
COSTOS DE PRODUCCION MATEMATICA FINANCIERA.

La empresa es el instrumento universalmente empleado para producir y poner en manos del público la mayor parte de los servicios existentes en la economía. La empresa desarrolla su actividad en conexión con otros agentes y esta relación condiciona el cumplimiento del objetivo que motiva su existencia. Para tratar de alcanzar sus objetivos, la empresa obtiene del entorno los factores que emplea en la producción, tales como las materias primas, maquinarias y equipo, mano de obra, capital, etc. Toda empresa al producir incurre en unos costos. Los costos de producción están en el centro de las decisiones empresariales, ya que todo incremento en los costos de producción normalmente significa una disminución de los beneficios de la empresa. De hecho, las empresas toman las decisiones sobre la producción y las ventas a la vista de los costos y los precios de venta de los bienes que lanzan al mercado.

Consideremos por un momento los diferentes tipos de factores productivos que utiliza una empresa para obtener el bien que fabrica. Algunos de estos factores los compra en el mercado en el momento en que los necesita y los incorpora totalmente al producto. **El costo** de estos factores es simplemente el precio que se ha pagado por ellos en el mercado, mientras que los **costos de producción** son el valor del conjunto de bienes y esfuerzos en que se incurren para obtener un producto terminado en las condiciones necesarias para ser entregado al sector comercial. De esta manera general para la elaboración de las curvas de costo en corto plazo se involucran a los: costos fijos, costos variables, costos marginales. El análisis de costo y el control de estos es una función, cuyo objetivo es mantener a la empresa en una posición económica satisfactoria.

Clasificación de los Costos de Producción.

- **Costos Fijos (CF):** son los costos de los factores fijos de la empresa y, por lo tanto, a corto plazo son independientes del nivel de producción.
- **Costo Fijo Medio (CFMe):** es el cociente entre el costo fijo (CF) y el nivel de producción.
- **Costos Variables (CV):** dependen, por el contrario, de la cantidad empleada de los factores variables y, por tanto, del nivel de producción.

- **Costo Variable Medio (CVMe):** es el costo variable (CV) dividido por el nivel de producción.
- **Costo Total (CT):** es igual a los costos fijos más los costos variables.
- **Costo Total Medio (CTMe):** El costo total medio (CTMe) es el costo total (CT = CF + CV) dividido por el nivel de producción.
- **Costo Marginal (C_{Ma}):** es el aumento del costo total (CT) necesario para producir una unidad adicional del bien. La curva del costo marginal (C_{Ma}) tiene un tramo decreciente, alcanza un mínimo y posteriormente tiene un tramo creciente. En consecuencia, la forma en “U” de una curva de costos marginales con un tramo decreciente, con un determinado nivel de producción en el que alcanza un mínimo, y a partir de ese nivel con un tramo creciente, descansa en la ley de los rendimientos decrecientes.
- **Costo Promedio:** también llamado *costo medio*, es el costo que demanda cada unidad producida, se calcula dividiendo el total de los costos por el total de unidades producidas $CM = \frac{CT}{U}$, Donde; CM = costo medio; CT = costo total; U = total de unidades producidas.

Ejemplo: se producen 1.000 unidades y los costos totales de producción ascendieron a \$2.000, entonces el costo medio es: $\$2.000/1000U = \$2/u$

Las distintas curvas de Costos, son:

El Costo Fijo Medio quedará representado por una curva decreciente, que es el producto de dividir el costo fijo entre unidades de producción que van en aumento. Esto pone en evidencia que el costo fijo por unidad se produce a medida que aumenta la producción, ya que el mismo se va repartiendo entre mayor número de unidades. La curva del Costo Fijo Medio tenderá a acercarse al eje de las abscisas.

