

Berechnung und Tunnelspektroskopie
der Landau-Bandstruktur
zweier lateral gekoppelter
Quanten-Hall-Systeme
mit variablem Fermi-Niveau



DISSERTATION

zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.)

der Naturwissenschaftlichen Fakultät II
– Physik –
der Universität Regensburg

vorgelegt von
MATTHIAS HABL
aus Zwiesel

2006

Promotionsgesuch eingereicht am 28. Nov. 2006.

Promotionskolloquium am 15. Feb. 2007.

Die Arbeit wurde angeleitet von Prof. Dr. Werner Wegscheider.

Prüfungsausschuß:

Vorsitzender:	Prof. Dr. Andreas Schäfer
1. Gutachter:	Prof. Dr. Werner Wegscheider
2. Gutachter:	Prof. Dr. Dieter Weiss
weiterer Prüfer:	Prof. Dr. Dietmar Göritz



Inhalt

Verzeichnis der Symbole	v
Einleitung	1
1 Landau-Bandstruktur	5
1.1 Grundlagen	6
1.1.1 Elektronentransport in zwei Dimensionen	6
1.1.2 Hall-Effekt	8
1.2 Quantenmechanische Beschreibung	11
1.2.1 Effektive-Masse-Näherung	12
1.2.2 Schrödinger-Gleichung	14
1.2.3 Elektronenimpuls, Kreiswellenzahl und Leitzentrum	18
1.2.4 Kristallimpulserhaltung	21
1.3 Allgemeine Lösung der Schrödinger-Gleichung	23
1.3.1 Lösungsspektrum	23
1.3.2 Parabolische Zylinderfunktionen	26
1.3.3 Teilwellenfunktion	29
1.3.4 Stetigkeitsbedingungen	31
1.3.5 Gleichungssystem	32
1.4 Unendlich hohes Randpotential	34
1.4.1 Bandstruktur	34
1.4.2 Grenze zwischen Volumen- und Randzuständen	35
1.4.3 Ansatz von MacDonald und Středa	37
1.4.4 Näherungsformeln	38
1.5 Endlich hohes Randpotential	40
1.5.1 Bandstruktur	41
1.5.2 Antikreuzungen	42
1.5.3 Chklovskii-Bild	45
1.6 Zusammenfassung	47
2 Bandstruktur an einer Tunnelbarriere	49
2.1 Eigenwertproblem	49
2.2 Lösungsverfahren	51
2.3 Starke Kopplung	56
2.4 Schwache Kopplung	58
2.4.1 Bandstruktur	58
2.4.2 Näherung für Antikreuzungen	60
2.4.3 Wellenfunktionen	62
2.5 Beispielsysteme	64
2.6 Tight-Binding-Methode	67
2.7 Zusammenfassung	68

3 Theorie zum Tunneltransport	69
3.1 Mischung von Landau-Zuständen	69
3.1.1 Entstehungsprinzip der Landau-Oszillationen	70
3.1.2 Füllfaktor <i>vs.</i> Energieskala	72
3.1.3 Vergrößerung der Landau-Bandlücken	74
3.1.4 Äquidistanz der Antikreuzungen	77
3.2 Tunnelzentren und Quanteninterferenz	78
3.2.1 Kopplung durch ein einzelnes Tunnelzentrum	79
3.2.2 Aharonov-Bohm-Effekt an Tunnelzentren	80
3.3 Zusammenfassung	83
4 Experiment und Auswertung	85
4.1 Probedesign und -herstellung	85
4.2 Verschaltung und Meßtechnik	88
4.3 Vergleich mit der Struktur von Kang <i>et al.</i>	91
4.4 Elektronendichte und interne Vorspannung	93
4.5 Leitwertüberhöhung	96
4.6 Interferenzeffekte	98
4.6.1 AB-Effekt am Leitwertmaximum	99
4.6.2 Leitwertoszillationen bei kleinen Magnetfeldern	107
4.7 Landau-Oszillationen	112
4.7.1 Position der Leitwertspitzen und Spinentartung	112
4.7.2 Magnetfeldabhängige Anhebung der Bandlücken	116
5 Halbleitertechnologische Aspekte	123
5.1 Ovale Defekte	123
5.1.1 Morphologie	124
5.1.2 Einfluß der Effusionszelle	128
5.2 Dotierung mit Silizium	131
5.3 Ätzen mit Phosphorsäure	135
5.4 Initialspalt	138
Zusammenfassung	141
A Integrale mit Parabolischen Zylinderfunktionen	147
B Elektronenimpuls	151
C ³Helium-System	155
Literaturverzeichnis	157
Index	165
Danksagung	169

Verzeichnis der Symbole

Symbol	Auftreten	Beschreibung
β_{nk}	Gl. 1.53	Gewichtungsverhältnis von $D_\varepsilon(-\xi\sqrt{2})$ und $D_\varepsilon(\xi\sqrt{2})$ in φ_{nk}
D_ε	Abschnitt 1.3.2	Parabolische Zylinderfunktion
e	—	Elementarladung, $e > 0$
E_{nk}	Gl. 1.22	Energieeigenwert im n -ten Landau-Band
ε_{nk}	Gl. 1.23	dito, dimensionslos
k	Abschnitt 1.2.3	Kreiswellenzahl
ℓ	Gl. 1.19	Magnetische Länge
m^*	Gl. 1.13	Effektive Masse
n	Abschnitt 1.3.1	Bandindex, $n \in \mathbb{N}$
n	Abschnitt 1.1.1	Elektronendichte
n_\square	Abschnitt 1.1.1	dito, zweidimensional
\mathbb{N}	—	Menge der positiven ganzen Zahlen einschließlich Null
ν	Gl. 1.35	Füllfaktor
ξ	Gl. 1.26	Ortsvariable, Abstand zu X in Einheiten von ℓ
s	Gl. 1.34	Anzahl Zustände pro Landau-Band und Flächeneinheit
U_g	Abb. 4.2	Steuerspannung
V	Abb. 1.2	Potential, Leitungsbandverlauf am Γ -Punkt
v	Gl. 1.23	dito, dimensionslos
V_{bias}	Abschnitt 4.4	(interne) Vorspannung
x	Abb. 2.1a	Ortsvariable
X	Gl. 1.30	Leitzentrum auf der x -Achse
y	Abb. 2.1a	Ortsvariable
φ_{nk}	Gln. 1.27 u. 1.41	Wellenfunktion, in x -Richtung gebundener Zustand
ψ_{nk}	Gl. 1.21	Wellenfunktion in Abhängigkeit von x und y
ω_c	Gln. 1.8 u. 1.24	Zyklotronfrequenz

Einleitung

In einem zweidimensionalen Elektronensystem im senkrechten Magnetfeld steigt die Energie der Landau-Niveaus [Lan30] zum Probenrand hin an. Diese Landau-Bandverbiegung wird in der Literatur eingehend behandelt [Hal82, Mac84], da sie den Schlüssel zum Verständnis des Quanten-Hall-Effekts [Kli80] darstellt. Wenn die laterale Ausdehnung des betreffenden Elektronensystems durch elektrostatische Einschränkung oder durch die physische Grenze der (lithographisch hergestellten) Struktur bestimmt wird, ist das Randpotential nicht scharf definiert, sondern es steigt auf einer Längenskala an, die deutlich größer als die magnetische Länge ist [Chk92]. Abhängig von der Steigung des Leitungsbandverlaufs, der zusätzlich durch das Störpotential lokaler Defekte beeinflusst wird, variiert der Abstand der Randkanäle, die an der Fermi-Kante entlang von Äquipotentiallinien laufen. Während diese räumlichen Fluktuationen beispielsweise ohne jeden Einfluß auf den quantisierten Hall-Widerstand sind, stellen sie ein Hindernis für impuls aufgelöste Tunnelspektroskopie an Randzuständen dar.

Scharf definierte Potentialstufen können nur mittels Epitaxie hergestellt werden. Bei GaAs/Al_xGa_{1-x}As-Heteroübergängen ist eine Präzision von bis zu einer halben Gitterkonstante möglich. Ein prinzipielles Problem besteht allerdings darin, daß das zu modulierende zweidimensionale Elektronensystem und eine etwaige Barrierenschicht zueinander senkrecht stehen müssen. Eine solche Anordnung kann mit einer von Pfeiffer *et al.* etablierten, speziellen Wachstumstechnik realisiert werden. Dabei wird eine unidirektionale Heterostruktur durch einen zweiten Wachstumsschritt auf einer atomar glatten Spaltfläche in einer zweiten Richtung erweitert [Pfe90]. Anstatt mit dieser Methode das Randpotential zu definieren, haben Kang *et al.* eine 88 Å breite AlGaAs-Barriere inmitten eines zweidimensionalen Elektronensystems gesetzt [Kan00a]. Die vorliegende Arbeit basiert auf einer Modifikation dieser Struktur [Hab06], die anstelle der Modulationsdotierung eine Steuerelektrode zur Induktion der gekoppelten Elektronensysteme beinhaltet (Abb. 0a).

Im Bereich einer dünnen Barriere bildet sich eine komplexe Landau-Bandstruktur aus (Abb. 0b). Wenn die getrennten Elektronensysteme nur schwach gekoppelt sind, läßt sich diese näherungsweise als Überlagerung der spiegelverkehrten Dispersionen beider Systeme beschreiben. Zur Vermeidung von Entartung existieren an den Kreuzungspunkten Landau-Bandlücken, die einen maßgeblichen Einfluß auf das magnetfeldabhängige Verhalten des Tunnelstroms haben. Der Leitwert der gekoppelten Elektronensysteme nimmt ein Maximum an, wenn das Fermi-Niveau in eine der Bandlücken eintritt. Diese Eigenschaft bildet die Grundlage für eine tunnelspektroskopische Untersuchung der Landau-Bandstruktur durch Variation des Magnetfelds [Kan00a].

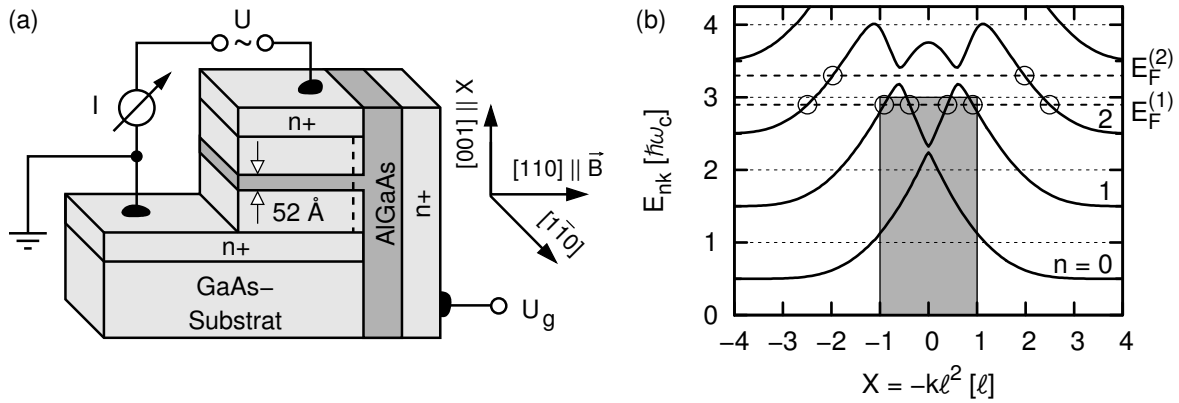


Abb. 0. (a) Schemazeichnung der verwendeten Probenstruktur. Mittels einer positiven Steuerspannung U_g wird ein zweidimensionales Elektronensystem (gestrichelt) induziert, das durch eine dünne Tunnelbarriere unterbrochen ist. (b) Beispiel einer Landau-Bandstruktur im Bereich einer niedrigen Barriere (stark gekoppelte Elektronensysteme). Wenn das Fermi-Niveau von $E_F^{(1)}$ auf $E_F^{(2)}$ ansteigt, verschwinden entlang der Barriere (grau unterlegt) vier Randkanäle (durch Kreise gekennzeichnet).

Während bei fest eingestellter Elektronendichte eine bestimmte Bandlücke nur für ein sehr kleines Intervall der magnetischen Flußdichte mit dem Fermi-Niveau übereinstimmt, besteht in den Proben dieser Arbeit durch die Kontrolle über die Elektronendichte die Möglichkeit, eine Bandlücke bei verschiedenen Magnetfeldern zu spektroskopieren. Anstatt mehrere Proben mit unterschiedlich dicker Tunnelbarriere zu präparieren, kann so die effektive Form der Barriere (in Einheiten der magnetischen Länge ℓ und der Zyklotron-Energie $\hbar\omega_c$) mit Hilfe des Magnetfelds variiert werden. Um dabei das Fermi-Niveau im Bereich der zu untersuchenden Bandlücke zu belassen, wird der Füllfaktor im wesentlichen konstant gehalten. Verschiedene Elektronendichten mit einer einzelnen Probe zu realisieren, hat weiterhin den Vorteil, daß das Problem von unvermeidbaren Fluktuationen zwischen aufeinanderfolgenden Wachstumsprozessen bei der Auswertung der Messungen keine Rolle spielt. Dieser Punkt ist in dieser Arbeit von entscheidender Bedeutung, wenn der kleine Effekt der magnetfeldabhängigen Verschiebung der Bandlücken auf der Skala der Zyklotron-Energie untersucht wird oder wenn Quanteninterferenzen aufgrund von zufällig in der Barriere entstandenen Tunnelzentren für verschiedene Elektronendichten betrachtet werden.

Die Auswertung der Experimente gründet auf Landau-Bandstrukturen, die im theoretischen Teil dieser Arbeit berechnet werden. Kapitel 1 diskutiert zunächst die allgemeine Lösung der Schrödinger-Gleichung für ein Elektron, das sich senkrecht zum Magnetfeld in einem unidirektionalen, stufenförmigen Potential bewegt. Eine analytische Lösung des Problems ist durch die Verwendung von Parabolischen Zylinderfunktionen für die Darstellung der Wellenfunktionen möglich. Durch prinzipielle Überlegungen und anhand von Beispielsystemen werden die relevanten Eigenschaften von Landau-Bandstrukturen sowie der zugehörigen Elektronenzustände erarbeitet. Aus dem Eigenwertproblem der Schrödinger-Gleichung und den Stetigkeitsbedingungen an den Heteroübergängen der Halbleiterstruktur ergibt sich ein hochgradig nichtlineares Gleichungssystem, durch das Energiespektrum und Wellenfunktionen bestimmt sind.

Kapitel 2 stellt ein numerisches Lösungsverfahren für dieses Gleichungssystem vor. Es liefert die exakte Einteilchen-Bandstruktur für ein System mit bis zu zwei Heteroübergängen. Neben der Beispielanwendung für einen Quantendraht wird die Landau-Bandstruktur eines Elektronensystems berechnet, das lateral durch eine Tunnelbarriere unterbrochen ist, wobei die Fälle einer starken bzw. schwachen Kopplung der Teilsysteme behandelt werden. Im Hinblick auf die experimentellen Möglichkeiten erfolgt eine detaillierte Diskussion der Dispersionen von schwach gekoppelten Systemen, die auch mit den Ergebnissen anderer Arbeiten, deren Modelle Näherungen beinhalten, verglichen werden.

Die erste Hälfte des Kapitels 3 stellt den Zusammenhang zwischen der Landau-Bandstruktur und den Leitwertmessungen für den Tunnelstrom her. Während die grundsätzliche Struktur der magnetfeldabhängigen Leitwertkurven anhand der Bandstruktur zu verstehen ist, eignet sich zur Erklärung von Details das alternative Modell von Kim und Fradkin besser [Kim03a, Kim03b]. Dieses basiert auf der Annahme von Tunnelzentren in der Barriere und wird in der zweiten Hälfte des Kapitels erläutert. Die Tunnelzentren führen im Sinne des Aharonov-Bohm-Effekts zur Interferenz der in gegenüberliegenden Randkanälen entgegengesetzt propagierenden Elektronen.

Zu Beginn von Kapitel 4 werden das verwendete Probenesign und die sich daraus ergebenden Besonderheiten diskutiert. Der Rest des Kapitels widmet sich der eingehenden Analyse der magnetfeldabhängigen Leitwertkurven. In bezug auf den Aharonov-Bohm-Effekt an Tunnelzentren, der erstmals von Kang *et al.* nachgewiesen wurde [Yan05], konzentriert sich die vorliegende Arbeit auf Aspekte der Phasenkohärenz, auf langperiodische und irreguläre Anteile in den Leitwertoszillationen sowie die Bestimmung des Abstands der Tunnelzentren unter Berücksichtigung der Landau-Bandstruktur. Außerdem werden quasiperiodische Oszillationen im Detail diskutiert, die ausschließlich im Bereich kleiner Magnetfelder auftreten. Neben der Untersuchung kurzperiodischer Oszillationen wird als zweiter experimenteller Schwerpunkt die Position der Leitwertmaxima in Abhängigkeit der Elektronendichte analysiert. Das Hauptaugenmerk liegt dabei auf der magnetfeldabhängigen Position der korrespondierenden Landau-Bandlücken auf der Skala der Zyklotron-Energie.

Kapitel 5 diskutiert ausgewählte Aspekte der Probenherstellung. Ausführlich wird auf die Reduktion der Dichte an ovalen Defekten beim Wachstum hochbeweglicher Proben eingegangen. Im Zentrum des Interesses stehen ferner die reproduzierbare Volumendotierung mit Silizium, die Erzielung präziser Ätzraten für AlGaAs bei unterschiedlich hoher Prozeßtemperatur sowie die Herstellung eines idealen Initialdefekts bei der Methode des Überwachens von Spaltflächen.

Die erzielten theoretischen und experimentellen Ergebnisse werden am Ende der Arbeit zusammengefaßt. Im Anhang findet sich die analytische Berechnung der quantenmechanischen Erwartungswerte für Ort und Impuls.

Kapitel 1

Landau-Bandstruktur

Die Bewegung des freien Elektrons senkrecht zu einem Magnetfeld B und im konstanten elektrostatischen Potential zählt zu den quantenmechanischen Problemen, die analytisch und ohne Näherung lösbar sind. Das Einteilchensystem kann dabei in exakter Weise auf das mathematische Modell des harmonischen Oszillators zurückgeführt werden. Die Zustände des zweidimensionalen Elektronensystems (2DES) kondensieren in den vielfach entarteten Landau-Niveaus: Jedes Niveau der Energie $E_n = (n + \frac{1}{2}) \hbar\omega_c$ besitzt für jede Spinart $s = eB/h$ entartete Zustände pro Flächeneinheit.

Viele Phänomene, allen voran der Quanten-Hall-Effekt und auch die in dieser Arbeit durchgeführte Magnetotunnelspektroskopie an dünnen Barrieren, beruhen auf der teilweisen Aufhebung der Entartung der Landau-Niveaus. Bei Annäherung an das Randpotential, welches das Elektronensystem einschließt, oder an eine Potentialerhebung im Inneren der Struktur nimmt die Energie der Landau-Zustände quasi-kontinuierlich zu. In der Gegenwart von Potentialvariationen verbreitern sich die Landau-Niveaus also zu Landau-Bändern. Die Lokalisierung der Elektronen im magnetischen Einschlußpotential macht es möglich, die Energiedispersion statt im reziproken Raum auch im Ortsraum aufzutragen, wodurch ein direkter Vergleich der Dispersion mit dem Leitungsbandverlauf in der Heterostruktur möglich ist. Die Bandstruktur weist in der Umgebung von Potentialstufen ein oszillatorisches Verhalten auf, das in der Welligkeit der Eigenfunktionen begründet ist. Nur Volumenzustände, also Elektronen, die nicht unter dem Einfluß einer Potentialvariation stehen, können durch die Lösungen des harmonischen Oszillators beschrieben werden. Bei nicht konstantem Potential ist eine analytische Lösung der Schrödinger-Gleichung hingegen nur unter bestimmten Voraussetzungen möglich.

Zur Einführung in die Thematik der Bewegung von Elektronen in gekreuzten elektrischen und magnetischen Feldern behandelt dieses Kapitel zu Beginn die klassischen Eigenschaften eines Elektronensystems mit und ohne Magnetfeld. Unter gelegentlichen Rückgriffen auf das anschauliche Bild eines semiklassischen Elektrons wird im folgenden die allgemeine quantenmechanische Beschreibung eines Quanten-Hall-Systems im Einteilchenbild entwickelt. In der Systemebene wird dabei das zugrundeliegende, durch den Leitungsbandverlauf bestimmte Potential in der einen Richtung als konstant und in der anderen als abschnittsweise konstant vorausgesetzt. Neben der exakten Lösung der Schrödinger-Gleichung unter Verwendung der

Parabolischen Zylinderfunktionen stehen die allgemeinen Eigenschaften des zugehörigen Eigenwertspektrums im Mittelpunkt der Ausführungen. Die Bestimmung der Eigenzustände wird auf ein hochgradig nichtlineares Gleichungssystem zurückgeführt, das sich aus den Stetigkeitsbedingungen an den Grenzflächen der Heterostruktur ergibt. Anhand zweier Beispiele, nämlich der Landau-Bandstruktur in der Umgebung eines unendlich bzw. endlich hohen Randpotentials, werden wichtige Eigenschaften der dispersiven Landau-Zustände an Potentialstufen erarbeitet und so die Voraussetzungen für die eingehende Behandlung einer dünnen Tunnelbarriere im darauffolgenden Kapitel geschaffen.

1.1 Grundlagen

Im ersten Teil dieses Abschnitts werden die grundlegenden Größen und Zusammenhänge für den lateralen Stromtransport in Schichtsystemen dargestellt. Die Gültigkeit der Darstellung beschränkt sich nicht auf zweidimensionale Elektronensysteme, sondern sie umfaßt auch Schichten mit makroskopischer Dicke. Der zweite Teil des Abschnitts geht kurz auf den klassischen Hall-Effekt ein, der nicht nur den Ausgangspunkt für die später folgende quantenmechanische Beschreibung bildet, sondern auch eine wichtige Charakterisierungsmethode für Halbleiterstrukturen (z. B. Abschnitt 5.2) darstellt.

1.1.1 Elektronentransport in zwei Dimensionen

Im Zentrum der Betrachtung steht eine leitende, ausgedehnte Schicht der Dicke d . Obschon der elektrische Leiter in alle drei Raumrichtungen gleichermaßen ausgedehnt sein kann, wird hier nur der Transport in der xy -Ebene behandelt. Da Lochleitung bei den später vorgestellten Experimenten keine Rolle spielt, beschränkt sich die Darstellung weiterhin auf Elektronen. Während in den beiden Transportrichtungen Homogenität vorausgesetzt wird, kann die Schicht in z -Richtung heterogen – beispielsweise als Übergitter – ausgebildet sein. Die z -Abhängigkeit der dreidimensionalen Größen wird jedoch nicht explizit berücksichtigt. Vielmehr erfolgt weiter unten der Übergang zu zweidimensionalen Größen, die durch Mittelung über die z -Koordinate erhalten werden und durch das Symbol \square gekennzeichnet sind.

Werden Elektronen im elektrischen Feld \mathbf{E} beschleunigt, so stellt sich aufgrund der Streuung an Störstellen und Phononen eine endliche mittlere Geschwindigkeit, die sog. Driftgeschwindigkeit v_D , ein. Bei ohmschen Leitern oder hinreichend kleinen elektrischen Feldern ist diese proportional zu E :

$$\mathbf{j} = -en\mathbf{v}_D = en\mu\mathbf{E} = \sigma\mathbf{E}. \quad (1.1)$$

Hierbei bezeichnet n die dreidimensionale Elektronendichte des Leiters und $e > 0$ ist die Elementarladung. Die Beweglichkeit $\mu = v_D/E$ gibt an, wie schnell sich die Elektronen pro Einheit der Feldstärke durch das System bewegen. Sie stellt somit (bei tiefen Temperaturen) ein Maß für die Kristallqualität dar. Die Größe σ verknüpft als spezifischer Leitfähigkeitstensor die Stromdichte \mathbf{j} mit dem elektrischen Feld. Bei einem ohmschen Leiter ist σ von \mathbf{E}

unabhängig. Die Abhängigkeit von der magnetischen Flußdichte B wird in Abschnitt 1.1.2 behandelt. Durch Fallenlassen der z -Koordinate reduziert sich (1.1) auf

$$\begin{pmatrix} \dot{j}_x \\ \dot{j}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}.$$

In vielen Fällen ist der betrachtete Leiter isotrop, das heißt, die Orientierung des elektrischen Feldes bezüglich der Kristallachsen hat keinen Einfluß auf den Leitfähigkeitstensor. Die Matrix σ vermittelt dann nur eine Drehstreckung in der xy -Ebene, wobei der Drehwinkel Θ und der Streckfaktor σ_0 nicht von \mathbf{E} abhängen. Der Leitfähigkeitstensor kann deshalb auf eindeutige Weise als

$$\sigma = \sigma_0 \begin{pmatrix} \cos \Theta & -\sin \Theta \\ \sin \Theta & \cos \Theta \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

mit $\Theta \in [0, 2\pi[$ und $\sigma_0 > 0$ geschrieben werden [Fis86]. Die Drehmatrix $\hat{\sigma} := \sigma/\sigma_0$ ist invertierbar (regulär) und insbesondere orthogonal. Es gilt daher $\hat{\sigma}^{-1} = \hat{\sigma}^T$, woraus $\sigma_{xx} = \sigma_{yy}$ (diagonale Leitfähigkeit) und $\sigma_{xy} = -\sigma_{yx}$ (transversale Leitfähigkeit) folgt. Der spezifische Widerstandstensor, der durch $\mathbf{E} = \rho \mathbf{j}$ definiert ist, lautet entsprechend

$$\rho = \frac{1}{\sigma_0} \begin{pmatrix} \cos \Theta & \sin \Theta \\ -\sin \Theta & \cos \Theta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sigma_0^2} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & -\sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{xx} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} \sigma_0^2 &= \sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2, \\ \tan \Theta &= -\sigma_{xy}/\sigma_{xx}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Wenn nur der Transport in der xy -Ebene betrachtet wird, ist es zweckmäßig, zweidimensionale Größen einzuführen. Während beim elektrischen Feld einfach die z -Komponente weggelassen werden kann, müssen die Stromdichte und der spezifische Leitfähigkeits- bzw. Widerstandstensor unter Berücksichtigung der Schichtdicke umgerechnet werden:

$$\mathbf{E}_\square := \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}; \quad \mathbf{j}_\square := d \begin{pmatrix} \dot{j}_x \\ \dot{j}_y \end{pmatrix}; \quad \rho_\square := \frac{1}{d} \begin{pmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} \\ \rho_{yx} & \rho_{yy} \end{pmatrix}.$$

Das Ohmsche Gesetz bleibt dabei formal unverändert:

$$\mathbf{E} = \rho \mathbf{j} \quad (3D) \quad \rightarrow \quad \mathbf{E}_\square = \rho_\square \mathbf{j}_\square \quad (2D).$$

Die Größe ρ_\square ist für einen isotropen Leiter ohne äußeres Magnetfeld ein Skalar und wird als Flächen- oder Schichtwiderstand bezeichnet. Der Widerstand einer rechteckigen Schicht der Länge l und der Breite b beträgt $R = \rho_\square l/b$, wenn der Meßstrom über zwei elektrische Kontakte eingepreßt wird, die sich über die gesamte Breite der Probe erstrecken. Insbesondere gilt $R = \rho_\square$ für ein quadratisches Probenstück.

Der transversale Widerstand R_{yx} ist durch den Spannungsabfall V_y an zwei Potentialsonden gegeben, deren Verbindungslinie senkrecht zur Transportrichtung des Stroms I_x steht. Bei einem Abstand L_y der beiden Elektroden und einer homogenen Stromdichte j_x^\square gilt unter der Annahme einer stromlosen Spannungsmessung ($j_y^\square = 0$)

$$R_{yx} = \frac{V_y}{I_x} = \frac{E_y L_y}{j_x^\square L_y} = \frac{E_y}{j_x^\square} = \frac{\rho_{yx} j_x^\square + \rho_{yy} j_y^\square}{j_x^\square} = \rho_{yx}^\square. \quad (1.4)$$

Der vorteilhafte Umstand, daß die Komponente ρ_{yx}^{\square} des spezifischen Widerstandstensors und die meßtechnisch zugängliche Größe R_{yx} identisch sind, ist eine Folge der Zweidimensionalität des Systems. Es sei bemerkt, daß im Quanten-Hall-Regime bei verschwindendem ρ_{xx}^{\square} für die Gültigkeit von $R_{yx} = \rho_{yx}^{\square}$ zudem die Voraussetzung des direkten Gegenüberliegens der Potentialsonden wegfällt. Diese Unabhängigkeit von der Probengeometrie begründet die große Bedeutung des Quanten-Hall-Effekts in der Metrologie [Kli80, PTB98]. Für den in Vierpunktgeometrie gemessenen longitudinalen Widerstand gilt $R_{xx} = \rho_{xx}^{\square} L_x / L_y$, wobei L_x der Abstand der Potentialsonden und L_y die Breite des Strompfades sind.

Die Flächendichte n_{\square} der Elektronen ergibt sich durch Integration über die dreidimensionale Dichte: $n_{\square} = \int n(z) dz$. Der Hall-Effekt (nächster Abschnitt) ermöglicht einen direkten experimentellen Zugang zur Flächendichte. Wenn zudem der Schichtwiderstand¹ bekannt ist, kann die Beweglichkeit (Gl. 1.1)

$$\mu = \frac{\sigma}{en} = \frac{1}{en\rho} = \frac{1}{en_{\square}\rho_{\square}} = \frac{e\tau_m}{m^*} = \frac{eL_m}{\hbar k_F}, \quad (1.5)$$

berechnet werden, wobei für diese Formel ein isotropes Medium vorausgesetzt wird. Die Kenntnis der Schichtdicke ist zur Bestimmung der Beweglichkeit nicht notwendig. Den vorletzten Ausdruck in (1.5) erhält man für eine parabolische Dispersion, wobei τ_m die Impulsrelaxations- oder Impulsstreuzeit an der Fermi-Kante [Kop02] und m^* die effektive Masse (Abschnitt 1.2.1) sind. Der letzte Ausdruck formuliert die Beweglichkeit in Abhängigkeit der mittleren freien Weglänge L_m und des Betrags k_F des Fermi-Vektors. Es gilt $L_m = v_F \tau_m$, wobei $v_F = \hbar k_F / m^*$ die Fermi-Geschwindigkeit (Gl. 1.28) ist [Dat97].

Abschließend wird die zweidimensionale Zustandsdichte des Schichtsystems betrachtet. Eine Einschränkung des Elektronensystems in z -Richtung führt zur Ausbildung von Subbändern, die jeweils die Zustandsdichte $D(E)$ aufweisen. In der Effektive-Masse-Näherung (Abschnitt 1.2.1) und ohne externes Magnetfeld existieren $m^*/2\pi\hbar^2$ Zustände pro Energie- und Flächeneinheit. Die Berücksichtigung einer etwaigen Spinartung führt zu

$$D(E) = \frac{m^*}{\pi\hbar^2}; \quad n_{\square} = \int_0^{E_F} D(E) dE = \frac{k_F^2}{2\pi}; \quad E_F \approx \frac{n_{\square}}{10^{11} \text{ cm}^{-2}} \cdot \frac{0,239 \text{ meV}}{m^*/m_0}. \quad (1.6)$$

Die beiden letzten Gleichungen geben den Zusammenhang zwischen der Flächendichte n_{\square} und dem Fermi-Vektor \mathbf{k}_F bzw. dem Fermi-Niveau E_F wieder.

1.1.2 Hall-Effekt

Edwin Hall stellte im Jahr 1879 die Hypothese auf, daß die Lorentz-Kraft nicht an einem Draht selbst, sondern nur an dem von ihm getragenen Strom angreift. Er erwartete folglich, daß die Ablenkung des Stroms (Elektronen waren noch nicht bekannt) zum Aufbau einer Potentialdifferenz V_y zwischen den gegenüberliegenden Seiten des Leiters führt. Nachdem

¹Der Schichtwiderstand kann beispielsweise in der van der Pauw-Methode, vgl. Abschnitt 5.2, bestimmt werden.

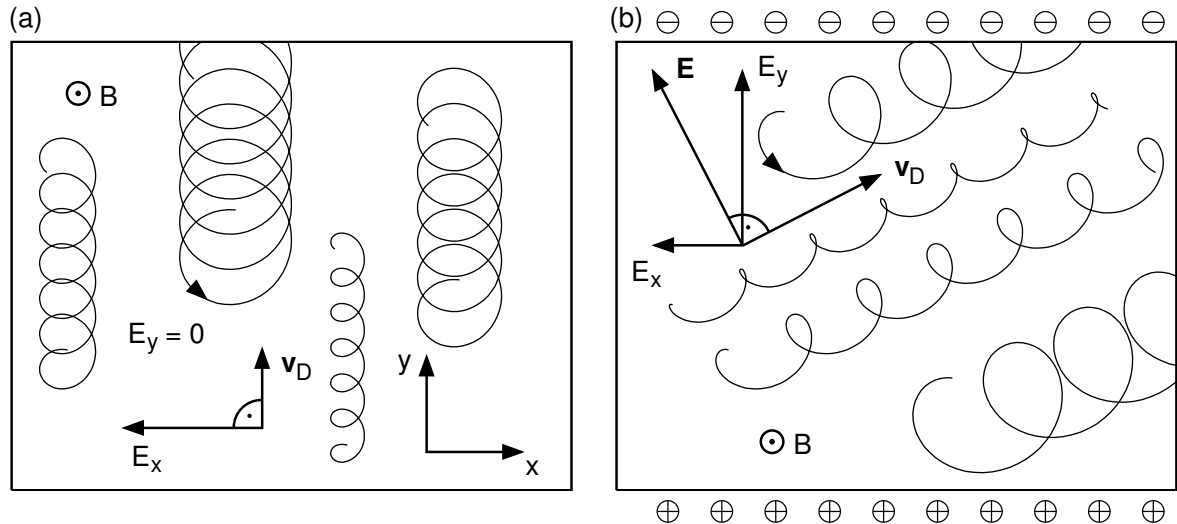


Abb. 1.1. Trajektorien von Elektronen im gekreuzten \mathbf{E} - und \mathbf{B} -Feld. In beiden Teilbildern ist die x -Komponente des elektrischen Feldes durch die in dieser Richtung angelegte Spannung gegeben. **(a)** Situation in einem unendlich ausgedehnten Elektronensystem. Das äußere elektrische Feld ist an der x -Achse ausgerichtet. **(b)** In einer realen, rechteckigen Probe akkumulieren die Ladungsträger an den zum äußeren elektrischen Feld E_x parallelen Rändern. Entsprechend baut sich eine endliche Feldkomponente E_y auf.

ein Versuch mit $250\ \mu\text{m}$ dickem Kupferblech fehlgeschlagen war, konnte Hall den nach ihm benannten Effekt an einer mit Blattgold überzogenen Glasscheibe nachweisen [Hal79].

Zur Bestimmung des spezifischen Widerstandstensors wird im folgenden die Bewegung eines Elektrons im gekreuzten elektrischen und magnetischen Feld betrachtet. Das elektrische Feld $\mathbf{E} = (E_x, E_y, 0)$ liegt in der Schichtebene und das Magnetfeld $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ steht senkrecht zu dieser. Die zuvor festgestellte Rotationssymmetrie (Gl. 1.2) des Systems bleibt durch die Einführung des Magnetfelds unbeschadet. Für die Bestimmung der Elektronenbahnen ist es unerheblich, ob \mathbf{E} nur durch das äußere Feld (Abb. 1.1a) oder zusätzlich durch eine etwaige Ladungstrennung (Abb. 1.1b) bestimmt ist. Vorerst wird dissipationsfreier Transport bzw. eine unendlich große Streuzeit (Gl. 1.5) vorausgesetzt. Im semiklassischen Transportmodell beschreibt $\hbar d\mathbf{k}/dt = \mathbf{F}$ die Bewegung eines Kristallelektrons im äußeren Kraftfeld \mathbf{F} . In Effektiver-Massen-Näherung (Abschnitt 1.2.1) erhält man mit $E(k) = \hbar^2 k^2 / 2m^*$ und $\mathbf{v} = \hbar^{-1} \nabla_{\mathbf{k}} E(\mathbf{k})$ die entsprechende Bewegungsgleichung im Ortsraum:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} m^* = -e \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{B} + \mathbf{E} \right).$$

Die Lösung dieses linearen Differentialgleichungssystems ist durch die Trajektorie

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r \sin(\omega_c t) + \frac{E_y}{B} t \\ r \cos(\omega_c t) - \frac{E_x}{B} t \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

gegeben. Die Elektronen bewegen sich also auf kreis- ($E = 0$) oder spiralförmigen ($E \neq 0$)

Bahnen. Die Winkelfrequenz ω_c des Umlaufs,

$$\boxed{\omega_c \equiv \frac{eB}{m^*}}; \quad \omega_c \approx 1,759 \cdot 10^{11} \text{ s}^{-1} \frac{B/1 \text{ T}}{m^*/m_e}, \quad (1.8)$$

bezeichnet man als Zyklotronfrequenz,² welche auch bei der quantenmechanischen Beschreibung eine maßgebliche Größe darstellt. Der oszillatorischen Bewegung der Elektronen ist eine lineare Drift überlagert, die bemerkenswerte Eigenschaften aufweist (Abb. 1.1): Trotz des elektrischen Feldes erfährt das Elektron im Mittel³ keine Beschleunigung und die Driftgeschwindigkeit $\mathbf{v}_D = \bar{\mathbf{v}}(t) = (E_y, -E_x, 0)/B$ ist für alle Elektronen unabhängig von ihrer kinetischen Energie gleich. Ferner verläuft die Drift genau senkrecht zum elektrischen Feld. Die mittlere³ kinetische Energie ist folglich eine Erhaltungsgröße: $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}m^*\bar{v}^2 = \frac{1}{2}m^*\omega_c^2 r^2 + \frac{1}{2}m^*E^2/B^2$. Der Radius r der Zyklotronbahn ist durch die Tangentialgeschwindigkeit v_c der Rotationsbewegung gegeben: $r = m^*v_c/eB$.

