch. O caso base, isto é, o caso trivial, será quando a tartaruguinha andar L unidades, ou seja, a interação 0. Portanto, o código ficará da seguinte forma:

```
#=================Curva de Koch GERAL===================#
import turtle #importando a biblioteca Turtle

#===================Criando a tartaruga===================#
Helge_von_Koch=turtle.Turtle() #Nomeando a tartaruga
Helge_von_Koch.shape("turtle") #Formato da caneta
Helge_von_Koch.speed(3) #Velocidade da tartaruga
Helge_von_Koch.pensize(3) #Espessura da caneta

#=====================Criando a função==================#
def curva_de_koch(k,L):
    if k==0: (1)
        Helge_von_Koch.fd(L)
    else: (2)
        angulo=[60, 240, 60, 0] (3)
        for alfa in angulo:
            curva_de_koch(k-1,L/3) (4)
            Helge_von_Koch.lt(alfa) (5)
```

```
curva_de_koch( 2, 800)
#==========================================#
```

A função *Curva_de_Koch* recebe dois parâmetros: k (número de interações) e L (comprimento do seguimento inicial). Por (1) tem-se que a curva só começará a ser percorrida quando $k = 0$, isto é, quando estiver na interação 0. Caso contrário entrará em (2) e passará por (3), no qual forma-se uma lista com os ângulos que a tartaruguinha deverá percorrer (como visto na seção anterior). Em (4) a função está chamando ela mesma, porém, agora com os parâmetros $(k-1)$, ou seja, a interação anterior, e $L/3$, pois, a cada interação a tartaruga deverá percorrer $\frac{1}{3}$ do seguimento que percorreu anteriormente. Esses passos serão repetidos até k ser igual a 0, quando finalmente a curva será começará a ser feita

Ao compilar o código acima, com $k = 2$ e $L = 800$, obtêm-se:

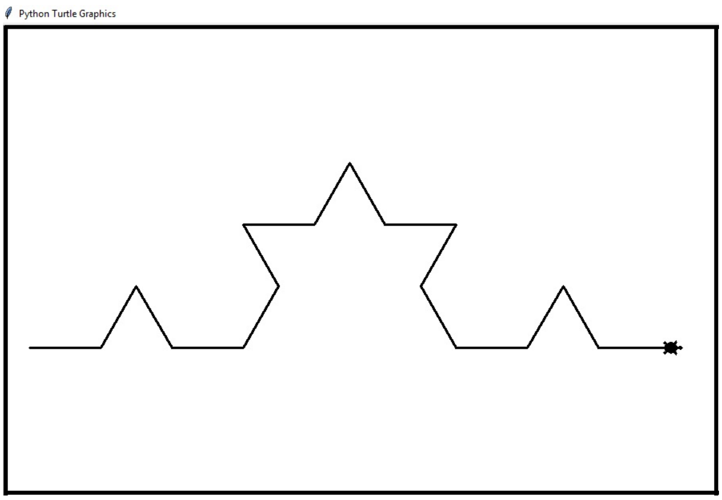


Figura 2.5: Interação 2

Esse código permite que a visualização da curva na interação k, todavia, para que a curva seja percorrida desde a interação 0 até a interação k, alguns ajustes no código serão necessários:

```
#=============Valores informados pelo usuario============#
L=800 #comprimento do seguimento inicial
kmax=2 #número máximo de interações

#===========Curva de Koch (interção 0 até kmax)==========#
cores=[‘deep pink’,‘coral’,‘dodger blue’] #Lista de cores
c=-1 #Variável para mudança de cores
k=0 #Variável para contar as interações
while k <= kmax: (6)
    Helge_von_Koch.penup()
    Helge_von_Koch.goto(-650,-50)
    Helge_von_Koch.clear() #limpando a interação anterior
    Helge_von_Koch.pendown()
    c+=1
    Helge_von_Koch.color(cores[c])
    curva_de_koch(k,L)
```

```
    k+=1
        if c==3:
            c=-1
#=========================================#
```

Em (6), enquanto k (número da interação atual) for menor ou igual a $kmax$ (número máximo de interações), a tartaruguiguinha está sendo instruída a percorrer cada interação, isto é, percorre a interação 0, volta para a posição incial, percorre a interação 1, volta para a posição inicial e assim sucessivamente até atingir a interação máxima informada pelo usuário. Além disso, a cada interação a cor da tartaruga irá mudar. Sendo assim, ao compilar o código, com $kmax = 2$ e $L = 800$, obtêm-se:

