Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Václav Pospíšil

Jakobiány a Hessiány ve variačním počtu

Katedra matematické analýzy

Vedoucí diplomové práce: **Prof. RNDr. Jan Malý, DrSc.**

Studijní program: matematika, matematická analýza

Chtěl bych poděkovat prof. Janu Malému za neocenitelnou pomoc při psaní této práce.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 11. 8. 2006 Václav Pospíšil

Václav Pospíšil

Obsah

1 Úvod 5

2 Úmluvy a některá užitečná tvrzení 9

3 Distributivní Jakobián 11

4 Distributivní Hessián 20

5 Relaxace a Jakobián 23

6 Relaxace a Hessián 29

Název práce: Jakobiány a Hessiány ve variačním počtu
Autor: Václav Pospíšil
Katedra (ústav): Katedra matematické analýzy
Vedoucí diplomové práce: Prof. RNDr. Jan Malý, DrSc.
E-mail vedoucího: `maly@karlin.mff.cuni.cz`
Abstrakt: V této práci je studován distributivní Jakobián, distributivní Hessián a relaxace Jakobiánu a Hessiánu. Jsou zde uvedeny příklady zobrazení, pro něž "absolutně spojitá část" distributivního Jakobiánu nebo Hessiánu nesplývá s bodovým Jakobiánem nebo Hessiánem. Dále je uvedena věta, umožňující určit singulární část Jakobiánu pro některá zobrazení. V další části je zobecněna věta, umožňující určit za určitých podmínek relaxaci Jakobiánu, a věta, umožňující horní odhad relaxace Hessiánu pro některé funkce.
Klíčová slova: distributivní Jakobián, distributivní Hessián, relaxace Jakobiánu a Hessiánu.

Title: Jacobians and Hessians in the Calculus of Variations
Author: Václav Pospíšil
Department: KMA
Supervisor: Prof. RNDr. Jan Malý, DrSc.
Supervisor' s e-mail adress: `maly@karlin.mff.cuni.cz`
Abstract: In this thesis, distributional Jacobian and Hessian and relaxation of Jacobian and Hessian is studied. There are given examples of mappings such that the "absolutely continuous parts" of their distributional Jacobian or Hessian do not correspond to the pointwise Jacobian or Hessian. Then a result is proved, which enables to determine a singular part of the Jacobian for certain mappings. Further, the relaxation of the Jacobian is described under certain assumptions, and the relaxation of the Hessian for a class of functions is estimated.
Keywords: distributional Jacobian, distributional Hessian, relaxation of Jacobian and Hessian

1 Úvod

V matematické analýze hrají Jakobiány a Hessiány velkou roli. Proto je přirozená snaha hledat vhodné definice těchto pojmů použitelné i pro funkce a zobrazení, jejichž bodové Jakobiány a Hessiány neexistují nebo nemají dobré vlastnosti. Touto problematikou se zabývali např. T. Iwaniec [14], G. Alberti a L. Ambrosio [2], J. M. Ball [3], B. Dacorogna a F. Murrat [6], P. J. Olver [20] a další.

Jedním z možných přístupů je například definovat Jakobián a Hessián jako distribuci. Takto definované pojmy jsou zkoumány i v této práci. Ukazuje se, že za jistých podmínek kladených na zobrazení u existuje souvislost mezi distributivním Jakobiánem či Hessiánem u a bodovým Jakobiánem (věty 1.6, 1.8).

Definice 1.1. Nechť $N \geq 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N-1 \leq p < N$ a nechť buďto

$$u \in W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^N) \cap L^q(\Omega;\mathbb{R}),$$

kde $\frac{N-1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1$, nebo

$$u \in W^{1,N-1}(\Omega;\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^N).$$

Pak definujeme distributivní Jakobián u jako distribuci

$$\langle \operatorname{Det} \nabla u, \phi \rangle := -\int_\Omega \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x) u_1(x) (\operatorname{cof} \nabla u(x))_{1i} dx, \quad \phi \in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{R}).$$

Poznámka 1.2. Pro $u \in W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ s $p \geq \frac{N^2}{N+1}$ platí díky větám o vnoření, že $u \in L^q$ s $\frac{N-1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1$, tzn. $\operatorname{Det} \nabla u$ lze definovat pro každou $u \in W^{1,\frac{N^2}{N+1}}(\Omega;\mathbb{R}^N)$. Podmínku $u \in W^{1,p}$ lze zeslabit na podmínku $\operatorname{cof} \nabla u \in L^{\frac{p}{N-1}}$.

Definice 1.3. Nechť $N \geq 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ a buď $N = 2$ a $u \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{R})$, nebo $N \geq 2$ a $u \in W^{1,q}(\Omega;\mathbb{R}) \cap W^{2,p}(\Omega;\mathbb{R})$, kde $\frac{2}{q} + \frac{N-2}{p} \leq 1$ nebo $u \in W^{2,N-2}(\Omega;\mathbb{R}) \cap W^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R})$. Pak definujeme distributivní Hessián u jako distribuci

$$\langle \mathcal{H}u, \phi \rangle := \frac{1}{N!} \sum_{p \in S_N} \operatorname{sgn} p \int_\Omega \det \left(\frac{\partial u}{\partial x_{p_1}} \nabla u, \nabla \frac{\partial \phi}{\partial x_{p_2}}, \nabla \frac{\partial u}{\partial x_{p_3}}, ..., \nabla \frac{\partial u}{\partial x_{p_N}} \right)(x) dx,$$

$$\phi \in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{R}),$$

kde S_N je množina všech permutací množiny $\{1, ..., N\}$.

Poznámka 1.4. Pro $p \geq \frac{N^2}{N+2}$ lze díky větám o vnoření vždy zvolit q tak, aby $u \in W^{1,q}(\Omega;\mathbb{R})$ a $\frac{2}{p} + \frac{N-2}{q} \leq 1$.

Poznámka 1.5. Jsou i jiné definice slabého Hessiánu, např v [14]. Ten, který jsme definovali my, se většinou nazývá velmi slabý Hessián. V [11] se dočteme, že platí: je-li $u \in W^{2,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{R})$ s $p \geq \frac{N^2}{N+1}$, pak

$$\mathcal{H}u = \operatorname{Det} \nabla(\nabla u). \tag{1.1}$$

To budeme potřebovat později.

Uveďme zde tři tvrzení o distributivních determinantech. První je z článku [9].

Věta 1.6. *Nechť* $1 \leq p < N$. *Jestliže*

$$u \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^N) \ a \ \operatorname{cof} \nabla u \in L^q(\Omega; \mathbb{R}^{N \times N}),$$

kde

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1 + \frac{1}{N},$$

a jestliže $\operatorname{Det} \nabla u$ *je konečná Radonova míra, pak*

$$\operatorname{Det} \nabla u = \det \nabla u \mathcal{L}^N \restriction \Omega + \mu_s$$

s nějakou mírou μ_s *singulární vzhledem k* $\mathcal{L}^N$. *Speciálně, jestliže* $\operatorname{Det} \nabla u \in L^1$, *pak* $\operatorname{Det} \nabla u = \det \nabla u$.

Další věta je z článku [14], poslední z [11].

Věta 1.7. *Nechť* $u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega; \mathbb{R}^N)$, *kde* $p \geq \frac{N^2}{N+1}$. *Pak pro s.v.* $x \in \Omega$ *je*

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} (\mathcal{J}_u * \psi_\varepsilon)(x) = \det \nabla u(x).$$

Speciálně, jestliže $\mathcal{J}u$ *je Radonova míra, pak její absolutně spojitá část vzhledem k* N*-rozměrné Lebesgueově míře je* $\det \nabla u$.

Věta 1.8. *Nechť* $N = 2$ *a* $u \in W^{1,2}(\Omega) \cap BV^2(\Omega)$ *nebo* $N \geq 3$ *a* $u \in W^{2,p}$ *pro nějaké* $p \geq \frac{N^2}{N+2}$. *Nechť* $\{\psi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ *je standardní rodina zhlazovačů (definice na začátku kapitoly 3). Pak pro s.v.* $x \in \Omega$ *platí* $(\mathcal{H}u * \psi_\varepsilon)(x) \to \det \nabla^2 u(x)$, *kde* $\nabla^2 u$ *je absolutně spojitá část* $D^2 u$ *vzhledem k Lebesgueově míře na* $\mathbb{R}^N$. *Speciálně, jestliže* $\mathcal{H}u$ *je Radonova míra, pak její absolutně spojitá část vzhledem k* N*-rozměrné Lebesgueově míře je* $\det \nabla^2 u$.

Ve světle těchto vět jsou zajímavé dva výsledky z připravovaného článku [12], které jsou obsahem třetí a čtvrté kapitoly této práce. Ukazují, že při porušení podmínek kladených na p ve větě 1.7, resp. 1.8, může souvislost mezi distributivním determinantem a bodovým determinantem selhat.

Dalším pojmem studovaným v této práci je tzv. relaxace funkcionálu. Potřeba studovat relaxované funkcionály vznikla při studiu funkcionálů, které nejsou slabě sekvenciálně zdola polospojité, a proto slabá konvergence minimizující posloupnosti nezaručuje, že limita této posloupnosti je minimizérem daného funkcionálu. Problematikou relaxovaných funkcionálů souvisejících s Jakobiány se zabývali např. P. Marcellini [18], G. Bouchitté, I. Fonseca a J. Malý [4], I. Fonseca a J. Malý [10], I. Fonseca a P. Marcellini [13], E. Acerbi a N. Fusco [1] a řada dalších. Ukazuje se, že stejně jako za určitých podmínek se relaxace dá podobně jako distributivní determinanty reprezentovat nějakou mírou. V této práci je mimo jiné zkoumán i případný vztah této míry a totální variace míry reprezentující příslušný distributivní determinant.

Nechť $U \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina a $f : E_k^{N\times d} \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce, kde $E_k^{N\times d}$ označuje prostor všech symetrických k-lineárních zobrazení z $\mathbb{R}^N$ do $\mathbb{R}^N$. Uvažujme funkcionál

$$F(u,U) := \int_U f(\nabla^k u(x))dx. \tag{1.2}$$

Definice 1.9. Nechť $u \in W^{k,p}(U;\mathbb{R}^d)$. Relaxaci funkcionálu (1.2) definujeme jako

$$\mathcal{F}(u,U) := \inf_{u_n}\left\{\liminf_{n\to\infty} F(u_n,U) : u_n \in C^\infty(U),\ u_n \rightharpoonup u \text{ ve } W^{k,p}(U;\mathbb{R}^d)\right\}.$$

Pro Jakobián se bere $k := 1$, $d := N$ a $f(\xi) := |\det \xi|$. Dostáváme tedy následující definici:

Definice 1.10. Nechť $u \in W^{1,p}(U:\mathbb{R}^N)$. Pak relaxaci absolutní hodnoty Jakobiánu u definujeme jako

$$\mathcal{F}_J(u,U) := \inf_{u_n}\Big\{\liminf_{n\to\infty}\int_U |\det \nabla u_n(x)|dx : u_n \in C^\infty(U),$$
$$u_n \rightharpoonup u \text{ ve } W^{1,p}(U;\mathbb{R}^N)\Big\}.$$

Poznámka 1.11. Pro Ω takovou, že C^∞ zobrazení jsou hustá ve $W^{1,N}(\Omega)$, můžeme místo $u_n \in C^\infty(B(0,R);\mathbb{R}^N)$ požadovat $u_n \in W^{1,N}(B(0,1);\mathbb{R}^N)$. Vskutku, máme-li dánu $\{u_n\} \subset W^{1,N}(B(0,1);\mathbb{R}^N)$ takovou, že $u_n \rightharpoonup u$ ve $W^{1,p}(B(0,1);\mathbb{R}^N)$, tak z hustoty $C^\infty(B(0,R);\mathbb{R}^N)$ ve $W^{1,N}(B(0,R);\mathbb{R}^N)$ vyplývá, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $\tilde{u}_n \in C^\infty(B(0,R);\mathbb{R}^N)$ tak, že

$$||u_n - \tilde{u}_n||_{W^{1,2}(B(0,R);\mathbb{R}^2)} < \frac{1}{n}.$$

Je snadno vidět, že pak $\tilde{u}_n \rightharpoonup u$ ve $W^{1,p}(B(0,1);\mathbb{R}^2)$ a zároveň (výpočet provedeme pro $N=2$)

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\det \nabla u_n(x) - \det \nabla \tilde{u}_n(x)|\, dx \le \int_\Omega \Bigg(&\left|\left(\frac{\partial u_n^1}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial \tilde{u}_n^1}{\partial x_1}(x)\right)\frac{\partial u_n^2}{\partial x_2}(x)\right| \\ &+ \left|\left(\frac{\partial u_n^2}{\partial x_2}(x) - \frac{\partial \tilde{u}_n^2}{\partial x_2}(x)\right)\frac{\partial \tilde{u}_n^1}{\partial x_1}(x)\right| + \left|\left(\frac{\partial u_n^2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial \tilde{u}_n^2}{\partial x_1}(x)\right)\frac{\partial u_n^1}{\partial x_2}(x)\right| \\ &+ \left|\left(\frac{\partial u_n^1}{\partial x_2}(x) - \frac{\partial \tilde{u}_n^1}{\partial x_2}(x)\right)\frac{\partial \tilde{u}_n^2}{\partial x_1}(x)\right|\Bigg)\, dx \to 0.\end{aligned}$$

Pro Hessián dosazujeme $k := 2$, $d := 1$ a $f(\xi) := |\det \xi|$. Vznikne následující definice:

Definice 1.12. Nechť $u \in W^{2,p}(U : \mathbb{R})$. Pak relaxaci absolutní hodnoty Hessiánu u definujeme jako

$$\mathcal{F}_H(u,U) := \inf_{u_n}\Big\{ \liminf_{n\to\infty} \int_U |\det \nabla^2 u_n(x)|dx : u_n \in C^\infty(U),$$
$$u_n \rightharpoonup u \text{ ve } W^{2,p}(U;\mathbb{R})\Big\}.$$

Poznámka 1.13. Samozřejmě i pro Hessián platí analogie poznámky 1.11.

Poznámka 1.14. V označení relaxace z předcházejících dvou definic nefiguruje žádné p, ačkoli definovaný pojem na p závisí. Volba p bude vždy jasná z kontextu.

