Το φως ως κύμα ΙΙ
Περίθλαση

Περίθλαση μακρινού πεδίου (Fraunhofer)

- Από απλή σχισμή (με απόδειξη)
- Από διπλή σχισμή
- Από φράγμα περίθλασης

Άσκηση από προηγούμενο μάθημα – Πείραμα Young

Εάν στην περίπτωση της συμβολής από δύο σύμφωνες πηγές μήκους κύματος λ που απέχουν μεταξύ τους απόσταση 30μm, ο δεύτερος κροσσός συμβολής απέχει y=4.5cm από το κέντρο και η παρατήρηση γίνεται σε απόσταση L=1.2m από τις πηγές πόσο είναι το μήκος κύματος λ; Ποια είναι η απόσταση μεταξύ δυο διαδοχικών κροσσών;

$L = 1{,}2\,m \qquad \alpha = 30\mu m = 30\times10^{-6}\,m \qquad y = 4.5\times10^{-2}\,m$

- $$y_m = m\frac{L}{\alpha}\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{\alpha y_m}{mL} = \frac{30\times10^{-6}\,m \times 4.5\times10^{-2}\,m}{2\times 1{,}2\,m} = 562{,}5\,nm$$

- $$y_{m+1} - y_m = (m+1)\frac{L}{\alpha}\lambda - m\frac{L}{\alpha}\lambda = \frac{L}{\alpha}\lambda \Rightarrow$$

$$\Delta y = \frac{1{,}2\,m}{30\times10^{-6}\,m}\times 562{,}5\times10^{-9}\,m = 0{,}0225\,m = 2{,}25\,cm$$

***Περίθλαση* είναι κάθε απόκλιση από τις προβλέψεις της γεωμετρικής οπτικής για την ευθύγραμμη διάδοση του φωτός, που προκαλείται από παρεμβολή κάποιου εμποδίου**.

Στη λεγόμενη *φυσική οπτική*, βασικής σημασίας για τη ερμηνεία των πειραματικών παρατηρήσεων είναι ***η αρχή των Huygens-Fresnel****.*

Σύμφωνα με τον Huygens κάθε σημείο του μετώπου του κύματος μπορεί να θεωρηθεί ως μια δευτερεύουσα πηγή που εκπέμπει ένα σφαιρικό κύμα. Στην υπόθεση αυτή ο Fresnel πρόσθεσε ότι το πραγματικό πεδίο μακριά από τη δευτερεύουσα πηγή είναι η υπέρθεση όλων των κυμάτων που προέρχονται από τις δευτερεύουσες πηγές, παίρνοντας υπόψη τα πλάτη και τις φάσεις για κάθε κύμα.

Επομένως, για να βρούμε την κατανομή της έντασης (εικόνα περίθλασης) που περιμένουμε να δούμε σε μία οθόνη, λόγω περίθλασης π.χ. από διπλή σχισμή, θα πρέπει να αθροίσουμε τα κύματα που προέρχονται από κάθε σημείο της επιφάνειας της κάθε σχισμής και να προσθέσουμε τα πλάτη, λαμβάνοντας υπόψη τις αποστάσεις που έχουν διανύσει τα διάφορα κυματικά μέτωπα, καθότι διαφορές στους οπτικούς δρόμους προκαλούν διαφορές στις φάσεις των κυμάτων που προστίθενται.

Στην περίθλαση έχουμε συμβολή φωτεινών δεσμών που προέρχονται από μια συνεχή κατανομή πηγών, ενώ στα φαινόμενα συμβολής έχουμε συμβολή δεσμών που προέρχονται από διακριτό αριθμό πηγών. Αυτό, φυσικά, δεν αποτελεί θεμελιώδη αλλά μάλλον ιστορική διάκριση μεταξύ συμβολής και περίθλασης.

Περίθλαση μακρινού και κοντινού πεδίου

Αν η πηγή φωτός και το επίπεδο παρατήρησης (οθόνη) είναι και τα δύο σε μεγάλη απόσταση από το επίπεδο όπου το φως υφίσταται την περίθλαση, τότε το φως φθάνει στην οθόνη ως επίπεδο κύμα. Τότε μιλάμε για *περίθλαση Fraunhofer* ή *περίθλαση μακρινού πεδίου* (far-field diffraction).

Στην αντίθετη περίπτωση έχουμε τη λεγόμενη *περίθλαση Fresnel* ή *περίθλαση κοντινού πεδίου* (near-field diffraction).

Στην περίπτωση της περίθλασης Fraunhofer, η εικόνα που παρατηρείται πάνω στο πέτασμα, αλλάζει ομοιόμορφα καθώς απομακρύνουμε την οθόνη από την σχισμή, πράγμα που δεν συμβαίνει στην περίπτωση της περίθλασης Fresnel.

