Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Departamento de Matemática, Estatística e Informática
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

Dalcyn Woiler Machado Moraes
Pedro Franco de Sá

UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE QUADRILÁTEROS

PRODUTO EDUCACIONAL

BELÉM-PA
2020

Dalcyn Woiler Machado Moraes
Pedro Franco de Sá

UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE QUADRILÁTEROS

PRODUTO EDUCACIONAL

Produto Educacional apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará. Linha de Pesquisa: Metodologia para Ensino de Matemática no Nível Fundamental.
Orientador: Prof. Dr. Pedro Franco de Sá

BELÉM-PA
2020

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
Biblioteca do CCSE/UEPA, Belém - PA

Moraes, Dalcyn Woiler Machado
Uma sequência didática para o ensino de quadriláteros / Dalcyn Woiler Machado Moraes, Pedro Franco de Sá, 2020
Produto vinculado à dissertação "Ensino de quadrilátero por atividades experimentais" pertencente ao Mestrado Profissional em Ensino de Matemática. Universidade do Estado do Pará, 2020
ISBN:
1. Ensino de matemática por atividades 2. Quadriláteros. 3. Prática de ensino. I. Sá, Pedro Franco de. II. Título.
CDD. 23º ed.516.1

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTOS EDUCACIONAIS – BANCA EXAMINADORA

Título: O ENSINO DE QUADRILÁTEROS POR ATIVIDADES EXPERIMENTAIS

Mestrando (a): DALCYN WOILER MACHADO MORAES

Data da avaliação: 31/08/2020

PÚBLICO ALVO DO PRODUTO EDUCACIONAL

a) *Destinado à:*

( ) Estudantes do Ensino Fundamental ( ) Estudantes do Ensino Médio

(X) Professores do Ensino Fundamental ( ) Professores do Ensino Médio

( ) Outros: __________

INFORMAÇÕES SOBRE O PRODUTO EDUCACIONAL

a) *Tipo de Produto Educacional*

(X) Sequência Didática ( ) Página na Internet ( ) Vídeo

( ) Texto Didático (alunos/professores) ( ) Jogo Didático ( ) Aplicativo

( ) Software ( ) Outro: __________

b) *Possui URL:* ( ) Sim, qual o URL: __________

( ) Não (X) Não se aplica

c) *É coerente com a questão-foco da pesquisa?*

(X) Sim

( ) Não. Justifique? __________

d) *É adequado ao nível de ensino proposto?*

(X) Sim

( ) Não. Justifique? __________

e) *Está em consonância com a linguagem matemática do nível de ensino proposto?*

(X) Sim

( ) Não. Justifique? __________

ESTRUTURA DO PRODUTO EDUCACIONAL

a) *Possui sumário:* (X) Sim ( ) Não ( ) Não se aplica

b) *Possui orientações ao professor:* (X) Sim ( ) Não ( ) Não se aplica

c) *Possui orientações ao estudante:* (X) Sim ( ) Não ( ) Não se aplica

d) *Possui objetivos/finalidades:* (X) Sim ( ) Não ( ) Não se aplica

e) *Possui referências:* (X) Sim ( ) Não ( ) Não se aplica

f) *Tamanho da letra acessível:* (X) Sim ( ) Não ( ) Não se aplica

g) *Ilustrações são adequadas:* (X) Sim ( ) Não ( ) Não se aplica

P. Sá

CONTEXTO DE APLICAÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL

a) *Foi aplicado?*

(X)Sim, onde: Escola pública de Ensino Fundamental (EF), no município de Igarapé-Miri-PA

( ) Não, justifique: ______

( ) Não se aplica

b) *Pode ser aplicado em outros contextos de Ensino?*

(X) Sim, onde: Escolas particularesdo EF e na Educação de Jovens e Adultos - 4 fase

( ) Não, justifique: ______

( ) Não se aplica

c) *O produto educacional foi validado antes de sua aplicação?*

(X) Sim, onde: Em umaescola pública de EF, no município de Igarapé-Miri-PA

( ) Não, justifique: ______

( ) Não se aplica

d) *Em qual condição o produto educacional foi aplicado?*

(X) na escola, como atividade regular de sala de aula

( ) na escola, como um curso extra

( ) outro: ______

e) *A aplicação do produto envolveu (marque as alternativas possíveis):*

(X) Alunos do Ensino Fundamental

( ) Alunos do Ensino Médio

(X) Professores do Ensino Fundamental

( ) Professores do Ensino Médio

( ) outros membros da comunidade escolar, tais como ______

( ) outros membros da comunidade, tais como ______

O produto educacional foi considerado:

(X) APROVADO ( ) APROVADO COM MODIFICAÇÕES ( ) REPROVADO

MEMBROS DA BANCA

Pedro Sá ______. Orientador

Prof. Dr. Pedro Franco de Sá
Doutor em Educação – Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN–RN
Universidade do Estado do Pará

Ana Kely Martins da Silva.
Examinador Interno

Profa. Dra. Ana Kely Martins da Silva
Doutora em Educação – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro – PUC/RJ
Universidade do Estado do Pará

Maria Aparecida da Silva Rufino ______. Examinador Externo

Profa. Dra. Maria Aparecida da Silva Rufino
Doutora em Ensino de Ciências – Universidade de Burgos
Universidade de Pernambuco (UPE), Campus Mata Norte

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E INFORMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

APLICAÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL

DECLARAÇÃO

Eu, **SIMONE PINHEIRO RIBEIRO**, diretora da **UNIDADE ESCOLAR EURIDICE SOARES MARQUES DE SOUSA**, localizada à Trav. João Afonso Lobato – Bairro: Cidade Nova - Igarapé-Miri/Pa – CEP 68.430-000, que obteve IDEB 3,0, no ano de 2017, venho por meio desta declarar que o Sr. **DALCYN WOILER MACHADO MORAES**, vinculado ao Programa de Mestrado Profissional de Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará, desenvolveu Estagio Supervisionado e aplicou Produto Educacional ENSINO DE QUADRILÁTEROS POR ATIVIDADES, nesta Escola sob a supervisão da coordenador pedagógico NEEMIAS ARTEMILES DE OLIVEIRA PESSOA, na turma A do 8° Ano do Ensino Fundamental, no turno da manhã, no período de 03/06/2019 a 19/06/2019, para fins de comprovação junto ao referido Programa. O Estágio Supervisionado foi desenvolvido de acordo com o Plano de Atividades apresentado inicialmente, obteve uma avaliação POSITIVA pelo Supervisor responsável levando em consideração tanto o Relatório de Acompanhamento do Estágio Supervisionado quanto a Avaliação do Produto Educacional. O que me leva a concluir que as atividades desenvolvidas no referido Estágio contribuíram efetivamente para a melhoria de ensino e aprendizagem da Escola.

Igarapé-Miri/Pa, 19 de Junho de 2019.

Simone Pinheiro Ribeiro

Simone Pinheiro Ribeiro
Diretora

Simone Pinheiro Ribeiro
Gestora Escolar
Portaria N° 374 2018

SUMÁRIO

1. APRESENTAÇÃO

Quando entramos para a escola, ainda enquanto estudantes, muitos conhecimentos são repassados pelos professores, conhecimentos estes que moldam o acervo cognitivo do indivíduo com o passar do tempo. Os conhecimentos matemáticos, em especial o geométrico, exercem um papel fundamental para que no futuro os estudantes possam ser cidadãos críticos no sentido de se questionar sobre tudo o que está ocorrendo ao seu redor. Contudo, com o passar do tempo percebemos, já em nossa prática docente, que o ensino de matemática não está conseguindo suprir as necessidades de uma sociedade que anseia por um perfil de profissionais que estejam acima da média.

Na tentativa de alcançar tais aspectos, novas metodologias de ensino vêm sendo estudadas e pesquisadas, dentre elas apontamos o ensino de matemática por atividade, que implica em uma nova possibilidade que leva o estudante a descobrir por si mesmo o conhecimento matemático, o qual está idealizado em atividades que têm seus objetivos bem especificados em sua preparação, apoiando as discussões necessárias para que, posteriormente se chegue a um conceito em construção, (SÁ, 2009).

Dentre os vários assunto relacionados a geometria escolhemos os quadriláteros, nossa escolha foi motivada pelo fato deste conteúdo está presente em todo o ensino fundamental, desde o ensino fundamental menor, quando se faz a identificação de polígonos, dentre eles podemos incluir os quadriláteros, até o final do ensino fundamental, onde seus conceitos e propriedades são melhores estudados. Ainda podemos citar que, pela nossa própria prática enquanto professor, a maioria das vezes os assuntos de geometria têm sido renunciados, pois na maioria dos livros didáticos eles aparecem no seu final, o que acaba não tendo tempo suficiente para serem explicados ou quando são vistos, são comentados de forma superficial. Só para citar alguns títulos temos o livro “Matemática: Ideias e Desafios – 8° Ano” publicado em 2016 e “Vontade de Saber Matemática – 8º Ano” publicado em 2015.

Neste sentido, o produto aqui desenvolvido vem tratar de um experimento didático sobre o ensino de quadriláteros. Este caminho investigativo foi primeiramente pensado a partir da observação e análises referentes ao meu fazer pedagógico. Deste modo, apresentamos uma sequência didática como produto da pesquisa desenvolvida por Moraes (2020) a qual faz parte da dissertação do autor aprovada pela banca avaliadora.

A referida dissertação objetivou avaliar os efeitos de uma sequência didática para o ensino de quadriláteros por meio de atividades sobre a participação nas aulas, à construção de conceito e o desempenho na resolução de questões sobre o assunto. Os resultados desse estudo mostraram que a sequência didática elaborada, a metodologia de ensino por atividades e o trabalho docente proporcionaram uma efetiva participação dos discentes nas aulas de matemática e um aumento no desempenho de resolução de questões sobre quadriláteros.

Assim este produto didático como uma proposta para ajudar o professor de matemática que pretende ministrar em sua sala de aula o conteúdo de quadrilátero. Com isso, este trabalho segue a seguinte sequência: aspectos curriculares sobre o ensino de quadriláteros, estudos sobre seu ensino, aspectos históricos, aspectos matemáticos, o ensino de Matemática por Atividade, as atividade que compõem nossa sequencia didática, nossas sugestões de leitura e nossas considerações sobre o trabalho.

Assim, esperamos que os colegas professores possam usufruir ao máximo deste trabalho e com isso ter uma nova visão sobre o ensino de geometria, em especial de quadriláteros a luz da metodologia do Ensino por Atividade Experimentais, que pode fazer em sala uma aula diferenciada e motivadora para os entes que participam do processo de ensino, aprendizagem e avaliação, professor e estudante.

2. ASPECTOS CURRICULARES SOBRE O ENSINO DE QUADRILÁTEROS

Na atualidade é imprudente se conceber um ensino de matemática sem ser embasado em um planejamento que perpassa por uma visualização do currículo da disciplina, consequentemente é dever de cada professor planejar as ações que irão ser tomadas nesse processo. E quando se tenta conceituar currículo estamos de acordo com Mello (2014) que expõem que “Currículo é tudo aquilo que uma sociedade considera necessário que os alunos aprendam ao longo de sua escolaridade” (p.1).

No decorrer da História, percebemos que tanto o currículo, quanto o ensino de matemática vem se estruturando, seja no panorama internacional ou no cenário nacional, e nesse contexto observa-se que segundo Santos (2008) (apud GODOY 2012, p.12) a partir das influências do Movimento da Matemática Moderna (MMM) houve uma quebra de ideias relacionadas às estruturas curriculares e ao processo de ensino da matemática, culminando em posicionamentos e concepções que iriam direcionar um novo panorama, nesse sentido o autor, coloca documentos que serviram de recomendações para essas mudanças, a exemplo temos o documento produzido pelo *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM), com o título de *An agenda for action: recomendation for School Mathematics of 1980*, este sugeria que:

> [...] tais orientações tinham a finalidade de atender melhor as necessidades matemáticas de uma população diversificada de estudantes em uma sociedade marcada progressivamente pela presença de tecnologias. As recomendações foram: a resolução de problemas como foco; as destrezas básicas deveriam ir além do cálculo; obter vantagens do uso de calculadoras e computadores; aplicar *Standards* rigorosos de eficácia e rendimento; avaliar o êxito dos programas de Matemática; desenvolver currículo flexível para promover o acesso com grande variedade de opções; ajuda pública para o ensino de matemática para se alcançar níveis compatíveis com a importância da compreensão matemática. (SANTOS, 2008, p. 4).

Influenciado por essa nova perspectiva os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino fundamental foram sendo estruturado neste sentido Brasil (1998, p.20) observa a necessidade de haver “o direcionamento do Ensino fundamental para a aquisição de competências básicas necessárias ao cidadão”, no entanto, “não apenas voltada para a preparação de estudos posteriores”. Estamos de acordo com Godoy (2012) quando o mesmo coloca que esses pensamentos formaram o palco para uma análise crítica do currículo e do ensino de matemática nos anos 80 e início da década de anos 90.

Anteriormente aos PCN, às novas propostas curriculares tiveram uma visão mais específica em relação à matemática, impulsionadas primeiramente com o (MMM) e em seguida por documentos nacionais oficiais, comentados anteriormente, voltados a um novo ensino dessa disciplina, onde este teria um caráter libertador e assumiria a tarefa de preparar o cidadão aos moldes de uma sociedade repleta de ciência e tecnologia. Nesse sentido Barreto (1995) (apud GODOY 2012) comenta que o ensino de matemática, em nível fundamental, deveria capacitar o estudante para:

> [...] planejar ações e projetar as soluções para problemas novos, que exigem iniciativa e criatividade; compreender e transmitir ideias matemáticas, por escrito ou oralmente; usar independentemente o raciocínio matemático, para a compreensão do mundo que nos cerca; aplicar matemática nas situações do dia-a-dia; avaliar se resultados obtidos na solução de situações problemas são ou não são razoáveis; fazer estimativas mentais de resultados ou cálculos [...] (p.264).

Nestes termos, em meados dos anos 90 os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) começam a ser elaborados, no entanto vamos nos deter em expor o currículo relacionado à área da matemática. Para o ensino de matemática o PCN colocava em seu texto introdutório que a mesma, “constituem um referencial para a construção de uma prática que favoreça o acesso ao conhecimento matemático que possibilite, de fato, a inserção dos alunos como cidadãos, no mundo do trabalho, das relações sociais e culturais” (BRASIL, 1998, p. 59).

Ainda nessa direção, o PCN de matemática tentou avançar ainda mais, pois a matemática teria que ter um currículo que fizesse jus a seu papel de matéria necessária para “formação de capacidades intelectuais, a estrutura de pensamento, [...] a aplicação de problemas, situações da vida cotidiana e atividades do mundo do trabalho e no apoio à construção do conhecimento em outras áreas curriculares” (BRASIL, 1998, p.28).

E ainda continuando o caminho para a estruturação definitiva do PCN de matemática, seu ensino, teria indicações de procedimentos na escola e estes, deveriam ser pautados na resolução de problemas, sendo o início das atividades do ensino de matemática, onde também o uso dos problemas iria acontecer ao longo do processo de aprendizagem, indo de encontro à estrutura de ensino tradicional, que começam pelas definições, seguidas de exemplos e exercícios.

As novas ideias deste documento oficial foram muito além da resolução de problemas como metodologia de ensino para início do processo, mas teve também a indicação do uso de outros caminhos importantes para o trabalho na escola como “o uso da história da matemática, as tecnologias da comunicação e os jogos como recursos que podem favorecer o contexto dos problemas, como também os instrumentos para a construção das estratégias de resolução” (BRASIL, 1998, p.42).

Deste modo, entendemos que o currículo de matemática estruturado segundo essas perspectivas onde o aluno teria um papel de protagonista de sua aprendizagem poderia fugir da mesmice do ensino de matemática, onde agora o currículo pudesse preparar um cidadão responsável e crítico capaz de lhe dar com diferentes situações para viver em uma sociedade repleta de inovações tecnológicas.

Com este pensamento, Brasil (2016) propõe o ensino de quadrilátero em todo o ensino fundamental nos seus anos finais, pois como essa figura geometria é um polígono regular, seus conceitos e características de identificação de figuras quanto aos lados e ângulos estão no 6º ano e no 7º ano. Para o 6º ano se observa na unidade temática de geometria a especificação dos polígonos e suas classificações, deste modo este documento tenta alcançar as seguintes habilidades:

> (EF06MA18) Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e classificá-los em regulares e não regulares, tanto em suas representações no plano como em faces de poliedros.
> (EF06MA20) Identificar características dos quadriláteros, classificá-los em relação a lados e a ângulos e reconhecer a inclusão e a intersecção de classes entre eles. (BRASIL, 2016 p. 301)

No 7º ano o ensino de quadriláteros, que é um polígono regular, se especifica também na unidade temática de geometria, com as seguintes habilidades a serem obtidas:

> (EF07MA27) Calcular medidas de ângulos internos de polígonos regulares, sem o uso de fórmulas, e estabelecer relações entre ângulos internos e externos de polígonos, preferencialmente vinculadas à construção de mosaicos e de ladrilhamentos.
> (EF07MA28) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular (como quadrado e triângulo equilátero), conhecida a medida de seu lado. (BRASIL, 2016 p. 307)

No então, estas habilidades dizem respeito ao assunto de polígonos, todavia, o ensino das propriedades dos quadriláteros se apresenta mais evidente no 8º ano do ensino fundamental onde, Brasil (2016), almeja capacitar o estudante para:

> (EF08MA14) Demonstrar propriedades de quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos.
> (EF08MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos. (BRASIL, 2016 p. 313)

No 9º ano o ensino de quadrilátero também está especificado na unidade temática de geometria, onde as habilidades a serem alcançadas se relacionam a inscrição de polígonos e qual influencia esta, estabelece entre os ângulos, onde

Brasil (2016) espera que o estudante saiba: “Resolver problemas por meio do estabelecimento de relações entre arcos, ângulos centrais e ângulos inscritos na circunferência, fazendo uso, inclusive, de softwares de geometria dinâmica” (p.315).

Além disso, antes da BNCC, existia outro documento oficial que estabelecia parâmetros para o ensino de quadriláteros. O PDE (Plano de Desenvolvimento da Educação) foi um documento do Ministério da Educação (MEC) que tinha o objetivo de melhorar substancialmente a educação oferecida às nossas crianças, jovens e adultos. Este expõe os seguintes objetivos a serem alcançados pelos estudantes que relacionam nosso objeto de estudo:

> D3 Identificar propriedades comuns e diferenças entre figuras bidimensionais pelo número de lados e pelos tipos de ângulos.
> D4 Identificar quadriláteros observando as relações entre seus lados (paralelos, congruentes, perpendiculares). (Brasil 2008, p. 107)

Estes objetivos foram específicos para os estudantes que estão terminando o 5º ano de ensino fundamental. Para os estudantes do 9º ano Brasil (2008) propõe que consigam:

> [...] D4.Identificar relação entre quadriláteros por meio de suas propriedades. [...]
> [...] D8. Resolver problema utilizando propriedades dos polígonos (soma de seus ângulos internos, número de diagonais, cálculo da medida de cada ângulo interno nos polígonos regulares)[...] (p. 152)

Por tanto, podemos perceber que o assunto de quadrilátero se apresenta no ensino fundamental maior. E este conteúdo está disposto nos documentos oficiais do governo. A seguir vamos tratar sobre os estudos do ensino de quadriláteros desenvolvidos por meio de pesquisas nacionais em diferentes instituições e diferentes abordagens.

3. ESTUDOS SOBRE O ENSINO DE QUADRILÁTEROS

Neste momento apresentaremos uma revisão de estudos sobre as pesquisas que versão sobre o ensino de quadriláteros. Esperando ter a visualização das produções que explanam sobre este objeto de estudo, como ele está sendo apresentada em diferentes produções nas instituições de ensino pelo país e quais as abordagens que estão sendo dada a este conteúdo. Apontado os caminhos trilhados nestas produções, mostrando seus objetivos, análises, resultados e conclusões.

Esta revisão de estudo buscou pesquisas nos repositório “online” de teses e dissertações de diferentes instituições de ensino superior brasileiras incluindo, o Catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e da Plataforma Sucupira, também ligada a CAPES, e do Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), bem como na versão de busca de trabalhos acadêmicos da Google o “Google Acadêmico”. Nestes repositórios “online” colocamos palavras chaves para a busca, termos como “quadrilátero” e “ensino de quadriláteros” que se referem a nosso objeto de estudo.

Na pesquisa foram encontrados 22 trabalhos, dentre eles uma tese, 14 dissertações, um TCC e seis artigos relacionados a quadriláteros e o ensino de quadriláteros dos quais, foram eliminados 10 por conterem problemas de ordem metodológica, ou seja, o método não se mostrava claro em todos os trabalhos descartados. Em relação aos artigos todos os encontrados foram eliminados, pois eram publicações em periódicos de parte das dissertações selecionadas, sendo mais conveniente a análise do trabalho na sua integra. Selecionamos 12 trabalhos os quais, foram divididos em categorias de acordo com suas particularidades, sendo os Estudos Diagnósticos, os Estudos Teóricos e Estudos Experimentais.

Em relação aos estudos diagnósticos eles trazem resultados de verificações de dificuldades dos discentes relacionadas ao ensino-aprendizagem dos quadriláteros, suas possíveis causas e condições. Os estudos teóricos apresentam um processo investigativo que propõem conceitos e novas ideias, relacionados a uma nova abordagem do ensino de quadriláteros e por fim os estudos experimentais sugerem e realização de atividades para o ensino dos quadriláteros a partir de resultados de experiências didáticas em sala de aula.

Em resumo está revisão seguiu cinco etapas que foram: a pesquisa, a seleção, a análise, a categorização e a apresentação dos resultados obtidos referentes ao ensino de quadriláteros. O quadro a seguir mostra a revisão de estudo de um modo geral, acreditamos que sua apresentação oferecerá uma noção de como foi realizada a pesquisa, as quais estão divididas em categorias devidamente mencionadas anteriormente.

Quadro 01 - Estudo sobre o ensino de quadriláteros

Tipo de estudo	Autor(es)	Ano	Instituição
Estudos Diagnósticos	Miranda	2016	UNIVASF/ PROFMAT
Estudos Teóricos	Moura	2013	UFMG/ PROFMAT
	Ferreira	2013	UFRJ/ PROFMAT
	Cruz	2015	UFRJ/ PROFMAT
Estudos Experimentais	Amâncio	2013	PUC/MG
	Almeida	2015	UFSC/SC
	Damião	2015	UFERSA/ RN
	Ferreira	2016	PUC/SP
	Gabriel	2017	UNICSUL/ SP
	Arinos	2018	UFMS/MS
	Costa	2016	UFPE/RE
	Fernandes	2014	UFRRJ/ PROFMAT

Fonte: Pesquisa bibliográfica (2018)

3.1. Estudos Diagnósticos

Em Miranda (2016) temos os resultados de uma pesquisa com o seguinte objetivo: “compreender e analisar através da implementação de um minicurso, de que forma o processo de ensino dos alunos, relacionado a quadriláteros, com o uso de materiais didáticos manipuláveis, contribui para o desenvolvimento do raciocínio geométrico, tendo em vista que estes proporcionam aos alunos maior interesse e cuidados por parte do professor durante a utilização”.

A metodologia de pesquisa de Miranda (2016) tem uma abordagem qualitativa, ela foi realizada em 2016 numa escola municipal de ensino fundamental localizada no município de Senhor do Bonfim – Bahia em duas turmas do sexto ano. A turma “A” possuía 31 (trinta e um) estudantes matriculados, e a turma “B” contava com 30 estudantes, inicialmente foram feitas entrevistas abertas para a secretaria de educação deste município, para direção da escola e para os professores que lecionam matemática nas turmas participantes da pesquisa.

Na continuação da pesquisa foi aplicado para todos os alunos participantes um questionário como forma de avaliação diagnóstica, o mesmo foi dividido de seguinte forma: duas perguntas que buscava informações sobre o conhecimento prévio dos estudantes em relação a geometria e o ensino de quadriláteros, uma questão em relação ao conceito geral de quadriláteros, outras quatro perguntas abordaram as propriedades de quadriláteros e a última pergunta destinada as características de todos os quadriláteros notáveis, totalizando oito perguntas, ainda no final existia um espaço para possíveis comentários sobre o mini curso.

A análise dos resultados da pesquisa foi dividida pela autora em dois momentos, o primeiro destinado aos resultados das entrevistas e a segunda relacionada às atividades do minicurso. O minicurso era composto de 6 (seis) atividades, na primeira delas, pedia-se aos estudantes que montassem quadriláteros com palitinhos e cola em uma folha de papel A4. Os resultados mostram que ambas os grupos das duas turmas acertaram na montagem das figuras, porém foram poucos os grupos que socializaram os resultados.

Na segunda atividade que tinha como nome “problema de pontinhos” como resultado todos os grupos fizeram corretamente as figuras, no entanto não expressaram corretamente os nomes dos quadriláteros.

Na terceira atividade os discentes teriam que completa um jogo de cruzadinha que pedia o nome dos quadriláteros notáveis (quadrado, retângulo e losango). Nesta atividade foi percebido que na turma A, apenas dois dos 5 grupos conseguiram realizar corretamente a atividade e na turma B, 4 grupos dos 5 formados realizaram a tarefa corretamente, e ainda foi percebido erros na escrita dos nomes das figuras de ambos os grupos das duas turmas, o que mostrou a relevância dos jogo para os resultados obtidos.

Na atividade 4 foi apresentado um jogo didático de memória como nomes e figuras de quadriláteros. Em relação a esta atividade foi percebido que os estudantes deram muito mais importância ao trabalho coletivo e estimulou seu senso de tomada de decisão e estimulou sua alta confiança e autoestima.

A quinta atividade da gincana tinha o objetivo de explorar os elementos e as propriedades dos quadriláteros notáveis, onde foram dadas dez perguntas sendo sorteadas entre os grupos. Para turma A, das dez questões houve quatro perguntas erradas e da turma B tiveram duas perguntas erradas, com isso foi observado que os estudantes consultados não sabem os conceitos básicos de geometria.

A sexta e última atividade era composta de um tabuleiro dividido em casas quadrados de 4x4 totalizando 16 casas que deveriam ser preenchidos com peças no formato dos quadriláteros notáveis. Percebeu-se com o jogo que na turma A três grupos completaram a tarefa de forma correta e na Turma B apenas dois grupos conseguiram preencher todo o tabuleiro corretamente, deste modo essa atividade foi a que obteve menos êxito, a autora comenta que o entendimento da língua portuguesa foi a principal dificuldade no momento de efetuar a atividade.

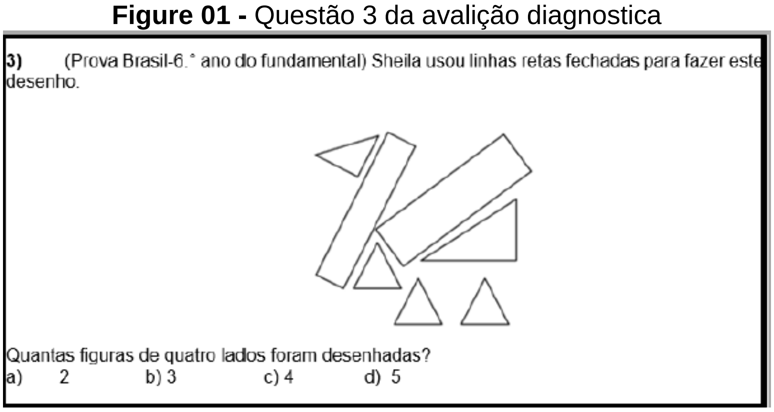
Na continuação, após a análise do minicurso (gincana pedagógica) Miranda (2016) teceu seus comentários sobre a avaliação diagnostica que foi realizada após o termina das atividades, está análise conferiu as respostas dos 51 (cinquenta e um) participantes da pesquisa que responderam a 8 perguntas relacionadas aos quadriláteros e suas propriedades. Além disso, existia um espaço para os participantes expressarem suas opiniões acerca do minicurso desenvolvido.

Em relação aos resultados desta avaliação diagnóstica foram analisadas 8 (oito) questões, a primeira questionava os estudantes se já tinha estudado geometria. Os resultados indicaram que da turma A 10 (dez) dos 29 estudantes responderam já ter estudado alguma coisa sobre este tópico matemático e 9 (nove) responderam não ter estudado geometria e o restante dos estudantes deram respostas incoerentes segundo a autora. Na turma B, 14 (quatorze) dos estudantes responderam que não ter estudado geometria, cerca de 60% do total dos estudantes.

A segunda questão questionava os estudantes se tinham ouvido falar de quadriláteros. Os resultados demonstraram que as duas turmas nunca tinham estudado o conteúdo de quadriláteros.

Na terceira pergunta foi usada uma questão da Prova Brasil, a qual pode ser observada a seguir:

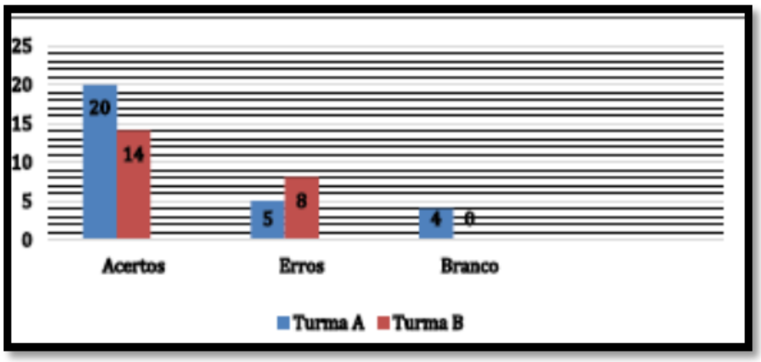
Figure 01 - Questão 3 da avalição diagnostica



Fonte: Miranda (2016, p.54)

Após a conferência das respostas foi montado um gráfico pela autora que demonstra o bom desempenho das duas turmas como pode ser observado pelo gráfico a seguir:

Gráfico 01 - Resultado da 3º questão da avaliação diagnóstica



Fonte: Miranda (2016, p.55)

Na continuação foi analisada a questão número 4 (quatro), que se indagava sobre as propriedades dos quadriláteros, pedia-se que os estudantes descrevessem três características e propriedades dos quadriláteros. Os resultados mostraram que na turma A foram citadas características diversas apenas do quadrado e características do quadrilátero de forma geral, sem apontar outras características de outros quadriláteros. Na turma B, não houve resposta que relacionava os quadrados e dos 22 estudantes, 10 não responderam as questões, sendo os que responderam deram respostas parecidas com as mostradas a seguir:

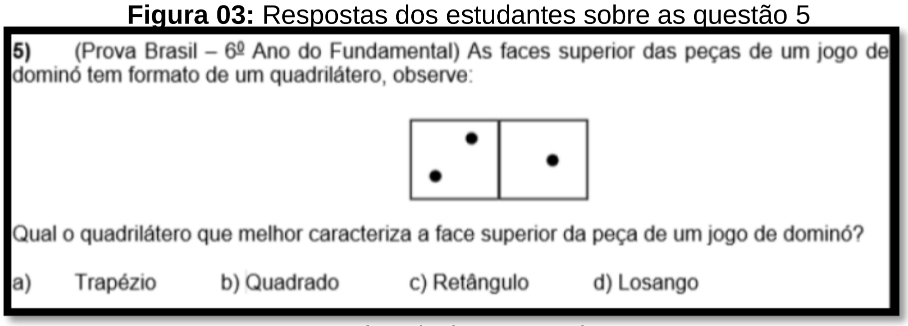
Figura 02 - Respostas dos estudantes sobre as questão 4

Turma A – Aluno A: 4 Vértices + 4 Lados + 4 ângulos.
Turma A – Aluno B: Retangulo, trapézio, quadrado.
Turma B – Aluno C: Trapézio, retângulo e losango

Fonte: Miranda (2016, p.56)

O quinto questionamento também foi retirado da "Prova Brasil" como podemos observar na figura abaixo:

Figura 03: Respostas dos estudantes sobre as questão 5



5) (Prova Brasil – 6º Ano do Fundamental) As faces superior das peças de um jogo de dominó tem formato de um quadrilátero, observe:

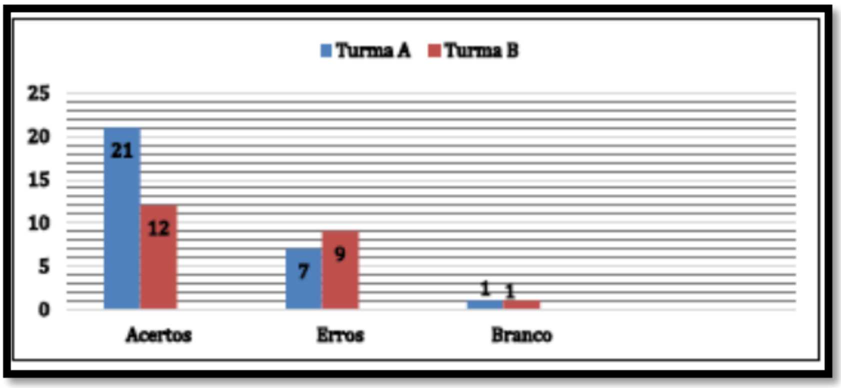
Qual o quadrilátero que melhor caracteriza a face superior da peça de um jogo de dominó?

a) Trapézio b) Quadrado c) Retângulo d) Losango

Fonte: Miranda (2016, p.56)

Com as respostas coletadas Miranda (2016) forneceu ao gráfico com os resultados das duas turmas consultadas, como podemos observar abaixo:

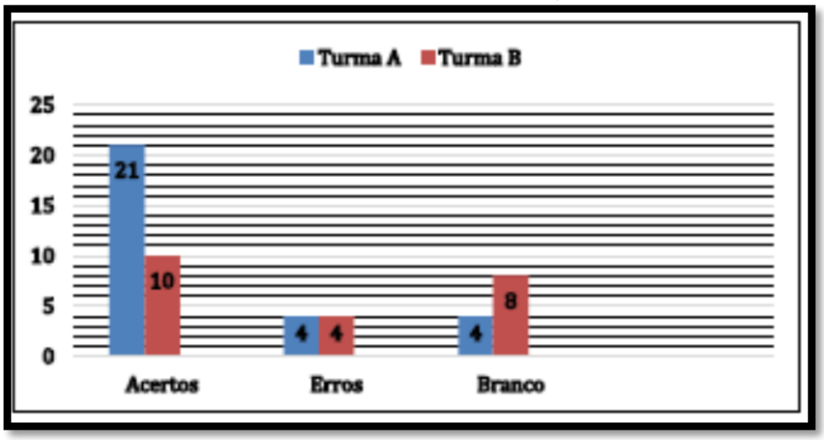
Gráfico 02: Resultado da 5º questão da avaliação diagnostica



Fonte: Miranda (2016, p.55)

Na questão de número 6 (seis) se questionava sobre a visualização do quadrilátero retângulo em meio a varias outras figuras parecidas com esta. Os resultados foram demonstrados através de gráfico que pode ser visto a seguir:

Gráfico 03: Resultado da 6º questão da avaliação diagnostica



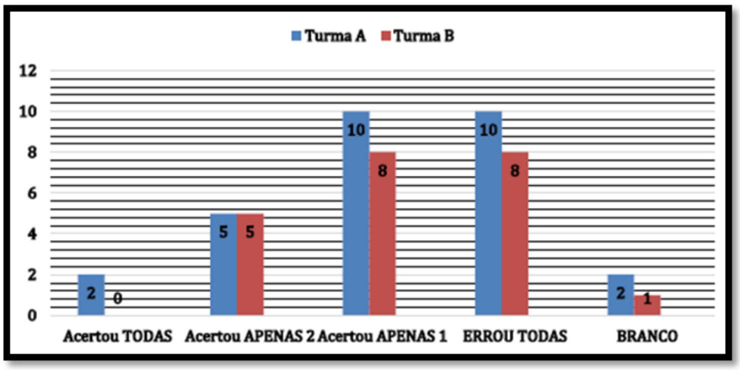
Fonte: Miranda (2016, p.59)

A pergunta de número 7 (sete) do questionário indagava os estudantes sobre as características do quadrilátero trapézio, onde os alunos deveriam marcar as respostas corretas dentre quatro alternativas, sendo que duas das respostas estavam corretas, uma sobre os ângulos, e outra referente ao paralelismo das bases.

Os resultados demonstraram que apenas uma pessoa de cada turma marcou as duas respostas corretamente, na turma A, 9 (nove) estudantes acertaram apenas a resposta de ângulos e 13 (treze) marcaram apenas a relacionada a lados. Já na turma B 6 (seis) estudantes marcaram certo a alternativa de ângulos e 5 (cinco) selecionaram a resposta de lados.

Por fim, a oitava pergunta da avaliação versava sobre as propriedades dos quadriláteros notáveis trabalhados durante o minicurso, em uma coluna tinha os nomes dos quadriláteros da letra A até a letra D e do outro lado outra coluna onde se colocaria as letras correspondentes as propriedades dos quadriláteros. Veja o gráfico obtido com as respostas a seguir.

Grafico 04: Resultado da 8º questão da avaliação diagnostica



Fonte: Miranda (2016, p.60)

Com as respostas obtidas a autora percebe um número considerável de erro dos estudantes, com isso comenta que o uso de materiais didáticos manipuláveis auxiliou nas concepções geométricas, todavia ainda existem lacunas de dificuldades em relação aos conceitos e propriedades de quadriláteros.

Assim Miranda (2016) expressa suas considerações indicando que os resultados mostraram que os estudantes tiveram um relativo aproveitamento com as atividades, especialmente a turma A. Em relação a aprendizagem ela foi significativa para compreensão da definição, dos elementos e das propriedades dos quadriláteros notáveis e que é bom ressalvar que o trabalho coletivo foi um diferencial para a realização das atividades.

Porém, destaca ainda que apesar dos bons resultados, lacunas conceituais não foram sanadas, sendo as dificuldades encontradas na escrita e no entendimento dos estudantes quando estavam diante da leitura de um enunciado aos moldes da linguagem padrão o que pode ter ocasionado uma leitura incorreta das perguntas e respostas das atividades.

Assim, foi encontrado apenas este trabalho no molde de um estudo diagnostico o qual, podemos inferir sobre o aproveitamento dos estudantes que participaram da pesquisa foi em certos aspectos satisfatório, sendo evidenciados pelas análises e os resultados encontrados, percebemos ainda que os estudantes tem um melhor aproveitamento no ensino quando submetido a uma metodologia bem planejada que adote matérias que possam ser manipulados por eles.

3.2. Estudos Teóricos

A pesquisa de Moura (2013) propôs uma alternativa no estudo de quadriláteros para os docentes, através da demonstração de relações, construções geométricas e resolução de problemas. Esta pesquisa foi apresentada no programa de mestrado profissional em Matemática (PROFMAT) e teve o objetivo de: "demonstrar as relações utilizadas para resolução de problemas ao propor atividades que envolvem conceitos, propriedades, teoremas e construções que podem se destacar como ferramenta de mediação pedagógica para a aprendizagem significativa dos conteúdos matemáticos".

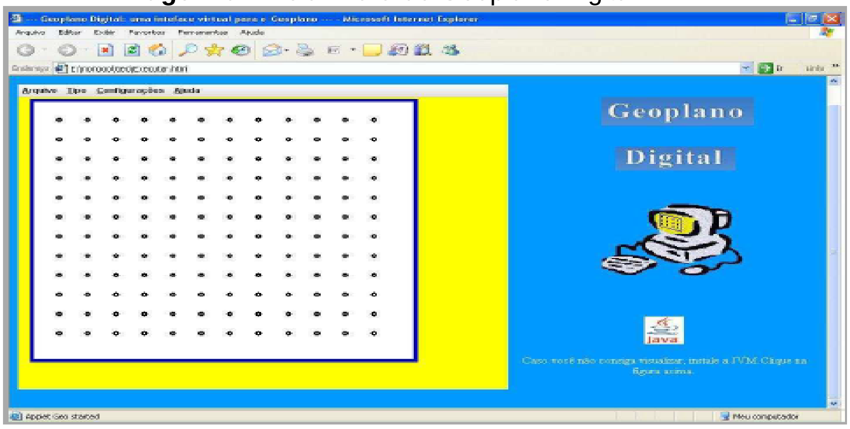
Para tentar alcançar este objetivo o trabalho começou comentando sobre as definições e teoremas de quadriláteros qualquer e dos quadriláteros notáveis, juntamente com construções geométricas utilizando régua compasso e o software Geogebra. Em seguida foi aprimorado o conceito geral dos quadriláteros convexos e a área dos quadriláteros notáveis e ainda é apresentado outras definições de quadriláteros. Posteriormente, enfatizou os quadriláteros inscritos e circunscritos. E por fim, apresenta uma serie de problemas resolvidos, que segundo o autor pode serve para os estudantes observarem a aplicabilidade dos quadriláteros.

