

Grundlagen der Elektrotechnik ausgewählte Kapitel

ergänzende Beiträge zur Vorlesung
zum Thema

Berechnungen im magnetischen Feld

Doz. Wolfgang Stuchlik
DLR Lampoldshausen, Abt. VEA

DHBW - MOS WiSe 2017

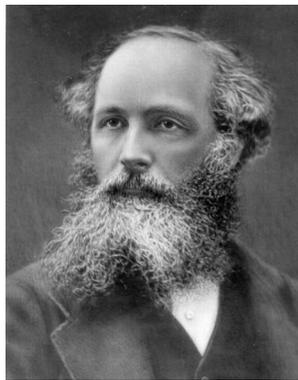


Abbildung 1: James Clerk Maxwell



Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt
74239 Hardthausen
Langer Grund
Wolfgang.Stuchlik@dlr.de

Inhaltsverzeichnis

1	Das magnetische Feld	4
1.1	Das magnetische Feld und die Elektrizität	4
1.2	Magnetische Feld- und Kenngrößen	6
1.2.1	Definitionen der Größen	7
1.2.2	Magnetischer Grundstromkreis	7
1.3	Das Durchflutungsgesetz	9
1.4	Das Biot-Savart'sche Gesetz	10
1.5	Hysterese	12
1.6	Weiss'schen Bezirke - Die Theorie der Elementarmagneten	14
1.7	Energie und Arbeit im homogenen Magnetfeld	14
1.8	Das Induktionsgesetz	15
1.9	Selbst- und Gegeninduktion	18
1.9.1	Selbstinduktion	18
1.9.2	Gegeninduktion	19
1.10	Kraftwirkung im magnetischen Feld	20
2	Aufgaben	21
2.1	Stromdurchflossener Leiter und magnetische Flussdichte \vec{B}	21
2.2	Stromdurchflossener Leiter und magnetischer Fluss $\vec{\Phi}$	21
2.3	Berechnungen in einer Luftspule	23
2.4	Die elektrisch geladene Kugel	24
2.5	Das Biot-Savart'sche Gesetz unter der Lupe	25
2.5.1	Die Wechselwirkung von Materie und Umgebung	25
2.5.2	Biot-Savart Beweisführung	27
2.6	Eisenkreis mit Luftspalt	28
2.7	Die gesuchte Spannungsfunktion	29
2.8	Die gesuchte Funktion des magnetischen Flusses	30
2.9	Das Koaxialkabel	32
2.10	Die Rogowski Spule	33
3	James Clerk Maxwell	34
3.1	Lebenslauf	34
3.2	Die vier Maxwell'schen Gleichungen	35
3.2.1	Die erste Maxwellsche Gleichung - Das Durchflutungsgesetz	35
3.2.2	Die zweite Maxwellsche Gleichung - Das Induktionsgesetz	36
3.2.3	Die dritte Maxwellsche Gleichung - Ladung als Ursache eines elektrischen Feldes	36
3.2.4	Die vierte Maxwellsche Gleichung - Quellenfreiheit magnetischer Felder	37
4	Abkürzungsverzeichnis	38
5	Literaturverzeichnis, Quellennachweis	39

Abbildungsverzeichnis

1	James Clerk Maxwell	1
2	Sichtbarmachung von magnetischen Feldstärkelinien - Quelle: Fraunhofer IIS/EAS, Dresden	4
3	Die magnetische Feldstärke ist außerhalb des stromdurchflossenen Leiters indirekt proportional zum Abstand zur Leiteroberfläche.	5
4	Die magnetische Feldstärke ist innerhalb des stromdurchflossenen Leiters direkt proportional zum Abstand des Leitermittelpunktes.	6
5	Die magnetische Feldstärke als Funktion des Abstandes zum Leitermittelpunkt.	6
6	Der magnetische Grundstromkreis mit veränderlichem Luftspalt. Die Luftspaltbreite bestimmt den Wert der Gesamtinduktivität der Anordnung. Durch die Speisung mit einer Wechselspannung wird der induktive Widerstand $x_L = j\omega (L + \Delta L)$ verändert.	8
7	Der magnetische Grundstromkreis symbolisch dargestellt.	8
8	Die „rechte Hand Regel“- die Magnetfeldlinien symbolisieren den Verlauf der magnetischen Feldstärke \vec{H} , die Feldlinien des magnetischen Flusses \vec{B} verlaufen orthogonal zur Feldstärke	10
9	Erstmagnetisierung	12
10	Die Stromstärke wird geringer und ändert die Fließrichtung.	12
11	positive und negative Koerzitivfeldstärke	13
12	Die Hystereseschleife	13
13	Der elektrische Leiter bewegt sich nicht. Das Magnetfeld ändert sich zeitlich und die Magnetfeldlinien schneiden den ruhenden Leiter (Lit.-Ref.8).	16
14	Der elektrische Leiter bewegt sich durch einen mechanischen Antrieb im konstanten Magnetfeld. Die Folge ist, dass ein Strom induziert wird. (Lit.-Ref.9)	17
15	Selbstinduktion - die Wirkung der Spule	18
16	Ersatzschaltung	18
17	Das Prinzip der Durchflutung - „Strom erzeugt ein Magnetfeld, ein Magnetfeld erzeugt Strom“	19
18	rechte-Hand-Regel: Daumen in Stromrichtung, Zeigefinger von Nord nach Süd, Mittelfinger zeigt die Richtung der Kraft auf den Draht	20
19	Verlauf der magnetischen Flussdichte \vec{B} [mT] in Abhängigkeit vom Abstand des Mittelpunktes des Leiters	21
20	Verlauf des magnetischen Flusses Φ [Wb] in Abhängigkeit vom Abstand der Mittellinie des Leiters. Die Ergebnisse bis zur Leiteroberfläche sind technisch nicht plausibel.	22
21	Verlauf des magnetischen Flusses Φ [Wb] in Abhängigkeit vom Abstand der Oberfläche des Leiters. Es ist deutlich sichtbar, dass der magnetische Fluss nicht konvergiert.	22
22	der magnetisch neutrale Wickelkern einer Luftspule	23
23	Der Versuchsaufbau	24
24	die bewegte Ladung	25
25	Die durchströmte Fläche.	26
26	die Radien und die Fläche dA	26
27	die Winkel und Wegstrecken - der Winkel α_1 verändert sich zeitlich	26
28	grafische Ermittlung der Größen	27
29	grafische Ermittlung der Größen - für kleine Winkel bis 10° gilt: $\sin\alpha = \alpha$ bei max. 5% Fehler	27
30	Die Geometrie des Eisenkreises	28
31	Folgende Funktion wurde gemessen - wie lautet die dazugehörige u(t) Funktion?	29
32	Wie lauten die vier $\Phi(t)$ Teilfunktionen?	29
33	Die zusammengesetzte u(t) Funktionen.	30
34	Die induzierte u(t)-Funktion.	31
35	Die gesuchte $\Phi(t)$ -Funktion.	31
36	Das Koaxialkabel als Skizze.	32
37	Der Kern der Rogowski Spule ist flexibel und magnetisch neutral.	33
38	Die drei Lösungen	33
39	Maxwell Denkmal in Edinburgh	34
40	Erzeugung der magnetischen Feldstärke durch einen Stromfluss im Leiter	35
41	Erzeugung der magnetischen Flussdichte \vec{B} durch einen Stromfluss im Leiter und durch den Verschiebungsstrom I_V im Nichtleiter.	36
42	exemplarischer Verlauf des elektrischen Feldes	37
43	exemplarischer Verlauf des magnetischen Feldes	37

1 Das magnetische Feld

1.1 Das magnetische Feld und die Elektrizität

Die Wirkung des magnetischen Feldes kann in der Natur beobachtet werden. Faszinierend dabei sind die Kräftewirkungen auf bestimmte Stoffe. Die technische Nachbildung des magnetischen Feldes hat das Ziel, die Kraftwirkungen gesteuert einzusetzen. Die technischen Kräfte sind bis zu 50.000mal höher, als die Kraftwirkungen in der Natur.

Die ersten Experimente:

Was erzeugt ein magnetisches Feld?

Ein stromdurchflossener Leiter wird von Magnetfeldlinien umgeben. Der Umlauf der Magnetfeldlinien hängt von der Stromflussrichtung ab.

Aufgabe: Machen Sie die magnetische Feldstärke sichtbar!

- $I = 0$; Auf einer Platte liegen Eisenfeilspäne und Kompassnadeln. Der Strom durch den Leiter ist Null.
- **Ergebnis:** Keine Ordnung bei den Spänen erkennbar, keine geregelte Kraftwirkung. Die Kompassnadeln richten sich in Nord-Süd Richtung des Erdmagnetfeldes aus.
- $I \neq 0$; Ein Strom wird eingeschaltet und erzeugt ein magnetisches Feld (rechte Hand Regel - der Daumen zeigt in Stromrichtung, die gekrümmten Finger symbolisieren den Verlauf der Feldlinien).
- **Ergebnis:** Die Späne richten sich längst des Kreises um den Mittelpunkt des Leiters aus. Die Kompassnadeln richten sich tangential zu den konzentrischen Kreisen aus.



Abbildung 2: Sichtbarmachung von magnetischen Feldstärkelinien - Quelle: Fraunhofer IIS/EAS, Dresden

Frage: Welches Drehmoment M ist notwendig, um diese mechanische Arbeit zu verrichten?

$$M \sim H = c \frac{I}{r}$$

- Das Drehmoment ist direkt proportional zur Stromstärke. Je näher die Späne am Stromleiter sind, desto geringer ist die notwendige magnetische Feldstärke, um die Masse der Späne mechanisch zu bewegen.
- Die Kraft wirkt zur magnetischen Feldstärke H in einem Winkel von 90° !

Setzt man $c = \frac{1}{2\pi}$, so steht im Nenner $l = 2\pi r$, wobei l die Länge einer Feldlinie mit dem Radius r darstellt. Der Strom durch die von einer beliebigen magnetischen Feldlinie berandeten Fläche (Kreisfläche) ist das Produkt aus dem längst der Feldlinie konstanten Betrag H der magnetischen Feldstärke \vec{H} und der Länge l der betreffenden Feldlinie. Die technischen Grenzen werden bei einem stromdurchflossenen Leiter in Luft recht schnell erreicht. Es stellt sich die Frage, wie könnte die Magnetfeldstärke gebündelt werden?

Lösungsaspekte:

- Der Faktor „n“ multipliziert den wirksamen Strom durch die Verwendung von Wicklungen (nebeneinander und übereinander)
- statt Luft einen Eisenkörper zur Bündelung der Magnetfeldlinien verwenden
- Einsatz eines geschlossenen Eisenkreises (in einem Transformator erfolgt keine Kraftübertragung)
- die Alternative \Rightarrow Eisenkreis mit Luftspalt (elektrische Maschinen - Kraftübertragung im Luftspalt zwischen Rotor und Stator)

Die Wahl: Verwendung von Eisen und/oder Dynamoblech? Das Problem des Restmagnetismus, nach Abschaltung des Stroms, muss bedacht werden - siehe \Rightarrow Hystereseschleife $H = f(B)$!

Aufgabe

Durch einen homogenen Kupferdraht ($S = \text{const.}$) von 20m Länge und 2mm Durchmesser fließt ein Strom $I = 15\text{A}$.

Wie sieht der Verlauf der magnetischen Feldstärke innerhalb und außerhalb des Leiters aus?

$$I = H \cdot l = H \cdot 2\pi r$$

$$H = \frac{I}{2\pi \cdot r}$$

Für den Außenbereich erzeugt der Gesamtstrom die magnetische Feldstärke. Die magnetische Feldstärke hat beim Außendurchmesser ihr Maximum und ändert ihren Wert mit zunehmender Entfernung vom Punkt $r = r_0 + r \Rightarrow \infty$

$$H_0 = \frac{I}{2\pi r_0} = \frac{15\text{A}}{2\pi \cdot 10^{-3}\text{m}} = 2390 \frac{\text{A}}{\text{m}} = 23,9 \frac{\text{A}}{\text{cm}}$$

$$H_{r \Rightarrow +\infty} = \frac{I}{2\pi r}$$

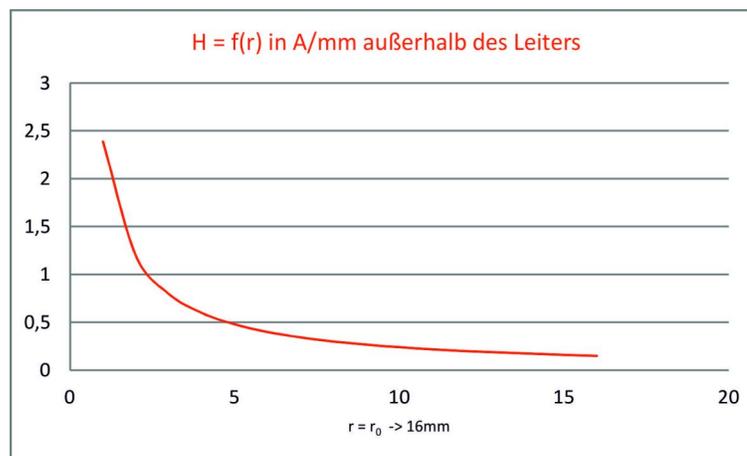


Abbildung 3: Die magnetische Feldstärke ist außerhalb des stromdurchflossenen Leiters indirekt proportional zum Abstand zur Leiteroberfläche.

Für den Innenbereich des elektrischen Leiters generiert nur der Stromanteil, der durch die entsprechende Teilfläche fließt, die magnetische „Teil“-Feldstärke. Innerhalb des Leiters sind die Feldlinien ebenfalls konzentrische Kreise um den Leitermittelpunkt. Eine mit r berandete Fläche hat die Größe $A_{Teil} = \pi r^2$ durch die der Teilstrom fließt. Es gilt einen Ausdruck für den Strom I zu finden, der die Abhängigkeit vom Radius beschreibt.

Gesamtstrom pro Gesamtfläche: $\frac{I}{\pi r_0^2}$

Teilstrom pro Teilfläche: $\frac{I_r}{\pi r^2} = H(r) 2 \pi r$

$$I_r = \frac{r^2}{r_0^2} I$$

$$H(r) = \frac{r^2}{r_0^2} I \frac{1}{2 \pi r}$$

$$H(r) = \frac{I}{2\pi r_0^2} * r$$

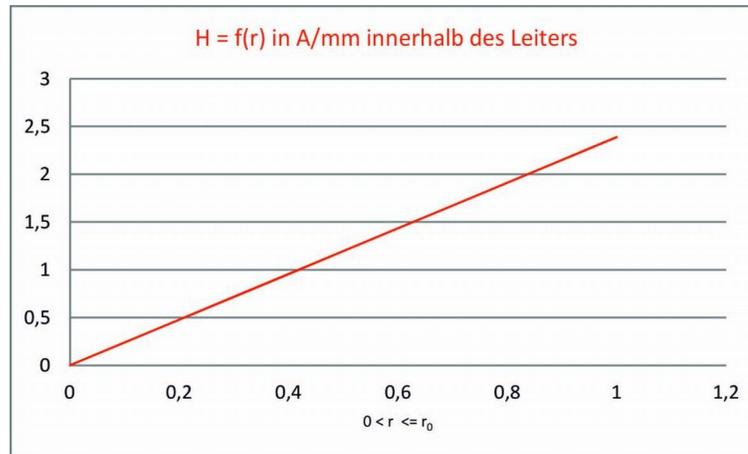


Abbildung 4: Die magnetische Feldstärke ist innerhalb des stromdurchflossenen Leiters direkt proportional zum Abstand des Leitermittelpunktes.

Werden beide betrachteten Bereiche zusammengefasst, so erhalten wir folgenden Gesamtverlauf der magnetischen Feldstärke bei konstantem Strom und dem Abstand vom Leitermittelpunkt als Variable:

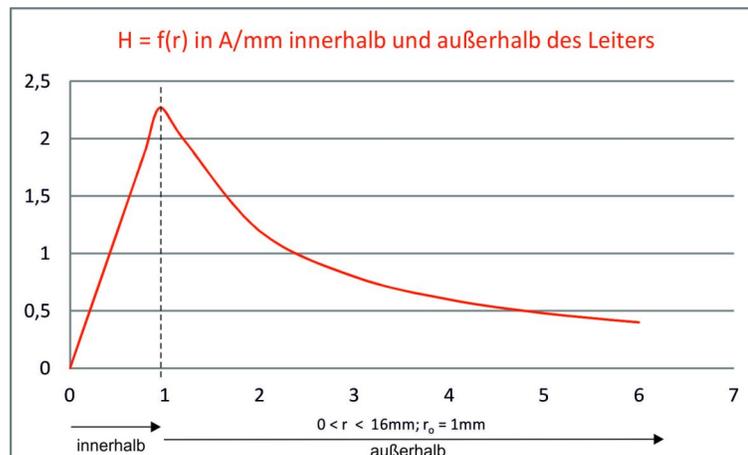


Abbildung 5: Die magnetische Feldstärke als Funktion des Abstandes zum Leitermittelpunkt.