• **El Costo Variable Medio** quedará representado en una curva en forma de “U” la cual inicialmente será decreciente, ya que en las primeras etapas del proceso productivo, la producción se incrementará a un mayor ritmo en el costo variable. El punto más bajo de la

curva del costo variable medio indica que allí se ha logrado la combinación más eficaz de los factores variables de producción. Como más adelante veremos, la curva del costo variable medio se iguala en el punto inferior con el valor de la curva del costo marginal, que allí cruzará. A partir de dicho punto de intersección, el costo variable medio será decreciente, lo cual se pondrá de manifiesto en su curva respectiva y viene a evidenciar la pérdida de eficacia productiva que tiene lugar al emplear unidades de factor variable.

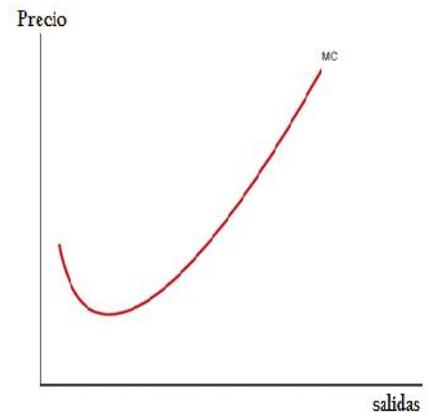
· **El Costo Total Medio** quedará representado también por una curva en forma de “U”, cuyos valores serán decrecientes en su fase inicial. Esto se debe a que en las primeras fases del proceso productivo, el costo fijo total se divide entre un mayor número de unidades producidas, además del esperado aumento de eficacia que tiene lugar en esas primeras etapas. Los valores de esta curva se igualarán también con los de la curva del costo marginal, que en dicho punto cruzará. A partir de ese punto la curva del costo total medio será creciente debido al fenómeno ya descrito según el cual se produce una pérdida de eficacia a medida que se van empleando mayores unidades de factores variables, como consecuencia de la ley de los rendimientos decrecientes.

· Al iniciarse la producción el **Costo Marginal** podrá disminuir en un principio. Ello se debe a que se ha supuesto que en la primera fase existan rendimientos marginales decrecientes. Sin embargo, en la segunda fase, como consecuencia de la ley de rendimientos marginales decrecientes, dichos costos comenzarán a aumentar a partir de un punto determinado, tal como se evidencia en la curva respectiva, debido a que la productividad marginal debe finalmente decrecer. En otras palabras, en la medida en que la productividad marginal decrezca, los costos marginales crecerán. El costo marginal evidencia el incremento instantáneo del costo total, es decir, indica cómo va aumentando el costo con cada unidad adicional producida. Además, las curvas de costo total medio y costo variable medio serán decrecientes mientras la curva de costo marginal esté por debajo de ella, sin importar, para que esto ocurra, que dicho costo marginal sea creciente o decreciente.

En economía y finanzas, el **coste marginal** o **costo marginal**, también conocido como **costo variable**, mide la tasa de variación del coste dividida por la variación de la producción. Para comprender mejor el concepto de coste marginal, se suele expresar el coste marginal como el incremento que sufre el coste cuando se incrementa la producción en una unidad, es decir, el

incremento del coste total que supone la producción adicional de una unidad de un determinado bien. La representación de la trayectoria usual de los costes marginales. En abscisas, (horizontal), se representa el volumen de producción y en ordenadas, (vertical), el importe de los costes.

En una gráfica como la que se muestra a la parte derecha de la pantalla, la curva que representa la evolución del costo marginal tiene forma de parábola cóncava, debido a la *ley de los rendimientos decrecientes*. En el punto mínimo de dicha curva, se encuentra el número de bienes a producir para que los costos en beneficio de la empresa sean mínimos. En dicha curva, el punto de corte con la curva de costes medios nos determina el óptimo de producción, punto a partir del cual se obtiene mayor producción.



En política de precios el coste marginal nos marca el precio a partir del cual obtenemos beneficios, siempre y cuando hayamos alcanzado el umbral de rentabilidad o punto muerto. En conclusión el costo marginal es:

Costo Marginal: es el costo que insume producir una unidad más. Si X es la cantidad de unidades que hace óptimo el beneficio, cada unidad más que se produzca reportara un costo medio mayor que la anterior, por eso el costo marginal es creciente mientras que los rendimientos marginales son decrecientes.