Os estudos de Moura (2013) expressam que para o professor ter êxito nas atividades ele deve ter disponibilidade para preparar aulas, contando com no mínimo de 4 aulas semanais por turma para que os estudantes se aprofundem no assunto a ponto de discutir o conteúdo, para que em seguida o professor comece a resolução dos problemas.

Em suas considerações o autor comenta que este trabalho destacou há necessidade de se conhecer, entender, manipular e aplicar as definições e teoremas sobre quadriláteros, o que pode colaborar com o desempenho do estudante, pois desenvolve a capacidade de análise, o espirito crítico, a criatividade e os argumentos fundamentados.

O estudo teórico de Ferreira (2013) versa sobre a possibilidade do uso Geoplano Digital em sala de aula, sendo o objetivo desta pesquisa: “apontar um caminho diferente para o ensino de geometria, utilizando para isso o Geoplano digital como elemento mediador no processo de ensino aprendizagem”. Veja a imagem da tela do Geoplano Digital a seguir:

Imagem 01: Tela inicila do Geoplano Digital.



Fonte: Ferreira (2013, p.28)

Ou invés de uma metodologia com estatísticas, regras e outras generalizações foi utilizado uma pesquisa qualitativa. Deste modo o estudo teve a intenção de utilizar o Geoplano Virtual como um elemento mediador, onde são propostas algumas construções no “software” para a obtenção do conceito de área dos principais quadriláteros. Esta pesquisa como mencionado tem o caráter qualitativo, pois trabalha com descrições, comparações e interpretações dos dados.

Na conclusão do trabalho Ferreira (2013) expressa que a utilização do recurso digital pode produzir um meio eficaz para motivar o estudante a aprender o conteúdo, pois este recurso auxilia o mesmo, na construção de seu próprio conhecimento. E ainda que este trabalho indicou aulas dinâmicas, onde o estudante pode vir a ser o protagonista de sua própria aprendizagem.

Nos estudos de Cruz (2015) temos os resultados de uma investigação teórica apresentada para o Programa de Mestrado Profissional (PROFMAT) da UFRJ a respeito da congruência de polígonos em geometria neutra tomando os quadriláteros como referência, este trabalho explorou na introdução as tremendas contribuições de Euclides para a geometria e a controvérsia sobre o quinto postulado.

A pesquisa se subdividi em 4 (quatro) capítulos, no primeiro deles estão os casos de congruência de triângulos, no segundo são demonstrado dois casos gerais de congruências de polígonos, no 3º capitulo aparecem as demonstrações dos casos de congruência de quadriláteros, encerrando com o quarto capitulo com uma proposta de atividade voltada para o nono ano e ensino médio como o titulo Congruência de Quadriláteros.

Na conclusão do trabalho o autor comenta que a produção contribuirá na formação do professor de ensino básico, pois oferece uma abordagem factível relacionada a congruência, ou seja, que pode ser realizada, sendo diferente dos casos de congruência de triângulos rotineiramente tratadas na sala de aula de matemática. O autor reforça ainda que a união das atividades propostas junto com a utilização das tecnologias pode contribuir significativamente na formação dos estudantes, especialmente do nono ano do ensino fundamental e primeiro ano de ensino médio.

Com a análise destas 3 (três) obras que se adequaram a categoria de Estudos teóricos, podemos perceber que as abordagens realizadas pelos autores tem a intenção de um maior aprofundamento da teoria de quadriláteros, tendo em vista uma melhor percepção dos professores sobre o conteúdo o que pode ocasionar posteriormente uma melhor aprendizagem dos estudantes, pois segundo os autores encontrados a superficialidade dos conceitos e procedimentos podem acarretar um ensino defasado e sem muito aprofundamento.

3.3. Estudos Experimentais

O estudo de Amâncio (2013) traz duas questões norteadoras que são: como se dá o pensamento geométrico nos alunos? E, como os recursos didáticos podem contribuir para aprendizagem de polígonos, especialmente quadriláteros? Para tentar responder estas inquietações propôs como objetivo: “investigar como se dá o desenvolvimento do pensamento geométrico em alunos do 8º ano do Ensino Fundamental”, tendo como loco da pesquisa uma escola particular de Belo Horizonte.

A metodologia adotada por Amâncio (2013) se baseou em um estudo de casos de cunho qualitativo, ela teve seu desenvolvimento passando por quatro fases ou etapas. A 1º fase foi à revisão bibliográfica e a construção do quadro teórico, nesta etapa a autora faz uma revisão da literatura que contempla o desenvolvimento do pensamento geométrico, fazendo a análise em artigos, dissertações e teses e dentre as várias teorias lidas e analisadas se baseou predominantemente nos estudos de Pais (1996) e Fischbein (1993) e no decorrer dos estudos aumentou suas análises em materiais que abordaram sobres à história da geometria.

A 2º fase foi a de elaboração das atividades, sendo estas idealizadas tendo por base os autores pesquisados, com isso Amâncio (2013) buscou planeja-las utilizando diferentes recursos didáticos aliados a uma reflexão dos conceitos que seriam desenvolvidos no decorrer da aplicação. A 3º fase foi a de aplicação, para tanto, utilizou a observação sistemática, junto com o diário de campo e o registro dos alunos em gravações das aulas em áudio para coleta dos dados.

Na 4º fase, que foi a última, realizou a análise dos resultados, neste momento a autora fez um portfólio com as atividades realizadas, produzindo um quadro com as respostas dadas pelos estudantes, analisando também o diário de campo junto com as gravações, deste modo tudo que foi analisado objetivou compreender como os estudantes compreenderam ou deram novos significados dos conceitos de polígonos e quadriláteros.

Os resultados de Amâncio (2013) obtidos com a aplicação das atividades mostrou que a utilização de um variado número de figuras possibilitou uma maior reflexão dos estudantes em relação a conceitos como: ângulos vértices e lados. E a utilização de recursos como dobraduras, construções no geoplano e no geogebra contribuíram para que os estudantes descobrissem as propriedades dos polígonos em especial os quadriláteros, e ainda, um ponto positivo foi a interação dos estudantes nas aulas no decorrer das atividades.

O estudo de Almeida (2015) que teve o objetivo de: “Compreender as possibilidades de contribuições das TIC, em particular do Software Geogebra, na organização e no desenvolvimento da prática docente dos professores do 1º ao 5º ano do ensino fundamental, no ensino e aprendizagem de quadriláteros”.

Esta pesquisa teve uma metodologia pautada em uma abordagem qualitativa e quantitativa onde foi bem definida a fonte de informação sendo o espaço formal de educação. Os dados foram obtidos analisando as falas e fazendo observações, tudo isso em uma oficina de formação continuada para professores do 1ª ao 5º ano do ensino Fundamental da Rede Escolar Pública Municipal localizada em Formigueiro/RS.

O estudo contou com a participação de 16 professores da rede municipal de Formigueiro/RS, sendo que isto ocorreu após o contato com a secretaria de educação para a mesma ter ciência do objetivo da pesquisa. Continuando, foram entrevistados 06 professores e aplicado um questionário para os outros 06 em um primeiro momento, as outras professoras por algum motivo não forma entrevistados ou não responderam o questionário. Em resumo, os instrumentos de coletas de dados formam o questionário a entrevista, comentadas anteriormente e a observação no momento da oficina de formação continuada.

Os resultados alcançados por Almeida (2015) em relação a primeira etapa da pesquisa que foi a entrevista e o questionário mostraram que os docentes que participaram são todos do sexo feminino atuando em uma única escola e possuem uma experiência de 14 anos em média. A maioria, 9 (nove) das professoras é licenciada em pedagogia, uma licenciada em espanhol, outra em formação de nível médio modalidade normal e uma com apenas o ensino fundamental completo.

Em relação ao desenvolvimento do ensino de matemática na formação inicial das professoras participantes da pesquisa, a maioria respondeu que existe uma relação entre teoria e prática, com a utilização de jogos e materiais concretos. Na participação em cursos e oficinas de formação continuada, nos 5 anos só participaram de uma formação disponibilizada pela secretaria de educação.

No que tange o ensino de matemática e geometria nos anos iniciais do ensino fundamental as repostas das professoras mostraram que a matemática é importante, pois viabiliza a construção de novas perspectivas para a prática pedagógica. E sobre o ensino de geometria, responderam que nesta etapa de ensino deve ser ensinado, porém não ficou claro em que momento. E os livros didáticos também foram abordados, ficou claro que este recurso didático é utilizado conjuntamente com materiais manipuláveis, ou seja, o ensino está muito próximo do tradicional para este tópico.

Na oficina de formação continuada, Almeida (2015) tinha os seguintes objetivos: identificar e compreender as diferentes concepções dos professores sobre quadriláteros; identificar e compreender as diferenças e semelhanças entre os quadriláteros; classificar os quadriláteros de acordo com suas características; elaborar sínteses a partir das discursões coletivas realizadas. Os resultados mostraram que a 9 (nove) atividades foram feitas dentro do esperado tem em vista o alcance dos objetivos descritos acima.

Deste modo, Almeida (2015) conclui seu trabalho expressando suas considerações, primeiramente um ponto negativo que é em relação a formação continuada, que pela pesquisa se observou são poucas, ofertadas apenas pela prefeitura do município e em relação a formação especifica sobre matemática e sobre conteúdos específicos como a geometria são inexistentes. Porém foi observado que os professores pesquisados trabalham com materiais concretos e manipuláveis quando ensinam geometria, mesmo não tendo a formação continuada adequada.

Assim a autora afirma que o objetivo da pesquisa foi alcançado, pois ao final da oficina os professores puderam consolidar o aprendizado das propriedades de quadriláteros e ainda identificar suas principais características, contribuído de forma indireta na formação dos estudantes. E isso se deveu principalmente, segundo Almeida (2015) pela utilização da Tecnologia da informação e comunicação (TIC), aqui vista com a utilização do Software Geogebra, o qual pode contribuir com a organização e o desenvolvimento da prática docente no ensino de quadriláteros.

O estudo de Damião (2015) tem o seguinte objetivo, detectar se, os vinte e cinco alunos do oitavo ano da turma *C*, teriam maior desempenho com aulas teóricas em sala de aula e aulas práticas no laboratório de informática sobre os quadriláteros notáveis em comparação com os alunos do oitavo ano *D*, onde terão apenas aulas teóricas.

O trabalho teve como loco uma Escola de ensino fundamental e médio, situado em Fortaleza-Ceará, e contou com a participação de 2 (duas) turmas, o 8º ano C, com 25 alunos e o 8º D, com 26 alunos. De primeiro foi ministrada para as duas turmas aulas teóricas sobre o Software Geogebra e somente para os alunos do 8º C foi apresentado o Geogebra com explicações de comandos que seriam necessários para fazer as atividades, segundo o autor forma necessárias 10 aulas para que os estudantes manuseassem satisfatoriamente o programa.

Na continuação Damião (2015) expressa seus resultados não demonstrando como se passou a oficina que teve a utilização do geogebra, coloca apenas o local, as turmas, a justificativa para a escolha da amostra e a quantidade de aulas para a utilização do programa. Os resultados em si, foram divulgados como sendo positivos em relação a interação dos alunos com o assunto e o Geogebra, coloca que o aproveitamento da turma que estudou a teoria e a prática foi muito maior que aquela que só teve a teoria com subsidio. Porém ele não coloca como foi feita a avaliação para chegar e este resultado.

O autor conclui seu trabalho comentado que obteve sucesso na intencionalidade de instigar a curiosidade dos alunos e estimulá-los na comunicação com o *Software*. Os alunos em questão apresentaram-se confortáveis em percorrer menus, fazer construções voluntárias, movimentar objetos, questionar, gravar e tomar decisões, permitindo-se desfazer no momento que o resultado não era o esperado ou programado.

Ferreira (2016) realizou seus estudos sobre a organização didática que aproxima o aluno de licenciatura das demonstrações geométricas, e tem o seguinte objetivo desta tese: "elaborar, aplicar e analisar uma organização didática que permita minimizar as dificuldades de alunos de licenciatura em matemática em uma Universidade do Estado da Bahia em compreender demonstrações geométricas, bem como criar condições para que estes futuros professores desenvolvam competências que possam interferir em suas práticas docentes".

Utilizou como metodologia de pesquisa a engenharia didática baseada nos trabalhos de Artigue (1996), optando por realizar uma investigação didática baseada em um trabalho experimental. A pesquisa foi desenvolvida em uma universidade dos estados da Bahia, e os participantes da pesquisa foram estudantes do curso de licenciatura em matemática.

Em relação aos aspectos teóricos metodológicos a autora utilizou também a teoria antropomórfica da didática tendo como autor Chevallard (1999), a Teoria das situações didáticas de Brousseau (1986) e a Teoria dos registros de representação semiótica de Duval (2009).

Os resultados mostraram que a forma que as demonstrações são trabalhadas na formação inicial tem reflexos na atuação do professor futuramente, e que a formação inicial não está dando conta de formar professores com autonomia para ensinar demonstração a seus futuros estudantes, mostrou ainda, que os estudantes tem dificuldades na passagem do empírico para o dedutivo, e mais, os estudantes de licenciatura em matemática acreditam que validações empíricas podem generalizar conjecturas e eles praticam provas exclusivamente com função de validação.

A autora conclui seus estudos observando que os desafios enfrentados na pesquisa formam determinantes para uma maior reflexão quanto a prática docente, e que a utilização da sequência didática foi proveitosa, pois permitiu minimizar as dificuldades em compreender as demonstrações em geometria. Com isso a autora encerra seu trabalho colocando sugestões para pesquisas futuras como as seguintes questões: qual seria a influência destes estudos sobre as futuras práticas docentes desses alunos que participaram desta investigação? E qual seria a influência da prática de professores sem formação em educação matemática sobre o ensino e aprendizagem de geometria nos cursos de licenciatura?

Em Gabriel (2017) temos os resultados de uma pesquisa que teve o objetivo de: “compreender como uma sequência didática, apoiada na teoria das situações didáticas, pode contribuir para o ensino de Geometria – Quadriláteros – no Ensino Fundamental II”. Utilizou como metodologia uma sequência didática, baseada na noção da Teoria das situações Didáticas, sendo a pesquisa de natureza qualitativa na qual foram analisados os diálogos dos alunos, as resoluções e escritas e os comportamentos dos alunos.

A pesquisa foi realizada em uma turma regular de 7º ano do Ensino fundamental localizada em uma escola pública do município de Fartura, estado de São Paulo, e após um levantamento das pesquisas que versão sobre o ensino de quadriláteros, deste modo foi realizada uma sequência didática. A coleta dos dados foi feita através de fotos, gravações de áudio, anotações (diário de campo) e documentos elaborados pelos alunos.

Após ter realizado da sequência didática, o autor expressa seus resultados, indicando que a dinâmica das aulas estimulou os adolescentes, os quais demonstraram atitudes de colaboração, socialização e interação. E mais, comenta que o trabalho com o lúdico e com os jogos nas aulas de matemática não permitiu uma atitude passiva dos alunos diante das atividades.

Por fim, Gabriel (2017) conclui a pesquisa comentando que a sequência proporcionou aos estudantes refletir, simular processos e realizarem tentativas ao se depararem com um problema, formulando hipóteses para resolvê-lo. E também oportunizou a realização de justificativas para validarem seus raciocínios. Como sugestão ele comenta que embora não utilizou tecnologia para a realização das atividades, acredita que sua utilização pode servir como objeto de estudo para produções futuras.

Em Arinos (2018) temos os resultados de uma pesquisa que teve como objetivo: “investigar aprendizagens por alunos do quinto e sexto ano do Ensino Fundamental diante de uma situação envolvendo representações semióticas diversa na abordagem das áreas de triângulos e quadriláteros”. A pesquisa foi implementada no contra turno escolar com estudantes do 5º e 6º anos do Ensino Fundamental de uma escola privada de Campo Grande/MS.

A metodologia utilizada foi da Engenharia didática, a qual se desenvolve em quatro etapas, a saber: análises prévias, concepção e análise a *priori,* experimentação, análise a *posteriori* e validação. Nas atividades produzidas forma exploradas figuras geométricas por meio de tratamentos de figuras, e recodificação. Os principais registros mobilizados foram o figural, os numéricos e a língua materna. No que diz respeito a coleta de informações foram feitas através de análises de protocolos, análises de áudio e análises de vídeo. A fundamentação teórica foi dos registros de representação semiótica de Duval.

Os resultados da pesquisa mostraram que a utilização de diferentes registros proporcionou um ambiente agradável e desafiador, onde foi oportunizada a aprendizagem por meio dessas diferentes transformações de representações. Isso deu a possibilidade para os estudantes desenvolvessem seu modo de pensar e olhar para a figura geométrica e raciocinar. Em relação as atividades desenvolvidas no Geoplano ela foi válida, pois permitiram que os alunos olhassem as figuras em diferentes posições, desse modo poderiam realizar tratamentos figurais e numéricos e com isso produzir diferentes soluções.

Os resultados mostraram ainda que nas atividades que necessitaria do emprego de fórmulas foram mais difíceis do que as atividades com construções. Deste modo a autora comenta que primeiramente os estudantes exploraram as construções das figuras, para depois utilizar a fórmula como forma de valida-las em outro registro.

Com isso, Arinos (2018) conclui sua pesquisa comentando que durante a aplicação das atividades os estudantes puderam transitar pelos diferentes registros, o que foi válido, pois os mesmos puderam compreender os raciocínios, fazendo questionamentos para a superação de dificuldades, visando a utilização de diferentes estratégias para determinar as áreas de triângulos e quadriláteros. Como sugestão para pesquisas futuras Arinos (2018) comenta que poderiam ser feitos estudos no qual os professores pudessem pensar em atividades para propor para os alunos para a exploração de diferentes registros que valorizassem as apreensões e os novos olhares em relação a matemática.

Em Costa (2016) são apresentados os resultados de uma pesquisa que teve o objetivo de: “analisar os efeitos de uma sequência didática para a construção do conceito de quadriláteros notáveis, utilizando o *software* de Geometria Dinâmica Geogebra como recurso didático”. A pesquisa teve a sustentação teórica na teoria de Van-Hiele para o desenvolvimento do pensamento geométrico. A pesquisa foi realizada com 30 alunos de uma turma de sexto ano do ensino fundamental de uma escola da rede pública da cidade de Recife capital do Estado de Pernambuco.

A abordagem metodologia da pesquisa foi uma replicação da pesquisa de Câmara dos Santos, onde foram aplicados os pré-testes a sequência didática e o pós- teste. Porém diferente do estudo este autor, o trabalho de Costa (2016) estava interessado em analisar os efeitos de uma sequência didática nos níveis de pensamento geométrico de Van-Hiele. E ainda foi utilizado o Software Livre Geogebra como recurso para o desenvolvimento da sequência didática.

Os resultados mostraram que ouve um aumento significativo nos percentuais de acertos dos estudantes no pós-teste em comparação ao pré-testes. E em relação a sequência didática produzida no Geogebra e os níveis de Van-Hiele, os resultados produzidos mostraram que alguns alunos passaram do primeiro nível para o segundo nível.

Por fim, Costa (2016) conclui comentado que os objetivos traçados na pesquisa foram alcançados, porém algumas questões poderiam ser refinadas e reformuladas com estudos posteriores. E ainda, expressa que a pesquisa se centrou nos níveis iniciais de Van-Hiele e como sugestão para estudos os pesquisadores poderiam realizar uma análise dos efeitos didáticos do Geogebra para o desenvolvimento do pensamento dedutivo.

O trabalho de Fernandes (2014) demonstra os resultados de uma pesquisa que teve como objetivo: “avaliar que ganhos de conhecimento geométrico, que estudantes poderiam obter quando foram utilizadas atividades propostas em pesquisas baseadas na teoria de Van Hiele sobre o desenvolvimento do pensamento geométrico”.

A pesquisa se desenvolveu em uma turma de 9º ano do ensino fundamental da rede municipal de Mangaratiba/SP e está, foi separada em duas, a Turma A e a Turma B, onde foi aplicado inicialmente um pré-teste para averiguação do nível de conhecimento geométrico dos estudantes. Na turma A, foram trabalhadas as atividades sobre quadriláteros e isometria de reflexão e rotação, de forma diferenciada a qual faz parte da proposta deste estudo e na turma B, os conteúdos foram desenvolvidos utilizando a metodologia tradicional de ensino.

Os resultados do pré-teste mostraram que o nível de Van-Hiele que os estudantes estavam o que possibilitou à divisão da turma inicial, com isso a turma A foi escolhida para o grupo Experimental e a turma B o grupo de Controle. Após a realização das atividades foi realizado o pós-teste e em seguida foi feito uma comparativo entre o pré-teste e o pós-teste.

Os resultados evidenciaram que a turma A que era o grupo experimental obteve resultados mais expressivos se comparado a turma B de controle, seja nos níveis de Van-Hiele, seja no conhecimento em isometria.

A autora conclui comentando que a utilização da Teoria de Van Hiele possibilitou uma melhoria na compreensão dos conceitos geométricos dos estudantes se comparado ao ensino de forma tradicional. Porém comenta que mesmo utilizando essa nova abordagem alguns estudantes caíram em relação aos níveis, com isso sugere que seria possível obter melhores resultados com um espaço amostral maior, pois o estudo contou com uma amostra de apenas de 35 estudantes.

Deste modo a análise da categoria dos Estudos Experimentais o qual achamos extremamente interessante, pois a nosso ver é uma categoria que da uma noção global de uma pesquisa cientifica, não desmerecendo as outras abordagens, mas mostra toda uma trajetória linear para a obtenção dos dados, para análise de resultados e conclusões. Assim observamos também que as metodologias adotadas forneceram aos estudantes participantes uma nova forma de ensino muito diferente do ensino aos moldes tradicionais, muito mais planejados e sistematizados.

3.4. Análise Global da Revisão de Estudos

Após termos transitado por todas as categorias, isto é, os estudos teóricos, os estudos diagnósticos e os estudos experimentais, nós percebemos que de uma forma geral seus resultados convergem para a tentativa de melhoria do ensino e da aprendizagem de quadriláteros, o qual poderá ser alcançado com a utilização de novas metodologias como as que formam demonstrados nos trabalhos aqui revisados.

Nós estamos convencidos que estás abordagens metodológicas podem não acabar com os desafios que se apresentam no caminho do ensino e da aprendizagem de matemática, porém seus entraves podem ser minimizados, pois acreditamos que as pesquisas estão no caminho certo. E que a utilização de materiais concretos relacionados ao cotidiano dos estudantes em conjunto com as tecnologias poderá favorecer este percurso.

E ainda podemos comentar que os docentes possuem um papel fundamental para a melhoria do ensino de matemática, pois o mesmo deve dispor de tempo para planejamento de suas aulas inovando a cada dia em suas práticas pedagógicas, utilizando metodologias que priorizem a assimilação do conhecimento pelo discente de forma prazerosa e duradora.

Com isso ressaltamos que os estudos aqui revidados favoreceram um melhor envolvimento dos estudantes com o conteúdo de geometria, especificamente os quadriláteros, tendo uma maior interação entre os entes participantes da aprendizagem, ou seja, professor e o estudante. Deste modo, nos apoiando no que foi produzido por nossos pares professores, podemos acreditar em futuras pesquisas que tragam novas metodologias para se tentar melhorar ainda mais o ensino de geometria e da matemática de uma forma geral.

5. ASPECTOS HISTÓRICOS DOS QUADRILÁTEROS

De acordo com Eves (2011) a geometria babilônica no período de 2000 a.C. à 1600 a.C. era relacionada a mensuração prática, onde o homem utilizava suas regras, até então descobertas para resolver problemas do dia-dia. Este autor comenta que foram encontrados inúmeros exemplos mostrando a familiarização deste povo com as regras da área do retângulo, da área do triângulo retângulo e dos triângulos isósceles, além da área de quadriláteros com o trapézio retângulo.

O povo babilônico considerava uma circunferência como o triplo de seu diâmetro e a área do circulo como um duodécimo da área do quadrado de lado igual à circunferência respectiva (regras corretas para o valor de pí igual a 3) e se obtinha o volume de um cilindro circular reto como o produto da base pela altura. Está civilização também tinham conhecimento de que os lados correspondentes de dois triângulos retângulos semelhantes são proporcionais, que a perpendicular baixada do vértice de um triângulo isósceles em que incidem os lados congruentes divide ao meio a base e que um ângulo inscrito numa semicircunferência e reto (EVES, 2011). Fato geométrico interessante atribuído aos babilônicos antigos é a divisão da de um circulo em 360 partes iguais.

> Nos remotos tempos dos sumérios, existia uma unidade de medida grande, uma espécie de milha babilônica, igual a sete das milhas atuais. Como a milha babilônica era usada para medir distâncias mais longas, era natural que viesse a se transformar numa unidade de tempo, a saber, o tempo necessário para se percorrer uma milha babilônica. Mais tarde, talvez no primeiro milênio a.C., quando a astronomia babilônica atingiu o estagio de manter registros sistemáticos de fenômenos celestes, a milha-tempo babilônica foi adotada para a mensuração de espaços de tempo. Como se determinou que um dia era formado de 12 milhas-tempo, e um dia completo equivale a uma revolução do céu, dividiu-se um ciclo completo em 12 partes iguais. Mas, por conveniência, a milha-tempo babilônica fora dividida em 30 partes iguais. Dessa forma chegamos a (12).(30) = 360 partes iguais num ciclo completo (EVEN, 2011. p.62).

Dentre as descobertas sobre a civilização babilônica uma das mais analisadas é a Tabua matemática conhecida como *Plimpton 322*, ela tem este nome pois, o artefato faz parte da coleção *G. A. Plimpton* da Universidade de Colúmbia sendo sua catalogação com número 322. Os estudos mostraram que ela foi escrita provavelmente no período da Babilônia Antiga entre 1900 e 1600 a.C e provavelmente já teria sido encontrada antes de fazer parte do acervo pois, foram encontrados vestígios de uma espécie de cola moderna para tentar juntar os seus pedaços o que ocasionou perdas de partes desta tábua, e após nova descoberta isso foi confirmado, porém os estudos mostraram que os números que aparecem gravados corresponde a catetos e hipotenusas de triângulos retângulos de lados inteiros (EVEN, 2011). Este fato mostra que já neste período está civilização já tinha conhecimento de cálculos geométricos. Logo a seguir vemos a imagem da Tabua *Plimpton 322,* com as marcas registradas encontradas e decifradas pelos estudiosos.

Imagem 02 – Plimpton 322: A primeira tabela trigonométrica do mundo

Fonte: Mansfield e Wildberger (2017)

As pesquisas mostraram que o artefato não era um simples texto escolar de escribas, com alguns estudiosos suponham, mas se trata de uma tabela trigonométrica, com uma matemática tão complexa que estava muito a frente de seu tempo, se assemelhando com os triplos pitagóricos. (MANSFIELD e WILDBERGER, 2017). Deste modo podemos especificar que está tabua é o artefato mais antigo sobre a geometria da Babilônia, mostrando que os conhecimentos geométricos faziam parte do cotidiano desta civilização.

Muito depois o Egito antigo era uma celeiro de muitos avanços na matemática e na engenharia, porém sabe-se hoje que sua grandeza nestas áreas era muito inferior as da Babilônia antiga. Mas, como o povo egípcio era uma povo isolado e tinham a cultura de veneração dos mortos muitos artefatos valiosos incluindo papiros matemáticos foram preservados mostrando a cultura intelectual deste povo.

Um exemplo desta destreza na engenharia e na matemática pode ser visto na grande pirâmide de Giré. Esta obra construída por volta de 2600 a.C, sem dúvida envolvia alguns problemas de matemática e engenharia. A estrutura cobre uma área de aproximadamente 52611 metros quadrados e contém mais de 2 milhões de blocos de pedras com, em média, 2,5 toneladas de peso cada um, ajustados entre sí muito cuidadosamente. (EVES, 2011).

Como podemos perceber a imensa estrutura tinha que ser planejada pois, as pedras eram trazidas de uma pedreira situada a 600 milhas de distância, sendo que uma milha equivale a 1609 metros, resultando em aproximadamente 965,4 km de distancia, porém está engenhosidade é duvidosa se percebermos que a tarefa foi realizada por um exército de 100.000 trabalhadores num período de 30 anos. (EVES, 2011).

Especificamente no campo da matemática temos a evidência do papiro Rhind (ou Ahmes), um texto matemático na forma de um manual prático que contém 85 problemas copiados em escrita hierática pelo escriba Ahmes de trabalhos mais antigo.(EVES, 2011, p.70)

> O papiro foi encontrado no Egito pelo egiptólogo A. Henry Rhind, sendo mais tarde comprado pelo Museu Britânico. Estes papiro e o papiro Moscou são as principais fontes de informação referente a matemática egípcia antiga. O papiro Rhind e uma fonte primaria rica sobre a matemática egípcia antiga; descreve os métodos de multiplicação e divisão dos egípcios, o uso que faziam das frações unitárias, seu emprego da regra de falsa posição, sua solução para o problema da determinação da área de um circulo e muitas aplicações da matemática a problemas práticos. (EVES, 2011, p.71)

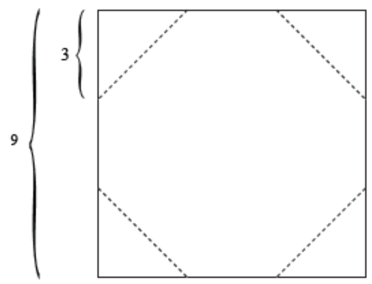
Veja a seguir parte deste papiro que está exposto no Museu Britânico demonstrado quase todos os 85 problemas matemáticos decifrados pelos estudiosos.

Imagem 03 – Papiro de Rhind — Museu Britânico

Fonte: Mol (2013, p.22)

Um dos problemas que está contido no Papiro de Rhind que podemos comentar tratar, do cálculo da área de um círculo obtido aproximando-se uma octógono inscrito em um quadrado. Sendo este quadrado de lado 9, cada um dos seus lados é recortado em três partes iguais e os triângulos das extremidades são retirados formando uma octógono regular de lado 3, observe a imagem a seguir que explica o procedimentos do problema 48 contido no Papiro Rhind o qual chega ao valor aproximado de pí.

Imagem 04 – Explicação do problema 48 do Papiro Rhind.



Assim, a área do octógono é $A = 9^2 - 4 \times (1/2)3^2 = 63$. A área é em seguida aproximada por 64. Podemos, a partir dessa aproximação, calcular o valor de π:

$$\pi \left(\frac{9}{2}\right)^2 \approx 64 = 8^2 \;\Rightarrow\; \pi \approx \frac{216}{81} = 3,1605.$$

Fonte: Mol (2013, p.23)

A matemática egípcia era extremamente prática para a solução de problemas do dia-a-dia, a exemplo temos a inundação das margens do rio Nilo em certas épocas do ano. Por meio de tentativa e erro e aproximações os métodos práticos eram encontrados quando se mostravam eficazes do ponto de vista da aplicação. Com isso, essa civilização conseguia calcular áreas de figuras retilíneas como o quadrado, o triângulo e o trapézio. O problema 51 é um exemplo da engenhosidade deste método ele vem tratar do calculo da área do triângulo isósceles tomando a metade da base multiplicada pela altura:

> A justificativa apresentada é de que o triângulo isósceles pode ser pensado como dois triângulos retos que, ao serem justapostos, formam um retângulos. Como vimos os egípcios usam a aproximação $\pi = (16/9)^2$ para calcular a área do circulo. Multiplicavam a base pela altura para calcular o volume do cubo, do prisma e do cilindro, e usavam a formula $V = (1/3)Ah$ para calcular o volume da pirâmide. Todas essas formulas envolvendo área e volume eram empregadas no calculo de quantidade de material necessário na construção de monumentos (MOL, 2013, p.24)

Nós podemos ressaltar ainda outro documento egípcio antigo com valiosos conteúdos matemático que é chamado de Papiro de Moscou. Sua descoberta foi realizada pelo egiptólogo russo Vladimir Golenishchev no final do século XIX, se comparado ao Papiro Rhind este outro é menor em tamanho, possui apenas 25 problemas todos com soluções. Especificamente o problema 14 do Papiro de Moscou mostra o método para calcular o volume (V) do tronco de pirâmide de base quadrada com dimensões dadas. (MOL, 2013)

Podemos ver abaixo a fórmula atual que conhecemos que se encontra no papiro em questão, veja imagem abaixo.

Imagem 05 – Fórmula atual do tronco de pirâmide, que está de acordo com problema 14 do Papiro de Moscou.

$$\boxed{V = (1/3)(a^2 + ab + b^2)h,}$$

Fonte: Mol (2013, p.23)

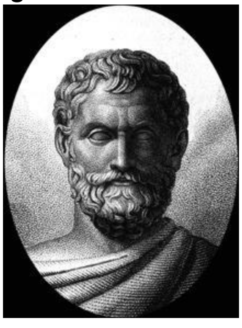
De acordo com Mol (2013), o documento não expressa qualquer referência de como essa fórmula foi encontrada. Contudo, se considerarmos a complexidade de tal expressão, dificilmente ela teria sido demonstrada de forma empírica, sendo que os estudiosos supõem que para se chegar a tal fórmula foram realizados vários trabalhos teóricos anteriores a datação do Papiro Moscou que é de cerca de 1850 a.C.

Para continuação passaremos a comentar sobre a civilização grega que teve grande importância para a evolução da matemática, neste período houve uma drástica mudança no centro do pensamento no mundo, não mais localizado as margens dos grande rios, Tigre, Eufrades (Mesopotâmia) e Nilo (Egito), mas agora estava situado as margens do mar Mediterrâneo. A cidade de Mileto (Turquia atualmente), foi a principal cidade grega no século VI a.C, no entanto, o ápice da civilização grega foi nos séculos V e IV a.C, com Atena sendo a capital. Após as conquistas de Alexandre, o Grande, entre 334 e 327 a. C, Alexandria foi o centro do pensamento matemática na época e Alexandre um dos guardiões da cultura grega até sua tomada pelos mulçumanos em 146 a.C e posteriormente pelos romanos em 30 a.C (MOL, 2013).

O que teve mais destaque para a matemática grega foi sua evolução, deixando de ser uma coleção de resultados empíricos para uma matemática sistematizada e organizada através de elementos racionais. Diferente da Mesopotâmia e do Egito, onde tínhamos uma matemática ligada ou caráter prático e concreto, na Grécia ela passou a ser essencialmente abstrata, se desligando de uma mera aplicação prática de seus conceitos. Agora, suas demonstrações levavam em considerações argumentos puramente racionais, com a introdução destes elementos novos os gregos orientaram a evolução desta ciência nos séculos posteriores (MOL, 2013).

Vejamos agora quais matemáticos gregos que se destacaram nesta civilização e os que mencionaram quadriláteros em seus estudos sendo estes, os que influenciaram os principais conceitos e propriedades relacionados a geometria atual.

Imagem 06: Tales de Mileto.



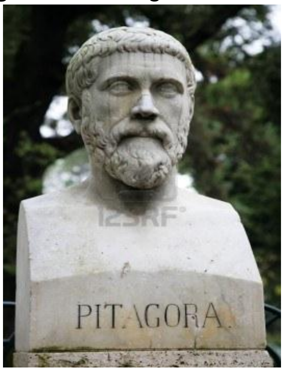
Fonte: Mol (2013, p.23)

Tales de Mileto (624- 546 a. C), considerado pelos estudiosos como um dos "sete sábios" da Antiguidade, foi um mercador que fez fortuna, dando a possibilidade quando com idade mais avançada se concentrar as estudos. Devido a suas atividades comerciais fez inúmeras viagens ao Egito onde ele ficou fascinado pelas pirâmides e propôs o cálculo de suas alturas através das sobras que estes monumentos projetavam. Além de matemático Tales era estadista, conselheiro, engenheiro, homem de negócio, filosofo e astrônomo. Ele foi o primeiro personagem a quem se atribui descobertas matemáticas, em geometria foi responsável pelos seguintes resultados. Veja os teoremas.

- Todo círculo é dividido em duas partes iguais por seu diâmetro.
- Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais.
- O ângulo inscrito em um semicírculo é reto.
- Quando duas retas se interceptam, os ângulos opostos são iguais.
- Os lados de triângulos semelhantes são proporcionais.
- Dois triângulos são congruentes se possuem dois ângulos e um lado iguais.

Hoje se sabe que alguns desses resultados já haviam sidos descobertos muito antes pelos babilônicos e os egípcios, porém foram atribuídos a Tales, bem como as primeiras tentativas de demonstra-los. Com Tales houve uma mudança na maneira de estudar a geometria, antes dele a geometria tinha seu foco no caráter prático se limitando a procedimentos numéricos para resolução de problemas particulares sem a preocupação filosófica da matemática envolvida e sua estrutura intelectual. Deste modo, a Tales de Mileto atribui-se a primeira ação no sentido de organizar a geometria como estudo abstrato e dedutivo.

Imagem 07: Pitágoras de Samos.



Fonte: Mol (2013, p.23)

Após Tales de Mileto o próximo matemático que se destacou foi Pitágoras de Samos (570 – 495 a.C). Nascido em Samos, próximo a Mileto, acredita-se que Pitágoras possivelmente teria sido discípulo de Tales, na sua juventude viajou para uma cidade chamada Crotona nos sudeste da Itália e lá formou uma irmandade secreta de cunho religioso, filosófico e cientifico, uma escola de pensamento onde se misturavam o raciocínio grego junto com um misticismo acentuado.

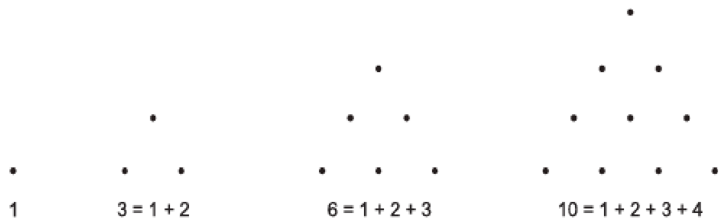
Do mesmo modo como Tales não existem obras originais de Pitágoras e seus seguidores, o que se sabe foi compartilhado por outros que lhe sucederam. Uma dos motivos para isso se deve a maneira como se dava a transmissão do conhecimento, feita de forma ora como era a tradição grega, ocasionados poucas produções escritas.

Algo interessante sobre a escola pitagórica era o destaque a quatro campos de saberes: a aritmética, a musica, a geometria e por fim a astronomia. Para os pitagóricos a concepção do universo era de maneira aritmética, ou seja, todas a coisa eram números. Os números eram os elementos básicos da filosofia pitagórica, considerados como entes místicos e objetos de devoção, os números tinham características e personalidade.

- O número um é a essência do número, o gerador de todos os outros números é o número da razão; nele está a origem de todas as coisas e do divino.
- O número dois é o primeiro número par ou número feminino, o número da opinião.
- O número três é o primeiro número masculino, o número da harmonia.
- O número quatro é o número da justiça.
- O número cinco é o número do casamento, por ser a união dos primeiros números feminino e masculino.
- Um lugar sagrado é reservado ao número dez ou *tetractys*. Ele é considerado o número do universo, por ser a soma das dimensões geométricas: um ponto, que é o gerador de todas as dimensões; dois pontos, que determinam uma reta de dimensão um; três pontos não alinhados, que determinam um triângulo de dimensão dois; e, por fim, quatro pontos não contidos em um plano, que determinam um tetraedro de dimensão três. Desse modo, o número dez, que nos primórdios da evolução matemática nasce do método de contagem com os dedos, é produzido pelos pitagóricos por um processo puramente abstrato (MOL, 2013, p.33).

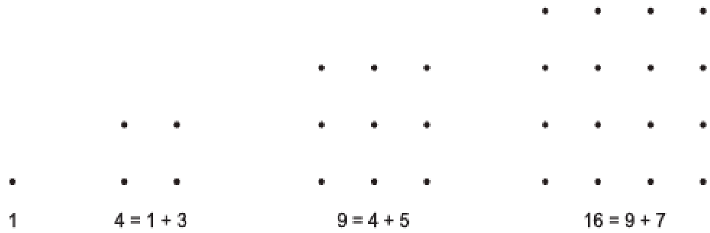
Em relação a geometria esses números formavam padrões especiais, ou seja, famílias de números como formatos geométricos. Eram denominados de números triangulares, quadrados pentagonais e assim por diante, a medida que iam se juntando formavam a figura que era sua denominação. Veja os exemplos destes números a seguir.