1.2 Magnetische Feld- und Kenngrößen

Begriffsbestimmung

Eine Feldgröße ist eine physikalische Größe, die zur Beschreibung des Zustandes eines physikalischen Feldes dient. Dabei kann es sich sowohl um Gleichgrößen (z. B. bei elektrostatischen und magnetostatischen Feldern)

als auch um Wechselgrößen (z. B. bei elektromagnetischen Feldern oder Schallfeldern) handeln. Feldgrößen werden zur Formulierung von Differentialgleichungen verwendet, die das Verhalten des Feldes beschreiben.

Beispiele für Feldgrößen sind:

- die elektrische Feldstärke \vec{E} und die magnetische Feldstärke \vec{H}
- die elektrische Flussdichte \vec{D} , die magnetische Flussdichte \vec{B}
- die elektrische Spannung, der elektrische Strom
- die Gravitationsbeschleunigung
- die Kraft
- die Schallfeldgrößen, wie Schalldruck, Schallschnelle und die davon abgeleiteten Größen Schallauslenkung und Schnellepotenzial

Wirkt eine Feldgröße auf ein lineares System, ist ihr Quadrat der Leistung proportional.

Als **Energiegröße**, auch umgangssprachlich Leistungsgröße, wird eine physikalische Größe bezeichnet, die den energetischen Zustand eines physikalischen Systems, eines Feldes oder von Teilen davon beschreibt.

Zu den Energiegrößen gehören unter anderem:

- Die Energie: Sie beschreibt die Fähigkeit des Systems oder Feldes, Arbeit zu verrichten. Es werden verschiedene Formen von Energie unterschieden, zum Beispiel in der Mechanik die potenzielle und die kinetische Energie eines massebehafteten Körpers in einem Gravitationsfeld, oder in den elektromagnetischen Feldern die Energieinhalte von Kondensatoren oder Induktivitäten.
- Die Energiedichte, eine auf eine abstrahierte Länge, abstrahierte Fläche oder eine Volumeneinheit bezogene Energie.
- Die Leistung, eine auf eine Zeiteinheit bezogene, im System umgesetzte Arbeit.
- Die Intensität, ein Energiefluss, also eine durch eine Flächeneinheit je Zeiteinheit „hindurchlaufende“ Arbeit.

1.2.1 Definitionen der Größen

Die wichtigsten Größen (Lit.-Ref.1 & Lit.-Ref.2), die die Vorgänge im magnetischen Feld beschreiben sind:

Magnetische Feldstärke: $H = \frac{I}{l} \Rightarrow \left[\frac{A}{m} \right]$

Permeabilität - absolut: $\mu_0 = 1,257 \cdot 10^{-6} \frac{Vs}{Am}$

¹Permeabilität - relativ: $\mu_r = 1(\text{Vakuum}); 300 \dots 10.000(\text{Eisen})$

magnetische Flussdichte, Induktion: $B = \mu_0 \mu_r \vec{H} \Rightarrow \left[\frac{Vs}{m^2} = 1T \right]$

magnetische Flussdichte, Induktion: $B = \frac{d\Phi}{dA}$

magnetischer Fluss: $\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} \Rightarrow [Vs = Wb]$

1.2.2 Magnetischer Grundstromkreis

Der magnetische Grundstromkreis besteht im Kern aus einem ferromagnetischen Werkstoff, der die magnetischen Feldlinien bündelt. Dieser ferromagnetische Kern kann einen Luftspalt besitzen oder auch nicht. Entscheidend ist das Anwendungsgebiet dieser Anordnung. Ist der Werkstoff (Permeabilität $\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$) dieses Kerns durchgehend homogen, so wird diese Anordnung als Transformator benutzt. Die Eingangsspannung (die Primärspannung U_1 wird über die Primärwicklung w_1 eingekoppelt) wird über den konstanten magnetischen

¹magnetische Leitfähigkeit

Fluss Φ auf die zweite Wicklung transformiert und abhängig von der Anzahl der Wicklungen w_2 , genauer gesagt des Wicklungsverhältnisses ($n = \frac{w_2}{w_1} \Rightarrow$ Sekundärwicklung zu Primärwicklung), wird eine Spannung ausgangsseitig induziert. Besitzt der Kern einen konstanten Luftspalt, so wirken Kräfte (Lorentz-Kraft) auf die unmittelbare Umgebung. Diese Konfiguration wird in elektrischen Maschinen eingesetzt. Wird der Luftspalt variabel gestaltet, so kann über diese Veränderung des Luftspalts eine Messgröße erfasst werden. Bekannt ist diese Anwendung in der industriellen Messtechnik als induktives Wandler Prinzip zur Abstandsmessung und oft bei der Messung von Umdrehungen einer Messturbinen (Volumen- oder Massenstrommessung).

Beim induktiven Messverfahren und beim Transformator erfolgt die Speisung des magnetischen Grundstromkreises mit Wechselspannungen. Aus diesem Grund wird im Rahmen dieser Vorlesung („Gleichstromtechnik“) nicht weiter auf diese Anwendungen eingegangen.

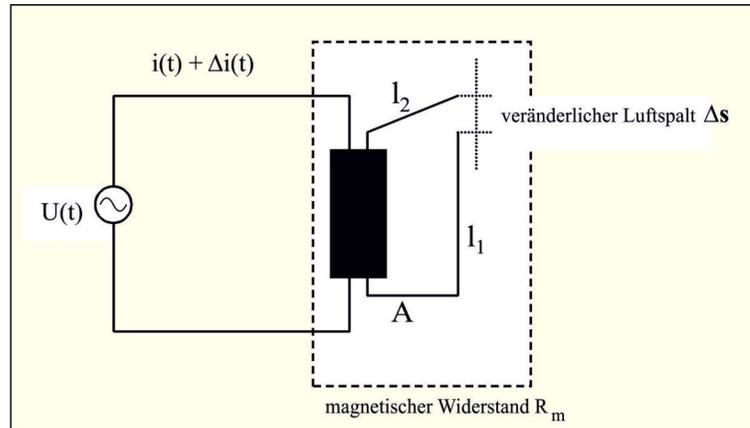


Abbildung 6: Der magnetische Grundstromkreis mit veränderlichem Luftspalt. Die Luftspaltbreite bestimmt den Wert der Gesamtinduktivität der Anordnung. Durch die Speisung mit einer Wechselspannung wird der induktive Widerstand $x_L = j\omega (L + \Delta L)$ verändert.

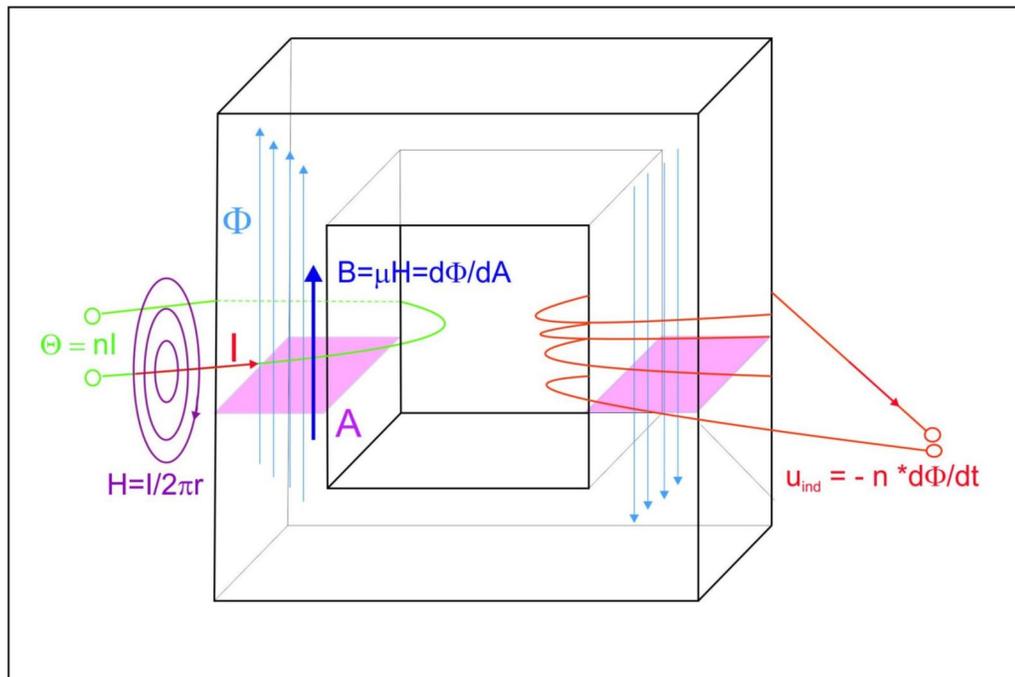


Abbildung 7: Der magnetische Grundstromkreis symbolisch dargestellt.

magnetische Ursprungung (Durchflutung): $\Theta = n I \Rightarrow [A]$

magnetischer Widerstand: $R_m = \frac{\Theta}{\Phi} = \frac{n \cdot I}{\Phi} = \frac{1}{\mu} \frac{l}{A}$

magnetischer Widerstand: $R_m = \frac{l}{\mu_0 \mu_r A}$

Induktivität: $L = n^2 \mu_0 \mu_r \frac{A}{l} \Rightarrow \left[\frac{Vs}{A} = 1H \right]$

Wie kann die Bemessungsgleichung für die Induktivität entwickelt werden?

- Der Magnetische Widerstand ist: $R_m = \frac{1}{\mu} \frac{l}{A}$
- Die Induktivität ist das Verhältnis aus: $L = \frac{\Phi}{I}$ multipliziert mit der Anzahl der Windungen n .
- $\Phi = \frac{\Theta}{R_m} = \frac{n \cdot I}{\frac{1}{\mu} \frac{l}{A}}$
- $\Phi = n \cdot \mu \cdot I \cdot \frac{A}{l}$
- $L = n \cdot \frac{n \cdot \mu \cdot I \cdot \frac{A}{l}}{I}$
- $L = n^2 \cdot \frac{\mu \cdot A}{l} = n^2 \cdot \frac{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot A}{l}$

1.3 Das Durchflutungsgesetz

Das Durchflutungsgesetz geht zurück auf das „ampèresche“ Gesetz. Das „ampèresche“ Gesetz ist ein Gesetz der Elektrodynamik und bildet die Grundlage einer der vier „Maxwell’schen Gleichungen“. Es wurde von André-Marie Ampère entdeckt. Im Jahre 1820 wurde Ampère, durch François Arago auf die Versuche Hans Christian Oersted zur Ablenkung einer Magnetnadel durch den elektrischen Strom aufmerksam. Ampère wiederholte den Versuch und erkannte, dass während der ersten Experimente die Ablenkung des Magneten durch das Erdmagnetfeld nicht beachtet wurde. Mit einer neuen Versuchsanordnung konnte Ampère feststellen, dass sich die Magnetnadel immer senkrecht zum stromdurchflossenen Leiter stellte. Ampère schlussfolgerte, dass jeder Magnetismus seine Ursache in elektrischen Strömen habe und Ströme Magnetfelder erzeugen.

Das Durchflutungsgesetz in Worten:

Die Summe aller Ströme erzeugt eine magnetische Feldstärke. Die magnetische Feldstärke bildet sich, um den stromdurchflossenen Leiter, in konzentrischen Kreisen aus. Im Rückschluss können wir auch behaupten, dass eine magnetische Feldstärke elektrischen Strom erzeugt.

Das Ur-Durchflutungsgesetz nach Ampère als Formel:

$$\sum_{\nu=1}^n I_{\nu} = \oint_A \vec{H} d\vec{s}$$

$$\sum_{\nu=1}^n I_{\nu} \mu_0 = \oint_A \vec{B} d\vec{s}$$

Im einfachsten Anwendungsfall einer Spule, produziert jede Stromkomponente pro Wicklung eine magnetische Feldstärke. Die resultierende magnetische Feldstärke ist das Ergebnis aus dem Gesamtstrom. Die Gesamtwicklungszahl ist das Produkt aus Anzahl der Wicklungen multipliziert mit jeder Einzelwicklungslänge (Umfang).

James Clerk Maxwell erkannte, dass diese Formulierung nur den Konvektionsstrom beschreibt. Er erweiterte diese Ausgangsgleichung um den Strom im Vakuum (unabhängig vom Material $[\kappa$ bzw. $\epsilon]$) und den Strom (Verschiebungsstrom bzw. Verschiebungsstromdichte $S_V = \frac{dD}{dt}$) in einem sich zeitlich ändernden elektrischen Feld.

$$\iint_A \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{A} + I = \oint_A \vec{H} d\vec{s} \text{ bzw.}$$

$$\iint_A \left[\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}_{ext} \right] d\vec{A} = \oint_A \vec{H} d\vec{s}$$

$\vec{j} \Rightarrow$ Stromdichte

$\vec{j}_{ext} \Rightarrow$ Stromdichte ohne Berücksichtigung von μ und ϵ

Der Index - „ext“ = extended - bei der Größe der Stromdichte \vec{j} ist ein Hinweis, dass die Stromdichte im erweiterten Sinne zu betrachten ist.

Eine alternative Schreibweise:

Der Weg \vec{s} ist die Umrandung der Fläche \vec{A} . Die Orientierung des Vektors \vec{s} zur Fläche A entspricht einer Rechtsschraubendrehung.

Das Produkt $q \vec{v}$ entspricht der Bewegung einer Ladung im Vakuum. Damit wird darauf hingewiesen, dass wir von einem Stromfluss sprechen können ohne Unterscheidung, ob wir einen elektrischen Leiter verwenden oder ein Dielektrikum in einem konstanten elektrischen Feld.

$$\iint_A \left[q\vec{v} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right] d\vec{A} = \oint_A \vec{H} d\vec{s}$$

Das Durchflutungsgesetz in differentieller Form:

$$rot \vec{H} = \vec{j}_{ext} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Der Rotoroperator besagt: Ein elektrischer Strom ruft ein ihm proportionales Magnetfeld hervor, dessen Richtung mit der des Stromes eine rechtsdrehende Schraube bildet. Siehe auch: rechte-Hand-Regel.

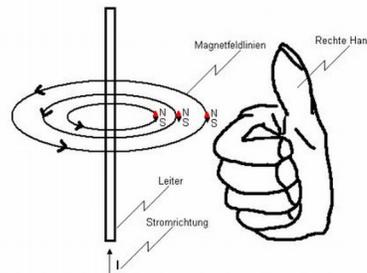


Abbildung 8: Die „rechte Hand Regel“- die Magnetfeldlinien symbolisieren den Verlauf der magnetischen Feldstärke \vec{H} , die Feldlinien des magnetischen Flusses \vec{B} verlaufen orthogonal zur Feldstärke

1.4 Das Biot-Savart'sche Gesetz

Wenn das Durchflutungsgesetz das wichtigste Gesetz der Elektrotechnik ist, wobei man mit Superlativen vorsichtig sein muss, so können wir behaupten, dass das Biot-Savart'sche Gesetz zu den interessantesten Gesetzen der Elektrotechnik gehört. Die Gedanken, die zur Formulierung des Gesetzes führen, verbinden die Vorgänge des statischen elektrischen Feldes, mit der zeitlichen Änderung der Verschiebungsflussdichte innerhalb dieses Feldes. Letztendlich ist die zeitliche Änderung der Verschiebungsflussdichte \vec{D} im Raum die Ursache für ein Magnetfeld, das in einem beliebigen Raumpunkt wirbelt. Durch das Durchflutungsgesetz verbinden wir den elektrischen Strom mit dem Magnetismus. Für Jahre glaubte man, dass der Magnetismus eine in sich geschlossene Fachdisziplin der Physik wäre.

Das Biot-Savartsche Gesetz ist die differentielle Form des Durchflutungsgesetzes. Mit diesem Gesetz kann die magnetische Feldstärke stromdurchflossener Leiter beliebiger Form bestimmt werden. Der Grundgedanke des Biot-Savart'schen ist genial und daher in seiner Komplexität nicht immer sofort verständlich. Hinzu kommen zwei Größen der Elektrotechnik, die erst einmal erklärt werden müssen.

Der Verschiebungsfluss bzw. die Verschiebungsflussdichte

Ausgehend von einem elektrisch leitenden Körper wirken einige Ladungen in die betrachtete Umgebung. Die Gesamtladung Q des Körpers steht mit der gesamten Umgebung in Wechselwirkung. Die Wirkung der Teilladung, die unseren betrachteten Bereich durchfließt, nennen wir den Verschiebungsfluss Ψ . Stehen sich zwei elektrisch geladene Platten mit gleicher Fläche exakt gegenüber, so kann für diesen Sonderfall behauptet werden, dass $Q \Rightarrow \Psi$ ist, wobei damit gemeint ist, dass die Gesamtladung Q (Ursache) die Gesamtwirkung Ψ verursacht. Wie beim Plattenkondensator betrachten wir diese Wechselwirkung zwischen Materie und Umgebung rein statisch.

