XIV. DÜRER VERSENY

MATEMATIKA
megoldások

Döntő:
2021. május 21-22.

D kategória
9-12. osztályosok

D1. Sasszem, az indiánfőnök vásárra hajtotta 50 marháját. A vásárban cserekereskedelmet tud folytatni, mégpedig a következő módokon: 5 marháját el tudja cserélni 3 disznóra és 5 kecskére. Ha ad 1 marhát és 1 kecskét, akkor 2 disznót kap, illeve 3 disznóért és 3 kecskéért cserébe 2 marhához juthat.
a) Mivel Sasszem el szeretne kezdeni kecskét és disznót is tenyészteni a marha mellett, ezért úgy szeretne kereskedni, hogy mind a három állatból legalább 20-at vigyen haza. Megteheti ezt?
b) Mutassátok meg, hogy előfordulhat, hogy az indiánfőnök kevesebb mint 15 állattal távozik a vásárról.

Megoldás: a) Sasszem szeretne úgy cserélgetni, hogy 50 marhából indulva mindegyik állatból legalább 20 darab legyen. Erre mutatunk egy lehetőséget. A következő cseréket tudja megtenni:

1. $5M \to 3D + 5K$
2. $1M + 1K \to 2D$
3. $3K + 3D \to 2M$

Először végrehajtja az első cserelehetőséget ötször. Így elcserélt 25 marhát 15 disznóra és 25 kecskére. Ez után szeretne még kapni legalább 5 disznót, ezért a második cserelehetőséggel él háromszor és elcserél 3 marhát és 3 kecskét 6 disznóra. Így lett $15 + 6 = 21$ disznója, $25 - 3 = 22$ kecskéje és $50 - 25 - 3 = 22$ marhája. Tehát a cserék után mindegyik állatból legalább 20 darabja lett.

b) Egy olyan cseresorrendet szeretnénk mutatni, ahol a végén Sasszemnek 15-nél kevesebb állata lesz. Erre egy lehetőség:

Először elcseréli az 50 marháját 30 disznóra és 50 kecskére az 1. lehetőséget használva tízszer. Ezután a 3. lehetőséggel él szintén tízszer, így 30 kecskéért és 30 disznóért kap 20 marhát. Így most 20 marhája és 20 kecskéje van. Ezután a 2. lehetőséget használja tízszer, tehát 10 kecskét és 10 marhát elcserél 20 disznóra. Ezután a csere után marhából és kecskéből 10 darabja van, disznóból 20. Majd háromszor elvégezve a 3-ik cserét 16, 11 és 1 darab marad sorban a marhából, disznóból és kecskéből. Az első cserével 3-szor folytatva 1, 20 és 16 állat marad. A haramdikat 5-ször elvégezve már csak 11 marhája, 5 disznója és 1 kecskéje marad. Az első cserét használva még kétszer csak 1 marhája marad $11 - 11$ disznóval és kecskével. Végül a 3. cserét 3-szor elvégzi és 7 marhája, 2 disznója és 2 kecskéje marad. Azaz összesen $7 + 2 + 2 = 11 < 15$ állattal távozik a vásárról.

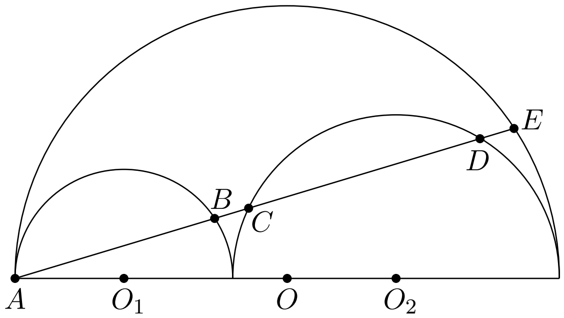
D2. Hány megoldása van az $n^3 - 2 = k!$ egyenletnek, ha n és k pozitív egész számok?
Megjegyzés: $k!$ jelöli a k-nál nem nagyobb pozitív egész számok szorzatát.