Das Elektronensystem aus Abb. 1.1a ist in der xy -Ebene unendlich ausgedehnt, weshalb keine Akkumulation von Ladungsträgern stattfinden kann. So ist das elektrische Feld nur durch die extern angelegte Spannung bestimmt: $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{ext}}$. Es besteht die paradoxe Situation, daß sich das System in Richtung des elektrischen Feldes wie ein Isolator verhält, daß also $\sigma_{xx} = 0 \stackrel{(1.3)}{=} \rho_{xx}$ gilt. Dagegen ist es in y -Richtung als idealer Leiter anzusehen, denn ohne treibendes Potentialgefälle fließt der Strom $j_y = \sigma_{yx}E_x$ mit $\sigma_{yx} \stackrel{(1.3)}{=} \rho_{yx}^{-1} = en/B$. Dieses Ergebnis für den spezifischen Widerstandstensor ist insofern nicht überraschend, als daß dissipationsloser Transport angenommen wurde. Ein Widerstandstensor mit verschwindender longitudinaler Komponente ist allerdings auch für eine reale Probe möglich, nämlich wenn diese sich im Quanten-Hall-Zustand befindet (vgl. auch [Sto83]).

Bisher wurde nicht berücksichtigt, daß in Proben mit endlichen Ausmaßen die Drift in y -Richtung eine Ladungstrennung bewirkt (Abb. 1.1b). Die mit der Akkumulation der Ladungsträger an den Rändern⁴ einhergehende Komponente E_y des elektrischen Feldes dreht die Driftgeschwindigkeit, weshalb nun auch Transport in Richtung des äußeren elektrischen Feldes stattfinden kann. Aus der Trajektoriengleichung (1.7) folgt, daß der Driftgeschwindigkeit $v_x = -j_x/en$ (Gl. 1.1) ein transversales Feld $E_y = v_x B$ entspricht. Da die laterale Kapazität der Schichtsysteme im allgemeinen sehr gering ist, kann das Hall-Feld E_y den Änderungen des Stroms nahezu instantan folgen.

Für das elektrische Feld und die Stromdichte bzw. die meßtechnisch zugänglichen Größen der Hall-Spannung und der Stromstärke gelten die Zusammenhänge

$$E_y = -\frac{1}{en}Bj_x = -A_H B j_x; \quad V_y = -\frac{1}{en_{\square}}BI_x. \quad (1.9)$$

²Wichtige Formeln, die für die *gesamte* Arbeit Geltung besitzen, werden mit einem Rahmen hervorgehoben.

³Hier ist eine zeitliche Mittelung gemeint, etwa: $\bar{f}(t) = \frac{\omega_c}{2\pi} \int_{t-\pi/\omega_c}^{t+\pi/\omega_c} f(t') dt'$.

⁴Die hier gewählte, verkürzte Darstellung ist zwar auch in der Literatur üblich, siehe z. B. [Ger93]. Es wird jedoch darauf hingewiesen, daß eine wie in Abb. 1.1b skizzierte, drahtartige Ladungsverteilung nicht zur Erreichung einer räumlich konstanten Feldkomponente E_y geeignet ist.

Die materialspezifische Konstante A_H wird in der Literatur wahlweise als Hall-Konstante oder Hall-Koeffizient bezeichnet. Aus der Abhängigkeit des Hall-Widerstands $R_H = V_y/I_x$ vom Magnetfeld, also aus der Steigung der Hall-Geraden, kann die zweidimensionale Elektronendichte des Systems bestimmt werden:

$$n_{\square} \stackrel{(1.9)}{=} -\frac{B}{eV_y/I_x} = -\frac{B}{eR_H} \approx \frac{B/1\text{ T}}{-R_H/1\text{ k}\Omega} 6,242 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}. \quad (1.10)$$

Der spezifische Widerstandstensor lautet dann wegen $R_H \stackrel{(1.4)}{=} \rho_{yx}^{\square}$

$$\rho_{\square} = \begin{pmatrix} \rho_{xx} & B/n_{\square}e \\ -B/n_{\square}e & \rho_{xx} \end{pmatrix}.$$

Das resultierende Feld $\mathbf{E} = (E_x, E_y, 0)$ schließt mit dem extern angelegten Feld $\mathbf{E}_{\text{ext}} = (E_x, 0, 0)$ den sog. Hall-Winkel Θ_H ein, für den $\tan(\Theta_H) = E_y/E_x = -\mu B$ gilt. Die Stromdichte \mathbf{j} steht senkrecht auf \mathbf{E} und in einem Winkel $\arctan(1/\mu B)$ zu \mathbf{E}_{ext} . Die Größe μB stellt auch ein wichtiges Kriterium dafür dar, inwieweit Quanteneffekte auftreten können. Eine Selbstinterferenz der Elektronen ist nur möglich, wenn die Teilchen im Mittel mindestens etwa einen vollständigen Orbit durchlaufen können, ohne bei einem Streuprozess eine zufällige Impuls- oder Phasenänderung zu erfahren. Mit der Streuzzeit τ lautet die Bedingung für Quanteninterferenz also

$$\omega_c \tau \gtrsim 2\pi \quad \iff \quad \mu B \gtrsim 2\pi, \quad (1.11)$$

wobei die Äquivalenz der beiden Ungleichungen durch die Beziehungen (1.5) und (1.8) gegeben ist.

Der Hall-Widerstand $R_H = -B/en_{\square}$ ist nur durch die Elektronendichte und nicht durch die Transporteigenschaften (Streuzzeit, effektive Masse) des Materials bestimmt. Die Realisierung eines Widerstandsnormal [Kli80, PTB98] wird im Regime des Quanten-Hall-Effekts möglich, wenn in den Bereichen der Hall-Plateaus die Abhängigkeit sowohl von der Elektronendichte als auch vom Magnetfeld außer Kraft gesetzt ist. Aus (1.9) wird klar, weshalb Halls anfänglicher Versuch mit dünnen Metallblechen fehlgeschlagen ist: die zweidimensionale Elektronendichte war zu hoch. Heute bestehen die besten Hall-Sensoren aus III-V-Halbleitern, die Strukturen mit geringer Elektronendichte und hoher Beweglichkeit erlauben, wobei letztere den Vorteil einer geringen Aufheizung des Bauteils ermöglicht.

1.2 Quantenmechanische Beschreibung

Die erste vollständige quantenmechanische Beschreibung freier Elektronen im Magnetfeld wurde 1930 von L. D. Landau durchgeführt.⁵ Die nach ihm benannte Quantisierung bedeutet, daß die (quasi-)kontinuierlichen Zustände von Elektronen bezüglich des Impulses senkrecht zum Magnetfeld in äquidistanten und vielfach entarteten Landau-Niveaus kondensieren.

⁵Originalarbeit: [Lan30]; Nachdruck in engl. Fassung in [Lan65b] und [Lan65a].

In diesem und den folgenden Abschnitten erfolgt die quantenmechanische Behandlung eines im Halbleiterkristall realisierten zweidimensionalen Elektronensystems, dessen Eigenschaften durch ein senkrechtes Magnetfeld und ein unidirektionales elektrostatisches Potential bestimmt sind. Letzteres wird später auf die allgemeine Form eines abschnittsweise konstanten Potentials und schließlich auf verschiedene zugehörige Spezialfälle eingeschränkt. In der Umgebung von Potentialvariationen ist die Entartung der Landau-Niveaus aufgehoben, d. h. letztere sind dispersiv. Durch Lösen der Schrödinger-Gleichung für ein einzelnes Elektron erhält man die Landau-Bandstruktur, aus der sich zusammen mit den zugehörigen Energieeigenfunktionen die wesentlichen physikalischen Eigenschaften eines modulierten Quanten-Hall-Systems ableiten lassen.

1.2.1 Effektive-Masse-Näherung

Halbleiterstrukturen stellen Vielteilchensysteme dar. Die enorme Zahl der Freiheitsgrade macht es unmöglich, die Schrödinger-Gleichung für das Gesamtproblem zu lösen. Üblicherweise wird stattdessen das System im Sinne einer Hartree-Näherung auf ein Einteilchenproblem reduziert. Die Lösung der Schrödinger-Gleichung für ein Elektron im homogenen und perfekten Kristall ergibt dann die Bandstruktur des jeweiligen Materials. Ist diese Aufgabe schon schwer zu bewältigen, so wäre es eine außerordentliche Herausforderung, wenn man bei der Bandstrukturrechnung auch Heteroübergänge oder ein externes Magnetfeld berücksichtigen wollte. Um das Problem wesentlich zu vereinfachen, kann jedoch unter bestimmten Voraussetzungen die sog. Effektive-Masse-Näherung (EMN) [Dav98, Bas96] angewendet werden. Diese Theorie, deren Gültigkeit noch Gegenstand aktueller Forschung ist [Har05], wird im folgenden im Hinblick auf die in dieser Arbeit untersuchten Systeme kurz dargestellt.

Die EMN stellt im Prinzip eine Störungsrechnung dar. Dabei werden Abweichungen vom perfekten Kristall, die z. B. durch Dotieratome oder Heteroübergänge hervorgerufen sind, als Störpotential in die Schrödinger-Gleichung für ein Elektron im ungestörten Kristall miteinbezogen. Die Energieeigenfunktionen $\Psi(\mathbf{r})$ des gestörten Systems werden durch Überlagerung von Blochfunktionen $\Phi_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ des zugrundeliegenden Kristalls dargestellt. Falls es sich bei den quasifreien Ladungsträgern der Struktur nur um Elektronen im Bereich eines Leitungsbandminimums am Γ -Punkt der Brillouinzone handelt, genügt bei der Aufstellung der Wellenfunktion die Berücksichtigung von Blochfunktionen in einer kleinen Umgebung von $\mathbf{k} = 0$. Wenn der Aluminiumanteil in $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ den Wert $x = 0,45$ übersteigt, wird die Bandlücke indirekt [Ada94] und in der EMN sind auch die X-Täler zu berücksichtigen. Für die weiter unten vorgestellten Strukturen ist dies wegen $x \leq 0,34$ jedoch nicht notwendig.

Für die Blochfunktionen gilt am Γ -Punkt näherungsweise $\Phi_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \approx \Phi_{n0}(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$, weshalb die Wellenfunktion des gestörten Systems auch als $\Psi(\mathbf{r}) \approx \Phi_{n0}(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})$ „entwickelt“ werden kann [Dav98]. Man bezeichnet $\psi(\mathbf{r})$ als Envelope-Funktion, da sie die Einhüllende der auf einer deutlich kleineren Skala oszillierenden Blochfunktion darstellt. Aus ihr können die physikalischen Eigenschaften eines mesoskopischen Systems abgeleitet werden. Geht man mit $\Psi(\mathbf{r})$ in die Schrödinger-Gleichung des gestörten Systems ein, so ergibt sich zur Bestimmung

der Envelope-Funktion die Differentialgleichung

$$\left[\varepsilon_{\text{LB}}(-i\nabla) + V(\mathbf{r}) \right] \psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}).$$

Dabei ist $\varepsilon_{\text{LB}}(\mathbf{k})$ die Dispersion⁶ der Leitungsbandelektronen im perfekten Kristall und $V(\mathbf{r})$ bezeichnet das Störpotential. Wenn $\varepsilon_{\text{LB}}(\mathbf{k})$ am Γ -Punkt durch eine Parabel genähert wird, findet man

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m^*} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right] \psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}). \quad (1.12)$$

Diese Gleichung entspricht gerade der Schrödinger-Gleichung eines Elektrons mit der effektiven Masse m^* . Es kann gezeigt werden [Dav98], daß dieses Modell nicht nur für ein Störpotential wie dem eines ionisierten Donators gilt, sondern daß es auch eine gute Näherung für Heterostrukturen darstellt, wenn für $V(\mathbf{r})$ den ortsabhängigen Verlauf des Leitungsbandversatzes $V_{\text{LB}}(\mathbf{r})$ widerspiegelt.

Die Gültigkeit der EMN ist jedoch begrenzt. Da bei der Herleitung von (1.12) vorausgesetzt wurde, daß die Envelope-Funktion auf der Skala der Blochfunktion bzw. der Gitterkonstante nur wenig variiert, betrifft dies v. a. dünne Materialschichten. Im Laufe dieses Kapitels wird sich jedoch zeigen, daß die Voraussetzungen der EMN unter den experimentellen Bedingungen dieser Arbeit erfüllt sind: Der zu den Heterogrenzflächen senkrechte Anteil der Envelope-Funktion $\psi(\mathbf{r})$ oszilliert mit einer Periodenlänge, die in etwa der magnetischen Länge (1.19) entspricht (Abb. 1.6b). Diese übertrifft bei typischen Magnetfeldern die Gitterkonstante von AlGaAs (ca. 5,67 Å) um etwa eine Größenordnung. Trotz der beschränkten Gültigkeit für zu schmale Materialschichten gilt, daß Sprünge des Leitungsbandverlaufs $V_{\text{LB}}(\mathbf{r})$, die an scharfen Heteroübergängen auftreten, mit der EMN konform sind [Dav98].

Am Γ -Punkt von GaAs hat die effektive Masse entlang aller Richtungen des reziproken Raums denselben Wert. Bei Temperaturen von $T \lesssim 4\text{ K}$ beträgt sie [Ada94]

$$m^* = (0,067 \pm 0,005) m_e, \quad (1.13)$$

wobei $m_e = 9,109 \cdot 10^{-31}\text{ kg}$ die Ruhemasse des freien Elektrons ist. Zum Vergleich hat man in $\text{Al}_{0,3}\text{Ga}_{0,7}\text{As}$ eine ebenfalls isotrope effektive Masse von $m^* = 0,084 m_e$. Im folgenden wird allerdings aus Vereinfachungsgründen auf die Verwendung einer ortsabhängigen Masse verzichtet. Der dadurch entstehende Fehler wird durch die Unsicherheit des Leitungsbandversatzes V_{LB} an Heteroübergängen ohnehin bei weitem übertroffen. Neuere Untersuchungen, die in [Lan88] zusammengefaßt sind, ergeben für die energetische Lage der Leitungsbandkante von $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ den mittleren Wert

$$V_{\text{LB}} = x \cdot 790\text{ meV}, \quad (1.14)$$

welcher auch den Rechnungen dieser Arbeit zugrunde gelegt wird. Die Schwankungsbreite aller Literaturwerte ist jedoch beträchtlich. Je nach Meßmethode differieren die Werte für den Proportionalitätsfaktor in (1.14) von 700 bis 1000 meV [Ada94].

⁶Der Ausdruck $\varepsilon_{\text{LB}}(-i\nabla)$ ist so zu verstehen, daß $\varepsilon_{\text{LB}}(\mathbf{k})$ als Potenzreihe von \mathbf{k} dargestellt und \mathbf{k} durch $-i\nabla$ ersetzt wird.

1.2.2 Schrödinger-Gleichung

Im folgenden wird die Schrödinger-Gleichung für ein 2D-Elektron im senkrechten Magnetfeld und in einem Potential mit unilateraler Variation aufgestellt und so weit wie möglich vereinfacht. Im Rahmen der EMN wurde bisher nur die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung betrachtet. Dieser Ansatz ist jedoch ausreichend, da die Experimente unter quasistatischen Bedingungen durchgeführt werden: Die Änderungen des äußeren magnetischen und elektrischen Feldes gehen auf Zeitskalen vonstatten, die viel größer sind als die für das Elektron relevanten Zeiten wie etwa die Zyklotronperiode oder die Streuzzeit. Die Schrödinger-Gleichung für die Envelope-Wellenfunktion eines einzelnen Elektrons lautet

$$H(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}). \quad (1.15)$$

Die Wirkung eines äußeren Magnetfelds auf die Bewegung von Elektronen kann im Rahmen der nichtrelativistischen Quantenmechanik untersucht werden. Erst die magnetische Wechselwirkung von Teilchen untereinander ist ein relativistischer Effekt [Lan74a], der hier zusammen mit der Coulomb-Wechselwirkung unberücksichtigt bleibt. Es wird weiterhin auf die Einbeziehung der Wechselwirkung des Elektronenspins mit dem Magnetfeld verzichtet, da Spinaufspaltung in den Experimenten dieser Arbeit nicht beobachtet wurde (Abschnitt 4.7.1). Mit dem Vektorpotential \mathbf{A} und dem elektrostatischen Potential $V(\mathbf{r})$ ist⁷

$$H(\mathbf{r}) = \frac{1}{2m^*} (\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2 + V(\mathbf{r}) \quad (1.16)$$

der in (1.12) auftretende Hamilton-Operator.⁸ Das Vektorpotential muß die Beziehung

$$\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \partial_y A_z - \partial_z A_y \\ \partial_z A_x - \partial_x A_z \\ \partial_x A_y - \partial_y A_x \end{pmatrix}$$

erfüllen, wobei \mathbf{B} das angelegte Magnetfeld bezeichnet. Bei der Quadrierung des Operators für den Teilchenimpuls $\mathbf{p} + e\mathbf{A}$ in (1.16) ist zu beachten, daß der generalisierte Impuls $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$ und das Vektorpotential \mathbf{A} nur dann vertauschen, wenn letzteres die Coulomb-Eichung $\text{div}\mathbf{A} = 0$ erfüllt [Nol93, Lan74a].

Bei gegebenem Magnetfeld ist das Vektorpotential nicht eindeutig, sondern nur bis auf den Gradienten einer beliebigen skalaren Funktion f bestimmt. Die Schrödinger-Gleichung ist also unter folgender synchroner Transformation von Vektorpotential und Wellenfunktion invariant:

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla f(x, y, z) \quad \text{und} \quad \psi \rightarrow \psi \exp\left\{-i\frac{e}{\hbar}f(x, y, z)\right\}.$$

Da nur die Phase der Wellenfunktion verändert wird, bleibt die Aufenthaltswahrscheinlichkeit $|\psi|^2$ von der Eichtransformation unberührt. Insbesondere gilt, daß sich die Wahlfreiheit

⁷Es wird nochmals darauf hingewiesen, daß hier $e > 0$ gilt. Artikel in Fachzeitschriften weisen zuweilen Ungenauigkeiten bzw. Unstimmigkeiten bzgl. des Vorzeichens auf, was evtl. darauf zurückzuführen ist, daß in [Lan73] und insbesondere [Lan74a] das Symbol „ e “ für die Ladung eines „Teilchens“ verwendet wird.

⁸Vergleiche Anhang B zur Herleitung des Hamilton-Operators im Magnetfeld.

bezüglich des Vektorpotentials auf keine physikalische Observable auswirkt [Coh77, Lan74a]. Die Entscheidung für eine bestimmte Eichung hängt von der Problemstellung ab. Auch wenn die Eichtransformation auf die Eigenfunktionen des Operators (1.16) keinen physikalischen Einfluß hat, so bestimmt sie doch auf wesentliche Weise den Lösungsweg für das Eigenwertproblem. Die Darstellung des Eigenwertspektrums und der zugehörigen Wellenfunktionen ist wiederum entscheidend für die Anwendbarkeit der quantenmechanischen Rechnung bei der Interpretation von experimentellen Ergebnissen.

Das Magnetfeld habe weiterhin die Orientierung $\mathbf{B} = (0, 0, B)$. Bei homogenem Magnetfeld ist $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{B} \times \mathbf{r}$ immer eine gültige Wahl für das Vektorpotential [Lan73]. Diese Eichung, in unserem Fall $\mathbf{A} = \frac{1}{2}(-yB, xB, 0)$, ist besonders geeignet, wenn rotationssymmetrische Eigenfunktionen bei der Modellbildung hilfreich sind [Hal82, Pra90, Eza00]. Ein solches Basissystem kommt den Orbitbahnen einer semiklassischen Beschreibung am nächsten und es erleichtert die Betrachtung von wechselwirkenden Elektronen oder eines scheibenförmigen Elektronensystems. Hier ist es jedoch zweckmäßiger, die Landau-Eichung

$$\mathbf{A} = (0, xB, 0) \quad (1.17)$$

vorzunehmen.⁹ Diese Eichung führt zu asymmetrischen Eigenfunktionen, die in einer Richtung ebene Wellen und in der anderen lokalisierte Zustände darstellen. Solche Wellenfunktionen sind dann von Vorteil, wenn ein in x -Richtung stückweise konstantes Potential vorgegeben (siehe weiter unten) und deshalb Elektronen zu beschreiben sind, die parallel zu etwaigen Potentialstufen propagieren und senkrecht zu diesen lokalisiert sind. Der Hamilton-Operator (1.16) lautet mit (1.17)

$$\begin{aligned} H(\mathbf{r}) &= \frac{1}{2m^*} \left[p_x^2 + (p_y + exB)^2 + p_z^2 \right] + V(\mathbf{r}) \\ &= \frac{\hbar^2}{2m^*} \left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{\ell^2} \right)^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] + V(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (1.18)$$

Die Magnetfeld-Abhängigkeit des zweiten Ausdrucks ist vollständig in der magnetischen Länge

$$\ell \equiv \sqrt{\frac{\hbar}{eB}}; \quad \ell \approx 25,66 \text{ nm} \sqrt{\frac{1 \text{ T}}{B}} \quad (1.19)$$

enthalten. Diese Größe ist unabhängig von Materialeigenschaften und eignet sich als Längeneinheit, bezüglich derer die Ausdehnung von Landau-Zuständen nur schwach mit dem Magnetfeld skaliert. Bei den für Transportmessungen typischerweise angelegten Feldern nimmt ℓ Werte von 5 bis 50 nm an. Die magnetische Länge ist deshalb eine gute Vergleichsgröße für strukturspezifische Längenmaße wie z. B. der Breite einer Tunnelbarriere. Weiterhin sei bemerkt, daß durch die Ersetzung von B durch ℓ die Gleichungen im Internationalen Einheitensystem und im Gaußschen CGS-System formal identisch werden.¹⁰

⁹Alternative: $\mathbf{A} = (-yB, 0, 0)$.

¹⁰Diese Arbeit folgt mit kleinen Ausnahmen wie etwa der Verwendung von Ångström ($10 \text{ \AA} = 1 \text{ nm}$) als Längeneinheit dem Internationalen Einheitensystem (*Système International d'Unités*, SI).

Das Potential $V(\mathbf{r})$ ist sowohl durch den Bandkantenverlauf der Struktur als auch durch das Feld einer etwaigen Steuerelektrode bestimmt. Letztere dient in den in Kapitel 4 näher beschriebenen Proben dazu, das Elektronensystem in der z -Richtung zu induzieren. Aufgrund der Symmetrie der Strukturen kann in guter Näherung angenommen werden, daß das Potential $V(\mathbf{r})$ seine Form entlang der z -Richtung bei Translation in der xy -Ebene nicht ändert. Es gilt also $V = V_{xy} + V_z$, weshalb der Hamilton-Operator (1.18) als $H = H_{xy} + H_z$ geschrieben werden kann und die Abseparierung der z -Koordinate möglich wird: $\psi(\mathbf{r}) = \psi(x, y)\zeta(z)$. Der verbleibende Hamilton-Operator, der die Bewegung in der Ebene senkrecht zum Magnetfeld beschreibt, lautet dann

$$H(x, y) = \frac{\hbar^2}{2m^*} \left[\left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{\ell^2} \right)^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] + V(x, y). \quad (1.20)$$

Im Falle eines in z -Richtung homogenen und ausgedehnten Elektronensystems ($V_z = \text{const.}$) stellen die Zustände in Richtung des Magnetfelds ebene Wellen mit $\zeta(z) \propto e^{ik_z z}$ dar. In den Feldeffekttransistor-Strukturen dieser Arbeit liegt jedoch ein näherungsweise dreiecksförmiges Einschlußpotential V_z vor, das zu lokalisierten Zuständen führt und deren Energie zu den Landau-Niveaus bzw. -Bändern der xy -Ebene hinzuzuaddieren ist.

In den weiter unten diskutierten CEO-Strukturen¹¹ ist das zweidimensionale Elektronensystem nur entlang der x -Richtung moduliert. Entsprechend kann neben der z - auch die y -Abhängigkeit des Potentials fallengelassen werden. Ein geeigneter Ansatz für die Wellenfunktion lautet dann¹²

$$\psi_{nk}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{L_y}} e^{iky} \varphi_{nk}(x). \quad (1.21)$$

Als Vorgriff auf die Eigenwertbestimmung wird dabei schon eine Notation mit Band- und Impulsindex verwendet. Die Landau-Bänder tragen beginnend mit $n = 0$ einen ganzzahligen Index. Die einzelnen Zustände eines Bandes werden nach der sog. Kreiswellenzahl k unterschieden, auf deren Eigenschaften Abschnitt 1.2.3 näher eingeht. Gemäß ihrer Definition stellt die Wellenfunktion $\psi_{nk}(x, y)$ in y -Richtung eine ebene Welle mit dem Kristallimpuls $\hbar k$ dar. Während der Zustand ψ_{nk} also in der einen Richtung unendlich ausgedehnt ist, beschreibt φ_{nk} senkrecht dazu einen im magnetischen Einschlußpotential gebundenen Zustand. Wenn mit dem Ansatz (1.21) in (1.15) eingegangen wird, erhält man schließlich die Schrödinger-Gleichung

$$\left\{ \frac{\hbar^2}{2m^*} \left[\left(k + \frac{x}{\ell^2} \right)^2 - \frac{d^2}{dx^2} \right] + V(x) \right\} \varphi_{nk}(x) = E_{nk} \varphi_{nk}(x). \quad (1.22)$$

Durch Abseparierung der y -Koordinate ist die partielle Differentialgleichung (1.15) mit dem Hamilton-Operator (1.18) auf eine gewöhnliche Differentialgleichung reduziert worden.

¹¹Durch Überwachsen von Spaltflächen (engl. *cleaved-edge overgrowth*, CEO) hergestellte Proben, siehe Abschnitt 4.1.

¹²Der Faktor $1/\sqrt{L_y}$ dient zur Normierung der Wellenfunktion in y -Richtung. Entsprechende Randbedingungen werden in Abschnitt 1.2.3 eingeführt.

Um Gleichung (1.22) in eine Form zu bringen, für die in der Literatur zu höheren transzendenten Funktionen eine Lösung existiert, werden nun mit ε_{nk} und v dimensionslose Variable für den Energieeigenwert bzw. das Potential definiert:

$$\boxed{E_{nk} = \left(\varepsilon_{nk} + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_c} \quad \text{und} \quad \boxed{V(x) = v(x) \hbar\omega_c.} \quad (1.23)$$

Es ist zu beachten, daß diese Variablentransformation keine Verschiebung des Energieursprungs darstellt. Für die Parabolischen Zylinderfunktionen (Abschnitt 1.3.2) ist es zweckmäßiger, ε_{nk} anstatt $E_{nk}/\hbar\omega_c$ zu verwenden. Die Eigenenergie ist nach wie vor durch E_{nk} bzw. $E_{nk}/\hbar\omega_c$ gegeben, wenngleich im folgenden ε_{nk} aus Vereinfachungsgründen ebenfalls als Eigenenergie bezeichnet wird. Der Eigenwert ε_{nk} nimmt im allgemeinen reelle Werte an. Nur in Bereichen konstanten Potentials¹³ ergeben sich analog zum harmonischen Oszillator für die Eigenenergie ganzzahlige Werte, die zudem mit dem Bandindex identisch sind: $\varepsilon_{nk} = n$. Die Zyklotron-Energie, in deren Einheiten die Energievariablen hier ausgedrückt sind, hat in GaAs mit der effektiven Masse (1.13) den Wert

$$\hbar\omega_c \stackrel{(1.8)}{=} \frac{\hbar e B}{m^*} \approx 1,73 \text{ meV} \frac{B}{1 \text{ T}}. \quad (1.24)$$

Mit den Variablen ε_{nk} und v wird die Schrödinger-Gleichung (1.22) zu

$$\left\{ \frac{1}{2} \left[\left(k\ell + \frac{x}{\ell} \right)^2 - \ell^2 \frac{d^2}{dx^2} \right] + v(x) \right\} \varphi_{nk}(x) = \left(\varepsilon_{nk} + \frac{1}{2} \right) \varphi_{nk}(x). \quad (1.25)$$

Der erste quadratische Term kann formal vereinfacht werden, indem die dimensionslose Ortsvariable

$$\boxed{\xi \equiv \frac{x}{\ell} + k\ell = \frac{x - X}{\ell}} \quad (1.26)$$

eingeführt wird. Dabei greift der letzte Ausdruck bereits auf die im folgenden Abschnitt definierte Variable X vor. Für die zweite Ableitung der Wellenfunktion in (1.25) ist folgende Variablentransformation zweimal durchzuführen:

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = \frac{d\varphi(x)}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \stackrel{(1.26)}{=} \frac{1}{\ell} \frac{d\varphi(x(\xi))}{d\xi} \equiv \frac{1}{\ell} \frac{d\tilde{\varphi}(\xi)}{d\xi}$$

Trotz der Definition $\tilde{\varphi}(\xi) \equiv \varphi(x(\xi))$ wird die Funktion $\tilde{\varphi}(\xi)$ im folgenden nicht explizit verwendet. Es geht immer aus dem Argument – griechischer oder lateinischer Buchstabe – hervor, ob $\tilde{\varphi}(\xi)$ oder $\varphi(x)$ gemeint ist. Entsprechendes gilt für das Potential $\tilde{v}(\xi) = v(x(\xi))$. Die Schrödinger-Gleichung nimmt mit der neuen Ortsvariable die Gestalt

$$\boxed{\left\{ \frac{d^2}{d\xi^2} - \xi^2 + 2 \left[\left(\varepsilon_{nk} - v(\xi) \right) + \frac{1}{2} \right] \right\} \varphi_{nk}(\xi) = 0} \quad (1.27)$$

an und weicht ab jetzt von der klassischen Form einer Eigenwertgleichung für den Hamilton-Operator ab. Die Differentialgleichung – die physikalisch freilich nicht mehr sehr anschaulich

¹³Auf die erforderliche, minimale Ausdehnung solcher Bereiche wird in Abschnitt 1.4.2 näher eingegangen.

ist – beinhaltet ausschließlich dimensionslose Größen und beschreibt alle in dieser Arbeit behandelten Probleme. Jede k -Abhängigkeit ist ausschließlich im Potential $v(\xi)$ enthalten. Wenn dieses räumlich konstant ist, verschwindet die k -Abhängigkeit und die Zustände eines Landau-Bandes sind vollständig entartet.

1.2.3 Elektronenimpuls, Kreiswellenzahl und Leitzentrum

Der Parameter k erfüllt in der Wellenfunktion $\psi_{nk} \propto e^{iky} \varphi_{nk}(x)$ (Gl. 1.21) die Funktion der Komponente eines k -Vektors. Die skalare Größe bezeichnet man präzise als Kreiswellenzahl. Häufig wird k jedoch in verkürzender Weise auch Impuls genannt. Tatsächlich ist der Teilchenimpuls des Elektrons, der in die Newtonsche Bewegungsgleichung eingeht, durch $m^* \mathbf{v}_{\text{gr}}$ gegeben, wobei $\mathbf{v}_{\text{gr}} = \frac{1}{\hbar} \nabla_{\mathbf{k}} E(\mathbf{k})$ die Gruppengeschwindigkeit des Elektrons ist. In Anhang B wird gezeigt, daß die Gruppengeschwindigkeit mit dem Erwartungswert des Geschwindigkeitsoperators identisch ist. Da das Eigenwertspektrum ε_{nk} nur von der y -Komponente des Wellenvektors \mathbf{k} abhängt, liegt \mathbf{v}_{gr} parallel zur y -Achse. Multiplikation mit der effektiven Masse ergibt den Elektronenimpuls (Gl. B.8 und B.9)

$$m^* v_y = \frac{m^*}{\hbar} \frac{\partial E_{nk}}{\partial k} = -\hbar \frac{\partial \varepsilon_{nX}}{\partial X} = \frac{\hbar}{\ell} \langle \xi \rangle. \quad (1.28)$$

Dieses Ergebnis entspricht dem Resultat der semiklassischen Betrachtung in Abschnitt 1.1.2: Ein in x -Richtung variierendes Potential bewirkt in der Gegenwart eines Magnetfeldes in z -Richtung eine konstante Drift des Elektrons parallel zur y -Achse (Abb. 1.1a). Bei konstantem Potential bzw. einer flachen Dispersion verschwindet der Impuls in y -Richtung und das Elektron ist vollständig lokalisiert.

Auf der linken Seite der Schrödinger-Gleichung (1.25) resultiert der Term mit d^2/dx^2 aus dem quadrierten Impulsoperator $-i\hbar\nabla$. Die übrigen Terme,

$$v_{\Sigma}(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{\ell} + k\ell \right)^2 + v(x) - \frac{1}{2}, \quad (1.29)$$

spielen im Hamilton-Operator die Rolle eines Potentials. Der quadratische Term rührt vom angelegten äußeren Magnetfeld her, weshalb er auch als magnetisches Einschlußpotential bezeichnet wird. Wenn das elektrostatische Potential $v(x)$ räumlich konstant ist, beschreibt $v_{\Sigma}(x)$ eine Parabel. Das Streben von $v_{\Sigma}(x)$ gegen Unendlich für $|x| \rightarrow \infty$ ist dafür verantwortlich, daß in x -Richtung nur gebundene Zustände existieren. Das Minimum des magnetischen Einschlußpotentials befindet sich bei

$$\boxed{X \equiv -k\ell^2}, \quad (1.30)$$

womit das sog. Leitzentrum (engl. *guiding centre*) definiert wird.

Wird in $v_{\Sigma}(x)$ die Kreiswellenzahl durch die neu definierte Ortsvariable X ersetzt, so erhält man für konstantes Potential v

$$v_{\Sigma}(x) = \frac{1}{2} \frac{(x - X)^2}{\ell^2} + v - \frac{1}{2}. \quad (1.31)$$

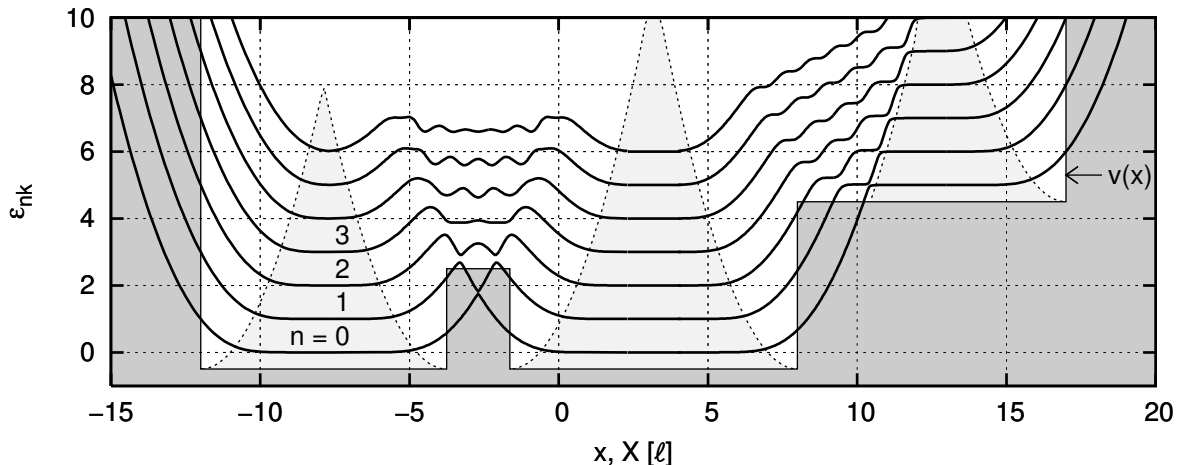


Abb. 1.2. Illustration: Potentialverlauf $v(x)$ und Bandstruktur ε_{nk} im gleichen Graphen. Das grau unterlegte Potential ist abschnittsweise konstant. Die Bereiche der Volumenzustände sind hellgrau markiert. Die übrigen Energieeigenfunktionen haben den Charakter von Randzuständen.

Der Hamilton-Operator ist dann symmetrisch bezüglich X und entspricht dem eines harmonischen Oszillators. Der Aufenthaltsschwerpunkt seiner symmetrischen Eigenzustände, die durch die Hermiteschen Funktionen (Abb. 1.5) beschrieben werden, fällt mit dem Leitzentrum zusammen: $\langle \varphi | x | \varphi \rangle = X$. Aus diesem Grund kann die Dispersion ε_{nk} gemäß $X/\ell = -k\ell$ sowohl im Orts- als auch im Impulsraum betrachtet werden (Abb. 1.2).

Wenn das Potential $V(x)$ Variationen aufweist, so weicht die Variable X im allgemeinen vom Schwerpunkt der Aufenthaltswahrscheinlichkeit ab. Bei hohen Barrieren tritt der Fall auf (Abschnitte 1.4 und 1.5), daß X sogar außerhalb des Aufenthaltsbereichs des Elektrons liegen kann. Deshalb bezeichnet man X meist nicht als Zentrum sondern als Leitzentrum. Im semiklassischen Bild entspricht dieses dem Rotationsmittelpunkt von Kreisbögen (engl. *skipping orbits*), die aneinandergesetzt die Trajektorie eines Elektrons ergeben, das fortgesetzt an einer Potentialstufe, beispielsweise der Probenbegrenzung, reflektiert wird.