Ejemplo: la cantidad de unidades que hace optima al beneficio es 10.000, el costo medio de esas unidades es \$10, si se producen 10.001 unidades, el costo de la última unidad va a ser mayor que \$10.

El costo marginal se define como la variación en el costo total, ante el aumento de una unidad en la cantidad producida, es decir, *es el costo de producir una unidad adicional*.

Matemáticamente se expresa como la derivada parcial del costo total respecto a la cantidad:

Costo Marginal = Costo Total / Cantidad. En simbología matemática es: $CMg = CT / Q$

El costo marginal es un concepto fundamental en la teoría microeconómica, debido a que se utiliza para determinar la cantidad de producción de las empresas y los precios de los productos.

El costo marginal depende de la tecnología utilizada en la producción y de los precios de los insumos. Siguiendo la teoría neoclásica, el gráfico del costo marginal en el corto plazo tiene forma de U debido a que para pocas unidades producidas se tiene mucho capital (insumos fijos) y pocos trabajadores (insumos variables), por lo que los primeros trabajadores aumentan mucho la producción debido a que tienen mucho capital disponible. A medida que se van agregando trabajadores, la producción sigue aumentando pero cada vez menos, porque el capital se mantiene fijo. Llegará un punto en que el aumento de la cantidad producida por los trabajadores adicionales sea tan bajo que el costo total aumentará proporcionalmente más que la cantidad producida, por lo que el costo marginal comenzará a elevarse. A partir de este punto, el **costo medio** de producción aumentará a medida que se agreguen trabajadores a la empresa, por ejemplo debido a que los insumos fijos por trabajador serán menores, por ejemplo maquinaria, herramientas, espacio físico, computadoras, etc.. Este es el principio de los rendimientos físicos marginales decrecientes. En un extremo puede suceder que trabajadores adicionales no añadan nada al producto, por ejemplo porque no tienen ninguna herramienta para trabajar.

En términos matemáticos, la función de producción relaciona el output, (salidas) con los inputs, (entradas), o factores de producción. En el corto plazo hay ciertos factores fijos. Introduciendo el precio de los factores se puede obtener el costo total en función de la cantidad producida. Derivando el costo total respecto a la cantidad se obtiene el costo marginal.

Ejemplo numérico y gráfico: En este ejemplo vamos a ver como se relaciona el costo total con el costo medio y el costo marginal.