Περίθλαση από μία σχισμή

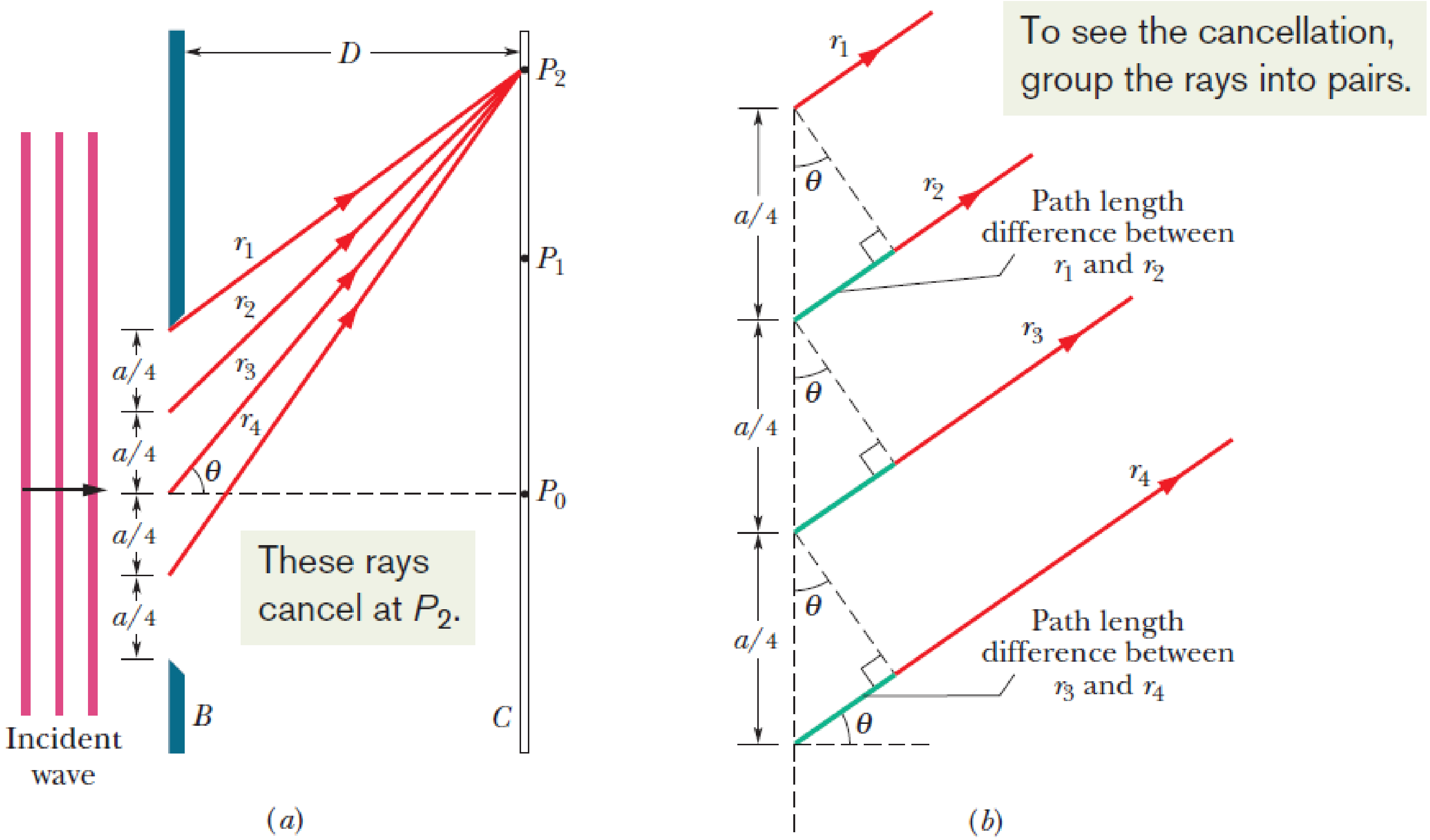


Fig. 36-6 (*a*) Waves from the top points of four zones of width $a/4$ undergo fully destructive interference at point P_2. (*b*) For $D \gg a$, we can approximate rays r_1, r_2, r_3, and r_4 as being parallel, at angle θ to the central axis.

Από τη γεωμετρία του σχήματος, φαίνεται ότι η γωνία ϕ είναι επίσης η γωνία μεταξύ των δύο ακτίνων που συμβολίζονται με R. Η διακεκομμένη γραμμή διχοτομεί τη γωνία φ, σχηματίζοντας δύο ίσα ορθογώνια τρίγωνα.

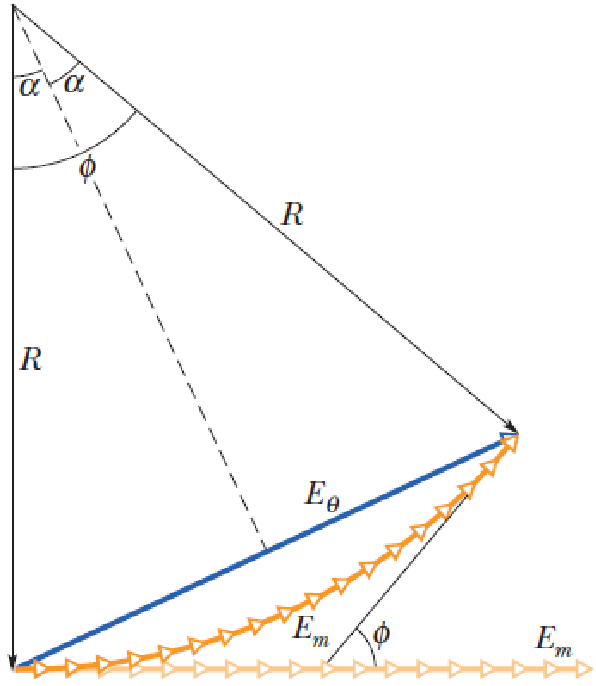
$$\sin \tfrac{1}{2}\phi = \frac{E_\theta}{2R}.$$

$$+ \qquad \phi = \frac{E_m}{R}.$$

$$+ \qquad E_\theta = \frac{E_m}{\frac{1}{2}\phi} \sin \tfrac{1}{2}\phi.$$

$$+ \qquad \frac{I(\theta)}{I_m} = \frac{E_\theta^2}{E_m^2}.$$

$$= \qquad \boxed{I(\theta) = I_m \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha}\right)^2.} \quad + \quad \boxed{\phi = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)(a \sin \theta),}$$



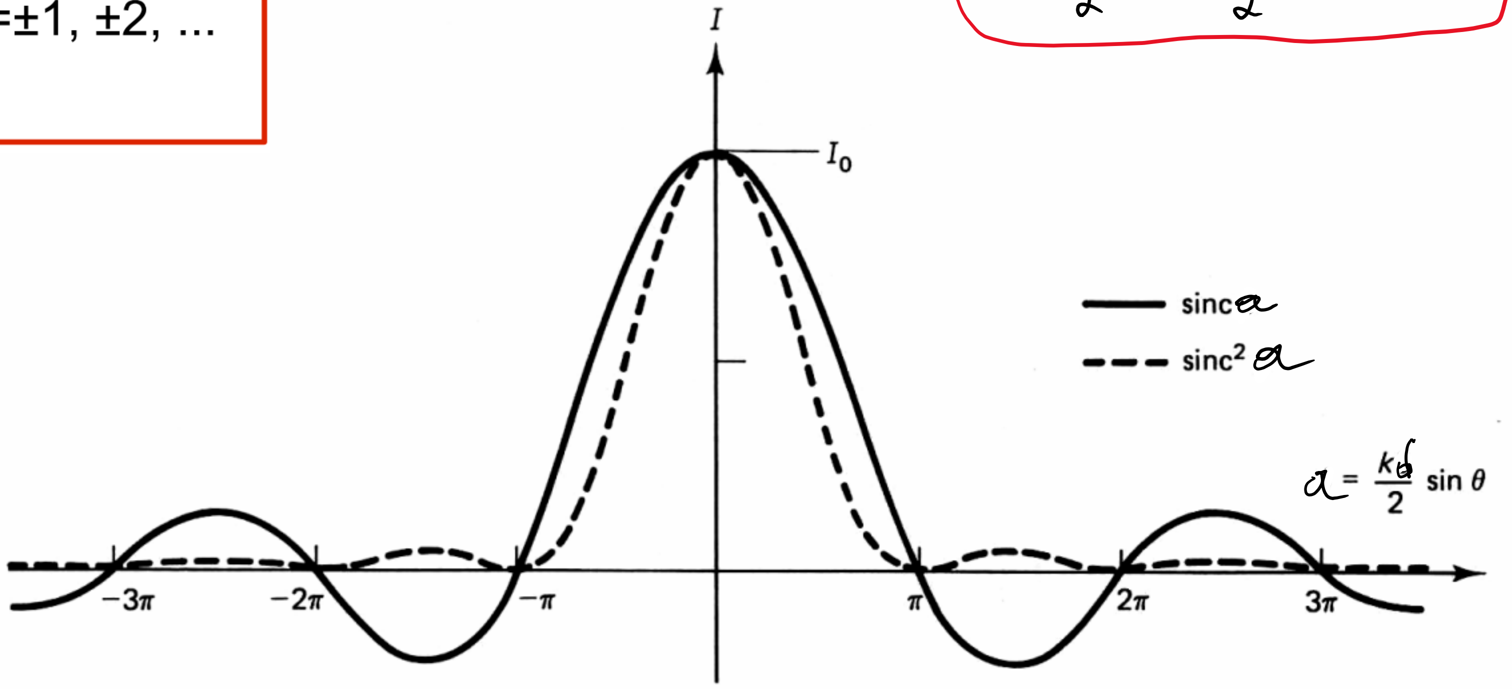
Σχήμα που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της κατανομής της έντασης που παίρνουμε σε ένα μακρινό πέτασμα από περίθλαση από σχισμή. Τα πορτοκαλί διανύσματα φασόρων αντιστοιχούν στα ηλεκτρικά πεδία σε ένα σημείο P του πετάσματος, που προέρχονται από διαδοχικές στοιχειώδεις πηγές κατά μήκος της σχισμής