Stellen wir uns eine positiv elektrisch geladenen Kugel vor, dann wirken elektrische Feldlinien symmetrisch in den Raum hinein. Wird der Raum außerhalb der Kugel als eine Aneinanderreihung von Kugelschalen der Dicke $d\mathbf{r}$ betrachtet, so durchströmt die Größe Ψ diese Kugelschalenflächen. Bei diesem Kugelschalenmodell hilft die Vorstellung einer exakt runden Zwiebel. Ein Strom durch eine Fläche wird allgemein als Stromdichte bezeichnet. Daher wird die Verschiebungsflussdichte wie folgt definiert:

$$\vec{D} = \frac{d\Psi}{dA}$$

Die Größe \vec{D} ist ein Vektor und hat sein Maximum, wenn der Verschiebungsfluss Ψ die Fläche \mathbf{A} orthogonal durchfließt.

Die Verschiebungsstromdichte

Die Verschiebungsstromdichte ist die Ableitung der Verschiebungsflussdichte nach der Zeit. Damit wird die Ursache für das wirbelnde Magnetfeld im Punkt P untersucht und berechnet.

$$\vec{S}_V = \frac{d\vec{D}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{d}{dA} \vec{\Psi} \right]$$

Für eine Luftspule mit einem kreisförmigen, homogenen Feld und n Windungen gilt allgemein:

$$H = \frac{n \cdot I}{2\pi r}$$

Laut Biot-Savart: $dH = \frac{1}{4\pi r^2} I ds \sin\varphi$

Interpretation: Ein Leiterstück der Länge ds liefert für einen beliebigen Punkt in der Entfernung r den Betrag $d\vec{H}$ zur magnetischen Feldstärke \vec{H} .

Zur Festigung des Verständnisses eine erste, leichte Aufgabe in zwei Dimensionen.

Aufgabe: Bestimmen Sie die Feldstärke H im Mittelpunkt des Kreises!

Gegebene Größen:

$$I = 10A$$

$$r = 10\text{cm}$$

Lösungsansatz:

Das geschlossene Wegintegral $\oint ds$ ist der Umfang des Kreises $2\pi r$. Die Tangente wurde im Winkel von $\varphi = 90^\circ$ angelegt, d.h. $\sin(90^\circ) = 1$

Lösung:

$$dH = \frac{1}{4\pi r^2} I ds \sin \varphi$$

$$dH = \frac{1}{4\pi r^2} * 10A * 2\pi r \sin 90^\circ$$

$$dH = \frac{10A}{2 * 10^{-1}m} = 50 \frac{A}{m}$$

1.5 Hysterese

Hysterese (Lit.-Ref.7), auch Hysteresis (griech. hysteros „hinterher, später“), charakterisiert ein Systemverhalten, bei dem die Ausgangsgröße nicht allein von der unabhängig veränderlichen Eingangsgröße abhängt, sondern auch von dem vorherigen Zustand der Ausgangsgröße. Das System kann bei gleicher Eingangsgröße mehrere Zustände einnehmen. Einfach formuliert bezeichnet Hysterese das Fortdauern eines Zustandes nach Wegfall der Anregung. Dieses Verhalten ist entweder für das Material typisch (Ferromagnetismus) oder wird beispielsweise beim Zweipunktregler eingeprägt. Das System zeigt dabei eine Pfadabhängigkeit. Hysterese tritt bei vielen natürlichen und technischen Vorgängen und Regelungsprozessen auf und ist damit ein wesentlicher Begriff der Regelungstechnik und der Kybernetik.

Durch einen Strom in einem elektrischen Leiter wird ein Magnetfeld mit der magnetischen Feldstärke \vec{H} aufgebaut. Innerhalb des elektrischen Leiters ist die Beziehung zwischen I und H direkt proportional. Außerhalb des elektrischen Leiters ist die Beziehung zwischen Strom I und magnetischer Feldstärke, mit zunehmenden Abstand von der Leiteroberfläche, indirekt proportional. Ferromagnetische Werkstoffe bündeln die Feldstärke im Material. Auf das ferromagnetische Material übt die magnetische Feldstärke eine Kraft aus. Die Elementarmagneten werden magnetisch ausgerichtet. Bis zu einem mechanisch finalen Punkt sind letztendlich alle Elementarmagneten in der „Nord-Süd“ Richtung positioniert. Eine Strom- bzw. Feldstärkeerhöhung hat keine Wirkung auf die Elementarmagneten, man sagt: das Material ist magnetisch gesättigt. Die erstmalige Magnetisierung des Werkstoffes wird mittels der Neukurve dargestellt. Durch ungleichmäßige Wandverschiebungen (Bloch-Wände), hervorgerufen durch Materialstörungen, wird eine Entmagnetisierung entlang der Neukurve unmöglich.

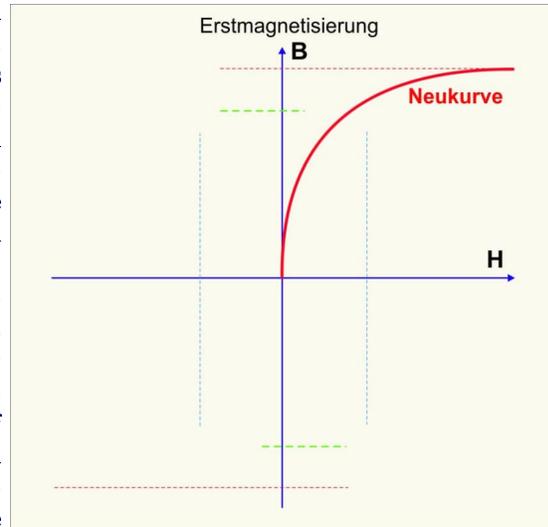


Abbildung 9: Erstmagnetisierung

Wird der Strom verringert, so nimmt die Feldstärke kontinuierlich, jedoch nichtlinear ab. Wie schnell diese Abnahme erfolgt, ist vom ferromagnetischen Material abhängig. Hierbei unterscheidet man weich- von hartmagnetischen Werkstoffen. Mit Abnahme der Feldstärke, gehen „fast“ alle Elementarmagneten in die Ursprungslage zurück, da die Wirkung der mechanischen Kraft durch die magnetische Feldstärke geringer wird.

Fließt kein Strom, so kann sich keine Feldstärke bilden und trotzdem können wir ein Magnetfeld $\vec{B} > 0$ messen. Dieser Wert wird als Remanenz^a bezeichnet. Um den Magnetismus (\vec{B}) auf Null zu fahren, benötigen wir eine zusätzliche negative Kraft, die die trägen Elementarmagneten (Trägheit verursacht durch Reibung der Bloch-Wände) in den Urzustand bewegt.

^avom Lateinischen remanere = zurückbleiben

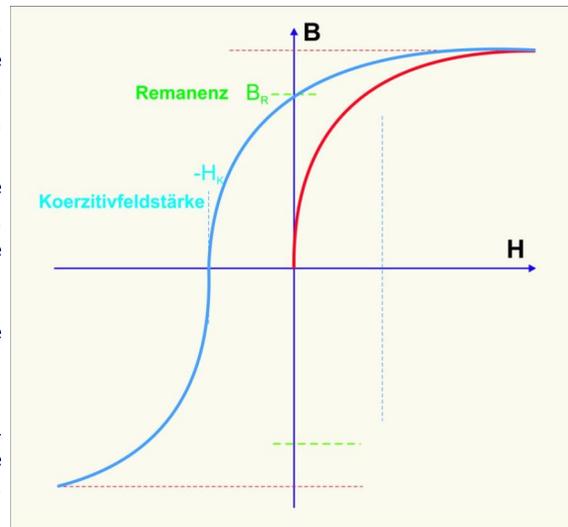


Abbildung 10: Die Stromstärke wird geringer und ändert die Fließrichtung.

Die Kraft die benötigt wird die Elementarmagneten so auszurichten, damit der Werkstoff nach außen neutral wirkt, heißt: Koerzitivkraft H_c .

Wird der Strom weiterhin in negativer Richtung (bezogen auf die Stromrichtung während der Erstmagnetisierung) erhöht, so wird wieder ein Magnetfeld aufgebaut, jedoch mit konträrer Polarität. Die Charakteristik der Magnetisierungskurve (im 3. Quadranten) ist identisch mit dem Kurvenverlauf im 1. Quadranten des Koordinatenkreuzes. Auch in dieser Phase wird eine Sättigung des ferromagnetischen Werkstoffs erreicht und trotz Stromstärkenerhöhung kann kein stärkeres Magnetfeld aufgebaut werden.

Wird die Stromstärke vermindert, so wird auch die magnetische Feldstärke verringert. Auch in der „negativen“ Betriebsphase erhalten wir eine Remanenz, wenn die magnetische Feldstärke gleich null ist. Die Beträge der positiven und negativen Remanenz sind gleich.

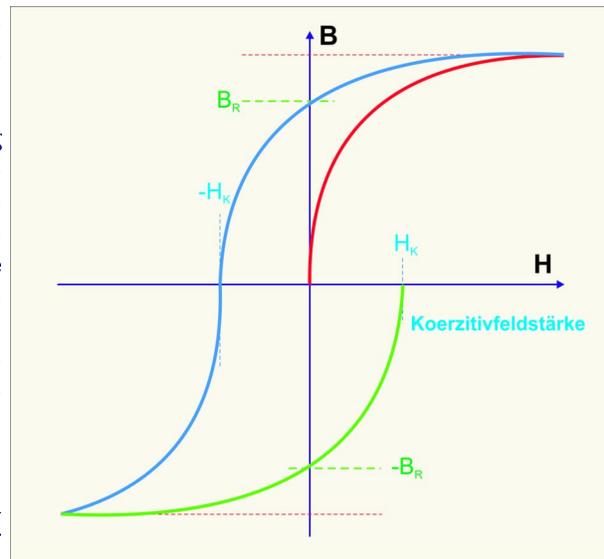


Abbildung 11: positive und negative Koerzitivfeldstärke

Zu einem Feldstärkewert gibt es zwei B-Werte (magnetische Flussdichte)!

- Die B-Werte sind von der Vorgeschichte abhängig.
- Steigende Magnetisierung erzeugt kleineren B Wert,
- fallende Magnetisierung einen höheren Wert.

Alle ferromagnetischen Stoffe haben diese Hysterese Eigenschaft.

Je größer der Flächeninhalt der Hystereseschleife, desto größer sind die mechanischen Bewegungen im Werkstoff, desto größer ist auch die geleistete mechanische Arbeit. Durch die Bewegung der Elementarmagneten wird der Werkstoff warm, die Wärmeabgabe ist oft störend (Materialbelastung, Konvektion, Energieentzug).

Ferromagnetische Materialien mit großem Flächeninhalt werden als magnetisch harte Stoffe bezeichnet. Sie eignen sich insbesondere zur Herstellung von Dauermagneten. Eine einmalige Magnetisierung wird vorgenommen und die hohe Remanenz ist ausreichend für die Anwendung dieses Dauermagneten.

Weiche Materialien (Dynamobleche in Lamellenbauweise) werden vorzugsweise in elektrischen Maschinen eingesetzt. Dynamobleche bündeln die magnetische Feldlinien. Es besteht kein Bedarf das Dynamoblechmaterial zu magnetisieren. Weiche Materialien haben eine geringe Hystereseffläche und somit eine geringe Remanenz.

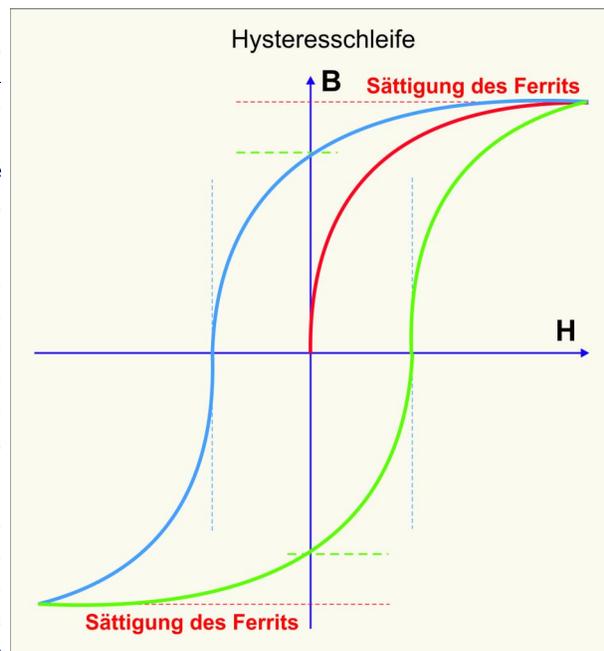


Abbildung 12: Die Hystereseschleife

1.6 Weiss'schen Bezirke - Die Theorie der Elementarmagneten

Eine physikalische Deutung (Lit.-Ref.3), des Einflusses der Materie auf die magnetische Flussdichte B , hat bereits Ampère² durch elementare Ringströme im Material zu erklären versucht. Diese wurden, durch die im Bohrschen³ Atommodell, gefunden. Die Ursache für die gedachten Ringströme sind die Elektronen, die den Atomkern umkreisen.

Ein erster Versuch einer Erklärung:

Jedes Atom stellt demnach einen atomaren Ringstrom mit einem Magnetfeld dar. Gelänge es, diese durch die äußere Erregung (magnetische Feldstärke) auszurichten, so hätte man gewissermaßen eine sehr große „innere MMK“, die eine Verstärkung des Flusses hervorruft. Normalerweise wird die Ausrichtung jedoch durch die Temperaturbewegung weitgehend verhindert. Tatsächlich ist dieser „Bahnmagnetismus“ der Ringströme für den Ferromagnetismus nicht ausschlaggebend.

Die Erklärung mittels der Weiss'schen Bezirke:

Die magnetischen Eigenschaften der Ferromagnetika und der Verlauf der Magnetisierungskurve erklären sich vielmehr durch die Tatsache, dass im Material bezirkweise atomare Magnete, die durch die Wirkung des Elektronenspins zustande kommen, ohne äußere Erregung bereits ausgerichtet sind (spontan magnetisierte Bezirke, Weiss'sche Bezirke). Die Trennwände zwischen diesen Bezirken nennt man Bloch-Wände.

Bei äußeren Feldstärken vergrößern sich bevorzugte Bezirke auf Kosten der Nachbarbezirke (Blochwandverschiebungen) und drehen sich schließlich mit ihrem Magnetisierungsvektor in Richtung der äußeren Feldstärke ein (Drehprozesse). Bei entsprechend hoher Feldstärke H gibt es keine zusätzliche Erhöhung durch Materialeinwirkung mehr (Sättigung). Beim Abschalten von H sind nicht alle beim Aufmagnetisieren erfolgte Materialbewegungen reversibel (Remanenz). Es gehört eine entgegen gerichtete Feldstärke ($-H_c$) dazu, dass nach außen (makroskopisch) kein Feld B wirksam wird (koerzitive Feldstärke).

Die sprunghaften Änderungen (Überwindung von Blasen - eigentlich von Fremdstoffeinschlüssen) der Bezirke hat Heinrich Barkhausen erstmalig mit Hilfe der Induktionswirkung in einer das Material umgebenden Spule hörbar gemacht („Barkhausen-Sprünge“). Bei einer bestimmten Temperatur verliert das Ferromagnetikum seine besonderen magnetischen Eigenschaften, da die thermische Energie der Magnetisierung in den Weiss'schen Bezirken zunichte macht: Curie-Temperatur bei Eisen etwa $770^\circ C$.

1.7 Energie und Arbeit im homogenen Magnetfeld

Wenn alle Feldgrößen konstant sind, dann gilt:

$$W_{mag} = \frac{1}{2} B H V$$

$$W_{mag} = V A s = W s = J$$

Annahme: Der gesamte magnetische Fluss Φ geht durch den ferromagnetischen Kern.

$$H = 5670 \frac{A}{m}$$

$$B = 1,66T \quad \Rightarrow \quad 1T = \frac{Vs}{m^2}$$

Der Kern hat einen quadratischen Querschnitt von $1cm^2$ und misst an den Außenflächen $10cm$.

$$V = 4 \cdot [9cm \cdot 1cm \cdot 1cm] = 36cm^3 = 36 \cdot 10^{-6}m^3$$

²André-Marie Ampère (* 20. Januar 1775 in Poleymieux-au-Mont-d'Or bei Lyon, Frankreich; † 10. Juni 1836 in Marseille) war ein französischer Physiker und Mathematiker - (Lit.-Ref.6)

³Niels Henrik David Bohr (*7. Oktober 1885 in Kopenhagen; † 18. November 1962 in Kopenhagen) war ein Physiker aus Dänemark und wurde 1922 mit dem Nobelpreis für Physik geehrt.

$$W_{mag} = \frac{1}{2} \cdot 1,66 \frac{Vs}{m^2} \cdot 5,67 \cdot 10^3 \frac{A}{m} \cdot 36 \cdot 10^{-6} m^3$$

Resultat: In diesem Kern wird eine Energie von $W_{mag} = 0,169 \text{ Ws}$ gespeichert.