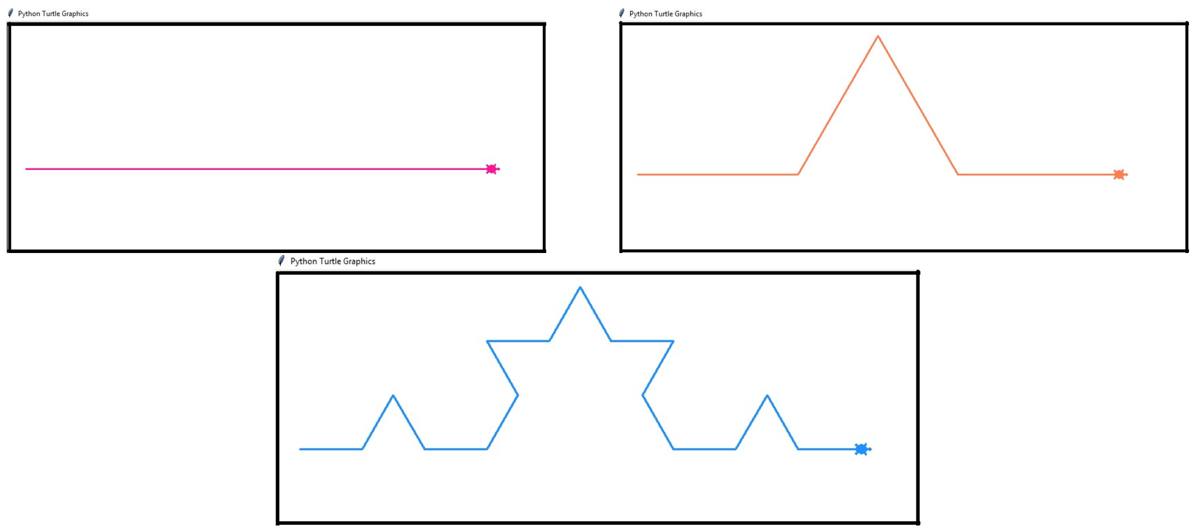


Figura 2.6: Interação 0 à interação 2

2.4 Implementando o Floco de Neve de Koch

Para formar o Floco de Neve, as interações deverão ser feitas em cada lado de um triângulo equilátero, portanto, basta aplicar o código implementado na seção anterior em um triângulo equilátero. Dessa forma, o código modifíca-se:

```
#==================Floco de Neve de Koch================#
import turtle

#===============Customizando a tartaruga================#
floquinho=turtle.Turtle()
floquinho.shape("turtle")
floquinho.color("dodger blue") #Colorindo a caneta
floquinho.speed(11)
floquinho.pensize(3)
floquinho.penup()
floquinho.goto(-390, -180) #posição inicial
floquinho.pendown

#====================Criando a função=================#
```

```
def curva_de_koch(k,L):
    if kmax==0:
        floquinho.fd(L)
    else:
        angulo=[60, 240, 60, 0]
        for alfa in angulo:
            curva_de_koch(kmax-1,L/3)
            floquinho.lt(alfa)

#=================Escolhas do usuário==================#
L=600
k=0

#=================Chamando as funções=================#
j=0 #Contagem da lista de ângulos
i=1 #Contagem dos lados do triângulo
while i <= 3:(7)
    angulos2=[60, 240, 240] #Lista de ângulos para fomar um triângulo equilátero
    floquinho.lt(angulos2[j])
    j+=1
    curva_de_koch(k,L)
    i+=1
#==============================================#
```

Em (7), enquanto a tartaruguinha não percorrer todo triângulo equilátero, continuará a construir a Curva de Koch na interação k. Complilando o código, com $k = 0$, $k = 1$ e $L = 300$, obtêm-se:

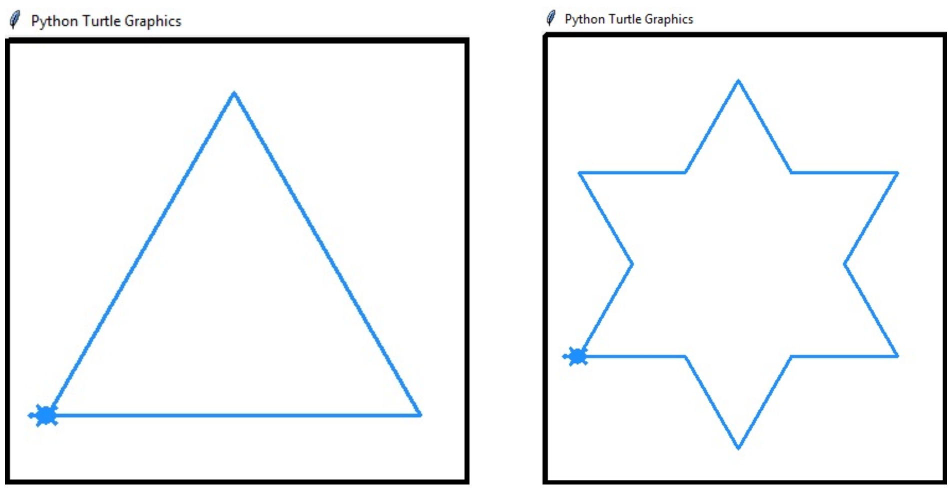


Figura 2.7: Interação 0 à esquerda e interação 1 à direita

Com $k = 7$ e $L = 900$, obtêm-se o seguinte percurso:

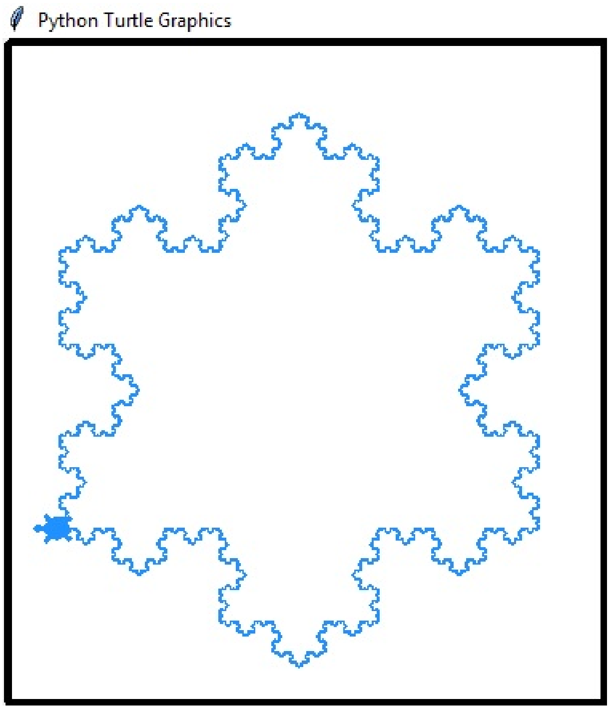


Figura 2.8: Interação 7

Capítulo 3

Sugestões de atividades

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) do Ensino Fundamental, noções de conjuntos de fractais vem ganhando mais importância atualmente, principalmente no que se refere a possíveis ligações entre a Matemática e o mundo físico. Sendo assim, os fractais podem fazer grande sucesso entre os alunos, pois além serem um recurso visual muito favorável, geram grande curiosidade, pois cada fractal possui características e propriedades interessantes, além de uma lei de formação diferenciada, e como esta última dá-se por processos simples é possível utilizar os fractais para trabalhar até com os alunos mais novos. Dessa forma, nesse capítulo será apresentada uma sugestão de atividade envolvendo fractais, mais especificadamente a Curva de Koch, para ser aplicada em sala de aula.

3.1 Investigando a Curva de Koch

As atividades de investigação matemática são, na maioria das vezes, muito interessantes para os alunos, pois por meio delas tornam-se verdadeiros investigadores na sala de aula e passam a redescobrir a Matemática.

Atividades envolvendo sequências e padrões são ótimas para uma abordagem utilizando a matemática investigativa, e como a formação dos fractais envolve processos com padrões repetivos não é dificil explorá-los dentro dessa temática.