Die in Abb. 1.2 im Ortsraum demonstrierte Überlagerung einer Dispersion $\varepsilon_n(X)$ mit der zugrundeliegenden Potentiallandschaft $v(x)$ ist i. allg. anschaulicher als eine Auftragung von ε_{nk} gegen die Kreiswellenzahl und wird deshalb gemeinhin bevorzugt. Die Interpretation der Koordinate X als Aufenthaltsort des Elektrons hat jedoch ihre Grenzen. Eine Gleichsetzung gilt streng nur für sog. Volumenzustände.¹⁴ Das sind die Zustände von Elektronen, die soweit von einer Potentialvariation entfernt sind, daß ihre Eigenenergie ausschließlich durch das magnetische Einschlußpotential bestimmt ist und deshalb nur Werte auf der Landau-Leiter $\varepsilon_{nk} = v + n$ annimmt. Der Mindestabstand des Leitzentrums eines Volumenzustandes zu einer Potentialvariation wird in Abschnitt 1.4.2 bestimmt.

Ein Zustand, der die Voraussetzung für einen Volumenzustand nicht erfüllt, zählt häufig zu den sog. Randzuständen. Das sind Energieeigenzustände, deren Leitzentrum im Bereich einer Potentialstufe liegt, die auch die Flanke einer Tunnelbarriere sein kann. Das Leitzentrum

¹⁴In englischsprachiger Literatur werden diese Zustände als *bulk states* bezeichnet. Da der Begriff „Volumenzustand“ suggeriert, daß die Wellenfunktion des entsprechenden Elektrons in alle drei Raumrichtungen ausgedehnt sei, wird darauf hingewiesen, daß hiermit in dieser Arbeit immer 2D-Zustände gemeint sind.

von Randzuständen fällt i. allg. nicht mit $\langle \varphi | x | \varphi \rangle$ zusammen. Für Zustände mit $\varepsilon_{nk} < v(X)$ ist die Abweichung umso größer, je tiefer sich X im Barrierenbereich befindet. Die Äquivalenz zwischen Leitzentrum und mittlerem Aufenthaltsort kann auch fast vollständig verloren gehen. Dies ist beispielsweise bei Quantendrahtzuständen der Fall, die in den Abschnitten 1.2.4 und 2.5 betrachtet werden. Solche Zustände entsprechen näherungsweise der parabolischen Dispersion $E_{nk} = E_n + \hbar^2(k - k_0)^2/2m^*$. Dabei ist nur für $k = k_0$ eine Übereinstimmung zwischen $X_0 = -k_0/\ell^2$ und der Position des Quantendrahtes auf der x -Achse gegeben.

Da die Zustände $\psi_{nk}(x, y)$ aufgrund des magnetischen Einschlusses in x -Richtung gebunden sind, bedarf die endliche Ausdehnung des Elektronensystems in dieser Richtung keiner weiteren Berücksichtigung in Form von Randbedingungen. Anders verhält es sich mit der y -Achse: Der Ansatz (1.21) für ψ_{nk} beschreibt in dieser Richtung eine unendlich ausgedehnte ebene Welle, und das obwohl das Elektronensystem prinzipiell eine endliche Ausdehnung L_y aufweist. Die Hermitizität des Impulsoperators $p_y = -i\hbar \partial/\partial y$ ist gewährleistet, wenn die Periodizitätsbedingung $\psi_{nk}(x, 0) = \psi_{nk}(x, L_y)$ erfüllt ist [Mes91]. Die Exponentialfunktion e^{iky} (Gl. 1.21) genügt dieser Bedingung, wenn k die Werte

$$k = 2\pi m/L_y \quad \text{mit} \quad m \in \mathbb{Z} \quad (1.32)$$

annimmt. Neben dem Bandindex n ist m die zweite Quantenzahl zur Indizierung aller Eigenzustände des Systems. Zur Vereinfachung wird in dieser Arbeit nicht nur m , sondern bisweilen auch k als Quantenzahl bezeichnet. Da das Zentrum der Wellenfunktion innerhalb der Probe liegen muß, unterliegen X bzw. k der Einschränkung

$$0 < X < L_x \quad \Rightarrow \quad 0 < |k| < L_x/\ell^2. \quad (1.33)$$

Sowohl die Kreiswellenzahl k als auch die y -Koordinate sind bis auf eine additive Konstante bestimmt. Während es klar ist, daß die Festlegung des Koordinatenursprungs keine Auswirkung auf eine physikalische Größe hat, kann dies auch für k durch Anwendung des Hamilton-Operators (1.20) auf $\psi_{n, k+k_0}(x, y)$ leicht nachgewiesen werden. Die Invarianz der Schrödingergleichung gegenüber einer Translation um k_0 findet sich in der Beziehung (1.30) wieder: In der Landau-Eichung (1.17) bewirkt eine additive Kreiswellenzahl k_0 eine Verschiebung des x -Ursprungs um $-k_0\ell^2$. Der entscheidende Punkt dieser Transformation ist, daß die Energiedispersion ihre relative Position zum zugrundeliegenden Potential $V(x)$ beibehält. Insbesondere hängt der Teilchenimpuls m^*v_y (Gl. 1.28) nicht von k_0 ab.

Die erlaubten k -Werte haben gemäß (1.32) den Abstand $\Delta k = 2\pi/L_y$ und beschränken sich wegen (1.33) auf ein Intervall der Länge L_x/ℓ^2 . Die Gesamtzahl der Zustände pro Landau-Band ist folglich

$$N = \frac{L_x/\ell^2}{\Delta k} = \frac{L_x L_y}{2\pi \ell^2}.$$

Der auf den Flächeninhalt bezogene Besetzungszahl s beträgt somit für jedes Landau-Band¹⁵

$$s = \frac{N}{L_x L_y} = \frac{eB}{h} = \frac{1}{2\pi \ell^2} = \frac{B}{\Phi_0} \approx 2,418 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-2} \frac{B}{1 \text{ T}}. \quad (1.34)$$

¹⁵Für entartete Landau-Niveaus ist zur Bezeichnung von s der Begriff Entartungsfaktor üblich. Da die Landau-Bänder i. d. R. dispersiv sind, wird s im folgenden Besetzungszahl genannt, wenngleich die Größe (1.34) eigentlich die Dimension einer Dichte besitzt.

Ein Zustand nimmt also die Fläche $2\pi\ell^2$ ein. Das Diracsche Flußquantum ist durch $\Phi_0 \equiv h/e$ gegeben [Eza00]. Es ist zu beachten, daß die Besetzungszahl s nur eine Spinart berücksichtigt. Bei vernachlässigbarer Spinaufspaltung (Abschnitt 4.7.1) kann jedes Landau-Band mit maximal $2s$ Elektronen pro Flächeneinheit befüllt werden. Das Verhältnis n_{\square}/s zwischen Elektronendichte und Besetzungszahl,

$$\boxed{\nu = \frac{n_{\square} h}{eB}}, \quad (1.35)$$

wird Füllfaktor genannt [Eza00]. Für $k_B T \ll \hbar\omega_c$ gibt der auf eine ganze Zahl abgerundete Wert von ν die Anzahl der vollständig gefüllten Landau-Niveaus wieder. Bei Strukturen, die außer dem Randpotential der Probenbegrenzung nur eine dünne Tunnelbarriere enthalten, gehört der dominierende Anteil der Elektronen zu den dispersionslosen Volumenzuständen. Trotz der Bandverbiegung an den Potentialerhebungen ist der Füllfaktor des Systems folglich allein durch das Magnetfeld und die Elektronendichte im Volumenbereich der Struktur bestimmt.

Der Abstand der Landau-Niveaus beträgt in Bereichen konstanten Potentials $\hbar\omega_c$. Näherungsweise und im Mittel gilt dies auch für Zustände im Einflußbereich einer Potentialerhebung (Abschnitt 1.5.1). Die mittlere Zustandsdichte beträgt also

$$\bar{D} \simeq \frac{2s}{\hbar\omega_c} \stackrel{(1.24)}{=} \frac{m^*}{\pi\hbar^2}. \quad (1.36)$$

Dieser Wert ist identisch mit der Zustandsdichte (1.6) eines zweidimensionalen Elektronensystems ohne Magnetfeld.

1.2.4 Kristallimpulserhaltung

Der Wellenvektor \mathbf{k} von Kristallelektronen und Löchern ist eine Erhaltungsgröße. Diese Eigenschaft besteht für die y -Komponente k des Wellenvektors fort, wenn in der Gegenwart eines Magnetfeldes die x -Komponente im Rahmen der Landau-Eichung verschwindet. Die Kristallimpulserhaltung wird auch in Anhang B anhand des Erwartungswertes (B.8a) des Operators für den Teilchenimpuls diskutiert. Aufgrund der Proportionalität (1.30) ist nicht nur k , sondern auch das Leitzentrum X eine Erhaltungsgröße. Im folgenden soll nun die Erhaltung von $\hbar k$ bei Tunnelprozessen in x -Richtung diskutiert werden. Zur Veranschaulichung dienen konkret zwei parallele Quantendrähte im Abstand ΔX , die sich in einem Einschlußpotential der Form

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } -\frac{d}{2} < x < \frac{d}{2}; \\ 0 & \text{für } -\frac{d}{2} < x - \Delta X < \frac{d}{2}; \\ V_0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (1.37)$$

befinden. Bei geeigneter Wahl der Parameter d , ΔX und V_0 besteht eine schwache Kopplung zwischen beiden Quantendrähten. Das Eigenwertspektrum im Magnetfeld kann prinzipiell

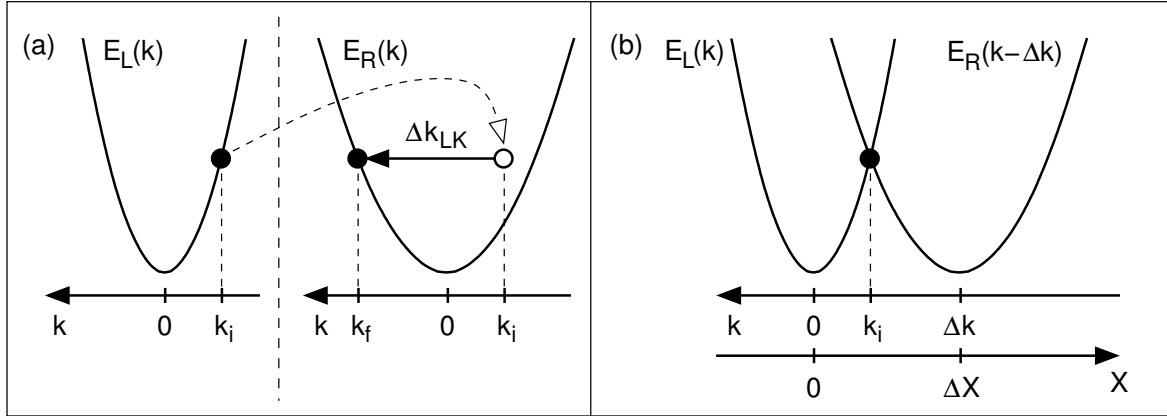


Abb. 1.3. Illustration in zwei verschiedenen Betrachtungsweisen zum Tunneln eines Elektrons von dem linken in den rechten Quantendraht in Gegenwart eines Magnetfeldes. **(a)** Das Elektron mit dem Impuls k_i befindet sich anfänglich im linken Quantendraht. Wenn das Teilchen in den rechten, um ΔX entfernten Quantendraht tunnelt, erhält es einen zusätzlichen, durch die Lorentz-Kraft vermittelten Impuls Δk_{LK} in y -Richtung. Ein resonanter Tunnelprozess ist nur möglich, wenn der entsprechende Endzustand auf der Parabel des rechten Quantendrahtes liegt. **(b)** Dispersion des Gesamtsystems mit einheitlicher Kreiswellenzahl k . Resonantes Tunneln geschieht an den Schnittpunkten der beiden Parabeln.

mit dem in Abschnitt 1.3 dargelegten Lösungsansatz bestimmt werden.¹⁶ Zur Erörterung der Impulserhaltung genügt jedoch die Näherung einer parabolischen Dispersion und die Betrachtung des Grundzustandes.¹⁷ Das Energiespektrum eines einzelnen Drahtes ist dann durch

$$E(k) = E_0 + \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*} \quad (1.38)$$

gegeben. Das Tunneln eines Elektrons vom linken ($x \simeq 0$) in den rechten ($x \simeq \Delta X$) Quantendraht wird zunächst im semiklassischen Bild betrachtet. Im Anschluß erfolgt die Diskussion im Rahmen der bisher erarbeiteten Eigenschaften der Schrödinger-Gleichung für das Gesamtsystem.

Eine semiklassische und separate Betrachtung der schwach gekoppelten Quantendrähte erfordert keine globale Kreiswellenzahl, wie sie im vorherigen Abschnitt eingeführt wurde. Die Dispersionen des linken und rechten Drahtes können vielmehr voneinander unabhängige k -Nullpunkte besitzen. Die beiden parabolischen Bänder (Gl. 1.38) sind in Abb. 1.3a dargestellt. Dabei werden unterschiedliche effektive Massen angenommen, um das Beispielsystem durch Vermeidung einer zu hohen Symmetrie etwas zu verallgemeinern. Wenn ein Elektron innerhalb des Zeitintervalls Δt in den rechten Quantentopf wechselt, wirkt auf dieses während des Vorgangs die Lorentz-Kraft $F = e \frac{\Delta X}{\Delta t} B$ in y -Richtung. Die entsprechende Impulsänderung berechnet sich mit $F = -\hbar dk/dt$ zu $\Delta k_{LK} = e \Delta X B / \hbar$. Der Tunnelprozess kann aber nur stattfinden, wenn das rechte System für den neuen Impuls k_f einen Zustand mit derselben Energie wie der des Ausgangszustands besitzt. Für ein Elektron mit dem Ausgangsimpuls k_i

¹⁶Ein einzelner Quantendraht stellt das inverse, in Abschnitt 2.5 gelöste Problem zu einer Tunnelbarriere dar. Im Falle von gekoppelten Drähten ist die exakte numerische Bestimmung der Energieeigenwerte aufgrund der vielen Grenzflächen impraktikabel.

¹⁷Siehe (2.8) in Abschnitt 2.5.

muß also $E_L(k_i) = E_R(k_i + \Delta k_{LK})$ bzw.

$$E_L(k_i) = E_R(k_i + e\Delta X B/\hbar) \quad (1.39)$$

gelten. Diese semiklassische Betrachtungsweise kann nicht mehr unmittelbar angewendet werden, wenn statt der beiden Quantendrähte zwei separate, schwach gekoppelte Elektronensysteme vorliegen, die in x -Richtung ausgedehnt sind. In diesem Fall ist es zweckmäßiger, das System wie folgt in seiner Gesamtheit zu betrachten:

Die Dispersion des Gesamtsystems kann, ohne die allgemeine Schrödinger-Gleichung (1.27) zu lösen, näherungsweise aus den beiden Teilsystemen gebildet werden. Hierzu ist erforderlich, daß $E_L(k)$ und $E_R(k)$ wie in Abb. 1.3b dargestellt einen gemeinsamen Bezugspunkt im k - bzw. Ortsraum haben. Diesbezüglich wird von zwei zunächst übereinanderliegenden Quantendrähten ausgegangen, die jeweils eine Dispersion der Form (1.38) aufweisen. Um das zuvor beschriebene Modellsystem zu erhalten, ist sodann der rechte Quantendraht um die Wegstrecke ΔX zu verschieben. Aufgrund der unmittelbar aus der Schrödinger-Gleichung abgeleiteten Äquivalenz (1.30) von Position und Kreiswellenzahl entspricht diese Verschiebung einer Transformation $E_R(k) \rightarrow E_R(k - \Delta k)$ mit $\Delta k = -\Delta X/\ell^2$. Das Gesamtsystem in Abb. 1.3b ergibt sich dann durch Überlagerung der beiden Teildispersionen. An deren Schnittpunkte

$$E_L(k) = E_R(k + e\Delta X B/\hbar) \quad (1.40)$$

ist die Energie- und Kristallimpulserhaltung für einen Tunnelprozeß gegeben. Mit der Resonanzbedingung (1.40) wird das in der semiklassischen Betrachtung gewonnene Ergebnis (1.39) reproduziert.

Bisher wurde nicht berücksichtigt, daß an den Kreuzungspunkten von Dispersionen schwach gekoppelter Teilsysteme kleine Energielücken entstehen, die die Entartung aufheben. In Abschnitt 1.5.2 werden die Eigenschaften von Zuständen in der Umgebung einer solchen Energielücke am Beispiel von gekoppelten Rand- und Volumenzuständen untersucht.

1.3 Allgemeine Lösung der Schrödinger-Gleichung

Die Schrödinger-Gleichung (1.27) beschreibt ein Elektron, das sich in einem Magnetfeld und einer durch den Bandkantenverlauf gegebenen Potentiallandschaft befindet. Das stückweise konstante Potential $V(x)$ bewirkt eine Modulation des Elektronensystems in nur einer Richtung. Ziel dieses Abschnittes ist es, einen allgemeinen Lösungsweg zur Bestimmung der Energieeigenzustände zu entwickeln.

1.3.1 Lösungsspektrum

Bisher wurde das Problem eines zweidimensionalen Elektronensystems mit unidirektionaler Modulation auf die eindimensionale Differentialgleichung (1.27) reduziert. Bereits aus den allgemeinen Eigenschaften eindimensionaler Schrödinger-Gleichungen [Lan74a, Mes91] können

grundlegende Merkmale des Eigenwertspektrums des 2D-Systems gewonnen werden. Der in (1.27) auftretende Hamilton-Operator gehorcht der Proportionalität

$$H(\xi) \propto -\frac{1}{2} \frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{1}{2} \xi^2 + v(\xi) - \frac{1}{2}.$$

Die Komponente der potentiellen Energie setzt sich aus dem magnetischen Einschlußpotential $\frac{1}{2}\xi^2$ und dem Bandkantenverlauf $v(\xi)$ zusammen. Es liegt also ein Potentialtopf mit unendlich hohen Wänden vor, weshalb das Lösungsspektrum ausschließlich aus gebundenen Eigenzuständen mit diskreten Energiewerten besteht. Die Zustände werden von Null beginnend mit der Quantenzahl n durchnummeriert. Weitere Eigenschaften der Energieeigenzustände sind: Die Wellenfunktion $\varphi_{nk}(\xi)$, die immer reell gewählt werden kann, verschwindet im Unendlichen und das Integral $\int |\varphi_{nk}(\xi)|^2 d\xi$ ist konvergent.

Bei einem eindimensionalen Problem sind alle Energieniveaus des diskreten Spektrums nicht entartet. Es gilt also $\varepsilon_{nk} \neq \varepsilon_{n'k}$ für alle $n, n' \in \mathbb{N}$ mit $n \neq n'$. In dem zweidimensionalen Elektronensystem ist Entartung nur in bezug auf die Kreiswellenzahl k möglich. In Bereichen konstanten Potentials (siehe Volumenzustände in Abb. 1.2) sind Eigenzustände gleicher Ordnung n sogar vollständig entartet. Für dispersive Bereiche folgt aus der Nichtentartung bezüglich n , daß sich die Landau-Bänder weder kreuzen noch berühren dürfen. Ein zentraler Punkt dieser Arbeit ist die Berechnung und Spektroskopie der Energielücken, die durch Aufhebung der Entartung an den Kreuzungspunkten von Landau-Bändern gekoppelter Elektronensysteme entstehen.

Wenn die gebundenen Eigenzustände eines eindimensionalen Systems nach wachsender Energie $\varepsilon_{0k}, \varepsilon_{1k}, \dots, \varepsilon_{nk}, \dots$ geordnet sind, dann besitzt die n -te Eigenfunktion φ_{nk} genau n Knoten (Nulldurchgänge). Für die Zustände eines bestimmten Landau-Bandes stimmt also die Knotenzahl mit dem Bandindex überein. Eine weitere Eigenschaft gebundener, eindimensionaler Zustände ist, daß zwischen zwei Knoten einer Eigenfunktion alle höherenergetischen Eigenfunktionen mindestens einen Knoten aufweisen [Mes91]. Das bedeutet, daß für festes k sich die aufeinanderfolgenden Eigenfunktionen überlappen. Diese Konzentration auf einen Ort, die eine Folge des magnetischen Einschlusses ist, liegt selbst dann vor, wenn das Leitzentrum X stark vom Schwerpunkt der Aufenthaltswahrscheinlichkeit abweicht (vgl. Abb. 1.6b und 1.9b).

In den CEO-Strukturen dieser Arbeit (Kapitel 4) wird das Potential $v(x)$ durch die Abfolge der undotierten Schichten des ersten Wachstumsschritts bestimmt. Wenn der Aluminiumgehalt innerhalb der Lagen einer $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ -Heterostruktur konstant ist, erhält man einen stufenförmigen Bandkanten- bzw. Potentialverlauf, der in Abb. 1.2 exemplarisch dargestellt ist. Dies gilt jedoch nur solange, wie bei der Leitwertmessung genügend kleine Spannungen (hier typischerweise $\lesssim 100 \mu\text{V}$) angelegt werden, so daß die Verkipfung der Bandstruktur vernachlässigt werden kann.¹⁸ In guter Näherung kann also der Potentialverlauf $v(\xi)$ als abschnittsweise konstant angenommen werden.

¹⁸In Abschnitt 2.5 wird das Energiespektrum eines Elektronensystems mit Tunnelbarriere und verhältnismäßig großer Vorspannung unter Verwendung einer Näherung bestimmt.

Wegen der Potentialsprünge an den Heterogrenzflächen ist auch die Gesamtwellenfunktion $\varphi_{nk}(\xi)$ abschnittsweise zu definieren. Für N Potentialstufen an den Stellen $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{N-1}$ lautet die Wellenfunktion

$$\varphi_{nk}(\xi) = \begin{cases} \varphi_{nk}^{(0)}(\xi) & \xi < \xi_0; \\ \vdots & \vdots \\ \varphi_{nk}^{(i)}(\xi) & \xi_{i-1} \leq \xi < \xi_i; \\ \vdots & \vdots \\ \varphi_{nk}^{(N)}(\xi) & \xi_{N-1} \leq \xi. \end{cases} \quad (1.41)$$

Die Schrödinger-Gleichung (1.27) für das Gesamtsystem kann nun wie folgt gelöst werden: Zunächst wird ein allgemeiner Ausdruck für die Teilwellenfunktionen $\varphi_{nk}^{(i)}(\xi)$ gesucht (Abschnitte 1.3.2 und 1.3.3). Dabei kann auf die Literatur über spezielle Funktionen zurückgegriffen werden, in der sich die Schrödinger-Gleichung – für ein konstantes Potential – in ähnlicher Form wiederfindet. Mit einem allgemeinen Ansatz für die Teilwellenfunktion $\varphi_{nk}^{(i)}(\xi)$ reduziert sich die Bestimmung der Gesamtwellenfunktion $\varphi_{nk}(\xi)$ auf das Lösen eines Gleichungssystems, das sich aus den Stetigkeitsbedingungen an den Potentialstufen ergibt (Abschnitt 1.3.4). Dieser Weg zur Berechnung der Landau-Bandstruktur hat den Vorteil, daß die Wellenfunktionen in kompakter und analytischer Form vorliegen und daß sie ebenso wie die Energieeigenwerte in beliebiger Genauigkeit bestimmbar sind. Die numerische Lösung des in hohem Maße nichtlinearen Gleichungssystems erfordert allerdings einen Algorithmus, der auf die jeweilige Grenzflächenkonstellation speziell zugeschnitten sein muß.

Die Teilwellenfunktion $\varphi_{nk}^{(i)}$ ist in dem Intervall mit konstantem Potential $v_i = V_i/\hbar\omega_c$ durch die Schrödinger-Gleichung

$$\left\{ \frac{d^2}{d\xi^2} - \xi^2 + 2 \left[\left(\varepsilon_{nk} - v_i \right) + \frac{1}{2} \right] \right\} \varphi_{nk}^{(i)}(\xi) = 0; \quad \xi_{i-1} \leq \xi < \xi_i. \quad (1.42)$$

gegeben. Diese Gleichung, die sich unmittelbar aus (1.27) ergibt, enthält keine k -Abhängigkeit. Die Kreiswellenzahl kommt erst dann zum Tragen, wenn die Stetigkeitsbedingungen, in die neben den Positionen x_i der Potentialstufen eben auch $X = -k\ell^2$ eingeht, ausgewertet werden. Die Schrödinger-Gleichung (1.42) beschreibt ein quasifreies Elektron im Magnetfeld. Im einfachsten Fall erstreckt sich der Geltungsbereich dieser Gleichung über die gesamte x -Achse, so daß die Lösungen die Konvergenzbedingung $\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \varphi_{nk}^{(0)}(\xi) = 0$ erfüllen müssen. Ein solches System unterscheidet sich formal durch nichts vom Harmonischen Oszillator, und das Lösungsspektrum besteht demnach aus äquidistanten Landau-Niveaus, deren Wellenfunktionen durch die Hermiteschen Funktionen gegeben sind [Lan74a, Kop02]. Diese Funktionen sind nur ein Spezialfall der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung (1.42), und zwar für $\varepsilon_{nk} - v_i \in \mathbb{N}$.

Wenn es mindestens eine Potentialstufe gibt, so ist der Definitionsbereich der Teilwellenfunktion $\varphi_{nk}^{(i)}(\xi)$ entweder halb- oder beidseitig beschränkt. Jenseits der Definitionsgrenzen darf $\varphi_{nk}^{(i)}(\xi)$ divergieren, weshalb prinzipiell auch divergente Lösungen von (1.42) zuzulassen

sind. Wie im folgenden Abschnitt zu sehen sein wird, weist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (1.42) für nichtganzzahliges $\varepsilon_{nk} - v_i$ divergentes Verhalten auf. Trotzdem muß die Gesamtwellenfunktion $\varphi_{nk}(\xi)$ wieder konvergent sein (Abschnitt 1.3.3).

1.3.2 Parabolische Zylinderfunktionen

Die Schrödinger-Gleichung (1.42) gehört zu der Klasse der gewöhnlichen und homogen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung,

$$y''(z) + (az^2 + bz + c)y(z) = 0, \quad (1.43)$$

deren Lösungen als Parabolische Zylinderfunktionen¹⁹ oder seltener als Weber-Hermiteische Funktionen bezeichnet werden. Bei diesen Funktionen, die in vielen Monographien zur mathematischen Physik Erwähnung finden, handelt sich um Vertreter der speziellen bzw. höheren transzendenten Funktionen. Eine ausführliche Besprechung der Parabolischen Zylinderfunktionen findet sich in [Erd53] und [Mag66]. Zentrale Aspekte werden auch in [Whi27] und [Jef72] behandelt, während [Abr65] und [Spa87] einen Schwerpunkt auf die numerische Bestimmung des Funktionswertes legen. Die Entwicklung effizienter Algorithmen ist noch immer Gegenstand aktueller Forschung: In [Tem00], [Tem03], [Gil04] und [Pok05] werden Integraldarstellungen und asymptotische Entwicklungen diskutiert, die insbesondere für große, reelle z -Werte eine schnell konvergierende Auswertung der Parabolischen Zylinderfunktionen ermöglichen.

In der Literatur trifft man leicht unterschiedliche Definitionen und Notationen sowohl für die Parabolischen Zylinderfunktionen als auch die zugrundeliegende Differentialgleichung an. Im Hinblick auf die Schrödinger-Gleichung (1.42) ist es am günstigsten, d. h. mit der geringsten Schreibarbeit verbunden, wenn als Ausgangspunkt die auf Whittaker²⁰ zurückgehende sog. Webersche Gleichung verwendet wird. Diese erhält man aus (1.43) durch quadratische Ergänzung und Variablentransformation:

$$y''(z) + \left[\nu + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z^2 \right] y(z) = 0. \quad (1.44)$$

Eine in der Literatur häufig verwendete und in Abb. 1.4 dargestellte Lösung dieser Gleichung wird mit $D_\nu(z)$ bezeichnet. Für diese Funktion existieren nur Integraldarstellungen, und sie kann – wie auf dem Gebiet der mathematischen Physik nicht unüblich – auf verschiedene Weise durch andere spezielle Funktionen ausgedrückt werden. Eine Möglichkeit ist [Mag66]

$$D_\nu(z) = 2^{\nu/2} e^{-z^2/4} \left\{ \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1-\nu}{2})} {}_1F_1 \left(-\frac{\nu}{2}; \frac{1}{2}; \frac{z^2}{2} \right) + \frac{z}{\sqrt{2}} \frac{\Gamma(-\frac{1}{2})}{\Gamma(-\frac{\nu}{2})} {}_1F_1 \left(\frac{1-\nu}{2}; \frac{3}{2}; \frac{z^2}{2} \right) \right\}, \quad (1.45)$$

wobei Γ die Gammafunktion und ${}_1F_1$ die konfluente hypergeometrische Funktion (auch Kummer-Funktion genannt) ist. In $D_\nu(z)$ wird z als Argument und ν als Ordnung oder

¹⁹Engl. *parabolic cylinder functions*; Gl. 1.43 wird entsprechend *parabolic cylinder differential equation* genannt.

²⁰Edmund Taylor Whittaker (1873-1956), britischer Mathematiker und Autor von [Whi27].

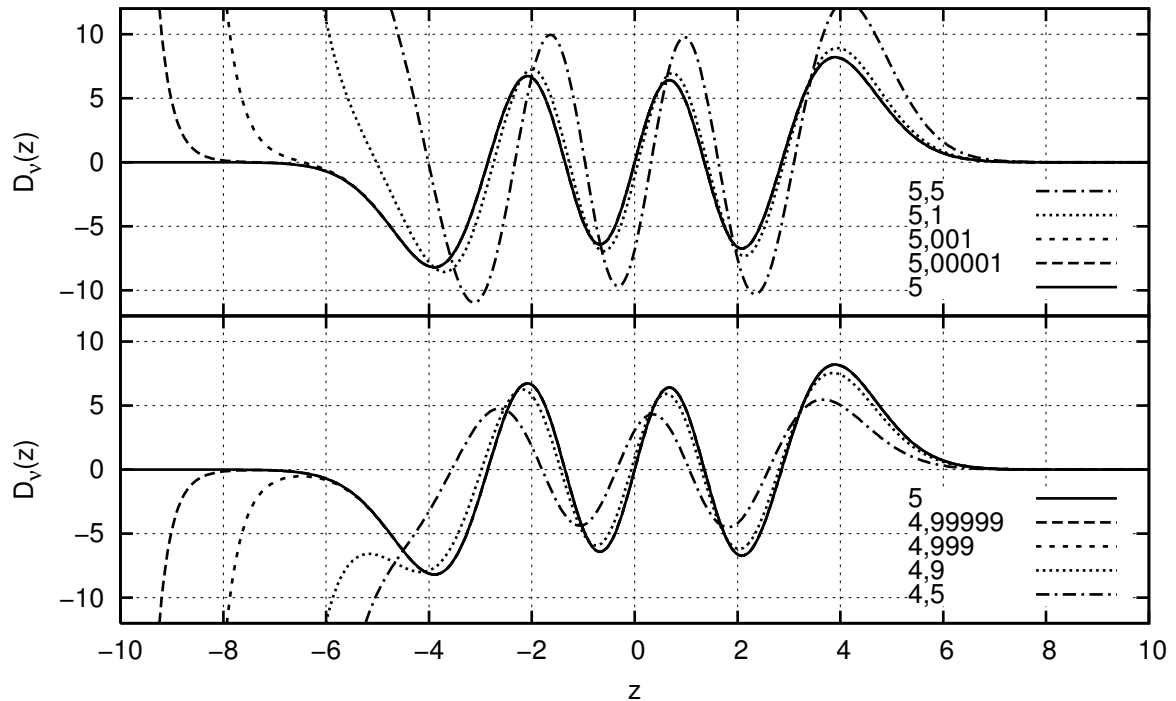


Abb. 1.4. Die Parabolische Zylinderfunktion (1.45) für verschiedene Grade ν . Beide Teilgraphen zeigen das Verhalten von $D_\nu(z)$, wenn sich ν einer ganzen Zahl (hier $n = 5$) nähert und sich wieder von ihr entfernt.

Grad bezeichnet.²¹ An der Stelle $z = 0$ sind der Funktionswert und die erste Ableitung der Parabolischen Zylinderfunktion durch [Mag66]

$$D_\nu(0) = \frac{2^{\frac{\nu}{2}} \sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)} \quad \text{und} \quad D'_\nu(0) = -\frac{2^{\frac{1+\nu}{2}} \sqrt{\pi}}{\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)} \quad (1.46)$$

gegeben. $D_\nu(0)$ verschwindet genau für $\nu = 2n + 1$ mit²² $n \in \mathbb{N}$ (siehe auch Gl. 1.48); für diese Ordnungen weist $\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)$ eine Singularität auf.

Der Lösungsraum einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung hat zwei Dimensionen [Jän90]. Durch Variablentransformation ist leicht zu zeigen, daß mit $D_\nu(z)$ auch die drei Funktionen $D_\nu(-z)$, $D_{-\nu-1}(-iz)$ und $D_{-\nu-1}(iz)$ Lösungen von (1.44) sind. Die lineare Unabhängigkeit zweier Lösungen $y_1(z)$ und $y_2(z)$ kann mit der Wronski-Determinante $W[y_1(z); y_2(z)]$ getestet werden. Unabhängigkeit ist gegeben, wenn ein $z \in \mathbb{R}$ mit $W \neq 0$ existiert. Da die Differentialgleichung (1.44) die erste Ableitung $y'(z)$ nicht enthält, ist nach der Abelschen Identität [Boy69] die Wronski-Determinante von z unabhängig. Somit genügt die Betrachtung der Wronski-Determinante an einer beliebigen Stelle. Dies geschieht vorzugs-

²¹In dieser Arbeit wird „Grad“ für ein reelles ν und „Ordnung“ für ein ganzzahliges n verwendet. Im letzteren Fall stimmt die Ordnung der Parabolischen Zylinderfunktion mit der Ordnung bzw. dem Index des Landau-Bandes überein.

²²Die Menge der natürlichen Zahlen soll hier die Null enthalten, also $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.

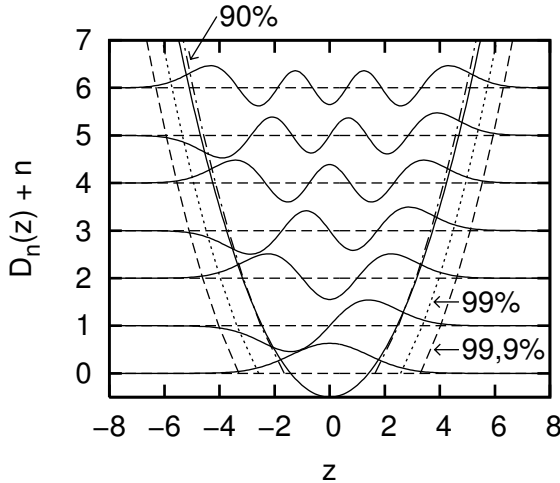


Abb. 1.5. Die normierten Hermiteschen Funktionen $D_n(z) \propto e^{-z^2/4} H_n(z/\sqrt{2})$ (Gl. 1.48) als Lösungen der Differentialgleichung (1.44) für $n \in \mathbb{N}$:

$$-y''(z) + \left[\frac{1}{4}z^2 - \frac{1}{2} \right] y(z) = n y(z).$$

Die Wellenfunktion n -ter Ordnung hat n Knoten. Die durchgezogene Linie repräsentiert das harmonische Potential $\frac{1}{4}z^2 - \frac{1}{2}$ aus der Differentialgleichung. Die unterbrochenen Kurven schließen Bereiche mit unterschiedlich großer Aufenthaltswahrscheinlichkeit $\int_{-z}^{+z} D_n^2(z') dz'$ ein.

weise bei $z = 0$, wo die Werte von D_ν und D'_ν bekannt sind (Gl. 1.46):

$$W[D_\nu(z); D_{-\nu-1}(\pm iz)] = \exp\left\{\mp \frac{1}{2}\pi i(\nu + 1)\right\} \neq 0, \quad (1.47a)$$

$$W[D_\nu(z); D_\nu(-z)] = \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\nu)}. \quad (1.47b)$$

Aus (1.47a) folgt, daß $D_\nu(z)$ und $D_{-\nu-1}(iz)$ bzw. $D_\nu(z)$ und $D_{-\nu-1}(-iz)$ für jedes ν linear unabhängig sind und deshalb jeweils ein fundamentales Lösungssystem von (1.44) bilden. Die in (1.47b) auftretende Gammafunktion $\Gamma(x)$ ist für die Argumente $x = 0, -1, -2, \dots$ nicht definiert. Jedoch ist ihr Reziprokes $1/\Gamma(x)$ auf ganz \mathbb{R} stetig und weist genau bei $x = 0, -1, -2, \dots$ Nullstellen auf [Spa87]. Demnach sind $D_\nu(z)$ und $D_\nu(-z)$ für $\nu \notin \mathbb{N}$ linear unabhängig. Für ganzzahliges $\nu \geq 0$ sind beide Funktionen dahingegen (bis auf ein Vorzeichen) identisch (siehe Gl. 1.49).