Z článku [11] je převzata tato věta:

Věta 1.15. *Nechť $u \in W^{2,p}(\Omega;\mathbb{R})$. Jestliže $p > N-1$ a $\mathcal{F}_H(u,\Omega) < \infty$, pak existuje Radonova míra $\mathcal{R}_H(u,.)$ taková, že pro každou otevřenou $U \subset \Omega$ je*

$$\mathcal{R}_H(u,U) = \mathcal{F}_H(u,U).$$

Jestliže $p > \frac{N^2}{N+2}$ a $\mathcal{F}_H(u,\Omega) < \infty$, pak $\mathcal{H}u$ ja Radonova míra a její totální variace splňuje nerovnost

$$|\mathcal{H}u| \le \mathcal{F}_H(u,.).$$

V kapitole 6 této práce je ukázáno, že tato nerovnost může být i ostrá.

Nakonec uveďme ještě jedno tvrzení, které je z článku [7].

Věta 1.16. *Nechť $\gamma : \langle 0,2\pi\rangle \to \mathbb{R}^2$ je křivka, která je vyjádřitelná ve tvaru $\gamma(t) = r(t)(\cos t, \sin t)$, kde $r(t)$ je po částech C^1- funkce, $r(0) = r(2\pi)$ a $r(t) \ge r_0 > 0$ pro všechna $t \in \langle 0,2\pi\rangle$. Nechť u je zobrazení třídy $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^2)\cap W^{1,\infty}(\Omega\setminus\{0\};\mathbb{R}^2)$ pro nějaké $p \in (1,2)$. Nechť $w : \langle 0,2\pi\rangle \to \langle\gamma\rangle$ je lipschitzovské zobrazení takové, že $w(0) = w(2\pi)$ a platí*

$$\lim_{r\to 0+} \|u(\Psi(r,.)) - w(.)\|_{L^\infty((0,2\pi);\mathbb{R}^2)} = 0.$$

Jestliže tečná derivace $\partial_\tau u$ (definice na začátku příští kapitoly) splňuje

$$\sup_{r>0} \tfrac{1}{r^{2-p}} \int_{B(0,r)} |\partial_\tau u(x)|^p dx \le M$$

s nějakou kladnou konstantou M, pak

$$\mathcal{F}_J(u,\Omega) = \int_\Omega |\det \nabla u(x)|dx + \tfrac{1}{2}\Big|\int_0^{2\pi} (w_1(t)w_2'(t) - w_2(t)w_1'(t))dt\Big|.$$

Zobecnění této věty je provedeno v kapitole 5 této práce. V článku [7] je dokázáno obdobné tvrzení i pro dimenzi vyšší než 2.

2 Úmluvy a některá užitečná tvrzení

V této kapitole jsou uvedena některá tvrzení, která budeme v této práci potřebovat. Nejprve však proveďme několik úmluv ohledně značení. V této práci bude Ω vždy otevřená podmnožina $\mathbb{R}^N$ konečné N-rozměrné Lebesgueovy míry. Dále budeme značit $\Psi(r,t) := (r\cos t, r\sin t)$ (jde o převod do polárních souřadnic).

Pro zobrazení $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ bude $\partial_\tau u(x)$ označovat tzv. tangenciální derivaci u v bodě x. Jedná se o derivaci restrikce ve smyslu stopy zobrazení u na sféru $\partial B(0,|x|)$, tedy pro pevně zvolené x je to lineární zobrazení z tečného postoru k $\partial B(0,|x|)$ do $\mathbb{R}^N$. Pro $N=2$ platí vzoreček

$$\partial_\tau u(\Psi(r,t)) = \frac{1}{r}\frac{\partial(u\circ\Psi)}{\partial t}(r,t). \tag{2.1}$$

Pro zobrazení $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^d$ budeme jednotlivé složky značit $u_1, u_2, ..., u_d$, jen v případě, že zobrazení již ve svém symbolu dolní index má (například je-li prvkem nějaké posloupnosti $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$), budeme jednotlivé složky označovat horními indexy, tedy např. $u_k^1, u_k^2, ..., u_k^d$.

Máme-li spojitou křivku γ (tím rozumíme spojité zobrazení z intervalu nebo kružnice do $\mathbb{R}^2$), pak pod označením $\operatorname{Ind}_\gamma z$ budeme rozumět index bodu z vzhledem ke γ, symbolem $\langle\gamma\rangle$ budeme značit obraz křivky a $U_\varepsilon(\langle\gamma\rangle)$ bude znamenat ε-ové okolí $\langle\gamma\rangle$.

Jako $\arg_{\alpha\beta}$ budeme značit spojitou větev argumentu definovanou na množině $\{re^{it} : r>0,\ \alpha<t\le\beta\}$ s hodnotami v intervalu $(\alpha,\beta\rangle$. Tam, kde nebude záležet na volbě konkrétní větve argumentu (např. při skládání argumentu s vnější 2π-periodickou funkcí) budeme psát jen arg.

Sobolevovskou funkcí na Ω budeme rozumět funkci z $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, tedy funkci, jejíž distributivní derivace jsou lokálně integrovatelné funkce.

Následující věta je potřeba v důkazu věty 5.2. Věta je dokázána v [5].

Věta 2.1. *Nechť $m\in\mathbb{N}, \Omega\subset\mathbb{R}^m$ je otevřená množina, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ je nezáporná konvexní funkce. Jestliže $u, u_n \in W^{1,m}_{loc}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ a u_n konvergují k u slabě ve $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ pro nějaké $p>m-1$, pak*

$$\liminf_{n\to\infty}\int_\Omega g(\det\nabla u_n)(x)dx \ge \int_\Omega g(\det\nabla u)(x)dx.$$

Lemma 2.2. *Nechť γ_1, γ_2 jsou spojité uzavřené křivky v rovině definované na intervalu $\langle 0,2\pi\rangle$.*
(1) Je-li $x\in\mathbb{R}^2$ takové, že

$$|\gamma_2(t)-\gamma_1(t)| < |x-\gamma_1(t)|$$

pro každé $t\in\langle 0,2\pi\rangle$, pak $\operatorname{Ind}_{\gamma_1}x = \operatorname{Ind}_{\gamma_2}x$.
(2) Je-li $|\gamma_2(t)-\gamma_1(t)|<\varepsilon$ pro všechna $t\in\langle 0,2\pi\rangle$, pak

$$\operatorname{Ind}_{\gamma_1}x = \operatorname{Ind}_{\gamma_2}x$$

pro každé $x \notin U_\varepsilon(\langle\gamma_1\rangle)$.

Důkaz. Část 1) je převzata z knihy [21], část 2) je jejím snadným důsledkem. □

Následující věta a za ní následující poznámka jsou variantou známé věty o derivování složeného zobrazení též známé jako řetízkové pravidlo. Je převzata z článku [15], původně pochází z článku [19].

Věta 2.3. *Mějme dánu borelovskou funkci* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. *Pak operátor skládání*

$$u \mapsto f \circ u$$

zobrazuje $W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^n)$ *do* $W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$, *právě když* f *je lipschitzovská.*

Poznámka 2.4. Serrin v [22] navíc dokázal, že když $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je lipschitzovská, pak pro každou funkci $u \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ platí

$$\nabla(f \circ u)(x) = f'(u(x))\nabla u(x) \text{ pro } \mathcal{L}^n \text{ s.v } x \in \mathbb{R}^n.$$

Další věta, kterou si v této kapitole uvedeme, je variantou věty o substituci, někdy se jí říká též area formula. Lze ji nalézt například v [8].

Věta 2.5. *Nechť* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *je otevřená množina a* $u \in W^{1,N}(\Omega; \mathbb{R}^N)$. *Pak pro každou* $E \subseteq \Omega$ *měřitelnou množinu platí, že*

$$\int_E |\det \nabla u(x)| dx = \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{N}(u, y, E) dy,$$

kde $\mathcal{N}(u, y, E)$ *je počet prvků množiny* $E \cap u^{-1}(y)$.

Na závěr této kapitoly si uveďme užitečné Beppo Leviho kritérium.

Věta 2.6. *Nechť měřitelná funkce* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *je lokálně absolutně spojitá na s.v. rovnoběžkách se souřadnými osami a derivace* u *jsou lokálně integrovatelné. Pak* u *je sobolevovská na* Ω. *Naopak, pro každou sobolevovskou* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *existuje reprezentant, který je lokálně absolutně spojitý na s.v. rovnoběžkách se souřadnými osami.*

Poznámka 2.7. Platí i následující tvrzení. Pro každou sobolevovskou funkci existuje reprezentant, který je absolutně spojitý vzhledem ke skoro všem kružnicím se středem v počátku a navíc se na skoro všech takovýchto kružnicích shoduje se svou stopou. V této práci budeme předpokládat, že všechny sobolevovské funkce jsou takto vhodně reprezentovány.

3 Distributivní Jakobián

Funkci $\psi_1 : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ budeme nazývat zhlazovačem, pokud $\psi_1 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, $0 \in \operatorname{spt} \psi_1$ a platí

$$\int_{\mathbb{R}^N} \psi_1 := 1.$$

Pokud máme dán nějaký zhlazovač ψ_1, pak definujeme standardní rodinu zhlazovačů $\{\psi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ jako systém funkcí daných vzorcem

$$\psi_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^N}\psi_1\big(\tfrac{x}{\varepsilon}\big).$$

Pod označením ψ_ε budeme vždy rozumět prvek nějaké standardní rodiny zhlazovačů.

Věta 3.1. *Nechť $N-1 \le p < \frac{N^2}{N+1}$. Pak existuje omezená $u \in W^{1,p}(Q(0,1),\mathbb{R}^N)$, standardní rodina zhlazovačů ψ_ε a měřitelná množina $E \subset Q(0,1)$ tak, že $|E| > 0$, $u = 0$ na E a přitom pro každé $x \in E$ platí*

$$\limsup_{\varepsilon \to 0+} (\operatorname{Det} \nabla u * \psi_\varepsilon)(x) > 0.$$

Důkaz. Zvolme si liché $M \in \mathbb{N}$, $M > 5$ a označme $Q(z,r) := \{z\} + \langle -r, r\rangle^N$ uzavřenou krychli v $\mathbb{R}^N$ se středem v bodě z a délkou hrany $2r$, $Q_0 := Q(0,1)$, $q_n := M^{n^2}$, $k_n := M^{n^2+n}$, $R_n := \left(\frac{k_n}{q_n^{N+1}}\right)^{\frac{1}{N}}$.

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ rozdělme Q_0 na krychle o hraně délky $\frac{2}{q_n}$ a označme $\mathcal{Q}_n$ množinu takových krychlí, tedy

$$\mathcal{Q}_n := \Big\{ Q\big(z, \tfrac{1}{q_n}\big) : |z| < 1,\ \exists\, l_1, ..., l_N \in \mathbb{Z} \text{ tak,}$$

$$\text{že } z_i = \frac{2l_i + 1}{q_n} \text{ pro } i = 1, ..., N \Big\}.$$

Dále pro $Q \in \mathcal{Q}_n$ označme z_Q střed Q a

$$K^Q := Q\Big(z_Q, \tfrac{1}{k_n}\Big)$$

$$P^Q := Q\Big(z_Q, \tfrac{1}{Mq_n}\Big).$$

Krychli $Q \in \mathcal{Q}_n$ nazveme špatnou, pokud existuje $Q' \in \bigcup_{i<n} \mathcal{Q}_i$ tak, že $Q \subset K_{Q'}$, v opačném případě nazveme krychli dobrou. Množinu všech dobrých krychlí z $\mathcal{Q}_n$ označíme $\mathcal{Q}_n^*$.

Zafixujme si zobrazení $f = (f_1, ..., f_N) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ tak, aby splňovalo

$$0 \le f_1 \le 1,$$

$$f_1(x) = 0 \text{ mimo } Q\left(0, \tfrac{1}{2}\right), \tag{3.1}$$

$$\int_{Q\left(0,\frac{1}{2}\right)} f_1(x)dx > 0$$

$$f_i(x) = x_i \text{ pro } x \in Q\left(0, \tfrac{1}{2}\right),\ i = 2, ..., N, \tag{3.2}$$

$$f(x) = 0 \text{ pro } x \notin Q(0,1),$$

a zhlazovač $\psi_1 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ tak, aby platilo

$$\operatorname{spt}(\psi_1) \subseteq Q(0,1),$$

a

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1}(x) = K = \text{konst. pro } x \in Q\left(0, \tfrac{1}{2}\right), \tag{3.3}$$

kde $K > 0$. Označme

$$C_1 := \int_{Q\left(0,\frac{1}{2}\right)} f_1(x)dx,\ C_2 := \max_{x\in\mathbb{R}^N} |\nabla\psi(x)|,\ C_3 := \max_{x\in\mathbb{R}^N} |\nabla f(x)|.$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každou krychli $Q \in \mathcal{Q}_n^*$ položme

$$u^Q(x) := R_n f((x - z_Q)k_n).$$

Je jasné, že $\operatorname{spt}(u^Q) \subseteq K^Q$. Dále položme

$$u_n = \sum_{Q\in\mathcal{Q}_n^*} u^Q,\ u = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n.$$

Protože nosiče jednotlivých u_Q se nepřekrývají, tak platí, že pro každé $x \in Q_0$ buď $u(x) = 0$, nebo existuje $n \in \mathbb{N}$ a $Q \in \mathcal{Q}_n^*$ tak, že $u(x) = u^Q(x)$. Pak ale $|u(x)| = |u^Q(x)| = R_n|f((x - z_Q)k_n)| \leq |f((x - z_Q)k_n)|$, protože $R_n < 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.
Z toho plyne, že u je omezená. Dále platí, že pro $Q \in \mathcal{Q}_n*$ je

$$\int_{K^Q} |\nabla u^Q(x)|^p dx = \frac{R_n^p k_n^p}{k_n^N} \int_{Q(0,1)} |\nabla f(y)| dy = C\frac{R_n^p k_n^p}{k_n^N}$$

a v každém $\mathcal{Q}_n*$ je takových krychlí nejvýše q_n^N. Dostáváme tedy

$$\int_{Q_0} |\nabla u(x)|^p dx = \sum_{n=1}^\infty \sum_{Q\in\mathcal{Q}_n^*} \int_{K^Q} |\nabla u^Q(x)|^p dx \leq C \sum_{n=1}^\infty (R_n k_n)^p \frac{q_n^N}{k_n^N} =$$

$$= C\sum_{n=1}^\infty \left(\frac{q_n}{k_n}\right)^{N - \frac{p(N+1)}{N}} = C\sum_{n=1}^\infty (M^{-n})^{N-\frac{p(N+1)}{N}} < \infty,$$

takže $u \in W^{1,p}(Q_0; \mathbb{R}^N)$.