Für die differentielle Energie eines differentiell kleinen Volumens gilt:

$$dW_{mag} = \frac{1}{2} B H dV$$

$$dW_{mag} = \frac{1}{2} \int BH dV$$

1.8 Das Induktionsgesetz

Nach Faraday in Integralform: $u(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_{A(t)} \vec{B}(\vec{r}, t) d\vec{A}$

Ruheinduktion:

$$u(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt}$$

Bewegungsinduktion:

$$u(t) = -\frac{d}{dt} \int_{A(t)} \vec{B}(\vec{r}, t)$$

Aufgabe:

Gegeben sei eine offene Leiterschleife mit der Fläche A in der z -Ebene (aufgespannte Fläche in x - y -Richtung). Sie wird von einem zeitveränderlichen Magnetfeld \vec{B} durchsetzt.

$$B(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_y + e_z) 0,1T \cos\omega t$$

$$A = 0,1m^2$$

$$\omega = 314 \text{ s}^{-1}$$

Fragen:

- Welche Spannung $u(t)$ wird induziert?
- Stellen Sie $u(t)$ und $B(t)$ grafisch dar!
- Welcher Strom $i(t)$ würde fließen, wenn zwischen den Klemmen ein Widerstand von $R = 100\Omega$ angeschlossen wäre?

Lösungen:

$$\begin{aligned} \text{a) } u(t)_{ind} &= - \int \frac{\partial}{\partial t} B(t) dA \\ &= - \int \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(e_y + e_z) 0,1T \cos\omega t \right] e_z dA \end{aligned}$$

$$u(t)_{ind} = -\frac{0,1T}{\sqrt{2}} \int \frac{\partial}{\partial t} \cos\omega t dA$$

$$\text{Nebenrechnung: } \frac{d}{dt} \cos\omega t = -\omega \sin\omega t$$

$$u(t)_{ind} = \frac{0,1T}{\sqrt{2}} \omega \sin \omega t A$$

$$u(t)_{ind} = \frac{0,1T}{\sqrt{2}} 314s^{-1} 0,1m^2 \sin \omega t = 2,227V \sin \omega t$$

b) $\vec{B} \Rightarrow$ cosinus-Funktion mit der Amplitude $\frac{0,1T}{\sqrt{2}}$

$u(t) \Rightarrow$ sinus-Funktion mit der Amplitude 2,227V

$$c) i(t) = \frac{2,227V \sin \omega t}{100\Omega} = 22,27mA \sin \omega t$$

Anwendung: induktiver Messwandler [Abstandsmessung, Drehzahlmessung, Volumenstrommessung]

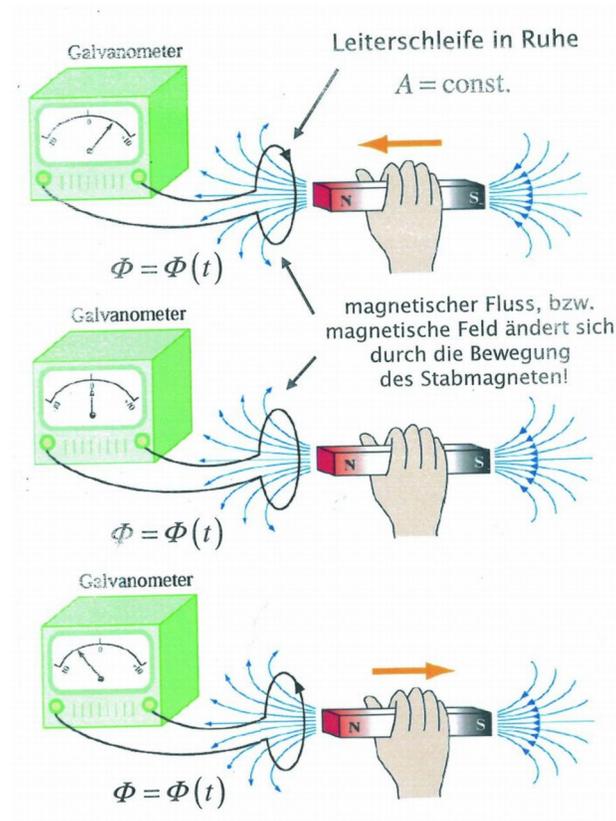


Abbildung 13: Der elektrische Leiter bewegt sich nicht. Das Magnetfeld ändert sich zeitlich und die Magnetfeldlinien schneiden den ruhenden Leiter (Lit.-Ref.8).

Aufgabe:

Gegeben sei ein Flussbett mit elektrisch leitendem Wasser ($\kappa = 5 \frac{S}{m}$), das mit konstanter Geschwindigkeit v durch ein senkrecht auftretendes Magnetfeld B strömt. Beiderseits des Flussbettes befinden sich zwei gut leitende Elektroden, die vollständig im Wasser liegen. Die Elektroden haben eine Höhe $h=1m$ und eine Länge $l=20m$)

Gegebene Größen:

$B = 0,5 * 10^{-4}T$ - Es ist die orthogonale Wirkung des Erdmagnetfeldes auf das fließende Wasser

$v = 10 \frac{km}{h}$ - die Strömungsgeschwindigkeit des Wassers, gemessen mit einer Messturbine

$L = 300m$ - die Breite des Flusses

Fragen:

- Welche Spannung entsteht zwischen den Elektroden?
- Welche Leistung wird am Verbraucher umgesetzt, wenn der Widerstand $R_a = 300\Omega$ beträgt?

Lösungen:

a) $E_{ind} = \vec{v} \times \vec{B}$

Der Weg s und die induzierte Spannung E wirken in die gleiche Richtung!

$$u_{ind} = \oint (\vec{v} \times \vec{B}) d\vec{s}$$

$$u_{ind} = \int_A^B (\vec{v} \times \vec{B}) d\vec{s}$$

$$u_{ind} = \int_0^L (v e_x \times B e_y) e_z ds = vBL$$

$$u_{ind} = 10 \cdot 10^3 \frac{m}{3,6 \cdot 10^3 s} \cdot 0,5 \cdot 10^{-4} \frac{Vs}{m^2} \cdot 300m = 41,67mV$$

b) $I = \frac{u_{ind}}{R_i + R_a} \Rightarrow R_i = \frac{1}{\kappa} \frac{L}{b h} = \frac{1Vm}{5A} \frac{300m}{20m * 1m} = 3\Omega$

$$I = \frac{u_{ind}}{R_i + R_a} \Rightarrow I = \frac{41,67mV}{303\Omega} = 0,137mA$$

c) $P = I^2 \cdot R_a = 5,73\mu W$

Anwendung: Generator

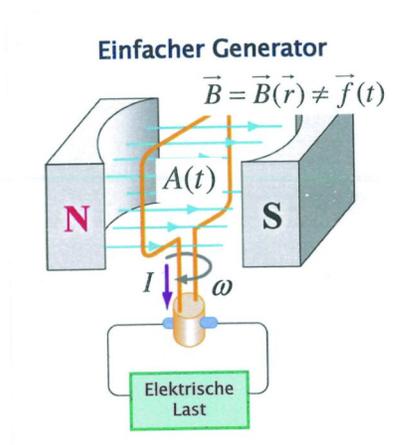


Abbildung 14: Der elektrische Leiter bewegt sich durch einen mechanischen Antrieb im konstanten Magnetfeld. Die Folge ist, dass ein Strom induziert wird. (Lit.-Ref.9)

1.9 Selbst- und Gegeninduktion

1.9.1 Selbstinduktion

Nach dem Schließen des Schalters leuchtet die Lampe L_1 sofort auf. Nach „kurzer“ Zeit leuchtet dann auch die Lampe L_2 . Wie ist dieser Effekt zu erklären? Im Einschaltmoment baut sich in der Spule ein Magnetfeld auf. Ein sich aufbauendes Magnetfeld ist ein sich veränderndes Magnetfeld. Dieses veränderliche Magnetfeld induziert einen Strom, der nach der „**Lenzchen Regel**“ der Ursache seiner Entstehung entgegenwirkt. Durch die Induktion in der Spule behindert diese den Stromfluss. Die Spule stellt einen Widerstand dar, einen induktiven Widerstand. Da der induzierte Strom aber stets kleiner sein muss als der Induktionsstrom, nimmt der Strom langsam zu, bis er nach einiger Zeit seinen Maximalwert erreicht hat.

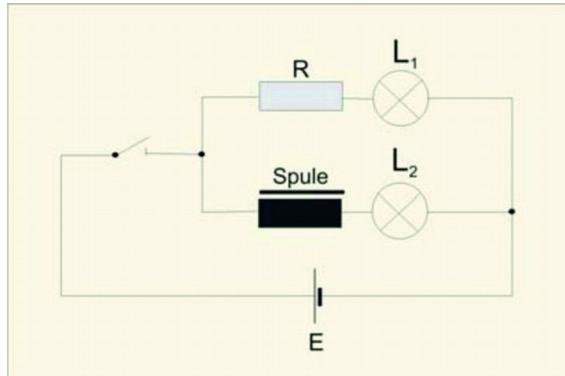


Abbildung 15: Selbstinduktion - die Wirkung der Spule

Beim Ausschalten wiederholt sich der Vorgang der Selbstinduktion mit veränderten Vorzeichen. Das Ausschalten und somit die Unterbrechung des Stromflusses stellt eine plötzliche Änderung des Stromflusses und des ihn umgebenden Magnetfeldes dar.

$$u_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} [L i(t)] = -L \frac{di}{dt}$$

Die physikalische Größe **L** ist die **Induktivität** und wird in der Literatur auch als **Gleichstrominduktivität** oder **Selbstinduktivität** bezeichnet. Eine reale Induktivität besteht aus einer Reihenschaltung eines ohmschen Widerstandes und der reinen Induktivität. Der ohmsche Widerstand symbolisiert den Drahtwiderstand der Induktivität (Spule). Dieses Zusammenwirken aus dem ohmschen Widerstand und der reinen Induktivität verleiht dem Strom gegenüber der Spannung einen gewissen Trägheitscharakter. Maßgebend für die Stromänderung ist die Zeitkonstante $\tau = \frac{L}{R_{L2}}$.

Die beiden Lampen L_1 und L_2 entsprechen den ohmschen Widerständen R_{L1} und R_{L2} . Ein Lampe mit Glühfaden leuchtet nur, wenn ein Strom durch den Glühfaden fließt. Wir erhalten folgende Ersatzschaltung:

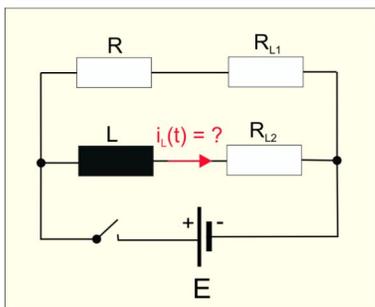


Abbildung 16: Ersatzschaltung

Für den Zeitpunkt des Schaltvorganges gilt:

$$E = L \cdot \frac{d}{dt} i_L(t) + R_{L2} \cdot i_L(t)$$

$$\frac{E}{R_{L2}} = \frac{L}{R_{L2}} \frac{d}{dt} i_L(t) + i_L(t)$$

$$I_{max} = \tau \frac{d}{dt} i_L(t) + i_L(t) \quad \circ \text{---} \bullet = \tau s \cdot i_L(s) + i_L(s)$$

Lösung mittels Laplace-Transformation (Lit.-Ref.10): mit $s = j\omega$

$$i_L(s) = \frac{1}{s(1+s\tau)} \cdot I_{max} \quad \bullet \text{---} \circ \text{ Rücktransformation}$$

Die **Stromfunktion des Stromes durch Lampe 2:** $i_L(t) = I_{max} \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right]$

Wir leiten nachträglich die Maschengleichung aus der letzten Aufgabe ab:

$$u = u_R + u_L = i(t)R + L \frac{di}{dt}$$

Bei mehreren (Teil-)Induktivitäten in Reihenschaltung gilt:

$$u_{gesamt} = L \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + \dots + L_n \frac{di}{dt}$$

Für die Reihenschaltung von Induktivitäten gilt: $L_{Ersatz} = \sum_{\nu=1}^n L_{\nu} = L_{\nu}$

Für die Parallelschaltung von Induktivitäten gilt: $i_{gesamt} = i_1 + i_2 + \dots + i_n$

$$\frac{u}{L_{Ersatz}} = \frac{u}{L_1} + \frac{u}{L_2} + \dots + \frac{u}{L_n}$$

$$\frac{1}{L_{Ersatz}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_n}$$

$$\frac{1}{L_{Ersatz}} = \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{L_{\nu}}$$

1.9.2 Gegeninduktion

Die Gegeninduktion oder induktive Kopplung ist die gegenseitige magnetische Beeinflussung zweier oder mehrerer räumlich benachbarter elektrischer Stromkreise durch den magnetischen Fluss Φ .

Induktionsfluss: $\Psi = w * \Phi$

Flussverkettung: $M_{21} = \frac{\Psi_{A_2}(I_1)}{I_1}$

$$M_{21} = \int_{A_2} \frac{B_2(I_1)}{I_1} dA$$

Interpretation: Der Strom I_1 verursacht in der Leiterschleife 1 ein magnetisches Feld (Flussdichte Φ pro Fläche A_1). Diese Feldlinien durchdringen die Fläche A_2 einer zweiten Leiterschleife. In dieser zweiten Leiterschleife wird ein Strom I_2 induziert.

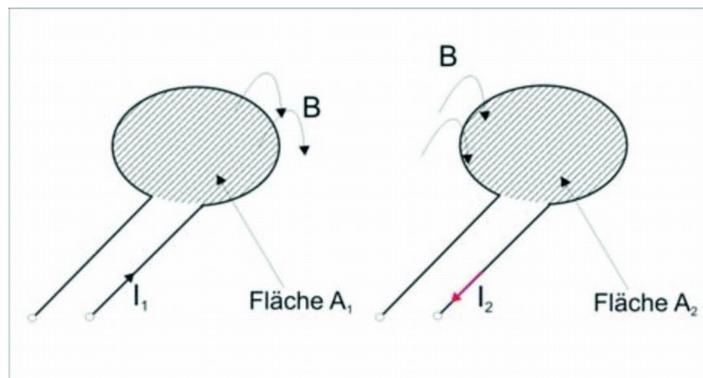


Abbildung 17: Das Prinzip der Durchflutung - „Strom erzeugt ein Magnetfeld, ein Magnetfeld erzeugt Strom“

Flussverkettung:
$$M_{12} = \frac{\Psi_{A_1}(I_2)}{I_2}$$

$$M_{12} = \int_{A_1} \frac{B_1(I_2)}{I_2} dA$$

Interpretation: Der Strom I_2 verursacht in der Leiterschleife 2 ein magnetisches Feld (Flussdichte Φ pro Fläche A_2). Diese Feldlinien durchdringen die Fläche A_1 einer zweiten Leiterschleife. In dieser zweiten Leiterschleife wird ein Strom I_1 induziert.

Fazit: Ein Transformator ist nicht rückwirkungsfrei! Die elektrischen Bedingungen am „Ausgang“, beeinflussen die Verhältnisse am „Eingang“.

1.10 Kraftwirkung im magnetischen Feld

In der klassischen Literatur wird zwischen der Kraftwirkung von ruhenden Ladungen im elektrischen und bewegten Ladungen im magnetischen Feld unterschieden. Die Kraftwirkung im elektrischen Feld wird über die Coulombsche Kraft ausgedrückt. Die Kraftwirkung auf eine bewegte Ladung im Magnetfeld wird mittels Lorentz-Kraft bestimmt und erklärt. Die neuere Literatur fasst beide Kräfte zusammen. Man spricht von der magnetischen und der elektrischen Komponente.

Experiment:

Ein stromdurchflossener, gerader Draht wird reibungsfrei in ein statisches Magnetfeld (Permanentmagnet - Hufeisenmagnet) gehängt. Abhängig von der Stromrichtung wird der Draht in den Magneten hineingezogen oder aus dem Magneten heraus gedrückt. Durch schnelle Stromrichtungsänderung, gerät der Draht ins Schwingen. Die Bewegung des stromdurchflossenen Drahtes ist der Lorentz-Kraft zu verdanken.