Trotz der für ganzzahlige Grade auftretenden Entartung wird $\{D_\nu(-z), D_\nu(z)\}$ in dieser Arbeit als Basis verwendet.²³ Der Vorteil beider Funktionen ist, daß sie für $\nu, z \in \mathbb{R}$ reelle Werte annehmen. Dies erleichtert nicht nur die graphische Darstellung der Wellenfunktionen, sondern auch die Lösung des Gleichungssystems, das sich aus den Stetigkeitsbedingungen an den Potentialstufen ergibt. Die Einschränkung auf die reellen Zahlen ist möglich, weil z und ν weiter unten mit den reellen Größen der Ortsvariablen ξ bzw. der Energie $\varepsilon_{nk} - v_i$ identifiziert werden. Der Nachteil der Basis $D_\nu(\pm z)$ besteht darin, daß für $\nu \in \mathbb{N}$ keine eindeutige Linearkombination der Basisfunktionen existiert. Dieser Fall führt bei der Bestimmung des Eigenzustandes zu Scheinlösungen, die bei einem Lösungsverfahren eigens ausgeschlossen werden müssen.

In Abb. 1.4 wird veranschaulicht, wie die Kurvenform der Parabolischen Zylinderfunktion vom Grad ν abhängt. Für $\nu \in \mathbb{R}$ und $z \rightarrow \infty$ strebt $D_\nu(z)$ immer gegen Null. Dahingegen konvergiert die Parabolische Zylinderfunktion auf der negativen Halbachse nur für $\nu \in \mathbb{N}$. In diesem Fall läßt sie sich durch die Hermitesche Funktion [Bro96] ausdrücken:

$$D_n(z) = 2^{-n/2} e^{-z^2/4} H_n(z/\sqrt{2}). \quad (1.48)$$

²³In Abschnitt 1.4.3 werden alternative, ebenfalls reelle Basisfunktionen diskutiert.

Diese Funktion, die in Abb. 1.5 dargestellt ist, besteht aus einem Hermiteschen Polynom n -ter Ordnung, das von einer Gaußschen Glockenkurve eingehüllt wird. Aus der Spiegel- bzw. Punktsymmetrie der Hermiteschen Polynome folgt für ganzzahliges $n \geq 0$:

$$D_n(-z) = \begin{cases} D_n(z) & n \text{ gerade;} \\ -D_n(z) & n \text{ ungerade.} \end{cases} \quad (1.49)$$

Für $\nu \notin \mathbb{N}$ weist $D_\nu(z)$ keine Symmetrie bezüglich seines Argumentes auf. Bei Variation von ν zeigen sich in Abb. 1.4 grundlegende Veränderungen der Kurvenform von $D_\nu(z)$ nur im Bereich $z < 0$. Dies betrifft vor allem das divergente Verhalten für $z \rightarrow -\infty$. Die Divergenz wandert für $\nu \rightarrow n \in \mathbb{N}$ in Richtung der negativen Achse, bis sie für $\nu = n$ verschwindet. Der asymptotische Wert $D_\nu(-\infty)$ beträgt für $n < \nu < n + 1$ mit $n = 0, 1, 2, \dots$ alternierend $-\infty, +\infty, -\infty, \dots$ [Spa87].

In Analogie zum Verhalten Hermitescher Polynome (Abb. 1.5) erhöht sich die Zahl der Halbschwingungen von $D_\nu(z)$ um eins, wenn von ν zu $\nu + 1$ übergegangen wird. Für $\nu \in]n; n + 1]$ mit $n \in \mathbb{N}$ hat $D_\nu(z)$ genau $n + 1$ reelle Nullstellen, während für $\nu \leq 0$ keine reellen Nullstellen existieren. So haben alle in dem unteren Teil von Abb. 1.4 dargestellten Funktionen fünf Nullstellen, während die Kurven mit $\nu > 5$ sechs Knoten besitzen.

Bei der Formulierung der Stetigkeitsbedingungen werden folgende Rekursionsformeln von Nutzen sein [Erd53]:

$$D_{\nu+1}(z) = zD_\nu(z) - \nu D_{\nu-1}(z), \quad (1.50a)$$

$$\frac{d^m}{dz^m} \left[e^{-z^2/4} D_\nu(z) \right] = (-1)^m e^{-z^2/4} D_{\nu+m}(z) \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (1.50b)$$

Insbesondere gilt

$$D'_\nu(z) = \frac{z}{2} D_\nu(z) - D_{\nu+1}(z) \quad (1.51)$$

für die erste Ableitung. In quantenmechanischen Erwartungswerten treten Integrale mit quadratischen Formen aus $D_\nu(-z)$ und $D_\nu(z)$ auf. Eine allgemeine Methode zur Lösung dieser Integrale wird in Anhang A vorgestellt.

1.3.3 Teilwellenfunktion

Um die Parabolischen Zylinderfunktionen für unser Problem nutzen zu können, muß die Webersche Gleichung (1.44) noch auf die Form der Schrödinger-Gleichung (1.42) gebracht werden, die ein Elektron in einem Abschnitt mit konstantem Potential v_i beschreibt. Mit den Transformationen $z \rightarrow a\xi$ und $y \rightarrow D_\nu$ wird (1.44) zu:

$$\frac{2}{a^2} \frac{d^2}{d\xi^2} D_\nu(a\xi) - \frac{a^2}{2} \xi^2 D_\nu(a\xi) + 2 \left[\nu + \frac{1}{2} \right] D_\nu(a\xi) = 0.$$

Diese Gleichung ist für $a = \pm\sqrt{2}$ und $\nu = \varepsilon_{nk} - v_i$ mit (1.42) identisch. Folglich ist $D_{\varepsilon_{nk}-v_i}(\pm\xi\sqrt{2})$ ein fundamentales Lösungssystem der Schrödinger-Gleichung.²⁴ Die Linearkombination

$$\varphi_{nk}^{(i)}(\xi) = \gamma_1^{(i)} D_{\varepsilon_{nk}-v_i}(-\xi\sqrt{2}) + \gamma_2^{(i)} D_{\varepsilon_{nk}-v_i}(\xi\sqrt{2}) \quad (1.52)$$

stellt dann innerhalb des Intervalls $[\xi_{i-1}; \xi_i]$ mit dem Potential v_i einen allgemeinen Ausdruck für die Teilwellenfunktion in (1.41) dar. Eine Vorentscheidung bezüglich der Wahl der Koeffizienten $\gamma_1^{(i)}$ und $\gamma_2^{(i)}$ kann anhand des Divergenzverhaltens der Parabolischen Zylinderfunktion getroffen werden. Wenn $\varepsilon_{nk} - v_i \notin \mathbb{N}$ gilt, divergiert $D_{\varepsilon_{nk}-v_i}(-\xi\sqrt{2})$ im positiv und $D_{\varepsilon_{nk}-v_i}(\xi\sqrt{2})$ im negativ Unendlichen (Abb. 1.4). Entsprechend kann jeder Abschnitt konstanten Potentials einer von drei Kategorien zugeordnet werden:

- i) Ohne jede Potentialstufe hat man ein unendlich ausgedehntes Elektronensystem mit konstantem Potential. Die Energieeigenfunktion ist dann auf der gesamten Zahlengeraden durch (1.52) gegeben. Damit die Wellenfunktion für $\xi \rightarrow \pm\infty$ konvergiert, können nur Energieeigenwerte mit $\varepsilon_{nk} - v_i = n \in \mathbb{N}$ zugelassen werden. Beide Komponenten in $\varphi_{nk}^{(i)}(\xi)$ sind dann linear abhängig, so daß wegen (1.49) nur ein Koeffizient, nämlich $\gamma_1^{(i)} \pm \gamma_2^{(i)}$ maßgeblich ist.
- ii) Wenn mindestens eine Potentialstufe existiert, hat man genau zwei Abschnitte konstanten Potentials, die sich halbseitig ins positiv bzw. negativ Unendliche erstrecken. Für den Fall der negativen Halbachse ist in (1.52) $\gamma_2^{(i)} = 0$ zu setzen. Die verbleibende Divergenz von $D_{\varepsilon_{nk}-v_i}(-\xi\sqrt{2})$ ist unerheblich, weil der Definitionsbereich dieser Funktion in positiver Richtung durch die nächste Potentialstufe begrenzt ist. Bei ganzzahligen Energiedifferenzen $\varepsilon_{nk} - v_i$, für die auch $D_{\varepsilon_{nk}-v_i}(\xi\sqrt{2})$ auf der negativen Halbachse konvergieren würde, genügt wegen der dann geltenden linearen Abhängigkeit $D_{\varepsilon_{nk}-v_i}(-\xi\sqrt{2})$ zur vollständigen Repräsentation der Wellenfunktion. In Abschnitten konstanten Potentials, die sich ins positiv Unendliche ausdehnen, ist in analoger Weise (1.52) mit $\gamma_1^{(i)} = 0$ die allgemeine Lösung des Eigenwertproblems (1.42).
- iii) Wenn das Potential mindestens zwei Unstetigkeiten aufweist, tritt schließlich der Fall eines Abschnitts mit endlicher Ausdehnung und konstantem Potential auf. In diesem Bereich ist (1.52) die allgemeine Lösung der Schrödinger-Gleichung (1.42). Um die Anzahl der relevanten Unbekannten zu reduzieren, wird die Teilwellenfunktion folgendermaßen umgeformt:

$$\begin{aligned} \varphi_{nk}^{(i)}(\xi) &= \gamma_1^{(i)} \left[D_{\varepsilon_{nk}-v_i}(-\xi\sqrt{2}) + \frac{\gamma_2^{(i)}}{\gamma_1^{(i)}} D_{\varepsilon_{nk}-v_i}(\xi\sqrt{2}) \right] \quad \gamma_1^{(i)} \neq 0 \\ &\propto D_{\varepsilon_{nk}-v_i}(-\xi\sqrt{2}) + \beta_{nk}^{(i)} D_{\varepsilon_{nk}-v_i}(\xi\sqrt{2}). \end{aligned} \quad (1.53)$$

Der Proportionalitätsfaktor kann bei der Bestimmung des Energieeigenwerts unberücksichtigt bleiben. Erst wenn aus den Teilwellenfunktionen $\varphi_{nk}^{(i)}(\xi)$ ein stetiges $\varphi_{nk}(\xi)$

²⁴Ab jetzt wird das Symbol ν nur für den Füllfaktor verwendet (Ausnahme: Anhang A). Während für die Hermiteschen Polynome der Buchstabe n als ganzzahliger Index Konvention ist, wird in mathematischer Literatur das griechische Pendant ν traditionell für den reellen (allgemein: komplexwertigen) Grad der Parabolischen Zylinderfunktion benutzt.

gebildet wird, müssen geeignete Skalierungsfaktoren eingeführt werden. Der Parameter $\beta_{nk}^{(i)}$ repräsentiert in (1.53) das Mischungsverhältnis der Parabolischen Zylinderfunktionen mit negativem und positivem Argument. Im Gegensatz zu (1.52) kann der Term mit $D_{\varepsilon_{nk}-v_i}(-\xi\sqrt{2})$ nicht mehr komplett verschwinden. Dies ist jedoch unproblematisch, weil der Ansatz (1.53) nur für Abschnitte endlicher Ausdehnung verwendet wird, wo der Anteil von $D_{\varepsilon_{nk}-v_i}(-\xi\sqrt{2})$ zwar sehr klein sein kann, aber i. d. R. noch so groß ist, daß $\beta_{nk}^{(i)} \gg 1$ numerisch realisierbar ist. Formal kann die Darstellung (1.53) also auch für unendlich ($\beta_{nk}^{(i)} = \pm 1$) und halbseitig unendlich ($\beta_{nk}^{(i)} \in \{0; \infty\}$) ausgedehnte Abschnitte verwendet werden.

1.3.4 Stetigkeitsbedingungen

Bisher wurde zwar mit (1.41) und (1.52) die allgemeine Lösungsfunktion der Schrödinger-Gleichung (1.27) für ein abschnittsweise konstantes Potential gefunden, die eigentliche Lösung des Eigenwertproblems steht jedoch noch immer aus. Der Energieeigenwert ε_{nk} und die Mischungsparameter $\beta_{nk}^{(i)}$ sind durch die Forderung einer stetigen Gesamtwellenfunktion festgelegt. In diesem Abschnitt werden die Stetigkeitsbedingungen für ein Potential $v(\xi)$ formuliert, das endliche Sprünge (Unstetigkeiten erster Art) aufweist, während es ansonsten konstant ist. Wir betrachten N Potentialstufen an den Positionen $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{N-1}$. Die Situation an einer unendlich hohen Potentialstufe wird in Abschnitt 1.4 behandelt.

Eine der Grundeigenschaften von Wellenfunktionen ist ihre Stetigkeit im gesamten Raum. Davon ausgehend kann mit der Schrödinger-Gleichung (1.27)

$$\varphi_{nk}''(\xi) = \left[\xi^2 - 1 - 2\varepsilon_{nk} + 2v(\xi) \right] \varphi_{nk}(\xi) \quad (1.54)$$

auf die Stetigkeit der ersten beiden Ableitungen der Gesamtwellenfunktion (1.41) geschlossen werden. Da $\varphi_{nk}(\xi)$ in jedem Punkt stetig ist, weist $\varphi_{nk}''(\xi)$ an denselben Stellen wie $v(\xi)$ endliche Sprünge auf. Aus der Stetigkeit des Integrals über $v(\xi)$ folgt dann, daß auch $\varphi_{nk}'(\xi)$ überall stetig ist. Dahingegen weist in der Effektive-Masse-Näherung (Abschnitt 1.2.1) die erste Ableitung der Envelope-Funktion am Übergang zwischen Materialien mit unterschiedlicher effektiver Masse eine Unstetigkeit auf, die in der Massenerhaltung begründet ist [Dav98]. Da in dieser Arbeit jedoch mit einheitlicher effektiver Masse (Gl. 1.13) gerechnet wird (siehe Seite 13), kann im weiteren Verlauf eine stetige erste Ableitung der Wellenfunktion vorausgesetzt werden.

Bei der Bestimmung der Mischungsparameter $\beta_{nk}^{(i)}$ und des Energieeigenwerts ε_{nk} ist an den Potentialstufen also zu fordern, daß die Teilwellenfunktionen $\varphi_{nk}^{(i)}(\xi)$ und $\varphi_{nk}^{(i+1)}(\xi)$ sowie ihre ersten Ableitungen stetig ineinander übergehen. Bei N Unstetigkeiten des Potentials ergibt das ein System von $2N$ Gleichungen. Von den $N+1$ Abschnitten konstanten Potentials sind $N-1$ von endlicher Ausdehnung, weshalb $N-1$ Mischungsparameter $\beta_{nk}^{(i)}$ zu bestimmen sind. Zusammen mit ε_{nk} ergibt das N Unbekannte. Die $N+1$ Teilwellenfunktionen (1.53) haben je eine Proportionalitätskonstante, wobei auf genau einen Vorfaktor verzichtet werden kann, da die Gesamtwellenfunktion nur bis auf eine multiplikative Konstante bestimmt ist. Insgesamt hat man also $2N$ Unbekannte, denen ebenso viele Gleichungen gegenüberstehen.

Zunächst wird folgendes Gleichungssystem aufgestellt, indem die aus (1.53) stammenden Proportionalitätsfaktoren auf eine Seite gebracht und mit C_i bezeichnet werden:

$$C_i \varphi_{nk}^{(i)}(\xi_i) = \varphi_{nk}^{(i+1)}(\xi_i), \quad (1.55a)$$

$$i = 0, 1, \dots, N - 1.$$

$$C_i \varphi_{nk}^{(i)'}(\xi_i) = \varphi_{nk}^{(i+1)'}(\xi_i) \quad (1.55b)$$

Wenn der Satz $\{\beta_{nk}^{(1)}, \beta_{nk}^{(2)}, \dots, \beta_{nk}^{(N-1)}, \varepsilon_{nk}\}$ bekannt ist, handelt es sich um eine triviale Aufgabe, die Faktoren C_i gemäß (1.55a) sukzessive so festzulegen, daß sich eine stetige Gesamtwellenfunktion (1.41) ergibt. Die sehr aufwendige numerische Auflösung des Gleichungssystems nach ε_{nk} und $\beta_{nk}^{(i)}$ würde erleichtert werden, wenn nicht noch gleichzeitig die Unbekannten C_i zu bestimmen wären. Tatsächlich ist es möglich, das Problem in zwei separate Blöcke à N Unbekannte aufzuteilen. Die Vorfaktoren C_i verschwinden aus der Hälfte aller Gleichungen, wenn (1.55b) durch (1.55b)/(1.55a) ersetzt wird:²⁵

$$C_i \varphi_{nk}^{(i)}(\xi_i) = \varphi_{nk}^{(i+1)}(\xi_i), \quad (1.56a)$$

$$\frac{\varphi_{nk}^{(i)'}(\xi_i)}{\varphi_{nk}^{(i)}(\xi_i)} = \frac{\varphi_{nk}^{(i+1)'}(\xi_i)}{\varphi_{nk}^{(i+1)}(\xi_i)} \quad i = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (1.56b)$$

Die Gleichungen (1.56b) können nun ohne Kenntnis der Variablen C_i gelöst werden. Wegen der Identität $f'/f = \log'(f)$ bedeutet dies, daß es zur Lösung des Eigenwertproblems genügt, nur den stetigen Übergang der logarithmischen Ableitung der Wellenfunktion zu fordern. Man erkennt bereits an den elementaren Eigenschaften der Parabolischen Zylinderfunktionen (Abschnitt 1.3.2), daß es sich um ein im hohen Maße nichtlineares Problem handelt. Während dieses für ein System mit einem einzigen Heteroübergang (Abschnitte 1.4 und 1.5) noch leicht zu lösen ist, erfordert bereits ein Potential mit zwei endlichen Stufen ein spezielles, rechenintensives Lösungsverfahren (Abschnitt 2.2).

1.3.5 Gleichungssystem

Als Vorbereitung auf die numerische Auswertung des Gleichungssystems (1.56b) wird dieses weiter umgeformt, wobei speziell die Auswirkungen auf die Lösungen zu berücksichtigen sind. Zunächst muß jedoch geklärt werden, ob bereits bei der Transformation (1.55) \rightarrow (1.56) gültige Lösungen „verloren“ gingen, weil bei ξ_i verschwindende Teilwellenfunktionen in den Nenner gelangten. Wenn es eine gültige Lösung der Schrödinger-Gleichung mit $\varphi_{nk}^{(i)}(\xi_i) = 0$ gibt, dann verschwindet wegen (1.56a) auch die benachbarte Teilwellenfunktion $\varphi_{nk}^{(i+1)}(\xi_i)$. Aus der Differentialgleichung (1.54) folgt deshalb $\varphi_{nk}^{(i)''}(\xi_i) = \varphi_{nk}^{(i+1)''}(\xi_i) = 0$. Insbesondere ist die zweite Ableitung der Gesamtwellenfunktion an der Stelle ξ_i stetig. Diese Ausnahme von der zu Beginn des Abschnitts 1.3.4 aufgestellten Regel, daß φ_{nk}'' an einer Potentialstufe eine Unstetigkeit aufweist, ist möglich, weil in (1.54) ein Sprung von $v(\xi)$ wegen $\varphi_{nk}(\xi_i) = 0$ keinen Einfluß auf $\varphi_{nk}''(\xi_i)$ hat. Zusammenfassend läßt sich festhalten, daß es prinzipiell Eigenzustände geben kann, die an einer Potentialstufe einen Knoten besitzen. Da die Stetig-

²⁵Der Fall $\varphi_{nk}^{(i)}(\xi_i) = 0$ wird in Abschnitt 1.3.5 ausführlich besprochen.

keitsbedingung (1.56b) dann jedoch nicht definiert ist, kann eine solche Lösung auch nicht gefunden werden. Auf die Praxis hat dies geringe Auswirkungen, weil es unwahrscheinlich ist, während der Bandstrukturrechnung zufällig einen solchen k -Wert (Fließkommazahl mit vielen Stellen) herauszugreifen, für den dieser Fall zutrifft.

Es erweist sich als vorteilhaft, wenn die Stetigkeitsbedingung (1.56b) weiter umgeformt wird. Beide Brüche werden zunächst auf einen Nenner gebracht, wodurch weder Lösungen hinzukommen noch wegfallen:

$$\frac{\varphi_{nk}^{(i)'}(\xi_i) \varphi_{nk}^{(i+1)}(\xi_i) - \varphi_{nk}^{(i+1)'}(\xi_i) \varphi_{nk}^{(i)}(\xi_i)}{\varphi_{nk}^{(i)}(\xi_i) \varphi_{nk}^{(i+1)}(\xi_i)} = 0 \quad i = 0, 1, \dots, N-1.$$

Wenn bei der numerischen Auswertung dieser Gleichungen nur die Zähler berücksichtigt werden, so ist es möglich, daß im Vergleich zu (1.56) neue Lösungen hinzukommen, die bisher durch einen verschwindenden Nenner ausgeschlossen waren. Die zusätzlichen Lösungen können jedoch leicht durch Probe mit (1.55) gegebenenfalls wieder verworfen werden. Zusammenfassend lautet das komplette Gleichungssystem

$$C_i \varphi_{nk}^{(i)}(\xi_i) - \varphi_{nk}^{(i+1)}(\xi_i) = 0, \quad (1.57a)$$

$$\varphi_{nk}^{(i)'}(\xi_i) \varphi_{nk}^{(i+1)}(\xi_i) - \varphi_{nk}^{(i+1)'}(\xi_i) \varphi_{nk}^{(i)}(\xi_i) = 0 \quad i = 0, 1, \dots, N-1. \quad (1.57b)$$

Für die i -te Gleichung dieses Systems, d. h. an der i -ten Potentialstufe, sind folgende drei Fälle von besonderem Interesse:

$$i) \quad \varphi_{nk}^{(i)}(\xi_i) = \varphi_{nk}^{(i+1)}(\xi_i) = 0 \quad \vee \quad \varphi_{nk}^{(i)'}(\xi_i) = \varphi_{nk}^{(i+1)'}(\xi_i) \neq 0$$

Diese Lösung, die in (1.56b) noch verboten war, ist jetzt wieder möglich.

$$ii) \quad \varphi_{nk}^{(i)}(\xi_i) = \varphi_{nk}^{(i+1)}(\xi_i) = 0 \quad \vee \quad \varphi_{nk}^{(i)'}(\xi_i) \neq \varphi_{nk}^{(i+1)'}(\xi_i)$$

Diese vermeintliche Lösung tritt während der numerischen Rechnung praktisch nicht auf. Trotzdem kann sie nachträglich und ohne Aufwand durch einen Test auf stetigen Übergang der Ableitung ausgesondert werden.

$$iii) \quad \varphi_{nk}^{(i)}(\xi_i) = \varphi_{nk}^{(i)'}(\xi_i) = 0 \quad \wedge \quad \varphi_{nk}^{(i+1)}(\xi_i) = \varphi_{nk}^{(i+1)'}(\xi_i) = 0$$

Die Lösungen der Schrödinger-Gleichung (1.42) verschwinden mit Ausnahme der trivialen Lösung niemals gleichzeitig mit der ersten Ableitung.²⁶ Da in dieser Arbeit Basisfunktionen verwendet werden (Gl. 1.53), die für ganzzahlige Grade $\varepsilon_{nk} - v_i$ linear abhängig sind, muß bei der Auswertung von (1.57b) die triviale Lösung der Schrödinger-

²⁶Dies ist eine allgemeine Eigenschaft von linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Wenn deren Koeffizientenfunktionen in $[a; b]$ stetig sind, existiert für jedes $x_0 \in [a; b]$ ein Isomorphismus zwischen den Elementen $\varphi(x)$ des zweidimensionalen Lösungsraums und dem Tupel der Anfangswerte $(\varphi(x_0); \varphi'(x_0))$, vgl. [Jän90, Kap. VIII]. Deshalb kann eine Lösung $\varphi(x)$, für die ein $x_0 \in [a; b]$ mit $\varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = 0$ existiert, eindeutig als $\varphi(x) \equiv 0$ identifiziert werden.

Gleichung explizit ausgeschlossen werden. Für diese Scheinlösungen gilt wegen (1.49):

$$\varphi_{nk}^{(i)} = D_{\varepsilon_{nk}-v_i}(-\xi\sqrt{2}) + \beta_{nk}^{(i)} D_{\varepsilon_{nk}-v_i}(\xi\sqrt{2}) \equiv 0$$

$$\text{für } (\varepsilon_{nk} - v_i) \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad \beta_{nk}^{(i)} = \begin{cases} -1 & (\varepsilon_{nk} - v_i) \text{ gerade;} \\ +1 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (1.58)$$

Bei einem System mit nur einer Potentialstufe gibt es kein Problem mit Scheinlösungen, weil in beiden Teilwellenfunktionen maximal eine Parabolische Zylinderfunktion auftritt. Für genau zwei Potentialstufen findet man mit (1.57) ausnahmslos alle Scheinlösungen. Diese können jedoch mit dem in Abschnitt 2.2 dargestellten Verfahren leicht im vorhinein ausgeschlossen werden. Bei vier oder mehr Abschnitten konstanten Potentials sind Scheinlösungen prinzipiell nur möglich, wenn sich die Potentiale v_i um ganze Vielfache von $\hbar\omega_c$ unterscheiden.

1.4 Unendlich hohes Randpotential

Die bisher erarbeiteten Ergebnisse werden nun auf die einfachste Konstellation, nämlich die einer unendlich hohen Potentialstufe angewendet. Ein Elektronensystem, das von einem solchen Randpotential eingeschlossen ist, hat Halperin in einem Beitrag [Hal82] zur Erklärung des Quanten-Hall-Effekts [Kli80, Kli95] betrachtet. Die entsprechende Bandstruktur wurde jedoch nur qualitativ besprochen, da ihre genaue Kenntnis zur Entwicklung und Anwendung des Randkanalmodells nicht erforderlich ist. Den Bandverlauf haben schließlich MacDonald und Středa [Mac84] berechnet. Während diese Autoren von einem Ansatz mit konfluenten hypergeometrischen Funktionen ausgehen, führt der Ausdruck (1.52) mit Parabolischen Zylinderfunktionen schneller und formal einfacher zum Ziel. In Abschnitt 1.4.1 werden der Lösungsalgorithmus und die wichtigsten Eigenschaften des Eigenwertspektrums für eine unendlich hohe Potentialstufe diskutiert. In Abschnitt 1.4.3 wird sodann gezeigt, daß der hier verwendete Ansatz zu dem in [Mac84] äquivalent ist.

1.4.1 Bandstruktur

Wir betrachten im folgenden ein Elektronensystem, das für $x < 0$ unendlich ausgedehnt und in positiver Richtung durch eine unendlich hohe Barriere begrenzt ist. Der Potentialverlauf lautet also

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0; \\ +\infty & x \geq 0 \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad v(\xi) = \begin{cases} 0 & \xi < -X/\ell; \\ +\infty & \xi \geq -X/\ell. \end{cases}$$

Da das Elektron nicht in die Barriere eindringen kann, gilt innerhalb derselben $\varphi_{nk} \equiv 0$. Die Gesamtwellenfunktion ist dann entsprechend dem Fall *ii*) in Abschnitt 1.3.3 durch

$$\varphi_{nk}(\xi) = \begin{cases} D_{\varepsilon_{nk}}(-\xi\sqrt{2}) & \xi < -X/\ell; \\ 0 & \xi \geq -X/\ell \end{cases} \quad (1.59)$$

gegeben. Dieser Ausdruck enthält mit dem Energieeigenwert ε_{nk} genau eine Unbekannte, die dadurch festgelegt ist, daß die Wellenfunktion bei $x = 0$ stetig übergeht:

$$D_{\varepsilon_{nk}}(X\sqrt{2}/\ell) = 0. \quad (1.60)$$

Gleichzeitig verschwindet an dieser Stelle wegen (1.54) die zweite Ableitung. Die Unbekannte ε_{nk} wäre überbestimmt, wenn man wie bei einer endlichen Potentialstufe zusätzlich zu (1.60) den stetigen Übergang der ersten Ableitung, also $\varphi'_{nk}(-X\sqrt{2}/\ell) = 0$ fordern würde. Es gäbe ohnehin keine Parabolische Zylinderfunktion, die solche Bedingungen erfüllt: Aus den Rekursionsformeln (1.50) folgt, daß wenn in einem Punkt die erste und zweite Ableitung von $D_{\varepsilon_{nk}}(-\xi\sqrt{2})$ zugleich verschwinden, auch alle höheren Ableitungen Null sind. Dies ist jedoch – wie auch aus Abb. 1.4 ersichtlich – höchstens im Unendlichen der Fall. Entgegen dem in Abschnitt 1.3.4 diskutierten Fall eines stückweise konstanten und endlichen Potentials weist also die erste Ableitung der Gesamtwellenfunktion an der Flanke einer unendlich hohen Barriere einen endlichen Sprung auf (Abb. 1.6b).

Eine Methode zur numerischen Berechnung der Landau-Dispersion an einer Tunnelbarriere wird in Abschnitt 2.2 vorgestellt. Das dort diskutierte Hauptproblem tritt bereits bei der Lösung der einfachen Stetigkeitsbedingung (1.60) auf: Es ist leicht, mit Lösungsverfahren, wie sie in Computer-Algebrasystemen implementiert sind, *eine* Lösung dieser Gleichung zu finden. Die Aufgabe besteht jedoch darin, *alle* Lösungen ε_{nk} in einem bestimmten Energieintervall $[\varepsilon^{\min}; \varepsilon^{\max}]$ zu ermitteln. Für die in Abb. 1.6a dargestellte Dispersion ist dies ziemlich müheles dadurch zu erreichen, daß jedes Band sukzessive von links nach rechts berechnet wird. Da für $X \ll -\sqrt{2n+1}\ell$ (siehe Gl. 1.62) die asymptotische Lösung $\varepsilon_{nk} \simeq n$ bekannt ist, kann dem Lösungsverfahren ein Intervall vorgegeben werden, in dem die Lösung erwartet wird. Paßt man dieses Intervall mit zunehmenden X in geeigneter Weise an, so können zuverlässig alle Energieeigenwerte berechnet werden.

Eine bemerkenswerte Eigenschaft eines Systems mit nur einer Potentialstufe ist, daß sich die Form der Dispersionsrelation mit dem Magnetfeld nicht ändert. Die Dispersion in Abb. 1.6a, die in den Einheiten der Zyklotron-Energie und der magnetischen Länge dargestellt ist, sieht für jedes Magnetfeld gleich aus. Bei Verwendung anderer Darstellungen, z. B. E_{nk} oder $E_n(X)$, bewirkt eine Magnetfeldänderung nur eine Skalierung der Achsen, eine erneute Bandstrukturechnung ist nicht notwendig. Die Magnetfeldunabhängigkeit ist eine Folge davon, daß ein Potential mit nur einer Stufe keine Modulation entlang der Ortsachse bewirkt. Erst wenn es mindestens ein Intervall konstanten Potentials mit endlicher Breite gibt, findet die magnetfeldabhängige Ausdehnung der Wellenfunktionen ($\Delta x \propto 1/\sqrt{B}$, Gl. 1.62) ihren Niederschlag in der Form der Dispersion.

1.4.2 Grenze zwischen Volumen- und Randzuständen

Der Übergang von Volumen- zu Randzuständen findet an dem Ort statt, wo ein Landau-Band bestimmter Ordnung beginnt, sich auf der Skala der Zyklotron-Energie merklich zu verbiegen. Der Abstand dieser Stelle von der Potentialstufe kann am einfachsten anhand der Ausdehnung der Hermiteschen Funktion (1.48), also der Wellenfunktion von Volumenzuständen,

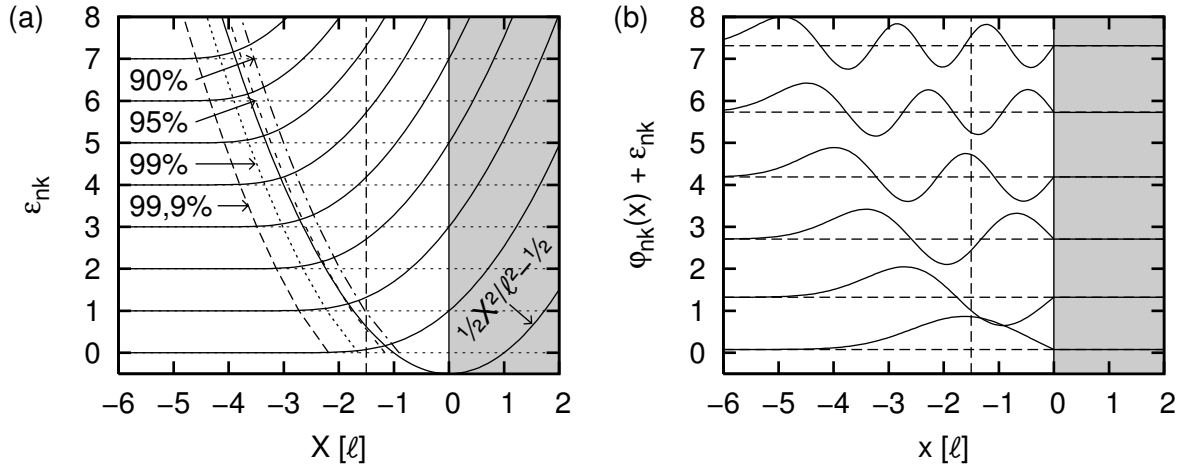


Abb. 1.6. (a) Die Landau-Bänder $n = 0, 1, 2, \dots$ in der Umgebung eines unendlich hohen Randpotentials. Die Eigenenergie E_{nk} ist stellvertretend durch ε_{nk} mit $E_{nk} = (\varepsilon_{nk} + \frac{1}{2}) \hbar \omega_c$ gegen das Leitzentrum aufgetragen. An den Schnittpunkten zwischen den mit Prozentzahlen gekennzeichneten Kurven und den horizontalen Linien bei ganzzahliger Ordinate n würde ein Volumenzustand $D_n(\xi\sqrt{2})$ zu 90%, 95% etc. außerhalb der Barriere liegen (vgl. Abb. 1.5). Die 95%-Grenzlinie hat einen ähnlichen Verlauf wie das magnetische Einschlußpotential (1.61). (b) Für $X = -1,5\ell$ sind die normierten Wellenfunktionen auf der Höhe des Energieeigenwerts gegen den Ort aufgetragen.

abgeschätzt werden. Wie aus Abb. 1.5 ersichtlich ist, folgt der Bereich substantieller Aufenthaltswahrscheinlichkeit im wesentlichen dem parabolischen Potential des harmonischen Oszillators, wobei die Potentialkurve und die Eingrenzung des 90%-igen Aufenthaltsbereichs nahezu identisch sind. Unter Berücksichtigung der Tatsache, daß die eigentliche Wellenfunktion nicht durch $D_n(z)$, sondern durch $D_n(\xi\sqrt{2})$, siehe (1.52), gegeben ist wurde die Potentialkurve $\frac{1}{4}z^2 - \frac{1}{2}$ aus Abb. 1.5 in Form von $\frac{1}{2}(X/\ell)^2 - \frac{1}{2}$ auf Abb. 1.6a übertragen.

Ein Volumenzustand der Ordnung $n \in \mathbb{N}$ wird durch die Hermitesche Funktion $D_n(\xi\sqrt{2})$ (Gl. 1.48) beschrieben. Wenn die Potentialstufe nicht existieren würde, hätte ein Volumenzustand, dessen Leitzentrum X auf der mit 90%, 95% etc. bezeichneten Kurve in Abb. 1.6a liegt, in dem Bereich $x > 0$ eine Aufenthaltswahrscheinlichkeit von 10%, 5% etc. Da für die numerisch berechneten Kurven keine algebraischen Ausdrücke vorliegen, bietet es sich an, für die Grenzziehung zwischen Volumen- und Randzuständen wiederum den Potentialverlauf heranzuziehen. Dieser ist innerhalb eines Abschnitts mit konstantem Potential durch das parabolische, magnetische Einschlußpotential (1.31) gegeben, dessen Scheitelpunkt um den Energiewert v der Bandkante und die Position der Potentialstufe verschoben ist. Mit der Variablenumbenennung $X \rightarrow X_0$ und $x \rightarrow X$ ergibt sich aus (1.31)

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left(\frac{X - X_0}{\ell} \right)^2 + v - \frac{1}{2}. \quad (1.61)$$

Die in Abb. 1.6a eingezeichnete Parabel erhält man schließlich für $X_0 = 0$ (Position der Potentialstufe) und $v = 0$ (Potential links der Stufe). Volumenzustände der Ordnung n , deren Leitzentrum X die Parabelgleichung $n = \frac{1}{2}(X/\ell)^2 - \frac{1}{2}$ erfüllt, würden mit etwa 5% ihrer Aufenthaltswahrscheinlichkeit in den Bereich $x > 0$ hineinreichen, wenn die Potentialstufe

nicht existierte. Deshalb eignet sich (1.61) zur Markierung der ohnehin unscharfen Grenze zwischen Volumen- und Randzuständen. Ein Anwendungsbeispiel der Formel (1.61) für ein mehrstufiges Potential ist in Abb. 1.2 zu sehen.