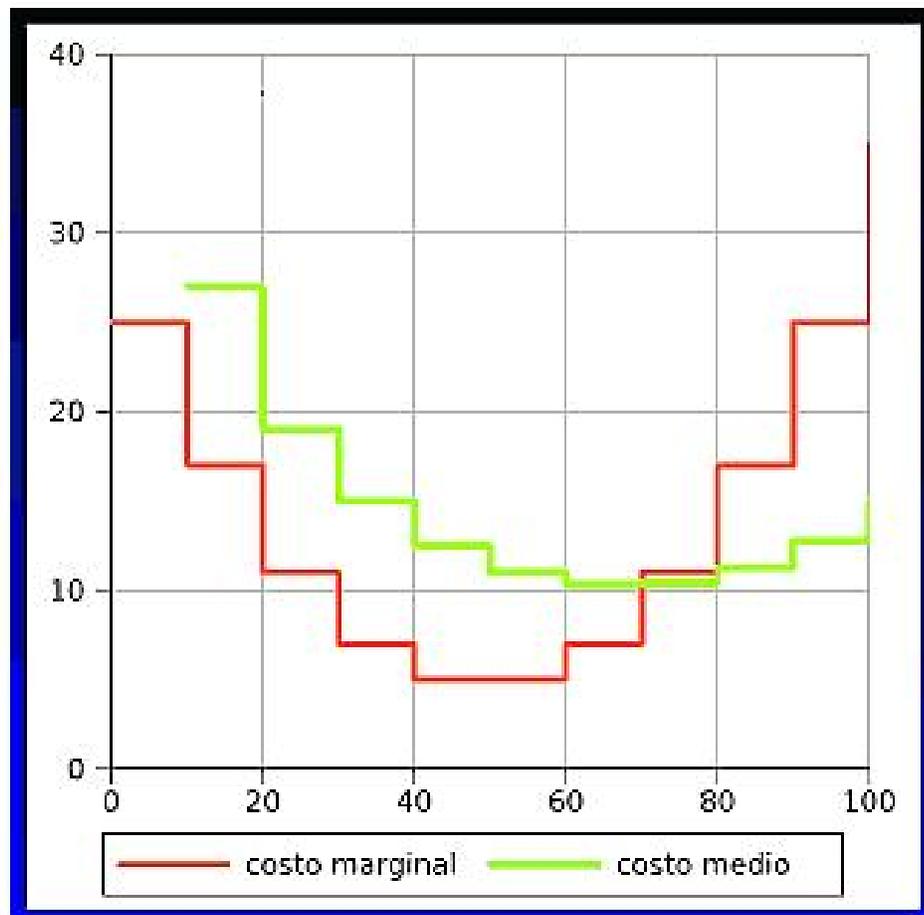
U	K	L	costo fijo	costo variable	costo total	costo marginal	costo medio	P Mg
0	100	0	100	0	100	25.00		
10	100	17	100	170	270	17.00	27.00	0.59
20	100	28	100	280	380	11.00	19.00	0.91
30	100	35	100	350	450	7.00	15.00	1.43
40	100	40	100	400	500	5.00	12.50	2.00
50	100	45	100	450	550	5.00	11.00	2.00
60	100	52	100	520	620	7.00	10.33	1.43
70	100	63	100	630	730	11.00	10.43	0.91
80	100	80	100	800	900	17.00	11.25	0.59
90	100	105	100	1050	1150	25.00	12.78	0.40
100	100	140	100	1400	1500	35.00	15.00	0.29

En las columnas vemos (por orden):

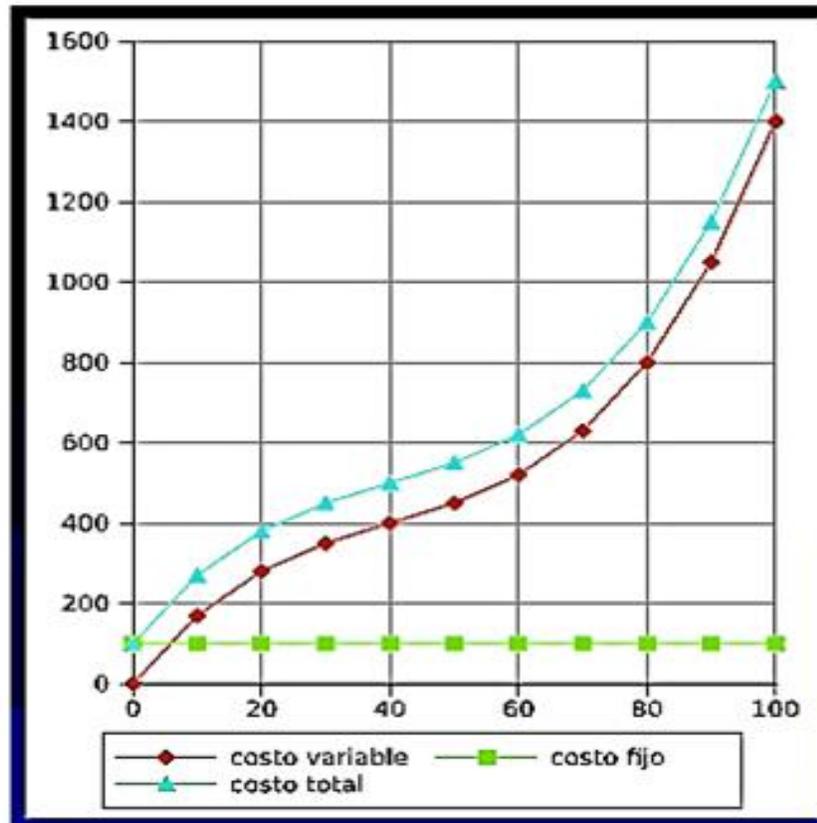
- **La Cantidad total producida U**
- **La cantidad de capital K**
- **La cantidad de trabajadores L**
- **El costo fijo:** se supone que el capital representa el costo fijo $CF = K \cdot r$, ($r = 1$)
- **El costo variable:** $CV = L \cdot w$, ($r = 1$) se utiliza un nivel de salario de 10.
- **El costo total:** es igual al costo fijo más el costo variable $CT = CF + CV$
- **El costo marginal:** $C Ma = \frac{\partial CT}{\partial U}$