Nyní zvolme $n \in \mathbb{N}$, $Q \in \mathcal{Q}_n^*$ a $y \in P^Q$. Položme

$$\delta := \frac{4}{Mq_n}.$$

Pak je $Q(y,\delta) \subset Q$ a $u_n = u^Q$ na $B(y,\delta)$. Navíc $K^Q \subset Q(y, \frac{\delta}{2})$, protože $P^Q \subset Q(y, \frac{\delta}{2})$ a $K^Q \subset P^Q$. Dostáváme

$$(\mathcal{J}u^Q * \psi_\delta)(y) = \int_{\mathbb{R}^N} u_1^Q(x) \det\Big(\nabla\psi_\delta(y-x), \nabla u_2^Q(x), ..., \nabla u_N^Q(x)\Big)\, dx =$$

$$= \int_{K^Q} R_n^N k_n^{N-1} f_1((x-z_Q)k_n) \det\big(\nabla\psi_\delta(y-x), \nabla f_2((x-z_Q)k_n), ...$$

$$..., \nabla f_N((x-z_Q)k_n)\big) dx =$$

$$= \frac{R_n^N k_n^{N-1}}{k_n^N \delta^{N+1}} \int_{Q(0,\frac{1}{2})} f_1(v) \det\left(\nabla\psi\left(\frac{k_n y - k_n z_Q - v}{k_n\delta}\right), \nabla f_2(v), ..., \nabla f_N(v)\right) dv =$$

$$= \frac{R_n^N}{k_n \delta^{N+1}} K \int_{Q(0,\frac{1}{2})} f_1(v) dv = \left(\frac{M}{4}\right)^{N+1} C_1 K.$$

Předposlední rovnost platí díky podmínkám (3.1), (3.2) a (3.3), protože $\frac{k_n y - k_n z_Q - v}{k_n \delta} \in Q\left(0, \frac{1}{2}\right)$ pro každé $v \in Q\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Pro $i > n$ a $Q' \in \mathcal{Q}_i^*$, $Q' \subset Q$ je

$$|(\mathcal{J}u^{Q'} * \psi_\delta)(y)| = \left|\int_{\mathbb{R}^N} u_1^{Q'}(x) \det\Big(\nabla\psi_\delta(y-x), \nabla u_2^{Q'}(x), ..., \nabla u_N^{Q'}(x)\Big)\, dx\right| \le$$

$$\le C_2 R_i (C_3 k_i R_i)^{N-1} \left(\frac{Mq_n}{4}\right)^{N+1} k_i^{-N} = C_2 (C_3)^{N-1} \left(\frac{M}{4}\right)^{N+1} \left(\frac{q_n}{q_i}\right)^{N+1}.$$

Pro zvolené $i > n$ je takových krychlí $Q' \subset Q$ nejvýše $\left(\frac{q_i}{q_n}\right)^N$, a tedy

$$|(\mathcal{J}u_i * \psi_\delta)(y)| \le C_2 (C_3)^{N-1} \left(\frac{M}{4}\right)^{N+1} \left(\frac{q_n}{q_i}\right) = C_2 (C_3)^{N-1} \left(\frac{M}{4}\right)^{N+1} M^{n^2 - i^2}.$$

Díky tomu, že pro $i \ne j$ jsou nosiče u_i a u_j disjunktní, dostáváme

$$|(\mathcal{J}u * \psi_\delta)(y)| = |(\mathcal{J}u^Q * \psi_\delta)(y) + \sum_{i>n} (\mathcal{J}u_i * \psi_\delta)(y)| \ge$$

$$\ge |(\mathcal{J}u^Q * \psi_\delta)(y)| - |\sum_{i>n} (\mathcal{J}u_i * \psi_\delta)(y)| \ge$$

$$\geq \left(\frac{M}{4}\right)^{N+1} \left(C_1 K - C_2 (C_3)^{N-1} \sum_{i=n+1}^{\infty} M^{n^2-i^2}\right) := a(n).$$

Je-li tedy y takové, že existuje nekonečně mnoho $n \in \mathbb{N}$, že $y \in P^Q$ pro nějakou $Q \in \mathcal{Q}_n^*$, pak

$$\limsup_{\delta \to 0+} (\mathcal{J}u * \psi_\delta)(y) \geq \limsup_{n \to \infty} a(n) > 0.$$

Položme

$$E := \{y \in Q_0 : y \in \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}_n^*} \left(P^Q \setminus K^Q\right) \text{ pro nekonečně mnoho } n \in \mathbb{N}\} =$$

$$= \limsup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}_n^*} (P^Q \setminus K^Q).$$

Chceme dokázat, že $|E| > 0$. Platí

$$E = Q_0 \setminus \Big[\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}_n^*} K^Q \cup \bigcup_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq n_0} \big(\bigcup_{Q \in \mathcal{Q}_n^*} P^Q \big)^{\complement} \Big],$$

přičemž

$$\Big| \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}_n^*} K^Q \Big| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{q_n}{k_n}\right)^N = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{M^{nN}} < 2^N = |Q_0|.$$

Dále je

$$\bigcup_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq n_0} \big(\bigcup_{Q \in \mathcal{Q}_n^*} P^Q \big)^{\complement} = \bigcup_{n_0 \in \mathbb{N}} \Big\{ y \in Q_0 : \forall n \geq n_0 \ y \in \big(\bigcup_{Q \in \mathcal{Q}_n^*} P^Q \big)^{\complement} \Big\}.$$

Dokažme, že pro libovolné $n_0 \in \mathbb{N}$ je

$$\Big| \Big\{ y \in Q_0 : \forall n \geq n_0 \ y \in \big(\bigcup_{Q \in \mathcal{Q}_n^*} P^Q \big)^{\complement} \Big\} \Big| = 0. \tag{3.4}$$

Označme

$$W_n := \Big(\bigcup_{Q \in \mathcal{Q}_n^*} P^Q \Big)^{\complement}.$$

Pro libovolná $n_0, n, n' \in \mathbb{N}$, $n > n' \geq n_0$, $Q \in \mathcal{Q}_n^*$, $Q' \in \mathcal{Q}_{n'}^*$, platí, že Q je buď uvnitř $P^{Q'}$ nebo vně $P^{Q'}$ (mohou se protínat maximálně jejich hranice). Proto je

$$W_{n_0} \cap W_{n_0+1} \cap \ldots \cap W_{n-1} = \bigcup \{Q \in \mathcal{Q}_n^* : Q \subset \overline{W}_{n_0} \cap \ldots \cap \overline{W}_{n-1}\} \setminus N,$$

$$W_{n_0} \cap W_{n_0+1} \cap \ldots \cap W_n = \bigcup \{Q \setminus P^Q : Q \in \mathcal{Q}_n^*, Q \subset \overline{W}_{n_0} \cap \ldots \cap \overline{W}_{n-1}\} \setminus N',$$

kde $|N| = 0$, $|N'| = 0$. Dostáváme

$$|W_{n_0} \cap \ldots \cap W_n| = \left(1 - \tfrac{1}{M}\right) |\{Q \in \mathcal{Q}_n^* : Q \subset W_{n_0} \cap \ldots \cap W_{n-1}\}|$$

$$= \left(1 - \tfrac{1}{M}\right) |W_{n_0} \cap \ldots \cap W_{n-1}| = \ldots = \left(1 - \tfrac{1}{M}\right)^{n-n_0} |W_{n_0}|.$$

Tedy vidíme, že platí (3.4) a $|E| > 0$. $\square$

Poznámka 3.2. Tento příklad lze volně interpretovat tak, že absolutně spojitá část distributivního Jakobiánu se liší od bodového Jakobiánu na množině E kladné míry. Tato interpretace však není zcela přesná, neboť distributivní Jakobián zkonstruovaného zobrazení není míra, a tudíž striktně vzato nemá absolutně spojitou část. Příklad, v němž by distributivní Jakobián byla míra a její absolutně spojitá část by se lišila od bodového Jakobiánu, neexistuje, viz. [12].

Následující lemma je variantou lemmatu 38 z [7].

Lemma 3.3. *Nechť* $u \in W^{1,p}(B(0,1);\mathbb{R}^N) \cap W^{1,N}_{loc}(B(0,1)\setminus\{0\};\mathbb{R}^N)$ *pro nějaké* $p \in \langle 1, N)$. *Jestliže*

$$\frac{1}{R^{N-p}}\int_{B(0,R)} |\partial_\tau u(x)|^p dx < M$$

pro každé $R > 0$ *s nějakou konstantou* $M > 0$, *pak existuje konstanta* c *(závislá na* p*) a posloupnost množin* E_n *taková, že*

1. $E_n \subset \langle 2^{-n-1}, 2^{-n}\rangle$ *pro každé* $n \in \mathbb{N}$,

2. $|E_n| > 0$ *pro každé* $n \in \mathbb{N}$,

3. *vybereme-li pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *poloměr* $R_n \in E_n$, *pak* $u \restriction \partial B(0, R_n)$ *je absolutně spojitá, splývá se stopou* u *na* $\partial B(0,R_n)$ *a poloměr* R_n *splňuje*

$$\frac{1}{R_n^{N-1-p}}\int_{\partial B(0,R_n)} |\partial_\tau u\,(x)|^p\, dS(x) \le cM \tag{3.5}$$

a

$$\int_{\partial B(0,R_n)} |\partial_\tau u\,(x)|^N\, dS(x) < \infty. \tag{3.6}$$

Důkaz. Stačí množiny E_n vybrat tak, aby bylo splněno 3.5, protože ostatní podmínky platí pro s.v. poloměry R_n. Pro $n \ge 2$ máme

$$\int_{2^{-n-1}}^{2^{-n}} dr \int_{\partial B(0,r)} |\partial_\tau u|^p dS \le \int_{B(0,2^{-n})} |\partial_\tau u|^p dx \le \tfrac{M}{2^{n(N-p)}}.$$

Proto existuje $E_n \subset \langle 2^{-n-1}, 2^{-n}\rangle$ kladné míry taková, že pro každé $R_n \in E_n$ platí

$$\int_{\partial B(0,R_n)} |\partial_\tau u|^p dS \le \tfrac{3M}{2^{n(N-1-p)}}. \tag{3.7}$$

Kdyby toto neplatilo, pak by pro s.v. $r \in \langle 2^{-n-1}, 2^{-n}\rangle$ muselo být

$$\int_{\partial B(0,R_n)} |\partial_\tau u|^p dS > \tfrac{3M}{2^{n(N-1-p)}},$$

a tedy

$$\int_{2^{-n-1}}^{2^{-n}} dr \int_{\partial B(0,r)} |\partial_\tau u|^p dS > \tfrac{3M}{2^{n(N-1-p)}} \tfrac{1}{2^{n+1}} > \tfrac{M}{2^{n(N-p)}},$$

což je spor. Víme, že $2^{-n-1} \leq R_n \leq 2^{-n}$, takže $(2^{-n})^{N-p-1} \leq R_n^{N-p-1}$, jestliže $p \geq N-1$, a $(2^{-n})^{N-p-1} \leq (2R_n)^{N-p-1}$, jestliže $p < N-1$. Z (3.7) dostáváme

$$\int_{\partial B(0,R_n)} |\partial_\tau u|^p dS \leq \tfrac{3M}{2^{n(N-p-1)}} \leq cMR_n^{N-p-1}.$$

□

Následující věta nám umožňuje určit singulární část distributivního Jakobiánu pro některá zobrazení. To se nám bude hodit v kapitole 6.

Věta 3.4. *Nechť $N \geq 2$ a $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina. Nechť $N-1 < p < N$ a $u \in W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^N) \cap W^{1,N}_{loc}(\Omega' \setminus \{0\};\mathbb{R}^N)$. Nechť $v : \overline{B}(0,1) \to \mathbb{R}^N$ je lipschitzovské zobrazení takové, že*

$$\lim_{r \to 0+} u(rz) = v(z), \quad z \in \partial B(0,1) \tag{3.8}$$

a

$$\int_{B(0,R)} |\partial_\tau u(x)|^p dx \leq CR^{N-p}. \tag{3.9}$$

pro každé $R > 0$. Pak

$$\langle \operatorname{Det} \nabla u, \phi \rangle = \int_\Omega \phi(x) \det \nabla u(x) dx + \phi(0) \int_{B(0,1)} \det \nabla v(x) dx.$$

Důkaz. Nechť R_n je posloupnost jako v lemmatu 3.3. Nejprve dokažme, že z (3.8) a (3.9) plyne, že existuje podposloupnost posloupnosti R_n (budeme ji značit opět R_n) taková, že $u(R_n \cdot) \rightrightarrows v(\cdot)$ na $\partial B(0,1)$, když $n \to \infty$. Skutečně, označme si $\tilde{u}_n(z) := u(R_n z)$ pro $z \in \partial B(0,1)$. Díky volbě R_n dostaneme, že

$$\int_{\partial B(0,1)} |\partial_\tau \tilde{u}_n(z)|^p dS = \frac{1}{R_n^{N-1}} \int_{\partial B(0,R_n)} |R_n \partial_\tau u(z)|^p dS \leq cM,$$

takže $\tilde{u}_n$ je omezená ve $W^{1,p}(\partial B(0,1);\mathbb{R}^N)$. Obsahuje tedy podposloupnost, která je slabě konvergentní ve $W^{1,p}(\partial B(0,1);\mathbb{R}^N)$. Ta ale díky předpokladu (3.8) nemůže konvergovat k ničemu jinému, než k $v \restriction \partial B(0,1)$. Označíme-li $v_n(x) := \tilde{u}_n(x) - v(x)$ pro $x \in \partial B(0,1)$, pak $v_n \rightharpoonup 0$ ve $W^{1,p}(\partial B(0,1);\mathbb{R}^N)$. Dokažme, že $v_n \rightrightarrows 0$. Platí

$$\sup_{\partial B(0,1)} |v_n(x)|^p - \inf_{\partial B(0,1)} |v_n(x)|^p \leq \int_{\partial B(0,1)} |\nabla(|v_n|^p)|\, dS \leq$$

$$\leq p \int_{\partial B(0,1)} |\nabla v_n| |v_n|^{p-1} dS \leq p \left(\int_{\partial B(0,1)} |\nabla v_n|^p dS \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\partial B(0,1)} |v_n|^p dS \right)^{\frac{p-1}{p}},$$

a protože

$$\inf_{\partial B(0,1)} |v_n(x)|^p \leq \frac{1}{r}\int_{\partial B(0,1)} |v_n|^p dS,$$

dostáváme

$$\sup_{\partial B(0,1)} |v_n(x)|^p \leq \int_{\partial B(0,1)} |v_n|^p dS$$

$$+p\left(\int_{\partial B(0,1)} |\nabla v_n|^p dS\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\partial B(0,1)} |v_n|^p dS\right)^{\frac{p-1}{p}} \to 0$$

pro $n \to \infty$. Dokázali jsme, že $\tilde{u}_n \rightrightarrows v$ na $\partial B(0,1)$.
Položme

$$u_n(x) := \begin{cases} u(x) & \text{pro } |x| > R_n, \\ \eta_n(|x|)u\big(R_n\frac{x}{|x|}\big) + (1-\eta_n(|x|))v\big(\frac{x}{|x|}\big) & \text{pro } \frac{R_n}{2} < |x| < R_n, \\ v\big(\frac{2x}{R_n}\big) & \text{pro } |x| \leq \frac{R_n}{2}, \end{cases}$$

kde $\eta_n(r) = 0$ pro $0 \leq r \leq \frac{R_n}{2}$, $\eta_n(r) = 1$ pro $r \geq R_n$, η_n je C^1 na $(0,\infty)$ a $0 \leq \eta_n'(r) \leq \frac{3}{R_n}$ pro všechna r.