Da für Volumenzustände in Bereichen mit $v = 0$ die Eigenenergie durch $\varepsilon_{nk} = n$ gegeben ist, ergibt sich als Umkehrung von (1.61) die Beziehung

$$\Delta X_{\text{VR}} = \sqrt{2n + 1} \ell. \quad (1.62)$$

Die Größe ΔX_{VR} ist ein Richtwert für die Mindeststrecke, die zwischen dem Leitzentrum eines Zustandes im n -ten Band und der nächst gelegenen Potentialstufe liegen muß, damit letztere einen nur schwachen Einfluß auf den Energieeigenwert und die zugehörige Wellenfunktion hat. Wie an der 99,9%-Kurve in Abb. 1.6a zu erkennen ist, spürt ein Elektron bereits in einem Abstand von $\Delta X \geq \Delta X_{\text{VR}} + \ell$ selbst von einer unendlich hohen Barriere eine nur verschwindend kleine Wirkung.

Innerhalb eines Landau-Bandes ist die Zahl der Knoten von $\varphi_{nk}(\xi)$ konstant. Dies gilt nicht nur im Rahmen der hier verwendeten asymmetrischen Landau-Eichung (1.17), sondern auch für radialsymmetrische Zustände [Hal82]. Die Wellenfunktion eines Volumenzustandes im n -ten Band ist durch die Hermitesche Funktion $D_n(\xi\sqrt{2})$ gegeben (Gl. 1.48), die n Knoten besitzt (Abb. 1.5). Bei Annäherung des Leitzentrums an die Potentialstufe nimmt der Energieeigenwert zu, obwohl das Elektron nicht in die Barriere eindringt. Diese Bandverbiegung ermöglicht es, die Anzahl der Knoten konstant zu halten: Um das Abschneiden der Teilwellenfunktion $D_{\varepsilon_{nk}}(-\xi\sqrt{2})$ für $x \geq 0$ (Gl. 1.59) und den Verlust der damit verbundenen Knoten zu kompensieren, muß der Grad ε_{nk} zunehmen. In Abb. 1.6b ist am Beispiel von $X = -1,5\ell$ zu sehen, daß auch Wellenfunktionen mit nichtganzzahliger Energie ε_{nk} genau n Knoten aufweisen. Dies gilt auch für Zustände, deren Leitzentrum mit der Potentialstufe zusammenfällt ($X = 0$). Hier kann der Energieeigenwert ohne weitere Rechnung bestimmt werden. Die Stetigkeitsbedingung (1.60) ist nämlich laut der Beziehung (1.46) genau für $\varepsilon_{nk} = 2n + 1$ mit $n \in \mathbb{N}$ erfüllt. Die zugehörigen Wellenfunktionen $D_{2n+1}(-\xi\sqrt{2})$ sind diejenigen Lösungen des harmonischen Oszillators, die in ihrem Zentrum einen Nulldurchgang haben (Abb. 1.5). Die Funktion $D_{2n+1}(-\xi\sqrt{2})$ hat $2n + 1$ Knoten. Deren Zahl reduziert sich in der abschnittsweise definierten Gesamtwellenfunktion (1.59) wiederum auf n .

1.4.3 Ansatz von MacDonald und Středa

Im Rahmen eines Vergleichs zwischen dem hier und in [Mac84] verwendeten Ansatz wird kurz ein alternatives Basissystem vorgestellt, das direkt auf die konfluente hypergeometrische Funktion zurückgreift. Die allgemeine Lösung (1.52) der Schrödinger-Gleichung (1.42) kann mit der Abkürzung $\varepsilon \equiv \varepsilon_{nk} - v_i$ folgendermaßen dargestellt werden (1.45):

$$\begin{aligned} \varphi_{nk}(\xi) &= \gamma_1 D_\varepsilon(-\xi\sqrt{2}) + \gamma_2 D_\varepsilon(\xi\sqrt{2}) \\ &= \frac{2^{\varepsilon/2}}{e^{\varepsilon^2/2}} \left\{ \underbrace{(\gamma_1 + \gamma_2) \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1-\varepsilon}{2})}}_{\delta_1} {}_1F_1\left(-\frac{\varepsilon}{2}; \frac{1}{2}; \xi^2\right) + \underbrace{(\gamma_2 - \gamma_1) \frac{\Gamma(-\frac{1}{2})}{\Gamma(-\frac{\varepsilon}{2})}}_{\delta_2} \xi {}_1F_1\left(\frac{1-\varepsilon}{2}; \frac{3}{2}; \xi^2\right) \right\}. \end{aligned}$$

Durch die Definition der Variablen δ_1 und δ_2 wird der Ansatz von [Mac84] reproduziert,

$$\varphi_{nk}(\xi) = \frac{2^{\varepsilon/2}}{e^{\varepsilon^2/2}} \left\{ \delta_1 {}_1F_1 \left(-\frac{\varepsilon}{2}; \frac{1}{2}; \xi^2 \right) + \delta_2 \xi {}_1F_1 \left(\frac{1-\varepsilon}{2}; \frac{3}{2}; \xi^2 \right) \right\},$$

wobei die Gleichheit der Koeffizienten noch zu zeigen ist. Die beiden Basisfunktionen $D_\varepsilon(-\xi\sqrt{2})$ und $D_\varepsilon(\xi\sqrt{2})$ erhält man durch Nullsetzung von γ_2 bzw. γ_1 . Gemäß obiger Festlegung von δ_1 und δ_2 gilt deshalb für das Gewichtungsverhältnis der beiden konfluenten hypergeometrischen Funktionen:

$$\varphi_{nk}(\xi) \propto D_\varepsilon(\pm\xi\sqrt{2}) \iff \frac{\delta_2}{\delta_1} = \pm \frac{\Gamma(-\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{1-\varepsilon}{2})}{\Gamma(-\frac{\varepsilon}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})} = \mp \frac{2\Gamma(\frac{1-\varepsilon}{2})}{\Gamma(-\frac{\varepsilon}{2})}.$$

Als entsprechender Ausdruck wird in [Mac84]

$$\frac{\beta}{\alpha} = 2 \tan\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right) \frac{\Gamma(1 + \frac{\varepsilon}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{2})}$$

für einen Zustand rechts einer unendlich hohen Potentialstufe, also $D_\varepsilon(\xi\sqrt{2})$, angegeben. Mit den Identitäten [Mag66]

$$\frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \Gamma(z)\Gamma(1-z), \quad \frac{\pi}{\cos(\pi z)} = \Gamma(\frac{1}{2}+z)\Gamma(\frac{1}{2}-z) \quad \text{und} \quad \Gamma(1+z) = z\Gamma(z)$$

kann der Quotient zu

$$\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{2\Gamma(\frac{1-\varepsilon}{2})}{\Gamma(-\frac{\varepsilon}{2})}$$

umgeformt werden, womit die Äquivalenz beider Ansätze gezeigt ist.

1.4.4 Näherungsformeln

Um die Dispersion an einer unendlich hohen Barriere direkt in eine Rechnung einfließen lassen zu können, ist ein analytischer Ausdruck als Näherung für die Bandstruktur in Abb. 1.6a notwendig.

Eine naheliegende Möglichkeit, eine Formel für die Bandstruktur zu finden, besteht in der Anwendung der WKB-Methode, also der quasiklassischen Betrachtung des Systems [Lan74a]. Die de Broglie-Wellenlänge eines Zustandes der Energie ε_{nk} beträgt

$$\lambda = 2\pi\ell/\sqrt{2\varepsilon_{nk} + 1}, \tag{1.63a}$$

$$\lambda_F = 79,3 \text{ nm}/\sqrt{n_\square/10^{11} \text{ cm}^{-2}}, \tag{1.63b}$$

wobei der zweite Ausdruck für einen Zustand an der Fermi-Kante (Gl. 1.6) gilt (Fermi-Wellenlänge). Die WKB-Methode ist nur sinnvoll, wenn λ klein gegen die charakteristischen Abmessungen des untersuchten Problems ist. Für eine Tunnelbarriere der Breite 5 nm (Abschnitt 4.1) trifft dies nicht zu. Die WKB-Methode kann jedoch angewendet werden, wenn

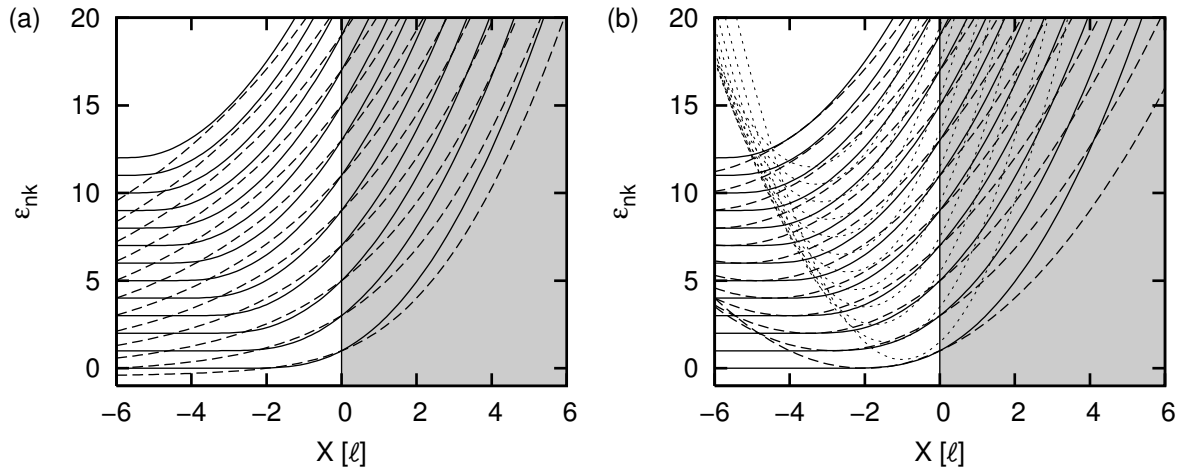


Abb. 1.7. Näherungskurven (unterbrochene Linien) für die Landau-Bandstruktur (aus Abb. 1.6a, durchgezogene Linien) an einer unendlich hohen Barriere. (a) WKB-Näherung (1.64) aus [Sne87]. (b) Punktiert: Näherung (1.65) aus [Kan00a]; Gestrichelt: dito, jedoch korrigiert, siehe (1.66).

der klassisch erlaubte Bereich durch eine unendlich hohe Potentialstufe begrenzt ist [Lan74a]. Für ein solches System wird von Snell *et al.* der Ausdruck [Sne87]

$$\frac{1}{2} \left[1 - \frac{\hbar k}{\sqrt{2m^* E_{nk}}} \right] E_{nk} = \left(n + \frac{3}{4} \right) \hbar \omega_c \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

als Ergebnis einer WKB-Rechnung angegeben. Hieraus ergibt sich die Dispersion

$$\varepsilon_{nk} \approx (2n + 1) + \frac{1}{4} \frac{X^2}{\ell^2} + \frac{1}{4} \frac{X}{\ell} \sqrt{X^2/\ell^2 + 12 + 16n}, \quad (1.64)$$

die in Abb. 1.7a dargestellt ist. Die Kurven stimmen bei $X = 0$ mit der rein quantenmechanischen Rechnung aus Abschnitt 1.4.1 exakt überein und stellen für nicht zu große Leitzentren eine gute Näherung dar.

Auch Kang *et al.* verwenden bei der Interpretation von experimentellen Ergebnissen eine Näherung für die verbogene Landau-Leiter an einer Potentialstufe [Kan00a]. Ohne explizit zu erwähnen, ob das Barrierenpotential als unendlich hoch vorausgesetzt wird, geben die Autoren die Näherungsformel

$$\frac{E_{nk}}{\hbar \omega_c} \approx \left(\frac{X}{\ell} + \sqrt{n + 1} \right)^2 + \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (1.65)$$

an. Der Vergleich mit der exakt berechneten Dispersion aus Abb. 1.6a offenbart jedoch einen viel zu steilen Anstieg dieser Funktion. Die Diskrepanz²⁷ kann nicht auf die Zugrundelegung einer endlich hohen Barriere zurückgeführt werden, denn dies hätte gerade einen gegenteiligen

²⁷Dies steht möglicherweise in Zusammenhang mit einer weiteren Unstimmigkeit, die sich in unmittelbarer Umgebung der Näherungsformel in [Kan00a] findet: Als Flachbandbedingung wird mehrmals die Relation $|x/\ell| \geq \sqrt{N + 1}$ anstatt von (1.62) angegeben.

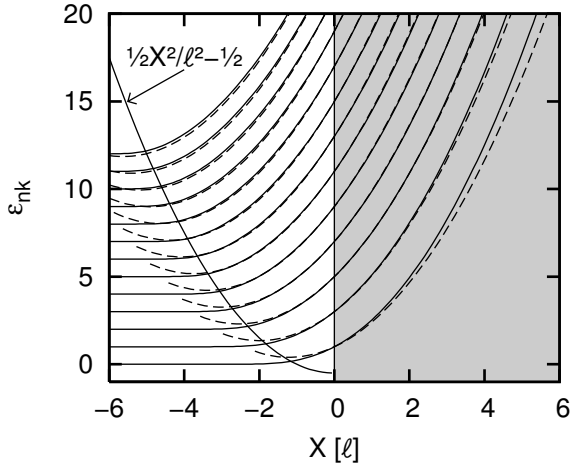


Abb. 1.8. Neue Näherungsformel (1.67) (gestrichelte Linien), deren Koeffizientenfunktionen durch Anpassung an die exakte Bandstruktur (durchgezogene Linien) in dem Gebiet rechts der Halbparabel bestimmt wurden. Letztere markiert den Übergang zwischen Volumen- und Randzuständen. Für $-\sqrt{2n+1} < X/\ell < 6$ und $4 \leq n \leq 10$ beträgt der Fehler der Näherung weniger als 1%.

Effekt bewirkt. Erst wenn X durch $X/2$ ersetzt wird, erhält man mit

$$\varepsilon_{nk} \approx (2n+1) + \frac{1}{4} \frac{X^2}{\ell^2} + \frac{X}{\ell} \sqrt{n+1} \quad (1.66)$$

eine realistische Näherung (Abb. 1.7b). Während diese Formel das Grundzustandsband im Bereich $[-2; 0]$ sehr gut beschreibt, sind die Abweichungen für großes X geringfügig stärker als bei der Näherung (1.64).

Eine wesentlich bessere Näherung erhält man folgendermaßen: Eine parabolische Dispersion wird für verschiedene Ordnungen, z. B. $n = 0, 1, 2, \dots, 12$ an das Band ε_{nk} angepaßt, um einen Satz von Koeffizienten für den X^2 - bzw. X -Term zu bekommen. Die Anpassung, die unter der Nebenbedingung $\varepsilon_{n0} = 2n + 1$ durchgeführt wird, beschränkt sich auf Randzustände mit $-\sqrt{2n+1} < X/\ell < 6$ (Gl. 1.62). Man findet, daß der Koeffizient des quadratischen Terms X^2 nur sehr schwach von n abhängt, weshalb er wie in (1.64) und (1.66) auf eine Konstante festgeschrieben wird. Die Wahl der Koeffizienten entscheidet, welcher Bereich der Dispersion am genauesten genähert wird. Deshalb können statt numerischer Werte auch passende algebraische Ausdrücke verwendet werden. So der Fall in

$$\varepsilon_{nk} \approx (2n+1) + (\sqrt{2}-1) \frac{X^2}{\ell^2} + \frac{X}{\ell} \sqrt{\sqrt{3}n+1}, \quad (1.67)$$

womit sich die in Abb. 1.8 dargestellten Näherungskurven ergeben, die den Bändern mit einstelliger Ordnung – mit Ausnahme des Grundzustands – besonders gut entsprechen.

1.5 Endlich hohes Randpotential

Als weiterer Schritt in Richtung einer Tunnelbarriere (Kapitel 2), betrachten wir nun den Fall einer endlich hohen Barriere, die sich in positiver x -Richtung ins Unendliche erstreckt. Diese Situation wurde bereits von Bartoš und Rosenstein [Bar94] unter Verwendung der Parabolischen Zylinderfunktionen behandelt, so daß in Abschnitt 1.5.1 nur die wesentlichen mathematischen Schritte wiederholt werden müssen. Viele der im Anschluß diskutierten Eigenschaften des Eigenwertspektrums sind auch für eine dünne Tunnelbarriere relevant. Hierzu

zählen insbesondere die Antikreuzungen (Abschnitt 1.5.2) im Bereich schwacher Kopplung und die Anwendbarkeit des Chklovskii-Bildes (Abschnitt 1.5.3) auf Elektronensysteme in CEO-Strukturen.

1.5.1 Bandstruktur

Im Falle einer endlich hohen und halbseitig unendlich ausgedehnten Barriere ist der Potentialverlauf durch

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0; \\ V_0 & x \geq 0 \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad v(\xi) = \begin{cases} 0 & \xi < -X/\ell; \\ v & \xi \geq -X/\ell \end{cases} \quad (1.68)$$

mit $v = V_0/\hbar\omega_c$ gegeben. Gemäß der Überlegungen zum Fall *ii*) in Abschnitt 1.3.3 wird als Gesamtwellenfunktion (1.41)

$$\varphi_{nk}(\xi) = \begin{cases} D_{\varepsilon_{nk}}(-\xi\sqrt{2}) & \xi < -X/\ell; \\ D_{\varepsilon_{nk}-v}(\xi\sqrt{2}) & \xi \geq -X/\ell \end{cases}$$

angesetzt. In Analogie zur unendlich hohen Potentialstufe hat man es mit nur einer Unbekannten, nämlich dem Energieeigenwert ε_{nk} zu tun. Diese ist durch die Stetigkeitsbedingung²⁸

$$D_{\varepsilon_{nk}+1}(X\sqrt{2}/\ell)D_{\varepsilon_{nk}-v}(-X\sqrt{2}/\ell) + D_{\varepsilon_{nk}-v+1}(-X\sqrt{2}/\ell)D_{\varepsilon_{nk}}(X\sqrt{2}/\ell) = 0$$

bestimmt, die sich aus (1.57b) unter Anwendung der Ableitungsformel (1.51) ergibt.

Bei der Berechnung der Bandstruktur, die in Abb. 1.9a dargestellt ist, kann prinzipiell wie in Abschnitt 1.4.1 vorgegangen werden. Es tritt nun jedoch die Schwierigkeit auf, daß sich die einzelnen Bänder sehr nahe kommen, was beispielweise an der mit ② gekennzeichneten Stelle der Fall ist. Dort besteht die Gefahr, daß der Algorithmus buchstäblich den Faden verliert, indem ein programmgesteuertes Verfahren während der sukzessiven Berechnung des 0. Bandes von links nach rechts fälschlicherweise in das 1. Band gerät. Diesem Problem kann bei monoton steigenden Bändern durch eine verfeinerte Wahl des Intervalls, welches dem Lösungsverfahren vorgibt, wo der Energieeigenwert zu erwarten ist, beigegeben werden. Bei der komplexen Bandstruktur an einer Tunnelbarriere versagen solche Heuristiken jedoch in der Regel, weshalb in Kapitel 2 ein anderes Lösungskonzept verfolgt wird.

Die Bandstruktur an einem endlich hohen Randpotential besteht im wesentlichen aus zwei Landau-Leitern, die um v gegeneinander verschoben sind, wobei im Übergangsbereich ein oszillatorisches Verhalten auftritt. Die Beziehung (1.61) stellt auch hier die Grenzlinie zwischen Volumen- und solchen Zuständen dar, die unter dem Einfluß der Potentialstufe stehen. Für $\varepsilon_{nk} < v$ besteht in Abb. 1.9a eine große Ähnlichkeit mit Abb. 1.6a: Von links kommend gehen

²⁸In [Bar94] sind an entsprechender Stelle in den Gleichungen (5) und (6) einige Vorzeichenfehler enthalten. Insbesondere wird dort $D_{\varepsilon_{nk}-v}(-(x-X)\sqrt{2}/\ell)$ für $x \geq 0$ verwendet.

²⁹Anstatt ein Potential der Höhe $V_i = v_i \hbar\omega_c$ bei der Ordinate v_i einzuzeichnen, wird in Abb. 1.9 und folgende $v_i - \frac{1}{2}$ zur Repräsentation der Leitungsbandunterkante verwendet. Ohne der Gültigkeit von $\varepsilon_{nk} = v_i$ für Grundzustände im Volumen zu widersprechen, wird so der Tatsache Rechnung getragen, daß die unterste Sprosse der Landau-Leiter $\frac{1}{2}\hbar\omega_c$ über dem Niveau des Potentials liegt.

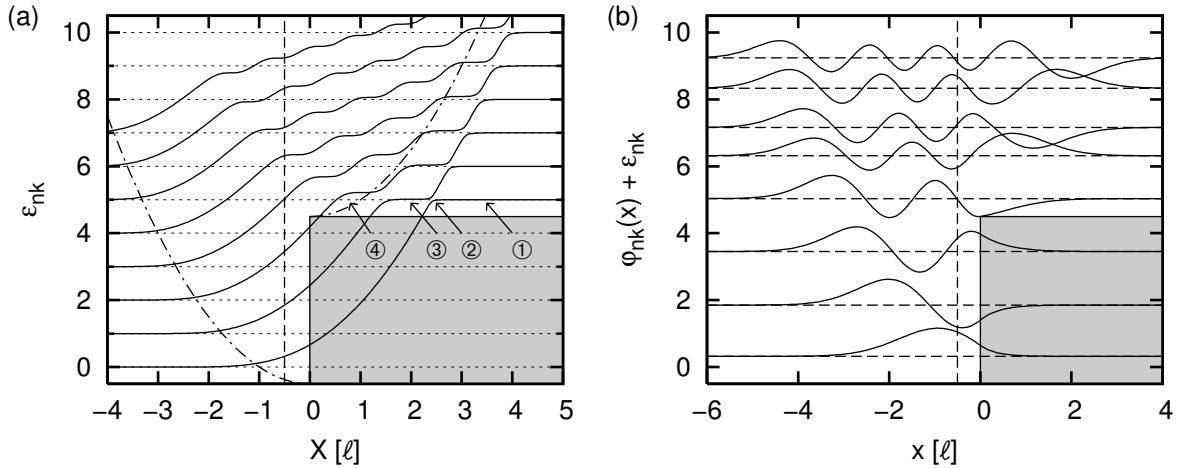


Abb. 1.9. (a) Dispersionsrelation an einer Barriere (grau unterlegt²⁹) der Höhe $V_0 = 5\hbar\omega_c$. Die beiden strichpunktierten Halbparabeln mit $\frac{1}{2}(X/\ell)^2 + v_i - \frac{1}{2}$ kennzeichnen annähernd den Übergang zwischen Misch- und Volumenzuständen. Der mit ① bis ③ markierte Bereich der Dispersion ist in Abb. 1.10a vergrößert dargestellt. (b) Für $X = -\ell/2$ sind die normierten Eigenfunktionen auf der Höhe ihrer Energie gegen den Ort aufgetragen.

die Volumen- in Randzustände über. Die Situation für $X > 0$ ist andersartig: Die Landau-Leiter ① für $X \gg 0$ setzt sich mit Unterbrechung durch die Energielücke ② auf selber Höhe bis in die Plateaus ③ fort. Der Sprung auf ein niveaugleiches Plateau des nächsthöheren Landau-Bandes wiederholt sich bei ④ nicht mehr. Jenseits der Halbparabel entfallen nämlich bereits mehr als 5% der Aufenthaltswahrscheinlichkeit auf die linke Seite der Potentialstufe. In dem Übergangsbereich herrscht eine starke Überlappung mit Randzuständen vor, die sich hauptsächlich im Bereich $x < 0$ aufhalten.

In Abb. 1.9b sind die Eigenfunktionen für $X = -\ell/2$ und $n = 0$ bis 7 dargestellt. Erwartungsgemäß stimmt auch hier die Anzahl der Knoten der Gesamtwellenfunktion mit der Ordnung n des Bandes überein. Für $\varepsilon_{nk} < v$ haben die Eigenzustände den Charakter von Randzuständen, deren Amplitude innerhalb der Barriere näherungsweise exponentiell abfällt. Genau wie bei der unendlich hohen Barriere in Abschnitt 1.4 definiert auch hier der Potentialverlauf (1.68) keine charakteristische Längenskala in x -Richtung. Folglich ist, sofern v konstant gehalten wird, die in Abb. 1.9a dargestellte Dispersion vom Magnetfeld unabhängig. In einer realen Probe gilt jedoch $v \propto 1/B$, so daß letztlich für jede Feldamplitude eine eigene Bandstrukturrechnung erforderlich ist.

1.5.2 Antikreuzungen

Das Verhalten der Dispersion in der Umgebung der kleinen, in Abb. 1.10a vergrößert dargestellten Energielücke ② kann in dem Bild von überlagerten Landau-Bandstrukturen schwach gekoppelter Systeme erklärt werden. Diese Betrachtungsweise wurde auch von Tin-Lun Ho angewandt: In [Ho94] wird die Lage und Größe der Energielücken einer Landau-Dispersion näherungsweise berechnet, die sich an einer dünnen und hohen Tunnelbarriere ausbildet. Im quasi-kontinuierlichen Spektrum der verbogenen Landau-Bänder auf der linken Seite der Barriere (vgl. Abb. 1.6a) entstehen durch Kopplung mit Randzuständen der rechten Seite kleine

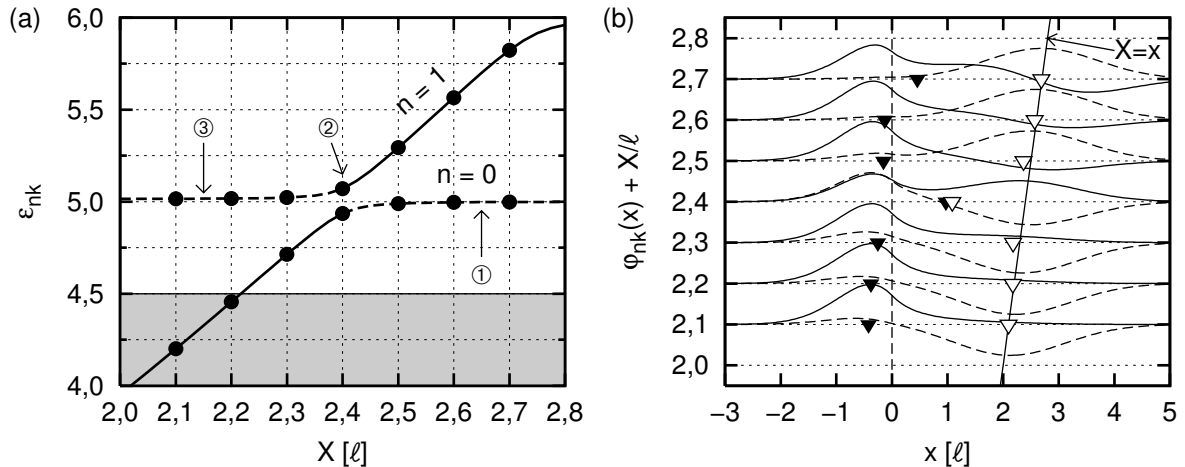


Abb. 1.10. (a) Ausschnitt der Bandstruktur aus Abb. 1.9a. Eigenzustände auf den als durchgezogene Linie gezeichneten Ästen der Dispersion haben den Charakter von Randzuständen, während die zu den gestrichelten Ästen gehörenden Wellenfunktionen sich eher wie Volumenzustände verhalten. (b) Für die mit • in (a) gekennzeichneten Zustände sind die normierten Wellenfunktionen unter Beibehaltung der Konvention für die Liniengestaltung auf der Höhe des jeweiligen Leitzentrums angetragen. Die Dreiecke markieren den Schwerpunkt der Aufenthaltswahrscheinlichkeit. Für Volumenzustände fällt dieser – mit Ausnahme des Mischzustandes an der Energielücke – mit dem Leitzentrum X zusammen.

Lücken im Energiespektrum. In Analogie zu benachbarten Quantentöpfen [Bas96] entstehen aus zwei schwach gekoppelten Zuständen gleicher Energie die Mischzustände $[\varphi_{nk}^L(x) \pm \varphi_{nk}^R(x)]/\sqrt{2}$ in symmetrischer (+) und antisymmetrischer (–) Weise. Die einhergehende Energieaufspaltung hebt die Entartung an den Schnittpunkten der überlagerten Bandstrukturen ε_{nk}^L und ε_{nk}^R auf.³⁰ Eine Entsprechung zu dem System von [Ho94] ist in dem Fall einer halbseitig unendlich ausgedehnten Barriere nur in dem Bereich ① bis ③ gegeben, wo die Randzustände der linken Dispersion nur geringfügig mit den Volumenzuständen der oberen Potentialebene überlappen.

Um die Situation an der Energielücke ② bei $X = -2,4\ell$ und $\varepsilon_{nk} = 5$ bzw. an den dazu äquivalenten Lücken zwischen Bändern höherer Ordnung zu untersuchen, wird das Gesamtsystem zunächst in zwei ungekoppelte Systeme zerlegt. Dieses Gedankenexperiment ist im vorliegenden Fall schwieriger zu konstruieren als bei einem Doppel-Quantentopf oder einem Elektronensystem, das durch eine Tunnelbarriere unterbrochen ist. In den beiden letzteren Fällen ist die Kopplungsstärke einfach durch die Barrierenparameter bestimmt und einstellbar. Ohne ins Detail zu gehen, könnte in unserem Fall das Gesamtsystem folgendermaßen aufgetrennt werden, um es in eine vergleichbare Konstellation zweier schwach gekoppelter Teilsysteme zu bringen: Auf der linken Seite wird eine Dispersion angenommen, wie sie an einer Barriere der Höhe $V \gg 5\hbar\omega_c$ auftritt. Eine solche Bandstruktur sieht im wesentlichen wie in Abb. 1.6a aus, wobei die Energieeigenfunktionen für $x > 0$ exponentiell abfallen (Abb. 1.9b für $\varepsilon_{nk} < v$). Diese Dispersion wird nun mit der Landau-Leiter überlagert, die in dem Bereich $X > 0$ mit dem konstanten Potential $v = 5$ vorliegt. Voraussetzung für die folgende Betrachtung

³⁰Auf die näherungsweise Berechnung der Antikreuzungen an einer Tunnelbarriere und der zugehörigen Wellenfunktionen wird in den Abschnitten 2.4.2 und 2.4.3 genauer eingegangen.

tung ist, daß der Volumenzustand auf der oberen Potentialebene an dem Heteroübergang bei $X = 0$ genügend stark abgeklungen ist. Diese Bedingung wird wegen $\Delta X_{\text{VR}} = 1 \ell$ (Gl. 1.62) von Grundzuständen in der Umgebung der Energielücke bei $X \approx 2,4 \ell$ leicht erfüllt.

Wenn angenommen würde, daß beide Teilsysteme ungekoppelt seien, so wären die in Abb. 1.10a als gestrichelte und durchgezogene Kurve dargestellten Arme der Bandstrukturen jeweils ohne die Unterbrechung einer Energielücke, sie würden sich also schneiden. In dem hypothetischen System repräsentiert die horizontale Linie mit $\varepsilon_{nk} = v$ das unterste Landau-Niveau der oberen Potentialebene. Die zugehörigen Eigenfunktionen haben die Form einer Gaußschen Glockenkurve und ihr Aufenthaltsschwerpunkt fällt mit dem Leitzentrum X zusammen. Auch die diagonal ansteigende Dispersion korrespondiert zu Grundzuständen ohne Knoten. Hierbei handelt es sich um die Randzustände der unteren Potentialebene, die sich schwerpunktmäßig links der Barriere mit einem deutlichen Abstand zum Leitzentrum aufhalten.

Die Energieeigenfunktionen der gekoppelten Teilsysteme sind in Abb. 1.10b als Ergebnis einer exakten quantenmechanischen Rechnung für das Gesamtsystem wiedergegeben. Die Wellenfunktionen ergeben sich näherungsweise als symmetrische und antisymmetrische Mischungen der Eigenzustände der ungekoppelten Teilsysteme. Die antisymmetrischen Mischungen besitzen einen Knoten, weisen eine höhere Energie auf und bilden deshalb das 1. Band des Gesamtsystems. Die Zustände des Gesamtsystems haben im wesentlichen – mit Ausnahme von $X \approx 2,4$ – denselben Charakter wie im jeweiligen Teilsystem bei ausgeschalteter Kopplung: Der Schwerpunkt der Wellenfunktionen, die mit durchgezogener Linie gezeichnet sind, liegt links der Barriere und zwar auch dann, wenn der Zustand dem ersten angeregten Band angehört und deshalb einen Knoten besitzt. In Anhang B wird gezeigt, daß die Differenz $\langle x \rangle - X$ zwischen Aufenthaltsschwerpunkt und Leitzentrum proportional zum Teilchenimpuls (1.28) eines Elektrons in einem solchen Randzustand ist. Die gestrichelten Wellenfunktionen repräsentieren hingegen Volumenzustände mit einer Wahrscheinlichkeitsdichte, die um das Leitzentrum zentriert ist, und die einen fast verschwindenden Teilchenimpuls besitzen.

Ein deutlich anderes Bild ergibt sich an der Stelle $X = 2,4 \ell$, wo sich die beiden Bänder am nächsten kommen: Hier addieren sich die Zustände der ungekoppelten Teilsysteme mit gleicher Gewichtung zu Eigenfunktionen, die maximal überlappen und demnach einen identischen Schwerpunkt aufweisen. Die einhergehende Modifizierung der Zustandsenergien hebt die Entartung an den Kreuzungspunkten der Rand- und Volumendispersionen auf. Dieses Verhalten bezeichnet man als Antikreuzung (engl. *anticrossing*). Der Begriff bringt zum Ausdruck, daß zwei aufeinanderfolgende Bänder sich an einem Punkt nicht nur stark annähern, sondern daß jenseits der Energielücke wesentliche Eigenschaften der Wellenfunktion auf das jeweils andere Band übergehen. So ändert sich die Knotenzahl, obwohl die Verteilung der Aufenthaltswahrscheinlichkeit gleichartig bleibt.

Antikreuzungen gibt es nur in Systemen, die – zumindest für einen Bereich der Bandstruktur – näherungsweise durch schwach gekoppelte Teilsysteme dargestellt werden können. In diesen Fällen besteht eine große Ähnlichkeit zwischen den einzelnen Abschnitten der Gesamtdispersion und den Eigenwerten und -funktionen des jeweils zugrundeliegenden Teilsystems. Wesentliche Abweichungen treten nur an den Antikreuzungen auf. Für den Fall einer

dünnen, jedoch hinreichend hohen Tunnelbarriere wird in [Ho94] dargelegt, wie die Bandstruktur des Gesamtsystems in der Umgebung der Antikreuzungen berechnet werden kann. Bei einer halbseitig unendlich ausgedehnten Barriere ist eine solche Näherung nur an den äußeren Energielücken bei ② möglich.

Innerhalb des von beiden Halbparabeln eingeschlossenen Bereichs in Abb. 1.9a sind die von links und rechts kommenden Zustände gleichermaßen von der Potentialstufe beeinflusst. Hier existiert keine sinnvolle Auftrennung in schwach gekoppelte Teilsysteme. Die korrekte Bandstruktur erhält man nur durch das Lösen des Eigenwertproblems für das Gesamtsystem. Die vollständige Rechnung in Abb. 1.9a zeigt, daß in dem Übergangsbereich keine Antikreuzungen existieren. Die Energielücke oszilliert in dem Intervall $(1 \pm 0,2) \hbar\omega_c$, während sie bei ② den Wert $0,13 \hbar\omega_c$ hat. Ein weiteres Merkmal der Umgebung einer Antikreuzung fehlt in dem Übergangsbereich: Während in Abb. 1.10b der Aufenthaltsschwerpunkt energetisch aufeinanderfolgender Eigenfunktionen um mehr als die doppelte magnetische Länge springt, verschiebt sich der Schwerpunkt für $X = -\ell/2$ in Abb. 1.9b mit zunehmender Energie in kleinen Schritten nach links.

1.5.3 Chklovskii-Bild

Die stufenförmige Dispersion in Abb. 1.9a weist formal eine große Ähnlichkeit mit dem von Chklovskii, Shklovskii und Glazman entwickelten Bild von kompressiblen und inkompressiblen Streifen am Rand eines Quanten-Hall-Systems auf [Chk92]. Dies gilt insbesondere für die Antikreuzungen ② am rechten Rand des Übergangsbereichs, wo die Stufen aufeinanderfolgender Bänder dieselbe Höhe $\varepsilon_{nk} = v + n$ aufweisen. Da generell von Interesse ist, ob das Chklovskii-Bild auf die modulierten Elektronensysteme dieser Arbeit anwendbar ist, werden im folgenden die Unterschiede und Gemeinsamkeiten mit der Bandstruktur an einer endlich hohen und einseitig unendlich ausgedehnten Barriere untersucht.

Während die Tunnelbarriere sowohl in der theoretischen Rechnung (Kapitel 2) als auch in der experimentellen Realisierung (Kapitel 4) eine scharfe Stufenform hat, wird in [Chk92] ein modulationsdotiertes zweidimensionales Elektronensystem betrachtet, das an seinem Rand durch das Feld einer lateralen Steuerelektrode eingeschränkt ist. Im Anschluß an eine Verarmungszone steigt die Elektronendichte $n(x)$ mit zunehmendem Abstand zur Steuerelektrode an, bis der im Probeninneren vorherrschende Wert erreicht ist. Der Dichteanstieg vollzieht sich auf einer langen Strecke, die einige μm betragen kann. Es wird erwartet [Chk92], daß bei geätzten Probenrändern ähnliche Längen maßgeblich sind.