- **El costo medio** :es el costo total dividido por la cantidad total producida $CM = \frac{CT}{U}$
- **El producto marginal de cada trabajador:** $P Mg = \frac{\partial U}{\partial L}$

Grafica1. De comparación entre el Costo Marginal y el Costo Medio



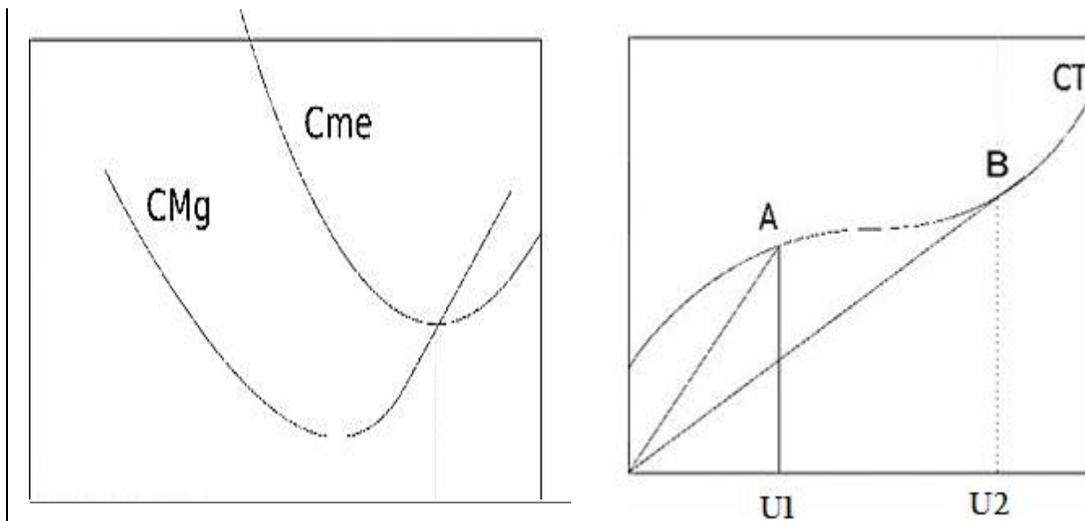
Grafica 2. De comparación entre Costos Fijos, Costos Variables y Costos Totales



En el gráfico 1 vemos que el costo marginal es decreciente hasta cierto punto para luego comenzar a elevarse, mientras que el costo medio sucede lo mismo pero el costo medio es más elevado que el costo marginal para las primeras unidades, interceptando a este en su punto mínimo para luego ascender pero por debajo del costo marginal.

En el gráfico 2 se observa que la diferencia entre el costo total y el costo variable es el costo fijo, que es constante e igual a 100. El costo total y el variable son siempre crecientes, pero para las primeras unidades crecen las tasas cada vez menos para luego llegar a un punto de inflexión, a partir del cual crecen a tasas cada vez mayores.

Veamos el gráfico 3:



En el gráfico 3 la pendiente de cualquier función es igual a la variación vertical dividida por la cantidad horizontal. En el caso de la curva de costo total, en el eje vertical se representa el costo total y en el eje horizontal la cantidad producida, por lo que la pendiente del costo total es el costo marginal. Si miramos conjuntamente ambos gráficos, nos damos cuenta que a medida que el costo Total (derecha), se hace menos “empinado”, el costo marginal arriba va disminuyendo. Cuando llegamos a cierta cantidad vemos que la pendiente del costo total comienza a aumentar, lo que se ve reflejado en el gráfico de la izquierda por un aumento del costo marginal.