Nejprve dokažme, že pro každou $\phi \in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{R}^N)$ je

$$\lim_{n\to\infty}\langle \operatorname{Det} u_n, \phi\rangle = \langle \operatorname{Det}\nabla u, \phi\rangle.$$

Skutečně, platí

$$\lim_{n\to\infty}\langle \operatorname{Det}\nabla u_n, \phi\rangle = -\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega\setminus B(0,R_n)} u_1(x)\det(\nabla\phi, \nabla u_2, ..., \nabla u_N)(x)dx-$$

$$-\lim_{n\to\infty}\int_{B(0,R_n)\setminus B(0,\frac{R_n}{2})} u_n^1(x)\det(\nabla\phi, \nabla u_n^2, ..., \nabla u_n^N)(x)dx- \tag{3.10}$$

$$-\lim_{n\to\infty}\int_{B(0,\frac{R_n}{2})} u_n^1(x)\det(\nabla\phi, \nabla u_n^2, ..., \nabla u_n^N)(x)dx. \tag{3.11}$$

Stačí dokázat, že poslední dvě limity se rovnají 0. Pro (3.11) platí

$$\int_{B(0,\frac{R_n}{2})} u_n^1(x)\det(\nabla\phi, \nabla u_n^2, ..., \nabla u_n^N)(x)dx =$$

$$= -\frac{R_n^N 2^{N-1}}{2^N R_n^{N-1}}\int_{B(0,1)} v_1(y)\det\big(\nabla\phi(\tfrac{R_n}{2}y), \nabla v_2(y), ..., \nabla v_N(y)\big)dy \to 0,$$

když $n \to \infty$, protože v, $\nabla\phi$, ∇v jsou v L^∞. Pokud jde o (3.10), tak platí

$$|\det(\nabla\phi, \nabla u_n^2, ..., \nabla u_n^N)(x)| \leq |\nabla\phi(x)||\nabla u_n^2(x)|...|\nabla u_n^N(x)| \leq$$

$$\le \|\nabla\phi\|_{L^\infty}\Big(\big|\tfrac{1}{R_n}\partial_\tau v_2\big(\tfrac{x}{|x|}\big)\big| + \big|\partial_\tau u_2\big(R_n\tfrac{x}{|x|}\big)\big| + \tfrac{2}{R_n}\big|u_2\big(R_n\tfrac{x}{|x|}\big) - v_2\big(\tfrac{x}{|x|}\big)\big|\Big)...$$

$$...\Big(\big|\tfrac{1}{R_n}\partial_\tau v_N\big(\tfrac{x}{|x|}\big)\big| + \big|\partial_\tau u_N\big(R_n\tfrac{x}{|x|}\big)\big| + \tfrac{2}{R_n}\big|u_N\big(R_n\tfrac{x}{|x|}\big) - v_N\big(\tfrac{x}{|x|}\big)\big|\Big).$$

Dostáváme

$$\int_{B(0,R_n)\setminus B(0,\frac{R_n}{2})} u_n^1(x)\det(\nabla\phi, \nabla u_n^2, ..., \nabla u_n^N)(x)|dx$$

$$\le C|(|u_1| + |v_1|)\|_{L^\infty(B(0,R_n);\mathbb{R}^N)}\|\nabla\phi\|_{L^\infty(B(0,R_n);\mathbb{R}^N)}\cdot$$

$$\cdot\int_{B(0,R_n)\setminus B(0,\frac{R_n}{2})}\Big(\Big|\tfrac{1}{R_n}\partial_\tau v\big(\tfrac{x}{|x|}\big)\Big|^{N-1}+\Big|\partial_\tau u\big(R_n\tfrac{x}{|x|}\big)\Big|^{N-1}+\Big|\tfrac{1}{R_n}u\big(R_n\tfrac{x}{|x|}\big)-v\big(\tfrac{x}{|x|}\big)\Big|^{N-1}\Big)dx$$

$$\le C|(|u_1| + |v_1|)\|_{L^\infty(B(0,R_n);\mathbb{R}^N)}\|\nabla\phi\|_{L^\infty(B(0,R_n);\mathbb{R}^N)}\cdot$$

$$\cdot\Bigg[\frac{R_n^N}{R_n^{N-1}}\Big(\int_{\partial B(0,1)}|\partial_\tau v|^{N-1}dS + \sup_{x\in\partial B(0,1)}\big|u\big(R_n\tfrac{x}{|x|}\big) - v(x)\big|\Big)$$

$$+\Big(\int_{\partial B(0,R_n)}|\partial_\tau u|^p dS\Big)^{\frac{N-1}{p}} R_n^{\frac{p+1-N}{p}} R_n\Bigg] \to 0.$$

Nyní stačí dokázat, že

$$\lim_{n\to\infty}\langle \mathrm{Det}\,\nabla u_n, \phi\rangle = \int_\Omega \phi(x)\det\nabla u(x)dx + \phi(0)\int_{B(0,1)}\det\nabla v(x)dx.$$

Protože $u_n \in W^{1,N}_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{R}^N)$, platí

$$\langle \mathrm{Det}\,\nabla u_n, \phi\rangle = \int_\Omega \phi(x)\det\nabla u_n(x)dx =$$

$$= \int_{\Omega\setminus B(0,R_n)}\phi(x)\det\nabla u(x)dx+ \tag{3.12}$$

$$+\int_{B(0,R_n)\setminus B(0,\frac{R_n}{2})}\phi(x)\det\nabla u_n(x)dx+ \tag{3.13}$$

$$+\phi(0)\int_{B(0,\frac{R_n}{2})}\det\nabla u_n(x)dx+ \tag{3.14}$$

$$+\int_{B(0,\frac{R_n}{2})}[\phi(x) - \phi(0)]\det\nabla u_n(x)dx. \tag{3.15}$$

Integrál v (3.12) konverguje k $\int_\Omega \phi(x)\det\nabla u(x)dx$. Pro integrál v (3.13) platí

$$\Big|\int_{B(0,R_n)\setminus B(0,\frac{R_n}{2})}\phi(x)\det\nabla u_n(x)dx\Big| \le \|\phi\|_{L^\infty(\Omega)}\int_{B(0,R_n)\setminus B(0,\frac{R_n}{2})}|\det\nabla u_n(x)|dx \to 0.$$

Platí
$$|\det \nabla u_n(x)| \le |\partial_\tau u_n(x)|^{N-1} |\partial_\nu u_n(x)|,$$
kde $\partial_\nu u_n$ značí derivaci podle vnější normály k $\partial B(0,|x|)$ v bodě x. Pro integrál (3.13) tedy dostaneme

$$\int_{B(0,R_n)\setminus B(0,\frac{R_n}{2})} |\det \nabla u_n(x)| dx \le$$

$$\le C \int_{\frac{R_n}{2}}^{R_n} dr \int_{\partial B(0,R_n)} \tfrac{1}{R_n} |v(\tfrac{x}{R_n}) - u(x)| \Big[\big|\partial_\tau v(\tfrac{x}{R_n})\big| + |\partial_\tau u(x)| \Big]^{N-1} dS(x)$$

$$\le C \sup_{x\in\partial B(0,R_n)} \Big\{ |v(\tfrac{x}{R_n}) - u(x)| \Big\} \cdot$$

$$\cdot \Big(\int_{\partial B(0,R_n)} \Big[\big|\partial_\tau v(\tfrac{x}{R_n})\big| + |\partial_\tau u(x)| \Big]^{N-1} dS(x) \to 0,$$

když $n \to \infty$, protože

$$\int_{\partial B(0,R_n)} |\partial_\tau u(x)|^{N-1} dS(x) \le \Big(\int_{\partial B(0,R_n)} |\partial_\tau u(x)|^p \, dS(x) \Big)^{\frac{N-1}{p}} R_n^{(N-1)\frac{p+1-N}{p}} \le C.$$

Pro integrál v (3.14) platí

$$\Big| \int_{B(0,\frac{R_n}{2})} [\phi(x) - \phi(0)] \det \nabla u_n(x) dx \Big| = \Big| \int_{B(0,1)} [\phi(\tfrac{R_n}{2} y) - \phi(0)] \det \nabla v(y) dy \Big| \le$$

$$\le \|\phi - \phi(0)\|_{L^\infty(B(0,\frac{R_n}{2}))} \int_{B(0,1)} |\det \nabla v(y)| dy \to 0,$$

když $n \to \infty$, protože $\|\phi - \phi(0)\|_{L^\infty(B(0,\frac{R_n}{2}))} \to 0$. □

4 Distributivní Hessián

Věta 4.1. *Nechť $N - 2 \le p < \frac{N^2}{N+2}$. Pak existuje $u \in W^{2,p}(Q(0,1);\mathbb{R}) \cap W^{1,\infty}(Q(0,1);\mathbb{R})$, standardní rodina zhlazovačů $\{\psi_\varepsilon\}$ a měřitelná množina $E \subset Q(0,1)$ tak, že $|E| > 0$, $u = 0$ na E a přitom pro každé $x \in E$ platí*

$$\limsup_{\varepsilon \to 0+} (\mathcal{H}u * \psi_\varepsilon)(x) > 0.$$

Důkaz. Zadefinujme si $q_n, k_n, Q_0, \mathcal{Q}_n, \mathcal{Q}_n^*, K^Q, P^Q$ stejně jako v důkazu věty 3.1. Zvolme si C^2 funkci $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ takovou, aby $\operatorname{spt}(f) \subset Q_0$ a

$$\sum_{p \in S_N, p_2 = 1} \operatorname{sgn} p \int_{Q_0} \det\left(\frac{\partial f}{\partial x_{p_1}}(x)\nabla f(x), (1,0,...,0), \nabla\frac{\partial f}{\partial x_{p_3}}(x), ..., \nabla\frac{\partial f}{\partial x_{p_n}}(x)\right) dx =:$$

$$=: C_0 > 0,$$

(taková existuje podle lemmatu 4.3) a zhlazovač ψ_1 tak, aby splňoval

$$\operatorname{spt}(\psi) \subset Q(0,1),$$

a

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} = K > 0, \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j}(x) = 0 \text{ pro } (i,j) \neq (1,1), x \in Q\big(0, \tfrac{1}{2}\big).$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každou $Q \in \mathcal{Q}_n$ položme

$$u^Q(x) := \frac{R_n}{k_n} f((x - z_Q)k_n),$$

kde R_n bude upřesněno později. Zvolme si $n \in \mathbb{N}, Q \in \mathcal{Q}_n^*$ a $y \in P^Q$ a položme

$$\delta := \frac{4}{Mq_n}.$$

Pro libovolné $x \in K^Q$ je $\frac{y-x}{\delta} \in Q(0, \frac{1}{2})$, a tedy dostaneme

$$(\mathcal{H}u^Q * \psi_\delta)(y) =$$

$$\frac{1}{N!} \sum_{p \in S_N} \operatorname{sgn} p \int_{K^Q} \det\left(\frac{\partial u^Q}{\partial x_{p_1}}(x)\nabla u^Q(x), \nabla\frac{\partial \psi_\delta}{\partial x_{p_2}}(y - x), \nabla\frac{\partial u^Q}{\partial x_{p_3}}(x), ..., \nabla\frac{\partial u^Q}{\partial x_{p_N}}(x)\right) dx =$$

$$\frac{R_n^N k_n^{N-2}}{N!\delta^{N+2}} \sum_{p \in S_N, p_2 = 1} \operatorname{sgn} p \int_{K^Q} \det\left(\frac{\partial f}{\partial x_{p_1}}(k_n(x - z_Q))\nabla f(k_n(x - z_Q)), (K, 0, ..., 0), ...\right.$$

$$\left. ..., \nabla\frac{\partial f}{\partial x_{p_n}}(k_n(x - z_Q))\right) dx = \frac{C_0 K M^{N+2} R_n^N q_n^{N+2}}{4^{N+2} k_n^2}.$$

Zvolme R_n tak, aby
$$\frac{C_0 K M^{N+2} R_n^N q_n^{N+2}}{4^{N+2} k_n^2} = 1.$$
Pro $i > n$ a $Q' \in \mathcal{Q}_i^*$ platí
$$|(\mathcal{H} u^{Q'} * \psi_\delta)(y)| \leq \frac{C_1 R_i^N q_n^{N+2}}{k_i^2},$$
a tedy
$$|(\mathcal{H} u * \psi_\delta)(y)| \geq 1 - \sum_{i>n} \left(\frac{q_i}{q_n}\right)^N \frac{C_1 R_i^N q_n^{N+2}}{k_i^2} = 1 - \sum_{i>n} \frac{C_1 R_i^N q_i^{N+2}}{k_i^2} \left(\frac{q_n}{q_i}\right)^2 =: a(n),$$
kde je dobré si uvědomit, že $\frac{R_i^N q_i^{N+2}}{k_i^2}$ je konstanta vzhledem k i. Položíme-li opět
$$E := \{y \in Q_0 : y \in \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}_n^*} \left(P^Q \setminus K^Q\right) \text{ pro nekonečně mnoho } n \in \mathbb{N}\} =$$
$$= \limsup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}_n^*} (P^Q \setminus K^Q),$$
dostaneme, že pro každé $y \in E$ platí
$$\limsup_{\delta \to 0+} (\mathcal{H} u * \psi_\delta)(y) \geq \limsup_{n \to \infty} a(n) > 0.$$
□

Poznámka 4.2. I na tento příklad se vztahuje poznámka analogická poznámce 3.2, tedy jev je umožněn tím, že distributivní Hessián není míra.