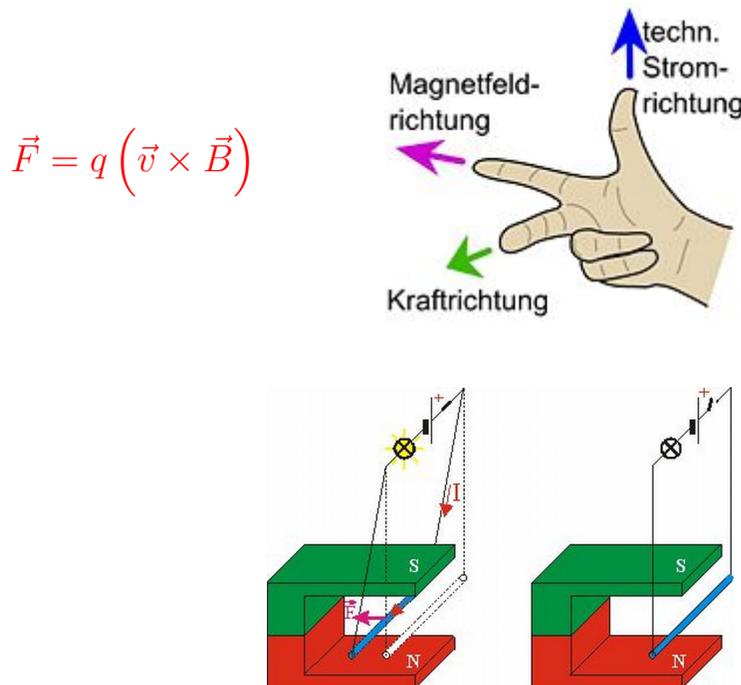


Abbildung 18: rechte-Hand-Regel: Daumen in Stromrichtung, Zeigefinger von Nord nach Süd, Mittelfinger zeigt die Richtung der Kraft auf den Draht

2 Aufgaben

2.1 Stromdurchflossener Leiter und magnetische Flussdichte \vec{B}

Aufgabe:

Berechnen und zeichnen Sie qualitativ für den stromdurchflossenen Leiter in Luft die magnetische Flussdichte.

$$I = 15\text{A}$$

$$d = 2\text{mm}$$

Luft und Kupfer sind unmagnetische Materialien! $\Rightarrow \mu_r = 1$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad \Rightarrow \text{für den Bereich } r > r_0$$

$$\text{Bis zur Oberfläche des Leiters gilt: } B = \mu_0 H = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0} r \quad \Rightarrow \text{für den Bereich } r < r_0$$

An der Oberfläche des Leiters ist das Maximum der magnetischen Flussdichte:

$$B = \mu_0 H = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0} = 3 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} = 3\text{mT}$$

$$\text{ab der Oberfläche des Leiters gilt: } B = \mu_0 H = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{r}$$

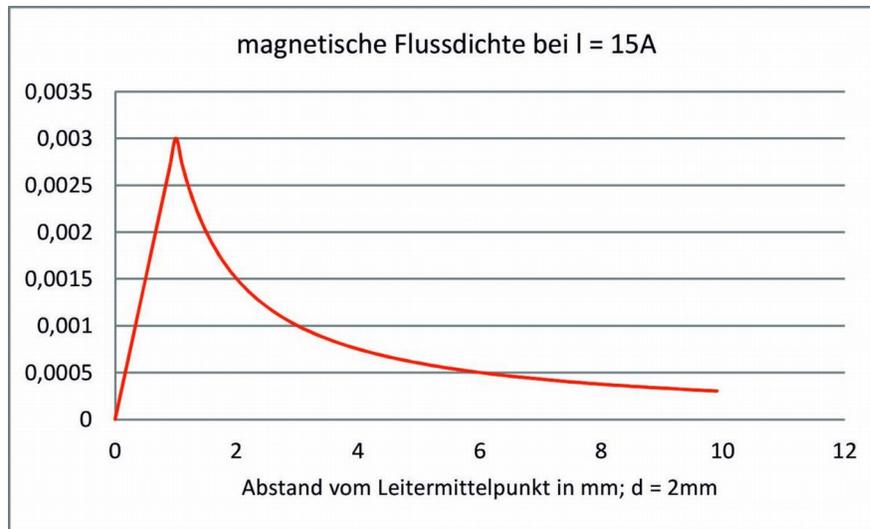


Abbildung 19: Verlauf der magnetischen Flussdichte \vec{B} [mT] in Abhängigkeit vom Abstand des Mittelpunktes des Leiters

2.2 Stromdurchflossener Leiter und magnetischer Fluss $\vec{\Phi}$

Aufgabe:

Berechnen und zeichnen Sie für einen 20m langen stromdurchflossenen Leiter in Luft den magnetischen Fluss außerhalb des Leiters! Wie groß ist der magnetische Fluss innerhalb des Leiters, bei einer konstanten mittleren Flussdichte?

$$\vec{B} = \frac{d\Phi}{dA} \quad \text{in Vs} = 1\text{Wb}$$

$$\Phi = \int B \cdot dA$$

Die mittlere Flussdichte wird mit 1,5mT angesetzt.

Die durchströmte Fläche des Leiters ist gleich: $A = l \cdot r_0 = 20m \cdot 1mm = 20 \cdot 10^{-3}m^2$

Im Innern des Leiters ist: $\Phi = B \cdot A = 30\mu Vs = 30\mu Wb$

Lösungsansatz für den magnetischen Fluss außerhalb des Leiters:

$$dA = l \cdot dr \quad \Rightarrow \quad d\Phi = B \cdot dA$$

$$\Phi = \int B \cdot dA$$

$$\Phi = \int_{r_0}^r \frac{\mu_0 I}{2\pi r} l dr$$

$$\Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} l \int_{r_0}^r \frac{1}{r} dr$$

$$\Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} l \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)$$

$$\Phi = 60 \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \cdot 10^{-6} Vs$$

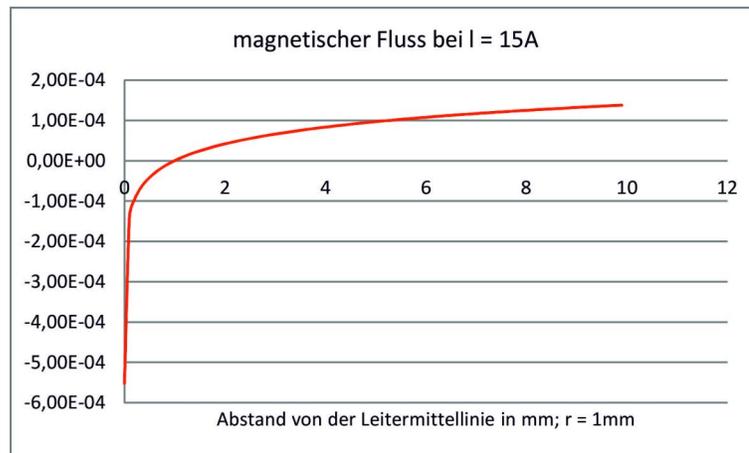


Abbildung 20: Verlauf des magnetischen Flusses Φ [Wb] in Abhängigkeit vom Abstand der Mittellinie des Leiters. Die Ergebnisse bis zur Leiteroberfläche sind technisch nicht plausibel.

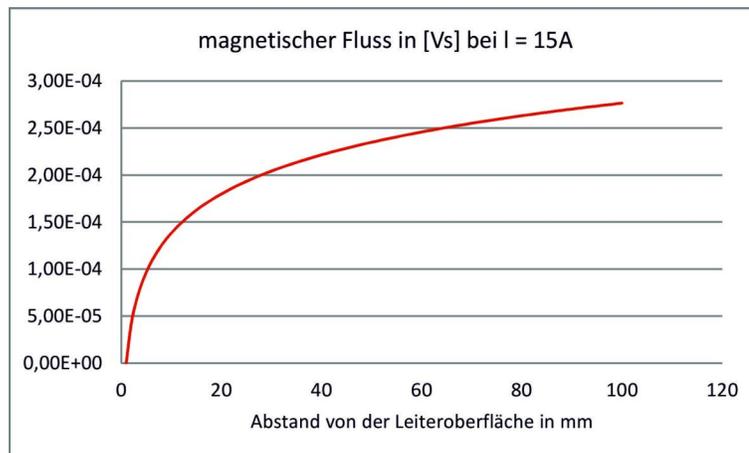


Abbildung 21: Verlauf des magnetischen Flusses Φ [Wb] in Abhängigkeit vom Abstand der Oberfläche des Leiters. Es ist deutlich sichtbar, dass der magnetische Fluss nicht konvergiert.

2.3 Berechnungen in einer Luftspule

Aufgabe: Berechnen Sie die magnetischen Feldgrößen \vec{H} , \vec{B} und $\vec{\Phi}$ im Innern einer Luftspule.

Gegebene Größen:

Stromstärke: $I = 15A$

Cu-Leitungslänge: $l_L = 20m$

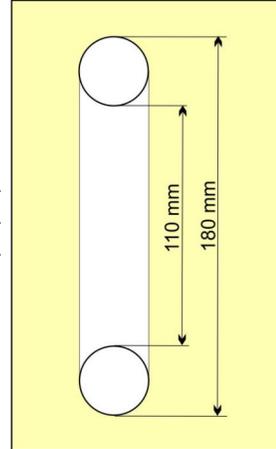
Durchmesser der Leitung: $d = 2 \cdot r_0 = 2mm$

Aufbau einer Luftspule d.h. der Wickelkern ist aus diamagnetischem Material; Luft ist theoretisch gesehen „paramagnetisch“ und der Faktor 1,000006 müsste bei exakter Berechnung mit einbezogen werden.

Permeabilität: $\mu = \mu_0$

maximaler Durchmesser einer Drahtwicklung: $d_a = 180mm$

minimaler Durchmesser einer Drahtwicklung: $d_i = 110mm$



Lösungsansatz:

Die magnetischen Feldlinien im Innern der Spule sind Kreise.

Abbildung 22: der magnetisch neutrale Wickelkern einer Luftspule

Lösung:

1. Bestimmung des mittleren Durchmessers einer Drahtwicklung: d_m

$$d_m = \frac{d_a - d_i}{2} + 2 \cdot r_0 = \frac{(180 - 110)mm}{2} + 2 \cdot 1mm = 37mm$$

2. Aus einem Draht von 20m Länge erhalten wir wie viel Windungen?

$$n = \frac{l_L}{2\pi r} = \frac{20 \cdot 10^3 mm}{\pi \cdot d_m} = \frac{20 \cdot 10^3 mm}{\pi \cdot 37mm} = 172 \text{ Windungen}$$

3. Gesucht ist die mittlere Feldlinienlänge im Innern der Spule.

$$l = \pi \frac{(d_a + d_i)}{2} = \pi \cdot 145mm = 0,455m$$

4. Bestimmung der Feldstärke \vec{H}

$$H = \frac{n \cdot I}{l} = \frac{172 \cdot 15A}{0,455m} = 5670 \frac{A}{m}$$

5. Bestimmung der magnetischen Flussdichte \vec{B}

$$B = \mu \cdot H = 12,566 \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am} \cdot 5670 \frac{A}{m} = 7,1mT$$

6. Bestimmung des magnetischen Flusses - Φ durchströmt die Wickelkernfläche

$$A = \frac{\pi}{4} \left[\frac{(d_a - d_i)}{2} \right]^2 = \frac{\pi}{4} \cdot 35^2 mm^2 = 0,965 \cdot 10^{-3} m^2$$

$$\Phi = B \cdot A = 7,1 \cdot 10^{-3} \frac{Vs}{m^2} \cdot 0,965 \cdot 10^{-3} m^2$$

$$\Phi = 6,85 \cdot 10^{-6} Vs = 6,85 \mu Wb$$

2.4 Die elektrisch geladene Kugel

Diese Aufgabe gehört in die Thematik des elektrischen Feldes. Ändert sich zeitlich jedoch das elektrische Feld, so wird ein um 90 Grad versetztes magnetische Feld erzeugt. Wir müssen das Gelernte im Zusammenhang betrachten. Das Verständnis der Wechselwirkungen der elektrischen Größen ist von größter Bedeutung.

Wir stellen eine Kugel aus Metall auf einen Tisch und damit die Kugel nicht weg rollt, wird sie auf einen passenden Sockel gestellt. Die Materialien für den Tisch und den Sockel sind Isolatoren z.B. Holz und PVC. Im Raum des Experiments befindet sich Luft.

Die Kugel hat den Radius $r = 40\text{mm}$ und somit im geladenen Zustand eine strahlende Gesamtfläche von $A = 4\pi \cdot r^2$. Nur die Oberfläche steht in Wechselwirkung mit der Umgebung. Von der Oberfläche wirkt der Verschiebungsfluss Ψ . Wir erkennen aus der Skizze, dass für den Verschiebungsfluss es unerheblich ist, ob er in den mit Luft gefüllten Raum wirkt oder durch den PVC-Sockel bzw. durch die Holztischplatte.

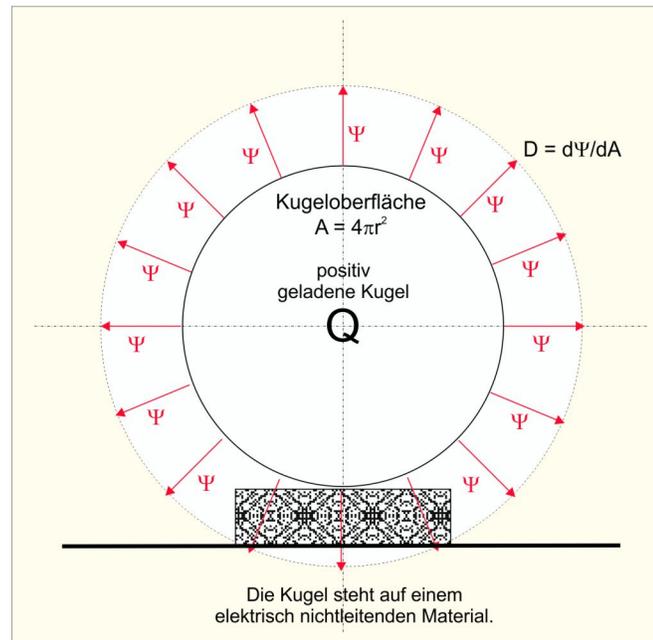


Abbildung 23: Der Versuchsaufbau

In der Skizze des Versuchsaufbaus erkennen wir eine neue Größe, die Verschiebungsflussdichte D . Analog zu unserem konventionellen Strom I , der eine Fläche A im rechten Winkel durchfließt erhalten wir auch in dieser Konfiguration eine Flussdichte, die Verschiebungsflussdichte $D = \frac{d\Psi}{dA}$.

Fragen und Aufgaben:

- Die Ladung der Kugel beträgt $Q = 5 \cdot 10^{-9}\text{C}$. Wie groß ist die Verschiebungsflussdichte an der Oberfläche?

$$\text{Lösung: } D = \frac{Q}{A} = \frac{5 \cdot 10^{-9}\text{As}}{4\pi \cdot (40\text{mm})^2} = 0,2487 \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$$

- Wie groß ist der Verschiebungsfluss im Abstand von 100mm?

$$\text{Lösung: } \Psi = D \cdot A = 0,2487 \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2} \cdot 4\pi \cdot (0,14\text{m})^2 = 61,3\text{nC}$$

- Wie groß ist die elektrische Feldstärke auf der Oberfläche der Kugel?

$$\text{Lösung: } E = \frac{D}{\epsilon_0} = \frac{0,2487 \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}}{8,86 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}} = \frac{0,2487 \cdot 10^{-6} \frac{\text{As}}{\text{m}^2}}{8,86 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}} = 28,135 \frac{\text{kV}}{\text{m}}$$

- Welche Spannung wird, gegenüber dem Nullpotenzial, auf der Oberfläche der Kugel gemessen?

$$\text{Lösung: } E = \frac{U}{l} \Rightarrow U = E \cdot l = 28,135 \frac{\text{kV}}{\text{m}} \cdot 0,04\text{m} = 1,1254\text{kV}$$

2.5 Das Biot-Savart'sche Gesetz unter der Lupe

2.5.1 Die Wechselwirkung von Materie und Umgebung

Die Wechselwirkung zwischen Materie und Umgebung besteht darin, dass die elektrisch geladene Materie Einfluss auf die Umgebung ausübt, indem ein elektrostatisches Kugelfeld von der punktförmig angenommenen Ladung ausgeht.

Die Umgebung wird von der zeitlich unveränderten Ladung q elektrisch erregt. Ein typischer Effekt aus der Elektrostatik. Die Größe, die diesen Zustand beschreibt, ist der Verschiebungsfluss Ψ [Psi].

Betrachten wir das elektrische Kugelfeld als Zwiebelchalenmodell (die Zwiebel hat eine ideale Kugelform), dann wird jede dünne Zwiebelchale des Feldes durch die Ladungswirkung, speziell durch den Verschiebungsfluss Ψ , durchflossen bzw. erregt. Umgangssprachlich wird die aus der Ladung fließende Wirkung durch eine Zwiebelchalenfläche verschoben. Da wir diesen Verschiebungsfluss **auf eine Fläche beziehen**, müssen wir von einer Verschiebungsflussdichte sprechen.