Imagem 08: Números Triangulares



Fonte: Mol (2013, p.35)

Imagem 09: Números Quadrados



Fonte: Mol (2013, p.35)

Além desta representação geométrica para os números os pitagóricos em relação a aritmética e geometria ficaram conhecidos graças ao famoso teorema que leva o nome de Pitágoras, $b^2 + c^2 = a^2$. Atualmente sabe-se que tal resultado já era conhecido na geometria da Mesopotâmia e do Egito, além disso, segundo Mol (2013, p.34), “não existem evidências de que Pitágoras e seus seguidores tenham trabalhado nesta relação”. Ainda em relação as produções matemáticas atribuídas a Pitágoras muito do que a ele é conferido provém de estudos da antiguidade clássica. Veja algumas produções da escola pitagóricas.

1. O teorema de Pitágoras. Num triângulo retângulo: "a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa". Embora esse resultado e os triplos pitagóricos fossem conceitos já conhecidos e usados pelos matemáticos babilônicos e indianos há muito tempo, os pitagóricos foram os primeiros a enunciar uma prova formal do teorema; essa demonstração é a encontrada em Os elementos de Euclides. Eles também provaram o inverso do teorema: "se os lados de um triângulo satisfazem a equação, então o triângulo é retângulo".

2. Sólidos perfeitos. Os pitagóricos provaram que existem apenas 5 poliedros regulares. Acredita-se que Pitágoras soube construir os três primeiros (ou quatro), mas foi o Hipaso de Metaponto (470 a.C.) que descobriu o dodecaedro.

3. Ângulos internos de um triângulo. Eles descobriram que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a dois retos, bem como a generalização desse resultado para polígonos de n lados.

4. Um triângulo inscrito em um semicírculo é um triângulo retângulo. Proposta de origem pitagórica (de acordo com Diógenes).

5. A irracionalidade da raiz quadrada de 2. Os pitagóricos descobriram que a diagonal de um quadrado do lado 1 não pode ser expressa como um quociente de números inteiros. Este evento marca a descoberta de números irracionais.

Após Pitágoras e sua irmandade pitagórica com suas descobertas e pensamentos que fizeram um grande diferença na matemática, podemos destacar os trabalhos notáveis de Euclides que o fizeram ser denominado “Pai da Geometria”.

Pouco se sabe sobre a vida de Euclides, porém deste celebre matemático é conhecido que viveu em Alexandria, Egito, por volta de 300 a.C., onde foi chamado para ensinar matemática no Instituto criado por Ptolomeu I. Fez vários trabalhos, em uma contagem de 10 obras, das quais, cinco chegaram até nós, mas sua fama foi alcançada com seu trabalho *Os Elementos*. Contudo, esta obra famosa chegou até os dias atuais a partir de traduções realizadas e encontradas em Alexandria cerca de 700 anos depois de Euclides, deste modo, a obra original feita por Euclides não fora visualizada, com isso.

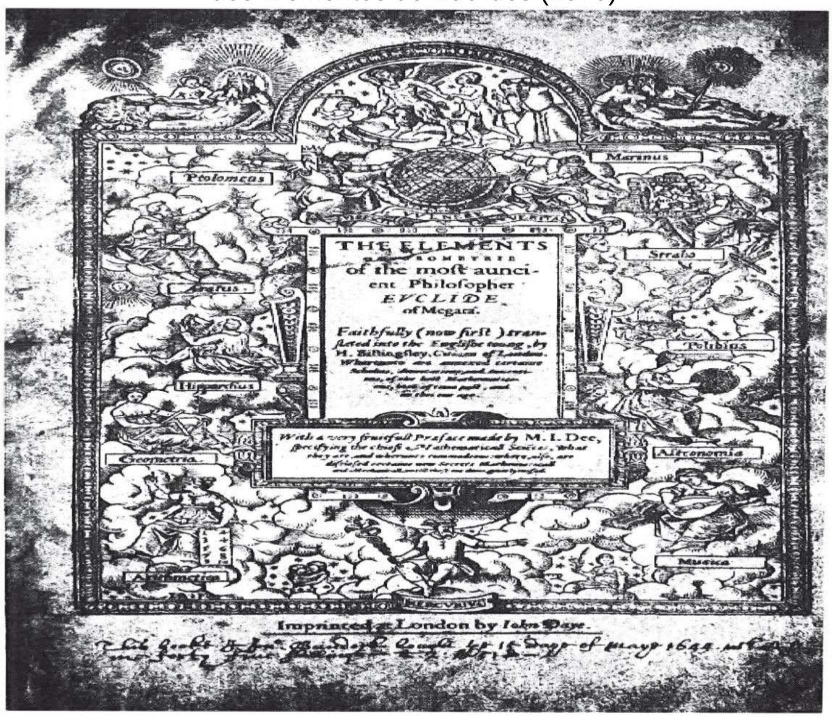
> É lamentável que não se tenha descoberto nenhuma copia dos Elementos de Euclides que date verdadeiramente da época de seu autor. As edições modernas da obra se baseiam numa revisão preparada pelo comentador grego Têon de Alexandria que viveu quase 700 anos depois do tempo de Euclides. Essa revisão foi, ate o começo do século XIX, a mais antiga edição dos Elementos que se conhecia. Porem, em 1808, quando Napoleão ordenou que fossem tomados de bibliotecas italianas e enviados a Paris os manuscritos de valor, F. Peyrard encontrou, na biblioteca do Vaticano, uma copia do século X de uma edição da obra que e anterior a revisão de Têon. Um estudo dessa edição mais antiga e uma triagem cuidadosa de citações e notas feitas por comentadores antigos indicam que o material introdutório do tratado original de Euclides indubitavelmente sofreu alterações nas revisões que se seguiram, mas os teoremas e demonstrações, salvo acréscimos e supressões pequenas, permaneceram em essência como Euclides os escreveu. (EVES, 2011. p. 168)

Podemos destacara ainda sobre *Os Elementos* que:

> A primeira tradução latina completa dos Elementos não foi feita do grego mas sim do árabe. No século VIII os árabes fizeram traduções de muitos manuscritos bizantinos de trabalhos gregos e em 1120 o erudito inglês Adelardo de Bath fez uma tradução latina dos Elementos a partir de uma dessas antigas versões árabes. Duas outras traduções latinas foram feitas a partir do árabe, uma de Gerardo de Cremona (1114-1187) e a outra, 150 anos depois da de Adelardo, de Johannes Campanus. A primeira edição impressa dos Elementos foi feita no ano de 1482 em Veneza e apresentava a tradução de Campanus. Esse livro raríssimo foi composto primorosamente, sendo a primeira obra de matemática importante a ser impressa. Uma tradução latina louvável, feita a partir do grego, é a de Commandino (1572). Essa tradução serviu de base para muitas outras subsequentes, inclusive para a influente edição de Robert Simson da qual, por sua vez, derivaram tantas outras edições inglesas. A primeira, e monumental, tradução inglesa dos Elementos foi feita por Billingsley e apareceu em 1570. (EVES, 2011. p. 170)

Na continuação, curiosamente pode se observar que o livro Os Elementos não trata apenas de geometria, mas contém bastante teoria dos números e álgebra elementar. Na sua totalidade o livro é composto de 465 proposições distribuídas em 13 (treze) livros. Os texto de geometria plana e espaciais que estão nos livros I, III, IV, VI, XI e XII dos Elementos e nestes estão os conteúdos ministrados no ensino fundamental e médio.

Imagem 10: Página de rosto (em tamanho reduzido) da tradução para o inglês dos Elementos de Euclides (1570)



Fonte: Eves, (2011. p. 172)

O nosso objeto de estudo neste trabalho, os Quadriláteros, estão contidos nos livros I e o II dos Elementos. No primeiro livro encontramos os quadriláteros na definição XXII, porém a maioria de suas propriedades estão convidadas nas demonstrações que aparecem neste primeiro livro que são em relação aos triângulos, os quadriláteros aparecem nas demonstrações envolvendo mais de um triângulos ocasionando o aparecimento de quadriláteros específicos como o paralelogramo e quadrados e ainda estas figuras, servem de suporte para as principais demonstrações, a exemplo temos a 47 que utiliza quadrados para demonstrar o teorema de Pitágoras.

Na Continuação, percebemos que os quadriláteros aparecem no Livro II, a definição I é a dos paralelogramos retangulares, como isso fica especificado que qualquer retângulo é considerado um paralelogramo. Após as definições, segue varia proposições teórica e problemas que são demonstrados em sequencia. Veja a seguir os destaques sobre quadriláteros que estão contidos na obra de Euclides.

Quadro 02 – Destaques Relacionados aos Quadriláteros – Os Elementos

LIVRO I	Definições: I - 22. E das figuras quadriláteras, por um lado, quadrado é aquela que é tanto equilátera quanto retangular, e, por outro lado, oblongo, a que, por um lado, é retangular, e, por outro lado, não é equilátera, enquanto losango, a que, por um lado, é equilátera, e, por outro lado, não é retangular, e romboide, a que tem tanto os lados opostos quanto os ângulos opostos iguais entre si, a qual não é equilátera nem retangular; e as quadriláteras, além dessas, sejam chamadas trapézios.
	Demonstrações: 33. As retas que ligam as tanto iguais quanto paralelas, no mesmo lado, são elas tanto iguais quanto paralelas. 34. Das áreas paralelogrâmicas, tanto lados quanto os ângulos opostos são iguais entre si, e a diagonal corta-as em duas. 35. Os paralelogramos que estão sobre a mesma base e nas mesmas paralelas são iguais entre si. 41. Caso o paralelogramo tenha tanto a mesma base que um triangulo quanto seja nas mesmas paralelas, o paralelogramo é o dobro do triângulo. 43. Os complementos de paralelogramos, à volta da diagonal de todo paralelogramo, são iguais entre si. 44. Aplicando à reta dada, no ângulo retilíneo dado, um paralelogramo igual ao triangulo dado. 45. Construir, no ângulo retilíneo dado, um paralelogramo igual à retilínea a dada. 47. Nos triângulos, o quadrado sobre o lado que se estende sob o ângulo reto é igual aos quadrados sobre os lados que contém o ângulo reto. (*Teorema de Pitágoras*). 48. Caso o quadrado sobre um dos lados de um triangulo seja igual aos quadrados sobre os dois lados restantes do triangulo, o ângulo contido pelos dois lados restantes do triângulo é reto.
LIVRO II	Definições: II - 1. Todo paralelogramo reto e dito ser contido pelas duas retas que contêm o ângulo reto; II – 2. E, de toda a área paralelogrâmica, um dos paralelogramos, qualquer que seja, à volta da diagonal dela, com os dois complementos, seja chamado um gnômon.

	Demonstrações: 1. Caso existem duas retas, e uma delas seja cortada em segmentos, quantos quer que sejam, os retângulos contidos pelas duas retas é igual aos triângulos contidos tanto pela não cortada quanto por cada um dos segmentos. 2. Caso uma linha reta seja cortada, ao acaso, o retângulo contido pela reta toda e cada um dos segmentos é igual ao quadrado sobre a reta toda. 3. Caso uma linha reta seja cortada, ao acaso, o retângulo contido pela reta toda e e por um dos segmentos é igual a ambos, o retângulo contido pelo segmento e o quadrado sobre o predito segmento. 14. Construir um quadrado igual à retilínea dada.
LIVRO III	Demonstração: 22. Dos quadriláteros nos círculos, os ângulos opostos são iguais a dois retos.
LIVRO IV	Demonstrações: 6. Inscrever um quadrado no circulo. 7. Circunscrever um quadrado ao circulo dado. 8. Inscrever um circulo no quadrado dado. 9. Circunscrever um circulo no quadrado dado

Fonte: Euclides (2009)

Como ficou evidente no quadro acima a maioria do conteúdo de quadriláteros está contido nos dois primeiros livros da obra, mas este aparecem em outras partes dos outros livros para ajudar nas demonstrações e com isso aparecem as outras propriedades destas figuras geométricas. Deste modo muito mais do que somente a obra em si, “Os elementos” trazem uma estrutura inovadora que revolucionou o pensamento geométrico moderno. Neste sentido, Euclides molda os estudos matemáticos, em especial os de geometria pois, conseguiu reunir de maneira brilhante os conteúdos e em uma sequência lógica, além da riqueza nas demonstrações, por este ponto de vista percebemos que:

> Euclides alcançou uma influência permanente sobre a imaginação humana por razões que vão além de sua maneira, de seu método, dos detalhes de suas demonstrações, ou mesmo das muitas ideias que apresentou à comunidade matemática. Além de qualquer outro livro, é Os elementos que oferece uma apreciação mais intransigente do mundo das formas – que ele criou. Os elementos é uma exaltação da geometria. Euclides fez um consciencioso porém malsucedido esforço para incorporar em seus pensamentos os números e suas propriedades, mas é à geometria que seu coração deve lealdade. Por essa razão, ele foi capaz de apresentar aos matemáticos o que os matemáticos tão raramente apresentam: uma visão. (BERLINSKI, 2012, p.93).

Com isso, podemos perceber que “Os Elementos” de Euclides foi um marco para matemática e principalmente a geometria, ou seja, quando se falar deste ramo da matemática devemos especificar se esta, se encontra dentro dos moldes euclidianos ou o excede, por isso quando trabalhamos com este ramo da matemática deve-se sempre informar que a mesma, trata-se de geometria euclidiana, ou seja, que foi explanada por ele em sua obra magna.

Assim estamos conscientes de que este breve relato histórico sobre a geometria, em especial os quadrilátero, no decorre dos séculos foi de grande importância, pois mesmo estas figuras de quatro lados não sendo especificadas no decorre do tempo sua contribuição sérvio de suporte para o pensamento geométrico construído pelos matemáticos no decorrer dos tempos até sua culminância com *Os Elementos*. Tal importância é percebida até hoje, haja vista, o assunto de quadriláteros sempre está presente nos currículos de matemática atuais.

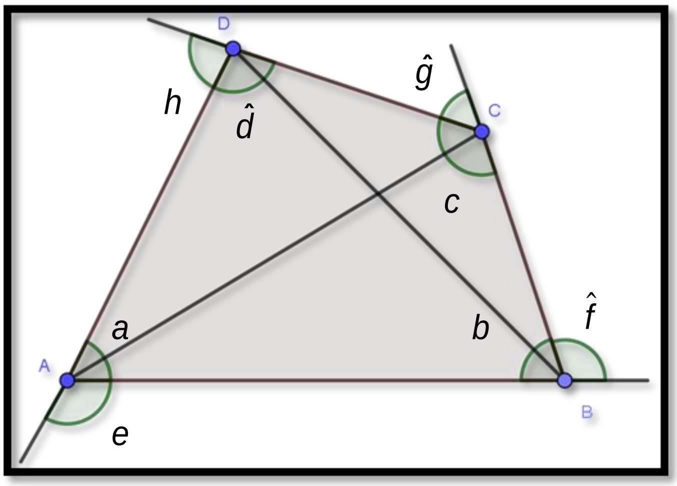
4. ASPECTOS MATEMÁTICOS DOS QUADRILATEROS

Nós iremos expressar nossas considerações a cerca do assunto de quadriláteros em uma abordagem matemática, nossa intenção é evidenciar as principais definições, propriedades e demonstrações que compõem o conteúdo, evidenciado pelos autores que tratam sobre está parte da geometria plana elementar.

4.1. Definição de quadriláteros e seus elementos

De acordo com Dolce e Pompeo (2004), os quatro pontos A, B, C e D estão contidos em um mesmo plano, todos distintos e três não colineares. Se os segmentos $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$ interceptam-se apenas nas extremidades, a reunião desses quatro segmentos é um quadrilátero. Veja a seguir: Cunhos

Figura 04: quadriláteros ABCD e seus elementos.

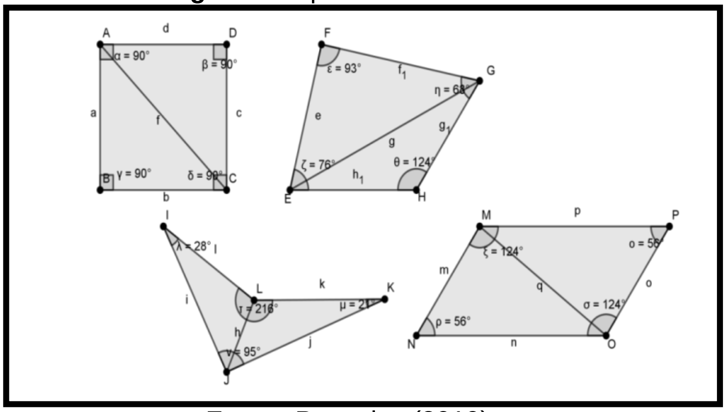


Fonte: pesquisa (2019)

A figura acima mostra o quadrilátero ABCD, e nele podemos identificar algum de seus elementos que serão necessários para classificações futuras, a saber, os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$ são seus lados deste quadrilátero; a ou ABD, b ou ABC, c ou $B\hat{C}D$ e d ou $A\hat{D}C$ são denominados de ângulos internos; e, $\hat{f}$, g e h são denominados de ângulos externos; $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são suas diagonais.

De acordo com Dolce e Pompeo (2004) as diagonais de um polígono, aqui especificamente do quadrilátero, são segmentos de retas que ligam dois vértices (A e C ou B e D) não consecutivos. Com isto, todo quadrilátero possui duas diagonais, e as retas que contém cada um dos lados são chamadas de retas suportes, respectivamente de cada lado. E mais, 360º é a soma dos ângulos internos de qualquer quadrilátero a ou ABD, b ou ABC, c ou $B\hat{C}D$ e d ou $A\hat{D}C$, bem como a soma dos ângulos externos e, $\hat{f}$, g e h. Observe a seguir.

Figura 05: quadriláteros ABCD



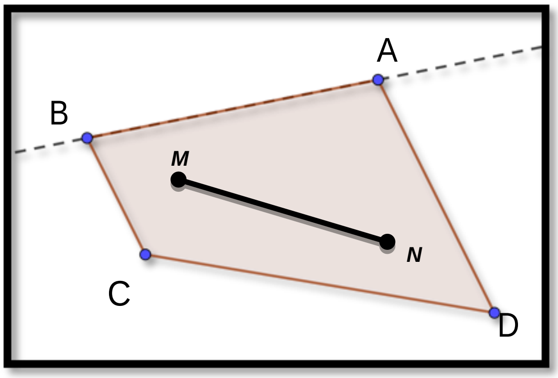
Fonte: Pesquisa (2019).

Na figura podemos observar alguns quadriláteros, e neles foram traçadas suas respectivas diagonais, analisando as figuras podemos perceber que a soma os ângulos internos sempre contará 360º (trezentos e sessenta graus). Veja a demonstração a seguir.

Na figura acima foram traçadas as diagonais $\overline{AC}$, $\overline{EG}$, $\overline{JL}$ e $\overline{MO}$ dos quadriláteros, cujos vértices são ABCD, EFGH, IJKL e MNOP respectivamente. Percebemos que elas dividem os quadriláteros em dois triângulos. Como a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é sempre 180º (cento e oitenta graus), concluímos que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é sempre 360º (trezentos e sessenta graus).

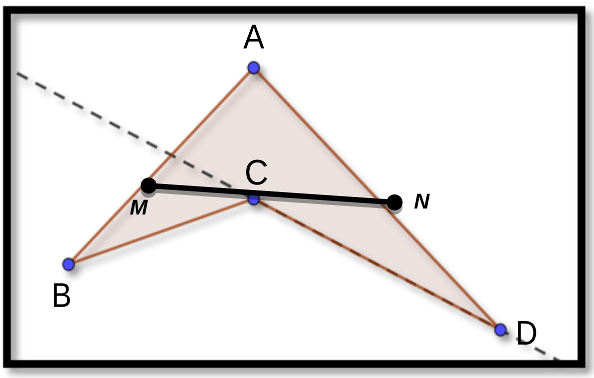
A seguir na figura temos o exemplo de um quadrilátero de vértices *ABCD* convexo e na outra figura um exemplo de um quadrilátero de vértices *ABCD* não convexo ou côncavo. Sendo está a classificação geral dos polígonos de acordo com os lados.

Figura 06: quadriláteros ABCD convexo



Fonte: Pesquisa (2019)

Figura 07: quadriláteros ABCD côncavo



Fonte: Pesquisa (2019)

Estas classificações que observamos podem ser definidas especificamente para cada tipo de quadrilátero. Segundo Cruz (2015), um polígono pode ser considerado *convexo* se dado quaisquer pontos indicados, por exemplo, por ***M*** e ***N*** em seu interior, então os pontos que formam o seguimento ***MN*** também sempre estarão todos contido neste interior, como visto na primeira figura acima. Um polígono é dito *côncavo* quando existirem pontos de ***M*** e ***N*** no seu interior tais que alguns pontos dos segmentos ***MN*** formados esteja no exterior do polígono, observe a figura a direita.

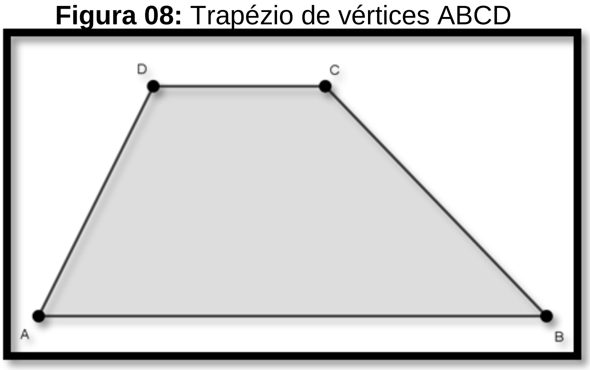
4.2 Quadriláteros Notáveis

Os quadriláteros notáveis segundo Dolce e Pompeo (2004) são os trapézios, os paralelogramos, os retângulos, os losangos e os quadrados. Comentaremos a seguir as suas definições, classificações, quando houver, e as propriedades destes polígonos de quatro lados indicados acima.

4.3. Trapézios

Um quadrilátero plano convexo é um trapézio se, e somente se, possui apenas dois lados paralelos. Observe a figura.

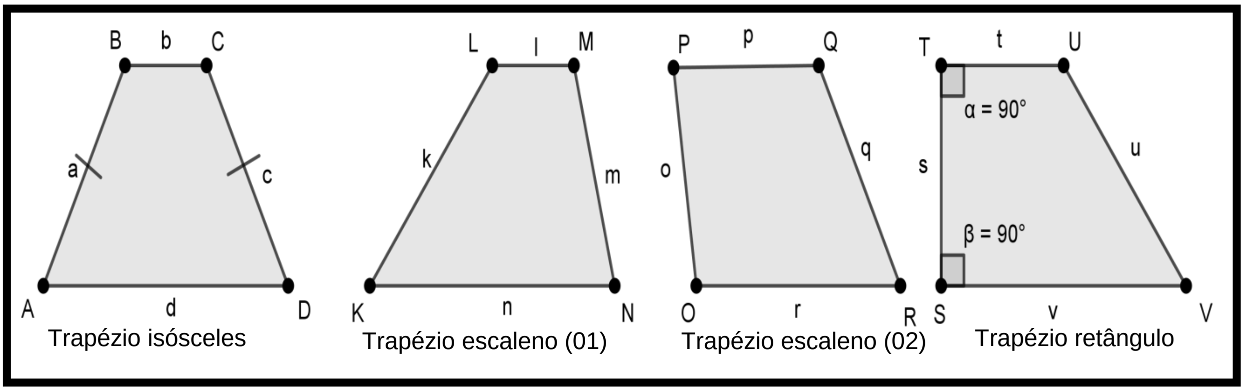
Figura 08: Trapézio de vértices ABCD



Fonte: pesquisa (2019)

Deste modo, podemos observar pela figura que os vértices ABCD formam um trapézio. O lado $\overline{AB}$ é paralelo ou lado $\overline{CD}$, que podemos indica por $\overline{AB}//\overline{CD}$, onde eles são as bases do trapézio. E de acordo com os outros dois lados não bases, temos a seguintes classificações. Se estes lados, ou seja, os lados não paralelos são congruentes o trapézio é isóscele, e se estes lados não são congruentes o trapézio é escaleno. E ainda, se o trapézio possuir dois ângulos retos ele é chamado de trapézio retângulo ou bi-retângulo. Observe a figura a seguir, na qual estão dispostos os três trapézios indicados.

Figura 09: Trapézio ABCD



Fonte: Pesquisa (2019)

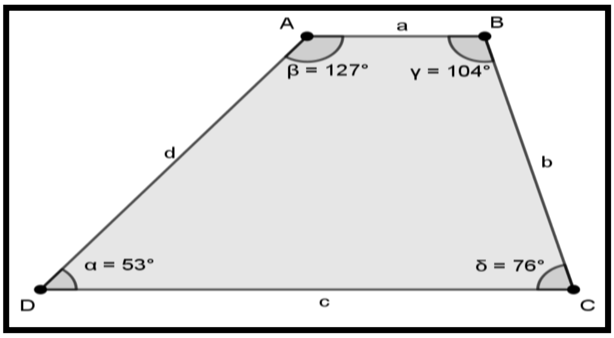
4.4. Propriedades dos trapézios

A seguir iremos contemplar as principais propriedades dos trapézios. Vamos primeiramente expressar as propriedades de um trapézio de uma forma geral em seguida as propriedades dos trapézios isósceles.

4.5. Trapézios

Em qualquer trapézio de vértice *ABCD* de bases $\overline{AB}$ *e* $\overline{CD}$, temos que o ângulo $\hat{A}$ somado com o ângulo $\hat{D}$ e o ângulo B somado como o ângulo $\hat{C}$ são suplementares, ou seja, somam 180º (cento e oitenta graus). Deste modo, podemos observar na figura a seguir estas características apresentadas.

Figura 10: Trapézio ABCD



Fonte: pesquisa, (2019)

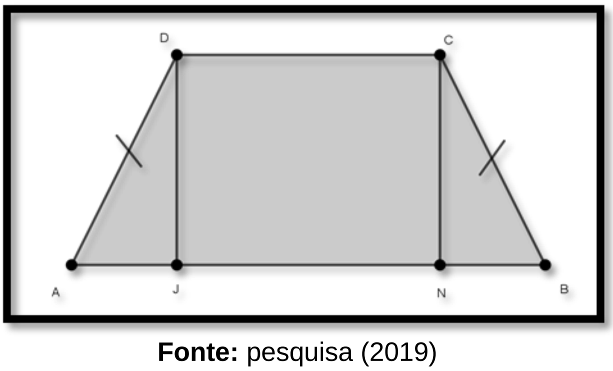
Com isso, podemos realizar a demonstração, tomaremos a figura acima como referência. O lado delimitado pelos vértices A e B é paralelo ao lado delimitado pelos vértices C e D que podemos indicar por $\overline{AB}//\overline{CD}$, onde estas base são cortadas por duas semi-reta, a saber: a semi-reta $\overline{AD}$ e a semi-reta $\overline{BC}$ ou seja, elas são transversais a estas bases, formando os seguintes ângulos internos, o ângulo $\hat{A}=127º$ e o ângulo $\hat{D}=53º$, $\hat{B}=104º$ e o ângulos $\hat{C}=76º$ que bem observado a soma 180º como resultado, ou seja $\hat{A}+\hat{D}=180º$ e $\hat{B}+\hat{C}=180º$. Deste modo podemos indicar que: $\hat{A}+\hat{D}=\hat{B}+\hat{C}=180º$

Após termos entendidos e demonstrados este quadrilátero, ou seja, o trapézio, nos quais podemos considerar três tipos, definidos pelas características de seus lados e ângulos, são eles: trapézio isóscele, trapézio escaleno e o trapézio retângulo. Os quais serão mais bem explanados a seguir.

4.6. Trapézios Isósceles

Os ângulos de cada base de um trapézio isósceles são congruentes (possuem a mesma medida), bem como seus lados não paralelos também são congruentes. Deste modo utilizaremos a figura a seguir para auxiliar a demonstração, veja:

Figura 11: Trapézios Isósceles

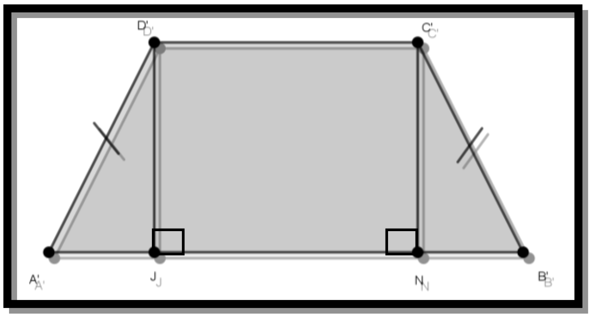


Fonte: pesquisa (2019)

Para está demonstração vamos tomar como referência inicial a figura acima mostrada. Por hipótese temos que os lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são as bases do trapézio Isósceles de vértices ABCD da figura acima, deste modo por tese os lados não paralelos do trapézio isósceles são congruentes.

Nestas condições, no segundo trapézio de vértice $A'B'C'D'$, semelhante ao primeiro, foram traçados duas perpendiculares, ou seja, duas alturas que vão dos vértices C’ e D’ da base menor, até os pontos J e N, respectivamente na base maior $\overline{A'D'}$. Veja.

Figura 12: Trapézios Isósceles



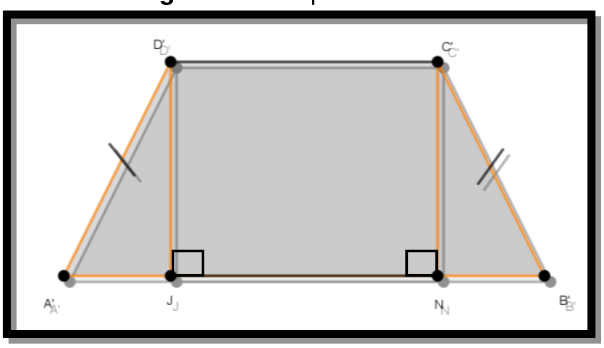
Fonte: pesquisa (2019)

Podemos notar que as alturas $\overline{D'J}$ e $\overline{C'N}$ formadas são semelhantes, porque possuem a mesma distância em relação aos lados $\overline{A'B'}$ e $\overline{C'D'}$ que são bases paralelas, com isso podemos indicar que: as alturas traçadas são semelhantes, isto é, $\overline{D'J} \equiv \overline{B'N}$.

Os triângulos retângulos formados são congruentes, pelo caso especial, onde o lado $\overline{D'J}$ é congruente ao lado $\overline{C'N}$, bem como a hipotenusa (maior lado do triângulo) $\overline{A'D'}$ e congruente a hipotenusa $\overline{B'C'}$, deste modo podemos dizer que o ângulo $\hat{A}'$ e congruente a ângulos $\hat{B}'$, que podemos indicar por: $\hat{A} \equiv \hat{B}$.

Ainda podemos dizer que os ângulos $\hat{A}'$ e $\hat{B}'$ são suplementares de $\hat{D}'$ e $\hat{C}'$ respectivamente, justificado pela demonstração anterior, deste modo o ângulos $\hat{A}'$ e o ângulo $\hat{B}'$ são congruentes, onde podemos notar $\hat{A}' \equiv \hat{C}'$.

Figura 13: Trapézios Isósceles



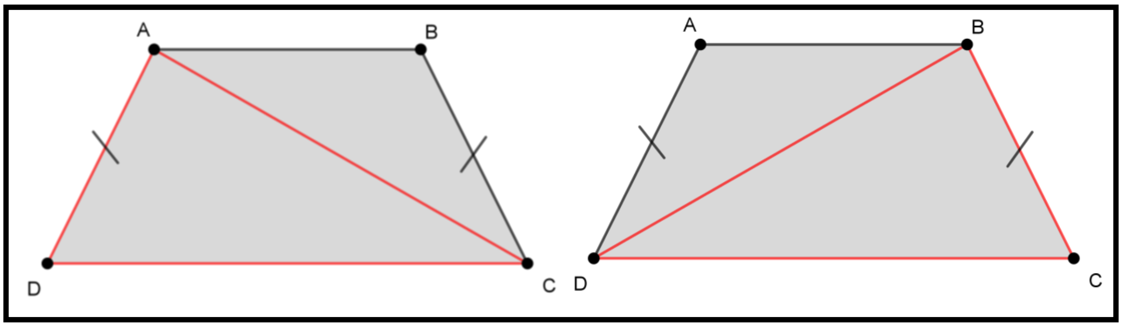
Fonte: pesquisa (2019)

Com isso, podemos perceber que os triângulos de vértices $\Delta A'D'J$ e $\Delta B'C'N$ destacados na figura acima são congruentes, o que decorre também que as bases destes triângulos, $\overline{A'J}$ e $\overline{B'N}$ também são congruentes entre si, o que nos permite enunciar: as projeções ortogonais, ou seja, $\overline{A'J}$ e $\overline{B'N}$ formadas pelos lados não bases de um trapézio isósceles, sobre a base maior, também são congruentes. O que confirma a tese inicial.

4.7. Trapézios Isósceles – Diagonais

As diagonais de um trapézio isósceles são congruentes. Observe a demonstração para comprovação desta afirmação, onde tomaremos por base a figura abaixo.

Figura 14: Trapézios isósceles e suas diagonais

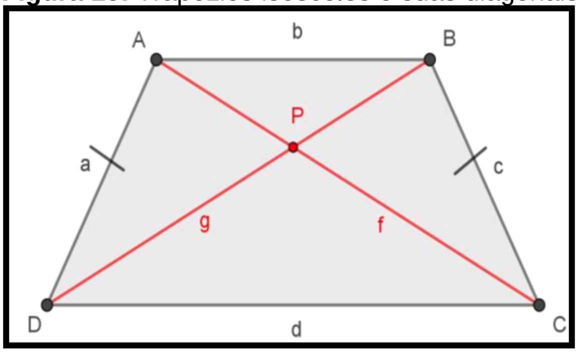


Fonte: pesquisa (2019)

Por hipótese temos que os trapézios isósceles de vértices $ABCD$ e base menor $\overline{AB}$ e base maior $\overline{CD}$ e lado $\overline{AD}$ congruente ao lado $\overline{BC}$, implica que a diagonal $\overline{AC}$ é congruente a $\overline{BD}$, como observado na figura anterior.

Para que a afirmação acima seja comprovada, podemos observar que os triângulos de vértices ADC e BCD em destaque são congruentes, ou seja, $\Delta ADC \equiv \Delta BCD$, por que levamos em consideração que os lados $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ que são congruentes, bem como os ângulos $\hat{D}$ e $\hat{C}$, assim como o lado $\overline{DC}$ é igual a lado $\overline{CD}$, justificado pela congruência de triângulos de lados iguais, onde os ângulos são semelhantes e possui também lados semelhantes. Deste modo, o lado $\overline{AC}$ é congruente a lado $\overline{BD}$, que podemos denotar por $\overline{AC} \equiv \overline{BD}$. Veja a figura abaixo.

Figura 15: Trapézios isósceles e suas diagonais



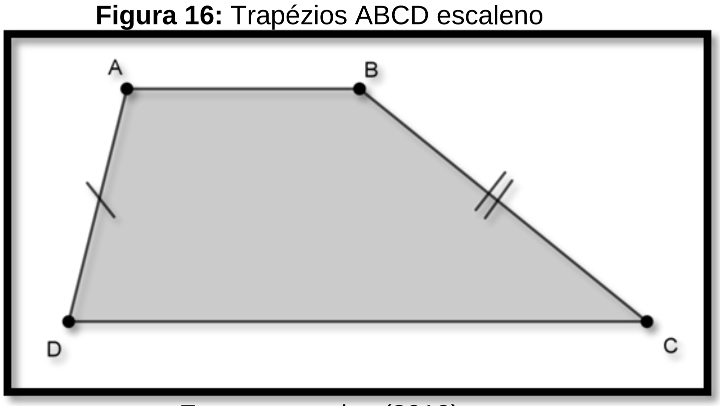
Fonte: Autor, pesquisa (2019)

E com a congruência acima, obtemos que $A\hat{C}D$ é congruente $B\hat{D}C$. Dai decorre que os triângulos de vértices ΔPCD e ΔPAB são isósceles com bases $\overline{CD}$ e $\overline{AB}$ respectivamente, sendo P o ponto onde as diagonais se interceptam.

4.8. Trapézio escaleno

Os lados não paralelos do trapézio escaleno não são congruentes, ou seja, não possuem a mesma medida. Deste modo, seja o trapézio de vértices $ABCD$, o lado $\overline{AD}$, é diferente do lado $\overline{BC}$ então, este trapézio $ABCD$ é um trapézio escaleno. Podemos comprovar está afirmação, tomado por base a figura a seguir:

Figura 16: Trapézios ABCD escaleno

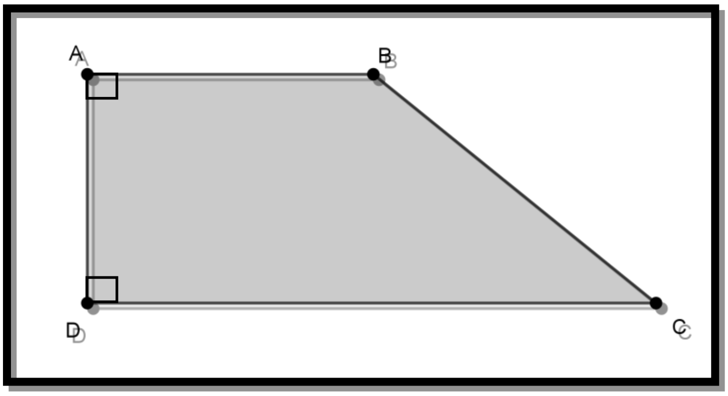


Fonte: pesquisa (2019)

4.9. Trapézio retângulo

O trapézio retângulo possui dois ângulos retos. Deste modo, seja um trapézio cujas bases são $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ onde a medida dos ângulos $B\hat{A}D$ e $A\hat{D}C$ são iguais as 90^o. Então $ABCD$ é um trapézio retângulo. Veja a figura a seguir.

Figura 17: Trapézios *ABCD* escaleno

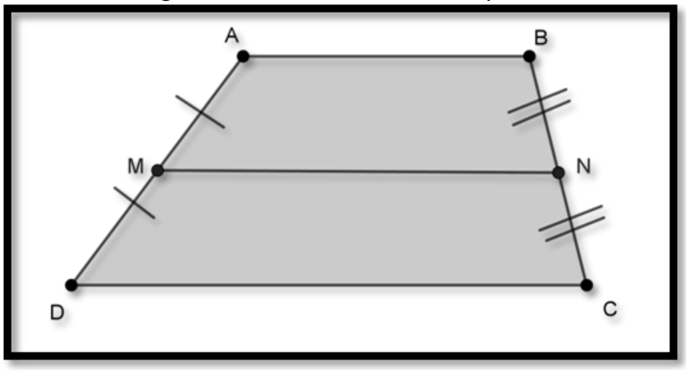


Fonte: pesquisa (2019)

4.10. Base media do Trapézio

Se um segmento tem extremidade nos pontos médios dos lados não paralelos de um trapézio, então ele é paralelo às bases e ele é a semi-soma das bases.

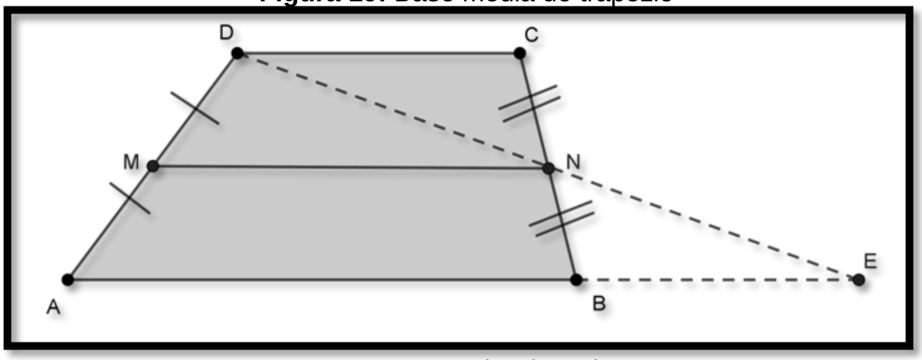
Figura 18: Base media do trapézio



Fonte: pesquisa (2019).