Lemma 4.3. *Existuje funkce* $f \in C_c^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}) \cap W^{2,N}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ *taková, že*
$$\int_{\operatorname{spt} f} x_1^2 \det \nabla^2 f(x) dx \neq 0.$$

Důkaz. Zvolme si $R_1 > R_2 > 0$ a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takovou, že

1. g je $C^\infty(\mathbb{R})$,
2. $g \leq 0$, $g(s) = 0$ pro $s > R_1$,
3. $g'(0) = 0$, g' je rostoucí na $\langle 0, R_2 \rangle$ a klesající na $\langle R_2, R_1 \rangle$.

Položme

$$f(x) := g(|x|).$$

Pak

$$\nabla f(x) = \begin{cases} g'(|x|)\frac{x}{|x|} & \text{pro } x \neq 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0, \end{cases}$$

a pro $x \neq 0$ je tedy

$$\nabla^2 f(x) = g''(|x|)\tfrac{x\otimes x}{|x|^2} + \tfrac{g'(|x|)}{|x|}\big(I - \tfrac{x\otimes x}{|x|^2}\big) = \big(g''(|x|) - \tfrac{g'(|x|)}{|x|}\big)\tfrac{x\otimes x}{|x|^2} + I\tfrac{g'(|x|)}{|x|},$$

kde $\otimes$ znamená tenzorový součin a I je jednotková matice. Označíme-li si $\overrightarrow{e_i}$ i-tý prvek kanonické báze $\mathbb{R}^N$, dostáváme

$$\det \nabla f(x) = \det\Big(\tfrac{g'(|x|)}{|x|}\overrightarrow{e_1} + \big(g''(|x|) - \tfrac{g'(x)}{|x|}\big)x_1\tfrac{x}{|x|^2}, \tfrac{g'(|x|)}{|x|}\overrightarrow{e_2} + \big(g''(|x|) - \tfrac{g'(x)}{|x|}\big)x_2\tfrac{x}{|x|^2}, \ldots$$

$$\ldots, \tfrac{g'(|x|)}{|x|}\overrightarrow{e_N} + \big(g''(|x|) - \tfrac{g'(x)}{|x|}\big)x_N\tfrac{x}{|x|^2}\Big) = \big(\tfrac{g'(x)}{|x|}\big)^N$$

$$+\big(\tfrac{g'(|x|)}{|x|}\big)^{N-1}\big(g''(|x|) - \tfrac{g'(|x|)}{|x|}\big)\Big[\tfrac{x_1^2}{|x|^2} + \ldots + \tfrac{x_N^2}{|x|^2}\Big] = \big(\tfrac{g'(|x|)}{|x|}\big)^{N-1}g''(|x|).$$

Označme si

$$\omega(s) := \big(\tfrac{g'(s)}{s}\big)^{N-1}g''(s).$$

Chceme dokázat, že $\int_{\mathbb{R}^N}\omega(|x|)x_1^2dx > 0$. Víme, že

$$\int_{\mathbb{R}^N}\omega(|x|)dx = \int_{\mathbb{R}^N}\det\nabla^2 f(x)dx = 0,$$

protože f,a tedy i ∇f má kompaktní nosič a determinant lze zapsat v divergentním tvaru. Najděme si μ tak, aby

$$\int_{\partial B(0,R_2)} x_1^2 dS(x) = \mu|\partial B(0,R_2)|.$$

Pak pro každé $r > 0$ je

$$\int_{\partial B(0,r)} x_1^2dS(x) = \big(\tfrac{r}{R}\big)^{N-1}\int_{\partial B(0,R)} y_1^2\big(\tfrac{r}{R}\big)^2dS(y) = \big(\tfrac{r}{R}\big)^2\mu|\partial B(0,r)|.$$

Dostáváme

$$\int_{\mathbb{R}^N}\omega(|x|)x_1^2dx = \int_{|x|<R_2}\omega(|x|)x_1^2dx + \int_{|x|>\mathbb{R}_2}\omega(|x|)x_1^2dx$$

$$= \int_0^{R_2}\int_{\partial B(0,r)}\omega(r)x_1^2dS(x)dr + \int_{R_2}^{\infty}\int_{\partial B(0,r)}\omega(r)x_1^2dS(x)dr$$

$$> \int_0^{R_2}\omega(r)\mu|\partial B(0,r)|dr + \int_{R_2}^{\infty}\omega(r)\mu|\partial B(0,r)|dr$$

$$= \mu\int_{\mathbb{R}^N}\omega(|x|)dx = 0,$$

což jsme chtěli dokázat. □

5 Relaxace a Jakobián

Lemma 5.1. *Nechť $B(0,R) \subset \mathbb{R}^2, 1 < p \leq 2, u \in W^{1,p}(B(0,R);\mathbb{R}^2)$, nechť $\gamma : \langle 0, 2\pi\rangle \to \mathbb{R}^2$ je spojitá uzavřená křivka a nechť existuje posloupnost množin $E_n \subset \mathbb{R}^+$ taková, že*

1. *$|E_n| > 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,*
2. *$\sup E_n \to 0$, když $n \to \infty$,*
3. *pro libovolnou posloupnost R_n takovou, že $R_n \in E_n$, platí, že $u(\Psi(R_n,.)) \rightrightarrows \gamma(.)$ na $\langle 0, 2\pi\rangle$, když $n \to \infty$.*

Pak pro každou $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C^\infty$ takovou, že $u_n \rightharpoonup u$ ve $W^{1,p}(B(0,R);\mathbb{R}^2)$, je

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{B(0,R)} |\det \nabla u_n(x)| dx \geq \int_{\mathbb{R}^2} |\mathrm{Ind}_\gamma z|\, dz.$$

Důkaz. Zvolme si $\varepsilon > 0$. Chceme dokázat, že

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{B(0,R)} |\det \nabla u_n(x)| dx > \int_{\mathbb{R}^2} |\mathrm{Ind}_\gamma z|\, dz - \varepsilon \tag{5.1}$$

Zvolme si libovolnou podposloupnost posloupnosti u_n a pro lepší přehlednost ji označme opět u_n. Označme $v_n(x) := u_n(x) - u(x)$. Pak $v_n \rightharpoonup 0$ ve $W^{1,p}(B(0,1);\mathbb{R}^2)$. Dokažme nejprve, že pro s.v. $r > 0$ existuje vybraná podposloupnost $\{v_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tak, že $v_{n_k} \rightrightarrows 0$ na $\partial B(0,r)$. Z věty o kompaktním vnoření víme, že existuje posloupnost reálných čísel $\alpha_n \to \infty$ taková, že

$$\int_{B(0,R)} (\alpha_n |v_n|^p + |\nabla v_n|^p) dx \leq C$$

Položme

$$\phi_n(r) := \int_{\partial B(0,r)} (\alpha_n |v_n|^p + |\nabla v_n|^p) dS$$

Platí tedy, že

$$\int_0^1 \phi_n(r) dr < C$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Z Fatouova lemmatu dostáváme, že

$$\int_0^1 \liminf_{n\to\infty} \phi_n(r) dr \leq \liminf_{n\to\infty} \int_0^1 \phi_n(r) dr \leq C,$$

z čehož plyne, že

$$\liminf_{n\to\infty} \phi_n(r) < c(r) < \infty \text{ pro s.v.} r \in \langle 0, 1\rangle. \tag{5.2}$$

Zvolme si libovolné r, pro které platí (5.2), a jako n_k si označme takovou posloupnost, aby $\phi_{n_k}(r) < c(r)$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$. Platí

$$\sup_{\partial B(0,r)} |v_{n_k}(x)|^p - \inf_{\partial B(0,r)} |v_{n_k}(x)|^p \leq \int_{\partial B(0,r)} |\nabla(|v_{n_k}|^p)|\, dS \leq$$

$$\leq p \int_{\partial B(0,r)} |\nabla v_{n_k}||v_{n_k}|^{p-1} dS \leq p \left(\int_{\partial B(0,r)} |\nabla v_{n_k}|^p dS \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\partial B(0,r)} |v_{n_k}|^p dS \right)^{\frac{p-1}{p}},$$

a protože

$$\inf_{\partial B(0,r)} |v_{n_k}(x)|^p \leq \frac{1}{r} \int_{\partial B(0,r)} |v_{n_k}|^p dS,$$

tak dostáváme

$$\sup_{\partial B(0,r)} |v_{n_k}(x)|^p \leq \frac{1}{r\alpha_{n_k}^p} \int_{\partial B(0,r)} |\alpha_{n_k} v_{n_k}|^p dS +$$

$$+ \frac{p}{\alpha_{n_k}^{p-1}} \left(\int_{\partial B(0,r)} |\nabla v_{n_k}|^p dS \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\partial B(0,r)} |\alpha_{n_k} v_{n_k}|^p dS \right)^{\frac{p-1}{p}} \to 0,$$

když $k \to \infty$, kde jsme využili omezenosti $\int_{\partial B(0,r)} |\alpha_{n_k} v_{n_k}|^p dS$.

Dokázali jsme tedy, že pro s.v. $r \in \langle 0, 1 \rangle$ existuje u_{n_k} tak, že $u_{n_k} \restriction \partial B(0,r) \rightrightarrows u \restriction \partial B(0,r)$. K námi zvolenému ε existuje $\varepsilon_1 > 0$ tak, že

$$\int_{U_{\varepsilon_1}(\langle\gamma\rangle)} \operatorname{Ind}_\gamma z dz < \varepsilon.$$

Zvolme si posloupnost $R_n \to 0$ tak, aby $R_n \in E_n$ a zároveň aby pro R_n existovala podposloupnost $u_{n_k} \restriction \partial B(0, R_n) \rightrightarrows u \restriction \partial B(0, R_n)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ (to lze díky tomu, že $|E_n| > 0$ a tato podmínka je splněna pro s.v. $r > 0$). Existuje $n_0 > 0$ takové, že pro $n \geq n_0$ je $\sup_{t \in \langle 0, 2\pi \rangle} |u(\Psi(R_n, t)) - \gamma(t)| < \varepsilon_1$. Od jistého $k_0 \in \mathbb{N}$ tedy bude $\sup_{t \in \langle 0, 2\pi \rangle} |u_{n_k}(\Psi(R_n, t) - \gamma(t)| < \varepsilon_1$. Z lemmatu 2.2 vyplývá, že od tohoto k_0 bude

$$\operatorname{Ind}_{u_{n_k} \restriction \partial B(0,r)} z = \operatorname{Ind}_\gamma z$$

pro každé $z \notin U_{\varepsilon_1}(\langle\gamma\rangle)$. Dostáváme

$$\liminf_{k \to \infty} \int_{B(0,R)} |\det \nabla u_{n_k}(x)| dx \geq \liminf_{k \to \infty} \int_{\mathbb{R}^2} |\operatorname{Ind}_{u_{n_k} \restriction \partial B(0,r)} z| dz \geq$$

$$\geq \int_{\mathbb{R}^2 \setminus U_{\varepsilon_1}(\langle\gamma\rangle)} |\operatorname{Ind}_\gamma z| dz \geq \int_{\mathbb{R}^2} |\operatorname{Ind}_\gamma x| dx - \varepsilon.$$

Na začátku jsme si tedy zvolili libovolnou podposloupnost posloupnosti u_n a dokázali jsme, že z ní lze vybrat podposloupnost u_{n_k} takovou, že pro ní platí (5.1). Z toho vyplývá, že (5.1) platí pro celou posloupnost u_n. □

Věta 5.2. *Nechť $v : \overline{B(0,1)} \to \mathbb{R}^2$ je prosté lipschitzovské zobrazení. Označme $\gamma(t) := v(\cos t, \sin t)$ pro $t \in \mathbb{R}$. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2, 0 \in \Omega$ a $f \in W^{1,2}\langle 0, 2\pi) \to \mathbb{R}$ splňuje $f(2\pi) - f(0) = 2q\pi$ pro nějaké $q \in \mathbb{Z}$. Označme si $\overline{u}(t) := \gamma(f(t))$. Mějme dáno zobrazení $u \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^2) \cap W^{1,2}_{loc}(\Omega \setminus \{0\}; \mathbb{R}^2\}$ splňující*

$$\lim_{r \to 0+} u(\Psi(r,t)) = \overline{u}(t) \tag{5.3}$$

pro každé $t \in \langle 0, 2\pi)$ a

$$\frac{1}{R^{2-p}} \int_{B(0,R)} |\partial_\tau u(x)|^p dx < M \tag{5.4}$$

pro každé $R > 0$ s nějakou konstantou $M > 0$. Pak

$$\mathcal{F}_J(u, \Omega) = \int_\Omega |\det \nabla u(x)| dx + \int_{\mathbb{R}^2} |\operatorname{Ind}_{\overline{u}} z| dz.$$

Důkaz. Označme si E_n posloupnost množin z lemmatu 3.3. Nejprve dokažme, že z (5.3) a (5.4) plyne, že existuje podposloupnost posloupnosti E_n (budeme ji značit opět E_n) taková, že pro každou posloupnost poloměrů R_n takovou, že $R_n \in E_n$ platí

$$u(\Psi(R_n, .)) \rightrightarrows \overline{u}(.)$$

když $n \to \infty$. Skutečně, označme si $\tilde{u}_n(x) := u(R_n x)$, $\tilde{u}_\infty(x) := \overline{u}(\arg(x))$ pro $x \in \partial B(0,1)$. Z (5.4) dostaneme, že

$$\int_{\partial B(0,1)} |\partial_\tau \tilde{u}_n|^p dS = \frac{1}{R_n} \int_{\partial B(0,R_n)} |R_n \partial_\tau u|^p dS \leq cM,$$

takže $\tilde{u}_n$ je omezená ve $W^{1,p}(\partial B(0,1); \mathbb{R}^2)$. Obsahuje tedy podposloupnost, která je slabě konvergentní ve $W^{1,p}(\partial B(0,1); \mathbb{R}^2)$. Ta ale díky předpokladu (5.3) nemůže konvergovat k ničemu jinému, než k $\tilde{u}_\infty$. Označíme-li $v_n(x) := \tilde{u}_n(x) - \tilde{u}_\infty(x)$ pro $x \in \partial B(0,1)$, pak $v_n \rightharpoonup 0$ ve $W^{1,p}(\partial B(0,1); \mathbb{R}^2)$. Z kompaktnosti vnoření $W^{1,p}(\partial B(0,1); \mathbb{R}^2)$ do $C(B(0,1); \mathbb{R}^2)$ plyne, že $v_n \rightrightarrows 0$,cožjsme chtěli dokázat.