Analogien in der Elektrotechnik Stromdichte und Verschiebungsflussdichte: $\vec{S} = \frac{dI}{dA} \Rightarrow \vec{D} = \frac{d\Psi}{dA}$

Dieser beschriebene Vorgang ist von rein statischer Natur. Innerhalb der Betrachtungszeit verändert sich nicht der Betrag der Ladung q . Auch wenn die Ladung q die Position ändert, müssen wir den betrachteten Punkt (außerhalb der Ladungswegstrecke), für den wir den differentiellen Betrag der magnetischen Feldstärke $d\vec{H}$ bestimmen, örtlich „festhalten“.

Die Erklärung des Biot-Savart'schen Gesetzes beginnt mit der Bewegung einer Ladung um den differentiellen Weg ds . Die Ladung q erzeugt in der ersten Position ein elektrisches Kugelfeld, in der zweiten Position ein um den Betrag ds versetztes elektrisches Kugelfeld. Die räumliche Betrachtung verkompliziert sich etwas dadurch, da wir das einfache Kugelfeldmodellfeld aufgeben müssen. Wir erhalten einen Raum in der Form eines Paraboloids.

In der rechten Skizze ist der betrachtete Vorgang dargestellt. Die Ladung q bewegt sich von rechts nach links. Die differentielle magnetische Feldstärke $d\vec{H}$ im Punkt P wird von zwei Komponenten gebildet - den elektrostatischen Komponenten der Verschiebungsflussdichten $\vec{D} = \frac{d\Psi}{dA}$.

Die Größe Ψ entspricht dem Verschiebungsfluss, der der Ladungsträgeranzahl entspricht, welcher für unseren betrachteten Vorgang entscheidend ist. Sind alle Ladungsträger am Vorgang beteiligt, dann gilt: $\Sigma Q \Rightarrow \Sigma \Psi$.

Ändert sich die Verschiebungsflussdichte \vec{D} innerhalb des betrachteten Zeitraumes dt , so erhalten wir die Verschiebungsstromdichte $\vec{S}_V = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$. Das Besondere an der Größe ist, dass es das Maß ist, mit dem wir ausdrücken, welcher Magnetfeldbetrag das elektrische Feld im Punkt P orthogonal umwirbelt.

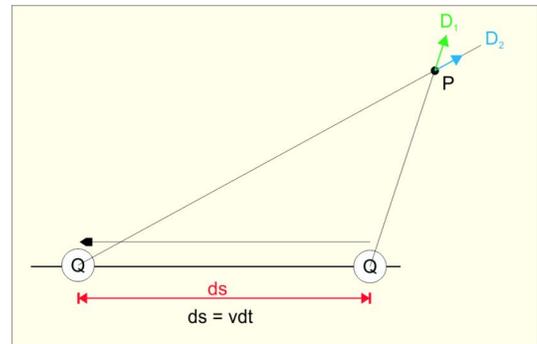


Abbildung 24: die bewegte Ladung

Die Bestimmung der magnetischen Feldstärke kann mit Worten folgendermaßen ausgedrückt werden: Der Betrag der magnetischen Feldstärke \mathbf{H} ist der Quotient aus dem verursachenden Stromfluss \mathbf{I} und der berandeten Fläche, mit dem Umfang \mathbf{l} , des Magnetfeldes. Stromfluss und berandete Magnetfläche stehen orthogonal zueinander.

In unserer Betrachtung haben wir keinen elektrischen Stromfluss, sondern eine sich bewegende Ladung q . Die Ursache für das Magnetfeld im Punkt P ist die Größe Ψ . Betrachten wir die Wirkung auf die durchfließende Fläche, so gilt: $\Delta\Psi = \int \vec{D} dA$. Die durchflossene Fläche ist noch aus der entsprechenden Grafik in einem der nächsten Schritte zu bestimmen. Wir stellen im ersten Schritt die Winkelverhältnisse in einer Skizze dar. Für Winkel kleiner 5° gilt $\sin(\alpha) = \alpha$, bei einem akzeptablen Fehler von 1,3‰.

Die Ausgangsgleichung nach Biot-Savart lautet: $d\vec{H} = \frac{\Delta I_v}{l}$

$$I = \frac{dQ}{dt} \Rightarrow \Delta I_V = \frac{d}{dt} [\Delta \Psi]$$

$$\Delta I_V = \frac{d}{dt} \left[\int_0^{\alpha_1} \vec{D} dA \right]$$

Für die elektrisch wirksame Kugeloberfläche gilt allgemein: $D = \frac{q}{4\pi r^2}$

$$\Delta \Psi = \int_0^{\alpha_1} \vec{D} dA = \int_0^{\alpha_1} \frac{q}{4\pi r^2} dA = \frac{q}{4\pi} \int_0^{\alpha_1} \frac{1}{r^2} dA$$

Die noch offene Frage lautet: Wie wird die Fläche bestimmt, über die wir integrieren müssen?

$$\sin(\alpha_1) = \frac{r \cdot d\alpha}{v \cdot dt}$$

$$\text{Radius des großen Winkels } \alpha_1 \Rightarrow r \cdot \sin(\alpha_1)$$

Radius des kleineren Winkels:

$$\alpha = \alpha_1 - d\alpha \Rightarrow r \sin(\alpha)$$

resultierende Fläche:

$$dA = u \cdot r \cdot \sin(\alpha) \cdot r \cdot d\alpha$$

$$\text{Umrandung: } u = 2\pi \cdot r$$

$$dA = 2\pi \cdot r \cdot \sin(\alpha) \cdot r \cdot d\alpha$$

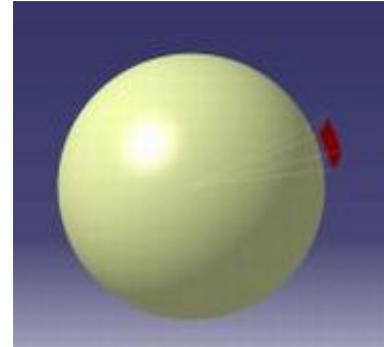


Abbildung 25: Die durchströmte Fläche.

$$\Delta \Psi = \int |\vec{D}| dA$$

$$\Delta \Psi = \int |\vec{D}| 2\pi \cdot r \cdot \sin(\alpha) \cdot r \cdot d\alpha$$

$$\Delta \Psi = \int \frac{q}{4\pi r^2} 2\pi \cdot r \cdot \sin(\alpha) \cdot r \cdot d\alpha$$

$$\Delta \Psi = \frac{q}{2} \int \sin(\alpha) d\alpha$$

$$\Delta \Psi = \frac{q}{2} \int_0^{\alpha_1} \sin(\alpha) d\alpha$$

$$\Delta \Psi = \frac{q}{2} [-\cos\alpha]_0^{\alpha_1}$$

$$\Delta \Psi = \frac{q}{2} [1 - \cos\alpha_1]$$

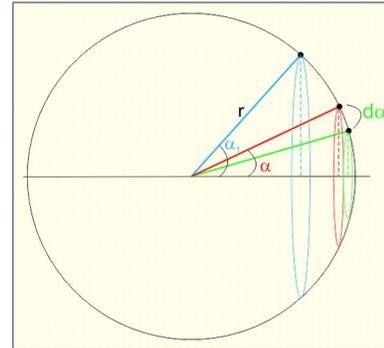


Abbildung 26: die Radien und die Fläche dA

$$\Delta I_V = \frac{d}{dt} \Delta \Psi = \frac{d}{dt} \frac{q}{2} [1 - \cos\alpha_1]$$

$$\Delta I_V = \frac{q}{2} \frac{d}{d\alpha} [-\cos(\alpha_1)] \frac{d\alpha}{dt}$$

$$\Delta I_V = \frac{q}{2} \sin(\alpha_1) \frac{d\alpha}{dt}$$

$$\sin(\alpha_1) = \frac{r \cdot d\alpha}{v \cdot dt}$$

$$\sin(\alpha_1) = \frac{r}{v} \frac{d\alpha}{dt} \Rightarrow \frac{d\alpha}{dt} = \frac{v}{r} \sin(\alpha_1)$$

$$\Delta I_V = q \cdot v \cdot \frac{\sin^2(\alpha_1)}{4\pi \cdot r^2}$$

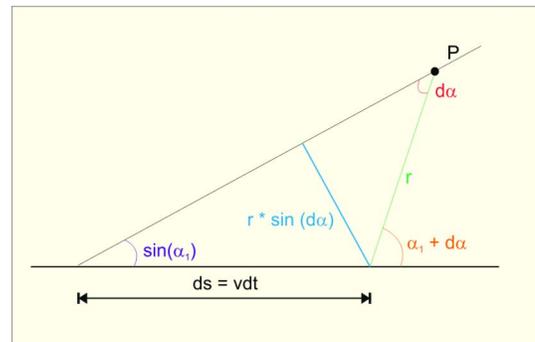


Abbildung 27: die Winkel und Wegstrecken - der Winkel α_1 verändert sich zeitlich

Lösung: $H = \frac{q \cdot v \cdot \sin(\alpha)}{4\pi \cdot r^2}$

2.5.2 Biot-Savart Beweisführung

Aufgabe: Beweisen Sie die Richtigkeit des Biot-Savartschen Gesetzes anhand eines unendlich langen, geraden Leiters.

allgemein gilt: $H = \frac{n \cdot I}{2\pi \cdot r}$

Für einen unendlich lange, geraden Leiter ist $n = 1$.

nach Biot-Savart gilt: $dH = \frac{I \cdot ds}{4\pi \cdot r^2} \sin\alpha$

Lösung

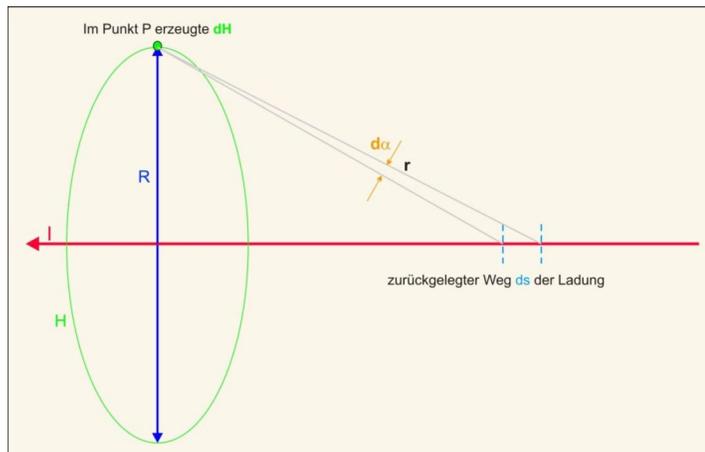


Abbildung 28: grafische Ermittlung der Größen

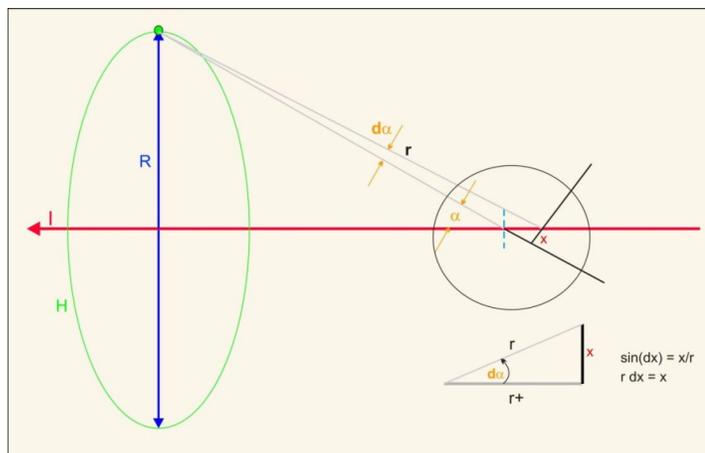


Abbildung 29: grafische Ermittlung der Größen - für kleine Winkel bis 10° gilt: $\sin\alpha = \alpha$ bei max. 5‰ Fehler

$$\sin\alpha = \frac{R}{r}$$

$$\sin\alpha = r \frac{d\alpha}{ds}$$

$$\frac{r \cdot d\alpha}{ds} = \frac{R}{r}$$

$$r^2 = R \cdot \frac{ds}{d\alpha}$$

$$dH = \frac{I \cdot ds}{4\pi \cdot r^2} \sin\alpha$$

$$dH = \frac{I}{4\pi \cdot \frac{R}{d\alpha}} \sin\alpha$$

$$dH = \frac{I}{4\pi \cdot R} \sin\alpha \, d\alpha$$

$$H = \int_{\alpha_1}^{180^\circ - \alpha_1} \frac{I}{4\pi \cdot R} \sin\alpha \, d\alpha = \frac{I}{4\pi \cdot R} \cdot -\cos\alpha \Big|_{\alpha_1}^{max}$$

$$\text{für } \alpha_1 = 0^\circ \text{ gilt: } H = -\frac{I}{4\pi \cdot R} [\cos 180^\circ - \cos 0^\circ]$$

$$H = \frac{I}{2\pi R}$$

2.6 Eisenkreis mit Luftspalt

Gesucht sind die Größen: $\vec{\Phi}$, \vec{B} , \vec{H}_{Fe} und \vec{H}_{Luft}

Gegeben sind folgende Größen:

$$\Theta = I \cdot w = 500 \text{ A}$$

$$a = 40 \text{ cm}$$

$$b = 30 \text{ cm}$$

$$l_{Luft} = 1 \text{ mm}$$

$$A = 4 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm}$$

$$\mu_r = 600$$

Der Querschnitt der durchströmten Fläche ist für den Weg im Eisen und in der Luft streng genommen ungleich. Der magnetische Fluss im Luftspalt ist eigentlich unbegrenzt. Wird der Luftspalt klein gehalten, so findet eine tonnenförmige Krümmung der magnetischen Flusslinien statt. In unserem Fall ist der Luftspalt so gering, dass wir hypothetisch annehmen können, dass im Spalt eine homogene Feldlinienverteilung erfolgt.

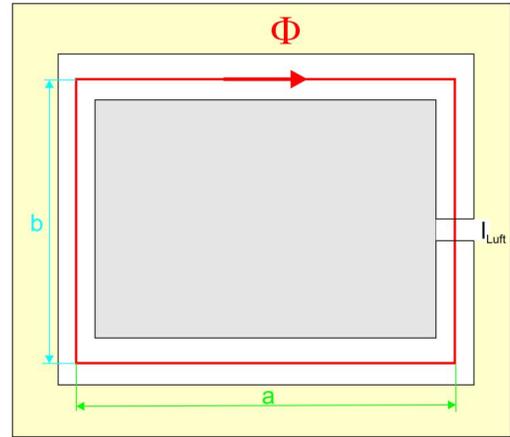


Abbildung 30: Die Geometrie des Eisenkreises

Lösung:

magnetischer Fluss Φ :

$$\Theta = \Phi \cdot (R_{m_{Fe}} + R_{m_{Luft}})$$

$$R_{m_{Fe}} = \frac{l_{Fe}}{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot A} = \frac{2 \cdot (a+b)}{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot A} = \frac{2 \cdot 0,7 \text{ m}}{12,566 \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \cdot 600 \cdot 16 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} = 1,16 \cdot 10^4 \frac{\text{A}}{\text{Vs}}$$

$$R_{m_{Luft}} = \frac{l_{Luft}}{\mu_0 \cdot A} = \frac{l_{Luft}}{\mu_0 \cdot A} = \frac{10^{-3} \text{ m}}{12,566 \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \cdot 16 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} = 6,96 \cdot 10^8 \frac{\text{A}}{\text{Vs}}$$

$$\Phi = \frac{w \cdot I}{(R_{m_{Fe}} + R_{m_{Luft}})} = w \cdot I \frac{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot A}{l_{Fe} + \mu_r \cdot l_{Luft}}$$

$$\Phi = w \cdot I \frac{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot A}{2 \cdot (a+b) + \mu_0 \cdot \mu_r}$$

magnetische Flussdichte $\vec{B} = \vec{B}_{Luft} = \vec{B}_{Fe}$

$$B = \frac{\Phi}{A_{\perp}}$$

magnetische Feldstärke \vec{H} :

$$H_{Fe} = \frac{B}{\mu_0 \cdot \mu_r}$$

$$H_{Luft} = \frac{B}{\mu_0}$$

$$\frac{H_{Fe}}{H_{Luft}} = \frac{1}{\mu_r}$$

2.7 Die gesuchte Spannungsfunktion

Ziel dieser Aufgabe ist es, sich mit zwei elementaren Fakten zu befassen:

1. Bei **selbstgeschriebenen Formelsammlungen** wird nicht immer darauf geachtet, welche Aussage in einer Formel steckt. So wurde mehrfach schon festgestellt, dass (als stellvertretendes Beispiel) statt $u(t) = -\frac{d\Phi}{dt}$ einfach nur $u = -\frac{\Phi}{t}$ in die Formelsammlung geschrieben wurde. Das ist für konstante Größen und lineare Beziehungen anwendbar. Bei Zeitfunktionen führt diese Formel zu keiner Lösung.
2. Für lineare Beziehungen kann auch folgende Schreibweise richtig sein:
 $u(t) = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \Rightarrow u(t) = -\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{t_2 - t_1}$. Auf alle Fälle ist die vereinfachte Form in der Klausur nur legitim, wenn erst die korrekte Formel notiert und aus den Randbedingungen die Vereinfachung gebildet wird.