Τα μέγιστα της συνάρτησης δίνονται από τη σχέση

$$\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)=\frac{\alpha\cos\alpha-\sin\alpha}{\alpha^2}=0 \longrightarrow \boxed{\alpha=\tan\alpha}$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = 1.43\pi,\ 2.46\pi,\ 3.47\pi\ \ldots \simeq \frac{3\pi}{2},\ \frac{5\pi}{2},\ \ldots}$$

Ελάχιστα όταν sinα=0 με $\alpha\neq 0$,
δηλαδή $\alpha_{min}=k\pi$, k=±1, ±2, ...
Άρα $k\lambda = d\sin\theta_{min}$



Παράδειγμα:

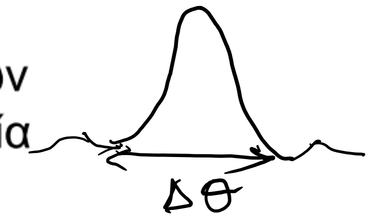
Ποιος είναι ο λόγος των εντάσεων του κυρίως λοβού και του πρώτου από τα δευτερεύοντα μέγιστα;

Ο λόγος υπολογίζεται από τη σχέση της έντασης για *β=0* και *β=1.43π*

$$\frac{I_{\beta=0}}{I_{\beta=1.43\pi}} = \frac{(\sin^2\alpha/\alpha^2)_{\beta=0}}{(\sin^2\alpha/\alpha^2)_{\beta=1.43\pi}} = \frac{1}{(\sin^2\alpha/\alpha^2)_{\beta=1.43\pi}} = \left(\frac{\alpha^2}{\sin^2\alpha}\right)_{1.43\pi} = \frac{20.18}{0.952} = 21.2$$

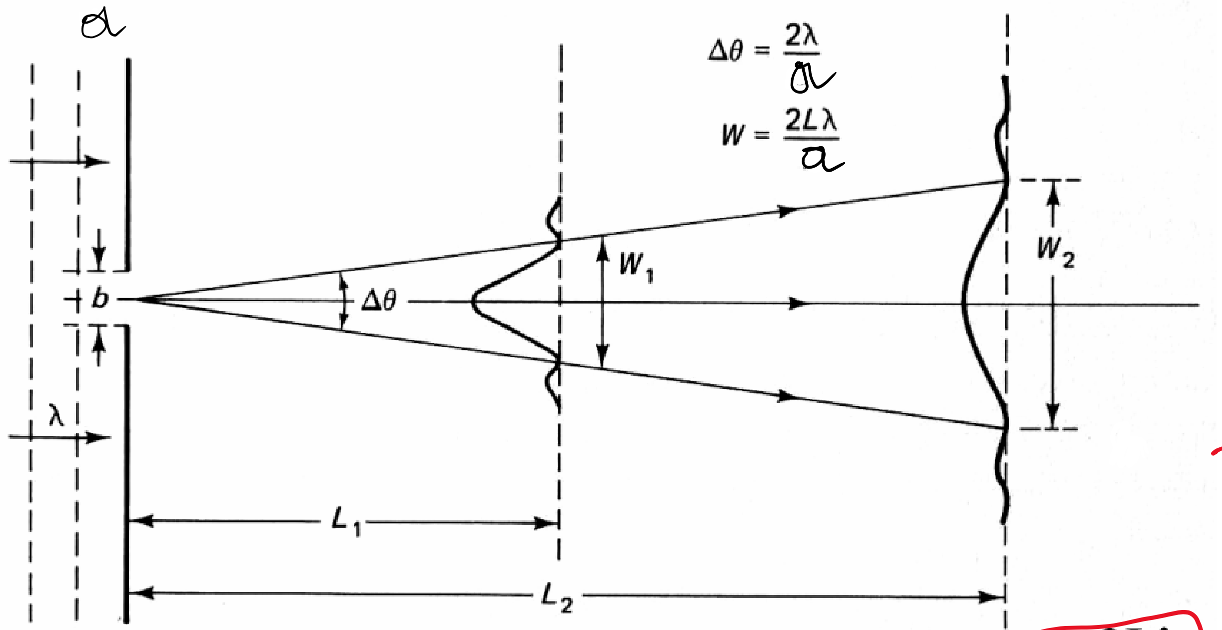
Άρα, ο λόγος του μεγίστου της έντασης του πρώτου δευτερεύοντος λοβού προς τον κύριο είναι μόλις 4.7%.

Ο κεντρικός λοβός περίθλασης (δηλ. ο συνολικό πλάτος μεταξύ των δύο πρώτων μηδενισμών της έντασης εκατέρωθεν του κεντρικού μεγίστου) φαίνεται υπό γωνία Δθ από τη σχισμή;



$$\left.\begin{aligned} & m = \pm 1 \\ & m\lambda = d\sin\theta \\ & \sin\theta \simeq \theta \end{aligned}\right\} \quad \boxed{\Delta\theta = \frac{2\lambda}{d}}$$

Δηλαδή, ο κεντρικός λοβός απλώνει απεριόριστα όσο το εύρος της σχισμής ελαττώνεται. Θα πλησιάσει όμως το άπειρο;
Πρόσφατα πειράματα έδειξαν ότι για σχισμές της τάξης των *nm* η περίθλαση αρχίζει να περιορίζεται. Αυτό οφείλεται στην αλληλεπίδραση του φωτός με τα φωνόνια των μετάλλων που στη σχισμή έχουν κατεύθυνση ορμής μη παράλληλη προς την επιφάνεια.

