



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΠΑΤΡΩΝ  
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά  
μαθήματα ΠΠ

# Αριθμητική Ανάλυση

Ενότητα 6: Παρεμβολή Παρέκταση

Φραγκίσκος Κουτελιέρης

Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Χημικών Μηχανικών

Παρεμβολή (interpolation)

Παρέκταση (extrapolation)

Αριθμητική Ανάλυση

# Σύνολο δεδομένων $(x_i, y_i)$

---

- **Παρεμβολή:** προσδιορισμός της τιμής  $Y$  σε ένα **ενδιάμεσο** σημείο  $X$
- **Παρέκταση:** προσδιορισμός της τιμής  $Y$  σε ένα σημείο  $X$  **εκτός εύρους τιμών**

# Σύνολο δεδομένων (x<sub>i</sub>, y<sub>i</sub>)

| Έτος Απογραφής | Πληθυσμός  |
|----------------|------------|
| 1821           | 938.765*   |
| 1828           | 753.400    |
| 1840           | 850.246    |
| 1853           | 1.035.527  |
| 1861           | 1.096.810  |
| 1870           | 1.457.894  |
| 1879           | 1.679.470  |
| 1889           | 2.187.208  |
| 1896           | 2.433.806  |
| 1907           | 2.631.952  |
| 1920           | 5.531.474  |
| 1928           | 6.204.684  |
| 1940           | 7.344.860  |
| 1951           | 7.632.801  |
| 1961           | 8.388.553  |
| 1971           | 8.768.641  |
| 1981           | 9.740.417  |
| 1991           | 10.259.900 |
| 2001           | 10.964.020 |
| 2011           | 11.720.000 |

Πόσος ήταν ο πληθυσμός το **1935?**  
(**Παρεμβολή**)

Πόσος θα είναι ο πληθυσμός το **2035?** (**Παρέκταση**)

Αριθμητική Ανάλυση

# Μέθοδοι

---

- **Taylor**

*Προσαρμόζει ένα πολυώνυμο σε όλα τα δεδομένα,  
λύνει σύστημα*

- **Lagrange**

*Προσαρμόζει ένα πολυώνυμο σε όλα τα δεδομένα,  
δεν λύνει σύστημα*

# Μέθοδος Taylor

---

Το πολυώνυμο  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$   
πρέπει να επαληθεύει κάθε σημείο



$$y_0 = a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + a_2 x_0^2 + a_1 x_0 + a_0$$

$$y_1 = a_n x_1^n + a_{n-1} x_1^{n-1} + \dots + a_2 x_1^2 + a_1 x_1 + a_0$$

$$y_2 = a_n x_2^n + a_{n-1} x_2^{n-1} + \dots + a_2 x_2^2 + a_1 x_2 + a_0$$

⋮

$$y_n = a_n x_n^n + a_{n-1} x_n^{n-1} + \dots + a_2 x_n^2 + a_1 x_n + a_0$$

Αριθμητική Ανάλυση

# Μέθοδος Taylor

---

Το πολυώνυμο  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$   
πρέπει να επαληθεύει κάθε σημείο



$$y_0 = a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + a_2 x_0^2 + a_1 x_0 + a_0$$

$$y_1 = a_n x_1^n + a_{n-1} x_1^{n-1} + \dots + a_2 x_1^2 + a_1 x_1 + a_0$$

$$y_2 = a_n x_2^n + a_{n-1} x_2^{n-1} + \dots + a_2 x_2^2 + a_1 x_2 + a_0$$

⋮

$$y_n = a_n x_n^n + a_{n-1} x_n^{n-1} + \dots + a_2 x_n^2 + a_1 x_n + a_0$$

Σύστημα  
n x n

Αριθμητική Ανάλυση

# Μέθοδος Lagrange

---

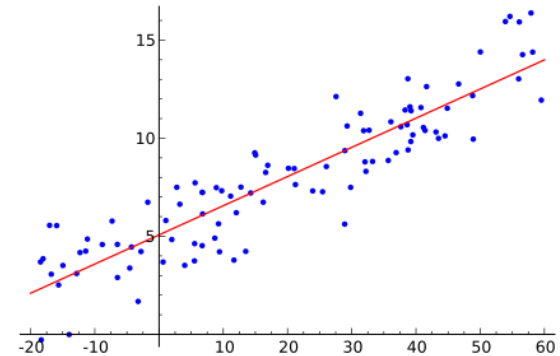
$$P_n(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\dots(x_1-x_n)} f(x_1) +$$
$$\frac{(x-x_1)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\dots(x_2-x_n)} f(x_2) + \dots +$$
$$\frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\dots(x_n-x_{n-1})} f(x_n)$$



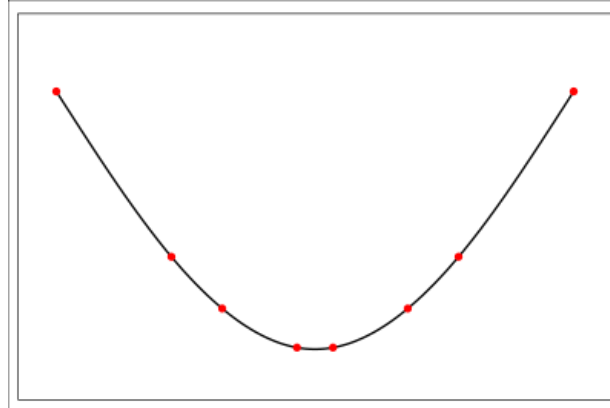
# Άλλες μέθοδοι

---

- **Ελάχιστα τετράγωνα**



- **Splines**



«Το υλικό της παρουσίασης προέρχεται από τις πανεπιστημιακές παραδόσεις του καθηγητή

Φρ. Κουτελιέρη».

Τέλος Ενότητας

# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



# Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.