Der in der Grafik dargestellte magnetischen Fluss Φ induziert eine Spannung. Die magnetische Flussdichte $\vec{B} = \frac{d\Phi}{dA}$ wurde mittels Hall-Element gemessen. Durch die bekannte vom magnetischen Fluss durchströmte Fläche A ist der magnetische Fluss bestimmbar: $\Phi = \int_0^A B(t)dA$

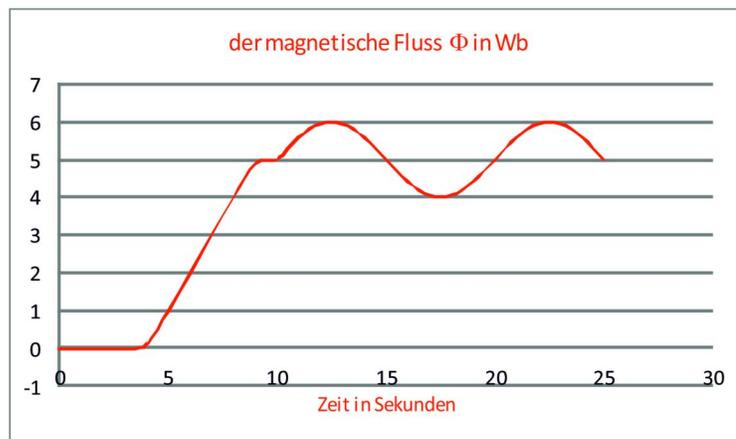


Abbildung 31: Folgende Funktion wurde gemessen - wie lautet die dazugehörige $u(t)$ Funktion?

Mit einem Oszilloskop soll der Spannungsverlauf an den Klemmen sichtbar gemacht werden. Wir schätzen vorab die erwarteten Amplituden ab. Unsere Überslagsrechnung soll unsere Messung bestätigen.

Lösungsansatz:

Wir teilen die gegebene Funktion in 4 Zeitbereiche und analysieren jeden Bereich für sich. Im vierten Bereich erkennen wir eine Sinusfunktion. Exemplarisch werden wir die Lösung für eine Periodendauer betrachten.

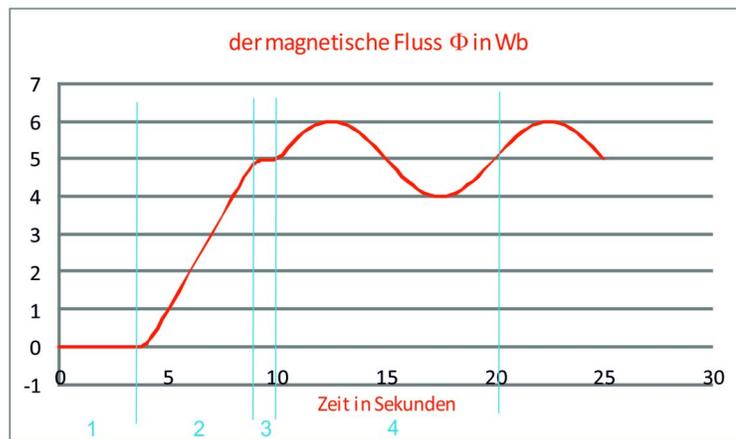


Abbildung 32: Wie lauten die vier $\Phi(t)$ Teilfunktionen?

1. für $0 \leq t < 4s$ $\Rightarrow \Phi = 0$
2. für $4s \leq t < 9s$ $\Rightarrow \Phi(t) = \Delta\Phi(t) = 5Wb$
3. für $9s \leq t < 10s$ $\Rightarrow \Phi = const = 5Wb$
4. für $10s \leq t < 20s$ $\Rightarrow \Phi(t) = 5Wb + 1Wb \cdot \sin(\omega t)$

Der Zusammenhang zwischen Spannung und magnetischer Fluss: $u(t) = -\frac{d\Phi}{dt}$

1. für $0 \leq t < 4s$ $\Rightarrow u(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = 0$
2. für $4s \leq t < 9s$ $\Rightarrow u(t) = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\left[\frac{5Wb-0Wb}{9s-4s}\right] = -1\frac{Wb}{s} = 1\frac{Vs}{s} = -1V$
3. für $9s \leq t < 10s$ $\Rightarrow u(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = 0$
4. für $10s \leq t < 20s$ $\Rightarrow u(t) = -\frac{d\Phi}{dt}$

$$u(t) = -\frac{d}{dt} [5Wb + 1Wb \cdot \sin(\omega t)]$$

$$u(t) = -\left\{ \frac{d}{dt}(5Wb) + \frac{d}{dt} [1Wb \cdot \sin(\omega t)] \right\}$$

$$u(t) = -0, 4\pi \frac{1}{s} \cdot Wb \cdot \cos(\omega t) \quad \text{[für die Amplitude bitte Bemerkung a) beachten!]}$$

$$u(t) = -0, 4\pi Vii \cdot \cos(\omega t)$$

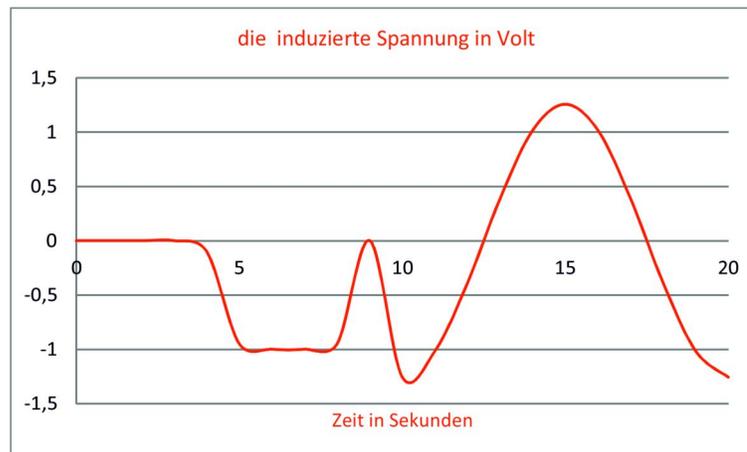


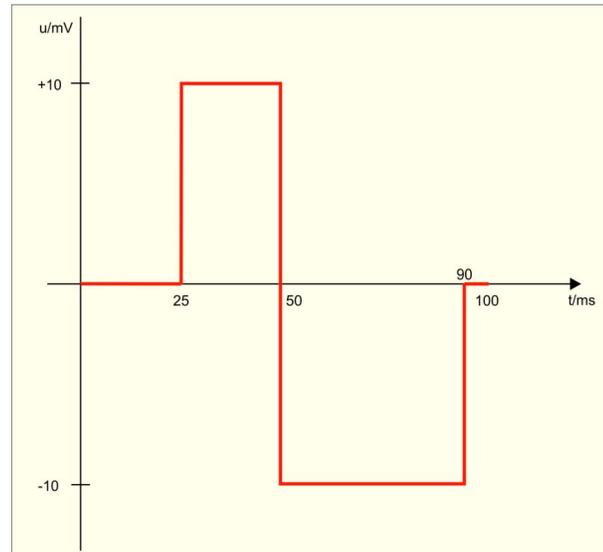
Abbildung 33: Die zusammengesetzte $u(t)$ Funktionen.

- a) Die Amplitude der Cosinusschwingung im vierten Zeitbereich ist abhängig von der Kreisfrequenz ω . Für eine gut lesbare grafische Darstellung wurde $\omega = 0, 2\frac{1}{s} \cdot 2\pi$ gewählt.
- b) In der Grafik ist der Bereich zwischen der neunten und zehnten Sekunde, bedingt durch das ausgewählte Auswerteprogramm, nicht optimal dargestellt, hier ist für die Zeitdauer von einer Sekunde die Spannung null. Grundsätzlich können wir feststellen, dass bei unverändertem magnetischen Fluss keine Spannung induziert wird.

2.8 Die gesuchte Funktion des magnetischen Flusses

Im Labor wird eine elektrische Maschine untersucht. Um die wichtigsten Eigenschaften messtechnisch zu erfassen, wird eine Spannungsmessung durchgeführt. Diese gemessene Spannung $u(t)$ wird grafisch dargestellt. Sie ist das Ergebnis der Ruheinduktion, d.h. ein magnetischer Fluss induziert in einem ruhenden elektrischen Leiter eine Spannung.

Gesucht ist die Zeitfunktion des magnetischen Flusses, die diese Spannung induziert hat.

Gemessene Spannungsfunktion:Abbildung 34: Die induzierte $u(t)$ -Funktion.**Lösungsansatz:**

- $u(t) = -\frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow \Phi(t) = -\int_0^{t_{max}} u(t)dt \Rightarrow -\Delta\Phi = \Delta u \cdot \Delta t + \Phi_0$
- Zeitbereich t_0 bis $t_1 \Rightarrow t_0 = 0, t_1 = 25ms$
- Zeitbereich t_1 bis $t_2 \Rightarrow t_1 = 25ms, t_2 = 50ms$
- Zeitbereich t_2 bis $t_3 \Rightarrow t_2 = 50ms, t_3 = 90ms$
- Zeitbereich t_3 bis $t_4 \Rightarrow t_3 = 90ms, t_4 = 100ms$

Der nächste Lösungsschritt:

Wir berechnen die Teilintegrale für die vier Zeitbereiche. Die Anfangsbedingung für den magnetischen Fluss lautet: $\Phi_0 = +0,4mWb$

- t_0 bis $t_1 \Rightarrow \Phi_1 = \Delta u \cdot \Delta t + \Phi_0 = 0 - 0,4mWb$
- t_1 bis $t_2 \Rightarrow \Phi_2 = \Delta u \cdot \Delta t + \Phi_1 = 10mV \cdot 0,025s + \Phi_1 = (0,25 - 0,4)mWb = -0,15mWb$
- t_2 bis $t_3 \Rightarrow \Phi_3 = \Delta u \cdot \Delta t + \Phi_2 = -10mV \cdot 0,04s + \Phi_2 = (-0,4 - 0,15)mWb = -0,55mWb$
- t_3 bis $t_4 \Rightarrow \Phi_4 = \Delta u \cdot \Delta t + \Phi_3 = 0 - 0,55mWb$

Der grafische Funktionsverlauf:Abbildung 35: Die gesuchte $\Phi(t)$ -Funktion.

2.9 Das Koaxialkabel

Bei Aufbauten im Maschinenbau kann es nicht immer vermieden werden, wenn stromdurchflossene Leitungen oder Flächen gegenüber angeordnet werden. Aus der Elektrostatik ist uns bekannt, dass solche Installationen wie ein geladener Kondensator wirken. Dieser Umstand ist zwar ärgerlich, da wir nach außen elektrisch neutrale Komponenten erwarten, aber nicht dramatisch oder gesundheitsgefährdend.

Werden Kabel verlegt, so besitzen diese elektrischen Leiter eine Induktivität. Das mag für kurze Kabellängen vernachlässigbar sein, aber bei 500m Länge soll man über den Betrag der Kabel-Induktivität Bescheid wissen.

Wir wissen, dass Induktivitäten und Kapazitäten, ob in Reihen- oder Parallelschaltung einen Schwingkreis bilden.

$$f_0 = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{LC}}$$

Ein permanent schwingendes System ist instabil und muss vermieden werden. Aus diesem Grund bestimmen wir **die allgemeine Lösung** zur Bestimmung der Induktivität eines Koaxialkabels.

Wir stellen fest: Windungszahl $n = 1$

$$L = \frac{\Phi}{I}$$

$$\Phi = \int_A \vec{B} \cdot dA = \int_{r_i}^{r_a} \vec{B}(r) \cdot l dr$$

für $dA = l \cdot dr$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

$$\Phi = \int_{r_i}^{r_a} \mu_0 \vec{H}(r) \cdot l dr$$

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi \cdot r}$$

$$\Phi = \int_{r_i}^{r_a} \mu_0 \frac{I}{2\pi \cdot r} \cdot l dr$$

$$\Phi = \mu_0 \frac{I \cdot l}{2\pi} \cdot \int_{r_i}^{r_a} \frac{1}{r} \cdot dr$$

$$\Phi = \mu_0 \frac{I \cdot l}{2\pi} \cdot \ln \left[\frac{r_a}{r_i} \right]$$

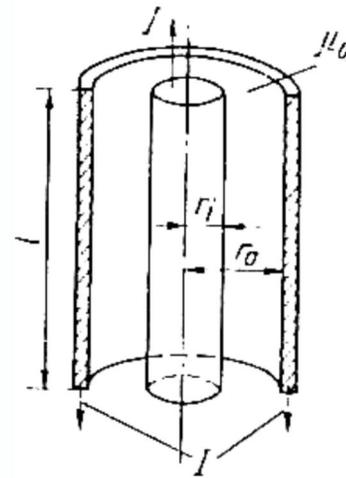


Abbildung 36: Das Koaxialkabel als Skizze.

Die allgemeine Lösung lautet:

$$L = \frac{\Phi}{I} = \mu_0 \frac{l}{2\pi} \cdot \ln \left[\frac{r_a}{r_i} \right]$$

Wir berechnen für $l=500\text{m}$ die Induktivität des Kabels. Das Verhältnis von Außen- zu Innendurchmesser soll $5,5$ [$\ln(5,5) = 1,7$] betragen. Der Füllstoff zwischen Innen- und Außenleiter soll magnetisch neutral (z.B. aus Polyethylen) sein.

$$L = \mu_0 \frac{l}{2\pi} \cdot \ln \left[\frac{r_a}{r_i} \right] = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \cdot \frac{500\text{m}}{2\pi} \cdot \ln(5,5)$$

$$L = 10^{-4} \cdot \ln(5,5) \frac{\text{Vs}}{\text{A}} = 0,17\text{mH}$$

Die Betriebskapazität eines RG58C/U-Kabels beträgt für 500m $C=50,5\text{nF}$. Wir erwarten bei einer Frequenz von:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{0,17 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Vs}}{\text{A}} \cdot 50,5 \cdot 10^{-9} \frac{\text{As}}{\text{V}}}} \approx 54\text{kHz}$$

eine Resonanzstelle.

2.10 Die Rogowski Spule

Eine Aufgabe aus der Praxis: Messen Sie den Betrag des Gleichstroms in einem laufenden System. Sie müssen Ihre Autobatterie prüfen, ob sie noch wintertauglich ist.

Der erste Gedanke: Bei Wechselstrom wäre das kein Problem, denn mit einer „Stromzange“ könnte das Transformatorprinzip ausgenutzt werden. Aber wie ist es bei Gleichstrom?

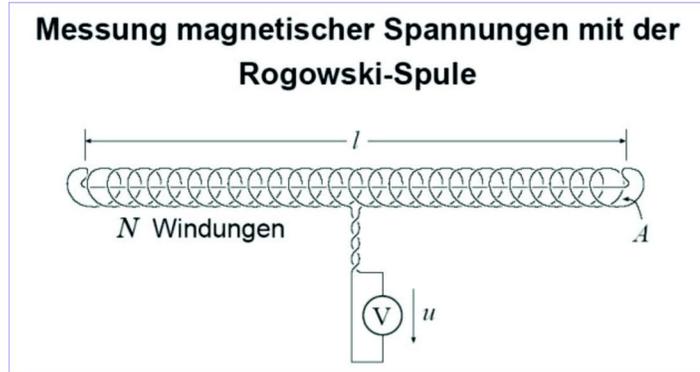


Abbildung 37: Der Kern der Rogowski Spule ist flexibel und magnetisch neutral.

Ein vom Gleichstrom durchflossener Leiter wird von einer magnetischen Feldstärke umgeben.

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi \cdot r} \Rightarrow I = 2\pi \cdot r \cdot \vec{H} \Rightarrow \Theta = \int_A \vec{H} \cdot d\vec{s}$$

Die Größe Θ entspricht der magnetischen Urspannung und definiert sich als: $\Theta = n \cdot I$. Der Faktor n gibt an, wie oft der Strom auf den magnetischen Grundstromkreis wirkt. Wird ein Leiter als Spule eingesetzt, ist die Anzahl der Wicklungen entscheidend. Die magnetische Spannung $V_{AB} = \Phi \cdot R_{mag}$ wird zwischen zwei Punkten (A, B) gemessen. $V_{AB} = \int_A^B \vec{H} d\vec{s}$

Hierbei ist es entscheidend, wie die magnetischen Feldlinien die Wicklungen der Rogowski-Spule schneiden.