Seja $ABCD$ vértices de um trapézio não sendo paralelogramo que possui bases maior e menor indicadas por $\overline{CD}$ e $\overline{AB}$ respectivamente, como mostra a figura acima. Podemos, inferir por hipótese que as semi-retas $\overline{AM}$ e $\overline{DM}$ são congruentes, bem como a semi-reta $\overline{BN}$ e congruente a semi-reta $\overline{CN}$. Deste modo, se isto for verdade chegaremos a seguinte tese, a saber: as semi-retas $\overline{AB}$, $\overline{MN}$ e $\overline{CD}$ são paralelas, ou seja, podemos indicar por $\overline{MN}//\overline{AB}//\overline{CD}$. Assim podemos concluir que a base média do trapézio, indicada por $\overline{MN}$ é igual a média aritmética da base maior $\overline{AB}$ pela base menor $\overline{CD}$.

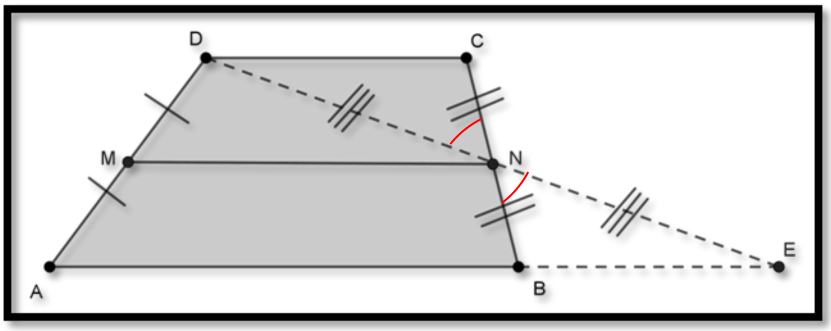
Figura 19: Base media do trapézio



Fonte: pesquisa (2019).

Para se chegar a conclusões expressa acima, tomaremos o trapézio de vértices $ABCD$, na figura logo acima, onde foi marcado um ponto E que é a intersecção, ou seja, o encontro das retas $\overline{DN}$ e $\overrightarrow{AB}$ localizadas no exterior do trapézio. A semi-reta $\overline{CB}$ é uma transversal em relação as bases paralelas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ onde podem ser indicado por $\overline{AB} // \overline{CD}$. Deste modo, expressamos que os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são ângulos alternos em relação a transversal $\overline{CB}$, com isso ele são ângulos congruentes, onde podemos indicar $E\hat{B}N \equiv N\hat{C}D$.

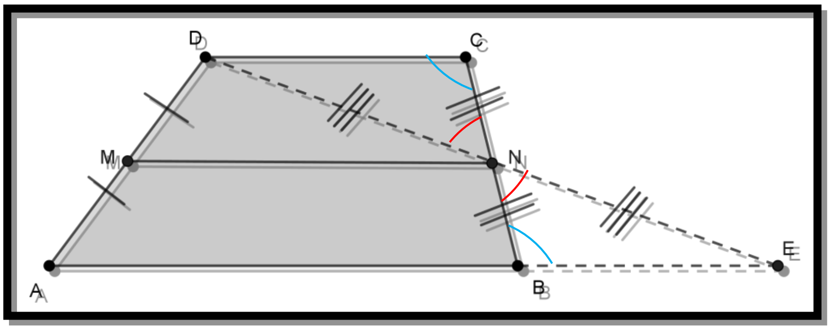
Figura 20: Base media do trapézio



Fonte: pesquisa (2019).

Temos também, pela figura anterior que os ângulos opostos pelo vértice indicados por $B\hat{N}E$ e $C\hat{N}D$ de cor vermelha são congruentes, ou seja, $B\hat{N}E \equiv C\hat{N}D$ e que as semi-retas de extremidades $\overline{CN}$ e $\overline{BN}$ também são congruentes, pois o ponto N é médio em relação semi-reta $\overline{BC}$. Logo, pelo caso de congruência de triângulos do ângulo, lado e ângulo os triângulos de vértices ΔBEN e ΔCDN são congruentes implicando que a semi-reta $\overline{EN}$ é congruente a $\overline{DE}$ e a semi-reta $\overline{BE}$ também e congruente a $\overline{CD}$. Além disso, com o triangulo ΔADE podemos expressar que a semi-reta $\overline{AM}$ é congruente a semi-reta $\overline{MD}$ e que M e N são pontos médios dos lados $\overline{AD}$ e $\overline{DE}$ respectivamente.

Figura 21: Base media do trapézio



Fonte: pesquisa (2019).

Deste modo, concluímos que: as semi-retas $\overline{AM}$ e $\overline{DM}$ são congruentes, bem como a semi-reta $\overline{BN}$ e congruente a semi-reta $\overline{CN}$. Deste modo, chegaremos ao seguinte, a saber: as semi-retas $\overline{MN}$, $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são paralelas, ou seja, podemos indicar por $\overline{MN}//\overline{AB}//\overline{CD}$. Assim podemos concluir que a base média do trapézio, indicada por $\overline{MN}$ é igual à média aritmética da base maior $\overline{AB}$ pela base menor $\overline{CD}$. Onde podemos expressar que:

$$\boxed{\overline{MN} = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2}}$$

4.11. Mediana de Euler

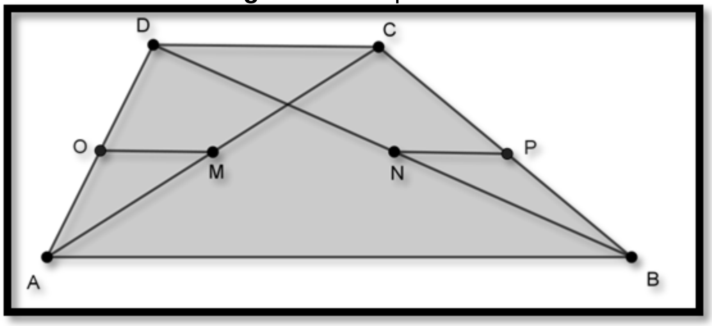
Definição:

A mediana de Euler é o segmento gerado pela interseção da base média com as diagonais do trapézio e, também une os pontos médios das diagonais de um quadrilátero.

Proposição:

O segmento que tem extremidade no ponto médio das diagonais de um trapézio é igual à metade da diferença entre as bases (maior e menor). Veja a figura a seguir.

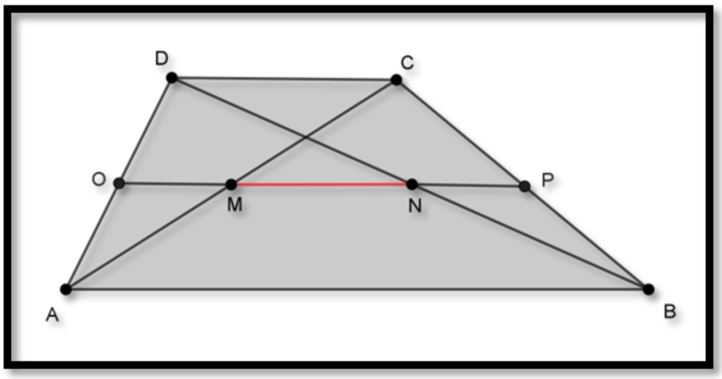
Figura 22: Trapézio



Fonte: pesquisa (2019)

Tomando por base a figura anterior, temos um trapézio de vértice $ABCD$, cujas diagonais são os segmentos indicados por $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$. Sendo os pontos M e N médios das diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, respectivamente. Com isto, segue que o segmento $\overline{OM}$ possui a mesma medida do segmento $\overline{NP}$, justificado pela base média triangular que é indicada pela metade da base do triângulo, que aqui foi obtida com os vértices do triangulo ΔACD e onde o seguimento $\overline{OM}$ é a base do triangular que é igual à metade do segmento $\overline{DC}$, bem como o seguimento $\overline{NP}$ também base média do mesmo triangulo ΔACD.

Figura 23: Mediana de Euler



Fonte: pesquisa (2019)

Com isso, podemos indicar duas bases médias triangulares, onde temos que o segmento de reta $\overline{OM}$ e igual a metade do segmento ($\frac{\overline{DC}}{2}$) e o segmento $\overline{NP}$ é igual a metade do segmento ($\frac{\overline{DC}}{2}$), como isso podemos observa que o seguimento $\overline{OM}$ é igual ao seguimento $\overline{NP}$. Além disso, na figura fica claro que o seguimento $\overline{OP}$ é igual à soma de dos seguimentos $\overline{OM}$, $\overline{MN}$ e $\overline{NP}$ que podemos indicar por $\overline{OP} = \overline{OM} + \overline{MN} + \overline{NP}$, que será nossa equação (1.1). Com isso, substituímos as igualdades dos seguimentos $\overline{OM}$ e $\overline{NP}$ na equação (1.1), obtendo a equação (1.2) a seguir:

$$\overline{OP} = \frac{\overline{DC}}{2} + \overline{MN} + \frac{\overline{DC}}{2} \quad (1.2)$$

Como a base média do trapézio da figura é a equação:

$$\overline{OP} = \frac{\overline{DC} + \overline{AB}}{2} \quad (1.3).$$

Para continuar, igualamos as equações (1.2) e (1.3), Temos:

$$\frac{\overline{DC}}{2} + \overline{MN} + \frac{\overline{DC}}{2} = \frac{\overline{DC} + \overline{AB}}{2}$$

$$\overline{MN} = \frac{\overline{DC} + \overline{AB}}{2} - \overline{DC}$$

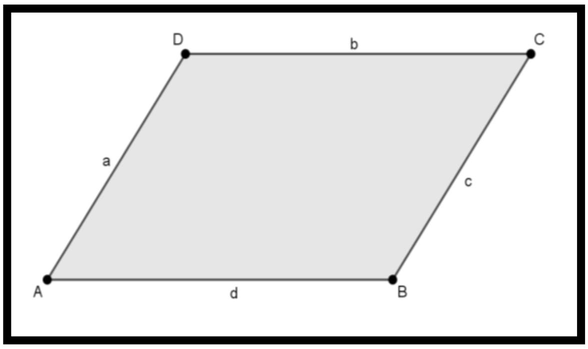
$$\overline{MN} = \frac{\overline{DC} + \overline{AB} - 2\overline{DC}}{2}$$

$$\boxed{\overline{MN} = \frac{\overline{AB} - \overline{DC}}{2}} \text{ Mediana de Euler}$$

4.12. Paralelogramos

Um quadrilátero plano convexo é um paralelogramo se, e somente se, possuir os lados opostos paralelos. Veja a figura a seguir.

Figura 24: Paralelogramo ABCD



Fonte: pesquisa (2019)

Na figura acima podemos observa que ABCD é um paralelogramo, isto é $\overline{AB}$ é paralelo a $\overline{CD}$ e $\overline{AD}$ é paralelo a $\overline{BC}$, onde podemos indicar porá $\overline{AB} // \overline{CD}$ e $\overline{AD} // \overline{BC}$.

4.13. Propriedades dos paralelogramos

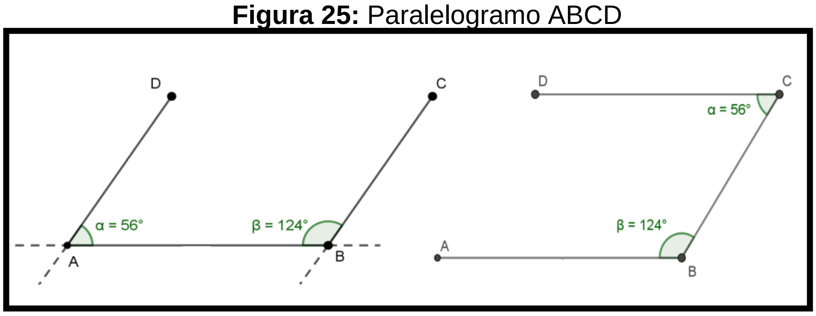
Nesta seção iremos expressar as principais propriedades que caracterizam um paralelogramo, ou seja, ângulos opostos congruentes, lados opostos congruentes e a relação das suas diagonais que se dividem ao meio.

4.14. Ângulos opostos congruentes

Em todo paralelogramo dois ângulos opostos quaisquer são congruente. Tomaremos por hipótese que $ABCD$ são vértices de um paralelogramo, se e somente se, por tese neste quadrilátero, dois ângulos opostos quaisquer são congruentes $(\hat{A} \equiv \hat{C} \text{ e } \hat{B} \equiv \hat{D})$. Observe a figura:

Só existe um paralelogramo de vértice indicados por $ABCD$, se e somente se, a semi-reta $\overline{AD}$ for paralelo $\overline{BC}$, do mesmo modo que $\overline{AB}$ é paralela a $\overline{CD}$. E se estas duas implicações são verdade significa que a soma dos ângulos $\hat{A}$ com $\hat{B}$ é igual a 180º (cento e oitenta graus) bem como a soma de $\hat{B}$ como $\hat{C}$ que também resulta em 180º (cento e oitenta graus). Com isso, o ângulo $\hat{A}$ é semelhante ao ângulo $\hat{C}$. Analogamente o ângulo $\hat{B}$ é semelhante ao ângulo $\hat{D}$. Veja a figura a seguir.

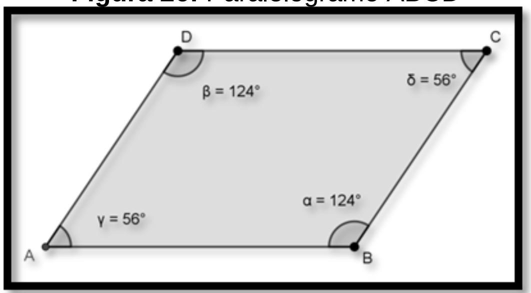
Figura 25: Paralelogramo ABCD



Fonte: pesquisa (2019)

Todo quadrilátero convexo que tem ângulos opostos congruentes é uma paralelogramo. Deste modo, sendo $ABCD$ são vértices de um quadrilátero convexo, por hipótese os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{C}$ são congruentes (semelhantes), bem com os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{D}$ também são congruentes. Por tese, este quadrilátero é um paralelogramo.

Figura 26: Paralelogramo ABCD



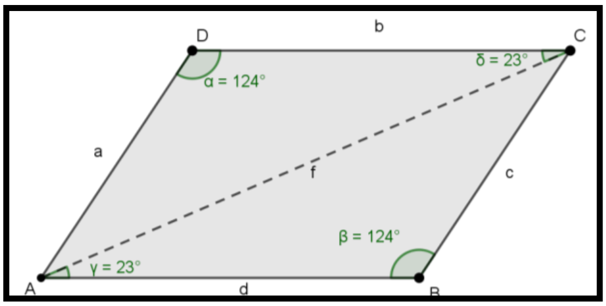
Fonte: pesquisa (2019)

Os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{C}$ são congruentes (semelhantes), bem com os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{D}$ também são congruentes, se e somente se a soma dos ângulos $\hat{A}$ é $\hat{B}$ é igual a soma dos ângulos $\hat{C}$ é $\hat{D}$. E se $ABCD$ são vértices de um quadrilátero, isto implica que a soma dos ângulos desta figura é igual a 360º (trezentos e sessenta graus). Tomando esta duas afirmações como verdade podemos dizer que, a soma do as ângulo $\hat{A}$ e $\hat{B}$ é igual a soma de $\hat{A}$ e $\hat{D}$ e elas resultam em 180º, se e somente se, o lado AD for paralelo a BC, bem com AB é igual a CD. Deste modo o quadrilátero de vértice $ABCD$ é um paralelogramo. E por consequência desta demonstração todos os retângulos são paralelogramos.

4.15. Lados opostos congruentes

Em todo paralelogramo, dois lados opostos quaisquer são congruentes. Sendo $ABCD$ um quadrilátero qualquer. Observe a figura abaixo. Por hipótese os lados AB e CD são semelhantes, bem com e os lados BC e AD, sendo que isso acontece, se e somente se, este quadrilátero for um paralelogramo.

Figura 27: Paralelogramo ABCD



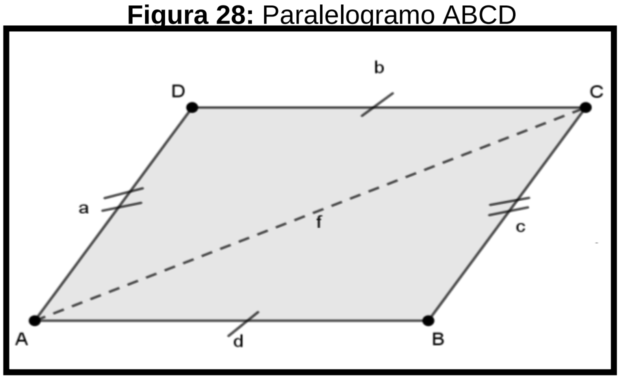
Fonte: pesquisa (2019)

Os vértices $ABCD$ são de um paralelogramo, se e somente se, o ângulo $\hat{B}$ e $\hat{D}$ forem semelhantes, bem como o lado AB é paralelo a lado CD, com isso os ângulos $B\hat{A}C$ e semelhante ao ângulo $D\hat{C}A$. Como podemos perceber a diagonal AC é comum aos dois triângulos formados (ΔABC e ΔACD), onde vimos os ângulos $B\hat{A}C$ e $D\hat{C}A$ são congruentes, bem como os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{D}$. Isto implica que os triângulos ΔABC e ΔACD são semelhantes, justificado pelo caso de semelhança que relaciona o lado, ângulo e ângulo oposto ($L.A.A_o$). Assim, podemos comprovar que em todo paralelogramo, dois lados opostos quaisquer são congruentes, ou seja,

$\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{DA}$.

Todo quadrilátero convexo que tem lados opostos congruentes é paralelogramo. Se $ABCD$ são vértices de um quadrilátero convexo. Temos por hipótese que os lados AB e CD são semelhantes e os lados AB e CD também, isso implicaria, por tese, que os vértices $ABCD$ são de um paralelogramo.

Figura 28: Paralelogramo ABCD



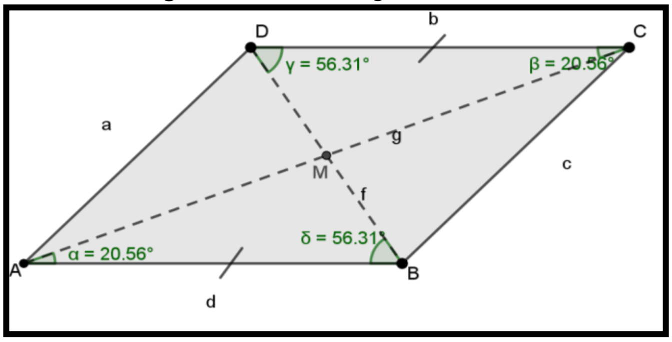
Fonte: pesquisa (2019)

Se os lados AB e CD são semelhantes e os lados AB e CD também e o lado AC, e comum aos dos triângulos (ΔABC e ΔCDA) formados e levando em consideração o caso de semelhança de triângulo relacionado a lados dos triângulos, isto implica dizer, os dois triângulos são semelhantes, se e somente se, os ângulos $B\hat{A}C$ e $D\hat{C}A$ são congruentes, o que implica nos lados AB e CD serem paralelos. Do mesmo jeito que os ângulos $B\hat{A}C$ e $D\hat{A}C$ são semelhantes e implicam nos lados AD e BC paralelos. A partir disto, concluímos que os vértices $ABCD$ são de um paralelogramo. Por consequência, todo o losango é um paralelogramo.

4.16. Diagonais dividem-se ao meio

Em todo o paralelogramo, as diagonais interceptam-se nos seus respectivos pontos médios. Se $ABCD$ são vértices de um paralelogramo, temos por hipótese as diagonais AC e BD tem sua intersecção em um ponto médio M, se e somente se, por tese os lados AM e CM tem a mesma medida, bem como os lados BM e DM também são semelhantes. Para a demonstração seguinte usaremos a figura a seguir como suporte.

Figura 29: Paralelogramo ABCD



Fonte: pesquisa (2019)

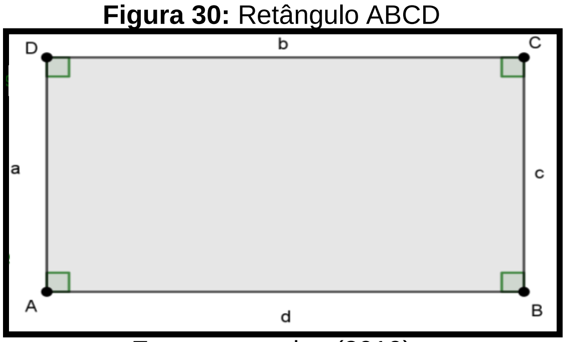
Se na figura acima temos um paralelogramo, admitimos três condições para que isso seja verdade. O lado AB seja semelhante a lado CD (1), bem como estes mesmos lados sejam paralelos, implicando nos ângulos $B\hat{A}C$ e $D\hat{C}A$ serem congruentes (2), o mesmo aconteceria para os ângulos $A\hat{B}D$ e $C\hat{D}B$ que são semelhantes (3). Estas três condições são satisfeitas pela semelhança de triângulos que leva em consideração o ângulo o lado e outro ângulo destes triângulos, implicando que os triângulos ΔABM e ΔCDM são congruentes, isto é, são semelhantes. Assim, podemos comprovar a teste de que os lados AM e CM tem a mesma medida, bem como os lados BM e DM também são semelhantes, demonstrando desta forma que as diagonais de um paralelogramo têm sua intersecção em um ponto médio.

Consequentemente, “se dois segmentos de retas interceptam-se nos respectivos pontos médios, então suas extremidades são vértices de um paralelogramo”. (DOLCE e POMPEO, 2004, p.106)

4.17. Retângulos

Um quadrilátero plano convexo é um retângulo se, e somente se, possuem os quatro ângulos congruentes. (DOLCE e POMPEO, 2004, p.101), Deste modo temos, se $ABCD$ são vértices de um retângulo, isto acontece, se e somente se, os ângulos que compõem este quadrilátero forem todos congruentes, isto é, semelhantes. Como podemos perceber na figura que se segue.

Figura 30: Retângulo ABCD



Fonte: pesquisa (2019)

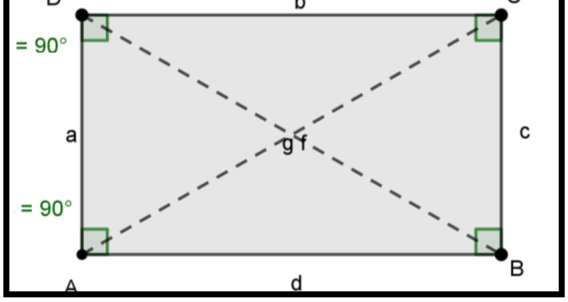
4.18. Propriedades dos retângulos

Nós iremos expressar a principal propriedade dos retângulos, que são suas diagonais congruentes. Mas, está é a propriedade especifica dos retângulos, haja vista, que todas as propriedades que foram demonstradas para o paralelogramo se aplicam para este quadrilátero, isto é, todo retângulo é um paralelogramo específico.

4.19. Diagonais Congruentes

Em todo retângulo as diagonais são congruentes. Por hipotese os vértices indicados por $ABCD$ são de um retângulo, se e somente se, as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são congruentes. Veja a figura.

Figura 31: Retângulo ABCD



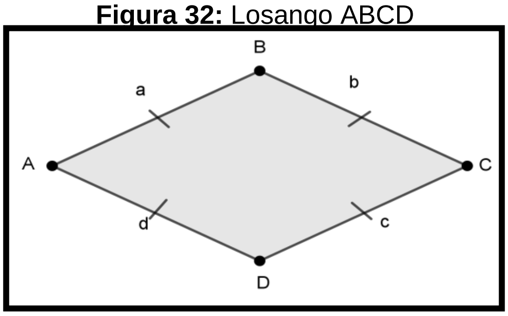
Fonte: pesquisa (2019)

Se o quadrilátero delimitado pelos vértices $ABCD$ é um retângulo, então este mesmo quadrilátero é um paralelogramo, isso implica em dizer os lados $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$ tem a mesma medida. Se isso for verdade, os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{A}$ possui a mesma medida, e pela observação da figura acima o lado AB é comum para os dois triângulos formados pelas diagonais, o que implica que estes dois triângulos (ΔABC e ΔBAD) são semelhantes, sendo que isto é comprovado pala semelhança de triângulos que leva em consideração dois lados e um ângulo destas figuras. Com isso, podemos provar que as diagonais $\overline{\mathrm{AC}}$ e $\overline{\mathrm{BD}}$ possuem a mesma medida. Por consequência "todo paralelogramo que tem diagonais congruentes é um retângulo". (DOLCE e POMPEO, 2004, p.108)

4.20. Losangos

Um quadrilátero plano convexo é um losango se, e somente se, possuir os quatro lados congruentes. (DOLCE e POMPEO, 2004, p.101). Para tanto, se os vértices $ABCD$ que delimitam a figura formam um losango, consequentemente todos os lados deste quadrilátero possuem a mesma medida ($\overline{\mathrm{AB}} \equiv \overline{\mathrm{BC}} \equiv \overline{\mathrm{CD}} \equiv \overline{\mathrm{DA}}$). Veja a figura abaixo.

Figura 32: Losango ABCD



Fonte: pesquisa (2019)

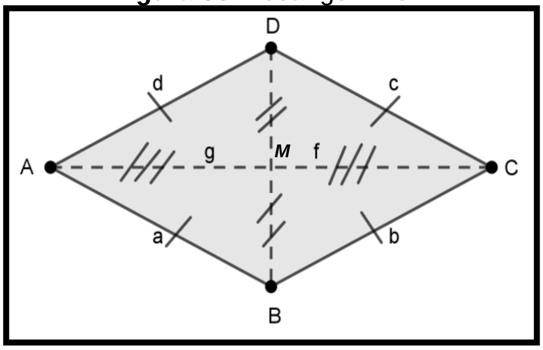
4.21. Propriedades dos Losangos

Nós iremos demonstrar a propriedade dos losangos, a qual caracteriza este quadrilátero, a saber: suas diagonais são perpendiculares, isto é, formam ângulos de 90º (noventa graus) ao se encontrarem. Além disso, as propriedades dos paralelogramos vistas anteriormente são comuns ao losango. Deste modo, todo o losango também é um paralelogramo.

4.22. Diagonais Perpendiculares

Todo losango tem diagonais perpendiculares. Se por hipótese os vértices *ABCD* da figura observada a seguir são de um losango, isto garante a tese de que as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ formadas são perpendiculares.

Figura 33: Losango ABCD



Fonte: pesquisa (2019)

Como a figura delimitada pelos vértices *ABCD* é um losango, isto implica dizer que se trata também de um paralelogramo, se isso for verdade o lado dos triângulos formandos com o encontro das diagonais possui a mesma medida, ou seja, $\overline{AM}$ e $\overline{CM}$ são semelhantes, do mesmo modo que $\overline{BM}$ e $\overline{DM}$ também são entre si. Desta forma, os quatro triângulos são semelhantes ($\Delta AMB \equiv \Delta AMD \equiv \Delta CMB \equiv \Delta CMD$), isso se comprova pelo caso de semelhança de triângulos que leva em consideração os três lados destas figuras. Assim, com estas informações comprovamos que os ângulos que são formados a partir da intersecção das diagonais do losango são congruentes e perpendiculares, isto é forma ângulos de 90º (noventa graus). Por consequência, “todo paralelogramo que tem diagonais perpendiculares é um losango”. (DOLCE e POMPEO, 2004, p.109)

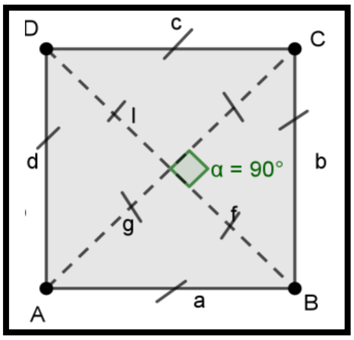
4.23. Quadrados

Um quadrilátero plano convexo é um quadrado se, e somente se, possui os quatro ângulos congruentes e os quatro lados congruentes. Observe a figura a seguir.

4.24. Propriedades dos quadrados

Aqui iremos perceber as propriedades que caracterizam os quadrados, ou seja, todo quadrado é retângulo e também losango. Portanto, além das propriedades do paralelogramo, o quadrado tem as propriedades características dos retângulos e dos losangos.

Figura 34: Losango ABCD



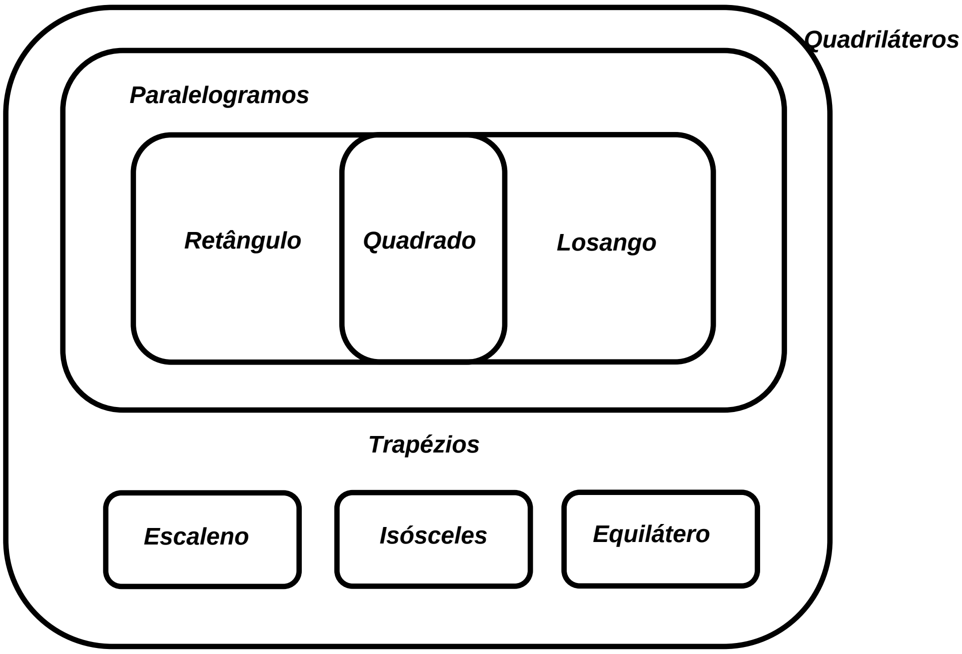
Fonte: pesquisa (2019)

Portanto, a partir das demonstrações feitas anteriormente para paralelogramo, podemos confirmar, se os vértices *ABCD* formam um quadrado, isto indica que ela também se trata de um paralelogramo onde são confirmadas as propriedades, a saber: os lados $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são semelhantes e perpendiculares.

Isto posto, podemos ressaltar pelas demonstrações realizadas que alguns quadriláteros fazem parte de mais de uma classificação de acordo com suas características e propriedades em comum. Notemos, em resumo, de acordo com Dolce e Pompeo, (2004) se um quadrilátero é *convexo* e tem suas diagonais que se cortam ao meio, então é um *paralelogramo*, tem diagonais que se cortam ao meio e são congruentes, então é um *retângulo*, tem diagonais que se cortam ao meio e são perpendiculares, então é um *losango*, tem diagonais que se cortam ao meio, são congruentes e são perpendiculares, então é um *quadrado*.

Para melhor percepção destas classificações vamos observar o Diagrama abaixo, que trata da representação dos grupos dos quadriláteros.

Figura 35: Diagrama dos Quadriláteros.

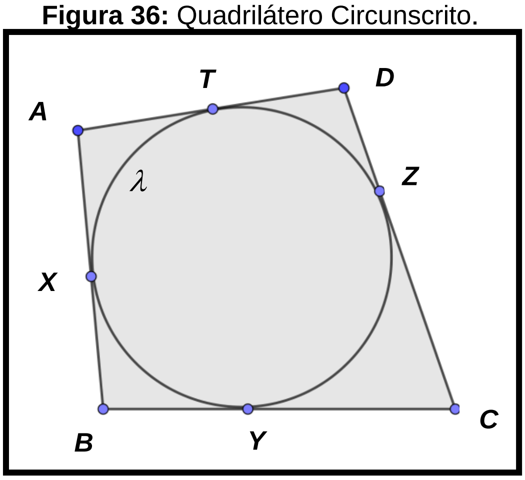


Fonte: Adaptado de Ferreira (2013)

4.25. Circunscrição de Quadriláteros

Se um quadrilátero convexo é circunscrito a uma circunferência, a soma de dois lados opostos é igual à soma dos outros dois. (DOLCE e POMPEO, 2004, p.157). Por hipótese $ABCD$ são vértices de um quadrilátero que está circunscrito em uma circunferência indicada por λ, se isto for verdade implicará que a soma dos lados AB com CD seja igual a soma dos lados AD e BC. Observe a figura a seguir.

Figura 36: Quadrilátero Circunscrito.



Fonte: Pesquisa (2019)

A partir da figura podemos perceber que os pontos *X, Y, Z* e *T* são tangentes dos lados AB, BC, CD e DA, respectivamente. Deste modo, aplicaremos a propriedade dos segmentos tangentes que diz: Se de um ponto P conduzir dois segmentos tangentes PA, PB a uma circunferência, como A e B pertencentes à circunferência, então o segmento dividido pelo ponto de tangência terão a mesma medida. (DOLCE e POMPEO, 2004). Com isso, podemos afirmar que o segmento AX é congruente a AT, BX é congruentes a BY, CZ é congruente a CY e DZ é congruente a DT. Isto implica em ($AX +$ AT) + (BX + BY) = ($CZ + CY$) + ($DZ + DT$). Deste modo, podemos perceber que a soma dos lados AB com CD é igual à soma dos lados AD e BC, ou seja: $AB + CD = AD + BC$.

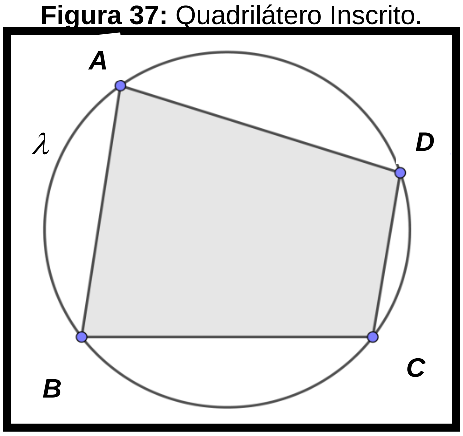
Como isso de acordo com Dolce e Pompeo, (2004) “a condição necessária e suficiente para um quadrilátero convexo ser circunscritível a uma circunferência é a soma de dois lados opostos ser igual à soma dos outros dois lados” (p. 158)

4.26. Inscrição de Quadriláteros

Se um quadrilátero convexo é inscrito numa circunferência, então os ângulos opostos são suplementares, isto é, somam 180º (cento e oitenta graus)**.**

Com isso, na figura a seguir, temos uma circunferência (λ). Por hipótese se o quadrilátero de vértices $ABCD$ está inscritos em λ, isso implica em dizer que o ângulo $\hat{A}$ somado com o ângulo $\hat{C}$ resulta em 180º, bem como o ângulo $\hat{B}$ somado com $\hat{D}$ é igual também a 180º.

Figura 37: Quadrilátero Inscrito.



Fonte: pesquisa (2019)

Para que isso aconteça tomaremos o ângulo $\hat{A}$ inscrito na circunferência, isto implica em dizer que este ângulos é igual à metade do arco formado por ele ($\frac{BCD}{2}$), também o ângulo $\hat{C}$ é inscrito e implica que ele é igual a metade do arco formado ($\frac{DAB}{2}$). Com isso podemos concluir que o ângulo $\hat{A}$ soma do $\hat{C}$ é igual à metade da soma dos arcos BCD com DAB que resulta em 180º, isto é: $\hat{A}+\hat{C}=\frac{BCD+DAB}{2}=$

$=\frac{360º}{2}=180º$.

Desta maneira, podemos concluir que a soma dos ângulos internos do quadrilátero inscrito na circunferência é igual a 360º (trezentos e sessenta graus), consequentemente o ângulo $\hat{B}$ soma do ao ângulo $\hat{D}$ é igual a 180º.

Com isso de acordo com Dolce e Pompeo, (2004), “uma condição necessária e suficiente para que um quadrilátero convexo ser inscritível é possuir ângulos opostos suplementares” (p. 172)

6. O ENSINO DE MATEMÁTICA POR ATIVIDADE

As atividades que serão demonstradas a seguir foram elaboradas levando em consideração o Ensino de Matemática por Atividade, com a perspectiva de propor para os estudantes um novo formato de ensino, diferente daquele que eles estão acostumados a presenciar rotineiramente das aulas de matemática. Esta alternativa metodológica foi feita devido seus atributos que:

> [...] pressupõem a possibilidade de conduzir o aprendiz a uma construção constante das noções matemáticas presentes nos objetivos da atividade. Isso é evidenciado na elaboração da mesma, até a sua realização e experimentação, visto que cada etapa vivida pelo estudante serviria de apoio para a discussão e posterior elaboração final dos conceitos em construção [...]. (SÁ 2009, p.18).

Com isto, podemos dizer que o ensino de Matemática baseado em atividades leva o estudante ao patamar de protagonistas de sua própria aprendizagem, pois o mesmo estará diante uma abordagem de ensino que terá uma ligação direta com uma experiência real. Entretanto deve ficar claro que o professor precisa ser cuidadoso no momento de idealização das atividades, pois está construção é de suma importância para o entendimento do estudante do objetivo e dos procedimentos que deve seguir para caminhar progressivamente no sentido de tentar alcançar o conhecimento em construção.

O professor tem papel na elaboração das atividades como esclarecido acima, e também tem a função de orientador do processo, sendo que ele deve:

> [...] preocupar-se com o modo de elaboração dessas atividades e com as orientações dadas aos estudantes durante a realização das mesmas, pois isso será decisivo no processo de aprendizagem do aluno [...] (SÁ 2009, p. 18).

Por este motivo é extremamente necessário à elaboração de atividades com uma abordagem que instrua os estudantes, onde ele e sua aprendizagem sejam o foco central. Para tanto, o autor expõem algumas sugestões que segundo ele são importantes para a construção das atividades de aprendizagem, que são:

> - As atividades devem apresentar-se de maneira auto-orientadas para que os alunos consigam conduzir-se durante a construção de sua aprendizagem;
> - Toda a atividade deve procurar conduzir o aluno a construção das noções matemáticas através de três fazes: a experiência, a comunicação oral das ideias apreendidas e a representação simbólica noções construídas;
> - As atividades devem prever um momento de socialização das informações entre os alunos, pois isso é fundamental para crescimento intelectual do grupo. Para que isso ocorra, o professor deve criar um ambiente adequado e de respeito mútuo entre os alunos e adotar a postura de um membro mais experiente do grupo e que possa colaborar na aprendizagem deles;
> - As atividades devem ter características de continuidade, visto que precisam conduzir o aluno ao nível de representação abstrata das ideias matemáticas construídas a partir das experiências concretas vivenciadas por ele;
> - De acordo com o modelo proposto por Dockweiller (1996), as atividades propostas pelo professor podem se apresentar de três maneiras: desenvolvimento, conexão e abstração, de modo que sejam sequencialmente apresentadas e possam contribuir para a construção gradual dos conceitos matemáticos (SÁ, 2009, p.18).

Com o explicado, estamos conscientes de que as atividades por nós concebidas deveram orientar o processo de ensino e aprendizagem, com a possibilidade de expor aos docentes de matemática uma metodologia que tente minimizar alguns entraves em sua prática que levam em consideração o conteúdo que esta sendo trabalhado. Contribuindo ainda, com a possibilidade de uma mudança no olhar do estudante relacionado aos conteúdos da disciplina, porque ele torna-se um agente ativo no processo, o qual faz a descobertas e generalizações que são inerentes a matemática.

Neste sentido, cada uma das atividades que fazem parte desta pesquisa terá uma estrutura com titulo, com objetivo, com os materiais necessários e os procedimentos a serem realizados. Para algumas atividades foi solicitado observações a serem feitas para se chegar a uma conclusão final que se aproxime da expressada nas análises *a priori,* que foram feitas no final de cada uma delas, bem como os quadros que aparecem em quase todas as atividades que estão todos preenchidos com as respostas que se deseja dos estudantes.

Além disso, o tempo que achamos conveniente para a realização destas atividades na escola serão de 7 (sete) encontros que aconteceram no mesmo horário das aulas. Também deverá ser marcado o tempo de realização de cada atividade, para a confecção de gráficos estatísticos para a comparação com outras pesquisas que foram feitas com atividades iguais ou que se assemelharam as expostas aqui.

A seguir, antes de demonstrar nossa atividade, achamos conveniente reforça nosso referencial teórico teceremos alguns comentários sobre os momentos do Ensino por atividade aperfeiçoado e publicado por Sá (2019).