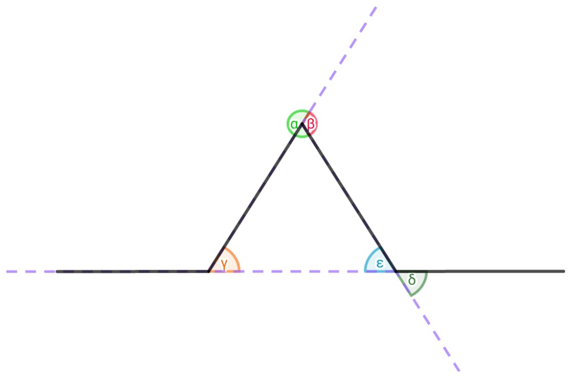
Sendo assim, a seguinte atividade pode ser proposta em sala de aula, a qual será mais significativa em grupos:

- Iniciciainmente apresentar a Curva de Koch para a turma utilizando a biblioteca Turtle Graphics apresentada no capítulo anterior, pois através dos comandos dados à tartaruguinha é possível observar cada passo da construção da curva;

- Após uma breve explicação sobre com utilizar a biblioteca Turtle, passar os passos do processo geométrico que dá origem à Curva de Koch;

- Para que a tartaruguinha percorra corretamente a curva é necessário que as instruções passadas para ela estejam corretas, portanto, solicitar aos alunos que, em grupos, montem a lista de instruções que será passada para a tartaruguinha percorrer a primeira interação da Curva de Koch, incluindo para qual lado deverá virar e sob qual ângulo, dado o seguimento inicial de 900 unidades;

1. Andar 300 unidades;
2. Virar para a esquerda 60º;
3. Andar 300 unidades;
4. Virar para a direita 60º;
5. Andar 300 unidades;
6. Virar para a esquerda 60º;
7. Andar 300 unidades;



- Depois que todos terminarem as instruções solicitar que compartilhem suas descobertas. Essas parte da atividde é muito importante, pois instruções diferentes podem descrever o mesmo percurso.
- Verificar após as discussões se as instruções estão corretas, colocando-as no Turtle, e se tudo estiver correto a imagem que aparecerá deverá ser semelhante a Figura 3.1:

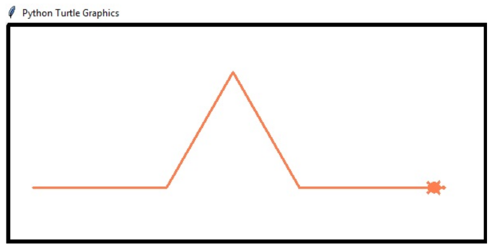


Figura 3.1: Intruções para a interação 1

- Em seguida, entregar a cada aluno uma cópia da tabela abaixo, e solicitar que preencham-na, e tentem chegar a uma generalização para a etapa k, dado o seguimento inicial l;

Interação	Número de seguimentos	Comprimento de cada seguimento	Comprimento total
0			
1			
2			
3			
4			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k			

- Nas investigações matemática é crucial que o professor ou o aplicador da atividade mantênha-se apenas como mediador, questionando o tempo todo os alunos sobre as estratégias que escolheram para resolver o problema apresentado;
- Para encerrar atividade, convidar cada grupo à apresentar para os demais colegas seus resultados, bem como expor a maneira com que eles foram obtidos.

Referências Bibliográficas

[1] BARA, Roberta Paye; MELO, Fábio Luiz de; MURR, Caroline; MUSIAL, Josué Ervin; SOUZA, Rosenilda de; PRADO, Suzana do. *Fractais: propriedades e construção.* Disponível em: <https://docs.ufpr.br/ ewkaras/ic/geralic2003.pdf>. Acesso em: 23 de nov. 2019.

[2]GOMES, Andreia dos Santos. *Motivação do estudo de áreas e perímetros de figuras geométricas através de fractais.* Disponível em: <https://docs.ufpr.br/ ewkaras/especializa/ andreia.pdf>. Acesso em: 25 de nov. 2019.

[3] KARAS, Elizabeth Wagner; SERRA, Celso Penteado. *Fractais gerados por sistemas dinâmicos complexos.* Curtiba: Champagnat, 1997.

[4] MILLER, Brad; RANUM, David. *Como pensar como um cientista da computação.* Disponível em: <https://panda.ime.usp.br/pensepy/static/pensepy/index.html>. Acesso em: 25 de nov. 2019.

[5] Parâmetros curriculares nacionais : Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília : MEC / SEF, 1998. Disponível em:<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/ pdf/matematica.pdf>. Acesso em: 25 de nov. 2019.

[6] Turtle-Gráficos de tartaruga pata Tk. Dispoível em: <https://docs.python.org/2/library/ turtle.htmlturtle.shape>. Acesso em: 25 de nov. 2019.