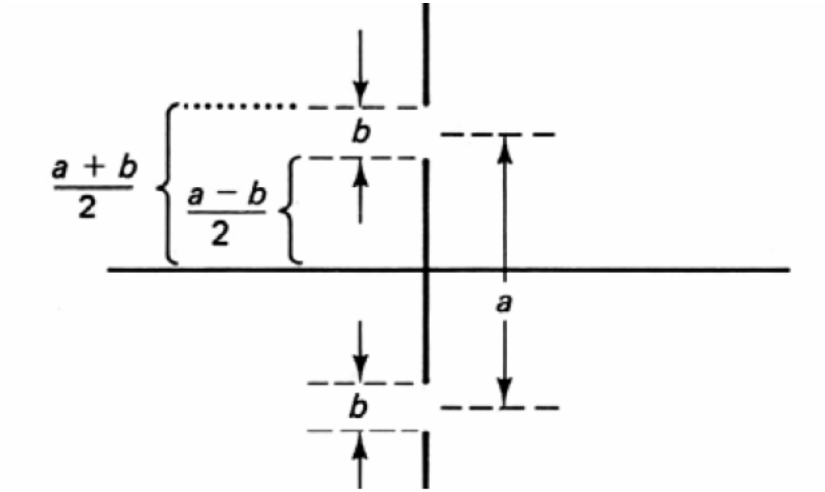


$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{L_1}{L_2}$$

Η γραμμική διάσταση του λοβού *W*

$$W = L\Delta\theta = \frac{2L\lambda}{\alpha}$$

Περίθλαση από διπλή σχισμή



$$\beta \equiv \frac{1}{2} kb \sin\theta$$

$$\alpha \equiv \frac{1}{2} ka \sin\theta$$

Περίθλαση από μια λεπτή σχισμή

$$I = 4I_o \left(\frac{\sin\beta}{\beta} \right)^2 \cos^2 \alpha$$

Συμβολή από 2 σχισμές
-Π. Young

Ελάχιστα περίθλασης $m\lambda = b\sin\theta$ $m = \pm 1, \pm 2, \ldots$

Μέγιστα συμβολής $p\lambda = a\sin\theta$ $p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

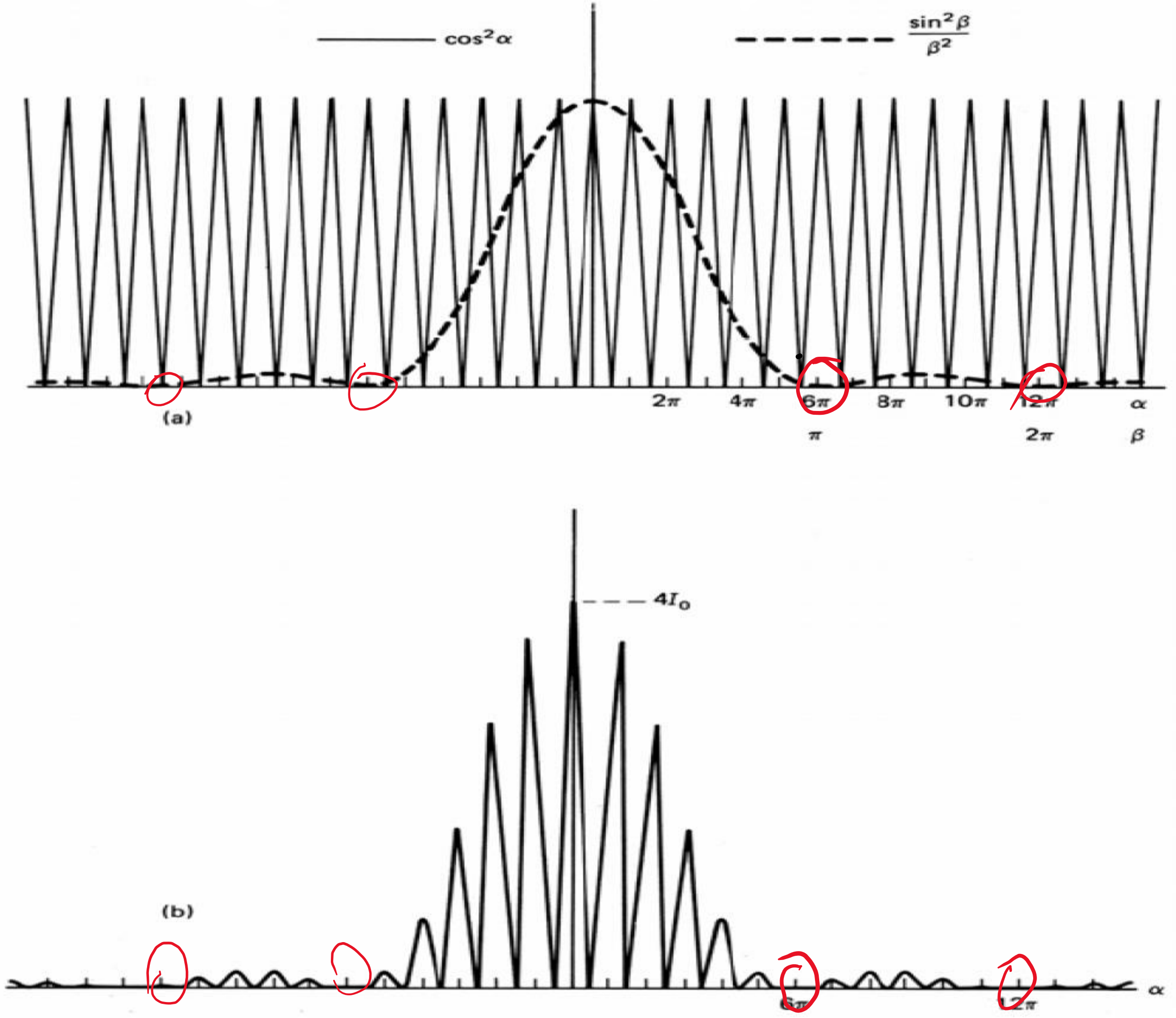
Όταν οι δυο συνθήκες ικανοποιούνται ταυτόχρονα, έχουμε με εμφανιζόμενους κροσσούς συμβολής

$$a = \left(\frac{p}{m}\right)b$$

όταν η απόσταση των σχισμών είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του πάχους της μιας σχισμής, τότε η συνθήκη ικανοποιείται.

$$\overset{6b}{a} = \left(\frac{p}{m}\right) b \Rightarrow p = 6m$$

Για παράδειγμα, όταν a= 6b, τότε p=6m=±6, ±12, ±18....



$a=6b$

Παράδειγμα

Σε ένα πείραμα περίθλασης μακρινού πεδίου από διπλή σχισμή, με πάχος σχισμής 4.050μm και απόσταση μεταξύ των σχισμών 19.44μm, παρατηρούμε την εικόνα των μεγίστων και ελαχίστων έντασης σε ένα πέτασμα. Το μήκος κύματος του προσπίπτοντος φωτός είναι 405nm. Πόσοι φωτεινοί κροσσοί συμβολής παρατηρούνται στο κεντρικό λοβό περίθλασης; Και πόσα στον πρώτο πλευρικό λοβό;

Ο κεντρικός λοβός περίθλασης ορίζεται από τα δύο ελάχιστα εκατέρωθεν του κεντρικού μεγίστου, $m = \pm 1$

Αν b=4.05μm είναι το πάχος της σχισμής, τότε οι γωνίες στις οποίες εμφανίζονται τα πρώτα ελάχιστα περίθλασης είνι
$bsin\theta = \pm\lambda \Rightarrow \theta_{-1} \cong -\frac{\lambda}{b}\ και\ \theta_{+1} \cong +\frac{\lambda}{b}$, άρα $\Delta\theta = \frac{2\lambda}{b} = \frac{2\times 405nm}{4.05\mu m} = 0.2rad$ (1)

Οι γωνίες στις οποίες εμφανίζονται τα μέγιστα συμβολής δίνονται από τον τύπο $p\lambda = a\sin\theta, p = 0, \pm 1, \ldots$
Άρα η γωνιακή απόσταση μεταξύ δυο διαδοχικών κροσσών είναι (περίπου, δηλ. $\sin\theta \sim \theta$) $\Delta\theta = \frac{\lambda}{a} = \frac{405nm}{19.44\mu m}$ =0.02rad (2)
Από τα (1) και (2) προκύπτει ότι στον κεντρικό λοβό περίθλασης χωράνε 0.2/0.02=10 κροσσοί συμβολής.