6.1. Momentos do Ensino por Atividade

Os momentos do Ensino por Atividade que serão abordados neste tópico foram idealizados no trabalho de Sá (2019), o qual foi disponibilizado para nós pelo autor, o que reforça nossa fundamentação teórica relacionada à metodologia de ensino que adotamos para produção de nossa sequência didática voltada para o ensino de quadriláteros.

De acordo com Sá (2019), o ensino de matemática por meio de atividade possui dois tipos de atividades, a saber: as atividades de conceituação e as atividades de redescoberta.

As atividades de conceituação correspondem aquela que tem o objetivo de induzir os estudantes a perceber uma determinada situação em relação a objeto matemático, ou seja, perceber a definição deste objeto.

As atividades de redescoberta segundo Sá (2017), tem o objetivo de conduzir os estudantes a descobrir por si, a relação ou propriedade pautada em um objeto ou uma operação de natureza matemática, ou seja, este tipo de atividade corresponde a uma exploração do objeto matemático, antes da apresentação dos resultados.

Para as aulas que utilizam o ensino de por Atividade, sejam estas atividades de conceituação o de redescoberta, Sá (2019) orienta que elas podem ser divididas didaticamente nos seguintes momentos, a saber: organização, apresentação, execução, registro, análise e institucionalização.

O momento de organização é destinado a disposição da turma em equipes compostas de 2 (dois) ou 4 (quatro) estudantes, sendo que esta divisão deve ser espontânea, não sendo aconselhável o trabalho de forma individual, pois o mesmo pode inviabilizar a troca de ideias importante para o processo de aprendizagem. Ao professor cabe a condução dos trabalhos e a orientação para a formação das equipes, para tanto, deve mostrar segurança para a condução desta organização e com isso, evitar que os estudantes não percam tempo com atividades que não sejam a de organização da turma em sala.

O momento de apresentação das atividades pelo professor corresponde à etapa de distribuição dos materiais necessários para a realização mesma, antecipadamente planejada. Neste caso, inclui-se ai o roteiro da atividade que pode ser impresso, escrito no quadro ou ainda, exposto em projetor, tudo vai depender da estrutura da escola. Para que isso ocorra o mais rápido possível é aconselhável a distribuição das atividades em kits, evitando assim o desperdício de tempo. Já em relação aos alunos, neste momento espera-se a máxima atenção para os procedimentos para que posteriormente se inicie a etapa de execução.

O momento da execução é a etapa de experimentação, nela o pesquisador manuseia os materiais, sendo que para as equipes cabe seguir as orientações estabelecidas pela atividade. Estas equipes devem fazer as atividades livremente, sendo que o professor deve supervisionar o processo tirando duvidas quando for solicitado ou quando surgir dificuldades na execução das atividades.

Para o bom andamento da atividade na etapa de execução, o professor deve ficar atento para que os estudantes não tenham distrações, evitando conversas paralelas ou visita dos estudantes em outro grupo, com isso os discentes devem se concentrar em seguir as instruções do roteiro da atividade para a sua execução.

Durantes a execução da atividade, Sá (2019) recomenda que o professor/pesquisador, quando solicitado pelos estudantes, forneça instruções cuidadosas de maneira claras e precisas para sanar dificuldades. Além disso, se as dúvidas forem percebidas por motivo de falha na instrução contidas nos procedimentos ou mesmo nos materiais, elas devem ser socializadas em sala para toda a turma.

O momento de registro consiste na etapa de sistematização das informações obtidas através das anotações dos estudantes feitas no espaço destinado a esta. O professor deve estar atento para suprir as dúvidas que pareçam em relação aos registros feitos pelos estudantes, e estes devem ser colocados no local adequado contido no roteiro da atividade.

O quinto momento é o de análise, segundo Sá (2019) ele é de extrema importância devido, os estudantes através das informações registradas tentem perceber uma relação esperada relacionada ao objetivo da atividade. Neste momento os estudantes são apresentados às informações esperadas pelo pesquisador.

O momento de institucionalização é a etapa onde será expressa a conclusão da turma, estabelecida em comum acordo a partir das conclusões produzidas na fase de análise pelos grupos, ou seja, onde é produzido um enunciado ou conclusão em relação à atividade realizada. Com isso Sá (2019) alerta, que as primeiras conclusões podem não ser adequados para o molde de um texto conclusivo, pois os estudantes não estão acostumados com produção deste tipo de construção escrita.

Na continuação, os estudantes devem escrever no quadro o enunciado que foi adotado por cada equipe como o oficial. Após a conferência das conclusões disposta no quadro por todas as equipes o professor, deve começar a indagar os estudantes no sentido de apontar qual destas conclusões seria mais adequada para o entendimento de uma pessoa que não participou da atividade. Além disso, o professor pode fazer comentários sobre a estrutura de um texto conclusivo e ainda, construir junto com os estudantes uma conclusão que seria mais adequada ao entendimento de uma pessoa que não participou da atividade.

Na fase de institucionalização segundo Sá (2019) é necessário fazer perguntas que induzam o estudante a elaborar conclusões mais adequadas possíveis para a atividade que está sendo desenvolvida. Para exemplificar tais perguntas que podem ser feitas aos estudantes temos, “O que foi pedido na atividade” e “o que podemos concluir sobre os procedimentos realizados na atividade”. Com isso, a conclusão adotada em comum acordo com as equipes será a conclusão da turma, o que indica o final dos momentos do ensino por atividade.

Ante mesmo de estar em sala com as atividades prontas é necessário que haja uma produção das mesmas, onde Sá (2019) coloca suas considerações em relação a produção tanto de atividade de conceituação, quanto de atividade de redescoberta.

Para esta produção, o autor coloca que serão necessários 10 (dez) momentos, a saber: a determinação, a construção do objetivo, a seleção dos materiais, a elaboração dos procedimentos, a elaboração do espaço de registro, a elaboração do desafio, a previsão de institucionalização, a finalização do roteiro, a verificação e por fim a elaboração de questões.

Com estas informações, ficam claro os procedimentos e as condutas que devemos ter enquanto pesquisadores que utilizam o Ensino de matemática por atividade como metodologia de ensino. E os momentos do ensino por atividade expressão de forma contundente a maneira de se proceder a realização das atividades em sala de aula, o que ainda deixa esclarecido a participação, tanto para professor quanto do estudante durante o processo, o que é fundamental para a execução das atividades e por consequência de um ensino verdadeiramente significativo.

Nós comentaremos no próximo tópico sobre as considerações sobre o uso do Ensino por Atividade na pesquisa e posteriormente, apresentaremos aas atividades que compõem nossa sequência didática.

6.2. Considerações do uso do Ensino por Atividade

Com isso em uma perspectiva de mudança em nossa conduta em sala de aula, acreditamos que o Ensino por meio de atividades pode ser fundamental como metodologia de ensino, proporcionando aos estudantes um protagonismo que eles não estão acostumados a ter. E ainda, fazendo uso dos momentos do ensino por atividades acreditamos em nossa contribuição para um ensino e aprendizagem de matemática com mais qualidade, onde os conteúdos poderão ser verdadeiramente assimilados pelos estudantes.

Nós podemos expressar ainda que ensino de Matemática baseado em atividades é uma metodologia inovadora no sentido de proporcionar ao estudante uma consciência de que ele, em colaboração com o professor, é o principal agente de construção de sua aprendizagem. E nestes moldes, o estudante começa a fazer descobertas dos tópicos a serem aprendidos e que gradualmente serão incorporados em sua bagagem cognitiva.

Assim, nossas atividades para o ensino de quadriláteros tiveram sua produção conduzida pelo Ensino por Atividade. Deste modo, levando em consideração as análises prévias foram idealizadas 10 (dez) que serão expostas a seguir com suas respectivas análises a *priori* e suas questões de aprofundamento. Além disso, os momentos do ensino por atividades aqui relatadas, certamente farão parti de nossa conduta durante a experimentação que posteriormente será realizada.

7. ATIVIDADES PARA O ENSINO DE QUADRILÁTEROS

Como comentado anteriormente, elaboramos uma sequência didática que se fundamentou na metodologia do Ensino de Matemática por Atividade, tendo a perspectiva para está pesquisa, de levar o estudante do ensino fundamental de uma escola pública para uma aprendizagem mais significativa dos principais entes conceituais que compõem o conteúdo de quadriláteros para este nível de ensino. Está escolha foi feita principalmente pelo fato do Ensino por Atividade ser conduzido por um roteiro dinâmico planejado para a interação do estudante, onde este, não é um mero espectador, mas um ente com participação fundamental na sua própria aprendizagem, onde por si, e com intervenções do professor, faz a descoberta dos conhecimentos de forma cognitiva.

A sequência didática foi constituída inicialmente com 10 atividades e questões de aprofundamentos para cada uma delas que exploraram o ensino de quadrilátero para o ensino fundamenta, porém a atividade 7 (sete) foi aperfeiçoada a dividida em 3 atividades, pois durante a experimentação ela se mostrou muito complexa, tanto na sua interpretação por parte dos estudantes, quanto pela conclusão que deveria ser descoberta por eles, além disso, este fato foi confirmado após a analise dos dados fornecidos pela experimentação.

As atividades que compõem nosso trabalho abordaram os seguintes tópicos, como podemos observar no quadro a seguir:

Quadro 03: Tópicos abordados na Sequência Didática

A Definição de Quadriláteros

↓

Quadriláteros convexos e não convexos

↓

Identificação dos quadriláteros

↓

Propriedades dos quadriláteros

↓

Soma dos ângulos internos

↓

Soma dos ângulos externos

↓

Propriedades das diagonais

↓

Inscrição e Circunscrição

↓

Base Média do Trapézio

Fonte: pesquisa (2018)

A seguir estão as atividades que achamos convenientes para ser trabalhado o conteúdo de quadriláteros para o ensino fundamental.

7.1. Sequência Didática sobre o ensino de quadriláteros

Aqui estão dispostas as atividades que compõem nossa sequência didática para o ensino de quadrilátero no nível fundamental, a qual foi idealizada levando em consideração as análises previas que diagnosticaram as principais dificuldades relacionadas a este objeto de estudo. Nossa investigação inicia, mostrou os estudantes possuem dificuldades o que tange a identificação destas figuras planas (quadriláteros) suas características e propriedades. Com isso propomos o conjunto de atividades que será visto a seguir.

7.2. Atividade 01

Esta será nossa primeira atividade que corresponde ao tópico inicial do assunto de quadriláteros. Pretendemos ensinar o conceito de quadriláteros, para tanto, ela contém outras informações como: o titulo, os materiais a serem utilizados, os procedimentos e quadro que deve ser preenchido pelos estudantes levando em consideração o quadro de polígonos. Abaixo da atividade estão as análises a *priori,* seguido de suas questões de aprofundamento.

ATIVIDADE 01

Título: Quadriláteros
Objetivo: conceituar quadriláteros
Material: Roteiro da atividade; quadro de polígonos;
Procedimentos:

- A partir das observações do quadro de polígonos;
- Identifique com a letra ***Q*** os polígonos que possuem somente quatro lados;
- Identifique com a letra ***P*** os polígonos que não possuem somente quatro lados;
- Com isso complete o quadro a seguir;

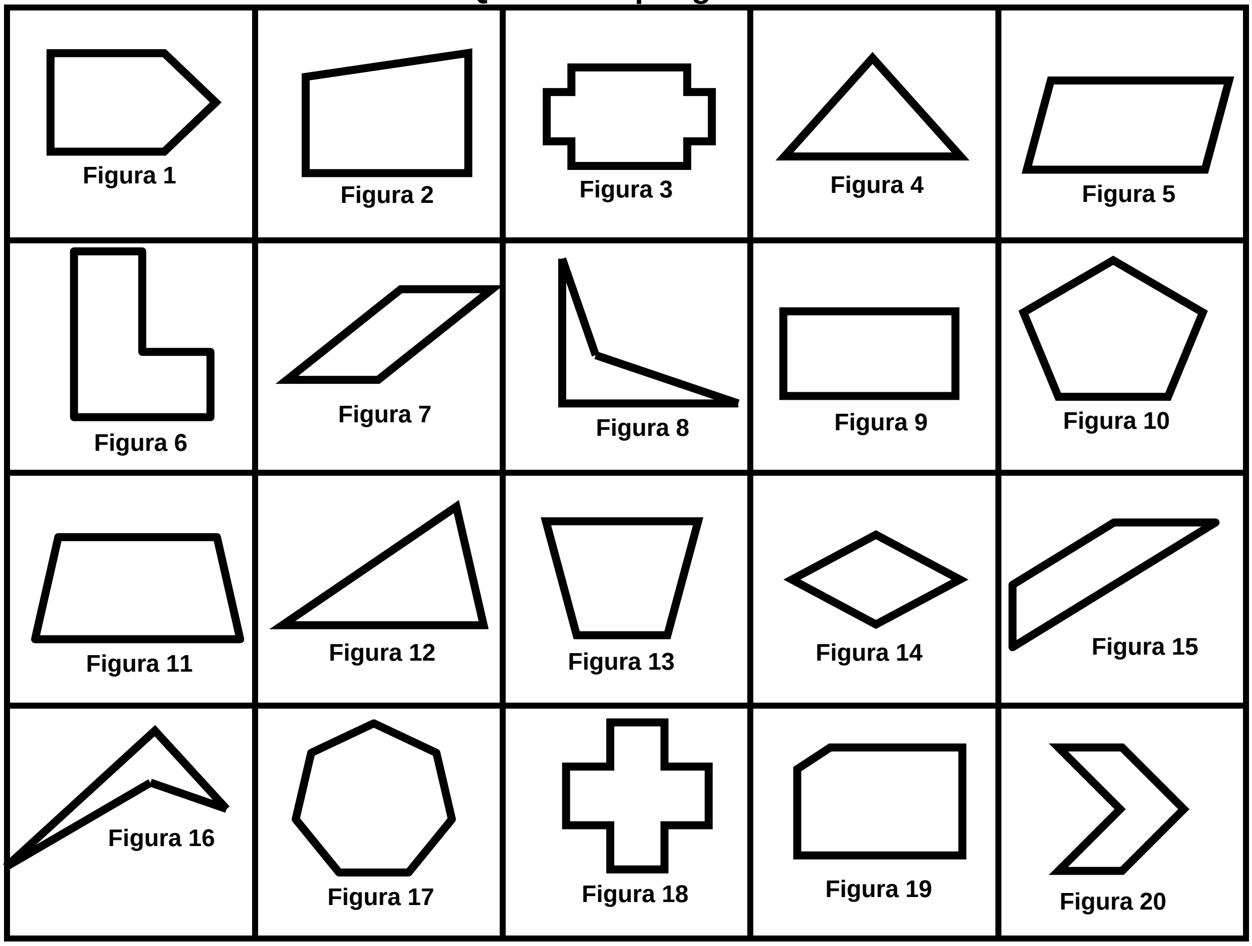
Figuras que possuem somente 4 lados (**Q**)	Figuras que não possuem somente 4 lados (**P**)

Observação:

Definição:

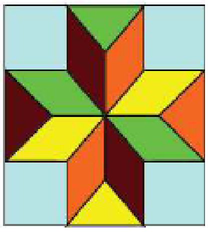
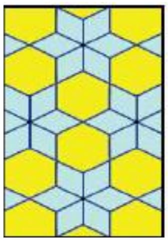
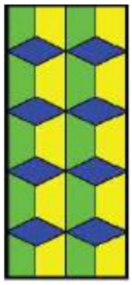
Fonte: pesquisa (2018)

Quadro de polígonos

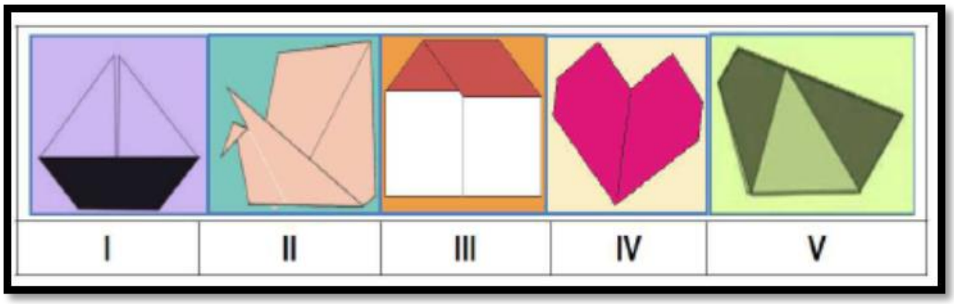


Questões propostas sobre a Atividade 01

01- (Adaptada de SAESP- Banco de questões) Dentre os mosaicos abaixo, aquele que é formado somente por quadriláteros é:

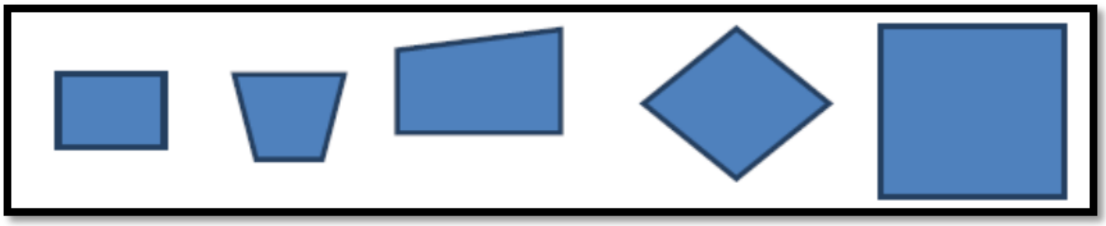
A)  **B)**  **C)**  **D)** 

02- (Adaptada de SAESP- Banco de questões) As figuras abaixo mostram origamis (dobraduras), vistos de frente e que Mariana faz como artesanato. Eles serão usados para construir móbiles para uma aula de Geometria. Mariana só pode usar aqueles cujas faces possuem quadriláteros. Ela deve escolher apenas os origamis representados nas figuras:



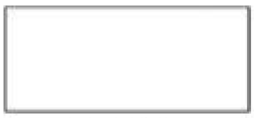
A) I, II **B) II, III, e V** **C) I, II, III** **D) I e V**

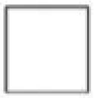
03- Observando as figuras a seguir, pode-se afirmar que elas têm em comum:



A) O tamanho do ângulo
B) O numero de lados
C) O perímetro
D) Área

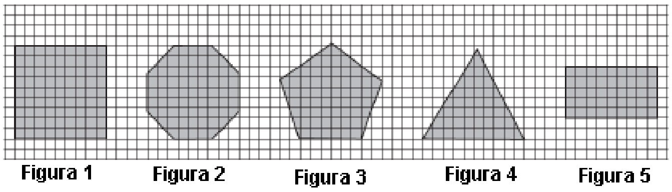
04- (Adaptada de Prova Brasil- 2011) Observe as figuras abaixo. Considerando essas figuras, Marque V para verdadeiro e F para falso as afirmações a seguir:


retângulo

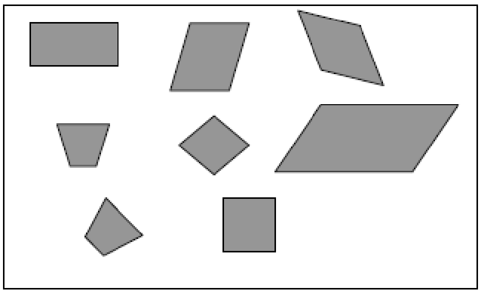

quadrado

( ) os ângulos do retângulo e do quadrado são diferentes.
( ) somente o quadrado é um quadrilátero.
( ) o retângulo e o quadrado são quadriláteros.
( ) o retângulo tem todos os lados com a mesma medida.

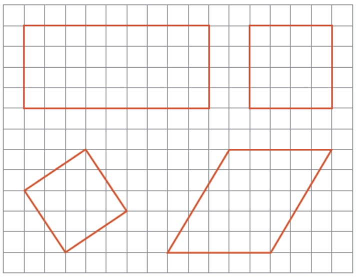
05- Veja as figuras abaixo. Quais dessas figuras são quadriláteros?
A) 1 e 4. B) 2 e 3.
C) 1 e 5. D) 4 e 5.



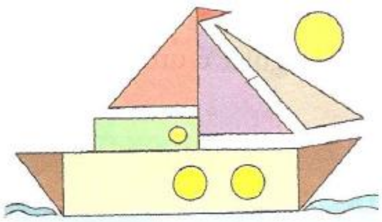
06- Mariana colou diferentes figuras numa página de seu caderno de Matemática, como mostra o desenho abaixo.
Essas figuras têm em comum
(A) o mesmo tamanho.
(B) o mesmo número de lados.
(C) a forma de quadrado.
(D) a forma de retângulo.



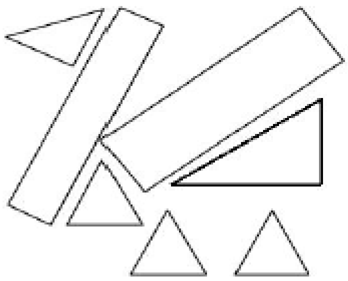
07- (Saresp) Os desenhos ao lado representam figuras planas que tem em comum a propriedade de terem:
a) Pelo menos um ângulo
b) todos os lados de mesma medida
c) lados opostos paralelos dois a dois
d) lados consecutivos de mesma medida



08- No desenho abaixo aparece um barco feito a partir de várias formas geométricas.
Quantos quadriláteros aparecem no desenho?
(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7



09- (Prova Brasil) Joana usou linhas retas fechadas para fazer este desenho:
Quantas figuras de quatro lados foram desenhadas?
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5



Orientações Didáticas Especificas

Como está será a primeira atividade, acreditamos que os alunos terão dificuldade de realizá-la neste primeiro momento, pois os mesmos não estão acostumados com o ensino por atividade. Espera-se que os alunos consigam perceber os polígonos que tem apenas quatro lados identificando-os com a letra **Q,** os diferenciando dos polígonos que possuem mais lados que serão marcados com a letra **P.** deste modo, tentar preencher o quadro expressando observações para posteriormente chegando a uma definição, semelhantes ou parecidas às dadas a seguir: *quadriláteros são polígonos convexos que possuem somente quatro lados.*

Orientações Didáticas Gerais

1. Organizar os discentes em equipes, as quais devem ser preferencialmente formadas de maneira espontânea pelos discentes, de no máximo quatro integrantes;

2. Distribuir o roteiro da atividade de acordo com o número de integrantes de cada equipe;

3. Orientar os discentes na realização dos procedimentos descritos no roteiro da atividade;

4. Auxiliar os discentes em casos de dúvidas ou na ocorrência de dificuldades durante a execução;

5. Intervir, sempre que necessário, de maneira clara e precisa de modo a permitir a continuidade da atividade;

6. Orientar os estudantes para o preenchimento de suas observações sobre as características encontradas;

7. Orientar os discentes para a socialização de suas observações e definições.

8. Pedir aos estudantes que selecionem a melhor definição encontrada pela equipe.

9. Solicitar que um membro da equipe escreva no quadro a melhor resposta da equipe para sua socialização.

10. Apresentar aos estudantes a formalização tomando como base as próprias observações e definições dos mesmos;

11. Orientar para que os estudantes resolvam as questões propostas referente à atividade.

7.3. Atividade 02

Com esta atividade pretendemos ensinar ao conceito de quadriláteros convexo. Ela possui além do titulo, os materiais que serão necessários para sua confecção, os procedimentos e o quadro a ser preenchido pelos estudantes tendo como suporte o quadro de quadriláteros. Após a atividade estão as análises a *priori* e as questões de aprofundamento.

ATIVIDADE 02

Título: Quadriláteros convexos
Objetivo: conceituar quadriláteros convexos
Material: Roteiro de atividade; quadro de quadriláteros, régua, lápis ou caneta;
Procedimentos:

- Observe cada figura do quadro de quadriláteros,
- Faça segmentos de retas a partir de dois pontos AB,
- Identifique com letra **C** os quadriláteros cujos segmentos determinados por dois pontos internos quaisquer do quadrilátero estão totalmente contido no interior do quadrilátero;

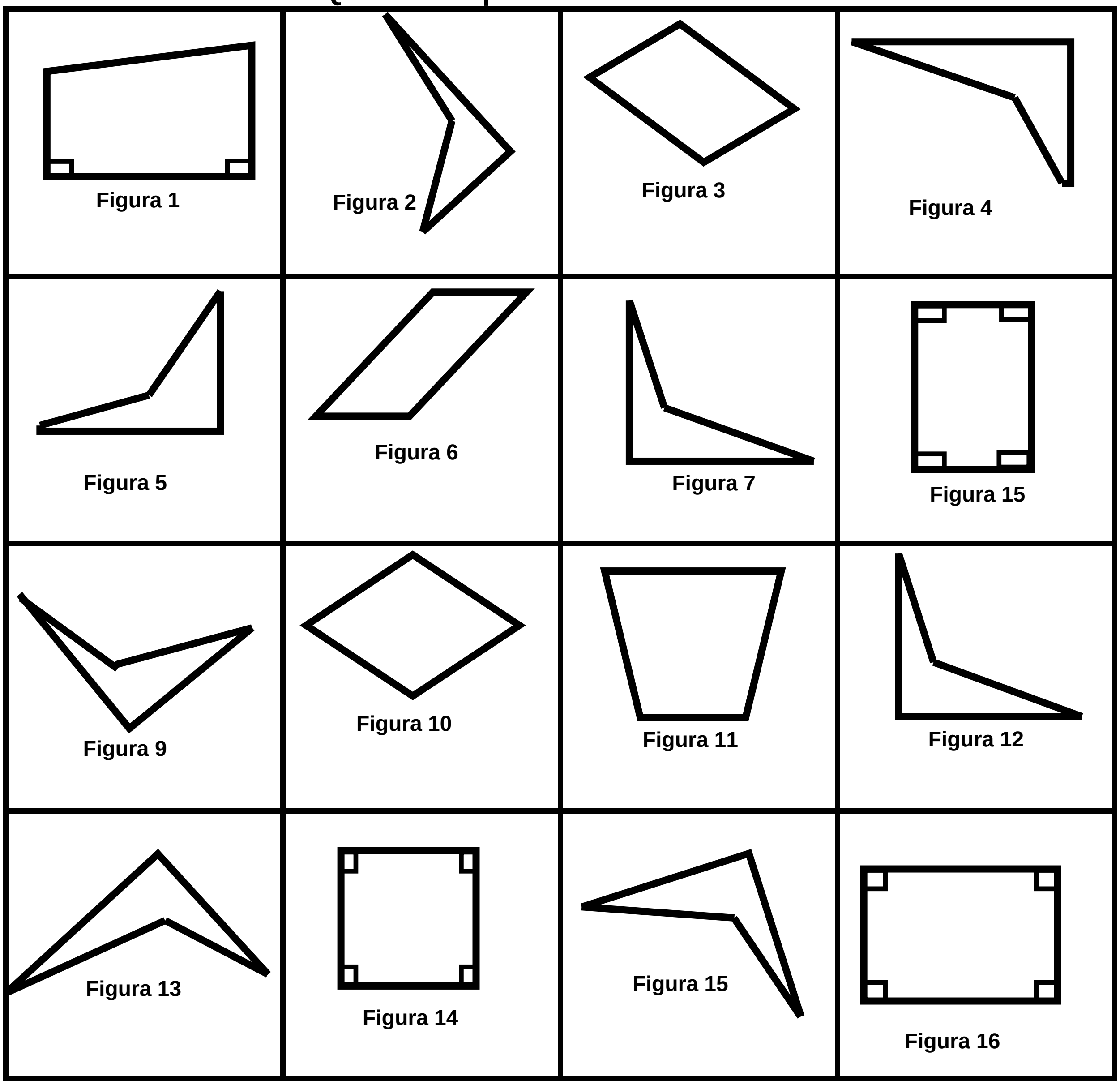
Figuras com a letra **C**	Figuras que não tem **C**

Observação:

Definição:

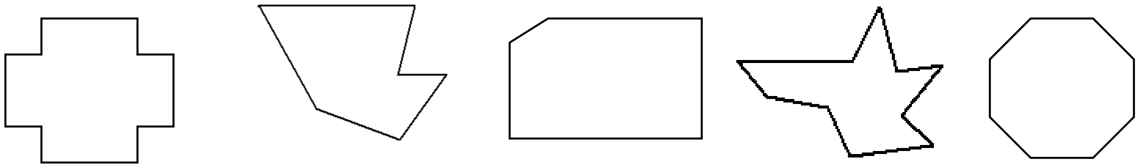
Fonte: pesquisa (2018)

Quadro de quadriláteros Convexos

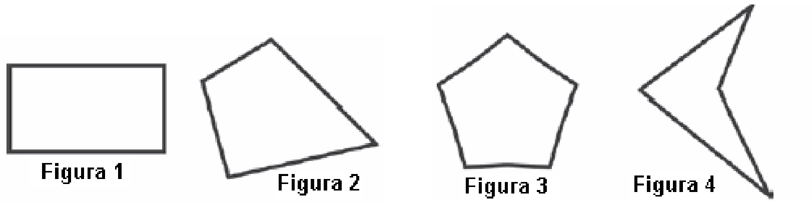


Questões propostas sobre a atividade 02

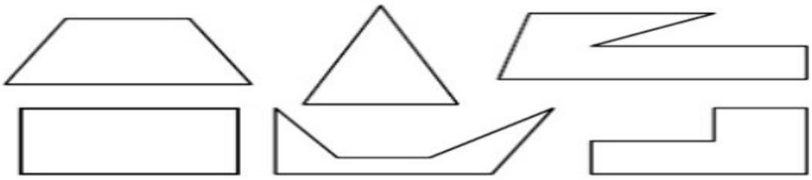
01- Classifique os polígonos em côncavos ou convexos.



02- (SAERJ/Adaptada). Observe as figuras abaixo. Quais dessas figuras são podemos dizer que é um quadrilátero não convexo:



03- Identifiquem quais das figuras abaixo são polígonos convexo e quais são polígonos não convexos



Orientações Didáticas Especificas.

Nós esperamos que esta atividade seja feita bem mais rápida pelos estudantes, pois eles já tiveram experiência com a primeira atividade, onde possivelmente ficaram mais à vontade com a metodologia de ensino. Deste modo, após serem feitos vários seguimentos nos quadriláteros do quadro de quadriláteros, os estudantes provavelmente identificaram alguns quadriláteros que os seguimentos de retas determinados por dois pontos quaisquer estão sempre contidos no seu interior do polígono e outros que se encontram também no exterior de algumas figuras. Com isso, fazer observações para o preenchimento do quadro e expressar observações e uma conclusão. Sendo esta última: *Os quadriláteros convexos são figuras geométricas onde, dados dois pontos A e B quaisquer em seu interior, é impossível encontrar um segmento de reta AB com pelo menos um ponto no exterior do polígono. E quadriláteros não convexos são figuras geométrica onde, dados dois* *pontos A e B quaisquer em seu interior, é possível encontrar um segmento de reta AB com pelo menos um ponto no exterior do polígono.*

Orientações Didáticas Gerais

1. Organizar os discentes em equipes, as quais devem ser preferencialmente formadas de maneira espontânea pelos discentes, de no máximo quatro integrantes;

2. Distribuir o roteiro da atividade de acordo com o número de integrantes de cada equipe;

3. Orientar os discentes na realização dos procedimentos descritos no roteiro da atividade;

4. Auxiliar os discentes em casos de dúvidas ou na ocorrência de dificuldades durante a execução;

5. Intervir, sempre que necessário, de maneira clara e precisa de modo a permitir a continuidade da atividade;

6. Orientar os estudantes para o preenchimento de suas observações sobre as características encontradas;

7. Orientar os discentes para a socialização de suas observações e definições.

8. Pedir aos estudantes que selecionem a melhor definição encontrada pela equipe.

9. Solicitar que um membro de cada equipe escreva no quadro a melhor resposta da equipe para sua socialização.

10. Apresentar aos estudantes a formalização tomando como base as próprias observações e definições dos mesmos;

11. Orientar para que os estudantes resolvam as questões proposta referente à atividade.

7.4. Atividade 03

Com esta atividade pretendemos ensinar a identificação dos quadriláteros, para tanto ela está composta de titulo, objetivo, materiais a serem utilizados, procedimentos, as fichas (quem eu sou?) e quadro de quadriláteros. Posteriormente, estão expressas as análises a *priori* e suas questões de aprofundamento.

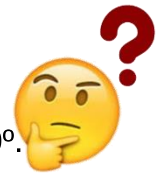
ATIVIDADE 03

Título: Quem eu sou?
Objetivo: Identificar quadriláteros
Material: Fichas do “Quem eu sou?”, quadro de quadriláteros, régua, transferidor, caneta ou lápis
Procedimentos:
01. Escolha uma ficha;
02. Observe as fichas e dos quadriláteros do quadro de quadriláteros;
03. Leia atentamente a ficha e identifique o quadrilátero correspondente;

QUEM EU SOU?
Nº 01

1) Sou um quadrilátero.
2) Tenho quatro lados.
3) Meus ângulos opostos são congruentes.
4) Possuo os lados opostos paralelos
5) **Quem eu sou?** ______________________________

QUEM EU SOU?
Nº 02



1) Sou um quadrilátero.
2) Tenho quatro lados.
3) Possuo apenas dois lados paralelos
4) Os dois ângulos que tocam o mesmo lado não paralelo somam 180º.
5) Meus lados não paralelos não são congruentes.
6) **Quem eu sou?** ______________________________

QUEM EU SOU?
Nº 03

1) Sou um quadrilátero.
2) Tenho quatro lados.
3) Possuo apenas dois lados paralelos
4) Os dois ângulos que tocam o mesmo lado não paralelo somam 180º.
5) Possuo dois ângulos (bi- retângulo) de 90º.
6) **Quem eu sou?** ______________________________

QUEM EU SOU?
Nº 04

1) Sou um quadrilátero.
2) Tenho quatro lados.
3) Possuo quatro lados congruentes.
4) Tenho dois ângulos opostos maiores que 90º.
5) **Quem eu sou?** ______________________________

QUEM EU SOU?
Nº 05

1) Sou um quadrilátero.
2) Tenho quatro lados.
3) Tenho quatro ângulos internos congruentes com 90°.
4) Possuo lados congruentes tomados dois a dois.
5) **Quem eu sou?** ______________________________

QUEM EU SOU?
Nº 06

1) Sou um quadrilátero.
2) Tenho quatro lados.
3) Tenho quatro ângulos internos congruentes com 90°.
4) Possuo todos os lados congruentes.
5) **Quem eu sou?** ______________________________

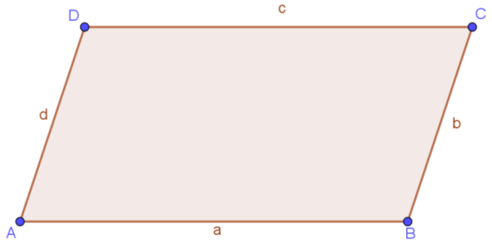
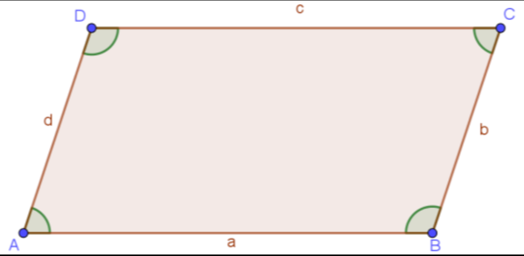
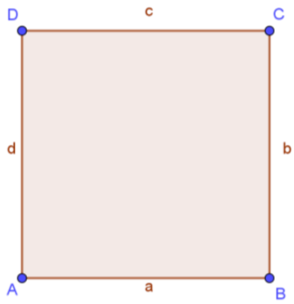
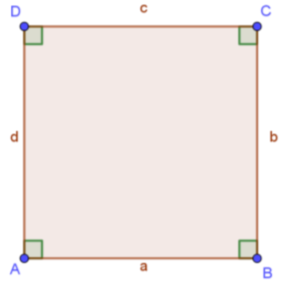
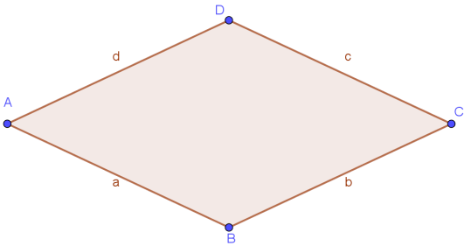
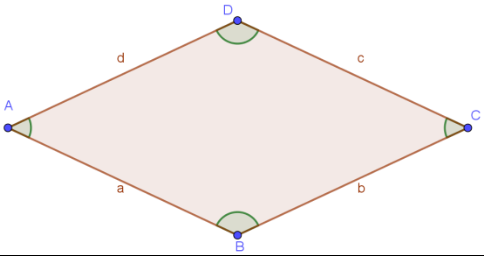
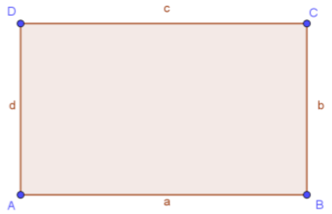
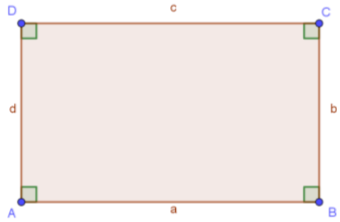
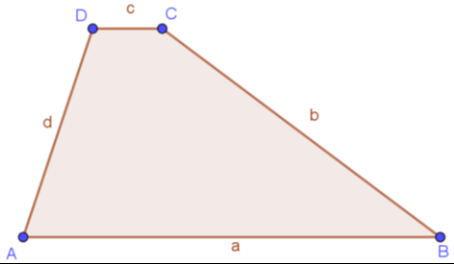
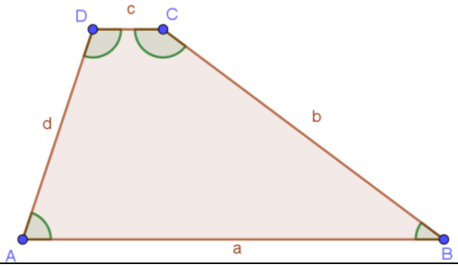
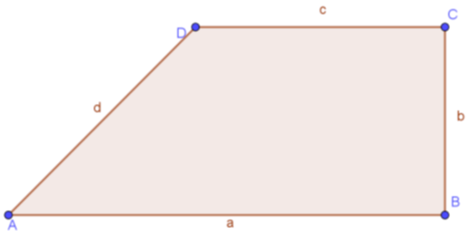
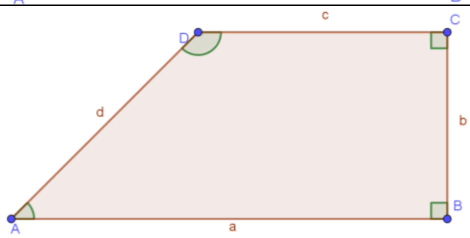
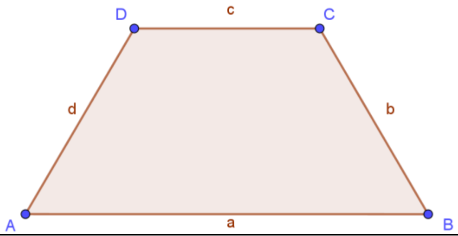
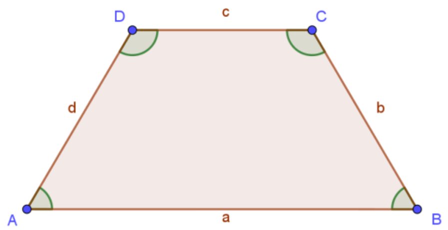
QUEM EU SOU?
Nº 07

1) Sou um quadrilátero.
2) Tenho quatro lados.
3) Possuo apenas dois lados paralelos
4) Os dois ângulos que tocam o mesmo lado não paralelo somam 180º.
5) Seus ângulos das bases são congruentes.
6) **Quem eu sou?** ______________________________

IDENTIFICAÇÃO DOS QUADRILÁTEROS
Nº 01 – Paralelogramo
Nº 02 – Losango
Nº 03 – Retângulo
Nº 04 – Quadrado
Nº 05 – Trapézio escaleno
Nº 06 – Trapézio Retângulo
Nº 07 – Trapézio Isósceles

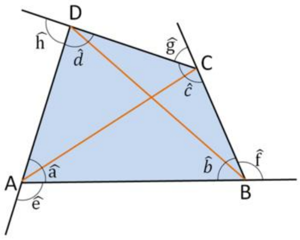
Fonte: pesquisa (2018)

Quadro de quadriláteros do “Quem eu sou”?