1) Dolní odhad: Mějme posloupnost u_n konvergující k u slabě ve $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^2)$, kde $u_n \in W^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^2)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Chceme dokázat, že

$$\liminf_{n \to \infty} \int_\Omega |\det \nabla u_n(x)| dx \geq \int_\Omega |\det \nabla u(x)| dx + \int_{\mathbb{R}^2} |\operatorname{Ind}_{\overline{u}} y| dy.$$

Zvolme si libovolné $R > 0$ takové, aby $B(0,R) \subset \Omega$. Podle věty 2.1 je

$$\liminf_{n \to \infty} \int_{\Omega \setminus B(0,R)} |\det \nabla u_n(x)| dx \geq \int_{\Omega \setminus B(0,R)} |\det \nabla u(x)| dx$$

a podle poznámky (1.11), kde za γ dosadíme $\overline{u}$, je

$$\liminf_{n\to\infty}\int_{B(0,R)} |\det \nabla u_n(x)|dx \geq \int_{\mathbb{R}^2} |\operatorname{Ind}_{\overline{u}} y|dy.$$

Zmenšujeme-li R k nule, dostaneme dokazované tvrzení.

2) Horní odhad: Chceme zkonstruovat posloupnost funkcí u_n, která slabě konverguje k u ve $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^2)$ a pro kterou je

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega} |\det \nabla u_n(x)|dx = \int_{\Omega} |\det \nabla u(x)|dx + \int_{\mathbb{R}^2} |\operatorname{Ind}_{\overline{u}} y|dy.$$

Předpokládejme bez újmy na obecnosti, že $f(0) \leq f(2\pi)$, to jest $f(2\pi) = f(0) + 2q\pi$, kde $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Ztotožněme si na chvilku obvyklým způsobem $\mathbb{R}^2$ s komplexní rovinou a položme

$$\tilde{v}(z) := v(z^q)$$

pro $|z| \leq 1$. Pak $\tilde{v}$ je lipschitzovské a

$$\int_{B(0,1)} |\det \nabla \tilde{v}(x)|dx = \int_{\mathbb{R}^2} |\operatorname{Ind}_{\tilde{v}\restriction\partial B(0,1)} y|dy = \int_{\mathbb{R}^2} |\operatorname{Ind}_{\overline{u}} y|dy,$$

protože $\operatorname{Ind}_{\tilde{v}\restriction\partial B(0,1)} y = \operatorname{Ind}_{\overline{u}} y$ pro s.v. $y \in \mathbb{R}^2$. Položme

$$g_n(r,t) := 4\frac{r-\frac{R_n}{4}}{R_n}f(t) + 4\frac{\frac{R_n}{2}-r}{R_n}[f(0)+2q\pi t]$$

a

$$u_n(\Psi(r,t)) := \begin{cases} \tilde{v}\big(\Psi\big(\frac{4r}{R_n},t\big)\big) & \text{pro } 0 \leq r \leq \frac{R_n}{4}, \\ \gamma(g_n(r,t)) & \text{pro } \frac{R_n}{4} \leq r \leq \frac{R_n}{2}, \\ \eta_n(r)\overline{u}(t) + [1-\eta_n(r)]u\left(\Psi(R_n,t)\right) & \text{pro } \frac{R_n}{2} \leq r \leq R_n, \\ u(\Psi(r,t))) & \text{pro } r \geq R_n, \end{cases}$$

kde $\eta_n(r) = 0$ pro $0 \leq r \leq \frac{R_n}{2}$, $\eta_n(r) = 1$ pro $r \geq R_n$, η_n je C^1 na $\langle 0,\infty)$ a $\eta_n'(r) \leq \frac{3}{R_n}$ pro všechna r.

Pak s použitím věty 2.3 snadno vidíme, že u_n je sobolevovská na každé z množin $B(0,\frac{R_n}{4})$, $B(0,\frac{R_n}{2}) \setminus B(0,\frac{R_n}{4})$, $B(0,R_n) \setminus B(0,\frac{R_n}{2})$ a $\Omega \setminus B(0,R_n)$. Použijeme-li v úvodu zmíněné Beppo Leviho kritérium, pak vzhledem k tomu, že stopy u_n na hranicích těchto množin se shodují, vidíme, že u_n je sobolevovská na Ω. Dokažme nejprve, že u_n obsahuje podposloupnost konvergující slabě ve $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^2)$ k u. Máme

$$\int_{\Omega} |u_n(x)-u(x)|^p dx \leq \int_{B(0,R_n)} |u(x)|^p dx +$$

$$+\int_{B(0,R_n)\setminus B(0,\frac{R_n}{2})}\left(\left|u\left(R_n\frac{x}{\|x\|}\right)\right|^p+|\overline{u}\,(\arg(x))|^p\right)dx+$$

$$+\|\gamma\|^p_{L^\infty((0,2\pi);\mathbb{R}^2)}\int_{B(0,\frac{R_n}{2})}dx\leq\int_{B(0,R_n)}|u(x)|^pdx+CR_n^2\to 0,$$

když $n\to\infty$. Tedy $u_n\to u$ v $L^p(\Omega;\mathbb{R}^2)$ a stačí dokázat, že posloupnost ∇u_n je omezená v $L^p(\Omega;\mathbb{R}^2)$. Pro s.v. $x\in B(0,\frac{R_n}{2})\setminus B(0,\frac{R_n}{4})$, $x=\Psi(r,t)$ platí díky (2.1)

$$|\nabla u_n(x)|=\left|\left(\frac{\partial(\gamma\circ g)}{\partial r}(r,t),\frac{1}{r}\frac{\partial(\gamma\circ g)}{\partial t}(r,t)\right)\right|\leq$$

$$\leq C\operatorname{Lip}_\gamma\left(\frac{|f(t)|+|f(0)|+2q\pi t}{R_n}+\frac{|f'(t)|+2q\pi}{r}\right).$$

S využitím tohoto vzorce dostaneme

$$\int_\Omega|\nabla u_n(x)|^pdx\leq\int_\Omega|\nabla u(x)|^pdx+\frac{R_n^{2-p}}{4^{2-p}}\int_{B(0,1)}|\nabla\tilde{v}(x)|^pdx+$$

$$+\int_0^{2\pi}\int_{\frac{R_n}{2}}^{R_n}|\eta_n'(r)|^p(|\gamma(f(t))-u\,(\Psi(R_n,t))|)^p r\,dr\,dt+$$

$$+\int_0^{2\pi}\int_{\frac{R_n}{2}}^{R_n}|\partial_\tau u\,(\Psi(R_n,t))|^p\,r\,dr\,dt+\int_0^{2\pi}\int_{\frac{R_n}{2}}^{R_n}|\overline{u}'(t)|^p\,r\,dr\,dt+$$

$$+\tilde{C}\operatorname{Lip}^p_\gamma\int_{\frac{R_n}{4}}^{\frac{R_n}{2}}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{R_n^p}|f(t)|^p+\frac{1}{R_n^p}(2\pi qt+|f(0)|)^p+\frac{1}{r^p}|f'(t)|^p+\frac{1}{r^p}(2q\pi)^p\right)r\,dr\,dt$$

$$\leq C,$$

kde k poslední nerovnosti využijeme (3.5) a toho, že $|\gamma(f(t))-u\,(R_n\cos t,R_n\sin t)|$ je omezené pro R_n dost malá. Podobně bychom snadno spočítali, že $\nabla u_n\in L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)$, a tedy $u_n\in W^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^2)$.

Zbývá spočítat $\lim_{n\to\infty}\int_\Omega|\det\nabla u_n(x)|dx$. Platí

$$\int_\Omega|\det\nabla u_n(x)|dx=\int_{\Omega\setminus B(0,R_n)}|\det\nabla u(x)|dx+\int_{B(0,1)}|\det\nabla\tilde{v}(y)|dy+$$

$$+\int_{B(0,R_n)\setminus B(0,\frac{R_n}{2})}|\det\nabla u_n(x)|dx+\int_{B(0,\frac{R_n}{2})\setminus B(0,\frac{R_n}{4})}|\det\nabla u_n(x)|dx.$$

Stačí odhadnout poslední dva integrály. Platí

$$\det\nabla u_n(\Psi(r,t))=\frac{1}{r}\det\begin{pmatrix}\frac{\partial(u_n^1\circ\Psi)}{\partial r}&\frac{\partial(u_n^1\circ\Psi)}{\partial t}\\\frac{\partial(u_n^2\circ\Psi)}{\partial r}&\frac{\partial(u_n^2\circ\Psi)}{\partial t}\end{pmatrix}(\Psi(r,t))=$$

$$= \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \eta_n'(r)[\overline{u}_1 - u_1(\Psi(R_n,t))], & \eta_n(r)\overline{u}_1'(t) + [1-\eta_n(r)]\frac{\partial(u_1\circ\Psi)(R_n,t))}{\partial t} \\ \eta_n'(r)[\overline{u}_2(t) - u_2(\Psi(R_n,t))], & \eta_n(r)\overline{u}_2'(t) + [1-\eta_n(r)]\frac{\partial(u_2\circ\Psi)(R_n,t))}{\partial t} \end{vmatrix},$$

a tedy pro první integrál dostaneme

$$\int_{B(0,R_n)\setminus B(0,\frac{R_n}{2})} |\det \nabla u_n(x)| dx \leq$$

$$\leq \frac{3}{R_n}\int_{\frac{R_n}{2}}^{R_n} dr \int_0^{2\pi} |\overline{u} - u(\Psi(R_n,t))| \left[|\overline{u}'(t)| + \left|\frac{\partial u(\Psi(R_n,t))}{\partial t}\right|\right] dt$$

$$\leq C \sup_{t\in\langle 0,2\pi\rangle} \left\{|\overline{u}(t) - u(\Psi(R_n,t))|\right\} \cdot$$

$$\cdot \int_0^{2\pi} \left[|\overline{u}'(t)| + \left|\frac{\partial u(\Psi(R_n,t))}{\partial t}\right|\right] dt \to 0,$$

když $n \to \infty$, kde jsme využili toho, že

$$\int_0^{2\pi} \left|\frac{\partial u(\Psi(R_n,t))}{\partial t}\right| dt \leq \Big(\int_0^{2\pi} \left|\frac{\partial u(\Psi(R_n,t))}{\partial t}\right| p dt\Big)^{\frac{1}{p}}$$

$$= R_n^p \Big(\int_{\partial B(0,R_n)} |\partial_\tau u(x)|^p dS(x)\Big)^{\frac{1}{p}} \leq C R_n.$$

Pokud jde o druhý integrál, dokážeme, že $\det \nabla u_n(x) = 0$ skoro všude na $B(0,\frac{R_n}{2})\setminus B(0,\frac{R_n}{4})$. Skutečně, podle poznámky 2.4 je pro s.v. $x \in B(0,\frac{R_n}{2})\setminus B(0,\frac{R_n}{4})$

$$\nabla(\gamma_1 \circ g \circ \Psi^{-1})(x) =$$

$$= \begin{cases} 0, & \gamma_1' \text{ v bodě } g(\Psi^{-1}(x)) \text{ neexistuje}, \\ \gamma_1'(g(\Psi^{-1}(x)))\nabla(g\circ\Psi^{-1})(x), & \gamma_1' \text{ v bodě } g(\Psi^{-1}(x)) \text{ existuje}. \end{cases}$$

Stejný vzorec platí i pro $\nabla(\gamma_2 \circ g \circ \Psi^{-1})(x)$, takže je vidět, že pro s.v. $x \in B(0,\frac{R_n}{2})\setminus B(0,\frac{R_n}{4})$ jsou $\nabla u_n^1(x)$ a $\nabla u_n^2(x)$ lineárně závislé. □

Poznámka 5.3. Tato věta zobecňuje větu 1.16. Skutečně, máme-li dáno γ jako ve větě 1.16, stačí položit

$$v(\Psi(r,t)) := r\gamma(t).$$

Po rozšíření γ periodicky na celé $\mathbb{R}$ existuje lipschitzovská funkce $f : \langle 0, 2\pi\rangle \to \mathbb{R}$ taková, že

$$\overline{u}(t) = \gamma(f(t)).$$

Stačí totiž položit

$$f(t) := \gamma^{-1}(\overline{u}(t)),$$

neboť ze speciálního tvaru γ plyne, že je bilipschitzovská. Z prostoty, spojitosti a uzavřenosti $\gamma \restriction \langle 0, 2\pi\rangle$ a ze spojitosti a uzavřenosti $\overline{u}$ vyplývá, že $f(2\pi) = f(0) + 2q\pi$ pro nějaké $q \in \mathbb{Z}$.

6 Relaxace a Hessián

Následující větu potřebujeme v důkazu věty 6.2. Je zobecněním věty z článku [7]. Vyplývá snadno z věty 3.4.