Όμοια εργαζόμαστε για τον πρώτο πλευρικό λοβό, ο οποιος ορίζεται από τα ελάχιστα περίθλασης $m = 1$ και $m = 2$ δηλ.
$\Delta\theta = \frac{\lambda}{b} = 0.1rad$ οπότε σε αυτό τον πλευρικό λοβό χωράνε 5 κροσσοί συμβολής.

Εξετάζουμε αν ικανοποιείται η συνθήκη για m=1, ή m=2
$a = \left(\frac{p}{m}\right) b \Rightarrow 19.44\mu m = \left(\frac{p}{m}\right) 4.050\mu m \Rightarrow \frac{p}{m} = 4.8$
Άρα κοντά στο πρώτο ελάχιστο περίθλασης πέφτει ο πέμπτος φωτεινός κροσσός, που επομένως θα είναι πάρα πολύ αμυδρός. Παρόμοια, κοντά στο 2ο ελάχιστο περίθλασης, πέφτει ο 10ος φωτεινός κροσσός, ο οποίος επίσης εμφανίζεται πολύ αμυδρός.

Σχήμα προηγούμενου παραδείγματος

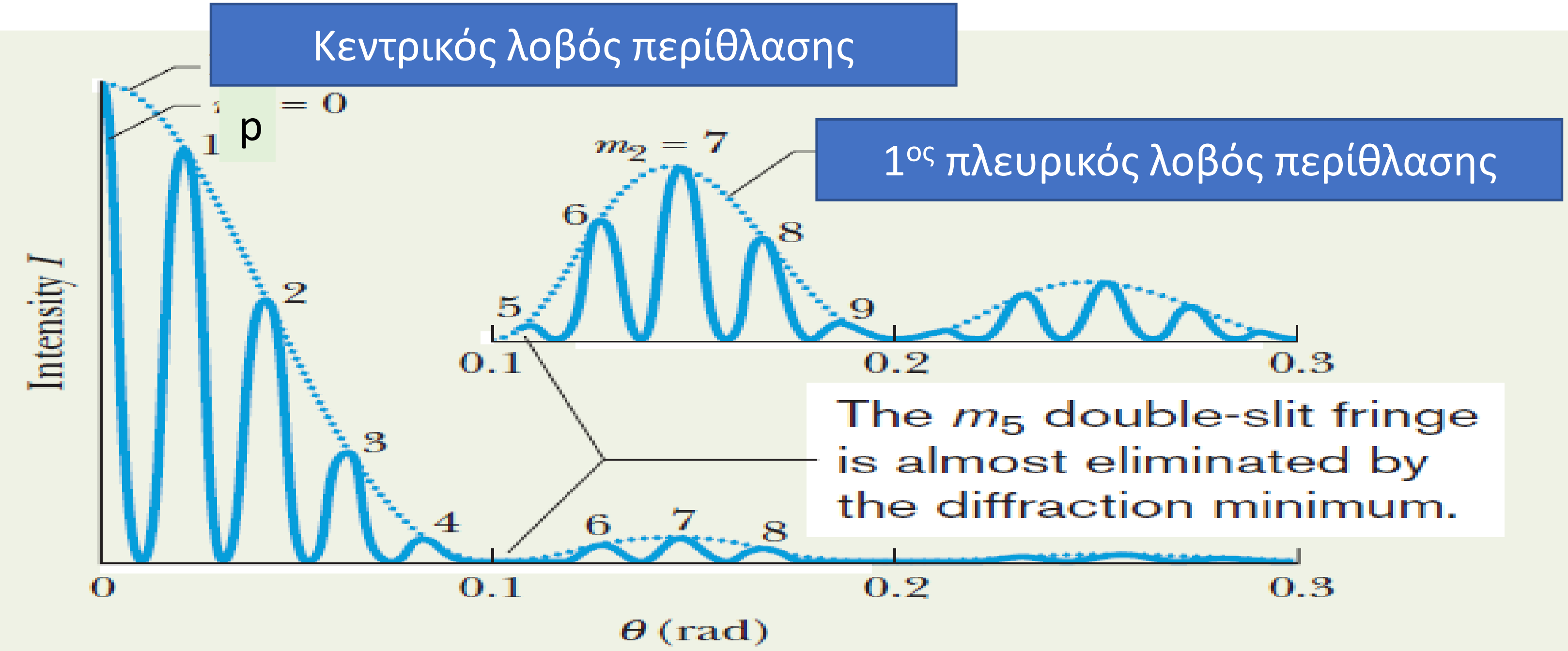
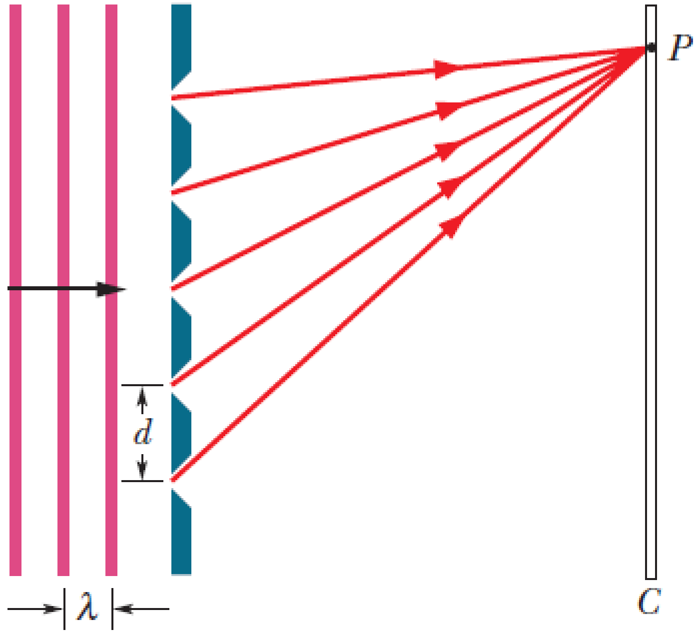