NOMES	QUADRILÁTEROS	ÂNGULOS
PARALELOGRAMO		
QUADRADRO		
LOSANGO		
RETÂNGULO		
TRAPÉZIO ESCALENO		
TRAPÉZIO RETÃNGULO		
TRAPÉZIO ISOSCELE		

Questões propostas sobre a atividade 03

01- Observe o quadrilátero seguinte e responda:

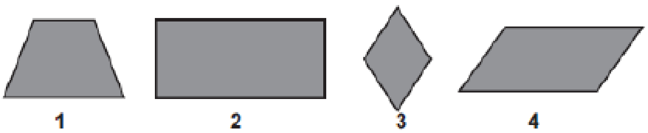


a) qual o ângulo oposto ao ângulo D?

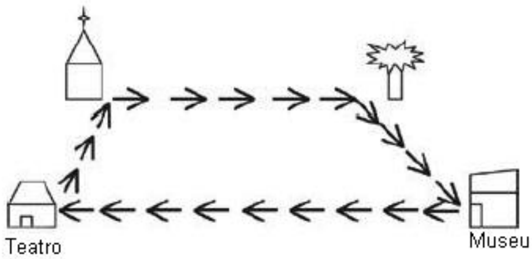
b) qual é o lado oposto ao lado AC?

c) quais são as diagonais deste quadrilátero?

02- Veja as figuras abaixo. O losango é a figura:



03- (Prova Brasil) Chegando a uma cidade, Fabiano visitou a igreja local. De lá, ele se dirigiu à pracinha, visitando em seguida o museu e o teatro, retornando finalmente para a igreja. Ao fazer o mapa do seu percurso, Fabiano descobriu que formava um quadrilátero com dois lados paralelos e quatro ângulos diferentes.



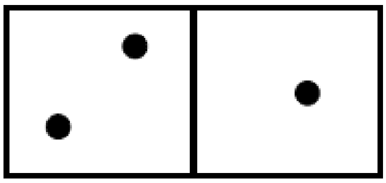
O quadrilátero que representa o percurso de Fabiano é um:

04- (Prova Brasil). A face superior das peças de um jogo de dominó tem formato de um quadrilátero. Observe o exemplo ao lado:

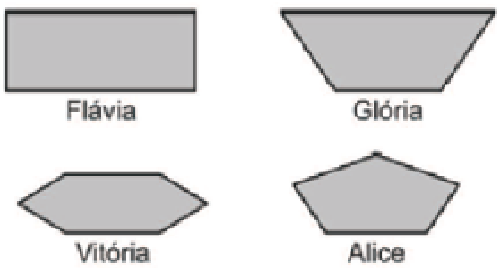
Qual o quadrilátero que melhor caracteriza a face superior da peça de um jogo de dominó?

(A) Trapézio. (B) Quadrado.

(C) Retângulo. (D) Losango.



05- Alice e suas amigas desenharam algumas figuras geométricas.

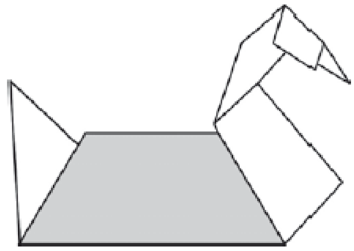


Quem fez o desenho de um retângulo?

(A) Flávia (B) Glória

(C) Vitória (D) Alice

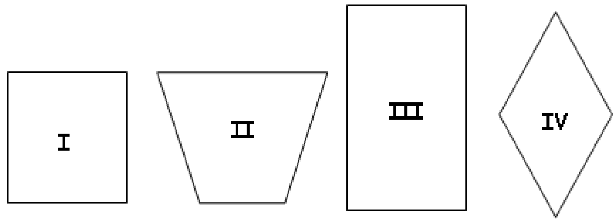
06- (SPEACE). Vera está fazendo um curso de dobradura. Ela fez um cisne usando duas cores de papel. Veja como ele ficou.



Vera percebeu que a parte mais escura do cisne tem a forma de um

A) losango. B) retângulo.
C) paralelogramo. D) trapézio.

07- (Prova Brasil 2011). Observe as figuras geométricas abaixo:

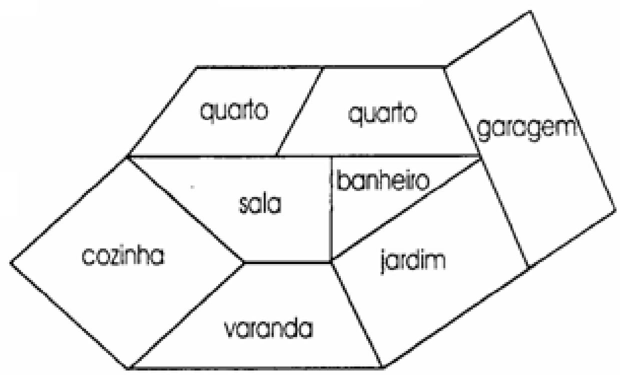


Quais das figuras geométricas são quadriláteros que possuem ângulos retos?

(A) I e III
(B) I e II
(C) I e IV
(D) III e IV

08- (Saresp 2007/Adaptada). Um quadro de avisos localizado no meu quarto tem forma retangular. Este quadro tem quantas diagonais?

09- João gosta de criar coisas diferentes. Um dia desenhou a planta de sua casa conforme a figura abaixo.



Quais partes da planta da casa de João lembram a figura de um retângulo?

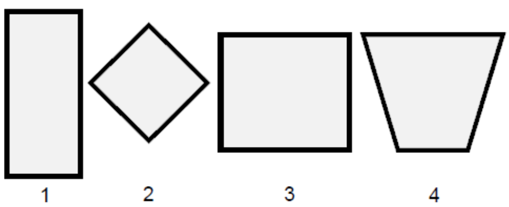
.

10- (Projeto conseguir – DC). Observe o telhado da casa abaixo:

O seu formato lembra qual quadrilátero?

(A) retângulo
(B) quadrado
(C) losango
(D) trapézio

11- (Projeto conseguir – DC). Uma fábrica produz espelhos de vários formatos. Observe algumas peças:



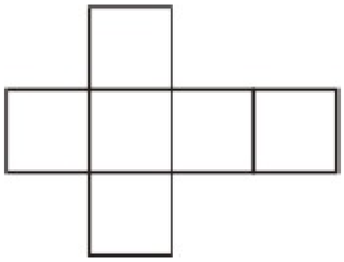
Qual par de espelhos possui seus lados com a mesma medida?

(A) 1 e 2

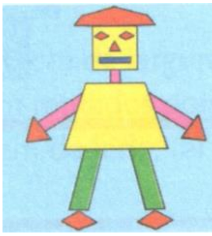
(B) 2 e 3
(C) 3 e 4
(D) 1 e 4

12- (Projeto conseguir – DC). Gabriel ganhou uma quadra de futebol de botão no seu aniversário.
Podemos afirmar que esse objeto tem
(A) somente 2 lados paralelos.
(B) exatamente 2 pares de lados paralelos.
(C) exatamente lados opostos que não são paralelos.
(D) exatamente 2 lados paralelos e 2 lados não paralelos.

13- Luana guarda seus livros em caixas que possuem a forma de um cubo. Hoje, ela ganhou uma destas caixas desmontada, representada na figura abaixo, e reparou que todas as 6 faces da caixa são iguais. Cada face da caixa de Luana tem a forma da *figura geométrica plana denominada
(A) retângulo (B) quadrado
(C) losango (D) círculo.



14- (Saresp – SP). Na fábrica de carros do meu tio, tem um robô muito engraçado. Ele é formado por figuras geométricas. As partes do robô que têm o formato de losango são:
A) mãos e pés; B) olhos e pés;
C) braços e chapéu; D) pescoço e pernas.



15- (Dolce/Pompeo) Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):
( ) Se dois lados de um quadrilátero são congruentes, então ele é uma paralelogramo.
( ) Se dois lados opostos de um quadrilátero são congruentes, então ele é um paralelogramo.
( ) Se dois lados opostos de um quadrilátero são congruentes e paralelos, então ele é um paralelogramo.

Orientações Didáticas Especificas

Nesta atividade os estudantes devem ler atentamente as fichas com as características dos quadriláteros, fazer as medições no quadro de quadrilátero e identificar os nomes dos quadriláteros correspondentes, levando em consideração as características de cada figura, deste modo, venha a chegar a identificar cada figura de acordo com suas características.

Orientações Didáticas

1. Organizar os discentes em equipes, as quais devem ser preferencialmente formadas de maneira espontânea pelos discentes, de no máximo quatro integrantes;

2. Distribuir o roteiro da atividade de acordo com o número de integrantes de cada equipe, juntamente com um envelope contendo as fichas com as características dos quadriláteros;

3. Orientar os discentes na realização dos procedimentos descritos no roteiro da atividade;

4. Auxiliar os discentes em casos de dúvidas ou na ocorrência de dificuldades durante a execução;

5. Intervir, sempre que necessário, de maneira clara e precisa de modo a permitir a continuidade da atividade;

6. Orientar os estudantes para o preenchimento dos nomes de cada quadrilátero sobre as características encontradas;

7. Orientar os discentes para a socialização de suas fichas.

8. Pedir aos estudantes que selecionem a melhores nomes encontrados pela equipe.

9. Solicitar que um membro de cada equipe socialize em voz alta as melhores respostas da equipe.

10. Apresentar aos estudantes à formalização tomando por base as próprias às características dos quadriláteros contidas nas fichas, usando, se possível um projetor;

11. Orientar para que os estudantes resolvam as questões propostas referente a atividade proposta.

7.5. Atividade 04

A atividade pretende ensinar a identificação dos quadriláteros e suas propriedades através de um jogo de baralho o qual adotamos o titulo de "Baralho dos Quadriláteros". Nela serão expressas as regras do jogo e as cartas estão logo depois da atividade, temos ainda as análises a *priori* e posteriormente suas questões de aprofundamento.

ATIVIDADE 04

Título: Baralho dos Quadriláteros
Objetivo: Identificar quadriláteros e suas propriedades principais
Material: Baralho com 36 cartas, sendo: 11 cartas-quadriláteros, 11 cartas-nomenclatura e 11 cartas-propriedade, 3 cartas-coringas.

Participantes: de 2 a 4

Regras do Jogo:

01. Todas as cartas são embaralhadas.

02. Cada um dos jogadores deverá receber três cartas e as outras serão deixadas com a face virada para baixo sobre a mesa.

03. O jogador que iniciará a partida ficará a critério dos demais jogadores.

04. Os jogadores devem compor ternas válidas de carta-quadrilátero, carta-nomenclatura e carta-propriedade.

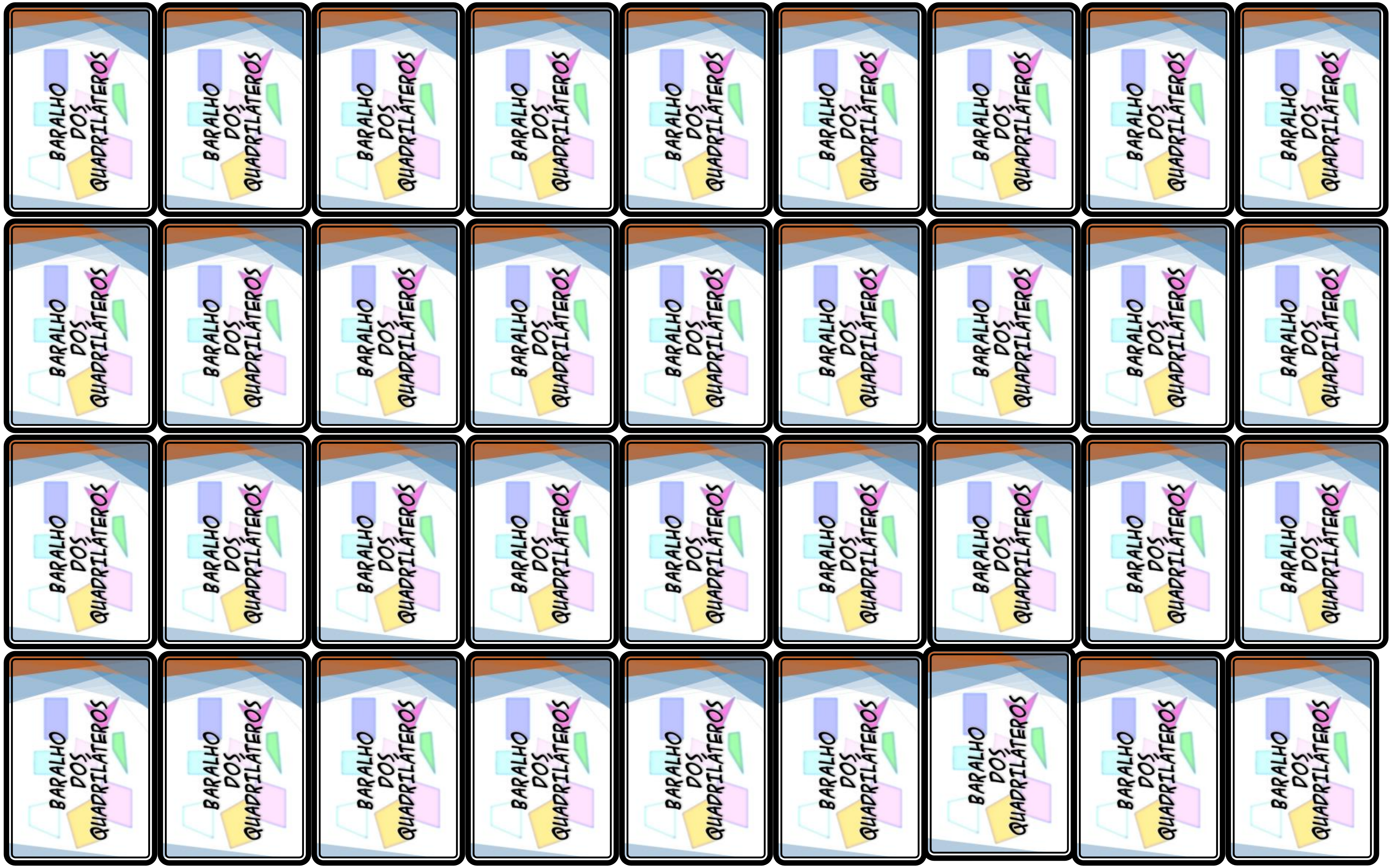
05. Uma terna de cartas é válida quando a figura do quadrilátero da carta-quadrilátero é representada através da carta-propriedade e a carta-nomenclatura corresponde ao nome da figura do quadrilátero representada na carta-quadrilátero.

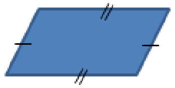
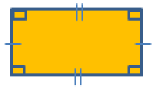
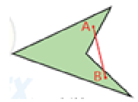
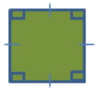
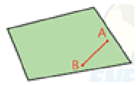
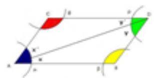
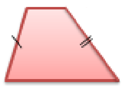
06. Na vez de cada jogar, este deve comprar uma carta do monte que está com a face para baixo na mesa e descartar uma carta, que fica com a face virada para cima.

07. O jogador da vez poderá comprar uma carta do monte ou pegar a carta descartada anteriormente.

07. O vencedor da partida é o jogador que compuser primeiro uma terna contendo cartas válidas.

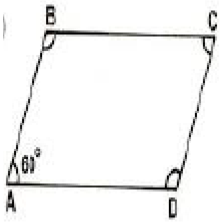
Fonte: pesquisa (2018)

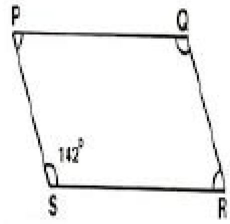

BARALHO DOS QUADRILÁTEROS

	Paralelogramo	Pares de lados opostos congruentes		Retângulo	Pares de lados opostos congruentes e Quatro ângulos congruentes		Quadrilátero Côncavo	Segmento de reta que contenha pontos externos ao quadrilátero
	Quadrado	Quatro ângulos internos congruente e Lados congruentes		Trapézio Isósceles	Lados não paralelos congruentes		Quadrilátero convexo	Segmento de reta com pontos sempre internos ao quadrilátero
Quatro lados	Quatro ângulos	Quatro vértices		Trapézio Retângulo	Possue dois ângulos de 90º graus		Soma dos ângulos internos dos quadrilateros	360º
	Losango	Lados congruentes		Trapézio Escaleno	Lados não paralelos não congruentes		Soma dos ângulos externos dos quadrilateros	360º

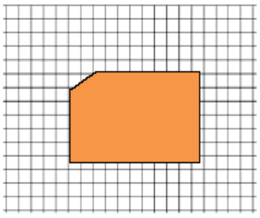
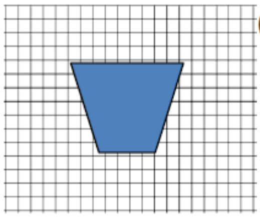
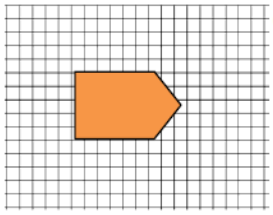
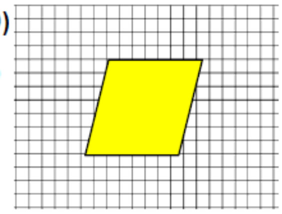
Questões propostas sobre a atividade 04

01- Calcule o valor de x nos paralelogramos:

a) 

b) 

02- Na aula de Matemática, a professora pediu que Tiago desenhasse, numa folha de papel quadriculado, "uma figura geométrica de 4 lados com somente 2 lados paralelos"

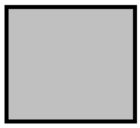
(A)  **(B)**  **(C)**  **(D)** 

Qual dos quadriláteros abaixo possui os ângulos internos opostos congruentes e os quatro lados com a mesma medida?

(A) Trapézio retângulo. (B) Retângulo. (C) Losango (D) Trapézio isósceles.

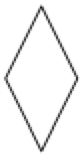
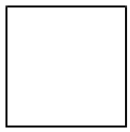
03- (Adaptado de Prova Brasil). Observe as figuras abaixo e marque V para verdadeiro e f para falso. Considerando essas figuras:

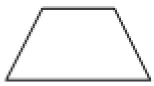
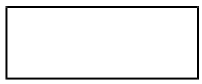

retângulo


quadrado

( ) os ângulos do retângulo e do quadrado são diferentes.
( ) somente o quadrado é um quadrilátero.
( ) O retângulo e o quadrado são quadriláteros.
( ) o retângulo tem todos os lados com a mesma medida.

04- Alguns quadriláteros estão representados nas figuras ao lado:
Qual dos quadriláteros possui apenas um par de lados paralelos?

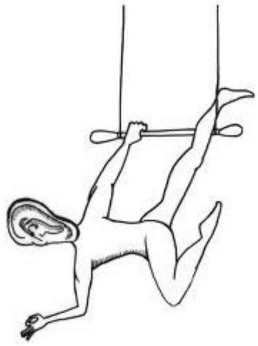
(A)  (B) 

(C)  (D) 

05- Uma fábrica de móveis lançou um modelo de cadeira cujo encosto tem a forma de um quadrilátero com dois lados paralelos e dois não paralelos e de mesmo comprimento. O modelo de cadeira que foi lançado pela fábrica tem o encosto das cadeiras na forma de um:

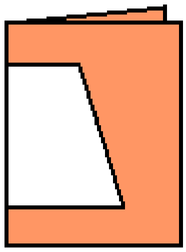
(A) losango. (B) paralelogramo. (C) trapézio isósceles. (D) trapézio retângulo.

06- O trapézio é um aparelho de ginástica usado para acrobacias aéreas nos espetáculos de circos. É composto por duas cordas presas a uma barra de ferro, que ficam presas a uma determinada altura.

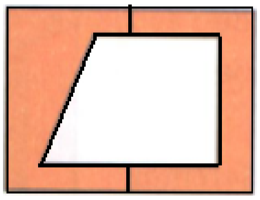


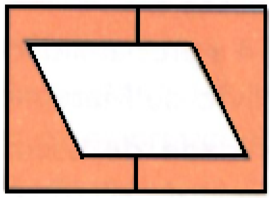
Com base nestas informações, podemos dizer que o trapézio:
(A) todos os lados iguais.
(B) todos os ângulos iguais.
(C) não é um quadrilátero.
(D) é um quadrilátero que tem somente dois lados paralelos.

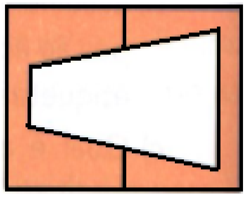
07- (Prova Brasil) Dobramos uma folha como na figura ao lado, depois recortamos e retiramos a parte branca.

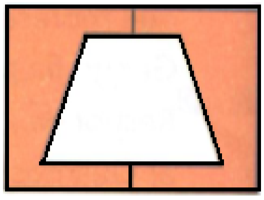


Em seguida, desdobrando a folha, obtemos:

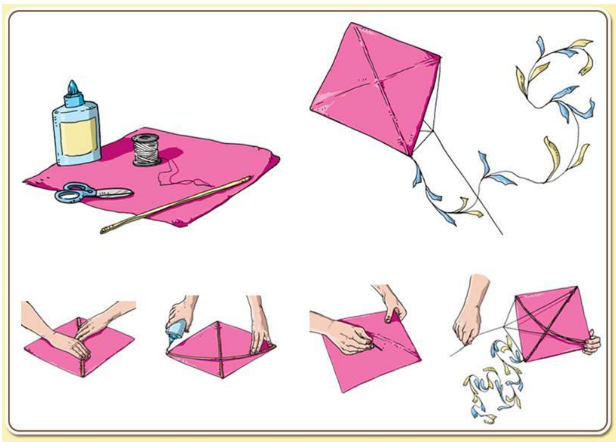
(A)


(B)


(C)


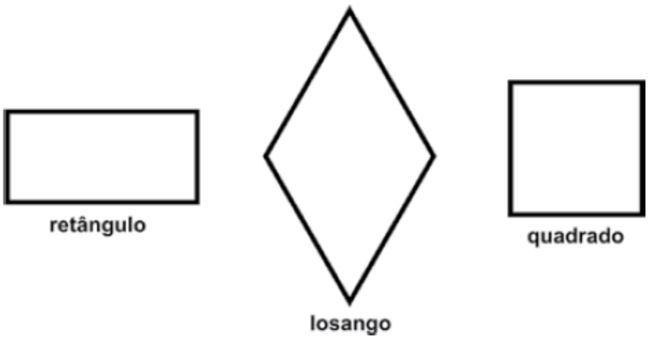
(D)


08- Pedro reuniu todos os materiais necessários para a confecção de uma bela pipa. Cortou o papel no formato de um paralelogramo com todos os lados iguais. Em seguida, colou as varetas de sustentação de tamanhos diferentes nas diagonais e ficaram perpendiculares.

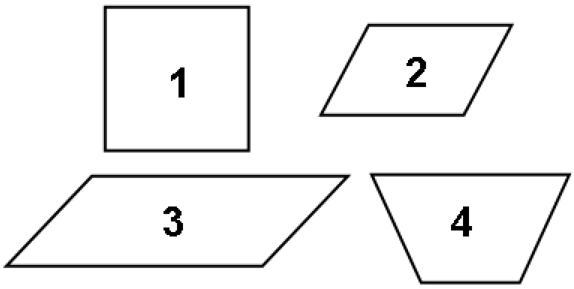


Com base no enunciado a pipa tem um formato de um:
(A) triângulo. (B) quadrado.
(C) losango. (D) retângulo.

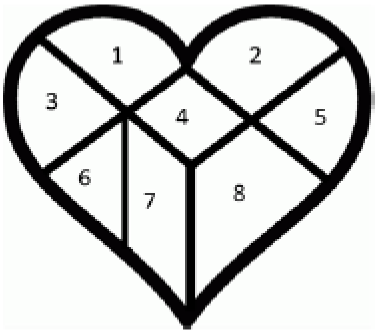
09- A professora Lúcia desenhou no quadro os quadriláteros abaixo.
Uma das propriedades comuns desses quadriláteros é
A) Os quatro ângulos são retos.
B) Os quatro lados têm mesma medida.
C) As diagonais são perpendiculares.
D) Os lados opostos são paralelos.



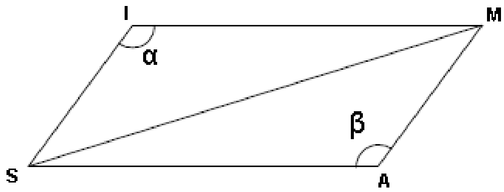
10- (Prova Brasil- 2011). Patrícia desenhou os polígonos abaixo e enumerou-os.
O par de figuras que tem o mesmo número de lados e de ângulos é
(A) 1 e 2 (B) 2 e 3
(C) 3 e 4 (D) 4 e 1



11- Uma professora de matemática optou por trabalhar geometria utilizando o tangram Coração Partido. Em relação à figura, marque V para verdadeiro e F para falso:
( ) Somente as peças 1, 2, 3 e 5 não são polígonos.
( ) O trapézio não possui ângulo agudo.
( ) O quadrado tem apenas dois ângulos retos.
( ) Há somente um paralelogramo no tangram.



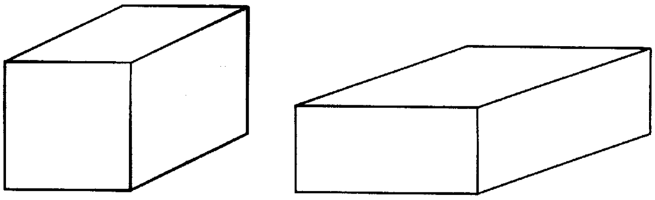
12- (Adaptado de Saresp 2007). Foi traçada a diagonal do paralelogramo abaixo, formando assim dois triângulos. marque V para verdadeiro e F para falso:
( ) a medida do ângulo α é diferente da medida do ângulo β.
( ) as áreas de SIM e MAS têm a mesma medida.
( ) a medida segmento MS é o dobro da medida do lado MA.
( ) os triângulos SIM e MAS são isósceles.



13 (Saresp 2007). Dois retângulos R1 e R2 são tais que: a medida da base de R1 é o dobro da medida da base de R2; a medida da altura de R1 é a metade da medida de R2. Nessas condições, é verdade que
(A) a área de R1 é o dobro da área de R2.
(B) o perímetro de R1 é o dobro do perímetro de R2.
(C) a área de R1 é igual à área de R2.
(D) o perímetro de R1 é igual ao perímetro de R2.

14- (Dolce/Pompeo) Classifique em verdadeiro (V) ou (F):
( ) Todo retângulo que tem dois lados congruentes é uma quadrado.
( ) Todo paralelogramo que tem dois lados adjacente congruentes é losango.
( ) Se um paralelogramo tem dois ângulos de vértices consecutivos congruentes, então ele é uma retângulo.
( ) Se dois ângulos opostos de uma quadrilátero são congruentes, então ele é uma paralelogramo.

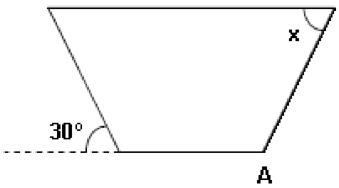
15- (Saresp 2002). Andréa colou um decalque em cada face de suas caixas de papelão, até mesmo na que fica apoiada sobre a mesa. Observe as caixas de Andréa.

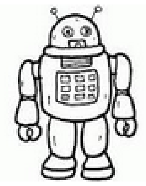


O total de decalques que ela utilizou foi de:

(A) (B) (C) 8 (D) 6

16- Um robô foi programado para partir do ponto A, dar alguns passos e girar para a direita, repetindo este processo até retornar ao ponto A, conforme a figura. Sabendo que a trajetória produzida pelo robô descreve um trapézio isósceles, o ângulo x assinalado na figura mede



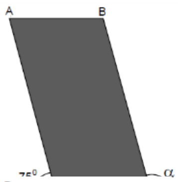


(A) 150°. (B) 60°. (C) 30°. (D) 15°.

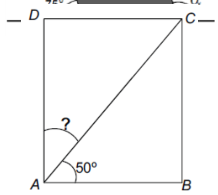
17- (Prova rio). Alberto está fazendo sua pipa. Ela terá o formato de um losango.
Se um dos ângulos agudos medir 40°, os outros ângulos deste quadrilátero medirão

(A) 50°; 130° e 140°.
(B) 40°; 140° e 140°.
(C) 40°; 140° e 180°
(D) 20°; 140° e 160°.

18- (GAVE). A face [ABCD] de uma torre tem a forma de um paralelogramo como mostra a figura abaixo.
O valor do ângulo α é



19- (GAVE). No retângulo seguinte, está traçada uma diagonal.
O ângulo DAC mede



Orientações Didáticas Especificas

Na atividade 04 os estudantes devem jogar o baralho dos quadriláteros e com isso aprimorem a identificação dos quadriláteros e de suas principais propriedades, pois as ternas válidas são compostas de três cartas uma com a figura dos quadriláteros, outra com o nome e outra com as propriedades que os caracterizam.

Orientações Didáticas Gerais

1. Organizar os discentes em equipes, as quais devem ser preferencialmente formadas de maneira espontânea pelos discentes, de no máximo quatro integrantes;

2. Distribuir um baralho para cada equipe;

3. Orientar os discentes na realização dos procedimentos descritos no roteiro da atividade;

4. Auxiliar os discentes em casos de dúvidas ou na ocorrência de dificuldades durante a execução;

5. Intervir, sempre que necessário, de maneira clara e precisa de modo a permitir a continuidade da atividade;

6. Apresentar aos estudantes a formalização tomando como base as terna válidas do baralho;

7. Orientar para que os estudantes resolvam as questões propostas referente a atividade proposta.

7.6. Atividade 05

Esta atividade pretende ensinar a soma dos ângulos internos dos quadriláteros, possuindo um quadro que deverá ser preenchido pelos estudantes tendo o quadro dos ângulos internos dos quadriláteros como suporte. Além das análises a *priori* e posteriormente as questões de aprofundamento.

ATIVIDADE 05

Título: Soma dos ângulos internos de quadriláteros
Objetivo: descobrir uma regularidade dos ângulos dos quadriláteros
Material: Roteiro de atividade; transferidor;
Procedimentos:

- Para cada quadrilátero do quadro: numere cada ângulo interno,
- Determine o valor de cada ângulo interno,
- Com as informações obtidas preencha o quadro a seguir.

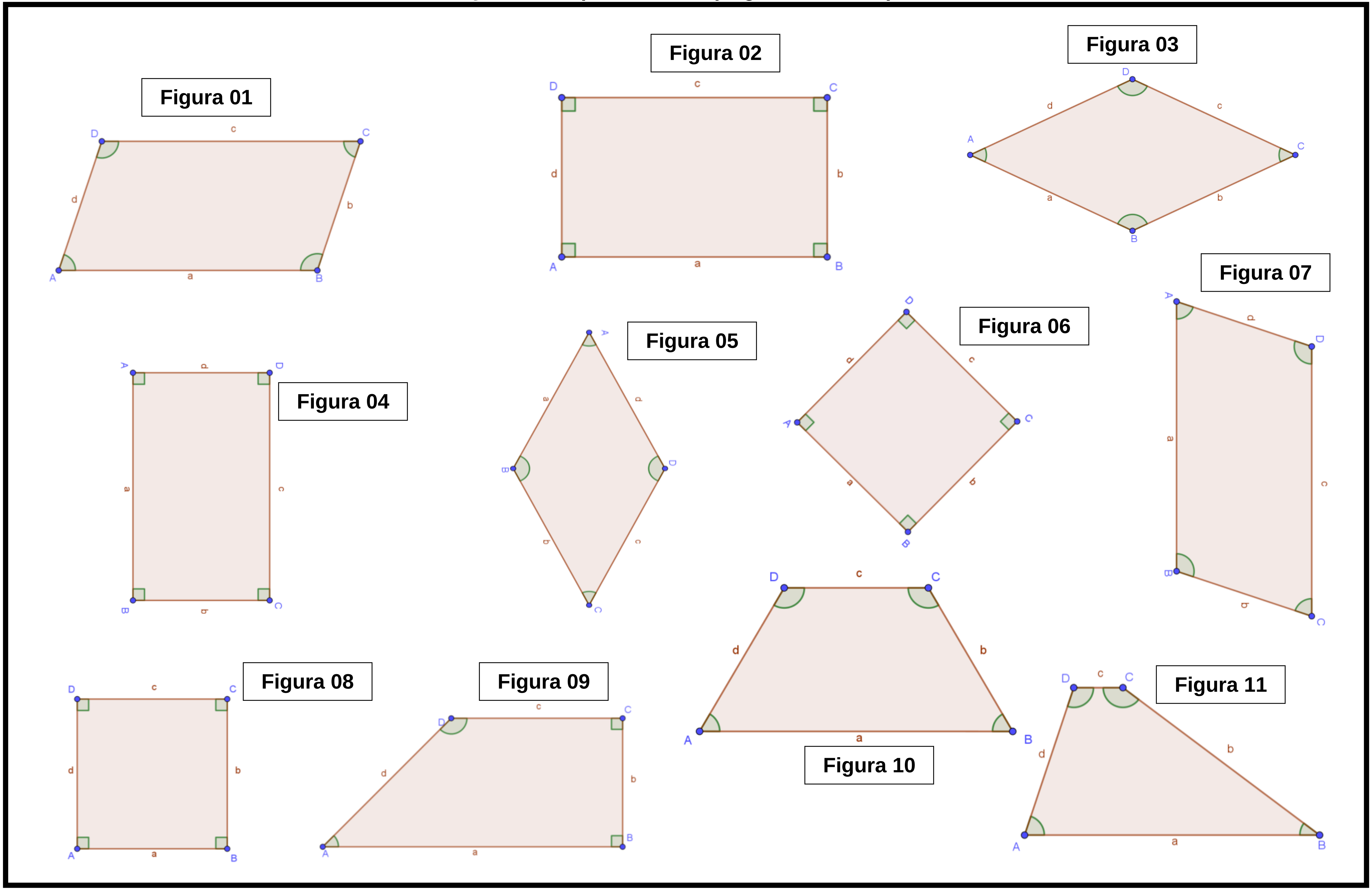
Quadriláteros	Ângulos			
	A	B	C	D
Figura 01				
Figura 02				
Figura 03				
Figura 04				
Figura 05				
Figura 06				
Figura 07				
Figura 08				
Figura 09				
Figura 10				
Figura 11				

Observação:

Conclusão:

Fonte: Adaptado de Sá, (2009)

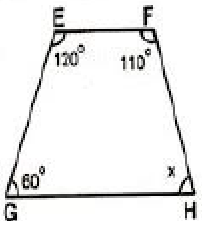
Quadro de quadriláteros (ângulos internos)

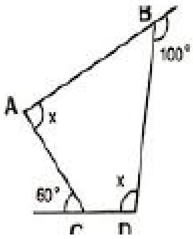


Questões propostas sobre a atividade 05

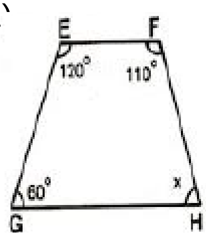
01- Três dos ângulos de um quadrilátero medem 104º, 102º e 63º. Qual é a medida do quarto ângulo desse quadrilátero?

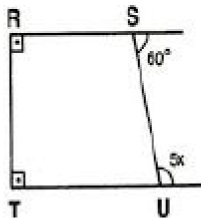
02- Calcule o valor de x nos quadriláteros;

a) 

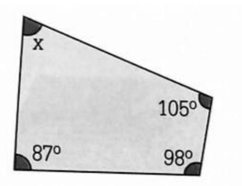
b) 

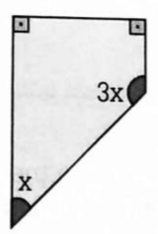
03- Calcule o valor de X nos seguintes quadriláteros:

a\` 

b) 

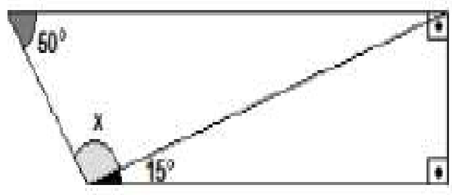
04- Nos quadriláteros das figuras seguintes, determine a medida X indicada:

a) 

b) 

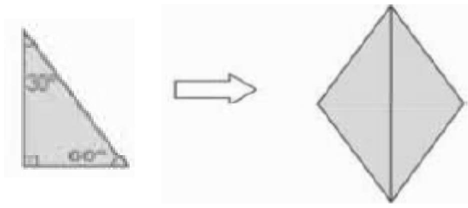
05- Quais as medidas dos ângulos de uma quadrilátero sabendo que um dos ângulos mede X graus e os outros ângulos, o dobro o triplo e o quadruplo de x?

06- (Adaptada de SAESP- Banco de questões) Podemos calcular a medida do ângulo indicado por X na figura sem necessidade de uso do transferidor. Sua medida é igual a:

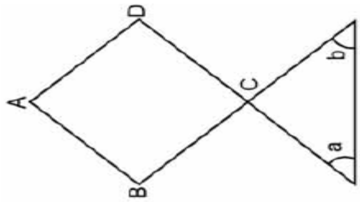


07- (Adaptada de SAESP- Banco de questões) Qual a medida do ângulo **α** desenhado na figura abaixo:

08- (Adaptada de SAESP- Banco de questões) Com quatro triângulos iguais ao da figura abaixo, Gustavo montou um losango. A medida dos ângulos internos do losango de Gustavo é:

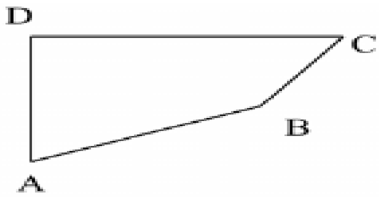


09- Na figura abaixo, ABCD é um quadrado. A soma dos ângulos a e b é igual a:



10- (Saresp 2005). Considere o polígono. A soma dos seus ângulos internos é:

(A) 180º (B) 360º
(C) 720º (D) 540º



Orientações Didáticas Especificas.

Nesta atividade os estudantes deve fazer a medição de cada um dos ângulos de cada quadrilátero utilizando o transferidor, marcar os ângulos, fazendo observações, por conseguinte preencha o quadro e por fim expressem a regularidade sobre a soma dos ângulos internos dos quadriláteros, qual seja: *a soma dos ângulos internos de qualquer quadrilátero é sempre 360º.*

Orientações Didáticas Gerais

1. Organizar os discentes em equipes, as quais devem ser preferencialmente formadas de maneira espontânea pelos discentes, de no máximo quatro integrantes;

2. Distribuir o roteiro da atividade de acordo com o número de integrantes de cada equipe, bem como transferidores e o quadro de quadriláteros;

3. Orientar os discentes na realização dos procedimentos descritos no roteiro da atividade;

4. Auxiliar os discentes em casos de dúvidas ou na ocorrência de dificuldades durante a execução;

5. Intervir, sempre que necessário, de maneira clara e precisa de modo a permitir a continuidade da atividade;

6. Orientar os estudantes para o preenchimento de suas observações sobre as características encontradas;

7. Orientar os discentes para a socialização de suas observações e conclusão.

8. Pedir aos estudantes que selecionem a melhor conclusão encontrada pela equipe.

9. Solicitar que um membro da equipe escreva no quadro a melhor resposta da equipe para sua socialização.

10. Apresentar aos estudantes a formalização tomando como base as próprias observações e conclusões dos mesmos;

11. Orientar para que os estudantes resolvam as questões propostas referente a atividade proposta.

7.7. Atividade 06

A atividade a seguir vai ensinar o tópico da soma dos ângulos externos dos quadriláteros, onde ela é composta da atividade em si, onde estão o titulo, o objetivo, os materiais os procedimento e o quadro a ser preenchido pelos estudantes. Além disso, temos o quadro de quadriláteros, o qual será feita as medições dos ângulos, seguindo temos as análises a *priori* e as questões de aprofundamento.