Angesichts einer Elektronendichte, die auf der Skala der magnetischen Länge flach ansteigt, würde man zunächst wie in Abb. 1.11a ein flach und monoton auslaufendes Potential erwarten, dem die Landau-Bänder unter Beibehaltung einer konstanten Aufspaltung folgen. Tatsächlich ergibt jedoch in [Chk92] eine semiklassische, elektrostatische Rechnung, daß Abschirmeffekte zu einer Bandstruktur mit alternierenden kompressiblen und inkompressiblen Bereichen führen (Abb. 1.11b). Die Schnittpunkte zwischen der Fermi-Energie und den Landau-Bändern in Abb. 1.11a entarten also zu Bereichen konstanter Energie. Diese Plateaus

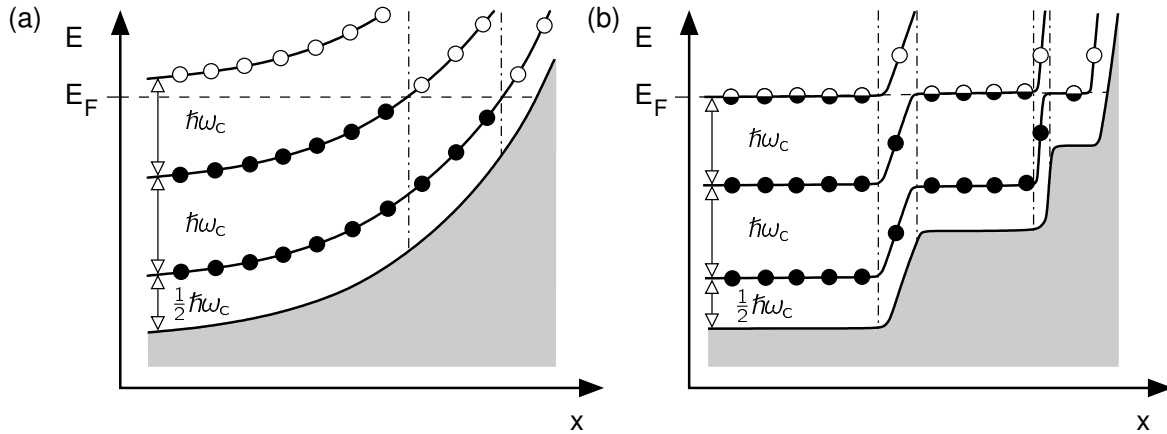


Abb. 1.11. (a) Landau-Bänder folgen im Einteilchenbild dem flach auslaufenden Randpotential (grau unterlegt). An den Schnittpunkten mit dem Fermi-Niveau befinden sich die Randkanäle. **(b)** Chklovskii-Bild [Chk92]: Abschirmungseffekte in Bereichen mit nichtganzzahligem Füllfaktor führen zu teilbesetzten Plateaus, die stromführende kompressible Streifen entlang des Probenrandes bilden. Innerhalb der inkompressiblen Streifen steigen die vollständig besetzten Landau-Bänder um $\hbar\omega_c$ an.

sind einige 100 nm breit und stellen streifenförmige Randkanäle dar, die nur teilweise gefüllt sind, so daß das elektrische Feld in ihrem Inneren vollständig abgeschirmt werden kann. Man bezeichnet die Streifen als kompressibel, weil in ihrem Gebiet eine infinitesimale Änderung der Elektronendichte mit einer stetigen Änderung des chemischen Potentials einhergeht [Eza00]. Die kompressiblen Streifen sind durch deutlich schmalere inkompressible Streifen getrennt, in denen der Füllfaktor ganzzahlig ist und aufgrund der fehlenden Abschirmung ein starkes Potentialgefälle vorherrscht.

Die Dispersion an einer endlich hohen Barriere (Abb. 1.9a) beruht auf Voraussetzungen, die denen des Chklovskii-Bildes entgegengesetzt sind. Trotz der vordergründigen Ähnlichkeit liegen auch im Ergebnis grundsätzliche Unterschiede vor. So existieren an der endlichen Potentialstufe Randkanäle im eigentlichen Sinn nur für Zustandsenergien mit $\varepsilon_{nk} < v$. In diesem Energiebereich ist die Dispersion jedoch noch ohne Stufen. Diese treten erst für $\varepsilon_{nk} \geq v$ auf, wenn eine Mischung zwischen Randzuständen der unteren und Volumenzuständen der oberen Potentialebene stattfindet. Für eine Fermi-Energie $E_F \geq V + \frac{1}{2}\hbar\omega_c$ hat man zwar eine ähnliche Situation wie im Chklovskii-Bild, jedoch liegen in dem Bereich der Potentialstufe keine Randzustände, denn diese befinden sich bei einer realen Probe erst an der tatsächlichen Berandung. Die Plateaus im Übergangsbereich der Dispersion in Abb. 1.9a rühren daher, daß für steigendes X der Schwerpunkt der Aufenthaltswahrscheinlichkeit streckenweise hinter dem Leitzentrum zurückbleibt. Mit jedem Wellenberg, der die Potentialstufe überwindet, erreicht die Zustandsenergie das nächste Plateau. Entsprechend stimmt die Anzahl der Zwischenplateaus mit dem Bandindex überein. In [Bar94] wird dieser Effekt für die ersten beiden Landau-Bänder diskutiert. Ein entscheidender Unterschied zum Chklovskii-Bild besteht darin, daß die Dispersion an einer scharfen Potentialstufe von der Fermi-Energie bzw. dem Füllfaktor unabhängig ist, während die kompressiblen Streifen bei einem flachen Randpotential stets mit der Fermi-Energie zusammenfallen.

Die Gültigkeit von Einteilchendisersionen für Vielteilchensysteme untersuchten Huber, Grayson *et al.* an Elektronensystemen in CEO-Strukturen [Gra04a, Hub05]. Es wurde eine impuls aufgelösten Spektroskopie von Randkanälen an einer im zweiten Wachstumsschritt hergestellten Tunnelbarriere durchgeführt. Als Abstand zwischen den Randkanälen ergaben sich Werte, die kleiner als die magnetische Länge sind. An scharfen, durch Heteroübergänge hervorgerufenen Stufen des Leitungsbandverlaufs trifft also das Chklovskii-Bild nicht zu, und eine quantenmechanische Einteilchenrechnung wie die aus Abschnitt 1.4 ist auch für ein Vielteilchensystem gültig. Während Huber *et al.* ein zweidimensionales Elektronensystem untersuchten, wurde von Snell *et al.* ein Landau-quantisiertes dreidimensionales Elektronensystem studiert [Sne87]. Auch hier konnte mit der Messung des Tunnelstroms eine Landau-Dispersion bestätigt werden, die im Rahmen einer Einteilchenrechnung gewonnen wurde (Gl. 1.64).

1.6 Zusammenfassung

Im zweidimensionalen Elektronensystem führt ein senkrechtes Magnetfeld zur Kopplung der Komponenten des Elektronenimpulses. Sofern das durch den Leitungsbandverlauf bestimmte Potential nur in einer Richtung variiert, ist es in der Landau-Eichung möglich, das zweidimensionale System auf ein eindimensionales Problem zu reduzieren. Der maßgebliche Potentialverlauf kann in den Heterostrukturen dieser Arbeit in guter Näherung als abschnittsweise konstant angesehen werden. Das ermöglicht die Darstellung des Lösungsspektrums der Schrödinger-Gleichung durch eine Basis aus Parabolischen Zylinderfunktionen. Einen Spezialfall dieser Wellenfunktionen stellen die Hermiteschen Funktionen als Lösungen des harmonischen Oszillators dar. Sie beschreiben nichtdispersive Volumenzustände, die von Potentialvariationen unbeeinflusst sind. Die Stetigkeitsbedingungen an den Potentialstufen müssen von der abschnittsweise definierten Gesamtwellenfunktion simultan erfüllt werden. Die Lösung des entsprechenden Gleichungssystems ergibt nicht nur den Verlauf der Landau-Bänder in beliebiger Genauigkeit, sondern die Wellenfunktionen können im Gegensatz zu einer rein numerischen Rechnung (etwa auf einem Gitter [Tak00]) in sehr kompakter Weise durch einen Satz von Mischungsparametern und Energieeigenwerten repräsentiert werden.

Anhand der Schrödinger-Gleichung wurden in diesem Kapitel zunächst die fundamentalen Eigenschaften der dispersiven Landau-Zustände erarbeitet. Eine besondere Bedeutung kommt dabei dem Leitzentrum zu. Es unterliegt denselben Erhaltungssätzen wie der Kristallimpuls und ermöglicht die Auftragung der Dispersion im Ortsraum. Am Beispiel eines unendlich hohen Randpotentials konnte der Übergang von Volumen- zu Randzuständen und die Invarianz der Dispersion bezüglich des Magnetfeldes studiert werden. Ein Ansatz mit Parabolischen Zylinderfunktionen ist – nicht zuletzt wegen der umfangreichen Literatur darüber – einfacher zu handhaben als der äquivalente Funktionsausdruck von MacDonald und Středa. Für die nur in numerischen Werten vorliegende Dispersion wurde eine verbesserte Näherungsformel gefunden. In der Umgebung einer endlich hohen Potentialstufe weist die Bandstruktur Merkmale auf, die auch im Falle einer Tunnelbarriere anzutreffen sind. Neben der oszillatorischen Struktur sind das vor allem Antikreuzungen, die sich zwischen Randzuständen im Grundzustand und der Landau-Leiter der Volumenzustände der oberen Potentialebene ausbilden.

Die vermeintlichen Parallelen zum Chklovskii-Bild, das ein am Rand elektrostatisch eingeschränktes Elektronensystem beschreibt, wurden zum Anlaß genommen, die Gültigkeit der hier durchgeführten Einteilchenrechnung für das reale Vielteilchenproblem zu untermauern.

Kapitel 2

Bandstruktur an einer Tunnelbarriere

Nachdem im vorherigen Kapitel ein allgemeiner Lösungsweg zur Bestimmung der Landau-Zustände in einem zweidimensionalen Elektronensystem mit unidirektionaler Modulation entwickelt wurde, soll nun im speziellen die Bandstruktur an einer Tunnelbarriere berechnet und diskutiert werden. Während bereits vorhandene Näherungsmethoden Bedingungen an die Kopplungsstärke stellen [Ho94] oder die Form der Barriere nicht berücksichtigen [Tak00], gilt die vorgestellte Lösungsmethode für eine rechteckige Barriere von beliebiger Breite und Höhe. Zur Analyse der experimentellen Ergebnisse dieser Arbeit wird zwar nur die Bandstruktur schwach gekoppelter Elektronensysteme benötigt, das Lösungsverfahren kann aber auch zur Berechnung der Landau-Dispersion an Barrieren mit niedriger oder negativer (Quantendraht) Höhe unverändert eingesetzt werden.

Den ersten Schwerpunkt dieses Kapitels bildet die Darstellung eines robusten Algorithmus zur Lösung des Gleichungssystems. Letzteres ergibt sich aus den Stetigkeitsbedingungen für die Gesamtwellenfunktion an beiden Potentialstufen. Anhand der Grenzfälle der starken und schwachen Kopplung benachbarter Elektronensysteme werden die Eigenschaften des Energiespektrums und der zugehörigen Wellenfunktionen diskutiert. Die Ergebnisse bilden den Ausgangspunkt für das in Kapitel 3 entwickelte Modell über das Verhalten des Tunnelstroms in Abhängigkeit von Magnetfeld und Fermi-Energie. Abschließend behandelt dieses Kapitel die Bandstruktur an einer Tunnelbarriere mit angelegter Vorspannung und die eines Elektronensystems mit eingebettetem Quantendraht.

2.1 Eigenwertproblem

Im folgenden betrachten wir das unendlich ausgedehnte zweidimensionale System, das in Abb. 2.1 skizziert ist. Es enthält eine rechteckige Barriere, die in x -Richtung auf der Länge a das

Potential V_0 aufweist und in y -Richtung konstant ist. Der Potentialverlauf lautet also

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < -a/2; \\ V_0 & |x| \leq a/2; \\ 0 & x > a/2 \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad v(\xi) = \begin{cases} 0 & \xi < -\frac{1}{2}\frac{a}{\ell} - \frac{X}{\ell}; \\ v & -\frac{1}{2}\frac{a}{\ell} - \frac{X}{\ell} \leq \xi \leq \frac{1}{2}\frac{a}{\ell} - \frac{X}{\ell}; \\ 0 & \frac{1}{2}\frac{a}{\ell} - \frac{X}{\ell} < \xi, \end{cases}$$

wobei $v = V_0/\hbar\omega_c$ gilt. Während außerhalb der Barriere dieselben Wellenfunktionen wie bei der endlich hohen Potentialstufe in Abschnitt 1.5 angesetzt werden können, ist innerhalb der Barriere gemäß Fall *iii*) in Abschnitt 1.3.3 das komplette Fundamentalsystem (1.53) zu verwenden. Die Ortsposition der linken („-“) bzw. rechten („+“) Flanke der Barriere wird ab jetzt mit

$$\xi_{\pm} = \pm \frac{a}{2\ell} - \frac{X}{\ell} \quad (2.1)$$

abgekürzt. Mit den Skalierungsfaktoren α_{\pm} und dem Normierungsfaktor γ lautet die stetige und auf Eins normierte Gesamtwellenfunktion in Richtung der Potentialmodulation:

$$\hat{\varphi}_{nk}(\xi) = \gamma \begin{cases} \alpha_- D_{\varepsilon_{nk}}(-\xi\sqrt{2}) & \xi < \xi_-; \\ D_{\varepsilon_{nk}-v}(-\xi\sqrt{2}) + \beta_{nk} D_{\varepsilon_{nk}-v}(\xi\sqrt{2}) & \xi_- \leq \xi \leq \xi_+; \\ \alpha_+ D_{\varepsilon_{nk}}(\xi\sqrt{2}) & \xi_+ < \xi. \end{cases} \quad (2.2)$$

Wie in Abschnitt 1.3.4 ausgeführt wurde, genügt es, wenn α_{\pm} und γ erst der nach Lösung des Eigenwertproblems von ε_{nk} bestimmt werden. Die Gesamtwellenfunktion $\varphi_{nk}(\xi)$ in der Definition von (1.41) geht aus (2.2) mit $\alpha_{\pm} = \gamma = 1$ hervor. Unter Verwendung der Ableitungsformel (1.51) ergibt das Einsetzen in (1.57) zusammen mit der Bedingung für eine normierte Aufenthaltswahrscheinlichkeit folgendes System mit fünf Gleichungen:

$$\alpha_{\pm} D_{\varepsilon_{nk}}(\pm\xi_{\pm}\sqrt{2}) - D_{\varepsilon_{nk}-v}(-\xi_{\pm}\sqrt{2}) + \beta_{nk} D_{\varepsilon_{nk}-v}(\xi_{\pm}\sqrt{2}) = 0, \quad (2.3a)$$

$$\mp D_{\varepsilon_{nk}+1}(\pm\xi_{\pm}\sqrt{2}) D_{\varepsilon_{nk}-v}(-\xi_{\pm}\sqrt{2}) \mp \beta_{nk} D_{\varepsilon_{nk}+1}(\pm\xi_{\pm}\sqrt{2}) D_{\varepsilon_{nk}-v}(\xi_{\pm}\sqrt{2}) - \\ - D_{\varepsilon_{nk}}(\pm\xi_{\pm}\sqrt{2}) D_{\varepsilon_{nk}-v+1}(-\xi_{\pm}\sqrt{2}) + \beta_{nk} D_{\varepsilon_{nk}}(\pm\xi_{\pm}\sqrt{2}) D_{\varepsilon_{nk}-v+1}(\xi_{\pm}\sqrt{2}) = 0, \quad (2.3b)$$

$$1 - \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}_{nk}^2(\xi) d\xi = 0. \quad (2.3c)$$

Dieses Gleichungssystem bestimmt die fünf Unbekannten ε_{nk} , β_{nk} , α_- , α_+ und γ . Das Kernproblem besteht dabei im simultanen Lösen der beiden Gleichungen (2.3b), die den Energieeigenwert ε_{nk} und das Gewichtsverhältnis β_{nk} festlegen. Eine stetige Gesamtwellenfunktion erhält man durch Berechnung der Skalierungsfaktoren α_{\pm} anhand von (2.3a). Schließlich ist der Normierungsfaktor γ durch (2.3c) gegeben.

Bei der Lösung des Gleichungssystems (2.3) ist zu berücksichtigen, daß dieses auch von Scheinlösungen erfüllt wird, siehe Abschnitt 1.3.5, Fall *iii*). Im mittleren Intervall ($|x| \leq a/2$) stellt sich die Teilwellenfunktion als Linearkombination beider Parabolischer Zylinderfunktionen dar. Für ganzzahliges $(\varepsilon_{nk} - v)$ und dem durch (1.58) gegebenen Parameter β_{nk} wird sie identisch gleich Null. Diese Fälle schließt das folgende Verfahren im vorhinein aus.

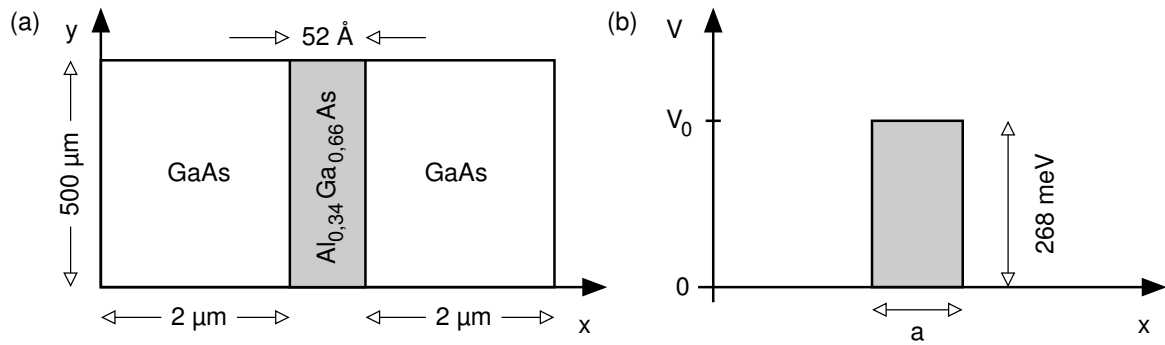


Abb. 2.1. (a) Schematische Schnittzeichnung der Probenstruktur, die in Kapitel 4 vorgestellt wird. Das in der (110)-Ebene liegende 2DES enthält eine Barriere, die beim (001)-Wachstum hergestellt wurde. (b) Das Potential entlang der x -Richtung ist durch den Leitungsbandverlauf der Struktur bestimmt.

2.2 Lösungsverfahren

Um die Landau-Bandstruktur für das System in Abb. 2.1 zu erhalten, sind alle Lösungen von (2.3b) in einem bestimmten Bereich des Leitzentrums und der Zustandsenergie zu ermitteln. Für ein herausgegriffenes $X \in [X^{\min}; X^{\max}]$ gilt es also, alle Lösungstupel $(\varepsilon_{nk}; \beta_{nk})$ mit $\varepsilon_{nk} \in [\varepsilon^{\min}; \varepsilon^{\max}]$ zu bestimmen. Dieses Ziel ist mit Standardverfahren zur Lösung von Gleichungssystemen nicht zu erreichen. Die Verfahren finden zwar immer *eine* Lösung in dem zweidimensionalen Parameterraum, und zwar in beliebiger Genauigkeit. Aber sie scheitern an der Aufgabe, *alle* Landau-Zustände im interessierenden Energiebereich zu finden. Das liegt daran, daß diesen Algorithmen weder die Anzahl der Lösungen noch deren ungefähre Lage bekannt ist, was jedoch notwendig wäre, um jeweils geeignete Anfangsbedingungen zu setzen.

Selbst wenn Standardverfahren versuchen, mehrere Lösungen aufzufinden¹, so mißlingt dies aufgrund der starken Nichtlinearität des Gleichungssystems. Wie in Abb. 1.4 zu sehen ist, führt bei den Parabolischen Zylinderfunktionen bereits eine kleine Änderung des Grades $\varepsilon_{nk} - v_i$ unter Umständen zu einem Vorzeichenwechsel der Divergenz, die bei großen Argumenten auftritt. Die dann veränderte Knotenzahl der Wellenfunktion kann dazu führen, daß selbst eine bereits eingegrenzte Lösung kurz vor der Konvergenz wieder verloren geht. Ein weiteres Problem stellt das Ungleichgewicht der Wertebereiche von ε_{nk} und β_{nk} dar. Während der Energieeigenwert in Bereichen zu suchen ist, die sowohl im Absolutwert als auch in ihrer Ausdehnung von der Größenordnung Eins sind, nimmt das Gewichtungungsverhältnis β_{nk} zum Teil sehr kleine (etwa: 10^{-100}) oder auch sehr große Werte (etwa: 10^{100}) an.

Nur mit einem dedizierten Lösungsverfahren, das die speziellen Eigenschaften des Gleichungssystems (2.3b) und der dadurch bestimmten Wellenfunktionen berücksichtigt, kann eine nahezu lückenlose Bandstruktur berechnet werden. Im Rahmen dieser Arbeit wurde ein solcher Algorithmus entworfen. In einem vorgegebenen Energieintervall werden zwar auch mit diesem nicht zwangsläufig alle Lösungen gefunden. Im Gegensatz zu weniger robusten Verfahren, die wie in Abschnitt 1.5 jedes Band einzeln durch sukzessive Variation des Leitzentrums berechnen, besteht jedoch nicht das Problem, daß ganze Äste der Dispersion ausgelassen wer-

¹Die Funktion `fsolve` in Maple[®] ermittelt ausschließlich bei Polynomen mehrfache Lösungen.

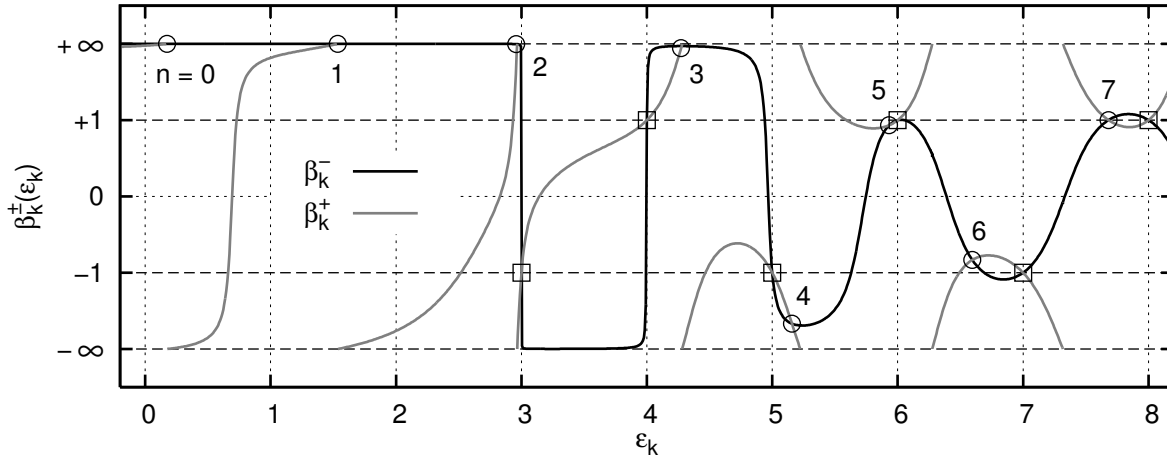


Abb. 2.2. Der zweidimensionale Lösungs- bzw. Phasenraum $(\varepsilon_k; \beta_k)$ für $B = 9,2 T$, $X = -1,8\ell$ bei einer Barriere der Höhe $v = 3$ und Breite $a = 179 \text{ \AA} = 2,12\ell$. Die Stetigkeitsbedingung (2.3b) auf der linken (rechten) Flanke der Barriere ist für Punkte auf der schwarzen (grauen) Kurve erfüllt. Die Schnittpunkte \circ repräsentieren die Eigenzustände $(\varepsilon_{nk}; \beta_{nk})$ des Systems (komplette Bandstruktur in Abb. 2.5). Die Scheinlösungen (1.58) sind mit dem Symbol \square gekennzeichnet. Während $\beta_k^-(\varepsilon_k)$ stetig ist, weist die Funktion $\beta_k^+(\varepsilon_k)$ in dem gewählten Energieintervall sieben Singularitäten auf. Die Ordinatenachse ist mit der Arkustangensfunktion verzerrt, um gleichermaßen Lösungen mit kleinem und sehr großem β_k darstellen zu können.

den, was bei der komplexen Bandstruktur an einer Tunnelbarriere nur durch sehr aufwendige heuristische Überlegungen zu vermeiden wäre.

Separierung des Gleichungssystems

Anstatt die Parameter ε_{nk} und β_{nk} gemäß dem Gleichungssystem (2.3b) gleichzeitig zu bestimmen, besteht der Ansatz darin, beide Gleichungen separat für eine der beiden Unbekannten zu lösen. Die Möglichkeit, ε_{nk} in Abhängigkeit von β_{nk} zu berechnen, scheidet dabei aus. Da die Anzahl der Wellenberge von φ_{nk} mit ε_{nk} variiert, gäbe es mehrfache Lösungen für ε_{nk} , weshalb gegenüber einem direkt auf (2.3b) angewendeten Standardverfahren nichts gewonnen wäre. Dahingegen ergibt das Auflösen der Gleichungen nach β_{nk} jeweils genau einen Wert, so daß man entsprechende Funktionen $\beta_k^\pm(\varepsilon_k)$ definieren kann, die nun die Stetigkeitsbedingung für die Wellenfunktion an den Stellen ξ_\pm darstellen. Für $\beta_k^\pm(\varepsilon_k)$ liegt zwar kein analytischer Ausdruck vor, der Funktionswert kann jedoch zuverlässig mit numerischen Verfahren bestimmt werden. Mit der Definition der Parameterfunktionen $\beta_k^\pm(\varepsilon_k)$ reduziert sich das System (2.3b) auf die einzelne Gleichung $\beta_k^-(\varepsilon_k) = \beta_k^+(\varepsilon_k)$. Wie aus Abb. 2.2 ersichtlich ist, besteht die Aufgabe nun in der Bestimmung der Schnittpunkte zweier Funktionen.

Durch Scheinlösungen bestimmte Schnittpunkte sind durch (1.58) im vorhinein bekannt und befinden sich bei $\varepsilon_k = v + m$ mit $m \in \mathbb{N}$. Die anderen Schnittpunkte im Intervall $[\varepsilon_k^{\min}; \varepsilon_k^{\max}]$ können mit einem einfachen Rasterverfahren grob lokalisiert werden. Selbst bei den Antikreuzungen (Abschnitt 1.5.2) von schwach gekoppelten Elektronensystemen (vgl. Abb. 2.6b) liegen die Lösungen so weit auseinander, daß eine Schrittweite von $\Delta\varepsilon_k = 0,01$ in der Regel ausreichend ist. Wenn die Gewichtungsverhältnisse β_k^\pm für zwei im Raster be-

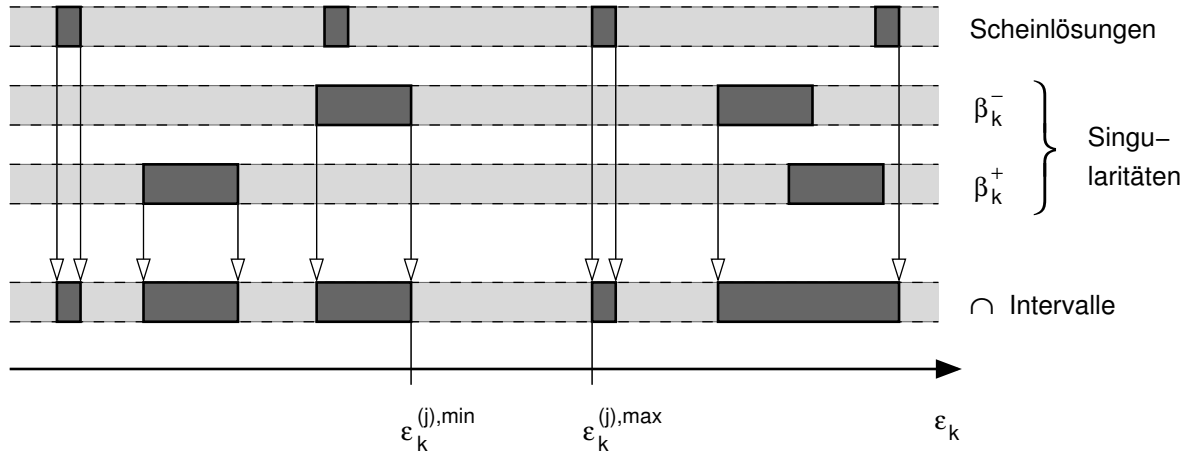


Abb. 2.3. Bestimmung der Intervalle $[\varepsilon_k^{(j),min}; \varepsilon_k^{(j),max}]$. Die dunkelgrauen Felder enthalten Scheinlösungen (Gl. 1.58) bzw. Singularitäten von $\beta_k^\pm(\varepsilon_k)$. In der Schnittmenge der hellgrauen Bereiche werden die Landau-Zustände anhand eines geometrischen Kriteriums ermittelt.

nachbarte ε_k -Werte bekannt sind, kann anhand eines einfachen geometrischen Kriteriums entschieden werden, ob dazwischen ein Schnittpunkt und damit eine Lösung vorliegt.

Die Singularitäten von $\beta_k^\pm(\varepsilon_k)$ erschweren die Rastersuche nach Schnittpunkten erheblich. Die Lösungen liegen häufig in unmittelbarer Nähe zu Singularitäten, was in Abb. 2.2 beispielsweise für das 0. bis 3. Landau-Niveau zutrifft. Die Rastermethode funktioniert aber nur fehlerfrei, wenn $\beta_k^-(\varepsilon_k)$ und $\beta_k^+(\varepsilon_k)$ in dem untersuchten Gebiet stetig sind. Die Singularitäten sind also bei einem Lösungsverfahren in besonderer Weise zu berücksichtigen, wozu sie zunächst innerhalb von kleinen Intervallen eingegrenzt werden.

Einteilung in Intervalle

Auch die Singularitäten von $\beta_k^\pm(\varepsilon_k)$ kann man durch Rasterung bezüglich ε_k grob lokalisieren. Bei den Definitionslücken handelt es sich immer um Polstellen mit Vorzeichenwechsel. Zwischen zwei Rasterpunkten liegt dann eine Singularität von $\beta_k^\pm(\varepsilon_k)$ vor, wenn $\beta_k^\pm(\varepsilon_k)$ und $\Delta\beta_k^\pm(\varepsilon_k)$ gleichzeitig einen Vorzeichenwechsel vollziehen.² Die Singularitäten liegen in der Regel so weit voneinander entfernt (Abb. 2.2), daß eine Schrittweite von $\Delta\varepsilon_k = 0,01$ ausreicht. Die Lokalisierung der Singularitäten ist in ihrer Genauigkeit das Rastermaß $\Delta\varepsilon_k$ bestimmt und sie kann durch ein einfaches Iterationsverfahren weiter verfeinert werden. Die Methode der Intervallhalbierungen erfordert genau³

$$N^{\text{fein}} = \left\lceil \frac{\log(\Delta\varepsilon_k) - \log(\Delta\varepsilon_k^{\text{fein}})}{\log(2)} \right\rceil \quad (2.4)$$

Iterationsschritte, um die Breite des Intervalls auf $\Delta\varepsilon_k^{\text{fein}}$ zu verkleinern. So benötigt man beispielsweise 14 Schritte zur Erreichung einer Genauigkeit von $\Delta\varepsilon_k^{\text{fein}} = 10^{-6}$. Die Intervalle können allerdings nicht beliebig klein gemacht werden, weil sich das Konvergenzverhalten der numerischen Auswertung der divergierenden Parameterfunktion mit zunehmender Nähe zur Singularität verschlechtert.

² $\Delta\beta_k^\pm(\varepsilon_k) = \beta_k^\pm(\varepsilon_k) - \beta_k^\pm(\varepsilon_k - \Delta\varepsilon_k)$.

³ $\lceil x \rceil$ bezeichnet die kleinste ganze Zahl, die größer oder gleich x ist.

Wenn den Scheinlösungen analog zu den Singularitäten Intervalle zugewiesen werden, vermag man sie in gleicher Weise bei der Suche nach Schnittpunkten von $\beta_k^\pm(\varepsilon_k)$ auszuschließen. Die Intervalle können entsprechend der Rechengenauigkeit sehr eng gesetzt werden, etwa: $]v + m - 10^{-10}; v + m + 10^{-10}[$ mit $m \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon_k^{\min} \leq v + m \leq \varepsilon_k^{\max}$. Es ist prinzipiell möglich, daß sich die Intervalle für Singularitäten und Scheinlösungen überlappen, so wie das etwa in Abb. 2.2 für $\varepsilon_k \approx 3$ beinahe der Fall ist. Die Häufigkeit der Überschneidungen kann zwar durch schmalere Intervalle stark herabgesetzt werden. Zur Wahrung eines stabilen Programmablaufs ist es trotzdem unerlässlich, etwaige Überlappungen in besonderer Weise zu berücksichtigen. Wie in Abb. 2.3 demonstriert wird, muß hierzu in dem Energieintervall $[\varepsilon_k^{\min}; \varepsilon_k^{\max}]$ die Schnittmenge der Intervalle (hellgrau) ohne Singularität oder Scheinlösung bestimmt werden. In den so gewonnenen Bereichen $[\varepsilon_k^{(j),\min}; \varepsilon_k^{(j),\max}]$ ist dann eine Suche nach den Schnittpunkten der Parameterfunktionen $\beta_k^\pm(\varepsilon_k)$ ohne den störenden Einfluß von Singularitäten möglich, wobei die Scheinlösungen automatisch von dem Verfahren ausgeschlossen sind.

Lösungen

Aufgrund der endlichen Größe der Intervalle um die Singularitäten ist es unvermeidlich, daß bestimmte Lösungen auch innerhalb von $]\varepsilon_k^{(j),\max}; \varepsilon_k^{(j+1),\min}[$ zu liegen kommen. Dies ist jedoch unproblematisch, weil sich Lösungen in unmittelbarer Nähe zu (extrem schmalen) Singularitäten ohnehin nur schlecht oder gar nicht als Schnittpunkt der Parameterfunktionen berechnen lassen. Sie bedürfen vielmehr einer speziellen Lokalisierungsmethode. Wenn sich eine Lösung in $[\varepsilon_k^{(j),\min}; \varepsilon_k^{(j),\max}]$ befindet, also weder in einem Intervall der Singularitäten noch der Scheinlösungen liegt, erlaubt die *Methode I* in zuverlässiger Weise, sie als Schnittpunkt von $\beta_k^\pm(\varepsilon_k)$ zu erkennen. Eine Lösung innerhalb des Intervalls einer Singularität kann hingegen mit der *Methode II*, die ohne die Auswertung der jeweils divergierenden Parameterfunktion auskommt, entdeckt und genau bestimmt werden.

Methode I: Bei der Suche nach Schnittpunkten ist das Rastermaß $\Delta\varepsilon_k^{(j)} = 0,01$ für jedes Intervall so anzupassen, daß $(\varepsilon_k^{(j),\max} - \varepsilon_k^{(j),\min}) / \Delta\varepsilon_k^{(j)}$ eine ganze Zahl und mindestens gleich drei ist. Zunächst kann versucht werden, die bei der Rasterung entdeckten Lösungen mit einem Standardverfahren für Gleichungssysteme zu präzisieren. Entsprechend der groben Lokalisierung sollte dabei der Wertebereich von ε_k beschränkt werden, um das Springen zu einer anderen Lösung zu verhindern. Da β_k innerhalb des Wertebereichs von ε_k eindeutig bestimmt ist, brauchen für diese Unbekannte keine Bereichsgrenzen vorgegeben zu werden. Wenn das Standardverfahren scheitert, was eher die Regel als die Ausnahme ist und was in Abb. 2.2 für die Lösungen mit $n < 4$ gilt, kann man die Lösung stattdessen mit der Methode der Intervallhalbierung weiter isolieren, wozu genau N^{fein} Iterationsschritte (Gl. 2.4) benötigt werden. Ein alternatives Verfahren besteht darin, die Intervallgrenzen für die aufgefundene Lösung unter Verwendung einer Interpolation des Schnittpunktes von $\beta_k^\pm(\varepsilon_k)$ einzuengen. Ein solches Interpolationsverfahren weist jedoch vor allem in der Umgebung von Singularitäten oder Stufen (beides bei $\varepsilon_k \approx 3$ in Abb. 2.2) der Parameterfunktionen aufgrund der dort vorherrschenden starken Nichtlinearität von $\beta_k^\pm(\varepsilon_k)$ ein schlechtes Konvergenzverhalten auf, weshalb es meist deutlich langsamer ist als die einfachere Methode der Intervallhalbierungen.