Megoldás: Ha $k = 1$, akkor az egyenletet átrendezve $n^3 = 3$ adódik, aminek nincs megoldása az egészek közt.

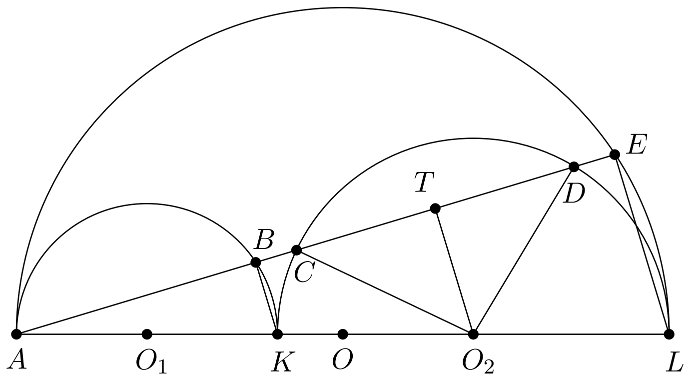
Ha $k > 1$, akkor $k!$ páros, így az egyenlet bal oldala is. Ebből adódóan n^3-nek is párosnak kell lennie, azaz $n = 2m$ valamely m pozitív egészre. Így az egyenlet a következőképp alakul: $8m^3 - 2 = k!$. A bal oldalból kiemelhetünk 2-t, így $2(4m^3 - 1)$ alakra hozhatjuk. Mivel $4m^3 - 1$ páratlan, így a bal oldal 4-gyel nem osztható, amiből adódóan a jobb oldal sem. Mivel $k!$ a k-ig terjedő pozitív egészek szorzata, így $k < 4$-nek teljesülnie kell. Tehát arra jutottunk, hogy $k = 2$ vagy $k = 3$. Ha $k = 2$, akkor az egyenlet az $n^3 = 4$ alakú, aminek nincs megoldása, ha pedig $k = 3$, akkor $n^3 = 8$-at kapunk. Ennek a pozitív egészek közt pontosan egy megoldása van: $n = 2$.

Tehát a vizsgált egyenletnek egyetlen megoldása van, mégpedig a $k = 3$, $n = 2$.

D3. Adott egy O középpontú félkör. A félkör átmérőjének egy tetszőleges belső pontja két részre osztja az átmérőt. A két rész fölé O_1 és O_2 középpontú félköröket rajzolunk az ábra szerint. Az A ponton átmenő e egyenes a félköröket további négy pontban metszi, ezek rendre B, C, D és E. Mutassátok meg, hogy a BC és DE szakaszok egyenlő hosszúak.



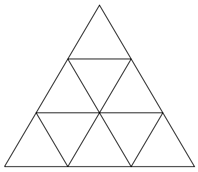
Megoldás:



Legyen az K az O_1 és O_2 középpontú körök metszéspontja, L pedig az O_2 és O középpontúaké.

Mivel az O_1 középpontú körben AK átmérő, így a Thalesz-tétel alapján $ABK\sphericalangle = 90°$. Hasonlóan az O középpontú körben azt kapjuk, hogy $AEL\sphericalangle = 90°$, vagyis a $BKLE$ négyszög trapéz. Húzzuk be ennek a trapéznak a középvonalát, messe ez a BE oldalt a T pontban. A trapéz középvonaláról tudjuk, hogy felezi a szárakat és párhuzamos az alapokkal, tehát pont a TO_2 szakasz lesz ez (hiszen O_2 felezi a KL szakaszt), ami merőleges lesz AE-re. Ekkor a CO_2T és DO_2T háromszögek egybevágóak lesznek, hiszen T-nél mindkettőnek derékszöge van, az átfogójuk (CO_2 és DO_2 sugarak) és egyik befogújuk hossza pedig megegyezik. Vagyis $CT = TD$, amit $BT = TE$-vel (T felezi a BE oldalt) összevetve azt kapjuk, hogy $BC = DE$ is teljesül.