Si dividimos la altura del costo total, por su distancia hasta el eje y, obtendremos el costo total dividido por la cantidad, es decir, *el costo medio*. Si dibujamos una rayo desde el origen (punto (0,0) hasta algún punto del **costo total**, la pendiente de ese rayo es la altura del punto dividida por la distancia al eje y, es decir, la *pendiente del rayo* es el **costo medio**). Como vimos antes, el **costo marginal** es la pendiente de la curva de costo total, es decir, la tangente de la curva a ese punto. Entonces tenemos **que la pendiente del rayo es el costo medio y la pendiente de la tangente es el costo marginal**.

Vemos que en el punto B, la pendiente del rayo es la mínima y en este punto la pendiente del rayo es igual a la pendiente de la tangente. Es decir, es *el mínimo del costo medio*, y en ese punto el costo medio es igual al *costo marginal*. En el ejemplo del gráfico 1, esto se da

alrededor de las 65 unidades. Adicionalmente podemos ver que cuando el costo medio está decreciendo, el costo marginal es inferior al costo medio, mientras que cuando el costo medio está aumentando, el costo marginal es mayor el costo medio.

Costos a Corto Plazo. Se define el corto plazo como un período de duración suficientemente largo para permitir a una empresa hacer cambios en sus niveles de producción, a partir de su capacidad instalada; pero no lo suficientemente largo para permitir a la empresa hacer cambios en esta misma capacidad.

Costos a Largo Plazo. A largo plazo, como ya se dijo, no existen factores fijos. La empresa puede realizar las inversiones requeridas para adaptarse a las condiciones del mercado y, en consecuencia, puede elegir para cada nivel de producción el método que le resulte menos costoso. Sus costos totales aumentarán si decide incrementar las cantidades producidas, ya que a mayor producción los costos aumentan. Sus costos medios experimentarán un comportamiento diferente de acuerdo con los niveles de producción que pretenda alcanzar la empresa.

Maximización de Beneficios de la Empresa. La decisión básica que toda empresa debe tomar es la cantidad que producirá. Esta decisión dependerá del precio al que pueda venderla y del costo de producción. En el proceso que toda empresa sigue para determinar la cantidad de producto que colocará en el mercado se guía por el deseo de maximizar los beneficios, definidos como la diferencia entre los ingresos totales y los costos totales:

En relación a esta expresión, caben tres posibilidades:

- Beneficios normales
- Beneficios extraordinarios
- Pérdidas.

1.- Beneficios normales ($IT = CT \ B = 0$). Cuando la empresa logra igualar los ingresos totales y los costos totales el beneficio es igual a cero y se dice que la empresa obtiene beneficios normales o contables pues los costos totales comprenden todos los costos de producción, incluido el costo de oportunidad del capital y la gestión aportada por los propietarios de la empresa. Para presentar el análisis de la maximización de los beneficios en términos unitarios o medios, tal como hemos llevado a cabo el estudio de los costos, dividamos los ingresos totales y los costos totales por la cantidad producida por la empresa.

De esta forma obtenemos, por un lado los costos medios ($C_{me} = \frac{CT}{q}$) y por otro los ingresos medios, que en realidad equivale al precio de mercado: De esta forma, si el $IT = CT$ resulta también $Ime = CT_{me}$ ó, lo que es igual, que $P = CT_{me}$. Así la empresa obtiene beneficios normales cuando el precio es igual al costo total medio.

2.- Beneficios extraordinarios ($IT > CT$ B > 0) La segunda posibilidad es que los ingresos totales sean superiores a los costos totales. En este caso la empresa obtiene beneficios extraordinarios, en el sentido de que son superiores a los normales de la explotación. En términos unitarios o medios que la empresa obtengan beneficios extraordinarios equivale a decir que $Ime > CT_{me}$ o que $P > CT_{me}$. Así cuando el precio de mercado es superior a los costos totales medios de la empresa obtiene beneficios extraordinarios.