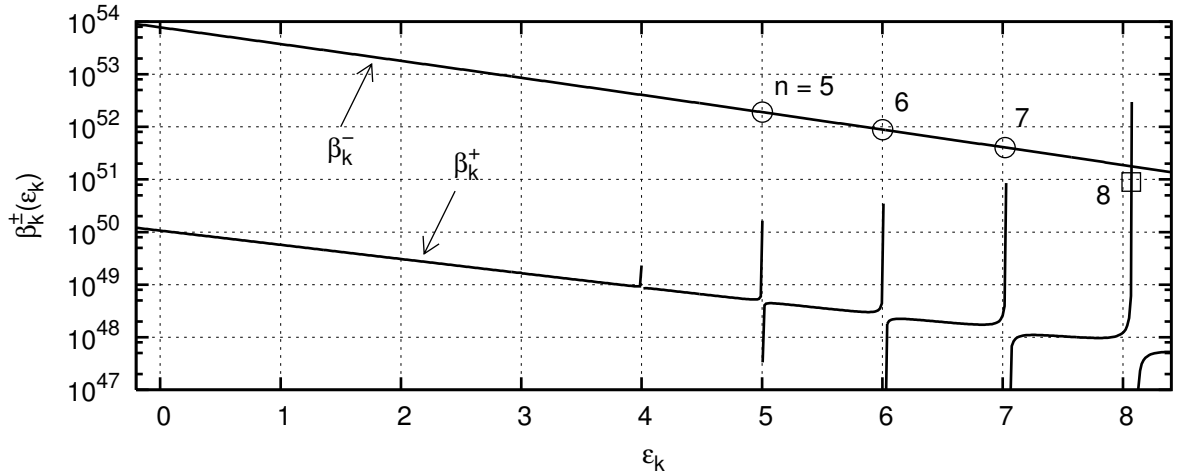


Abb. 2.4. Illustration zur Methode II; Phasenraum für $B = 1,84 T$, $X = -4,5 \ell$ bei einer Barriere der Höhe $V_0 = 268 \text{ meV} = 85 \hbar \omega_c$ und Breite $a = 52 \text{ \AA} = 0,28 \ell$. Die schmalen Singularitäten von β_k^+ können bei einer Schrittweite von $\Delta \varepsilon_k = 0,001$ erst für $\varepsilon_k \gtrsim 4$ aufgelöst werden. Die Funktion $\beta_k^-(\varepsilon_k)$ ist in dem dargestellten Energieintervall stetig. Die mit der Methode II erhaltenen Eigenwerte sind mit \circ gekennzeichnet. Die Lösung \square wurde mit Methode I als Schnittpunkt von $\beta_k^\pm(\varepsilon_k)$ bestimmt. Die vollständige Bandstruktur findet sich in Abb. 2.6.

Methode II: In bestimmten Bereichen der Dispersion sind die Singularitäten von $\beta_k^\pm(\varepsilon_k)$ so extrem schmal, daß die Rechengenauigkeit nicht hoch genug ist, um den Schnittpunkt der Parameterfunktionen mit Hilfe der Methode I zu bestimmen. Dieses Problem tritt insbesondere an den Ausläufern der Dispersion, am Übergang zu Volumenzuständen auf. So bereitet es im Beispiel von Abb. 2.4 Schwierigkeiten, für $\varepsilon_k \lesssim 4$ die Singularitäten von $\beta_k^+(\varepsilon_k)$ aufzufinden. Die Zustände mit dem Leitzentrum $X = -4,5 \ell$ haben in der Barriere eine nur sehr geringe Aufenthaltswahrscheinlichkeit. Folglich dominiert in dem Intervall $[\xi_-; \xi_+]$ diejenige Parabolische Zylinderfunktion (Gl. 2.2), die für $\xi \rightarrow -\infty$ divergiert (Abb. 1.4). Entsprechend ergibt die Stetigkeitsbedingung für die Gesamtwellenfunktion bei ξ_- ein $\beta_k^-(\varepsilon_k)$ mit großen Werten und stetigem Verhalten. Die Schnittpunkte mit den positiven Polen der scharfen Singularitäten von $\beta_k^+(\varepsilon_k)$ können nicht direkt bestimmt werden. Weil es aber klar ist, daß es einen solchen Schnittpunkt gegeben muß, genügt es jeweils, die Singularität so weit wie möglich einzugrenzen und den Wert von $\beta_k^-(\varepsilon_k)$ in der Mitte dieses Intervalls zu nehmen.

Alle Lösungen in Abb. 2.4 haben bezüglich der Energie denselben Unsicherheitsbereich $\Delta \varepsilon_{nk} = 10^{-6}$. Die Genauigkeit von β_{nk} hängt hingegen von der verwendeten Lösungsmethode ab. Das 5. bis 7. Landau-Niveau wurden mit der Methode II bestimmt. Wegen der Stetigkeit der Funktion $\beta_k^-(\varepsilon_k)$ kann das Gewichtungsverhältnis als $\beta_{nk} = \beta_k^-(\varepsilon_{nk})$ sehr präzise bestimmt werden. Die Lösung für das 8. Niveau in Abb. 2.4 liegt außerhalb des Intervalls der benachbarten Singularität, so daß hier die Methode I zur Anwendung kam. Diese bestimmt näherungsweise den Schnittpunkt beider Parameterfunktionen und liefert wegen der Steilheit von $\beta_k^+(\varepsilon_k)$ einen etwas ungenaueren Wert für β_{nk} als man hierfür mit der Methode II erhalten hätte.

Implementierung

Das dargestellte Lösungsverfahren wurde mit dem Computer-Algebrasystem Maple⁴ realisiert. Dieses Programm beherrscht nicht nur symbolische Mathematik, sondern auch numerische Verfahren, die mit einer beliebig hohen Zahl an geltenden Ziffern durchgeführt werden können. Da Maple ferner eine vollständige Programmiersprache beinhaltet, eignet es sich sehr gut zur Implementierung von komplexen numerischen Algorithmen. Der Nachteil der stark reduzierten Geschwindigkeit von interpretiertem Programmcode wird durch entscheidende Vorteile wettgemacht: Der Funktionswert der Parabolischen Zylinderfunktion kann in beliebiger Genauigkeit bestimmt werden und es wird eine Routine zur numerischen Lösung von Gleichungssystemen bereitgestellt, die, wenngleich sie zumeist an (2.3b) scheitert, die zuverlässige Berechnung der Parameterfunktionen $\beta_k^\pm(\varepsilon_k)$ ermöglicht.

Das Konvergenzverhalten der numerischen Berechnung von $D_\varepsilon(\xi\sqrt{2})$ verschlechtert sich im allgemeinen mit zunehmender Größe des Arguments. Dies gilt insbesondere dann, wenn wie mit (1.45) eine Darstellung verwendet wird, die auf die konfluente hypergeometrische Funktion zurückgreift [Tem00, Tem03]. Einer Nichtkonvergenz kann allerdings immer mit der Erhöhung der Anzahl der geltenden Ziffern begegnet werden. In dieser Hinsicht kritisch sind dabei vor allem Argumente, die deutlich außerhalb der Ausdehnung der Hermiteschen Funktionen (Abb. 1.5) liegen, was für $|\xi| > \sqrt{2\varepsilon + 1}$ (Gl. 1.62) der Fall ist. Die Dispersionen dieser Arbeit wurden in der Regel mit 40 Stellen umfassenden Fließkommazahlen berechnet. Es stellte sich heraus, daß der Rechenzeitbedarf des gesamten Lösungsverfahrens nur unterproportional mit der Zahl der geltenden Ziffern zunimmt. Indem $[X^{\min}; X^{\max}]$ in mehrere Bereiche unterteilt wird, kann die zeitaufwendige Bandstrukturechnung sehr gut parallelisiert werden, wobei die Kommandozeilenversion von Maple eine Automatisierung des gesamten Vorgangs ermöglicht.

2.3 Starke Kopplung

Zunächst betrachten wir ein Elektronensystem, das durch eine Barriere moduliert ist, deren Breite und Höhe von der Größenordnung der magnetischen Länge bzw. der Zyklotron-Energie sind. Aufgrund der erheblichen Aufenthaltswahrscheinlichkeit innerhalb der Barriere besteht zwischen den sich an der Potentialerhebung gegenüberliegenden Randzuständen eine starke Kopplung. In Analogie zu der niedrigen Potentialstufe in Abschnitt 1.5 kann eine realistische Bandstruktur nur durch die Lösung der Schrödinger-Gleichung für das Gesamtsystem erhalten werden.

Das Beispielsystem, dessen Bandstruktur in Abb. 2.5 dargestellt ist, besitzt eine $3\hbar\omega_c$ hohe und $2,12\ell$ breite Barriere. Bei einem Magnetfeld von $B = 9,2\text{ T}$ entspricht dies $V_0 = 47\text{ meV}$ und $a = 179\text{ \AA}$. Das im vorigen Abschnitt beschriebene Lösungsverfahren ergibt eine Anzahl von Eigenzuständen $(X_i; \varepsilon_i)$, ohne daß diese bereits den einzelnen Landau-Bändern zugeordnet wären. Wenn die Bänder wie in Abb. 2.5 genügend scharf getrennt sind, kann eine solche Zuordnung im wesentlichen manuell durch Abzählung der Landau-Niveaus erfolgen. Da die Anzahl der Knoten einer Eigenfunktion mit dem Bandindex identisch ist (Abschnitt 1.3.1), kann diese Aufgabe jedoch auch programmgesteuert erledigt werden. Nachdem

⁴Maple 9.50, Hersteller: Maplesoft, a division of Waterloo Maple Inc., Waterloo, Ontario.

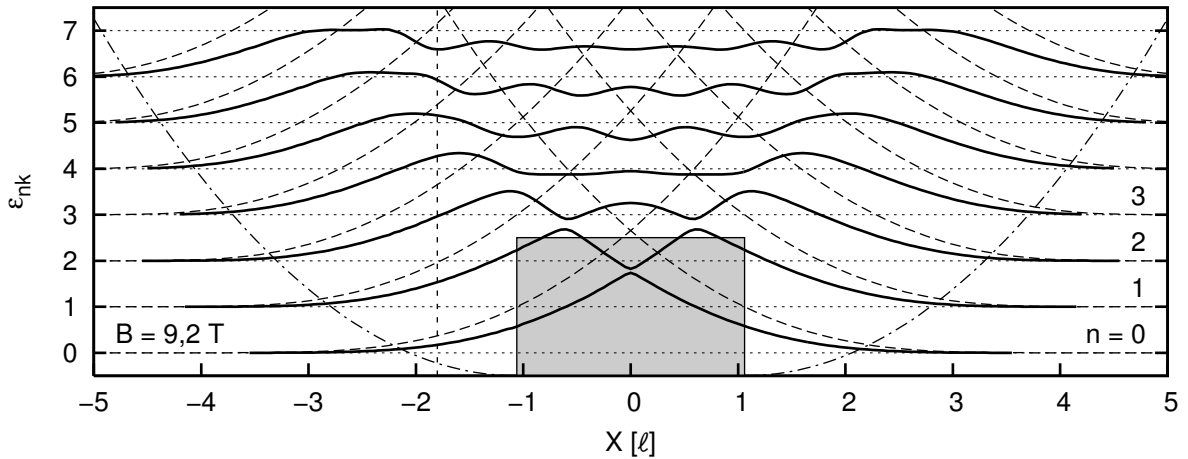


Abb. 2.5. Dispersionsrelation (durchgezogene Linien) eines Elektronensystems, das eine niedrige ($v = 3$) Barriere (grau unterlegt) der Breite $a = 2,12\ell$ enthält. Zum Vergleich ist die Bandstruktur (gestrichelte Linien) dargestellt, die sich an einer Barriere derselben Breite, jedoch mit unendlich hohem Potential ausbilden würde (Abb. 1.6a). Die strichpunktierten Halbparseln mit $\varepsilon = \frac{1}{2}(X \pm \frac{a}{2})^2/\ell^2 - \frac{1}{2}$ markieren den Übergang zwischen Volumen- und Randzuständen. Der Phasenraum $(\beta_k; \varepsilon_k)$ ist in Abb. 2.2 für $X = -1,8\ell$ dargestellt.

die Skalierungsfaktoren α_{\pm} von (2.2) gemäß (2.3a) berechnet sind, um eine in ihrer Amplitude stetige Gesamtwellenfunktion zu erhalten, können mit einem einfachen Rasterverfahren, das selbst mit großen Schrittweiten (z. B. $\Delta\xi = 0,1$) funktioniert, die Nulldurchgänge der Eigenfunktion systematisch ausgezählt werden.

Der Übergang zwischen Volumen- und Randzuständen tritt bei einer Tunnelbarriere an zwei Stellen auf. Die zugehörigen Trennlinien können wie in Abb. 1.6a und 1.9a durch die Formel (1.61), die sich unmittelbar aus dem magnetischen Einschlußpotential ergibt, dargestellt werden. Die Ursprünge der strichpunktierten Halbparseln in Abb. 2.5 fallen dabei mit der linken bzw. rechten Flanke der Barriere zusammen. Die beiden Kurven schließen mit den Randzuständen gleichzeitig den Bereich der Bandstruktur ein, der mit dem Lösungsverfahren am zuverlässigsten zu berechnen ist. Für Zustände, die ein bis zwei magnetische Längen außerhalb dieses Bereichs liegen, findet der Algorithmus aufgrund zu schmaler Singularitäten von $\beta_k^{\pm}(\varepsilon_k)$ (Abb. 2.4, $n \lesssim 4$) keine Lösungen mehr (Endpunkte der durchgezogenen Linien in Abb. 2.5). Dabei handelt es sich jedoch um Volumenzustände, deren Wellenfunktion und Energie ohnehin als Ergebnis der Landau-Quantisierung bei konstantem Potential [Lan30] bekannt sind.

Wenn das Barrierenpotential deutlich größer als die Energie der im Experiment relevanten Landau-Bänder ist, kann die Barriere näherungsweise als unendlich hoch angenommen werden [Sne87, Ho94, Kan00a]. Die Gesamtwellenfunktion ist dann durch (2.2), jedoch mit verschwindender Amplitude für $\xi \in [\xi_-; \xi_+]$ gegeben. Die Bandstruktur ergibt sich entsprechend als spiegelverkehrte Überlagerung von zwei Dispersionsrelationen (gestrichelte Linien in Abb. 2.5), wie sie in Abschnitt 1.4 berechnet wurden und die um $-\frac{a}{2}$ bzw. $+\frac{a}{2}$ verschoben sind. Die Modifikation der Bandstruktur durch Antikreuzungen kann dann beispielsweise mit der Methode von [Ho94] bestimmt werden.⁵

⁵Die Ausbildung einer Energielücke wurde qualitativ in Abschnitt 1.5.2 am Beispiel einer niedrigen und einseitig unendlich ausgedehnten Barriere diskutiert. Die quantitative Beschreibung der Antikreuzungen an einer Tunnelbarriere mit schwacher Kopplung erfolgt in Abschnitt 2.4.2.

Wie der Vergleich in Abb. 2.5 zeigt, weist die durch Überlagerung gewonnene Bandstruktur trotz der offensichtlichen, starken Abweichungen zu dem Ergebnis der vollständig quantenmechanischen Rechnung Gemeinsamkeiten mit derselben auf. Die als gestrichelte Linien dargestellten Bänder kreuzen sich eigentlich nicht, sondern kommen sich an den (nicht eingezeichneten) Antikreuzungen nur sehr nahe. Jedes Band besitzt deshalb mehrere Knicke, deren Anzahl für das n -te Band $2n + 1$ beträgt. Dies entspricht genau der Zahl der Extrempunkte der durchgezogenen Linien. Trotz der Ähnlichkeit beider Bandstrukturen ist klar, daß die quantitativen Unterschiede auch durch eine aufwendigere Näherungsrechnung als die von [Ho94] nicht überbrückbar sind. Dies gilt auch für qualitative Details: So weist das 3. Band als Ergebnis einer vollständigen Rechnung entgegen der allgemeinen Systematik bei $X = 0$ ein Maximum auf. Bei einer niedrigen Barriere sind insgesamt die Unterschiede der nach [Ho94] konstruierten Bandstruktur zu der Lösung des Gesamtsystems so groß, daß die Näherungslösung im Gegensatz zur schwachen Kopplung nur in Ausnahmefällen sinnvoll verwendet werden kann.

2.4 Schwache Kopplung

Zwei laterale, durch eine Barriere getrennte Elektronensysteme sind schwach gekoppelt, falls zwischen den besetzten, gegenüberliegenden Randzuständen eine nur geringe Überlappung besteht. Dieser Fall liegt vor, wenn die Breite der Barriere von der Größenordnung der magnetischen Länge ist und das Barrierenpotential die Fermi-Energie deutlich übertrifft ($V_0 \gg E_F$). Mit den CEO-Proben dieser Arbeit ist man auf das Regime der schwachen Kopplung beschränkt. Denn wie in Kapitel 4 näher erläutert wird, muß die Barriere einen hohen Aluminiumanteil aufweisen, um ein ausreichendes Sperrverhalten gegen Volumenleckströme zu erzielen.

2.4.1 Bandstruktur

Die Landau-Bandstruktur an einer schmalen, jedoch hohen Barriere ist in Abb. 2.6a dargestellt. Wenn die Leitfähigkeit eines solchen Systems ohne angelegte Vorspannung gemessen wird, sind am Tunneltransport nur Zustände bis zur Fermi-Energie E_F beider Elektronenfilme beteiligt. Schwache Kopplung liegt dann vor, wenn das Fermi-Niveau um ein Vielfaches der Zyklotron-Energie unterhalb des Barrierenpotentials liegt, wenn also $V_0 \gg E_F$ gilt. Diese Bedingung ist bei einer Barrierenhöhe von $V_0 = 268$ meV selbst für hohe Elektronendichten und hohe Magnetfelder erfüllt. Da mit den hergestellten Proben höchstens etwa acht Landau-Niveaus aufzulösen sind, kann als Kriterium für schwache Kopplung auch $V_0 \gg \hbar\omega_c$ genommen werden.

In Abb. 2.6a sind die Energielücken der Antikreuzungen zu klein, um aufgelöst zu werden. Deshalb muß darauf verzichtet werden, die berechneten Punkte der Bandstruktur mit Linien zu verbinden. Während bei einer unendlich hohen Potentialstufe die Dispersion auf den Skalen der magnetischen Länge und der Zyklotron-Energie vom Magnetfeld gänzlich unabhängig

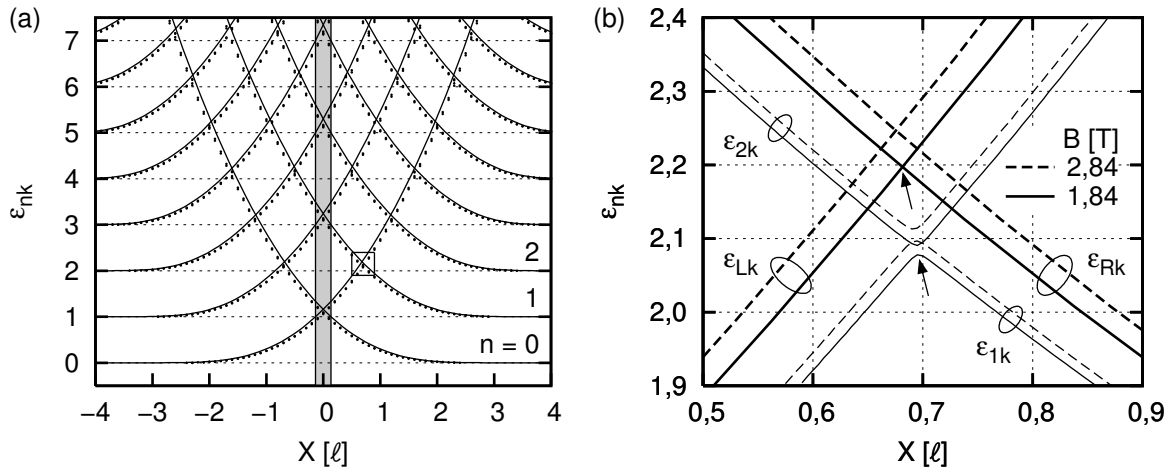


Abb. 2.6. Bandstruktur an einer Barriere mit $V_0 = 268 \text{ meV}$ und $a = 52 \text{ \AA}$. Ihre Berechnung erfolgte für $B = 1,84 \text{ T}$ ($2,84 \text{ T}$), wobei $v = 85$ (55) bzw. $a = 0,28 \ell$ ($0,34 \ell$) gilt. **(a)** Punkte: Ergebnis einer quantenmechanischen Rechnung für das Gesamtsystem. Linien: Bandstruktur für eine gleich breite, jedoch unendlich hohe Barriere, vgl. Abb. 1.6a und [Ho94]. Diese Dispersion ist ebenso wie die Barriere (grau unterlegt) nur für $B = 1,84 \text{ T}$ abgebildet. Der Phasenraum für $X = -4,5 \ell$ wurde in Abb. 2.4 dargestellt. **(b)** Vergrößerung des rechteckigen Bereichs in (a). Die überlappenden Landau-Bänder ε_{Lk} und ε_{Rk} zweier ungekoppelter Systeme im Abstand a sind durch breite Linien dargestellt. Der mit dem oberen Pfeil gekennzeichnete Schnittpunkt wird für $B = 1,84 \rightarrow 2,84 \text{ T}$ um $0,05 \hbar\omega_c$ angehoben. Die Antikreuzung (dünne Linien) trennt die Landau-Bänder ε_{1k} und ε_{2k} des gekoppelten Systems. Mit der Erhöhung des Magnetfelds vergrößert sich die Energielücke von $\Delta\varepsilon = 0,013$ auf $0,016$, während die Position der Antikreuzung (unterer Pfeil) um $0,02 \hbar\omega_c$ verschoben wird.

ist (Abschnitt 1.4.1), hat man es bei einer dünnen ($a \approx 0,3 \ell$) und hohen ($v \gtrsim 50$) Barriere mit einer Magnetfeldabhängigkeit zu tun, die zwar gering, aber dennoch experimentell nachweisbar ist (Abschnitt 4.7).

Der schwachen Magnetfeldabhängigkeit entspricht auch, daß sich die Bandstruktur ε_{nk} des Gesamtsystems nur wenig von derjenigen unterscheidet, die man aus der Überlagerung der halbseitigen Dispersionen ε_{Lk} und ε_{Rk} zweier ungekoppelter Elektronensysteme erhält. Im Detail zeigt sich jedoch, daß durchaus bedeutende Unterschiede bestehen, die aus Abb. 2.6b entnommen werden können. So weicht die energetische Lage des Schnittpunktes von ε_{Lk} und ε_{Rk} (oberer Pfeil) von der Lage der Antikreuzung zwischen ε_{1k} und ε_{2k} (unterer Pfeil) um etwa 7% ab. Bei der Positionierung der überlappenden Dispersionen ε_{Lk} und ε_{Rk} wird zwar die korrekte Barrierenbreite a zugrunde gelegt. Da die konstruierte Bandstruktur jedoch auf der Annahme einer verschwindenden Aufenthaltswahrscheinlichkeit innerhalb der Barriere beruht, weisen ihre Zustände gegenüber den Eigenzuständen ε_{nk} des gekoppelten Systems eine höhere Energie auf. Die beiden Bandstrukturen ε_{nk} und $\{\varepsilon_{Lk}, \varepsilon_{Rk}\}$ können mit Ausnahme der Antikreuzungen durch Verschiebung ineinander übergeführt werden. Elektronenzustände auf zueinander parallelen Ästen der Dispersionen haben also dieselbe Gruppengeschwindigkeit bzw. einen identischen Impuls (Gl. 1.28).

Die Magnetfeldabhängigkeit von ε_{Lk} und ε_{Rk} ist im Vergleich zu der von ε_{nk} stärker ausgeprägt. So bewirkt die Anhebung der Feldamplitude von $1,84$ auf $2,84 \text{ T}$ eine Verschiebung

des Schnittpunktes um $0,05 \hbar\omega_c$, während die Antikreuzung als Ergebnis der Rechnung für das Gesamtsystem nur um $0,02 \hbar\omega_c$ versetzt wird. Der verstärkte Anstieg beruht darauf, daß in ε_{Lk} und ε_{Rk} bei steigendem Magnetfeld zwar die zunehmende effektive Barrierenbreite $a/\ell \propto \sqrt{B}$ eingeht. Die kompensierende Wirkung der fallenden Barrierenhöhe $v \propto 1/B$ findet dagegen keinen Niederschlag in der konstruierten Bandstruktur. In Abschnitt 2.4.2 wird eine Näherungslösung für die Antikreuzungen an den Schnittpunkten von ε_{Lk} und ε_{Rk} diskutiert. Mit derselben Methode könnte auch die kopplungs- und magnetfeldabhängige Verschiebung der Kreuzungspunkte berechnet werden. Darauf wird jedoch zugunsten der vollständig quantenmechanischen Rechnung verzichtet.

Die Bandstruktur an einer Barriere mit rechteckigem Profil ist durch die drei Größen a , V_0 und B bestimmt. Wenn die Skalierung der Orts- und Energieachse in Einheiten der magnetischen Länge bzw. der Zyklotron-Energie vorgenommen wird, reduziert sich die Anzahl der maßgeblichen Parameter auf zwei: Die Bandstruktur ist forminvariant, wenn bei einer Magnetfeldänderung die effektiven Ausmaße der Barriere, also a/ℓ und v , konstant bleiben. Diese Invarianz ist freilich in der einzelnen Probe mit festem a und V_0 nicht realisierbar. Umgekehrt kann das Magnetfeld aber dazu verwendet werden, die effektive Form der Barriere und damit die der Bandstruktur zu variieren. Insbesondere die Lageänderung der Energielücken auf der Skala von $\hbar\omega_c$ ist experimentell zugänglich. Die Untersuchung einer bestimmten Antikreuzung bei verschiedenen Magnetfeldern ist nur möglich, wenn mit der Elektronendichte ein weiterer Parameter frei wählbar ist. Die Kontrolle über das Fermi-Niveau ermöglicht in den CEO-Proben dieser Arbeit eine Steuerelektrode, die im zweiten Wachstumsschritt parallel zum unterbrochenen Elektronensystem hergestellt wird (Abschnitt 4.1). Die koordinierte Variation von Magnetfeld und Elektronendichte erlaubt schließlich die Untersuchung einer Energielücke bei konstantem Füllfaktor.

2.4.2 Näherung für Antikreuzungen

Die Bandstruktur ε_{nk} als Ergebnis der rein quantenmechanischen Rechnung soll nun quantitativ mit der Näherungslösung $\tilde{\varepsilon}_{nk}$ von Tin-Lun Ho verglichen werden. Wie hier wird in [Ho94] der Fall schwacher Kopplung behandelt, bei dem für die Energielücke $\Delta\varepsilon \ll 1$ gilt. Die Landau-Bänder ε_{Lk} und ε_{Rk} (Abb. 2.6b) zweier durch eine unendlich hohe Barriere getrennter Systeme schneiden sich im Punkt $(k_0; \varepsilon_0)$. In der Umgebung des Schnittpunktes ist die Verwendung von Geradengleichungen an Stelle der leicht gekrümmten Bänder mit geringem Fehler möglich. Beide Dispersionen können als $\varepsilon_{ik} = \varepsilon_0 + v_i(k - k_0)/\omega_c$ geschrieben werden, wobei v_i die Gruppengeschwindigkeit (Gl. 1.28) ist und mit $i \in \{L, R\}$ das linke bzw. rechte Elektronensystem bezeichnet wird. Die Näherung $\tilde{\varepsilon}_{nk}$ für eine Antikreuzung der schwach gekoppelten Systeme genügt nach [Ho94] der Beziehung

$$(\tilde{\varepsilon}_{(n+1)k} - \tilde{\varepsilon}_{nk})^2 = \Delta\varepsilon^2 + (\varepsilon_{Lk} - \varepsilon_{Rk})^2, \quad (2.5)$$

wobei $\Delta\varepsilon$ die Energielücke bei $k = k_0$ bezeichnet. Unter der Nebenbedingung, daß der Mittelwert der sich schneidenden Dispersionsäste beibehalten wird, $\varepsilon_{Lk} + \varepsilon_{Rk} = \tilde{\varepsilon}_{nk} + \tilde{\varepsilon}_{(n+1)k}$,

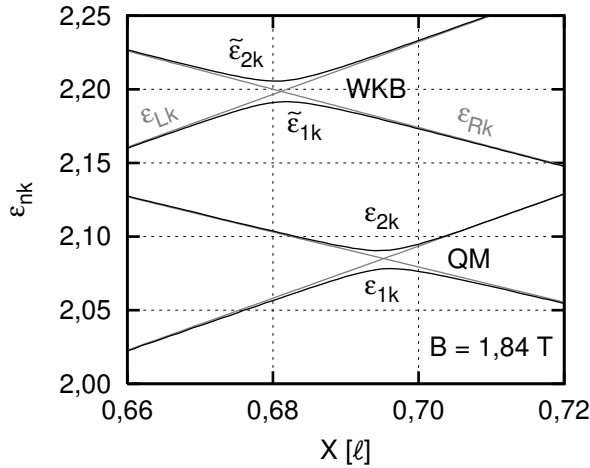


Abb. 2.7. Vergleich der Lösung der Schrödinger-Gleichung für das Gesamtsystem (QM) mit der Näherungslösung (WKB) gemäß [Ho94]. Es gelten dieselben Voraussetzungen wie in Abb. 2.6, jedoch wird nur der Fall $B = 1,84 \text{ T}$ betrachtet. Die Bandstruktur $\tilde{\varepsilon}_{nk}$ (Gl. 2.6) ergibt sich aus ε_{Lk} und ε_{Rk} (grau, vgl. Abb. 2.6b) mit $\Delta\varepsilon = 0,014$ (Gl. 2.7). Für ε_{nk} sind die gemeinsamen Asymptoten (grau) eingezeichnet.

erhält man

$$\tilde{\varepsilon}_{(n+1)k} = \frac{\varepsilon_{Lk} + \varepsilon_{Rk}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\Delta\varepsilon^2 + (\varepsilon_{Lk} - \varepsilon_{Rk})^2} \quad (2.6)$$

als genäherte Bandstruktur des Gesamtsystems. Die Entartung am Kreuzungspunkt $(k_0; \varepsilon_0)$ von ε_{Lk} und ε_{Rk} ist nun durch die Energielücke $\Delta\varepsilon$ aufgehoben. Letztere wird im folgenden auch als „Landau-Bandlücke“ oder kurz „Bandlücke“ bezeichnet. Damit ist nicht der globale minimale Abstand zweier aufeinanderfolgender Landau-Bänder gemeint, sondern primär die lokale Energielücke im Bereich einer bestimmten Antikreuzung. Zwischen dem n -ten und $(n+1)$ -ten Band, $n \in \mathbb{N}$, gibt es $(n+1)$ Energielücken (Abb. 2.6a), die hier Landau-Bandlücken „gleicher Ordnung“ genannt werden.

Zur Bestimmung von $\Delta\varepsilon$ wird in [Ho94] die WKB-Methode verwendet. Diese stellt zwar eine schnelle, aber auch eine grobe Abschätzung dar. Denn die Voraussetzung für eine quasiklassische Behandlung, daß die de Broglie-Wellenlänge (1.63a) klein gegenüber den Abmessungen der Struktur ist, wird nicht erfüllt. Für die Situation in Abb. 2.6b überschreitet λ die Barrierenbreite sogar um fast das Zehnfache. Dessenungeachtet betrachten wir hier das Ergebnis der WKB-Näherung. Bei der Kopplung von Zuständen der Energie ε_0 entsteht nach [Ho94] eine Energielücke der Größe⁶

$$\Delta\varepsilon = \frac{3}{2\pi} \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} \int_{-a/2}^{+a/2} \sqrt{2m^* \left[V_0 - \left(\varepsilon_0 + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega_c \right]} dx \right\}. \quad (2.7)$$

Für die Strukturparameter aus Abb. 2.6 und $B = 1,84 \text{ T}$ erhält man am Schnittpunkt von ε_{Lk} und ε_{Rk} bei $\varepsilon_0 = 2,2$ die Energielücke $\Delta\varepsilon = 0,0139$. Trotz der unzureichenden Voraussetzung für eine quasiklassische Rechnung stimmt dieses Ergebnis mit dem quantenmechanisch bestimmten Wert von $0,013$ gut überein.⁷ Die Magnetfeldabhängigkeit der Energielücke wird von (2.7) jedoch nur unzulänglich beschrieben. Bei einem Anstieg von $B = 1,84 \text{ T}$ auf $2,84 \text{ T}$

⁶Vgl. [Lan74a], Aufgabe 3 in §50 („Das Durchdringen eines Potentialwalles“).

⁷Bei der Anwendung der Formel (2.7) ging in [Ho94] vermutlich eine Zehnerpotenz verloren. Für $B = 10 \text{ T}$, $m^*/m_e = 0,067$, $V_0 = 1000 \text{ meV}$, $\varepsilon_0 = -1/2$ (Vernachlässigung der Zustandsenergie gegenüber V_0) und $a = 60 \text{ \AA}$ (100 \AA) erhält man mit (2.7) $\Delta\varepsilon = 1,67 \cdot 10^{-4}$ ($8,31 \cdot 10^{-7}$), während in der Tabelle 1 von [Ho94] $\Delta\varepsilon = 0,038$ ($0,0071$) angegeben ist. Auf letztere Werte kommt man allerdings nur, wenn ein zusätzlicher Faktor $0,1$ unter die Wurzel in (2.7) hinzugenommen wird.

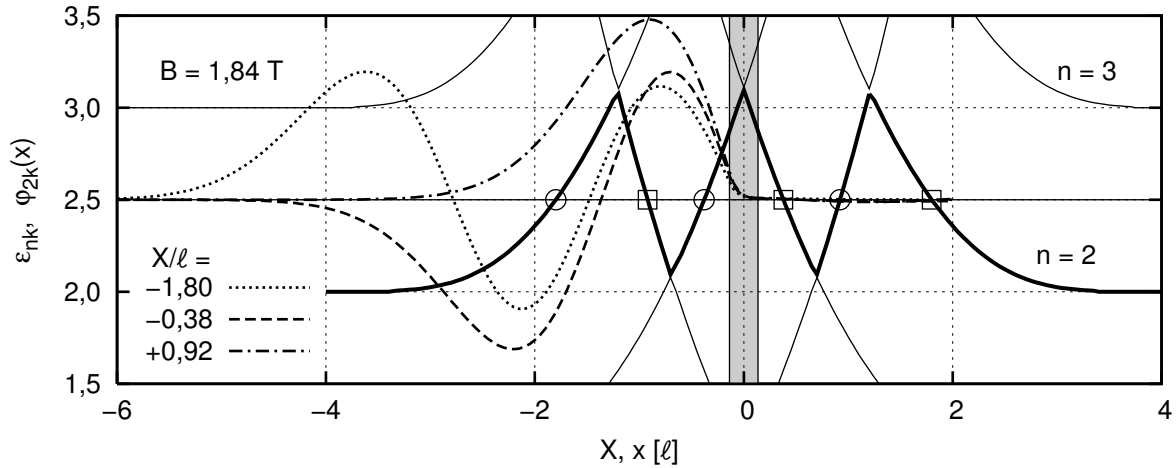


Abb. 2.8. Ausschnitt der Bandstruktur aus Abb. 2.6a mit normierten Eigenfunktionen des 2. Landau-Bandes für $\varepsilon_{2k} = 2,5$. Es sind nur die Wellenfunktionen für Dispersionsäste mit positiver Steigung eingezeichnet (\circ). Die korrespondierenden Randzustände mit Schwerpunkt im rechten Elektronensystem (\square) sind dazu spiegelsymmetrisch.

erhält man eine Ausweitung der Energielücke von $\Delta\varepsilon = 0,0139$ auf $0,0143$. Damit ist zwar der Absolutwert der Energielücke von $\Delta\varepsilon = 0,013$ (1,84 T) bzw. $0,016$ (2,84 T) gut getroffen. Aber der Anstieg mit dem Magnetfeld beträgt weniger als ein Viertel des Wertes, der gemäß der quantenmechanischen Rechnung für das Gesamtsystem erwartet wird.

In Abb. 2.7 wird die Näherungslösung (2.6) dem Ergebnis der vollständigen Bandstrukturechnung gegenübergestellt. Eine gute Übereinstimmung beider Dispersionen besteht nicht nur in der Größe der Bandlücke, sondern auch in der Ausformung der Antikreuzung. Dahingegen differiert die Lage der Energielücken ziemlich stark, was darauf beruht, daß in [Ho94] die kopplungsbedingte Verschiebung der Dispersionen außer acht gelassen wird. Statt die Näherungslösung $\tilde{\varepsilon}_{nk}$ entsprechend zu erweitern, wird bei der Auswertung der experimentellen Ergebnisse in Abschnitt 4.7 die wesentlich aufwendiger zu berechnende, jedoch exakte Bandstruktur ε_{nk} zugrunde gelegt.