ATIVIDADE 06

Título: Soma dos ângulos externos de quadriláteros
Objetivo: descobrir uma regularidade dos ângulos esternos dos quadriláteros
Material: Roteiro de atividade; quadro de quadriláteros, transferidor de meia volta, lápis ou caneta.
Procedimentos:

- Para cada quadrilátero do quadro: observe cada ângulo externo;
- Determine o valor de cada ângulo externo;
- Determine a soma dos ângulos externos de cada quadrilátero;
- Como os dados preencha o quadro a seguir;

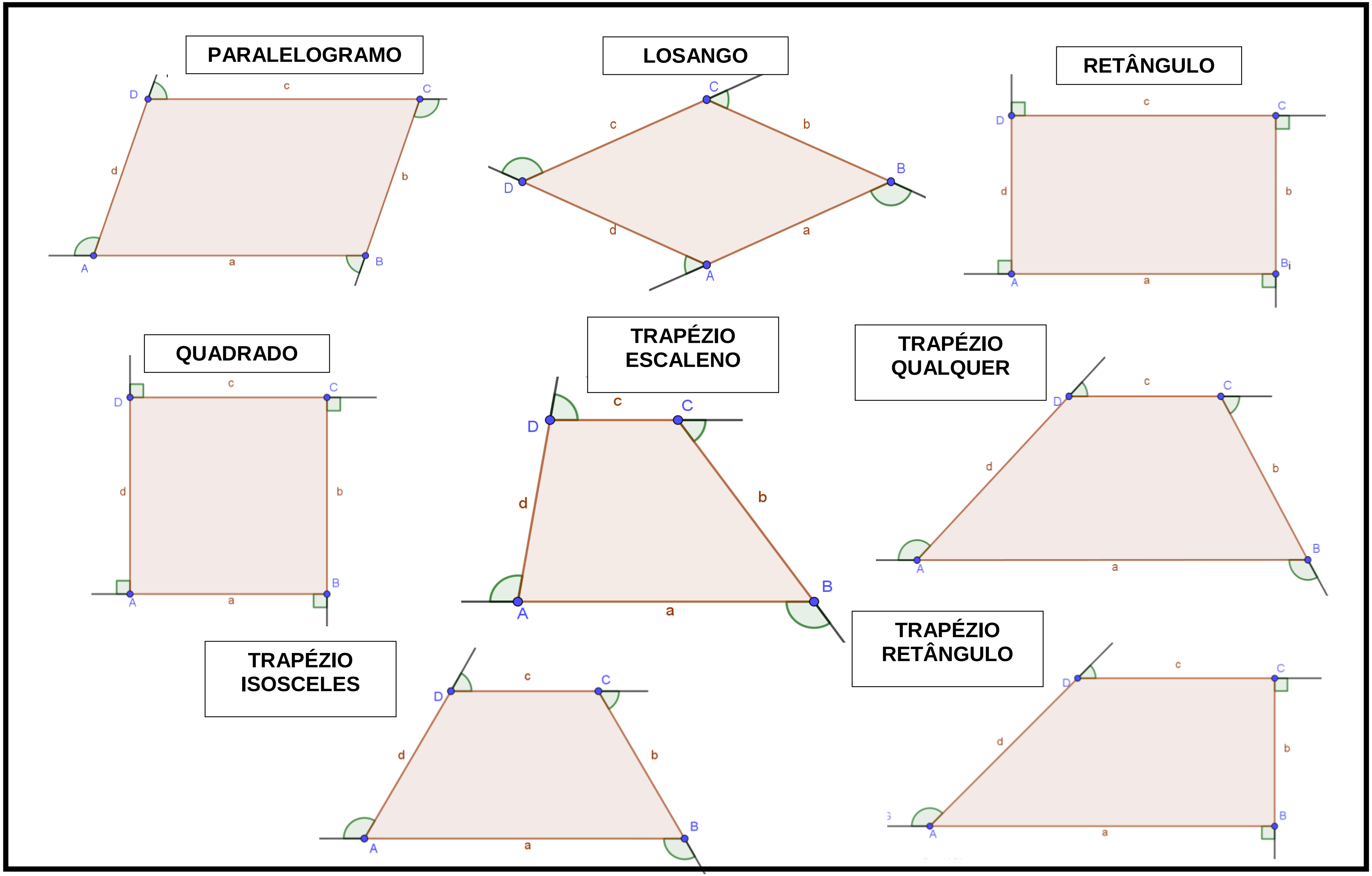
Quadriláteros	Ângulos externos				
	A	B	C	D	*Soma dos ângulos externos*
Paralelogramos					
Losango					
Retângulo					
Quadrado					
Trapézio qualquer					
Trapézio escaleno					
Trapézio retângulo					
Trapézio Isóscele					

Observação:

Conclusão:

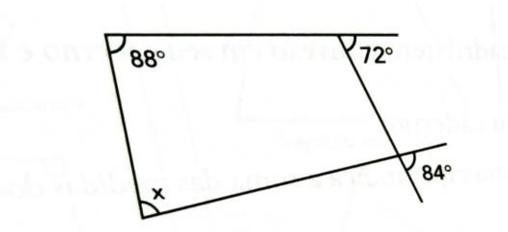
Fonte: Adaptado de Sá, (2009)

Quadro de quadriláteros (ângulos externos) (Atividade 06)

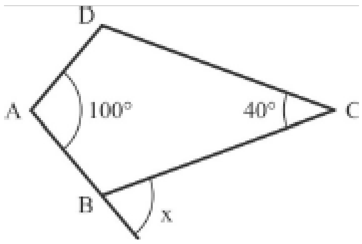


Questões propostas sobre a atividade 06

01- Calcule o valor de x na figura ao lado:



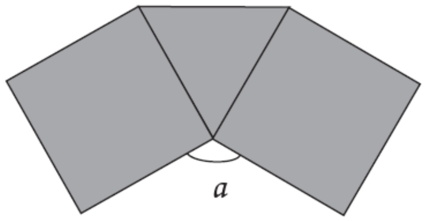
01- (Dolce/Pompeo) Sabendo que na figura abaixo, $\overline{AB} \equiv \overline{AD}$ e $\overline{CB} \equiv \overline{CD}$, determine x:



02- (GAVE). A figura seguinte é composta por dois quadrados e um triângulo equilátero que possui os 3 ângulos internos iguais. O valor do ângulo a é

(A) 50º (B) 90º

(C) 120º (D) 180



Orientações Didáticas Especificas

Nesta atividade os estudantes observar os ângulos dos quadriláteros do quadro de quadriláteros, fazer a medição de cada um dos ângulos utilizando o transferidor, fazendo observações, por conseguinte preencher o quadro e por fim expressem a regularidade sobre a soma dos ângulos externos dos quadriláteros, qual seja: *a soma dos ângulos externos de qualquer quadrilátero é sempre 360º.*

Orientações Didáticas Gerais

1. Organizar os discentes em equipes, as quais devem ser preferencialmente formadas de maneira espontânea pelos discentes, de no máximo quatro integrantes;

2. Distribuir o roteiro da atividade de acordo com o número de integrantes de cada equipe, bem como transferidores e o quadro de quadriláteros;

3. Orientar os discentes na realização dos procedimentos descritos no roteiro da atividade;

4. Auxiliar os discentes em casos de dúvidas ou na ocorrência de dificuldades durante a execução;

5. Intervir, sempre que necessário, de maneira clara e precisa de modo a permitir a continuidade da atividade;

6. Orientar os estudantes para o preenchimento de suas observações sobre as características encontradas;

7. Orientar os discentes para a socialização de suas observações e conclusão.

8. Pedir aos estudantes que selecionem a melhor conclusão encontrada pela equipe.

9. Solicitar que um membro da equipe escreva no quadro a melhor resposta da equipe para sua socialização.

10. Apresentar aos estudantes a formalização tomando como base as próprias observações e conclusões dos mesmos;

11. Orientar para que os estudantes resolvam as questões propostas referente a atividade proposta

7.8. Atividade 07

Aqui temos a atividade que vai ensinar uma das propriedades das diagonais dos quadriláteros, ela é composta de titulo, de objetivo, materiais e procedimentos, e ainda, possui um quadro que deverá ser preenchido pelos estudantes levando em consideração as medições que deverão ser realizadas no quadro de quadrilátero e suas diagonais subsequentes. Após a atividade temos algumas questões de aprofundamento.

ATIVIDADE 07

Título: Diagonais dos quadriláteros
Objetivo: Identificar a propriedade das diagonais dos quadriláteros.
Material: Roteiro de atividade, lista de quadriláteros e régua;
Procedimentos:

- Observe a lista de quadriláteros com suas respectivas diagonais,
- Usando a régua para fazer as medições e marque com um X no quadro a seguir quais quadriláteros possuem:

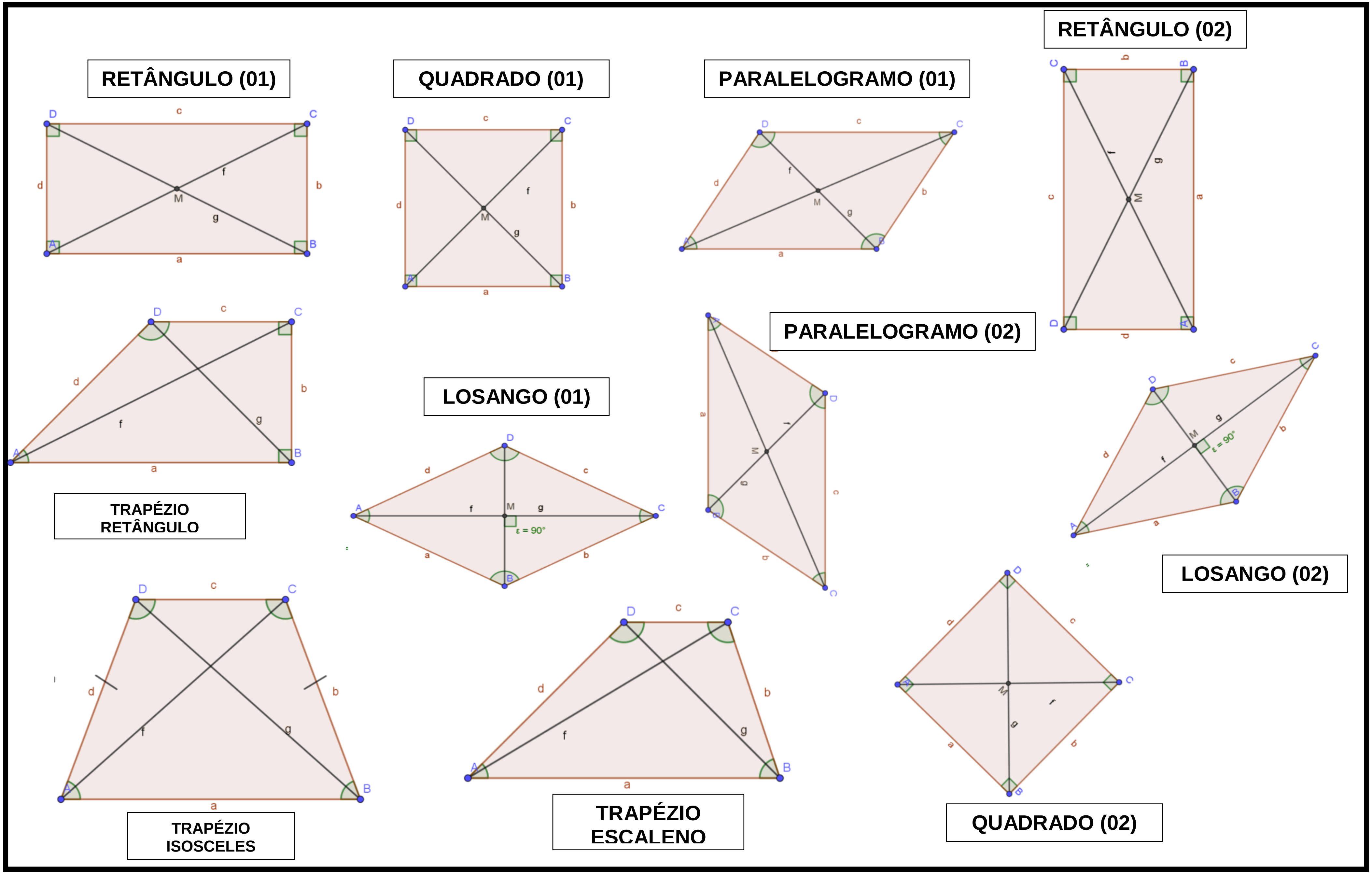
Quadriláteros	***AS DIAGONAIS IGUAIS?***	
	SIM	***NÃO***
Paralelogramo (01)		
Paralelogramo (02)		
Losango (01)		
Losango (02)		
Retângulo (01)		
Retângulo (02)		
Quadrado (01)		
Quadrado (02)		
Trapézio escaleno		
Trapézio retângulo		
Trapézio Isósceles		

Observação:

Conclusão:

Fonte: Adaptado de Sá, (2009)

Quadro de quadriláteros e suas diagonais (Atividade 07)



Questões propostas sobre a atividade 07

01- (Dolce/Pompeo) Coloque (V) para verdadeiro e (F) para falso nas afirmativas abaixo:
a) ( ) As diagonais de um quadrado são sempre congruentes.
b) ( ) As diagonais de um losango são sempre congruentes.
c) ( ) As diagonais de um retângulo são sempre congruentes.
d) ( ) As diagonais de um losango são sempre perpendiculares.
e) ( ) Todo retângulo é um quadrado.

02- (UNIFOR CE/2012) Ao se colocar V para indicar verdadeiro e F para indicar falso para as afirmações

I. Um quadrilátero que tem as diagonais com comprimentos iguais é um retângulo.

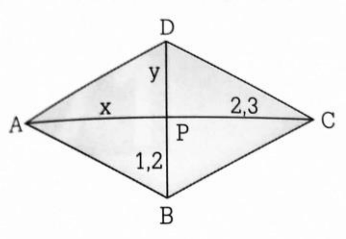
II. Todo losango tem as diagonais com comprimentos iguais.

III. As diagonais de um paralelogramo cortam-se mutuamente ao meio.

A sequência correta, de cima para baixo, é:

a) V V V b) V F V c) F V V d) F F V e) F F F

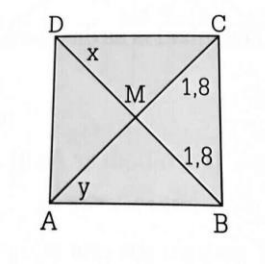
02- ABCD é um paralelogramo. Nessas condições, determine:



a) a medida de x indicada é: b) a medida de y indicada é:

c) a medida da diagonal AC é: d) a medida da diagonal BD é:

02- No quadrado da figura seguinte, dê as mediadas de x e y.



Orientações Didáticas Especificas

Na atividade 07 os estudantes devem fazer as medições adequadas das diagonais dos quadriláteros do quadro de quadrilátero, posteriormente fazer observações sobre as propriedades das diagonais e preencham o quadro, e por fim expressem suas observações e conclusões, percebendo que existe quadriláteros com diagonais com a mesma medida, e por consequência também com medidas diferentes, isso posto: *Os quadriláteros que possuem as diagonais com a mesma medida são o Paralelogramo, o Retângulo, o Quadrado, e o Trapézio Isósceles.*

Orientações Didáticas Gerais

1. Organizar os discentes em equipes, as quais devem ser preferencialmente formadas de maneira espontânea pelos discentes, de no máximo quatro integrantes;

2. Distribuir o roteiro da atividade de acordo com o número de integrantes de cada equipe, bem como a régua e o quadro de quadriláteros;

3. Orientar os discentes na realização dos procedimentos descritos no roteiro da atividade;

4. Auxiliar os discentes em casos de dúvidas ou na ocorrência de dificuldades durante a execução;

5. Intervir, sempre que necessário, de maneira clara e precisa de modo a permitir a continuidade da atividade;

6. Orientar os estudantes para o preenchimento de suas observações sobre as características encontradas;

7. Orientar os discentes para a socialização de suas observações e conclusão.

8. Pedir aos estudantes que selecionem a melhor conclusão encontrada pela equipe.

9. Solicitar que um membro da equipe escreva no quadro a melhor resposta da equipe para sua socialização.

10. Apresentar aos estudantes a formalização tomando como base as próprias observações e conclusões dos mesmos;

11. Orientar para que os estudantes resolvam as questões propostas referente a atividade proposta

7.9. Atividade 08

Aqui temos a atividade que vai ensinar uma das propriedades das diagonais dos quadriláteros, ela é composta de titulo, de objetivo, materiais e procedimentos, e ainda, possui um quadro que deverá ser preenchido pelos estudantes levando em consideração as medições que deverão ser realizadas no quadro de quadrilátero e suas diagonais subsequentes. Após a atividade temos algumas questões de aprofundamento.

ATIVIDADE 08

Título: Diagonais dos quadriláteros
Objetivo: Compreender a propriedade das diagonais dos quadriláteros.
Material: Roteiro de atividade, lista de quadriláteros e régua;
Procedimentos:

- Observe a lista de quadriláteros com suas respectivas diagonais,
- Usando a régua para fazer as medições e marque com um X no quadro a seguir quais quadriláteros possuem:

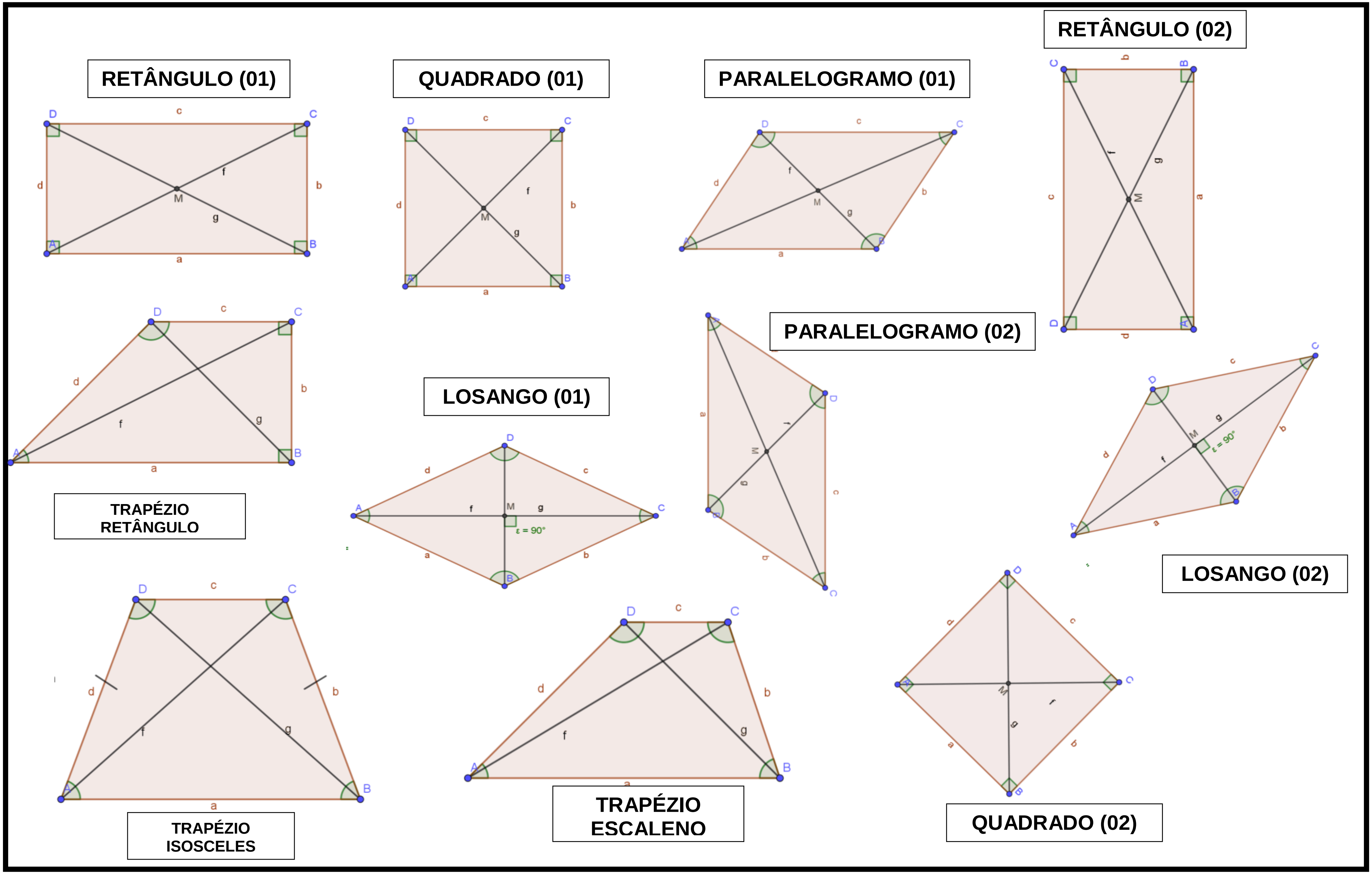
Quadriláteros	AS DIAGONAIS QUE SE TOCAM NO PONTO MÉDIO?	
	SIM	*NÃO*
Paralelogramo (01)		
Paralelogramo (02)		
Losango (01)		
Losango (02)		
Retângulo (01)		
Retângulo (02)		
Quadrado (01)		
Quadrado (02)		
Trapézio escaleno		
Trapézio retângulo		
Trapézio Isósceles		

Observação:

Conclusão:

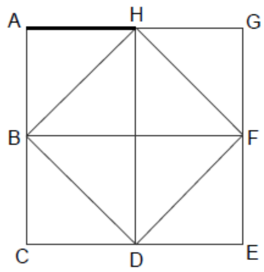
Fonte: Adaptado de Sá, (2009)

Quadro de quadriláteros e suas diagonais (Atividade 07)

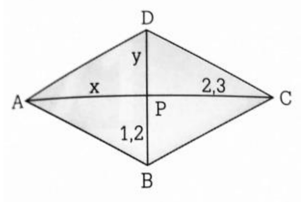


Questões propostas sobre a atividade 08

01- Observa de novo o esquema do azulejo. Completa a frase seguinte, assinalando a alternativa correta. O segmento de reta AH é paralelo ao…
(A) segmento de reta DE. (B) segmento de reta BH.
(C) segmento de reta GF. (D) segmento de reta BC.

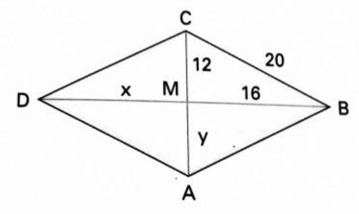


02- A figura seguinte é um losango. Nessas condições, determine:



a) O valor da medida de x indicada: b) O valor da medida de y indicada:
c) a medida da diagonal AC d) a medida da diagonal BD

03- Observe o losango ABCD, determine as medidas de x e y indicadas:



04- Classifiquem em verdadeiro (V) ou falso (F):

a) As diagonais de um losango são congruentes.
b) As diagonais de um retângulo são perpendiculares
c) As diagonais de um retângulo são bissetrizes dos seus ângulos
d) As diagonais de um paralelogramo sio bissetrizes dos seus ângulos.
e) As diagonais de um quadrado são bissetrizes de seus ângulos e são perpendiculares

05- A diagonal de um losango forma com um dos seus lados um ângulo igual à terça parte de um reto. Determine os quatro ângulos do losango.

Orientações Didáticas Especificas

Na atividade 08 os estudantes devem fazer as medições adequadas das diagonais dos quadriláteros do quadro de quadrilátero, posteriormente fazer observações sobre a propriedade das diagonais e preencham o quadro, e por fim expressem suas observações e conclusões, percebendo que existe quadriláteros com diagonais se tocam em seu ponto médio, e outras não, isto posto temos que:

Os quadriláteros que possuem as diagonais que se tocam nos seu respectivos pontos médios são o Paralelogramo, o Losango, o Retângulo e o Quadrado.

Orientações Didáticas Gerais

1. Organizar os discentes em equipes, as quais devem ser preferencialmente formadas de maneira espontânea pelos discentes, de no máximo quatro integrantes;

2. Distribuir o roteiro da atividade de acordo com o número de integrantes de cada equipe, bem como a régua e o quadro de quadriláteros;

3. Orientar os discentes na realização dos procedimentos descritos no roteiro da atividade;

4. Auxiliar os discentes em casos de dúvidas ou na ocorrência de dificuldades durante a execução;

5. Intervir, sempre que necessário, de maneira clara e precisa de modo a permitir a continuidade da atividade;

6. Orientar os estudantes para o preenchimento de suas observações sobre as características encontradas;

7. Orientar os discentes para a socialização de suas observações e conclusão.

8. Pedir aos estudantes que selecionem a melhor conclusão encontrada pela equipe.

9. Solicitar que um membro da equipe escreva no quadro a melhor resposta da equipe para sua socialização.

10. Apresentar aos estudantes a formalização tomando como base as próprias observações e conclusões dos mesmos;

11. Orientar para que os estudantes resolvam as questões propostas referente a atividade proposta

7.10. Atividade 09

Aqui temos a atividade que vai ensinar as propriedades das diagonais dos quadriláteros, ela é composta de titulo, de objetivo, materiais e procedimentos, e ainda, possui um quadro que deverá ser preenchido pelos estudantes levando em consideração as medições que deverão ser realizadas no quadro de quadrilátero e suas diagonais subsequentes. Após a atividade temos sua análise a *priori* seguida das questões de aprofundamento.

ATIVIDADE 09

Título: Diagonais dos quadriláteros
Objetivo: Descobrir a propriedade das diagonais dos quadriláteros.
Material: Roteiro de atividade, transferidor e quadro de quadriláteros.
Procedimentos:

- Observe a lista de quadriláteros com suas respectivas diagonais,
- Usando a régua para fazer as medições e marque com um X no quadro a seguir quais quadriláteros possui as propriedades indicadas.

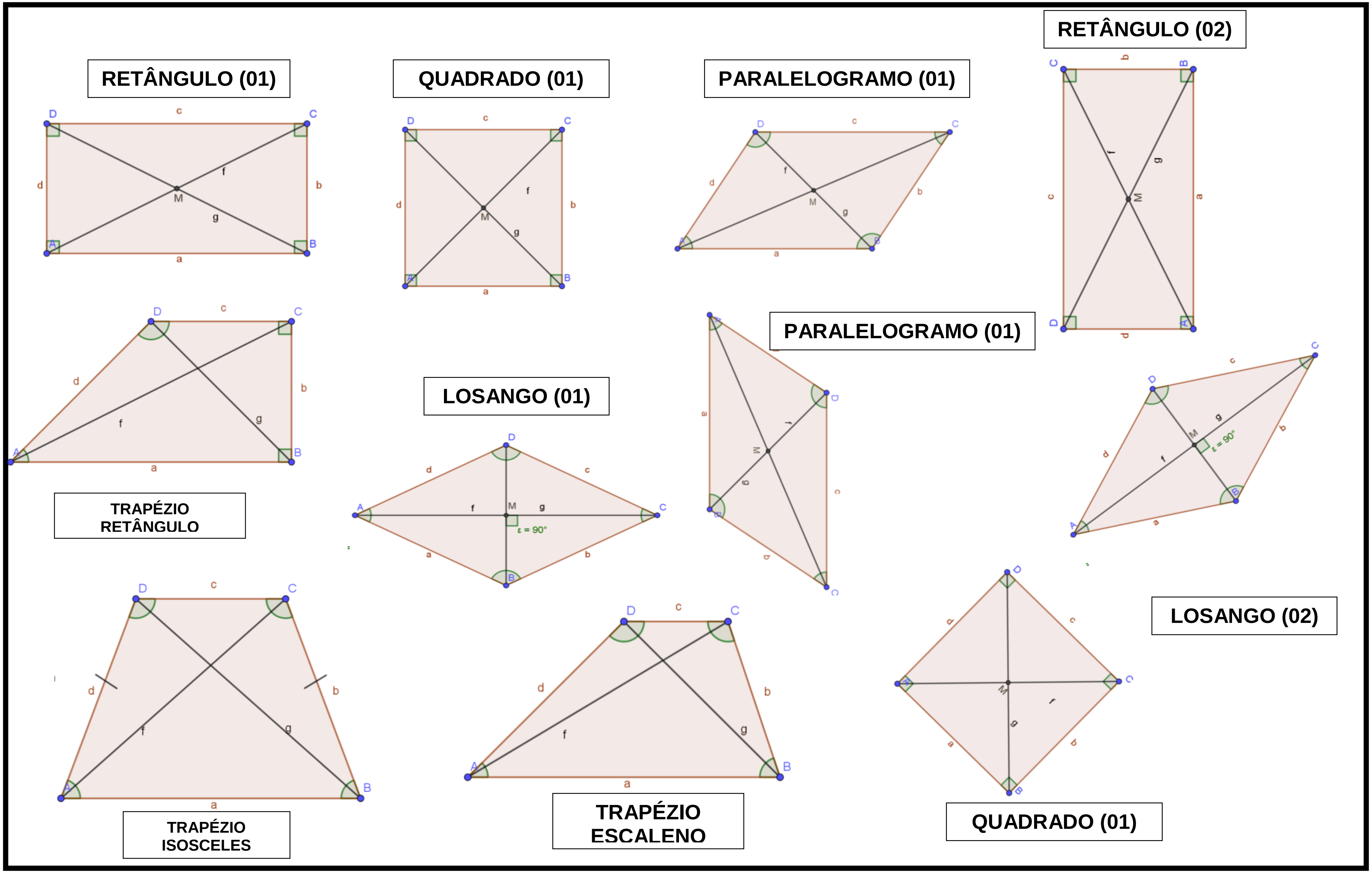
Quadriláteros	**AS DIAGONAIS SÃO PERPENDICULARES?**	
	SIM	***NÃO***
Paralelogramo (01)		
Paralelogramo (02)		
Losango (01)		
Losango (02)		
Retângulo (01)		
Retângulo (02)		
Quadrado (01)		
Quadrado (02)		
Trapézio escaleno		
Trapézio retângulo		
Trapézio Isósceles		

Observação:

Conclusão:

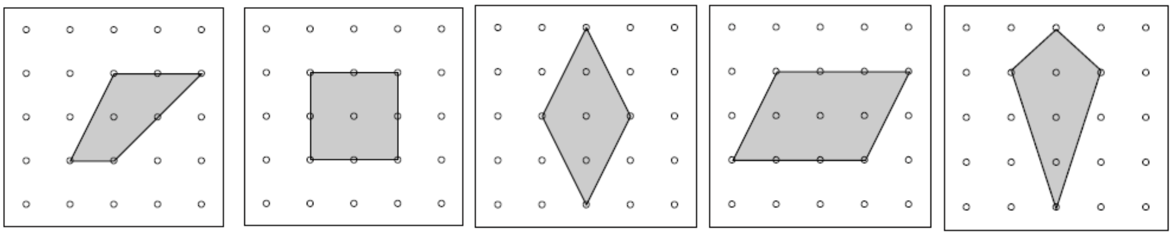
Fonte: Adaptado de Sá, (2009)

Quadro de quadriláteros e suas diagonais (Atividade 07)



Questões propostas sobre a atividade 09

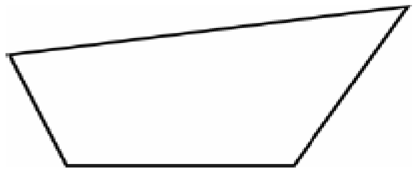
01- Observa os cinco quadriláteros desenhados nas seguintes malhas quadriculadas.



Quadrilátero P Quadrilátero Q Quadrilátero R Quadrilátero S Quadrilátero T

Os quadriláteros que têm as diagonais perpendiculares são
(A) T e R (B) R e P (C) P e Q (D) P e R

04- (Saresp 2005). O número de diagonais da figura abaixo é:
(A) 1 (B) 2
(C) 3 (D) 4



05- (Dolce/Pompeo) Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):
( )As diagonais de uma losango são congruentes.
( )As diagonais de um retângulo são perpendiculares.
( )As diagonais de um retângulo são bissetrizes dos seus ângulos.
( )As diagonais de um paralelogramo são bissetrizes dos seus ângulos.
( )As diagonais de um quadrado são bissetrizes dos seus ângulos.
( )Se as diagonais de um quadrilátero são perpendiculares, então elas são bissetrizes dos ângulos deles.
( )Se as diagonais de um quadrilátero for congruente e perpendiculares, então elas ele é um quadrado.

Orientações Didáticas Especificas

Na atividade 09 os estudantes devem fazer as medições adequadas das diagonais dos quadriláteros do quadro de quadrilátero, posteriormente fazer observações sobre a propriedade das diagonais e preencham o quadro, e por fim expressem suas considerações e conclusões sobre as diagonais, identificando quais quadriláteros possuem diagonais perpendiculares. Isto posto temos: *Os quadriláteros com diagonais perpendiculares são o Losango e o Quadrado.*

Orientações Didáticas Gerais

1. Organizar os discentes em equipes, as quais devem ser preferencialmente formadas de maneira espontânea pelos discentes, de no máximo quatro integrantes;

2. Distribuir o roteiro da atividade de acordo com o número de integrantes de cada equipe, bem como a régua e o quadro de quadriláteros;

3. Orientar os discentes na realização dos procedimentos descritos no roteiro da atividade;

4. Auxiliar os discentes em casos de dúvidas ou na ocorrência de dificuldades durante a execução;

5. Intervir, sempre que necessário, de maneira clara e precisa de modo a permitir a continuidade da atividade;

6. Orientar os estudantes para o preenchimento de suas observações sobre as características encontradas;

7. Orientar os discentes para a socialização de suas observações e conclusão.

8. Pedir aos estudantes que selecionem a melhor conclusão encontrada pela equipe.

9. Solicitar que um membro da equipe escreva no quadro a melhor resposta da equipe para sua socialização.

10. Apresentar aos estudantes a formalização tomando como base as próprias observações e conclusões dos mesmos;

11. Orientar para que os estudantes resolvam as questões propostas referente a atividade proposta

7.11. Atividade 10

Esta atividade ensinará a relação que existe entre os ângulos internos dos quadriláteros inscritíveis em uma circunferência, ela contém o titulo o objetivo, material a ser utilizada, os procedimentos e o quadro que deverá ser preenchido pelos estudantes tendo por base as medições realizadas no quadro de quadriláteros inscritos. Posteriormente, temos as análises a *priori* e as questões de aprofundamento.

ATIVIDADE 10

Título: Inscrição de Quadriláteros

Objetivo: Descobrir uma relação entre os ângulos internos de quadriláteros inscritos em uma circunferência.

Material: Roteiro das atividades, régua, transferidor, lápis ou caneta.

Procedimentos:

01. Observe o quadro de quadriláteros Inscritos;
02. Marque com um X se o quadrilátero está inscrito ou não na circunferência;
03. Numere os ângulos internos de cada quadrilátero
04. Meça o valor de cada ângulo numerado, com os dados obtidos preencha o quadro a seguir.

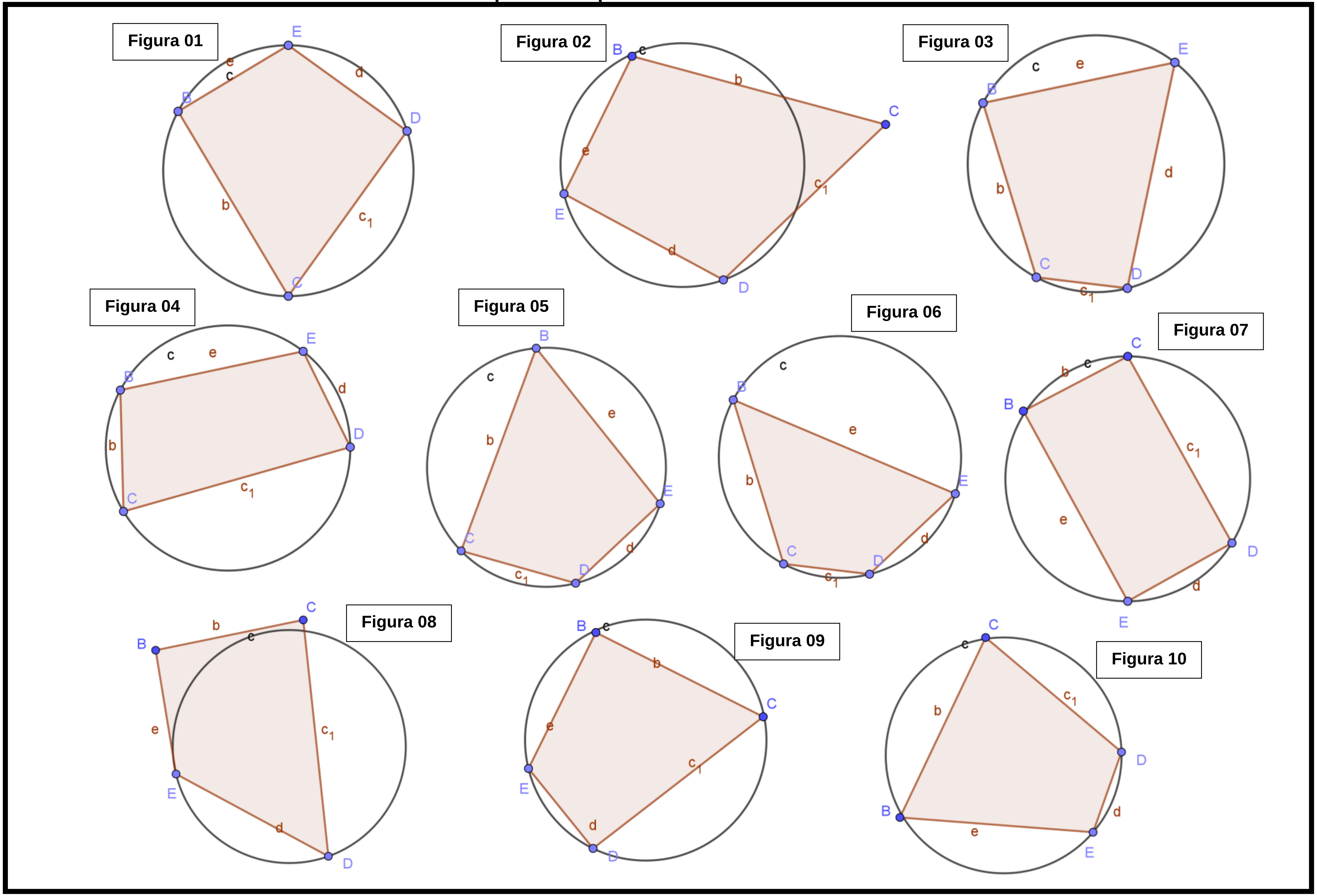
QUADRILÁTEROS	ÂNGULOS					
	O quadrilátero está inscrito?		Ângulo $\hat{1}$	Ângulo oposto ao ângulo $\hat{1}$	Ângulo 2	Ângulo oposto ao ângulo 2
	Sim	Não				
Nº 01						
Nº 02						
Nº 03						
Nº 04						
Nº 05						
Nº 06						
Nº 07						
Nº 08						
Nº 09						
Nº 10						

Observações:

Conclusão:

Fonte: Adaptado de Sá, (1988)

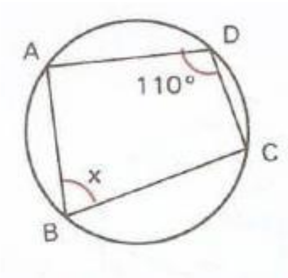
O quadro de quadriláteros Inscritos



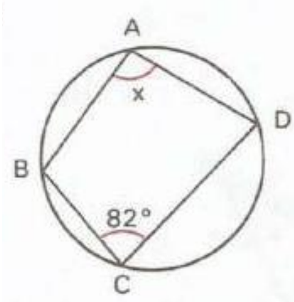
Questões propostas sobre a atividade 08

01- (Dolce/Pompeo) Nas figuras, calcule x:

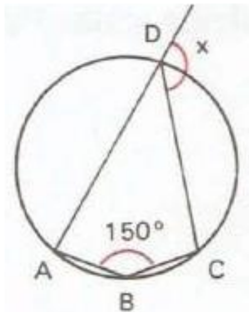
a)



b)

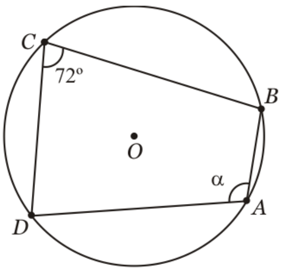


c)

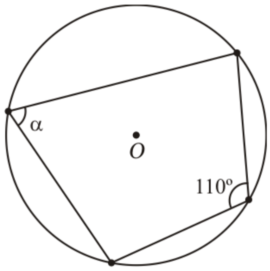


02-(Dolce/Pompeo) Calcule o valor dos ângulos que falta nas figuras a seguir:

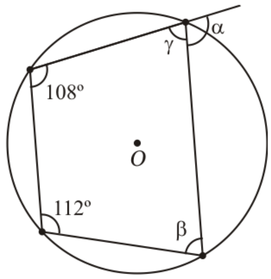
a)



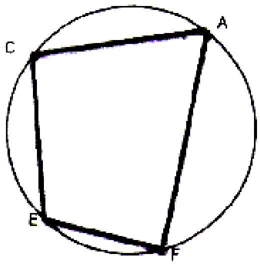
b)



c)



03- (Adaptada de SAESP- Banco de questões) No quadrilátero inscrito CAFE, o ângulo CÂF mede 50°. O valor do angulo FÊC é:



Orientações Didáticas Especificas

Com está atividade os estudantes devem identificar os quadriláteros inscritos, numerando cada ângulo, medido seus valores e preenchendo o quadro, para posteriormente encontrar o padrão em relação aos ângulos dos quadriláteros inscritos, qual seja: *Se um quadrilátero é inscritível numa circunferência, então os ângulos opostos são suplementares, ou seja, eles somados medem 180º.*

Orientações Didáticas Gerais

1. Organizar os discentes em equipes, as quais devem ser preferencialmente formadas de maneira espontânea pelos discentes, de no máximo quatro integrantes;

2. Distribuir o roteiro da atividade de acordo com o número de integrantes de cada equipe, bem como transferidores e o quadro de quadriláteros;

3. Orientar os discentes na realização dos procedimentos descritos no roteiro da atividade;

4. Auxiliar os discentes em casos de dúvidas ou na ocorrência de dificuldades durante a execução;

5. Intervir, sempre que necessário, de maneira clara e precisa de modo a permitir a continuidade da atividade;

6. Orientar os estudantes para o preenchimento de suas observações sobre as características encontradas;

7. Orientar os discentes para a socialização de suas observações e conclusão.

8. Pedir aos estudantes que selecionem a melhor conclusão encontrada pela equipe.

9. Solicitar que um membro da equipe escreva no quadro a melhor resposta da equipe para sua socialização.

10. Apresentar aos estudantes a formalização tomando como base as próprias observações e conclusões dos mesmos;

11. Orientar para que os estudantes resolvam as questões propostas referente a atividade proposta

7.12. Atividade 11

Esta atividade vai ensinar a relação que há entre os lados opostos dos quadriláteros circunscritos em uma circunferência. A atividade contém um titulo, seu objetivo, os materiais que serão utilizados, os procedimentos e um quadro que deverá ser preenchido pelos estudantes levando em consideração as medições feitas no quadro de quadriláteros circunscritos. Além disso, temos as análises a *priori* E posteriormente as questões de aprofundamento

ATIVIDADE 11

Título: Circunscrição de Quadriláteros

Objetivo: Descobrir uma relação entre os lados de quadriláteros circunscritos em uma circunferência.