D4. Az ábrán látható 3 egység oldalú szabályos háromszögrács néhány mezőjét Karcsi pirosra színezte. Ezek után odaadta a rácsot Piroskának, aki további mezőket színezett pirosra a következő módon: ha talált egy 2 egység oldalú részháromszöget, ahol a 4 mezőből 3 mező piros, akkor a negyediket is pirosra színezte. Egészen addig ismételte a színezést, amíg el nem fogytak a megszínezhető mezők.

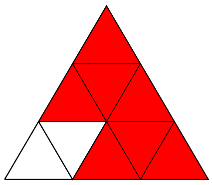


a) Melyik az a legnagyobb egész N szám, melyre akárhogy is színez be kezdetben Karcsi N mezőt, Piroska még nem tudja kiszínezni az összes kimaradt mezőt?
b) Melyik az a legkisebb M szám, melyre akárhogy is színez ki Karcsi M mezőt, Piroska biztosan ki tudja színezni a teljes háromszöget?
c) Határozzátok meg a fenti N és M értékeket n oldalú szabályos háromszögrács esetén is.

Megoldás:

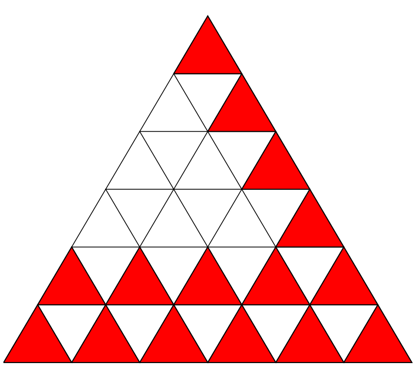
a) Lássuk be, hogy $N \geq 5$, azaz Karcsi bárhogy színez ki öt mezőt, Piroska biztosan nem fogja tudni kiszínezni az egész háromszöget. 3 darab 2 egység alapú háromszögünk van, ezért Piroska legfeljebb ennyit festhetett be, azaz az elején legalább 6 kiszínezett mezőnek kell lennie. Ennyi mezővel viszont meg tudjuk oldani, például a középső hat kifestésével.

b) $M = 8$, hiszen 7-re még tudunk megadni olyan konstrukciót az ábrán látható módon, amelyre Piroska nem tudja kiszínezni az egész háromszöget. 8 beszínezett mező esetén azonban már csak egy kis háromszög marad ki, amit mindenképpen be tud festeni.



c) A **b)** részhez hasonló érvelés alapján M legalább $n^2 - 1$, de ennyi mező kiszínezése biztosan elég is.

Most N értékét fogjuk általánosan meghatározni. Minden lépésben eggyel nő a beszínezett háromszögek száma, és legfeljebb annyi lépése lehet Piroskának, ahány 2 egység alapú háromszög van. A felfelé álló háromszögek száma $1 + 2 + \ldots + n - 1 = \frac{n(n-1)}{2}$, a lefelé állóké pedig $1 + \ldots + n - 3 = \frac{(n-3)(n-2)}{2}$. Így összesen legfeljebb $n^2 - 3n + 3$ kis háromszöget színezhet be Piroska, azaz az elején legalább $n^2 - (n^2 - 3n + 3) = 3n - 3$ be volt festve, ha a végére az egész háromszöget kiszínezte. Emiatt $3n - 3$-nál kevesebb biztosan nem elég. Ennyit viszont le tud úgy rakni Karcsi, hogy az egész háromszöget Piroska kifesse, például az ábrán látható konstrukcióval. Ezért $N = 3n - 4$.