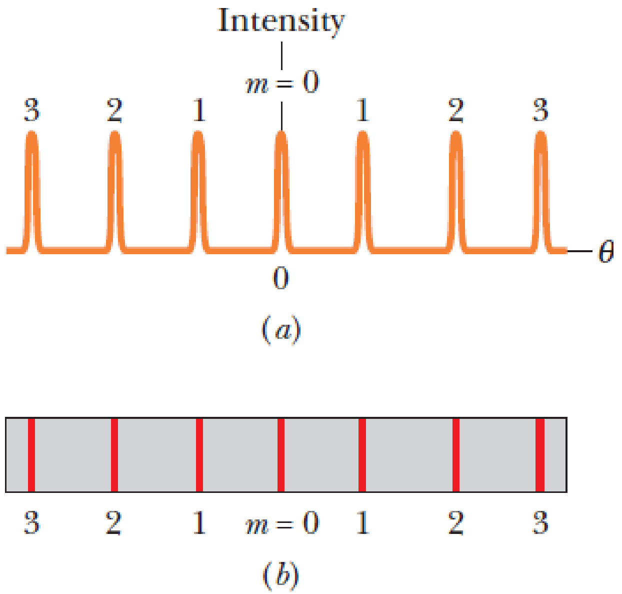
Fig. 36-17 One side of the intensity plot for a two-slit interference experiment. The inset shows (vertically expanded) the plot within the first and second side peaks of the diffraction envelope.

Φράγμα περίθλασης

Το φράγμα περίθλασης είναι κάτι παρόμοιο με το σύστημα δύο σχισμών, αλλά έχει πολύ μεγαλύτερο αριθμό σχισμών (ή χαραγών), N.

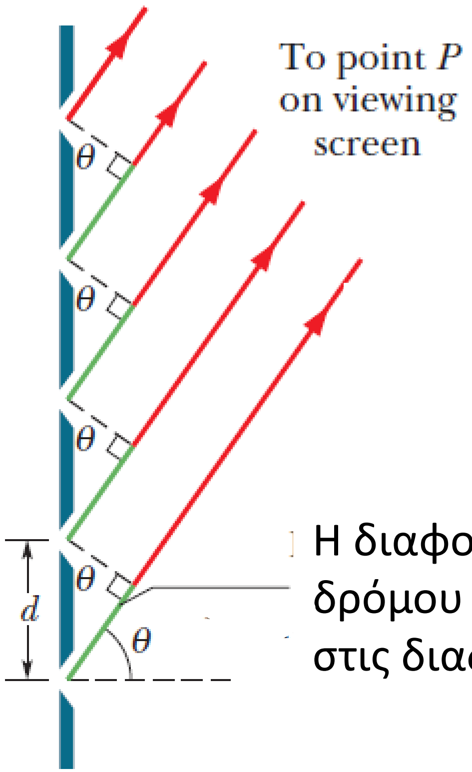


Ένα ιδανικό φράγμα περίθλασης με 5 σχισμές, που δημιουργεί μία εικόνα περίθλασης στο μακρινό πέτασμα C.



Η κατανομή της έντασης που παράγεται από φράγμα με πολλές χαραγές, αποτελείται από πολλές στενές «γραμμές» (κροσσούς)

Φράγμα περίθλασης



Η διαφορά οπτικού
δρόμου ανάμεσα
στις διαδοχικές ακτίνες

Οι ακτίνες από τις σχισμές που καταλήγουν σε
ένα μακρινό σημείο P είναι σχεδόν παράλληλες μεταξύ τους.
Η διαφορά οπτικού δρόμου μεταξύ δύο διαδοχικών ακτίνων είναι
$d sin\theta$
Η διαφορά οπτικού δρόμου ανάμεσα στις διαδοχικές ακτίνες
καθορίζει τη θέση των κροσσών συμβολής
Μέγιστα συμβολής έχουμε όταν

$$d \sin\theta = m\lambda, \quad \text{for } m = 0, 1, 2, \ldots \qquad \text{(maxima—lines)},$$

Το πάχος των κροσσών συμβολής για φράγμα

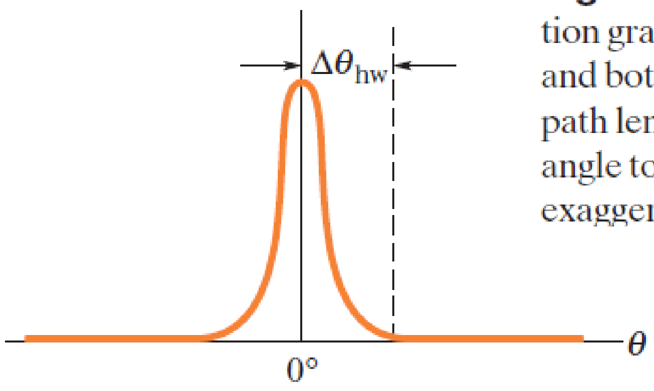
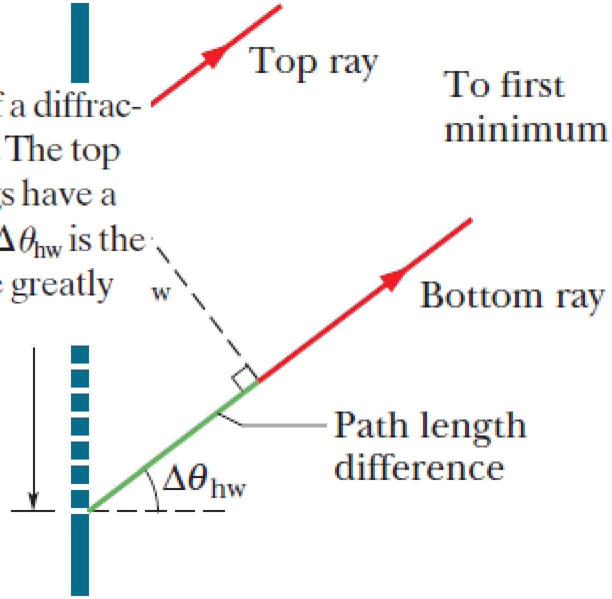


Fig. 36-22 The top and bottom rulings of a diffraction grating of N rulings are separated by Nd. The top and bottom rays passing through these rulings have a path length difference of $Nd \sin \Delta\theta_{hw}$, where $\Delta\theta_{hw}$ is the angle to the first minimum. (The angle is here greatly exaggerated for clarity.)