Material: Roteiro das atividades, régua, lápis ou caneta.

Procedimentos:

- Observe o quadro de quadrilátero;
- Marque com um X, se o quadrilátero está circunscrito ou não na circunferência;
- Numere os lados de cada quadrilátero;
- Meça o comprimento de cada lado do quadrilátero, com os dados obtidos preencha o quadro a seguir.

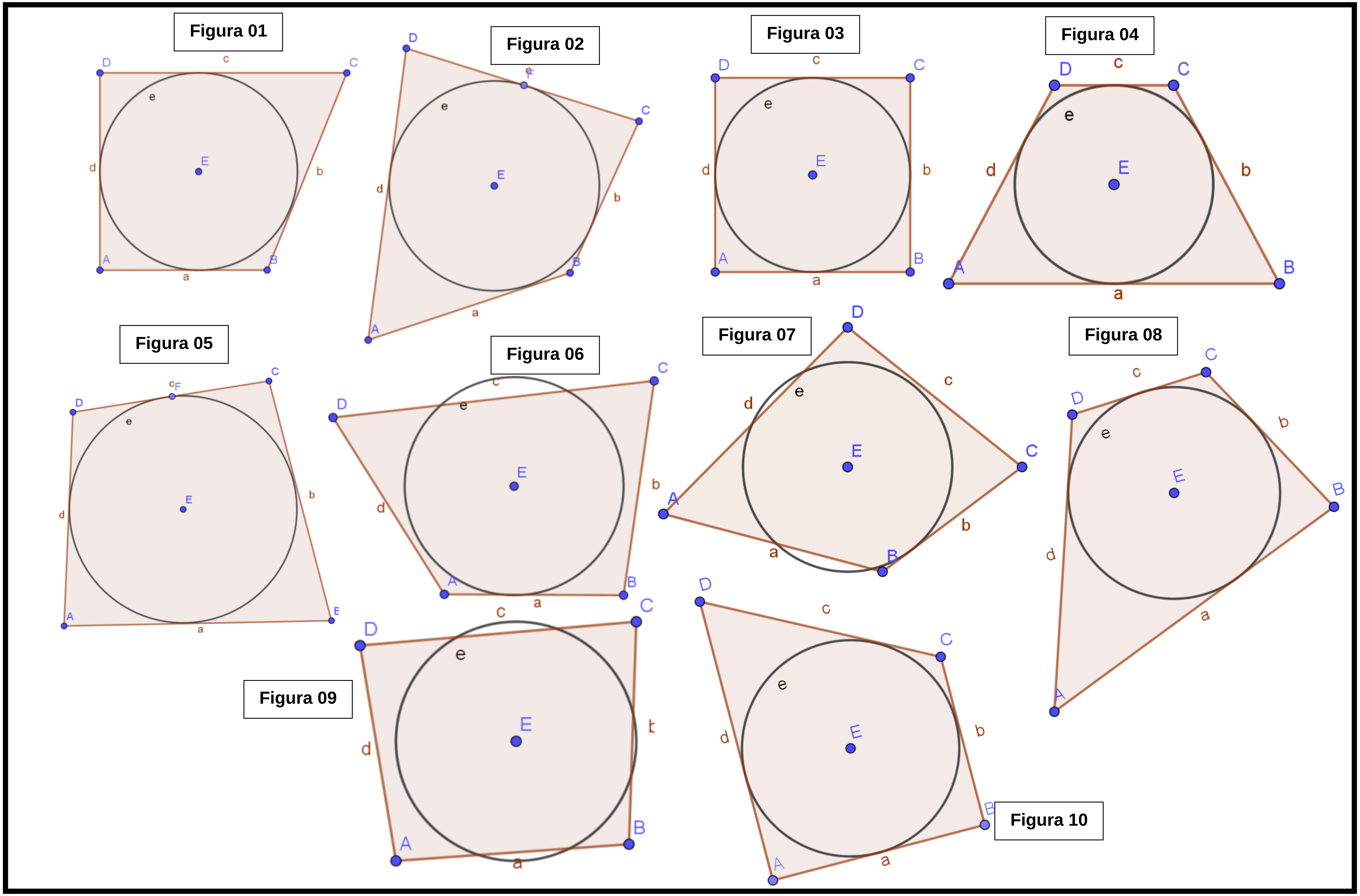
QUADRILÁTEROS	**MEDIDAS**					
	O quadrilátero está circunscrito?		**Lado 1**	**Lado oposto ao lado 1**	**Lado 2**	**Lado oposto ao lado 2**
	Sim	**Não**				
Nº 01						
Nº 02						
Nº 03						
Nº 04						
Nº 05						
Nº 06						
Nº 07						
Nº 08						
Nº 09						
Nº 10						

Observação:

Conclusão:

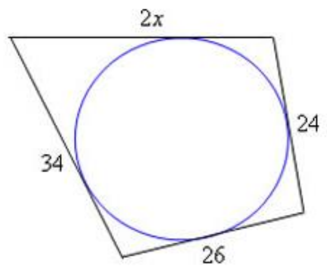
Fonte: Adaptado de Sá, (1988)

Quadro de quadriláteros circunscritos

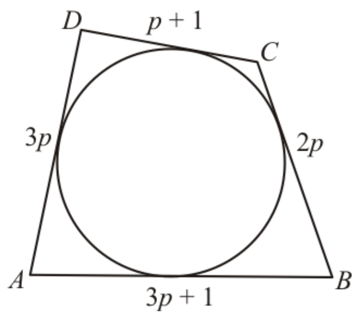


Questões propostas sobre a atividade 09

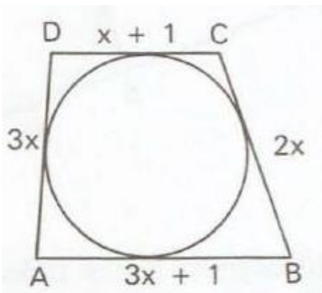
01- Vamos determinar o valor de x na figura envolvendo um quadrilátero circunscrito a uma circunferência.



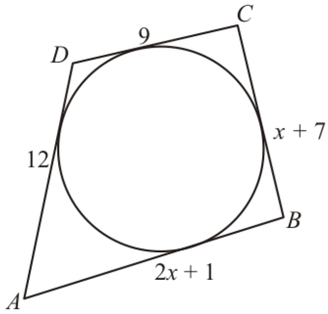
02- Determine o perímetro do quadrilátero ABCD, circunscrito.



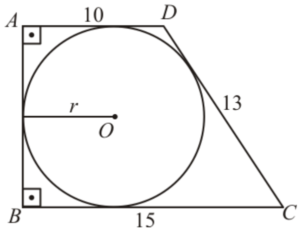
03- (Dulce/pompeo) determine o perímetro do quadrilátero ABC, circunscritível, da figura:



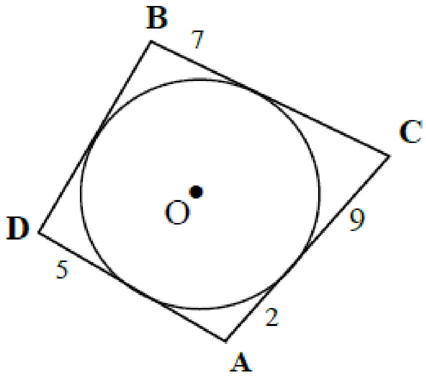
04- O quadrilátero ABCD é circunscrito e seus lados medem $\overline{DA} = 12\text{cm}$, $\overline{CD} = 9\text{cm}$, $\overline{BC} = x + 7$ e $\overline{AB} = 2x + 1$. Determine seu perímetro:



05-(Dulce/pompeo) Calcule o valor do raio da circunferência inscrita no trapézio retângulo:



06- O perímetro do quadrilátero ABCD desenhado abaixo é?



07- (Dulce/Pompeo) A diferença de dois lados opostos de uma quadrilátero circunscritível é igual a 8cm e a diferença dos outros dois lados é 4cm. Determine os lados do quadrilátero sendo 56cm a soma de todos os lados:

Orientações Didáticas Especificas

Os estudantes entender os procedimentos das atividades, consigam identificar os quadriláteros circunscritos nas circunferências, meçam seus lados, tentando encontrar um padrão em relação a eles, que seja: *Se somarmos os lados opostos dos quadriláteros circunscritos a uma circunferência, verificaremos que os resultados são iguais, isto é, possuem a mesma medida.*

Orientações Didáticas Gerais

1. Organizar os discentes em equipes, as quais devem ser preferencialmente formadas de maneira espontânea pelos discentes, de no máximo quatro integrantes;

2. Distribuir o roteiro da atividade de acordo com o número de integrantes de cada equipe, bem a régua e o quadro de quadriláteros;

3. Orientar os discentes na realização dos procedimentos descritos no roteiro da atividade;

4. Auxiliar os discentes em casos de dúvidas ou na ocorrência de dificuldades durante a execução;

5. Intervir, sempre que necessário, de maneira clara e precisa de modo a permitir a continuidade da atividade;

6. Orientar os estudantes para o preenchimento de suas observações sobre as características encontradas;

7. Orientar os discentes para a socialização de suas observações e conclusão.

8. Pedir aos estudantes que selecionem a melhor conclusão encontrada pela equipe.

9. Solicitar que um membro da equipe escreva no quadro a melhor resposta da equipe para sua socialização.

10. Apresentar aos estudantes a formalização tomando como base as próprias observações e conclusões dos mesmos;

11. Orientar para que os estudantes resolvam as questões propostas referente a atividade proposta.

7.13. Atividade 12

Esta atividade vai ensinar sobre o tópico da base media dos trapézios, ou seja, sua regularidade em relação as outras duas bases desta figura. A atividade é composta de titulo, objetivo materiais, procedimentos e um quadro que deverá ser preenchido pelos estudantes levando em consideração o quadro de trapézios. Além disso, posteriormente apresentamos a análise a *priori* seguida das questões de aprofundamento.

ATIVIDADE 12

Título: Base Média do Trapézio

Objetivo: Descobrir uma regularidade entre a base média e as bases do trapézio.

Material: Roteiro das atividades, quadro de trapézios, régua, lápis ou caneta.

Procedimentos:

- Para cada trapézio do quadro de trapézios;
- Determine os pontos médios dos lados não paralelos;
- Ligue os pontos determinados;
- Determine a medida da base menor;
- Determine a medida da base maior;
- Determine a medida da base média;
- Com as informações obtidas preencha o quadro a seguir

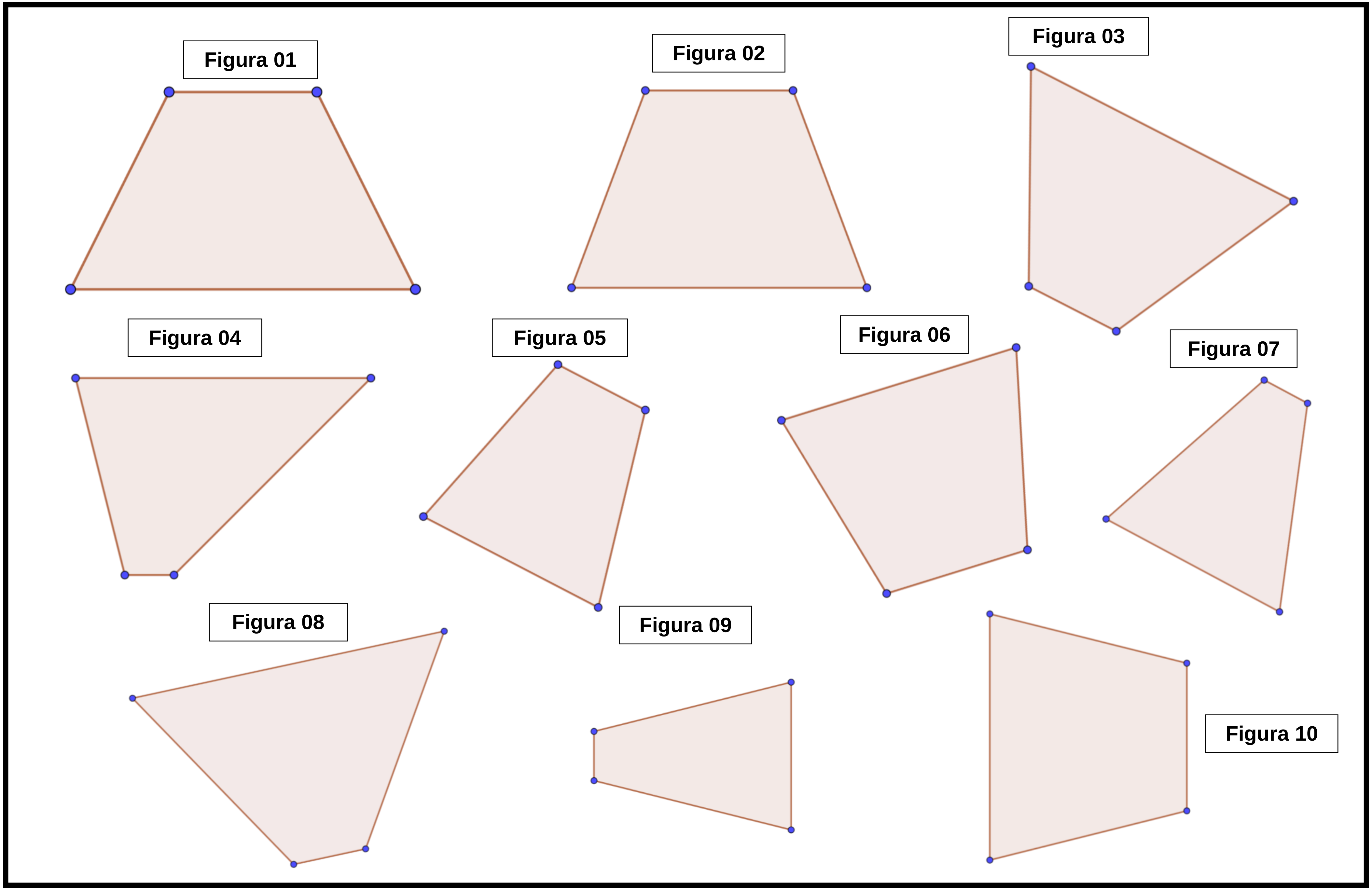
TRAPÉZIOS	**Medidas**		
	Base Maior (B)	**Base Menor (b)**	**Base Média (m)**
Nº 01			
Nº 02			
Nº 03			
Nº 04			
Nº 05			
Nº 06			
Nº 07			
Nº 08			
Nº 09			
Nº 10			

Observação:

Conclusão:

Fonte: Pesquisa, (2018)

Quadro de Trapézios

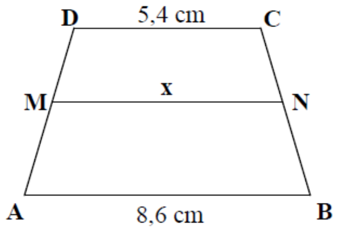


Questões propostas sobre a atividade 10

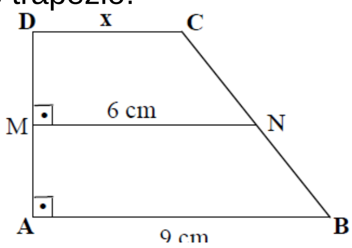
01- Determine a medida da base media de um trapézio quando:
a) as bases medem 20 cm e 11 cm; b) as bases 9,8 cm e 6,4 cm;

02- No trapézio da figura seguinte, x representa a medida da base maior. Determine essa medida x, sabendo que MN é a base média desse trapézio:

a)



b)



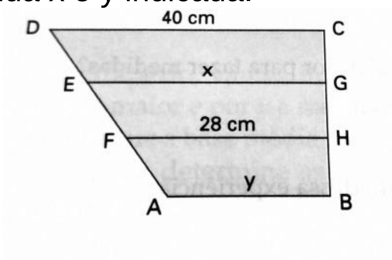
03- Determine a medida da base media de um trapézio sabendo que a medida da base maior é 8,25 cm e a medida da base menor é 6,15 cm.

03- Sabendo que a base media de um trapézio mede 6,5 cm e a base maior mede 8 cm, qual é a medida da base menor?

04- Quanto mede a base media do trapézio quando:
a) a base maior mede 21 cm e a base menor mede 12 cm?

b) a base maior mede 9,36 cm e a base menor mede 5,92 cm?

05- Os pontos assinalados no trapézio ABCD da figura vão dividir esses lados em partes iguais. Calcule a medida x e y indicada.



Orientações Didáticas Especificas

Os estudantes entender todos os procedimentos da atividade, tentando descobrir uma regularidade entre a base média e a base maior e a base menor de cada trapézio do quadro de trapézios, sendo esta: *A medida da base média de qualquer trapézio convexo é igual a medida da base maior somado a base menor, dividas por dois.*

Orientações Didáticas Gerais

1. Organizar os discentes em equipes, as quais devem ser preferencialmente formadas de maneira espontânea pelos discentes, de no máximo quatro integrantes;

2. Distribuir o roteiro da atividade de acordo com o número de integrantes de cada equipe, bem a régua e o quadro de trapézios;

3. Orientar os discentes na realização dos procedimentos descritos no roteiro da atividade;

4. Auxiliar os discentes em casos de dúvidas ou na ocorrência de dificuldades durante a execução;

5. Intervir, sempre que necessário, de maneira clara e precisa de modo a permitir a continuidade da atividade;

6. Orientar os estudantes para o preenchimento de suas observações sobre as características encontradas;

7. Orientar os discentes para a socialização de suas observações e conclusão.

8. Pedir aos estudantes que selecionem a melhor conclusão encontrada pela equipe.

9. Solicitar que um membro da equipe escreva no quadro a melhor resposta da equipe para sua socialização.

10. Apresentar aos estudantes a formalização tomando como base as próprias observações e conclusões dos mesmos;

11. Orientar para que os estudantes resolvam as questões propostas referente a atividade proposta.

8. SUGESTÕES DE LEITURAS

Para a obtenção de um maior aprofundamento, no que se refere ao que descrevemos em nosso produto, mostramos a seguir, algumas sugestões de leitura sobre o processo de ensino e aprendizagem envolvendo quadriláteros:

ALMEIDA, J. X. **A concepção dos professores ao ensinam quadriláteros nos anos iniciais do ensino fundamental e as possibilidades de contribuições das TIC**. 2015. 135 p. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física). Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, RS, 2015. Disponível em: <https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=3556502> Acesso em: dez. 2018

AMÂNCIO, R. A. **O desenvolvimento do pensamento geométrico**: trabalhando polígonos especialmente quadriláteros. 2013. 134 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática). Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2013. Disponível em: <encurtador.com.br/gyKY1> Acesso em: nov. 2018

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau**. Fundamentos da Matemática Elementar**. São Paulo: Editora Atual, 2004. Volume 09. Disponível em: < www.doraci.com.br/downloads/matematica/fund-mat-elem_09.pdf>. Acesso em: 10 de dezembro 2018.

EUCLIDES: **Os elementos**. Tradução e Introdução: Irineu Bicudo. 1. ed. São Paulo: UNESP, 2009. 600 p. v. 1. *E-book* (600 p.).

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** 5. ed. Campinas, Sp: Editora da Unicamp, 2011. 848 p. Tradução de: Hygino H. Domingues. Disponível em: < https://docero.com.br/doc/855se >. Acesso em: 01 mar. 2020.

MOURA, Liliana Karla Jorge de**. Abordagem Alternativa no estudo de quadriláteros**. 2013. Dissertação ((Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT)) Universidade Federal do Mato Grosso, Cuiabá - MT, 2013. Disponível em: <https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=1299950 >Acesso em: nov. 2018

SÁ, Pedro Franco de. **Atividades para o ensino de matemática no ensino fundamental.** Belém: EDUEPA, 2009.

SÁ, Pedro Franco de. Ensino de Matemática Através de Redescoberta. **Revista Traços**. Belém, v.2, nº3, p. 77 - 81, agosto, 2009. Disponível em: < http://revistas.unama.br/index.php/revistatracos/article/download/822/392>. Acesso em: jan. 2020.

SÁ, P. F. de. **Momentos de uma aula de Matemática por atividade**. Belém, 2019.

SÁ, Pedro Franco de. **Tópicos de Geometria Experimental:** Técnica da Redescoberta. Belém. Dissertação (especialização). 1988. 37 f. Universidade Federal do Pará.

9. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A sequência didática desenvolvida foi validada na dissertação de mestrado de Moraes (2020), que objetivava avaliar os efeitos de uma sequência didática para o ensino de quadriláteros por meio de atividades sobre a participação nas aulas, à construção de conceito e o desempenho na resolução de questões sobre o assunto. Desse modo, este produto busca contribuir de maneira efetiva para o processo de ensino e aprendizagem de quadriláteros, além de tentar minimizar as dificuldades que se apresentam em seu estudo, problemas como a identificação de figuras, suas características e também em relação às propriedades destas figuras planas. A utilização de metodologias do Ensino por Atividades pôde contribuir efetivamente para o referido processo. Assim, esperamos que estas informações possam auxiliar os professores que dela se aproximarem para contribuir com o ensino de quadriláteros tendo por base a sequência didática por nós concebida e nossas orientações didáticas necessárias para sua aplicação.

10. REFERÊNCIAS

AAKER, D. A.; KUMAR, V.; DAY, G. S. **Pesquisa de marketing**. São Paulo: Atlas, 2001.

ALMEIDA, J. X. **A concepção dos professores ao ensinam quadriláteros nos anos iniciais do ensino fundamental e as possibilidades de contribuições das TIC**. 2015. 135 p. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física). Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, RS, 2015. Disponível em: <https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=3556502> Acesso em: dez. 2018

AMÂNCIO, R. A. **O desenvolvimento do pensamento geométrico**: trabalhando polígonos especialmente quadriláteros. 2013. 134 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática). Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2013. Disponível em: <encurtador.com.br/gyKY1> Acesso em: nov. 2018

ARINOS, C. R. M. **Um estudo de potencialidades das representações semióticas na aprendizagem de áreas de triângulos e quadriláteros por alunos do quinto e sexto anos do ensino fundamenta**l. 2018. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática). Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande-MS 2015. Disponível em: <https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=6322780> Acesso em: nov. 2018

BARBETTA, Pedro Alberto. **Estatística Aplicada as Ciências Sociais.** 7. ed. Florianópolis: UFSC, 2007.

BARIANI, Isabel Cristina Dib. **Estilos cognitivos de universitários e iniciação cientifica.** 1998. 146f. Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas, SP. Disponível em: < http://repositorio.unicamp.br/jspui/handle/REPOSIP/253051>. Acesso em: 23 jul. 2019.

BERLINSKI, David. **Os Elementos de Euclides:** Uma história de geometria e do poder das ideias. Tradução: Claudio Carina. Rio de Janeiro: Zahar, 2012. 162 p. E-book (162 p.).

BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular – BNCC** 2ª versão. Brasília, DF, 2016. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/02/bncc-20dez-site.pdf > Acesso em 09 de junho 2018.

BRASIL**, Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática, V. 2. Brasília: MEC / SEF, 1997.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática – Ensino Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL, **Plano de Desenvolvimento da Educação:** ensino fundamental, Prova Brasil, matrizes de referências, tópicos e descritores. 200p. Brasília: MEC/SEB, INEP, 2008. Disponível em: < http://portal.mec.gov.br/dmdocuments/prova%20brasil_matriz2.pdf>. Acesso em: 10 de dez. 2018

BRITO, Marcia Regina Ferreira de. **Um estudo sobre as atitudes em relação a matemática em estudantes de 1 e 2 graus**. 1996. [383]f. Tese (livre-docência) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas, SP. Disponível em: <http://www.repositorio.unicamp.br/handle/REPOSIP/251566>. Acesso em: 25 jul. 2018.

BROUSSEAU, G. Fundaments et méthodes de la didactique des Mathématiques. **Recherches en Didactique des Mathématiques,** Vol.7, n. 2, p. 33 – 115, La pensée sauvage. Grenoble. 1986.

CERQUEIRA, T. C. S. **Estilo de Aprendizagem em Universitários.** 2000. 179f. Tese (Universidade Estadual de Campinas) Faculdade de Educação, Campinas, SP. 2000. Disponível em: < http://repositorio.unicamp.br/handle/REPOSIP/253390 > Acesso em: fev. 2019

CHERVALLARD, Yves. El análisis de las prácticas docentes em la teoria antropológica de lo didáctico. **Recherches en Didactique des Mathématiques.** Vol.19, n. 2, p. 221 – 266,1999.

CORRÊA, João Nazareno Pantoja. **O Ensino de Poliedros por Atividades**. 2019. 346 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Universidade do Estado do Pará, Belém, 2019.

COSTA, A. P. **A construção do conceito de quadriláteros notáveis no 6º ano do ensino fundamental:** um estudo sob a luz da teoria vanhieliana. 2016. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnologia). Universidade Federal de Pernambuco, Recife – CE 2016. Disponível em: <https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=3110746> Acesso em: nov. 2018

CRUZ, C. M. da. **Congruência de Polígonos em Geometria Neutra**: o caso dos quadriláteros**.** 2015. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro – RJ 2015. Disponível em: <https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=3530619 >Acesso em: dez. 2018

DAMIÃO, Gilberto de Souza. **O ensino dos quadriláteros notáveis com o software educativo GeoGebra.** 2015. Dissertação (Programa de Pós-graduação em Matemática). Universidade Federal Rural do Semiárido**.** Mossoró- RN 2015**.** Disponívelem:<https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalh

oConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=302050>Acesso em: dez. 2018

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau**. Fundamentos da Matemática Elementar**. São Paulo: Editora Atual, 2004. Volume 09. Disponível em: < www.doraci.com.br/downloads/matematica/fund-mat-elem_09.pdf>. Acesso em: 10 de dezembro 2018.

EUCLIDES: **Os elementos**. Tradução e Introdução: Irineu Bicudo. 1. ed. São Paulo: UNESP, 2009. 600 p. v. 1. *E-book* (600 p.).

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** 5. ed. Campinas, Sp: Editora da Unicamp, 2011. 848 p. Tradução de: Hygino H. Domingues. Disponível em: < https://docero.com.br/doc/855se >. Acesso em: 01 mar. 2020.

FERRAZ, Maria Cláudia Reis, MACEDO, Stella Maris Moura. As influências de um rio chamado avaliação escolar. In: ESTEBAN, Maria Teresa (Org.). **Escola, Currículo e Avaliação.** 2. ed. São Paulo: Editora Cortez, 2005.

FERNANDES**,** C. S. **Estudo de quadriláteros, reflexões e rotações no plano, segundo a teoria de van Hiele: uma experiência com alunos do 9º ano do ensino fundamental.** 2014. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Instituto de Ciências Exatas – Departamento de Matemática, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Seropédica, 2014. Disponível em: <https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=2291525> Acesso em: nov. 2018

FERREIRA, M. B. C. **Uma Organização didática em quadrilátero que aproxime a aluno de licenciatura das demonstrações geométricas.** 2016. Tese (Pontifícia Universidade Católica). PUC- São Paulo 2016. Disponível em: < https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=4455812 > Acesso em: dez. 2018

FERREIRA, P. S. de M. **O uso do Geoplano Digital em sala de aula como proposta para cálculo de áreas dos Quadriláteros.** 2013 53 p. Dissertação (Mestrado em Matemática). Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica-RJ, 2013. Disponível em: <https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=92894 > Acesso em: nov. 2018

GABRIEL, L. S. **Contributos de uma sequência didática para o ensino de quadriláteros:** compreensões a partir da teoria das situações didáticas. 2017. 145 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática)– Universidade Cruzeira do Sul, São Paulo, 2017. Disponível em: < https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=5273627 > Acesso em: nov. 2018

GODOY, Elenilton Vieira, SANTOS Vinício de Macedo. O cenário do ensino de matemática e o debate sobre o currículo de matemática. **Práxis Educacional.** Vitória da Conquista. v.8, n.13. p.253-280. jul./dez. 2012. Disponível em: < http://periodicos.uesb.br/index.php/praxis/article/viewFile/1590/1462>. Acesso em 14 de julho de 2018.

MANSFIELD, Daniel F.; WILDBERGER, N.j. Plimpton 322 is Babylonian exact sexagesimal trigonometry. **Historia Mathematica**, [s.l.], v. 44, n. 4, p.395-419, nov. 2017. Elsevier BV. Disponível em: http://dx.doi.org/10.1016/j.hm.2017.08.001 . Acesso em: 28 de fev. de 2020.

MELO, Guiomar Namo de. **Currículo da Educação Básica no Brasil:** concepções e políticas. Setembro de 2014. Disponível em: <www.ceesp.sp.gov.br/comunicado.php?id=321>. Acesso em: 13 de julho de 2018

MIRANDA, D. C. de. **O uso de materiais didáticos manipuláveis para o ensino de quadriláteros no sexto ano do ensino fundamental.** 2015. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Universidade Federal do Vale do São Francisco, Campus Juazeiro, Juazeiro - BA, 2015. Disponível em: <encurtador.com.br/gyKY1> Acesso em: nov. 2018.

MOL, Rogerio Santos. **Introdução à história da matemática.** Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013. 138 p. Disponível em:<http://www.mat.ufmg.br/ead/wp-content/uploads/2016/08/introducao_a_historia_da_matematica.pdf. >Acesso em: 01 mar. 2020.

MORAES, Ideny Espirito Santo Queiros**. O Ensino de Volume de Sólidos Geométricos por atividades.** 2018. 279f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2018.

MOURA, Liliana Karla Jorge de**. Abordagem Alternativa no estudo de quadriláteros**. 2013. Dissertação ((Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT)) Universidade Federal do Mato Grosso, Cuiabá - MT, 2013. Disponível em: <https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=1299950 >Acesso em: nov. 2018

PENA, A. F. R; CAVALCANTE, B.; DE CASTRO MIONI, Carolina. A Teoria de Kolb: Análise dos Estilos de Aprendizagem no Curso de Administração da Fecap. **Revista Liceu On-Line**, v.4, n.6, p. 64-84 2015. Disponível em: <https://liceu.emnuvens.com.br/LICEU_ON-LINE/article/view/1719>. Acesso em: jun. 2019.

SILVA, Benedita das Graças Sardinha da. **Ensino de Problemas Envolvendo as Quatro Operações por meio de Atividades.** 2015. 224f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Estado do Pará, PA, Programa de Pós-Graduação em Educação, Belém, 2015.

SOARES, Marcel Brito. **O ensino de Probabilidade por meio de atividades.** 2018. 294 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade do Estado do Pará, PA, Programa de Pós-Graduação em Educação, Belém, 2018.

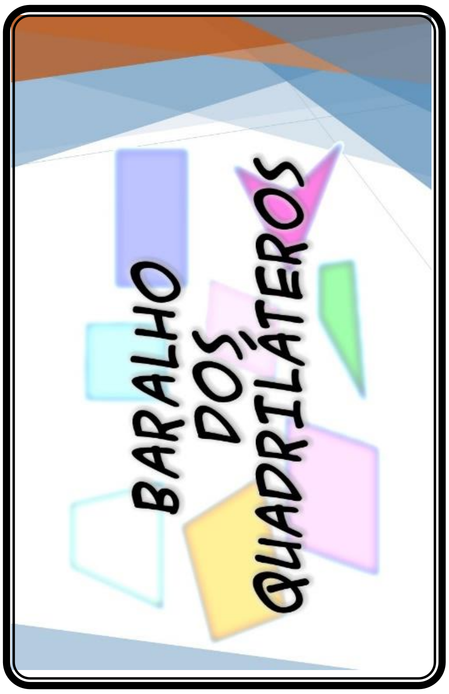
SÁ, Pedro Franco de. **Atividades para o ensino de matemática no ensino fundamental.** Belém: EDUEPA, 2009.

SÁ, Pedro Franco de. Ensino de Matemática Através de Redescoberta. **Revista Traços**. Belém, v.2, nº3, p. 77 - 81, agosto, 2009. Disponível em: < http://revistas.unama.br/index.php/revistatracos/article/download/822/392>. Acesso em: jan. 2020.

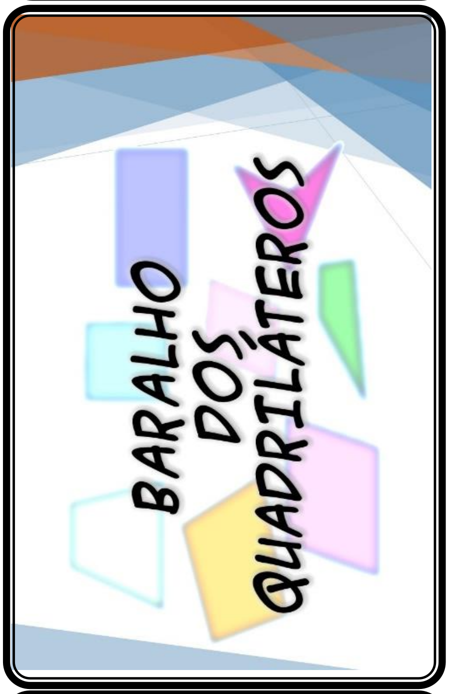
SÁ, P. F. de. **Momentos de uma aula de Matemática por atividade**. Belém, 2019.

SÁ, Pedro Franco de. **Tópicos de Geometria Experimental:** Técnica da Redescoberta. Belém. Monografia (Especialização em Ensino de Ciências e Matemática). Universidade Federal do Pará. 1988. 37 f.


BARALHO
DOS
QUADRILÁTEROS


BARALHO
DOS
QUADRILÁTEROS


BARALHO
DOS
QUADRILÁTEROS

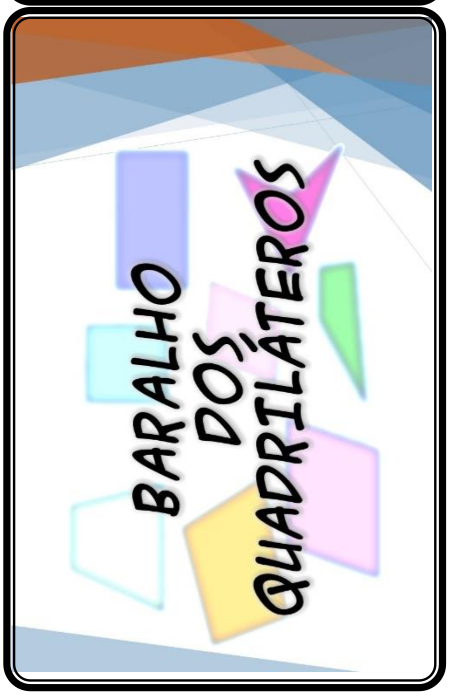

BARALHO
DOS
QUADRILÁTEROS

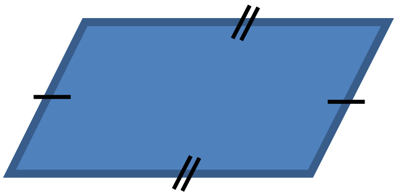

BARALHO
DOS
QUADRILÁTEROS


BARALHO
DOS
QUADRILÁTEROS


BARALHO
DOS
QUADRILÁTEROS

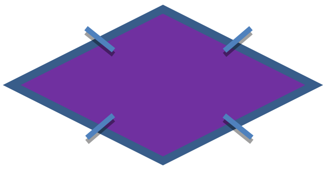

BARALHO
DOS
QUADRILÁTEROS


BARALHO
DOS
QUADRILÁTEROS



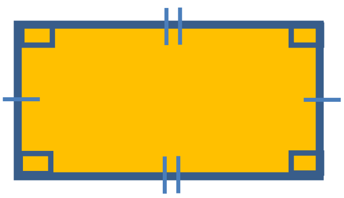
Paralelogramo

Pares de lados opostos congruentes



Losango

Lados congruentes

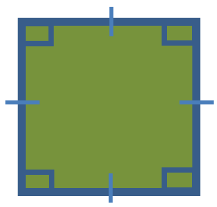


Retângulo

Pares de lados opostos congruentes

e

Quatro ângulos congruentes



Quadrado

Quatro ângulos

internos

congruente

e

Lados

congruentes

Quatro

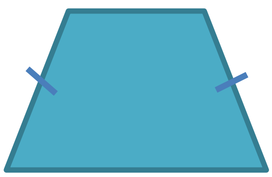
lados

Quatro

ângulos

Quatro

vértices



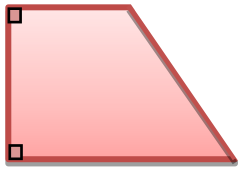
Trapézio

Isósceles

Lados não

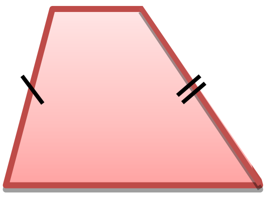
paralelos

congruentes



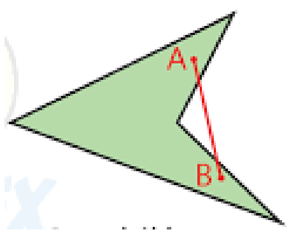
Trapézio Retângulo

Possue dois ângulos de 90º graus



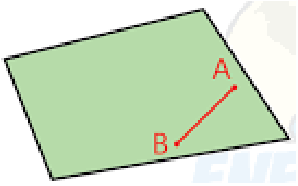
Trapézio Escaleno

Lados não paralelos não congruentes



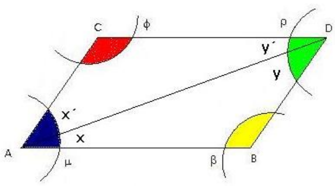
Quadrilátero Côncavo

Segmento de reta que contenha pontos externos ao quadrilátero



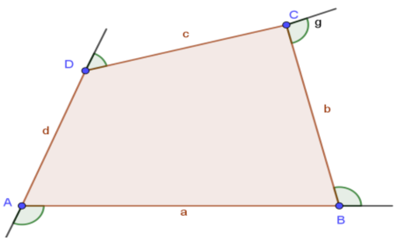
Quadrilátero convexo

Segmento de reta com pontos sempre internos ao quadrilátero



Soma dos ângulos internos dos quadrilateros

360º



Soma dos ângulos externos dos quadrilateros

360º

Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Trav. Djalma Dutra, s/nº – Telégrafo
66113-010 Belém-PA
www.uepa.br