D5. Az indiánok misztikusnak tartják az olyan nemnegatív valós számokból álló $x_0, x_1, x_2, \ldots$ sorozatokat, melyekre $x_0 < 2021$, $x_{i+1} = \lfloor x_i \rfloor \{x_i\}$ minden $i \geq 0$ esetén, továbbá szerepel a sorozatban 0-tól különböző egész szám. Hány olyan sorozat létezik, amelyet misztikusnak tartanak az indiánok?

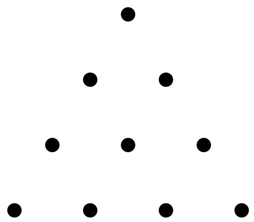
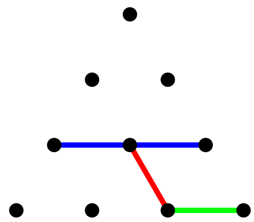
Megjegyzés: x valós szám esetén $\lfloor x \rfloor$ jelöli a szám egészrészét, vagyis az x-nél nem nagyobb legnagyobb egész számot, $\{x\}$ pedig a törtrészét, vagyis $x - \lfloor x \rfloor$-et.

Megoldás: Nevezzünk egy sorozatot n-misztikusnak, ha $x_0 < n$, $x_{i+1} = \lfloor x_i \rfloor \{x_i\}$, továbbá szerepel a sorozatban 0-tól különböző egész szám. A feladat a 2021-misztikus sorozatok számát kérdezi, mi általánosan n-re oldjuk meg. Azt állítjuk, hogy $2^{n-1} - 1$ darab n-misztikus sorozat van.

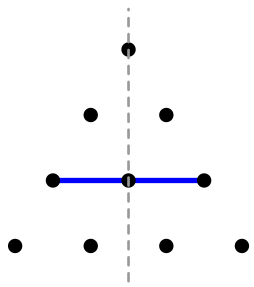
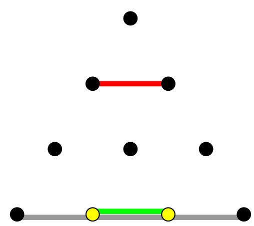
Legyen $S(n)$ az n-misztikus sorozatok halmaza, $A(n)$ pedig az n-misztikus sorozatok száma. Világos, hogy $A(1) = 0$, belátjuk, hogy $A(n+1) = 2A(n) + 1$. Az első észrevételünk a következő: ha $x_0 < n + 1$, akkor $x_1 < n$. Ez igaz, hiszen $x_1 = \lfloor x_0 \rfloor \{x_0\}$ és $\lfloor x_0 \rfloor \leq n$, $\{x_0\} < 1$.

Tekintsük az $S(n+1)$-beli sorozatokat. Nyilvánvalóan $S(n) \subset S(n+1)$, így elég azokat a sorozatokat leírnunk, amelyekre $x_0 \geq n$. Ezekben a sorozatokban van nemnulla egész tag, ha ez a nulladik, akkor az csak $x_0 = n$ lehet. Az összes többiben egy későbbi tag lesz egész, vagyis x_1-től tekintve a sorozatot egy $S(n)$-beli sorozatot kapunk. Mivel itt $\lfloor x_0 \rfloor = n$, és $x_1 = \lfloor x_0 \rfloor \{x_0\}$, így $\{x_0\} = x_1/n$-nek teljesülnie kell, ami minden $x_1 < n$ esetén pontosan egyféleképpen valósítható meg. Tehát az olyan $S(n+1)$-beli sorozatok, amelyekre $x_0 > n$, bijekcióban állnak az $x_1 < n$ elemeikkel, amelyek pont $S(n)$-et alkotják. Tehát valóban azt kaptuk, hogy $A(n+1) = 2A(n) + 1$, ebből és $A(1) = 0$-ból indukcióval következik, hogy $A(n) = 2^{n-1} - 1$.