Věta 6.1. *Nechť $N \geq 2$ a $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina. Nechť $N-1 < p < N$ a $u \in W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^N) \cap W^{1,N}_{loc}(\Omega' \setminus \{0\};\mathbb{R}^N)$. Nechť $v : \overline{B}(0,1) \to \mathbb{R}^N$ je lipschitzovské zobrazení takové, že*

$$\lim_{r\to 0+} u(rz) = v(z), \ z \in \partial B(0,1) \tag{6.1}$$

a

$$\int_{B(0,R)} |\partial_\tau u(x)|^p dx \leq CR^{N-p}. \tag{6.2}$$

pro každé $R > 0$. Pak

$$|\operatorname{Det} \nabla u| = \int_\Omega |\det \nabla u(x)| dx + \int_{B(0,1)} |\det \nabla v(x)| dx.$$

Věta 6.2. *Nechť $1 \leq p < 2$. Existuje $u \in W^{2,p}(B(0,1);\mathbb{R})$ taková, že $|\mathcal{H}u| \neq \mathcal{R}_H(u,.)$.*

Důkaz. Nejprve uveďme několik vzorečků které budeme potřebovat:

$$\frac{\partial \arg(x)}{\partial x_1} = -\frac{x_2}{|x|^2}, \ \frac{\partial \arg(x)}{\partial x_2} = \frac{x_1}{|x|^2}, \ \frac{\partial |x|}{\partial x_i} = \frac{x_i}{|x|}. \tag{6.3}$$

Vzorce pro argument platí uvnitř definičního oboru. Mějme dánu 2π-periodickou C^1 funkci $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a položme

$$u(x) := \begin{cases} 0 & \text{pro } x = 0, \\ |x|\phi(\arg(x)) & \text{pro } x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \end{cases}.$$

Potom $u \in W^{2,1+\varepsilon}(B(0,1);\mathbb{R})$ pro každé $0 < \varepsilon < 1$, takže $u \in W^{2,p}(B(0,1);\mathbb{R})$ a zároveň podle (1.1) je $\mathcal{H}u = \operatorname{Det} \nabla(\nabla u)$. Platí, že $\nabla u : B(0,1) \to \mathbb{R}^2$ je 0-homogenní zobrazení. Označme

$$\gamma(t) := \nabla u\,(\cos t, \sin t)$$

Podle věty 6.1 je

$$|\operatorname{Det} \nabla(\nabla u)|(B(0,1)) = \left| \int_{B(0,1)} \det \nabla \tilde{u}(x) dx \right|,$$

kde $\tilde{u}$ je libovolné lipschitzovské rozšíření $\nabla u \restriction \partial B(0,1)$ na $B(0,1)$. Položme

$$\tilde{u}(r\cos t, r\sin t) := r\gamma(t).$$

Díky vzorcům (6.3) platí

$$\nabla\tilde{u}(\Psi(r,t)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\tilde{u}_1(\Psi(r,t))}{\partial r}, & \frac{\partial\tilde{u}_1(\Psi(r,t))}{\partial t} \\ \frac{\partial\tilde{u}_2(\Psi(r,t))}{\partial r}, & \frac{\partial\tilde{u}_2(\Psi(r,t))}{\partial t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t, & -\frac{\sin t}{r} \\ \sin t, & \frac{\cos t}{r} \end{pmatrix}.$$

Označíme-li první matici $\nabla_{r,t}\tilde{u}$, dostaneme

$$|\mathcal{H}u| = \left|\int_{B(0,1)} \det\nabla\tilde{u}(x)dx\right| = \left|\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{1}{r}\det\nabla_{r,t}\tilde{u}(\Psi(r,t))rdrdt\right| =$$

$$= \left|\int_0^{2\pi}\int_0^1 r[\gamma_1(t)\gamma_2'(t) - \gamma_2(t)\gamma_1'(t)]drdt\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|\int_0^{2\pi}[\gamma_1(t)\gamma_2'(t) - \gamma_2(t)\gamma_1'(t)]dt\right| = \left|\frac{1}{2i}\int_\gamma \bar{z}dz\right|.$$

Opět vzhledem ke vzorcům (6.3) dostaneme

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(x) = -\phi'(\arg(x))\frac{x_2}{|x|} + \phi(\arg(x))\frac{x_1}{|x|},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}(x) = \phi'(\arg(x))\frac{x_1}{|x|} + \phi(\arg(x))\frac{x_2}{|x|},$$

což se dá zapsat jako

$$\gamma(t) = \nabla u(re^{it}) = e^{it}(\phi(t) + i\phi'(t)).$$

Je-li $a < b$ takové, že $\phi(a) = \phi'(a) = \phi(b) = \phi'(b) = 0$, pak

$$\frac{1}{2i}\int_{\gamma|\langle a,b\rangle} \bar{z}dz = \frac{1}{2i}\int_a^b e^{-it}(\phi(t) - i\phi'(t))e^{it}[\phi'(t) + i\phi''(t) + i\phi(t) + i^2\phi'(t)]dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_a^b (\phi(t) - i\phi'(t))(\phi''(t) + \phi(t))dt = \frac{1}{2}\int_a^b [\phi^2(t) - \phi'^2(t)]dt.$$

Nyní položme

$$\phi(t) := \begin{cases} 1 + \cos 4t & \text{pro } t \in \left\langle -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right\rangle, \\ a\left[1 + \cos\left(\frac{4}{3}t + \frac{2}{3}\pi\right)\right] & \text{pro } t \in \left\langle \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\rangle, \end{cases}$$

kde a bude upřesněno později. Pak

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} [\phi^2(t) - \phi'^2(t)]dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} [(1 + \cos 4t)^2 - 16\sin^2 4t]dt +$$

$$+a^2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} \left[\left[1 + \cos\left(\frac{4}{3}t + \frac{2}{3}\pi\right)\right]^2 - \frac{16}{9}\sin^2\left(\frac{4}{3}t + \frac{2}{3}\pi\right)\right] dt =$$

$$= -\frac{13}{4}\pi + a^2\frac{11}{12}\pi,$$

a tedy existuje hodnota a taková, že se počítaný integrál (a tedy i $|\mathcal{H}u|$) rovná 0. Zvolme si toto a větší než 0.

Z lemmatu 5.1 vyplývá, že

$$\mathcal{R}_H(u, B(0,1)) \geq \int_{\mathbb{R}^2} |\operatorname{Ind}_\gamma z| dz.$$

K dokončení důkazu věty tedy stačí najít bod $z_0 \in \mathbb{R}^2$, pro nějž $\operatorname{Ind}_\gamma z_0 \neq 0$. Z otevřenosti množiny takových bodů pak totiž vyplyne, že $\int_{\mathbb{R}^2} |\operatorname{Ind}_\gamma z| dz > 0$. Položme $z_0 := (1, 0)$. Protože platí

$$\gamma(t) = e^{it}(\phi(t) + i\phi'(t)) = (\phi(t)\cos t - \phi'(t)\sin t, \phi'(t)\cos t + \phi(t)\sin t), \quad (6.4)$$

tak je $\gamma(-\frac{\pi}{4}) = (0,0)$, $\gamma(0) = (2,0)$ a $\gamma(\frac{\pi}{4}) = (0,0)$. Přitom však, označíme-li jako $a(t)$ spojitou větev argumentu $[\gamma(t) - (1,0)]$ a $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$, je $\gamma_2(t) > 0$ pro $t \in (-\frac{\pi}{4}, 0)$ a $\gamma_2(t) < 0$ pro $t \in (0, \frac{\pi}{4})$, takže $a(0) - a(-\frac{\pi}{4}) = \pi$, $a(\frac{\pi}{4}) - a(0) = \pi$. Tedy $\operatorname{Ind}_{\gamma|\langle -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\rangle} z_0 \neq 0$.

Rovnice (6.4) se dá také přepsat jako

$$\gamma(t) = \phi(t)(\cos t, \sin t) + + \phi'(t)(-\sin t, \cos t).$$

Pro $t \in (\frac{\pi}{4}, \pi)$ je $\phi(t) > 0$, $\phi'(t) > 0$, a tedy

$$\gamma(t) \in \{x \in \mathbb{R}^2 : \arg_{0,2\pi}(x) \in \langle t, t + \tfrac{\pi}{2}\rangle\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^2 : \arg_{0,2\pi}(x) \in \langle \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\rangle\}.$$

Pro $t \in (\pi, \frac{7\pi}{4})$ je $\phi(t) > 0$, $\phi'(t) < 0$, a tedy

$$\gamma(t) \in \{x \in \mathbb{R}^2 : \arg_{0,2\pi}(x) \in \langle \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}\rangle\},$$

takže celkově je

$$\langle \gamma \restriction (\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4})\rangle \subset \subset \{x \in \mathbb{R}^2 : \arg_{0,2\pi}(x) \in \langle \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\rangle\}.$$

Tedy $\operatorname{Ind}_{\gamma|\langle \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\rangle} z_0 = 0$ a $\operatorname{Ind}_\gamma z_0 \neq 0$. □

V následujícím textu budeme značit pro $M \subset \mathbb{R}^2$

$$\operatorname{star}(M) := \{\alpha x : x \in M, \ \alpha \in \langle 0, 1\rangle\}$$

a pro $a, b \in \langle 0, 2\pi\rangle$

$$V_{ab} := \{(r\cos t, r\sin t) : r \in (0,1), \ t \in (a,b)\}.$$

Lemma 6.3. *Nechť $\langle a, b\rangle \subset \mathbb{R}$ je interval délky 2π, mějme dánu 2π-periodickou funkci $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $D := \{a = t_0 < t < 1 < ... < t_k = b\}$ dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ tak, že*

- *ϕ je $C^2(\langle t_i, t_{i+1}\rangle)$ pro $i = 0, ..., k-1$,*
- *položíme-li $v(x) := |x|\phi(\arg(x))$, tak platí $v \in W^{2,1}(B(0,1);\mathbb{R}) \cap W^{2,2}_{loc}(B(0,1) \setminus \{0\};\mathbb{R})$,*
- *označíme-li $\gamma(t) := \nabla v(\cos t, \sin t)$, pak pro každé i=1,...,k-1 a $t, t' \in \langle t_i, t_{i+1}\rangle$, $t \neq t'$, platí $\operatorname{star}(\{\gamma(t)\}) \cap \operatorname{star}(\{\gamma(t')\}) = \{0\}$.*

Pak

$$\mathcal{R}_H(v, B(0,1)) \leq \sum_{i=0}^{k-1} |\operatorname{star}(\gamma[(t_i, t_{i+1})])|.$$

Důkaz. Nejprve dokažme, že $v \in W^{2,p}(B(0,1);\mathbb{R})$ pro každé $1 < p < 2$. Platí, že $\nabla^2 v$ je (-1)-homogenní zobrazení, tedy že existuje 2π-periodická funkce $\zeta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ tak, že $\nabla^2 v(x) = \frac{1}{|x|}\zeta(\arg(x))$ pro $x \neq 0$. Dále víme, že

$$\ln 3 \int_0^{2\pi} |\zeta(t)|^2 dt = \int_0^{2\pi} \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{1}{r^2} |\zeta(t)|^2 r dr dt =$$

$$= \int_{B(0,\frac{3}{4}) \setminus B(0,\frac{1}{4})} \frac{1}{|x|^2} |\zeta(\arg(x))|^2 dx = \int_{B(0,\frac{3}{4}) \setminus B(0,\frac{1}{4})} |\nabla^2 v(x)|^2 dx < \infty.$$

Z toho dostáváme, že

$$\int_{B(0,1)} |\nabla^2 v(x)|^p dx = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{1}{r^p} |\zeta(t)|^p r dr dt = \frac{1}{2-p} \int_0^{2\pi} |\zeta(t)|^p dt < \infty. \quad (6.5)$$

Zvolme si $\alpha > 0$ a funkci $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takovou, že $h \in C^2(\mathbb{R}), h(0) = 0, 0 \leq h' \leq 1$, $h'(s) = 1$ na $(-\infty, -\alpha\rangle \cup \langle \alpha, \infty)$, $h'(s) = 0$ na $(-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2})$, h' je neklesající na $\langle 0, \alpha\rangle$ a nerostoucí na $\langle -\alpha, 0\rangle$, $|h''(s)| \leq \frac{3}{\alpha}$ pro všechna $s \in \mathbb{R}$.

Položme

$$w(x) := h(v(x)),\ x \in B(0,1).$$

Podle lemmatu 6.5 je w ve $W^{2,1}_{\text{loc}}(B(0,1);\mathbb{R})$. Dokažme, že ve skutečnosti $w \in W^{2,2}(B(0,1);\mathbb{R})$. Máme

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j}(x) = h''(v(x)) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_j}(x) + h'(v(x)) \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}(x), \quad (6.6)$$

a protože $h''(v(x)) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_j}(x) \in L^2(B(0,1), \mathbb{R})$, tak stačí dokázat, že $h'(v(x)) \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}(x) \in L^2(B(0,1);\mathbb{R})$. Z toho, že v je 1-homogenní a omezená, plyne, že existuje $r_\alpha > 0$ takové, že $|v(x)| \leq \frac{\alpha}{2}$ (a tedy $h'(v(x)) = 0$) pro $|x| < r_\alpha$. Dostáváme

$$\int_{B(0,1)} \left| h'(v(x)) \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right|^2 dx = \int_{B(0,1)\setminus B(0,r_\alpha)} \left| h'(v(x)) \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right|^2 dx \leq$$

$$\leq \|h' \circ v\|^2_{L^\infty(B(0,1);\mathbb{R})} \int_{B(0,1)\setminus B(0,r_\alpha)} \left| \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right|^2 dx < \infty.$$

Nakonec dokažme, že

$$\int_{V_{t_i t_{i+1}}} |\det \nabla^2 w(x)| dx \leq |\operatorname{star}(\gamma[(t_i, t_{i+1})])|.$$

K tomu budeme chtít použít větu (2.5). Ověřme proto, že ∇w je lipschitzovské na $V_{t_i t_{i+1}}$. To plyne z toho, že w je C^2 na $\overline{V_{t_i t_{i+1}}}$. Označme si $M := \nabla w[V_{t_i t_{i+1}}]$. Pak $M \subset \operatorname{star} \gamma[(t_i, t_{i+1})]$. Zadefinujme množiny

$$M_1 := \{y \in M : \mathcal{N}(\nabla w, y, V_{t_i t_{i+1}}) = 1\},$$

$$M_2 := \{y \in M : \mathcal{N}(\nabla w, y, V_{t_i t_{i+1}}) > 1\}.$$

Zvolme si $y \in M_2$. Platí, že je-li $x \in (\nabla w)^{-1}(y) \cap V_{t_i t_{i+1}}$, pak $\det \nabla^2 w(x) = 0$. Skutečně, existuje $x' \in V_{t_i t_{i+1}}, x' \neq x$ takové, že $\nabla w(x') = \nabla w(x)$, tedy vlastně $h'(v(x))\gamma(\arg(x)) = h'(v(x'))\gamma(\arg(x'))$. Buď je $\nabla w(x) = 0$, pak ale v každém okolí bodu x existuje bod $\tilde{x}$, v němž $\nabla w(\tilde{x}) = 0$, a podle lemmatu 6.6 $\det \nabla^2 w(x) = 0$, nebo $h'(v(x))\gamma(\arg(x)) = h'(v(x'))\gamma(\arg(x'))$. Díky podmínce, že $\operatorname{star}(\{\gamma(t)\}) \cap \operatorname{star}(\{\gamma(t')\}) = \emptyset$ pro $t \neq t'$, dostáváme $\arg_{0,2\pi}(x) = \arg_{0,2\pi}(x')$. Z toho dále plyne, že $h'(v(x)) = h'(v(x'))$. Snadno je vidět, že pak $h'(v(z)) = h'(v(x))$ pro všechna z ležící na úsečce $\overline{xx'}$. Tedy v kavždém okolí bodu x leží bod, v němž ∇w nabývá stejné hodnoty jako v x. Podle lemmatu 6.6 je tedy $\det \nabla^2 w(x) = 0$. Dostáváme tedy $V_{t_i t_{i+1}} = \bigcup_{y \in M_1} (\nabla w)^{-1}(y) \cup \bigcup_{y \in M_2} (\nabla w)^{-1}(y) \subseteq \bigcup_{y \in M_1} (\nabla w)^{-1}(y) \cup \{x \in V_{t_i t_{i+1}} : \det \nabla w(x) = 0\}$. Z toho plyne s použitím věty 2.5

$$\int_{V_{t_i t_{i+1}}} |\det \nabla^2 w(x)| dx = \int_{\{x \in V_{t_i t_{i+1}} : \nabla w(x) \in M_1\}} |\det \nabla^2 w(x)| dx =$$

$$= \int_{M_1} \mathcal{N}(\nabla w, y, V_{t_i t_{i+1}}) dy = |M_1| \leq |\operatorname{star}(\gamma[(t_i, t_{i+1})])|.$$