Το μισό πάχος (half width – hw) του κροσσού, $\Delta\theta_{hw}$, μετριέται από το κέντρο του μέχρι το διπλανό του ελάχιστο

Η πρώτη και η τελευταία σχισμή απέχουν μεταξύ τους κατά Nd και έχουν διαφορά οπτικού δρόμου ίση με $Nd\sin\Delta\theta \cong Nd\ \Delta\theta$ για τη κεντρική γραμμή (κροσσό)

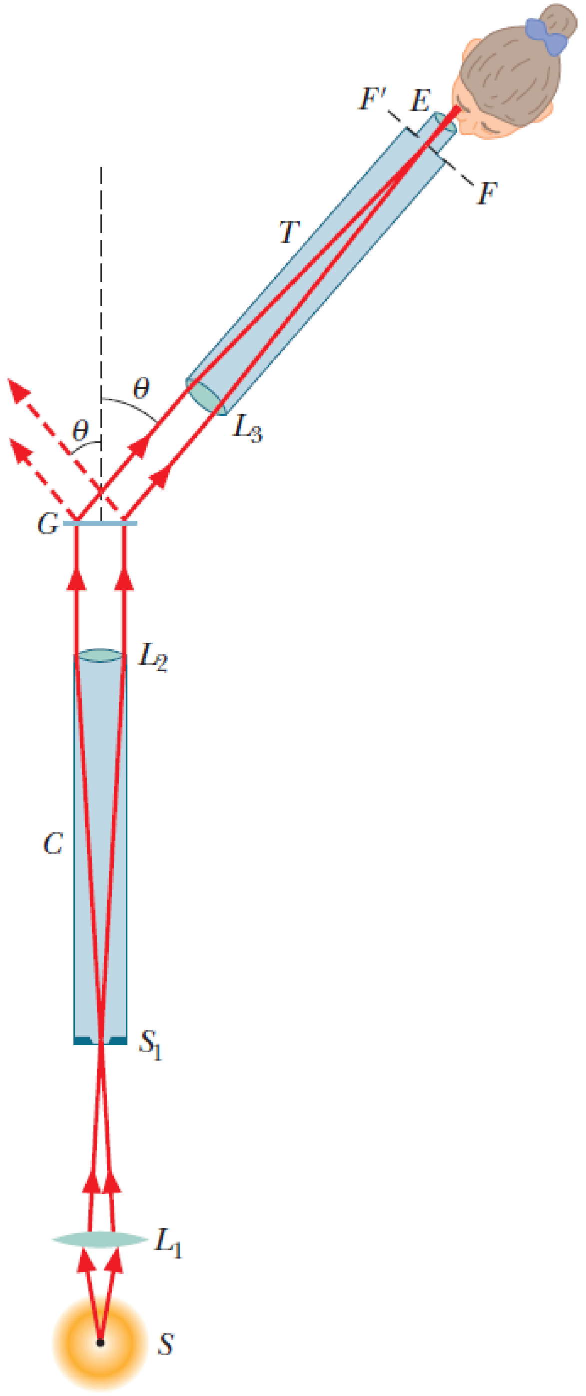
΄Αρα $$\Delta\theta_{hw} = \frac{\lambda}{Nd} \qquad \text{(half-width of central line).}$$

Αποδεικνύεται ότι για γραμμές (κροσσούς) πέρα από τη κεντρική, όπου η γωνία δεν μπορεί να θεωρηθεί πολύ μικρή, ισχύει

$$\Delta\theta_{hw} = \frac{\lambda}{Nd\cos\theta} \qquad \text{(half-width of line at } \theta\text{).}$$

Φασματοσκόπιο φράγματος περίθλασης

Ένα απλό φασματοσκοπιο με φράγμα περίθλασης, για τη φασματική ανάλυση του φωτός που εκπέμπεται από τη πηγή S



Παράδειγμα φάσματος που παρατηρούμε με το φασματοσκόπιο

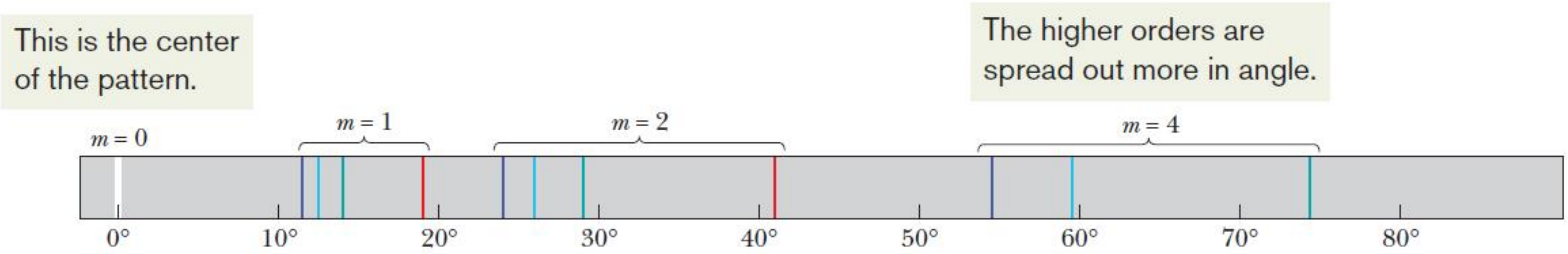


Fig. 36-24 The zeroth, first, second, and fourth orders of the visible emission lines from hydrogen. Note that the lines are farther apart at greater angles. (They are also dimmer and wider, although that is not shown here.)

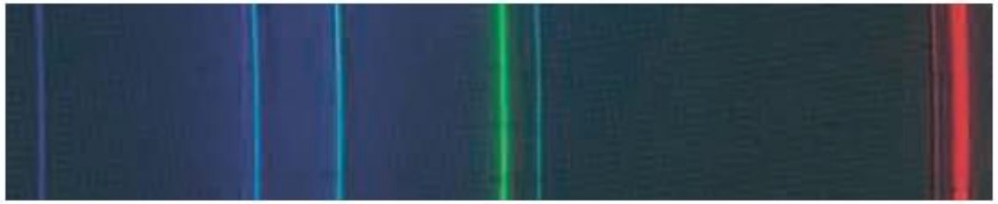


Fig. 36-25 The visible emission lines of cadmium, as seen through a grating spectroscope. *(Department of Physics, Imperial College/Science Photo Library/Photo Researchers)*

Φράγματα περίθλασης- Διασπορά (Dispersion) και διακριτική ικανότητα (Resolving Power)

Ως **διασπορά** ορίζεται το πηλίκον dθ/dλ, και μας δείχνει τη γωνιακά απόκλιση μεταξύ δύο γειτονικών μηκών κύματος που διαφέρουν μεταξύ τους κατά dλ

$$D = \frac{d\theta}{d\lambda}$$

Αλλά $d\sin\theta = m\lambda \Rightarrow d\cos\theta\, d\theta = m d\lambda \Rightarrow \boldsymbol{D = \frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{m}{d\cos\theta}, m = 0, 1, 2, \ldots}$

Ως **διακριτική ικανότητα** ορίζεται ο λόγος $R = \frac{\lambda_{\text{avg}}}{\Delta\lambda}$

$$R = \frac{\lambda_{\text{avg}}}{\Delta\lambda} \qquad \text{(resolving power defined).}$$

Σύμφωνα με το κριτήριο Rayleigh δυο γραμμές μόλις ξεχωρίζουν μεταξύ τους όταν η απόστασή τους ισούται με το μισό πλάτος τους δηλ. $\Delta\theta = \Delta\theta_{hw}$

$$\Delta\theta_{\text{hw}} = \frac{\lambda}{Nd\cos\theta}.$$

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta\lambda} = \frac{m}{d\cos\theta} \Rightarrow \Delta\theta = \frac{m}{d\cos\theta}\Delta\lambda$$

$$\Delta\theta = \Delta\theta_{hw} \Rightarrow \frac{m}{d\cos\theta}\Delta\lambda = \frac{\lambda}{Nd\cos\theta} \Rightarrow R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = Nm$$

$$R = Nm \qquad \text{(resolving power of a grating).}$$

Παράδειγμα

Ένα φράγμα περίθλασης έχει $1.26\text{x}10^4$ χαραγές («σχισμές») και έχει συνολικό πλάτος w=25.4mm. Φωτίζεται Από κίτρινο φως λάμπας Νατρίου που περιλαμβάνει δύο πολύ κοντικά μήκη κύματος 589.00 και 589.59nm.