3.- Pérdidas ($IT < CT$ B < 0) La tercera posibilidad surge cuando los ingresos totales son inferiores a los costos totales, por lo tanto la empresa, incurre en pérdidas. Si $IT < CT$, esto equivale a que los ingresos totales medios sean inferiores a los costos totales medios o lo que es lo mismo $P < CT_{me}$. En casos en que la empresa experimente pérdidas merece analizarlo con más detalle. Para ello recordemos que en el corto plazo los costos totales tienen dos componentes, los costos fijos y los costos variable: $CT = CF + CV$.

- **Pérdidas mayores que los costos fijos.** Esta situación se dará cuando $CV > IT$, es decir, cuando los $CV_{me} > P$. Así cuando el costo variable medio sea mayor que el precio de mercado, las pérdidas en que incurrirá la empresa serán mayores que los costos fijos y la empresa debería cerrar. Dado que $CV_{me} > P$, la empresa incurrirá en mayores pérdidas produciendo que si dejara de producir y solo tuviera los costos fijos.

- **Pérdidas iguales a los costos fijos.** Esto es lo que ocurrirá cuando $CV = IT$, lo que equivale a decir que el $CV_{me} = P$. Cuando el precio es igual al costo variable medio, Los únicos costos que quedan por cubrir son los fijos. En esta situación, a la empresa le será indiferente o producir o no, ya que si decide hacerlo las pérdidas en que incurrirá será en cuantía igual a los costos que tendría que soportar si no produce.

- **Pérdidas menores que los costos fijos.** Una empresa incurrirá en unas pérdidas inferiores a los costos fijos cuando $CV < IT$, esto es cuando $CV_{me} < P$. Si el precio es mayor

que el costo variable medio, quiere decir que en parte se están cubriendo los costos fijos de forma que las pérdidas en las que se incurre al producir son inferiores a los costos fijos. En esta situación el empresario aun teniendo pérdidas, decidirá producir. Su deseo de maximizar los beneficios le lleva a minimizar las pérdidas, es decir, a cubrir parte de los costos fijos, pues les tendría que hacer frente aunque dejara de producir.

BENEFICIO Y COSTO MARGINAL

El **beneficio** que surge de incrementar una actividad recibe el nombre de **beneficio marginal**. Por ejemplo imagine que dedica cuatro noches a la semana a estudiar y que su calificación promedio es de 7 (de una escala de 10). Como desea subir sus notas, decide estudiar una noche más por semana. Su clasificación promedio aumenta a 7.5.

El beneficio marginal de estudiar una noche adicional por semana es el aumento de 0.5 en su calificación, no el 7.5 total. Usted ya tenía 7 por estudiar cuatro noches a la semana por lo que no consideramos este beneficio como resultado de la decisión que acaba de tomar. Al costo de un incremento en una actividad se le denomina **costo marginal**. Para usted, el costo marginal de incrementar su tiempo de estudio una noche por semana es el costo de la noche adicional que no pasa con sus amigos (en caso de que ésta sea la mejor alternativa para emplear su tiempo). Este costo no incluye el de las cuatro noches semanales que ya dedica al estudio.

Para tomar su decisión, debe comparar el **beneficio marginal** de una noche adicional de estudio con el costo marginal. Lo sensato es estudiar la noche adicional. Si el **costo marginal supera el beneficio marginal**, no hay razón para estudiar la noche adicional. Para tomar su decisión, debe comparar el **beneficio marginal** de una noche adicional de estudio con el costo marginal. Lo sensato es estudiar la noche adicional. Si el **costo marginal supera el beneficio marginal**, no hay razón para estudiar la noche adicional.

Cuando evaluamos los **beneficios y costos marginales** elegimos sólo aquellas acciones que ofrecen más beneficios que costos, estamos empleando nuestros escasos recursos de la manera más ventajosa posible.