Aufgabe: Wie muss die Rogowski-Spule angelegt werden, damit die magnetische Urspannung Θ und die magnetischen Spannungen zwischen den beiden Punkten A und B gemessen werden können?

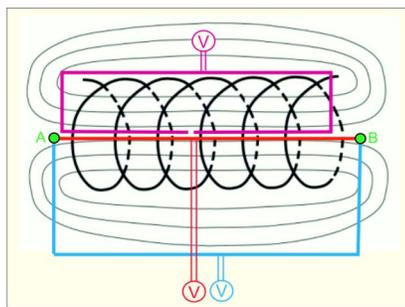


Abbildung 38: Die drei Lösungen

Die möglichen Lösungen:

- Fall "Magenta"... um alle Wicklungen herum, d.h. wir beschreiben einen geschlossenen Weg und messen die gesamte magnetische Urspannung

$$\Rightarrow \Theta = \oint \vec{H} d\vec{s}$$

- Fall "Rot"... auf geradem Weg innerhalb der Spule, d.h. es werden keine Ströme umfasst bzw. keine Feldlinien geschnitten

$$\Rightarrow V_{AB} = \Phi \cdot R_{mag} = \Phi \frac{L}{\mu_0 \cdot A}$$

- Fall "Blau"... außerhalb der Spule zwischen den Punkten A und B gemessen:

$$\oint \vec{H} d\vec{s} = \int_{AB_{außen}} \vec{H} d\vec{s} - V_{ab_{innen}} = \Sigma I \Rightarrow \int_{AB_{außen}} \vec{H} d\vec{s} = V_{ab_{innen}} + \Sigma I$$

Der Integrationsweg $A \rightarrow_{außen} B$ außerhalb der Spule entspricht einer Linksschraubendrehung, daher ist der Gesamtstrom ΣI mit $-\Sigma I$ negativ anzusetzen.

3 James Clerk Maxwell

Geboren am 13. Juni 1831 in Edinburgh

Gestorben am 5. November 1879 in Cambridge

3.1 Lebenslauf

James Clerk Maxwell war ein schottischer Physiker (Lit.-Ref.5). Er entwickelte einen Satz von Gleichungen (die Maxwellschen Gleichungen), welche die Grundlagen der Elektrizitätslehre und des Magnetismus bilden. Zudem entdeckte er die Geschwindigkeitsverteilung von Gasmolekülen – die „Maxwell-Verteilung“. Er veröffentlichte im Jahre 1861 die erste Farbfotografie als Nachweis für die Theorie der additiven Farbmischung. Maxwell wird im Allgemeinen als der Naturwissenschaftler des 19. Jahrhunderts mit dem größten Einfluss auf die Physik des 20. Jahrhunderts angesehen. Er lieferte Beiträge zu grundlegenden Naturmodellen und galt als Brückenbauer zwischen Mathematik und Physik.



Abbildung 39: Maxwell Denkmal in Edinburgh

1931, zum hundertsten Jahrestag von Maxwells Geburt, beschrieb Albert Einstein dessen Werk als „das Tiefste und Fruchtbare, das die Physik seit Newton entdeckt hat“.

James Clerk Maxwell wurde als einziges Kind des Rechtsanwalts John Clerk Maxwell in der schottischen Hauptstadt Edinburgh geboren. Maxwells frühe Erziehung wurde ihm durch seine Mutter zuteil. Seine frühe Jugend verbrachte er zumeist auf dem Familiensitz Glenlair bei Dumfries. Maxwells Mutter starb als er erst acht Jahre alt war. Anschließend ging Maxwell zur „Edinburgh“ Academy, um seine schulische Ausbildung fortzusetzen.

1847 schrieb sich Maxwell an der Universität Edinburgh ein und studierte Naturphilosophie, Moralphilosophie und mentale Philosophie. Noch als Student in Edinburgh, schrieb er zwei Beiträge für die „Transactions of the Royal Society of Edinburgh“ von denen einer, „On the Equilibrium of Elastic Solids“ (Über das Gleichgewicht von elastischen Festkörpern) veröffentlicht wurde.

1850 wechselte Maxwell zur „Universität Cambridge“. Zuerst schrieb er sich am Peterhouse ein, ging dann aber zum Trinity-College, weil er glaubte, hier leichter ein Stipendium zu bekommen. Am Trinity-College wurde er in eine geheime Verbindung, bekannt als die Cambridge Apostles, gewählt. Im November 1851 studierte Maxwell bei seinem Tutor William Hopkins. Einen großen Teil der Ausarbeitungen seiner elektromagnetischen Gleichungen vollendete Maxwell, als er noch Student ohne Abschluss war.

1854 schloss Maxwell sein Studium mit der zweitbesten Mathematikprüfung seines Jahrgangs ab. Direkt nach seinem Studienabschluss veröffentlichte er eine wissenschaftliche Abhandlung „On Faraday’s Lines of Force“ (Über Faradays Kraftlinien), in der er einen ersten Hinweis auf seine elektrischen Forschungen gab, die im bedeutendsten Werk seines Lebens ihren Höhepunkt finden sollten.

Von 1855 bis 1872 veröffentlichte er in Abständen eine Serie von wertvollen Forschungen im Zusammenhang mit dem Farbsehen und der Farbblindheit, für die er 1860 mit der Rumford-Medaille der Royal Society ausgezeichnet wurde.

1856 wurde Maxwell auf den Lehrstuhl für Naturphilosophie am Marischal College in Aberdeen berufen, den er bis zur Zusammenlegung der beiden Colleges im Jahre 1860 innehatte. 1859 gewann er den Adams-Preis in Cambridge für einen originellen Aufsatz mit dem Titel „On the Stability of Saturn’s Rings“ (Über die Stabilität der Saturn-Ringe), in dem er zu dem Schluss kam, die Ringe könnten nicht gänzlich fest oder flüssig sein.

1860 wurde Maxwell Professor am King’s College in London.

1861 wurde er als Mitglied („Fellow“) in die Royal Society gewählt. Maxwell starb im Alter von 48 Jahren in Cambridge an Magenkrebs.

3.2 Die vier Maxwell'schen Gleichungen

3.2.1 Die erste Maxwell'sche Gleichung - Das Durchflutungsgesetz

In Textform

Die Summe aller Ströme (Konvektionsstrom, Feldstrom im Vakuum, Diffusionsstrom und Verschiebungsstrom) führen zu einem magnetischen Wirbelfeld.

In integraler Form:

$$\oint_S \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_A \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{A} + I = \iint_A \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}_{ext} \right) \cdot d\vec{A}$$

In differentieller Form:

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j}_{ext} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Der totale elektrische Strom (engl. true current oder total current) setzt sich grundsätzlich aus zwei additiven Komponenten zusammen:

- Der Leitungsstrom I_L wird durch den Fluss von elektrischen Ladungsträgern wie Elektronen oder Ionen getragen. Er wird durch das elektrische Feld und die dadurch auf die Ladungsträger ausgeübten mechanischen Kräfte verursacht. Voraussetzung für die Bewegung der Ladungsträger ist meist das Vorhandensein eines elektrischen Leiters, wie eines Metalls oder eines Elektrolyten. Als Sonderform ist auch ein Leitungsstrom im Vakuum durch freie Ladungsträger wie Elektronen möglich.

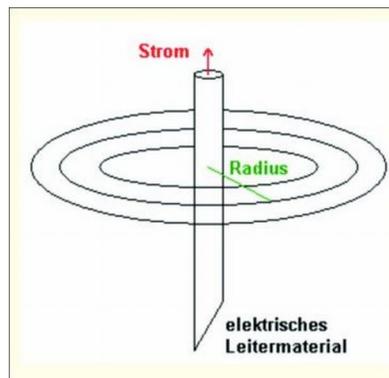


Abbildung 40: Erzeugung der magnetischen Feldstärke durch einen Stromfluss im Leiter

Umgangssprachlich wird unter dem elektrischen Strom nur diese Komponente, aufgrund des Ladungstransportes durch die elektrischen Feldkräfte, verstanden.

- Der Verschiebungsstrom I_V wird durch die zeitliche Änderungsrate des elektrischen Flusses bestimmt und ist nicht an die Existenz eines elektrischen Leiters gebunden. Der Verschiebungsstrom ist als ein Teil der Wirkung des elektrischen Feldes zu verstehen und drückt im Prinzip die zeitliche Änderungsrate des elektrischen Flusses aus.

Mathematisch lässt sich der totale elektrische Strom I als die Summe aus beiden Komponenten ausdrücken.

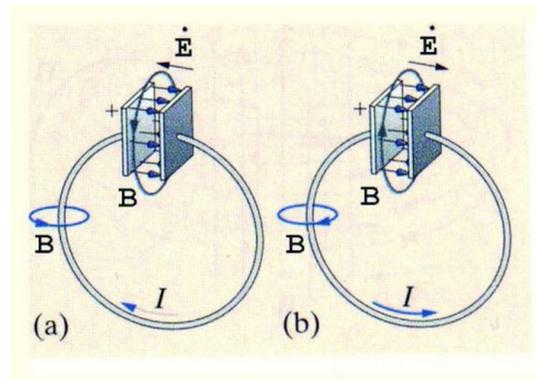


Abbildung 41: Erzeugung der magnetischen Flussdichte \vec{B} durch einen Stromfluss im Leiter und durch den Verschiebungsstrom I_V im Nichtleiter.

3.2.2 Die zweite Maxwellsche Gleichung - Das Induktionsgesetz

In Textform

Ein Magnetfeld erzeugt einen elektrischen Strom unter zwei Bedingungen:

- In einem elektrischen Leiter wird Strom induziert, wenn das Magnetfeld ($\frac{d\vec{B}}{dt} \neq 0$) sich zeitlich verändert.
- Wenn sich in einem zeitlich konstanten Magnetfeld ($\frac{d\vec{B}}{dt} = 0$) eine Leiterschleife (geschlossener Kreis) orthogonal zum Magnetfeld bewegt, so wird in dieser Leiterschleife ein Strom induziert.

In integraler Form:

$$\oint_{\partial A(t)} \vec{E} d\vec{s} = - \int_{A(t)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{A}$$

$$\oint_{\partial A(t)} \left[\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}(t) \right] d\vec{s}$$

In differentieller Form:

$$\text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

3.2.3 Die dritte Maxwellsche Gleichung - Ladung als Ursache eines elektrischen Feldes

In Textform

Elektrische Feldlinien divergieren voneinander unter Anwesenheit elektrischer Ladung, die Ladung ist Quelle des elektrischen Feldes.

In integraler Form:

$$\iiint_V \rho dv = Q(V)$$

Der (elektrische) Fluss durch die geschlossene Oberfläche ∂V eines Volumens V ist direkt proportional zu der elektrischen Ladung in seinem Inneren.

In differentieller Form mittels Nabla- ∇ Operator:

$$\operatorname{div} D = \nabla D = \rho$$

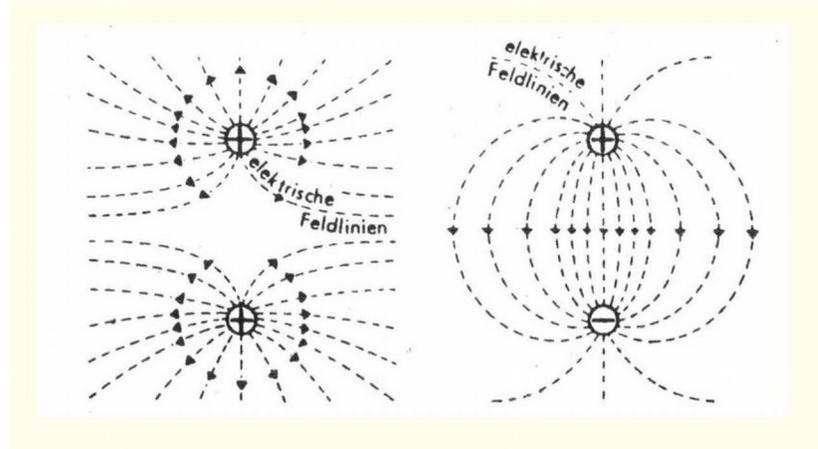


Abbildung 42: exemplarischer Verlauf des elektrischen Feldes

3.2.4 Die vierte Maxwellsche Gleichung - Quellenfreiheit magnetischer Felder

In Textform

Magnetische Feldlinien divergieren nicht, das Feld der magnetischen Flussdichte ist quellenfrei; es gibt keine magnetischen Monopole.

In integraler Form:

$$\oint_{\partial V} B \, dA = 0$$

Die (elektrische) Zirkulation über der Randkurve ∂A einer Fläche A ist gleich der negativen zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses durch die Fläche.

In differentieller Form:

$$\operatorname{div} B = \nabla B = 0$$

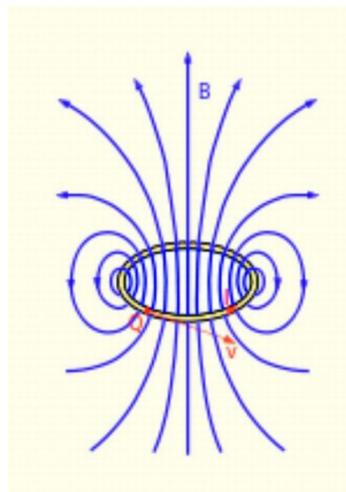


Abbildung 43: exemplarischer Verlauf des magnetischen Feldes

4 Abkürzungsverzeichnis

\vec{B}	magnetische Flussdichte, Induktion, magnetisches Feld
\vec{D}	Elektrische Flussdichte
\vec{E}	elektrische Feldstärke
H	die Maßeinheit Henry $1H = \frac{Vs}{A}$
\vec{H}	Magnetische Feldstärke
I	der elektrische Strom, der eine magnetische Feldstärke erzeugt
j_{ext}	j extended - Stromdichte im weitestgehenden Sinne
L	die Induktivität, auch umgangssprachlich Spule genannt
μ_0	absolute Permeabilität, eine Naturkonstante - magnetische Durchlässigkeit der Materie
μ_r	relative Permeabilität, der Bezug erfolgt auf das Vakuum mit $\mu_r = 1$
M	das Drehmoment
MMK	Magneto Motorische Kraft - das Magnetfeld ist die Quelle der Motorik
n, N	Anzahl der Wicklungen einer Spule, Faktor für die Wirkung des Stroms
∇	der mathematische Operator Nabla $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z$
Φ	Phi - magnetischer Fluss $\Phi = \frac{\Theta}{R_{mag}}$
Ψ	Psi - Verschiebungsfluss im stationären elektrischen Feld
ρ	Rho - das Ladungsvolumen
r	der Radius
R_{mag}	magnetischer Widerstand $R_{mag} = \frac{1}{\mu_0} \frac{l}{A}$
s	der Weg entlang einer betrachteten Fläche (die Umrandung) - bei Weg-/Linienintegralen von Bedeutung
\vec{S}	Stromdichte
T	Maßeinheit Tesla - $1T = \frac{Vs}{m^2}$; die Maßeinheit für die magnetische Flussdichte
Θ	magnetische Ursprung $\Theta = n \cdot \Phi$, n entspricht der Anzahl der Wicklungen der Spule
V_{AB}	magnetische Spannung $V_{AB} = \Phi \cdot R_{mag}$
Wb	Maßeinheit Weber - $1Wb = 1 Vs$; die Maßeinheit für den magnetischen Fluss Φ

5 Literaturverzeichnis, Quellennachweis

- Lit.-Ref.1** Küpfmüller, K.; „Einführung in die theoretische Elektrotechnik“; Springer Verlag
- Lit.-Ref.2** Lunze, K.; Wagner, E.; „Einführung in die Elektrotechnik“; Verlag Technik Berlin
- Lit.-Ref.3** Lunze, K.; „Einführung in die Elektrotechnik“; Verlag Technik Berlin
- Lit.-Ref.4** Bronstein, I.N.; Semendjajew, K.A.; „Taschenbuch der Mathematik“; Verlag Harri Deutsch Frankfurt a.M.
- Lit.-Ref.5** Wikipedia - 2012; Stichwort „James Clerk Maxwell“
- Lit.-Ref.6** Wikipedia - 2012; Stichwort „André-Marie Ampère“
- Lit.-Ref.7** Wikipedia - 2012; Stichwort „Hysterese“
- Lit.-Ref.8** vgl. Bild 10.1.1. in Liao, Dourmashkin, Belcher [2004, S. 10.2]
- Lit.-Ref.9** vgl. Bild 10.4.1. in Liao, Dourmashkin, Belcher [2004, S. 10.12]
- Lit.-Ref.10** Greuel, O.; „Mathematische Ergänzungen und Aufgaben für Elektrotechniker“; Fachbuchverlag