(α) σε ποια γωνία εμφανίζεται το μέγιστο πρώτης τάξης (σε οποιαδήποτε πλευρά του κέντρου) για το μήκος κύματος των 589.00nm

$$d = \frac{w}{N} = \frac{25.4\times10^{-3}\text{m}}{1.26\times10^4}$$
$$= 2.016\times10^{-6}\text{m} = 2016\text{nm}$$

Το μέγιστο πρώτης τάξης αντιστοιχεί σε m=1.

Από την εξίσωση $d\sin\theta = m\lambda$, for $m = 0,1,2,\ldots$

βρίσκουμε ότι

$$\theta = \sin^{-1}\frac{m\lambda}{d} = \sin^{-1}\frac{(1)(589.00\text{nm})}{2016\text{nm}}$$
$$= 16.99^\circ \approx 17.0^\circ.$$

(β) Ποια είναι η γωνιακή απόκλιση ανάμεσα στις δυο γραμμές.

Η διασπορά του φράγματος στη γωνία θ που βρήκαμε προηγουμένως είναι

$$D = \frac{m}{d\cos\theta} = \frac{1}{(2016\text{nm})(\cos 16.99^\circ)}$$
$$= 5.187\times10^{-4}\text{rad/nm}.$$

Από τον ορισμό της διασποράς $D = \Delta\theta/\Delta\lambda$, βρίσκουμε τελικά ότι

$$\Delta\theta = D\Delta\lambda = (5.187\times10^{-4}\text{rad/nm})(589.59 - 589.00)$$
$$= 3.06\times10^{-4}\text{rad} = 0.0175^\circ.$$

(γ) Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός χαραγών (σχισμών) για να ξεχωρίζουν οι δύο γραμμές του Νατρίου μεταξύ τους σε πρώτη τάξη;

$$N = \frac{R}{m} = \frac{\lambda_{\text{avg}}}{m\Delta\lambda}$$
$$= \frac{589.30\text{nm}}{(1)(0.59\text{nm})} = 999 \text{ χαραγές}$$

Άσκηση

Για τη συμβολή N σύμφωνων πηγών σε μεγάλη απόσταση από τις πηγές να αποδείξετε ότι η ένταση $I(\theta)$ σαν συνάρτηση της γωνίας θ με την οποία φαίνεται το σημείο παρατήρησης P από το κέντρο της συστοιχίας των πηγών δίνεται από τον τύπο

$$I(\theta) = I_1 \frac{\sin^2\left(N\pi \frac{d}{\lambda}\sin\theta\right)}{\sin^2\left(\pi \frac{d}{\lambda}\sin\theta\right)}.$$

Να απεικονίσετε γραφικά το παραπάνω συμβολόγραμμα για την περίπτωση 8 πηγών.

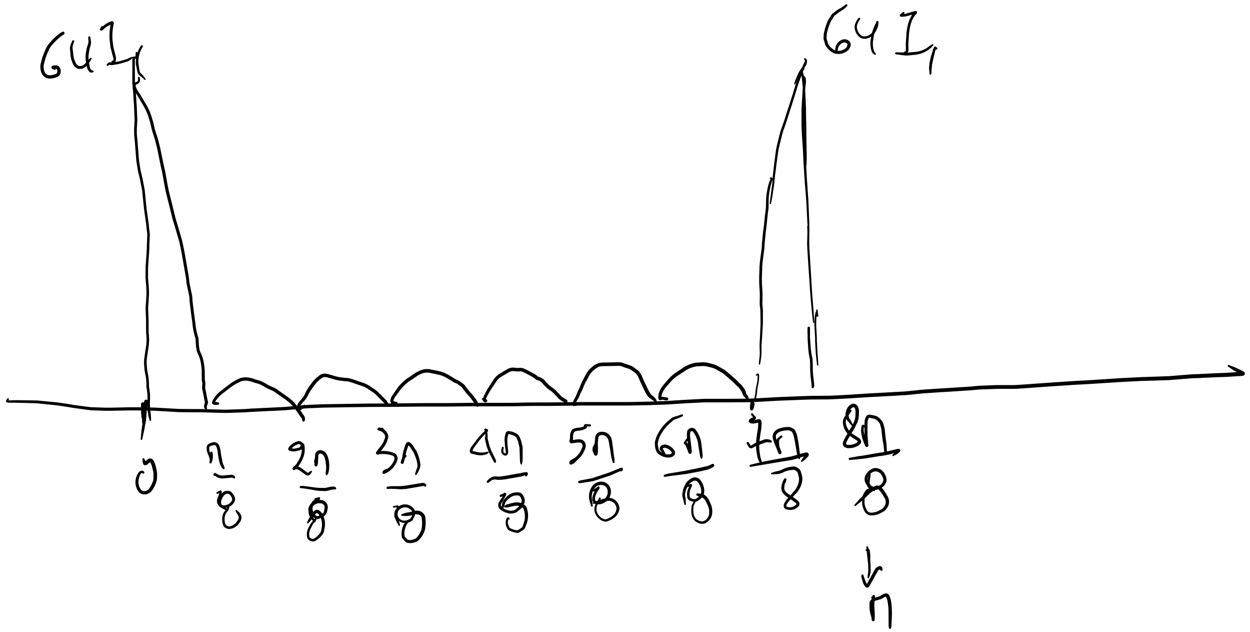
$$\pi \frac{d}{\lambda}\sin\theta = \frac{\varphi}{2} \qquad I(\theta) = I_1 \frac{\sin^2\left(N\frac{\varphi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$$

$$\sin\left(8\cdot\frac{\varphi}{2}\right) = 0 \Rightarrow 8\cdot\frac{\varphi}{2} = \pi \quad (\text{για } m=1) \Rightarrow \frac{\varphi}{2} = \frac{\pi}{8}$$

$$= 2\pi \quad (m=2) \Rightarrow \frac{\varphi}{2} = 2\cdot\frac{\pi}{8}$$

κ.ο.κ.

Άρα



Για $\theta \to 0$

$$I(0) = I_1 \frac{N^2 \pi^2 \frac{d^2}{\lambda^2} \cancel{\sin^2\theta}}{\pi^2 \frac{d^2}{\lambda^2} \cancel{\sin^2\theta}} = N^2 I_1$$

$$N = 8$$

$$\left. \begin{array}{l} N^2 I_1 \\ N = 8 \end{array} \right\} 64 I_1$$