Nyní si zvolme posloupnost α_n kladných reálných čísel klesající k 0 a pro každé $n \in \mathbb{N}$ si zkonstruujme funkci w_n podle výše uvedeného návodu. Stačí dokázat, že w_n obsahuje podpodloupnost, která konverguje slabě ve $W^{2,p}(B(0,1);\mathbb{R})$ k v pro každé $1 < p < 2$. Ze vzorečků pro $w_n, \nabla w_n$ je snadno plyne, že

$$\int_{B(0,1)} |w_n(x) - v(x)|^p dx \to 0, \int_{B(0,1)} |\nabla w_n(x) - \nabla v(x)|^p dx \to 0,$$

a z (6.6) je vidět, že

$$\int_{B(0,1)} |\nabla^2 w_n(x)|^p \leq C_1 \int_{B(0,1)} (|h''(v(x))|^p |\nabla v(x)|^{2p} + |h'(x)|^p |\nabla^2 v(x)|^p) dx$$

$$\leq \frac{3^p C_1}{\alpha_n^p} \int_{B(0,\alpha_n)} |\nabla v(x)|^{2p} dx + C_1 \int_{B(0,1)} |\nabla^2 v(x)|^p dx = \frac{3^p C_1}{\alpha_n^p} \int_0^{2\pi} \int_0^{\alpha_n} |\gamma(t)|^{2p} r dr dt$$

$$+ C_1 \int_{B(0,1)} |\nabla^2 v(x)|^p dx < C_2,$$

protože z věty o vnoření pro sobolevovské funkce a z (6.5) plyne, že $\nabla v \in L^{2p}(B(0,1);\mathbb{R}^2)$. S přihlédnutím k poznámce (1.11) je důkaz hotov. $\square$

Poznámka 6.4. V důkazu předchozího lemmatu jsme dokázali, že

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{B(0,1)} |\det \nabla^2 w_n(x)| dx \leq \sum_{i=0}^{k-1} |\operatorname{star}(\nabla v[(t_i, t_{i+1})])|.$$

Ve skutečnosti platí, že

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B(0,1)} |\det \nabla^2 w_n(x)| dx = \sum_{i=0}^{k-1} |\operatorname{star}(\nabla v[(t_i, t_{i+1})])|.$$

Skutečně, to, že v je 1-homogenní, znamená, že existuje $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ taková, že $v(x) = |x| f(\arg(x))$. Označme si $M := \{x \in V_{t_i t_{i+1}}; f(\arg(x)) = 0\}$. Pro s.v $x \in M$ je $\nabla v(x) = 0$, a tedy

$$|\operatorname{star}(\nabla v[(t_i t_{i+1})])| = |\operatorname{star}(\{\nabla v(t) : t \in (t_i, t_{i+1}), f(t) \neq 0\})|.$$

Nechť $y \in \operatorname{star}(\{\nabla v(t) : t \in (t_i, t_{i+1}), f(t) \neq 0\})$. Pak existuje $x \in V_{t_i t_{i+1}} \setminus M$ a $\beta > 0$ tak, že

$$y = \beta \nabla v(x_y).$$

Existuje $n_y \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \geq n_y$ je $f(\arg(x_y)) > \alpha_n$. Pak ale existuje $r_y^n > 0$ tak, že $|r_y^n x_y| \leq 1$ a $h'(v(r_y^n x_y)) = \beta$. Pak tedy $y \in \nabla w_n[V_{t_i t_{i+1}}]$. Z toho plyne, že $\nabla w_n[V_{t_i t_{i+1}}]$ rostou ke $\operatorname{star}(\{\nabla v(t) : t \in (t_i, t_{i+1}), f(t) \neq 0\})$ a tedy

$$\int_{V_{t_i t_{i+1}}} |\det \nabla^2 w_n(x)| dx = |\nabla w_n[V_{t_i t_{i+1}}]| \to |\operatorname{star}(\nabla v[(t_i, t_{i+1})])|.$$

Lemma 6.5. *Nechť $N = 2$. Mějme $v \in W^{2,1}_{loc}(B(0,1);\mathbb{R}) \cap L^\infty(B(0,1);\mathbb{R})$ a $h \in C^2(\mathbb{R})$. Pak $h \circ v \in W^{2,1}_{loc}(B(0,1);\mathbb{R})$.*

Důkaz. Podle věty 2.3 a následující poznámky platí

$$\nabla(h \circ v)(x) = h'(v(x))\nabla v(x).$$

Podle téže věty je $h' \circ v$ sobolevovská na $B(0,1)$, takže funkce $h' \circ v$ a ∇v lze reprezentovat absolutně spojitě na skoro všech rovnoběžkách se souřadnými osami. Je tedy vidět, že i $\nabla(h \circ v)$ má zástupce (označme ho u) absolutně spojitého na skoro všech rovnoběžkách se souřadnými osami. Pro jeho derivace platí

$$\left|\tfrac{\partial u^i}{\partial x_j}(x)\right| \leq |h'(v(x))\nabla^2 v(x)| + |h''(v(x))||\nabla v(x)|^2,$$

takže jsou lokálně integrovatelné, protože z věty o vnoření plyne, že ∇v je v L^2 a h', h'' jsou omezené na oboru hodnot v. Podle Beppo Leviho kritéria je tedy $\nabla(h \circ v)$ sobolevovské zobrazení. □

Lemma 6.6. *Nechť $\tilde{v} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ má totální diferenciál v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^2$ a nechť* $\det \nabla\tilde{v}(x_0) \neq 0$. *Pak existuje prstencové okolí bodu x_0, na němž je $\tilde{v}$ nenabývá hodnoty $\tilde{v}(x_0)$.*

Důkaz. Označme si

$$\nu(x) := \tilde{v}(x) - \tilde{v}(x_0) - \nabla\tilde{v}(x_0)(x - x_0).$$

Pak z existence totálního diferenciálu $\tilde{v}$ v bodě x_0 plyne, že

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|\nu(x)|}{|x - x_0|} = 0.$$

Z toho, že $\det \nabla\tilde{v}(x_0) \neq 0$, vyplývá, že $\nabla\tilde{v}(x_0)$ je regulární matice, a tedy

$$\varepsilon := \min\{|\nabla\tilde{v}(x_0) \cdot x| : |x| = 1\} > 0.$$

Existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $x \in P_\delta(x_0)$ je $|\nu(x)| < \varepsilon|x - x_0|$. Pro taková x je ale

$$|\tilde{v}(x) - \tilde{v}(x_0)| = |\nabla\tilde{v}(x_0)(x - x_0) + \nu(x)| \geq |\nabla\tilde{v}(x_0)(x - x_0)| - |\nu(x)| >$$

$$> \varepsilon|x - x_0| - \varepsilon|x - x_0| = 0,$$

a tedy $\tilde{v}(x) \neq \tilde{v}(x_0)$. □

Věta 6.7. *Nechť $N - 1 \leq p \leq N$, $u \in W^{2,p}(B(0,1);\mathbb{R}) \cap W^{2,N}_{loc}(B(0,1) \setminus \{0\};\mathbb{R})$ je 1-homogenní funkce. Nechť existuje $u_0 \in W^{2,N}(B(0,1);\mathbb{R}) \cap C^1(\overline{B(0,1)};\mathbb{R})$ taková, že $u_0(x) = u(x)$ a $\partial_\nu u_0(x) = \partial_\nu u(x)$ pro každé $x \in \partial B(0,1)$. Pak*

$$\mathcal{R}_H(u, B(0,1)) \leq \int_{(B(0,1))} |\det \nabla^2 u_0(x)| dx.$$

Důkaz. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ položme

$$u_n(x) := \begin{cases} \frac{1}{n} u_0(nx) & \text{pro } x \in B(0, \frac{1}{n}), \\ u(x) & \text{pro } x \in B(0,1) \setminus B(0, \frac{1}{n}). \end{cases}$$

S použitím Beppo Leviho kritéria vidíme, že $u_n(x)$ a ∇u_n jsou sobolevovské na $B(0,1)$. Je vidět, že

$$\nabla u_n(x) = \begin{cases} \nabla u_0(nx) & \text{pro } x \in B(0, \frac{1}{n}), \\ \nabla u(x) & \text{pro } x \in B(0,1) \setminus B(0, \frac{1}{n}). \end{cases}$$

Nyní dokažme, že

$$\mathcal{R}_H(u, B(0,1)) \leq \int_{B(0,1)} |\det \nabla^2 u_0(x)| dx.$$

Protože

$$\int_{B(0,1)} |\det \nabla^2 u_n(x)| dx = \int_{B(0,1)} |\det \nabla^2 u_0(x)| dx,$$

tak stačí dokázat, že u_n obsahuje podposloupnost konvergující k u slabě ve $W^{2,p}(B(0,1);\mathbb{R})$. K tomu stačí, aby $u_n \to u$ ve $W^{1,p}(B(0,1);\mathbb{R})$ a aby posloupnost $\nabla^2 u_n$ byla omezená v $L^p(B(0,1);\mathbb{R}^{N\times N})$. Máme

$$\int_{B(0,1)} |u_n(x) - u(x)|^p dx = \int_{B(0,\frac{1}{n})} |u_n(x) - u(x)|^p dx =$$

$$= \frac{1}{n^N} \int_{B(0,1)} \left| \frac{1}{n} u_0(y) - \frac{1}{n} u(y) \right|^p dy \to 0,$$

$$\int_{B(0,1)} |\nabla u_n(x) - \nabla u(x)|^p dx = \int_{B(0,\frac{1}{n})} |\nabla u_n(x) - \nabla u(x)|^p dx =$$

$$= \frac{1}{n^N} \int_{B(0,1)} |\nabla u_0(y) - \nabla u(y)|^p dy \to 0$$

a

$$\int_{B(0,1)} |\nabla^2 u_n(x)|^p dx \leq \int_{B(0,1)} |\nabla^2 u(x)|^p dx + \frac{n^p}{n^N} \int_{B(0,1)} |\nabla^2 u(x)|^p dx \leq C.$$

□

Reference

[1] E. Acerbi and N. Fusco, Semicontinuity problems in the calculus of variations, *Arch. Rational Mech. Anal.* **86** (1984), 125-145.

[2] G. Alberti and L. Ambrosio, A geometrical aproach to monotone functions in $\mathbb{R}^n$, *Math. Z.* **230** (1999), 259-316.

[3] J. M. Ball, Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity, *Arch. Rational Mech. Anal.* **63** (1977), 337-403.

[4] G. Bouchitté and I. Fonseca and J. Malý, The effective bulk energy of the relaxed energy of multiple integrals below the growth exponent, *Proc. Royal Soc. Edinburgh Sect. A* **128** (1998), 463-479.

[5] B. Dacorogna and P. Marcellini, Semicontinuité por des Integrandes Polyconvexes sans continuité des Déterminants, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math* **311** (1990), 393-396.

[6] B. Dacorogna and [Murrat, F.], On the optimality of certain Sobolev exponents for the weak continuity of determinants, *J. Funct. Anal.* **105** (1992), 42-62.

[7] I. Fonseca, N. Fusco and P. Marcellini, *On the Total Variation of the Jacobian*, Center for Nonlinear Analysis, Carnegie-Mellon University, Preprint 02-CNA-013

[8] I. Fonseca and W. Gangbo, *Degree Theory in Analysis and Aplications*, Oxford University Press, 1995.

[9] I. Fonseca and G. Leoni, Det versus det, připravovaná práce

[10] I. Fonseca and J. Malý, Relaxation of multiple integrals below the growth exponent, *Anal. Inst. H. Poincaré. Anal. Non Linéaire* **14** (1997), 309-338.

[11] I. Fonseca and J. Malý, From Jacobian to Hessian: distributional form and relaxation, *Riv. Mat.Univ. Parma* **4** (2005), 45-74.

[12] I. Fonseca, J. Malý and V. Pospíšil, From Jacobian to Hessian II, připravovaná práce

[13] I. Fonseca and P. Marcellini, Relaxation of multiple integrals in subcritical Sobolev spaces, *J. Geometric Analysis* **7** (1997), 57-81.

[14] T. Iwaniec, On the concept of the weak Jacobian and Hessian, *Papers on analysis, Rep Univ. Jyväskyl " Dep. Math. Stat.* . **83** (2001), 181-205.

[15] G. Leoni and M. Morini, *Necessary and sufficient conditions for the chain rule in $W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^d)$ and $BV_{loc}(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^d)$*, Center for Nonlinear Analysis, Carnegie-Mellon University, Preprint 05-CNA-001

[16] J. Malý, *Lectures on change of variables in integral*, Reports of the Department of Mathematics, University of Helsinki, Preprint 305 (2001)

[17] P. Marcellini, Aproximation of quasiconvex functions and lower semicontinuity of multiple integrals, *Manuscripta Math.* **51** (1985), 1-28.

[18] P. Marcellini, On the definition and the lower semicontinuity of certain quasiconvex integrals, *Ann. Inst. Henri Poincaré, Analyse non Linéare* **3** (1986), 391-409.

[19] M. Marcus and V. J. Mizel, Complete characterization of functions which act, via superposition, on Sobolev Spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* **251** (1979), 187-217.

[20] P. J. Olver, Hyper-Jacobians, determinantal ideals and weak solutions to variational problems, *Proc. Roy. Soc Edinburgh Sect. A* **95** (1983), 317-340.

[21] W. Rudin, *Analýza v reálném a komplexním oboru*, Academia 2003.

[22] J. Serrin, Unpublished