D6. **Játék:** Egy indiánrezervátumban 10 totemoszlopot állítottak fel a bal oldali ábrán látható háromszögrács szerint. Csendes Patak és Vörös Tűz a következő játékot szokták itt játszani: felváltva feszítenek ki köteleket két-két oszlop között, és minden kötél kifeszítésénél figyelnek arra, hogy a kifeszített kötél párhuzamos legyen a nagy háromszög egyik oldalával, illetve a kötél nem haladhat el olyan oszlop mellett, amelyet már egy másik kötél érint. Ezenkívül ha a jelenleg kifeszített kötél helyett annak egy egyenes vonalú meghosszabbítása is kifeszíthető a fenti feltételek mellett, akkor azt kell kifeszíteniük. Az veszít, amelyikőjük már nem tud a szabályoknak megfelelően több kötelet kifeszíteni.
Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! Ti dönthetitek el, hogy a kezdő vagy a második játékos bőrébe szeretnétek bújni. A jobb oldali ábrán egy lehetséges játék első három lépése látható. Először Csendes Patak kifeszíti a kék kötelet, majd Vörös Tűz a pirosat, aztán Csendes Patak a zöldet.

Megoldás: *Az indiánokat játékosnak, a köteleket szakasznak vagy vonalnak is fogjuk nevezni.* A játékban a kezdő játékosnak van nyerő stratégiája, ráadásul tetszőleges első lépés után tud nyerni, bármilyen lépéseket is tegyen a második játékos. Mi a kezdő játékosnak azt a nyerő stratégiáját vizsgáljuk meg, amikor két, egymástól kettő távolságra lévő oszlop között feszít ki kötelet, például a bal ábrán látható kéket. (Ha egy másik kettő hosszú kötelet húz be, az ábrát elforgatva ugyanezt az állást kapjuk).

Ezután ha lehet, tükrözi az ellenfele lépéseit a szürke szaggatott vonallal jelölt egyenesre, mint szimmetriatengelyre. Ezt mindig megteheti, amikor az ellenfele nem egy, a jobb oldali ábrán látható szakaszt húz be. Ezek a szakaszok önmaguk tükörképei a tengelyre, ezért ha valamelyik játékos behúzza azokat, a másik már nem húzhatja be a tükörképüket. Ha az ellenfele lépése tehát éppen ilyen vonal (a jobb oldali ábrán látható színes vonalak egyike), akkor a következőképpen válaszjon rá:

- Ha a másik játékos a zöld vagy a szürke kötelet feszíti ki, a kezdő játékos válaszoljon a piros vonallal.
- Ha a másik játékos a piros vonalat húzza be a lépése során, akkor erre a zöld vagy a szürke vonal közül a megfelelően behúzható legyen a válasz. Mivel az ábra minden eddigi lépés után szimmetrikus volt, teljesül, hogy az alsó sor sárga pontokkal jelölt két középső oszlopa közül vagy mindkettőt érinti már kötél, vagy egyiket sem. A lényeg, hogy e két oszlop közé kerüljön kötél (zöld vonal), de ha a kötél meghosszabbítható (szürke vonal), akkor értelemszerűen a három egység hosszú szürke vonalat húzza be.

Amikor a második játékos ezek közül a színes vonalak közül először behúz egyet, akkor az első játékos - a stratégiája alapján - még nem rajzolt be ilyen vonalat, vagyis mindig ki tudja választani a színes vonalak közül azt, amelyikkel válaszolni tud a második játékos lépésére. Ezzel az ábra továbbra is szimmetrikus marad.

Összefoglalva: az első játékos minden lépése után tengelyesen szimmetrikus marad az ábra a szürke szaggatott tengelyre. Amíg van szabad hely, ahová a második játékos behúzhat egy kötelet, a tengelyes szimmetria miatt az első játékosnak is marad szabad hely, tehát az első játékosnak nem fogynak el a lépéslehetőségei. Vagyis ezzel a stratégiával biztosan megnyeri a játékot.