Respuesta a los incentivos. Nuestras elecciones responden a los incentivos. Un cambio en el costo marginal o en el beneficio marginal afecta los incentivos que se nos presentan y nos impulsa a cambiar nuestra elección.

Por ejemplo, imagine que su profesor de **economía** le entrega un conjunto de problemas y le dice que todos ellos estarán incluidos en su próximo examen. El **beneficio marginal** de estudiar esos problemas es grande, así que usted decide trabajar diligentemente en ellos. En contraste, si su profesor de matemáticas le da algunos problemas y le avisa que ninguno de ellos formara parte de su próximo examen, el beneficio marginal de estudiar esos problemas es menor, por lo que seguramente ignorará la mayoría de ellos. *La idea fundamental de la economía es que podemos predecir la manera en que cambiarán las elecciones con solo analizar los cambios en los incentivos.* Es más probable emprender cualquier actividad cuando su costo marginal disminuye o su beneficio marginal aumenta; al contrario, es más difícil que se lleve a cabo una actividad cuando su costo marginal aumenta o su beneficio marginal disminuye.

La maximización de los beneficios y los ingresos marginales. El logro del objetivo de toda empresa de maximizar los beneficios se alcanza cuando la diferencia entre los ingresos totales y los costos totales es máxima. Como se desprende del análisis de la figura 8.8, la diferencia positiva máxima entre los ingresos totales y los costos totales se alcanza en el punto en el que la pendiente de la curva de ingresos totales es igual a la pendiente de la curva de costos totales. Dado que la pendiente de una curva lo que mide es el cambio experimentado por la variable representada en el eje de ordenadas cuando cambia la variable representada en el eje de abscisas, en realidad la maximización del beneficio lo que exige es que el costo marginal sea igual al ingreso marginal. El ingreso marginal se define como el cambio del ingreso total que se produce cuando se altera en una unidad la cantidad producida: Toda empresa que trata de maximizar el beneficio lanzará al mercado aquella cantidad de producto para la que se cumple la siguiente condición: ***ingreso marginal = Costo marginal***

La empresa maximiza su beneficio total en aquel punto en el que no es posible obtener ningún beneficio adicional incrementando la producción y esto ocurre cuando la última unidad producida añade lo mismo al ingreso total que el costo total. Asimismo obsérvese que la empresa incrementa el beneficio total siempre que el ingreso adicional generado por la última

unidad vendida resulte ser mayor que su costo marginal. Por otro lado, siempre que el ingreso marginal sea menor que el costo marginal será posible aumentar los beneficios reduciendo el nivel de producción. En consecuencia, la empresa maximizará su beneficio en aquel nivel de producción en el que equilibra el ingreso marginal y el costo marginal.

El nivel de producción que maximiza el beneficio o el nivel de producción óptimo tiene lugar cuando el ingreso marginal es igual al costo marginal, esto es, cuando se cumple que $I_m = C_m$.

EJERCICIOS:

1. Calcula el cambio en el costo. Por ejemplo, si la empresa ABC cobra \$2.500 dólares para producir 250 artículos, y cobra \$4.000 dólares para producir 500 artículos, el cambio del costo sería de \$ 4,000 menos \$ 2,500, lo cual es igual a \$1.500 dólares.
2. Calcula el cambio en las unidades de producción. Por ejemplo: usando el número de productos de arriba, 500 productos menos 250 productos da un resultado de 250 artículos.
3. Utilizando la fórmula de cambio en el costo/cambio en la unidad de producción, ingresa las variables correspondientes. Por ejemplo, el cambio en el costo igual a \$1.500 dólares dividido por el cambio en la producción, es decir que 250 unidades es igual a \$6 dólares. ($\$1.500/250$).

Bibliografía consultada y de apoyo:

- MOCHON, Francisco, Economía Teoría y Política, Tercera Edición, Mc Graw – Hill.
- TORO HARDY, José, Fundamentos de Teoría Económica, Editorial Panapo.
- SPENCER Y SIEGELMAN, Economía de la Administración de Empresas, 1.963, Primera Edición. Editorial Hispano Americana.