2.4.3 Wellenfunktionen

Bei einer unendlich (Abschnitt 1.4) oder endlich (Abschnitt 1.5) hohen Potentialstufe hat man monoton ansteigende Landau-Bänder, die jeweils genau einen Schnittpunkt mit der Fermi-Energie aufweisen. Im Gegensatz dazu schneiden die Landau-Bänder an einer Tunnelbarriere die Fermi-Kante mehrmals. Wie aus Abb. 2.8 ersichtlich ist, gibt es im n -ten Landau-Band genau $2(n + 1)$ Zustände gleicher Energie, sofern letztere nicht gerade mit einer Bandlücke oder der Landau-Leiter der Volumenzustände zusammenfällt. Die Zustände gleicher Energie lassen sich gemäß ihrem Aufenthaltsschwerpunkt entweder dem linken (\circ) oder rechten (\square) Elektronensystem zuordnen. So haben die in Abb. 2.8 wiedergegebenen Wellenfunktionen den Charakter von Randzuständen, wie sie etwa an einer halbseitig unendlich ausgedehnten Barriere (Abb. 1.6b) auftreten. Beim Vergleich der Randzustände des linken und rechten Systems tritt die in Abschnitt 1.2.3 diskutierte Diskrepanz zwischen Leitzentrum und Aufenthaltsort

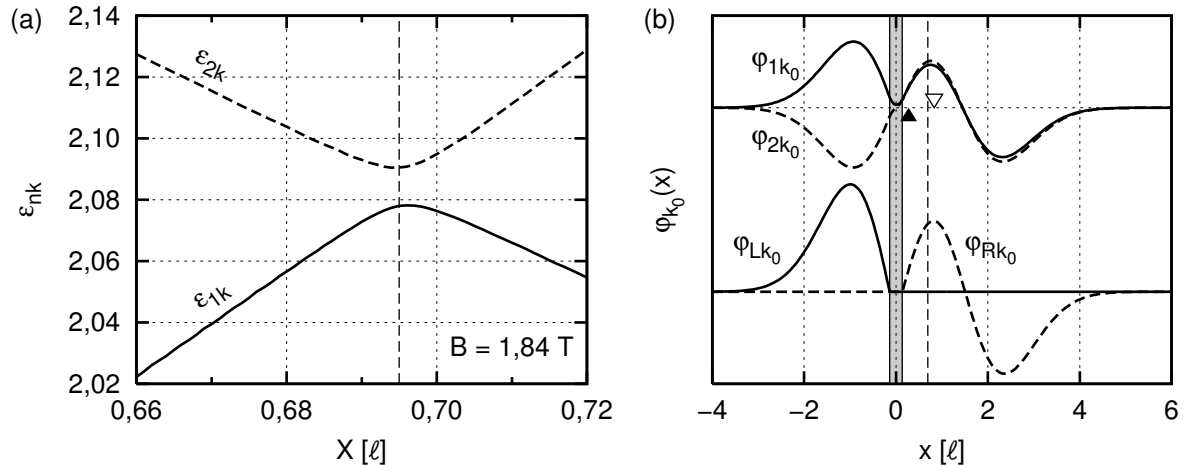


Abb. 2.9. (a) Vergrößerung der Antikreuzung aus Abb. 2.6b. (b) Eigenfunktionen für das Leitzentrum $X = 0,695\ell = -k_0\ell^2$. Die Wellenfunktionen φ_{1k_0} und φ_{2k_0} des Gesamtsystems können näherungsweise als symmetrische und antisymmetrische Mischung der Randzustände φ_{Lk_0} und φ_{Rk_0} der ungekoppelten Teilsysteme dargestellt werden. Die Symbole \blacktriangle und \blacktriangledown markieren den Aufenthaltsschwerpunkt von φ_{1k_0} bzw. φ_{2k_0} .

augenfällig zutage: Trotz der räumlichen Trennung von Zuständen beider Klassen sind die Leitzentren alternierend verzahnt.

Auch wenn im Maßstab von Abb. 2.8 die Wellenfunktion für $X = 0,92\ell$ scheinbar aus einem Wellenberg und die für $X = -0,38\ell$ aus zweien besteht, setzen sich diese Eigenfunktionen im 2. Band tatsächlich aus genau drei Wellenbergen zusammen. Letztere befinden sich zum Teil im Bereich kleiner Amplituden ($x \gtrsim 0$) und zwar in der Weise, daß die Wellenfunktion im Bereich großer Aufenthaltswahrscheinlichkeit ($x \lesssim 0$) die Gestalt eines Randzustandes an einer hohen Potentialstufe (Abb. 1.6b und 1.9b) annimmt. So besteht der Zustand mit $X = 0,92\ell$ trotz der zwei Knoten im wesentlichen aus einem einzigen Wellenberg. Er entspricht damit grundsätzlich dem Randzustand gleichen Impulses, der links der Barriere vorliegen würde, wenn keine Kopplung mit dem rechten System bestünde.

Sofern das Fermi-Niveau nicht in einer der Energielücken liegt, stellt sich die Situation an der Tunnelbarriere zusammenfassend folgendermaßen dar: Die Schnittpunkte des Fermi-Niveaus mit dem oszillatorischen Teil des n -ten Bandes ergeben $2(n+1)$ Randkanäle, die mit zunehmendem Leitzentrum abwechselnd in negativer (\circ) und positiver (\square) y -Richtung propagieren (Gl. 1.28). Die $2(n+1)$ Kanäle des n -ten Landau-Bandes weisen beträchtliche Gemeinsamkeiten mit den Randkanälen des $0, 1, \dots, n$ -ten Bandes des linken bzw. rechten Elektronensystems auf, wenn diese als ungekoppelt angesehen werden.

Elektronen an einer dünnen, aber unendlich hohen Barriere sind dauerhaft an einer ihrer Flanken gefangen. Bei Reduktion der Barrierenhöhe auf einen endlichen Wert wird es für sie möglich, auf die andere Seite der Barriere zu tunneln. Je näher ein Zustand an einer Antikreuzung der Bandstruktur liegt, desto mehr verlagert sich die Aufenthaltswahrscheinlichkeit in das gegenüberliegende Elektronensystem. Gleichstand wird dabei im Bereich der Bandkanten erreicht. Für einen solchen Fall ist in Abb. 2.9a die Antikreuzung vergrößert dargestellt. In Abb. 2.9b werden die Eigenzustände φ_{nk_0} an der Stelle k_0 der kleinsten Energielücke wie-

dergegeben. Wie im Abschnitt 1.5.2 für den Fall einer endlich hohen Potentialstufe bzw. wie in [Ho94] festgestellt wurde, ergeben sich die Wellenfunktionen im Bereich der Antikreuzung näherungsweise durch symmetrische und antisymmetrische Superposition der Eigenzustände der ungekoppelten Systeme. Entsprechend bestehen φ_{1k_0} und φ_{2k_0} aus drei Wellenbergen, wobei nur φ_{2k_0} innerhalb der Barriere einen Nulldurchgang aufweist. Beide Zustände befinden sich nahe eines Extrempunktes der Bandstruktur. Sie besitzen deshalb einen geringen Teilchenimpuls (1.28) und ihr Aufenthaltsschwerpunkt $\langle x \rangle$ weicht nur wenig von der Position X des Leitzentrums ab (Anhang B).

2.5 Beispielsysteme

Zum Abschluß dieses Kapitels werden die Bandstrukturen zweier weiterer Systeme vorgestellt: zum einen für eine Tunnelstruktur mit angelegter Vorspannung und zum anderen für einen Quantendraht im endlichen Einschlußpotential. Letzteres System stellt dabei das inverse Problem zur Tunnelbarriere dar. Die jeweiligen Dispersionen können mit geringen Veränderungen des bisher erarbeiteten Formalismus berechnet werden.

Barriere mit Vorspannung

Die beiden durch eine Barriere getrennten Elektronensysteme in Abb. 2.10a sind aufgrund einer angelegten Vorspannung gegeneinander verschoben. Die Skizze zeigt den Fall, daß am linken System eine negative Spannung $-\hbar\omega_c/e$ gegenüber der rechten Seite anliegt. Dabei wird angenommen, daß die Potentialdifferenz komplett an der Tunnelbarriere und nicht teilweise auch innerhalb der (hochbeweglichen) Elektronensysteme abfällt. In erster Näherung ist der Potentialverlauf in der Barriere linear. Nachdem die Schrödinger-Gleichung in dieser Arbeit nur für Abschnitte konstanten Potentials gelöst wurde, wird jedoch in nullter Näherung eine mittlere Barrierenhöhe von $v + s/2$ angesetzt.

Abbildung 2.10b zeigt die Bandstruktur zweier stark gekoppelter Elektronensysteme, die durch eine angelegte Vorspannung etwa um die Hälfte der Barrierenhöhe gegeneinander verschoben sind. Zur Berechnung wurde das Gleichungssystem (2.3) entsprechend dem Potentialverlauf in Abb. 2.10a angepaßt. Qualitativ erhält man eine ähnliche Dispersion wie ohne Vorspannung (Abb. 2.5). Die Bandlücken treten für das linke (rechte) Elektronensystem jedoch bei kleineren (größeren) Energiewerten auf. Relativ zum Potential der linken Seite wird beispielsweise die Lücke zwischen dem 0. und 1. Landau-Band um $\Delta\varepsilon = 0,76$ abgesenkt, was etwa der Hälfte der angelegten Potentialdifferenz von $s = 1,7$ entspricht. Während die Bandstrukturechnung nach der Methode dieser Arbeit für beliebige Werte von a , v und s anwendbar ist, hat die Betrachtungsweise in [Ho94] und [Kan00a] auch bei vorgespannten Systemen nur dann Gültigkeit, wenn deren Kopplung schwach ist. In beiden Artikeln werden zwei spiegelsymmetrische Dispersionen für ein unendlich hohes Randpotential (Abb. 1.6a) überlagert, so daß auch dieser Bandstruktur kein linearer Potentialverlauf für die Barriere zugrundeliegt. Die in Abschnitt 2.4 getroffenen Aussagen zu den Unterschieden und Gemeinsamkeiten der Näherung von [Ho94] und der Lösung der Schrödinger-Gleichung für das Gesamtsystem besitzen bei angelegter Vorspannung weiterhin Gültigkeit.

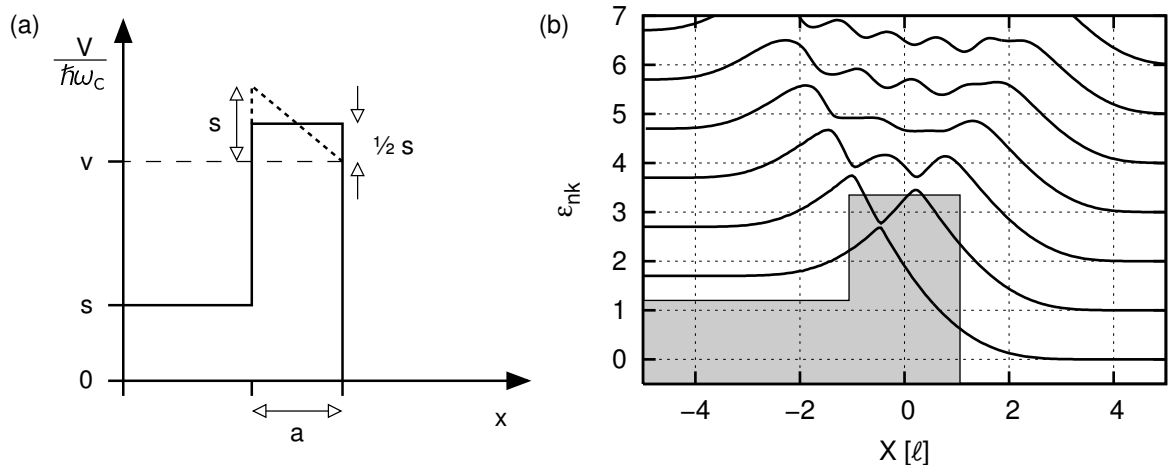


Abb. 2.10. System mit Tunnelbarriere und angelegter Vorspannung. **(a)** Schemazeichnung des Potentialverlaufs: Obwohl ein linearer Spannungsabfall an der Barriere (gestrichelte Linie) dem tatsächlichen Potentialverlauf besser entspräche, wird der Bandstrukturrechnung eine rechteckige Barriere (durchgezogene Linie) der Höhe $v + s/2$ zugrunde gelegt. **(b)** Bandstruktur (Parameter wie in Abb. 2.5) an einer Barriere der Höhe $v = 3$, wenn zwischen beiden Elektronensystemen eine Potentialdifferenz von $s = 1,7$ herrscht.

Quantendraht

Betrachten wir nun ein System, das anstatt einer Barriere einen Quantentopf enthält. Der Potentialverlauf und die entsprechende Landau-Bandstruktur sind in Abb. 2.11 dargestellt. Zur Berechnung der Bandstruktur kann der Algorithmus aus Abschnitt 2.2 unverändert übernommen werden. Die beiden untersten Bänder in Abb. 2.11b bestehen für $\varepsilon_{nk} < 0$ aus drahtartigen Zuständen mit parabolischer Dispersion. Für Elektronen, deren Ausdehnung mit der Breite des Quantentopfs vergleichbar ist, besteht in y -Richtung keine Möglichkeit der freien Bewegung. Folglich kann der x -Impuls im Magnetfeld nicht mit der dazu senkrechten Impulskomponente koppeln. Deshalb ist die Form der Dispersion vom Magnetfeld unabhängig und sie entspricht näherungsweise dem Leitungsband des zugrundeliegenden Kristalls in der Umgebung des Γ -Punktes. Tatsächlich stimmt die Krümmung des 0. und 1. Bandes in Abb. 2.11b für kleine Energien sehr gut mit

$$E_{nk} \approx E_{n0} + \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*}, \quad (2.8)$$

überein. Diese Dispersion läßt sich unter Verwendung des Leitencenters $X = -k\ell^2$ und der Identität $E = (\varepsilon + \frac{1}{2}) \hbar\omega_c$ zu

$$\varepsilon_n(X) = \frac{E_{nk}}{\hbar\omega_c} - \frac{1}{2} = \varepsilon_{n0} + \frac{1}{2} \frac{X^2}{\ell^2} \quad (2.9)$$

weiter umformen. Der Vergleich mit (1.31) zeigt, daß die Dispersion von Elektronen, deren Aufenthaltsort in x -Richtung aufgrund des Einschlusses im Potentialgraben nicht mit der Kreiswellenzahl k korreliert, mit dem magnetischen Einschlußpotential identisch ist. Der Wert

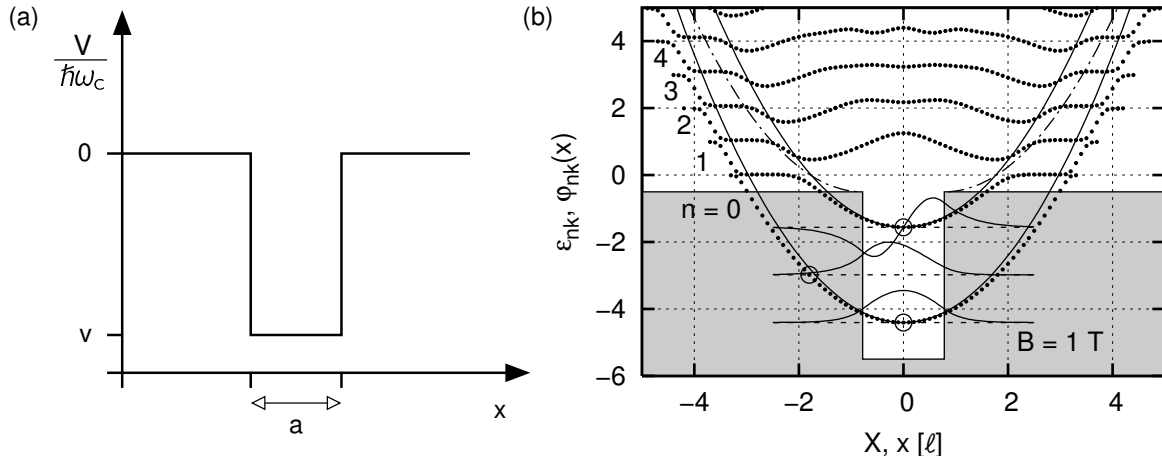


Abb. 2.11. Zweidimensionales Elektronensystem mit einem zur y -Achse parallelen Potentialgraben. (a) Schematischer Potentialverlauf. (b) Bandstruktur in der Umgebung eines $v = -5$ tiefen und $a = 1,56\ell$ breiten Quantentopfs. Für das 0. und 1. Landau-Band ist die parabolische Dispersion (2.9) eines Quantendrahts eingezeichnet⁸. Die strichpunktierten Linien markieren in Analogie zu Abb. 1.9a den Übergang zwischen Volumen- und Mischzuständen. Für die mit \circ gekennzeichneten Zustände sind die normierten Eigenfunktionen auf der Höhe ihrer Energie aufgetragen.

am Minimum von (2.9) kann durch das Energiespektrum [Lan74a]

$$\varepsilon_{n0} \approx v + \frac{\pi^2(n+1)^2}{2(a/\ell)^2} - \frac{1}{2} \quad (2.10)$$

eines unendlich tiefen Potentialtopfs genähert werden.⁸

Neben der Bandstruktur stellt Abb. 2.11b auch die Wellenfunktionen von drei verschiedenen Drahtzuständen dar. Ein Vergleich der Eigenfunktionen φ_{0k} für $X = 0$ und $X = -1,8\ell$ zeigt, daß – wie bereits in Abschnitt 1.2.3 festgestellt wurde – sich der Aufenthaltsschwerpunkt eines Drahtzustands bei der Verschiebung des Leitzentrums um fast zwei magnetische Längen nur geringfügig in die negative x -Richtung verlagert. Semiklassisch kann dieses Verhalten so erklärt werden: Ein Elektron mit $X < 0$ hat nach (1.28) einen Impuls $m^*v_y = -\hbar\partial\varepsilon_n(X)/\partial X > 0$. Die Lorentz-Kraft $\mathbf{F} = -e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ auf dieses Elektron wirkt folglich in negativer x -Richtung. Im Gleichgewicht wird sie durch die abstoßende Kraft kompensiert, die entsteht, wenn der Drahtzustand stärker in die linke Barriere eindringt. Diese Aussage gilt allgemein für die Verbiegung von Landau-Bändern an Potentialstufen.

Der durch die strichpunktierten Halbparabeln eingeschlossene Bereich (Gl. 1.61) in Abb. 2.11b enthält für $\varepsilon_{nk} > 0$ Mischzustände aus Volumen- und Drahtzuständen. Die Bandlücken sind dort stets von der Größenordnung der Zyklotron-Energie. In Analogie zu der endlich hohen Potentialstufe, die in Abschnitt 1.5 diskutiert wurde, entstehen außerhalb dieses Bereichs Antikreuzungen durch schwache Kopplung von Draht- und Volumenzuständen.

⁸In Abb. 2.11b wurde ε_{n0} (Gl. 2.9) von der vollständigen Bandstrukturrechnung übernommen. Da für $v = -5$ der Grundzustand eine nicht geringe Aufenthaltswahrscheinlichkeit im Barrierenmaterial hat, weicht der durch die Näherung (2.10) gegebene Wert $-3,47$ beträchtlich von $\varepsilon_{00} = -4,40$ ab.

Ein Quantendraht, der in ein zweidimensionales Elektronensystem eingebettet ist, kann prinzipiell mittels der CEO-Technik in Analogie zu der in Kapitel 4 vorgestellten Probenstruktur realisiert werden. Eine AlGaAs/GaAs/AlGaAs-Struktur hätte dabei jedoch den Nachteil, daß die Elektronenbeweglichkeit in AlGaAs-Schichten stark herabgesetzt ist. Dieses Problem könnte man mit einer GaAs/InGaAs/GaAs-Struktur umgehen. Zur Vermeidung eines zu hohen Volumenleckstroms⁹ müßte in beiden Fällen die Kontaktierung des Elektronensystems über die Spaltfläche erfolgen. Das ist indes nur möglich, wenn die Schichten des ersten Wachstumsschritts so wie bei den Proben von Kang *et al.* (Abschnitt 4.3) genügend dick sind ($\gtrsim 25 \mu\text{m}$) und eine Modulationsdotierung anstatt der Steuerelektrode verwendet wird.

Die eben beschriebenen Schwierigkeiten eines GaAs- oder InGaAs-Quantentopfs innerhalb einer CEO-Struktur vermeiden Grayson *et al.*, indem ein modulationsdotiertes 2DES über die Kante zweier zueinander senkrechter $\{110\}$ -Flächen eines GaAs-Kristalls gewachsen wird [Gra04b, Gra05]. An dem Knick des 2DESs herrscht eine erhöhte Elektronendichte vor, d. h., das Potential ist lokal abgesenkt. Qualitativ entspricht die Landau-Bandstruktur eines solchen Systems der Dispersion aus Abb. 2.11b. Quantitativ bestimmt werden kann sie aber nur mit einer selbstkonsistenten Lösung der Schrödinger-Poisson-Gleichungen auf einem diskreten zweidimensionalen Gitter.

2.6 Tight-Binding-Methode

Takagaki und Ploog berechnen in [Tak00] den Tunnelstrom und die Bandstruktur am Übergang zwischen zwei gekoppelten lateralen Elektronensystemen. Die angewandte Methode unterscheidet sich grundlegend von dem hier verfolgten Ansatz. Die Heterostruktur wird auf einem zweidimensionalen Gitter diskretisiert, das in der Richtung senkrecht zur Barriere etwa 100 Knoten aufweist. Durch Einführung einer Sprungamplitude t zwischen nächsten Nachbarn (engl. *nearest neighbor hopping amplitude*) wird das 2DES auf diesem Gitter durch quasigebundene Elektronen (engl. *tight-binding*) dargestellt. Anstatt den Potentialverlauf der Tunnelbarriere explizit zu verwenden, gehen die Autoren phänomenologisch von einer reduzierten Sprungamplitude $t_b \leq t$ zwischen zwei Knotenlinien in der Mitte des Gitters aus. Elektron-Elektron-Wechselwirkungen werden in dem Modell nicht berücksichtigt.

Das Resultat von Takagaki und Ploog stimmt prinzipiell gut mit [Ho94] und den hier präsentierten Bandstrukturen überein. Die Methode eignet sich jedoch nur bedingt, wenn der kleine Effekt der magnetfeldabhängigen Position der Antikreuzungen auf der Skala der Zyklotron-Energie untersucht werden soll. In [Tak00] wird zwar qualitativ festgestellt, daß sich die Energielücken mit steigender Sprungamplitude t_b , also stärker werdender Kopplung, vergrößern (vgl. Übergang Abb. 2.6a \rightarrow Abb. 2.5) und daß derselbe Effekt auch bei zunehmender Magnetfeldstärke erzielt wird (vgl. Abb. 2.6b). Quantitative Aussagen über die Bandstruktur an der konkreten Barriere sind aber nur mit einem realistischen Zahlenwert für t_b möglich. Tatsächlich liegt die Hauptschwierigkeit der Tight-Binding-Methode in der

⁹Mit Volumenleckstrom wird der Teil des Meßstroms bezeichnet, der nicht durch das 2DES entlang der Spaltfläche, sondern durch den Rest der Schichten des ersten Wachstums fließt. In Abschnitt 4.2 wird näher auf diesen Störfaktor eingegangen.

Wahl der Sprungamplitude t_b , die bei [Tak00] *ad hoc* erfolgt ohne auf Möglichkeiten zu ihrer Abschätzung einzugehen. Um in t_b die magnetfeldabhängige effektive Breite und Höhe der Barriere einfließen zu lassen, müßte letztlich die Schrödinger-Gleichung für das Gesamtsystem gelöst werden. Deshalb wäre mit einem *Tight-Binding*-Ansatz in Hinblick auf die Analyse der Position von Leitwertspitzen in Abschnitt 4.7 nichts gewonnen.

2.7 Zusammenfassung

Im vorliegenden Kapitel wird die Landau-Bandstruktur eines zweidimensionalen Elektronensystems berechnet, das sich im senkrechten Magnetfeld und in einem unilateralen Potential mit drei konstanten Abschnitten befindet. Die Energieeigenzustände sind durch das Mischungsverhältnis β_{nk} der Parabolischen Zylinderfunktionen im mittleren Abschnitt und den Energieeigenwert ε_{nk} gegeben, die beide durch ein hochgradig nichtlineares Gleichungssystem bestimmt werden. Das voneinander unabhängige Lösen beider Gleichungen macht die Entwicklung eines robusten Lösungsverfahrens möglich, das im Gegensatz zu den Ansätzen aus [Ho94] und [Tak00] keinerlei Einschränkungen bezüglich der Potentialwerte $\{v_1, v_2, v_3\}$ und der Ausdehnung a des mittleren Abschnitts unterliegt: Das numerische Verfahren kann zur Berechnung der Dispersion an einer Tunnelbarriere bei starker oder schwacher Kopplung sowie mit oder ohne angelegte Vorspannung eingesetzt werden. Möglich ist auch die Bandstrukturrechnung für einen beliebig breiten und tiefen Quantentopf, etwa einen Quantendraht oder ein (schmales) Quanten-Hall-System.

Während für stark gekoppelte Systeme die Lösung der Schrödinger-Gleichung für das Gesamtsystem unerlässlich ist, könnte die Bandstruktur im Falle schwacher Kopplung, wie sie bei den Experimenten in Kapitel 4 vorherrscht, näherungsweise aus der Dispersion an einem unendlich hohen Randpotential konstruiert werden. Dieser Ansatz, der in [Ho94] verfolgt wird, ergibt jedoch ebenso wie die *Tight-Binding*-Methode aus [Tak00] magnetfeldabhängige Positionen der Energielücken, deren Werte zur Interpretation der experimentellen Ergebnisse nicht hinreichend genau sind.

Kapitel 3

Theorie zum Tunneltransport

In zwei lateral gekoppelten Quanten-Hall-Systemen wird das Verhalten des Tunnelstroms über die Barriere maßgeblich durch die Landau-Bandstruktur bestimmt. Beim Tunnelstrom handelt es sich gleichzeitig um die experimentell zugängliche Größe, die in Kapitel 4 in Abhängigkeit des Magnetfelds und der Elektronendichte diskutiert werden wird. Das Ziel des vorliegenden Kapitels besteht darin, die Grundlagen für die Interpretation der beobachteten Leitwertoszillationen zu schaffen. Während der letzten Jahre erschienen eine Reihe von theoretischen Arbeiten, mit deren Hilfe bestimmte Details der Leitwertkurven erklärt werden können. Dabei haben sich zwei grundlegend verschiedene Ansätze etabliert: In dem „Bild der Mischung von Landau-Zuständen“ wird unmittelbar anhand der Bandstruktur argumentiert. Auf Basis der Einteilchendispersion aus Kapitel 2 diskutiert Abschnitt 3.1 entscheidende Aspekte dieses Modells und geht dann auf Modifikationen ein, die aufgrund der bisher nicht beachteten Wechselwirkung zwischen Elektronen notwendig sind. Während hier von einer perfekten, rechteckigen Tunnelbarriere ausgegangen wird, beruht das alternative „Modell der Tunnelzentren“ (Abschnitt 3.2) auf der Annahme, daß die Barriere Unvollkommenheiten in ihrer Kristallstruktur aufweist. In Analogie zum Aharonov-Bohm-Effekt treten an benachbarten Tunnelzentren Quanteninterferenzen auf, die zu kurz- und quasiperiodischen Oszillationen im Tunnelstrom führen. Diese überlagern die langperiodischen Leitwertoszillationen, die aus der Theorie der Mischung von Landau-Zuständen folgen.

3.1 Mischung von Landau-Zuständen

Das im folgenden dargestellte Modell erlaubt, aus der Landau-Bandstruktur an der Barriere auf das Verhalten des Tunnelstroms in Abhängigkeit der Magnetfeldstärke zu schließen. Da sich die Wellenfunktionen schwach gekoppelter Systeme in der Umgebung von Antikreuzungen näherungsweise als symmetrische und antisymmetrische Mischung der Randzustände der ungekoppelten Teilsysteme darstellen lassen (Abschnitt 2.4.3), wird das entsprechende Modell häufig mit Theorie der „Mischung von Landau-Zuständen“ (engl. *Landau level mixing*) bezeichnet. Es wurde anfänglich in [Ho94] entwickelt und bei der Interpretation experimenteller Ergebnisse für eine dünne Tunnelbarriere erstmals in [Kan00a] angewandt. Abschnitt 3.1.1 rekapituliert die Grundzüge dieses Modells, Abschnitt 3.1.2 klärt Detailfragen bezüglich des

Zusammenhangs zwischen Füllfaktor und Energieskala und Abschnitt 3.1.3 gibt eine kurze Übersicht zu theoretischen Arbeiten, die den Einfluß von Vielteilcheneffekten auf die Breite der Bandlücken untersuchen. Abschließend wird in Abschnitt 3.1.4 eine Methode zur Bestimmung der Elektronendichte aus den Leitwertoszillationen entwickelt.

3.1.1 Entstehungsprinzip der Landau-Oszillationen

Abbildung 3.1 veranschaulicht den Zusammenhang zwischen der Landau-Bandstruktur und dem Verlauf der Randkanäle in den gekoppelten Elektronensystemen. An den Probenrändern ① ist die Bandstruktur nach Chklovskii *et al.* durch Abb. 1.11b gegeben, und an der scharfen Potentialstufe ② der Tunnelbarriere liegt die in Kapitel 2 berechnete Dispersion aus Abb. 2.6 mit kleinen Bandlücken im Kopplungsbereich vor. Die Elektronenzustände bei ① und ② besitzen entsprechend des jeweiligen Potentialgradienten zueinander senkrechte Impulse (Abschnitt 1.2.3), so daß beide Dispersionen in zwei unterschiedlichen Landau-Eichungen zu berechnen sind. Im Übergangsbereich ③ kann die Bandstruktur nicht mehr mit einem analytischen Ansatz für die Wellenfunktionen bestimmt werden. Vielmehr erfordert dieser Bereich eine Lösung der Schrödinger-Gleichung in zwei Dimensionen (Hamilton-Operator in Gl. 1.20).

Die Lage des Fermi-Niveaus $\varepsilon_F = E_F/\hbar\omega_c - 1/2$ in Relation zur Landau-Bandstruktur bestimmt die Konfiguration der Randkanäle. Abbildung 3.1a stellt die Zustände an der Fermi-Kante für drei verschiedene Werte von ε_F in einem System mit starker Kopplung dar. Die wichtigsten Eigenschaften dieser Zustände wurden bereits in Abschnitt 2.4.3 diskutiert. Im weiteren Verlauf wird die im Experiment festgestellte Spinartung (Abschnitt 4.7.1) zur Voraussetzung gemacht. Für $\varepsilon_F = 1,95$ und geringer Verbreiterung der Landau-Niveaus beträgt der Füllfaktor $\nu = 4$ und am Probenrand ① existieren zwei Randkanäle.¹ Auch beiderseits der Tunnelbarriere schneidet das Fermi-Niveau die Bandstruktur je zweimal, weshalb an den Ecken der Teilsysteme bei ③ ein kontinuierlicher Übergang zwischen den Randkanälen entlang der Barriere und der Probenbegrenzung stattfindet. Erhöht sich die Fermi-Energie auf einen Wert $\varepsilon_F > 2$ (Abb. 3.1b), so entsteht wie bei einem herkömmlichen 2DES bei ① und ② zugleich ein neuer Randkanal. Für den besprochenen Bereich des Fermi-Niveaus verhält sich das Gesamtsystem wie zwei separate 2DESe. Beim Anlegen einer Spannung, die deutlich kleiner als $\hbar\omega_c/e$ ist, fließt zwischen beiden n^+ -Schichten kein Tunnelstrom.

Die Besonderheit des Systems tritt zutage, wenn sich das Fermi-Niveau einer Antikreuzung nähert und schließlich in die zugehörige Bandlücke eintritt. Zwei gegenüberliegende Randkanäle koppeln umso stärker, je kleiner die Differenz zwischen ihren Leitzentren bzw. Kristallimpulsen wird. Mit nahezu identischem k ist das Tunneln durch die Barriere möglich (Abschnitt 1.2.4). Für den Fall schwacher Kopplung prognostiziert [Ho94] ein periodisches Hin- und Hertunneln zwischen Randzuständen im Bereich einer Antikreuzung. Die entsprechenden Stromoszillationen besitzen bei einer Energielücke der Breite ΔE die Kreisfrequenz $\omega_I = \Delta E/\hbar$. Diese Frequenz, die sich mit (1.23) auch als $\omega_I = \Delta\varepsilon\omega_c$ schreiben läßt, liegt

¹Mit Ausnahme der Zahl der Randkanäle sind die Situationen für $\varepsilon_F = 1,95$ und $\varepsilon_F = 2,4$ äquivalent, wobei nur der zweite Fall in Abb. 3.1b illustriert wird.

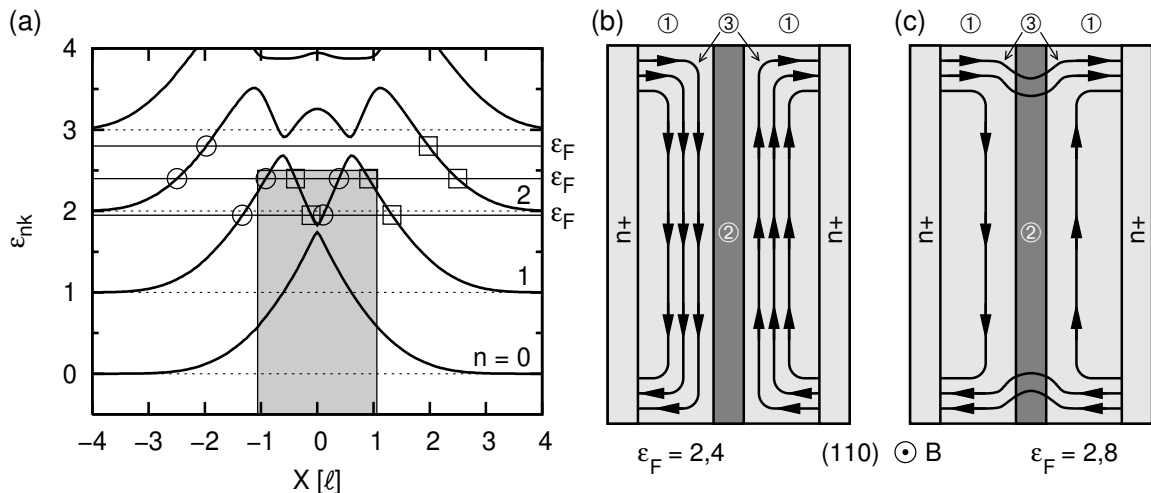


Abb. 3.1. Tunneln im Bild der Mischung von Landau-Zuständen. **(a)** Ausschnitt der Bandstruktur aus Abb. 2.5. Für die Fermi-Energien $\varepsilon_F = 1,95, 2,4$ und $2,8$ sind die Eigenzustände mit Schwerpunkt im linken (rechten) Elektronensystem mit \circ (\square) gekennzeichnet (vgl. Abb. 2.8). **(b)** Randkanäle für $\varepsilon_F = 2,4$ und **(c)** für $\varepsilon_F = 2,8$. Die Elektronen propagieren entlang dem $2\mu\text{m}$ messenden Bereich ① der Probenbegrenzung und zu beiden Seiten der $500\mu\text{m}$ langen Barriere ②. Der Übergangsbereich ist mit ③ markiert. Siehe auch Abb. 2.1.

im GHz-Bereich (Gl. 1.8) und ist damit zu hoch, als daß die Stromfluktuationen mit der für Kapitel 4 eingesetzten Lock-In-Technik nachweisbar wären.

Wenn das Fermi-Niveau schließlich genau die Oberkante eines Landau-Bandes erreicht, was in Abb. 3.1a etwa für $\varepsilon_F = 2,68$ der Fall ist, entarten die resonanten Randzustände zu einem einzigen Zustand. Ein Elektron in diesem Zustand weist wegen $\partial\varepsilon_{nk}/\partial k = 0$ einen verschwindenden Teilchenimpuls m^*v_y (Gl. 1.28 und Anhang B) auf und trägt nicht zum Transport entlang der Barriere bei. Wenn das Fermi-Niveau innerhalb eines Landau-Bandes liegt und sich einem Extrempunkt im Bereich einer Antikreuzung nähert, nimmt die Stärke der Kopplung beider Randkanäle in dem Maße, wie der Erhaltungssatz für den Kristallimpuls (Abschnitt 1.2.4) besser erfüllt wird, erheblich zu. Gleichzeitig bleibt jedoch, wie in Abb. 2.9 gezeigt wurde, die Verteilung der Aufenthaltswahrscheinlichkeit $\varphi_{nk_1}^2 + \varphi_{nk_2}^2$ der beteiligten Randzustände im wesentlichen unverändert.

Der Leitwert² eines Randkanals ist durch das Leitwertquantum $G_0 = e^2/h$ bzw. im spinentarteten Fall durch $2e^2/h$ gegeben³ [Mac84]. Wenn in Abb. 3.1a für ein Fermi-Niveau im Bereich der Oberkante des ε_{1k} -Bandes zwei Randkanalpaare stark koppeln, d. h., die Kristallimpulserhaltung für Tunnelprozesse erfüllt wird, ist der Leitwert für den Transport über die Barriere von Null verschieden. Für den Leitwert gilt dabei eine Obergrenze von $4e^2/h$. Diese wird jedoch erst dann erreicht, wenn das Fermi-Niveau innerhalb der Bandlücke liegt. Verglichen mit der Situation $\varepsilon_F = 2,4$ fehlen in Abb. 3.1a für $\varepsilon_F = 2,8$ entlang der Barriere vier Randkanäle, während die entsprechenden Kanäle gleicher Ordnung an der Probenbegrenzung ① nach wie vor existieren. Aufgrund der Chiralität der Randkanäle, die Rückstreu-

²Der Leitwert (engl. *conductance*) $G = I/V$ wurde für Kapitel 4 in Zweipunktmethode mit je einem Kontakt pro Elektronensystem gemessen.

³Es gilt $G_0 = 1/R_K$, wobei $R_K = h/e^2 = 25812,807\Omega$ die von Klitzing-Konstante ist, die seit dem 1. Jan. 1990 weltweit als Widerstandsnorm dient [PTB98].

ung in die Kontakte verbietet, wird in [Kan00a] gefolgert, daß die Elektronen nunmehr im Übergangsbereich ③ direkt durch die Barriere tunneln (Abb. 3.1c). Wenn das Fermi-Niveau in das darüberliegende ε_{2k} -Band eintritt, entstehen entlang der Barriere erneut vier Randkanäle und der Tunnelstrom kommt wieder zum Erliegen. Dieser Vorgang wiederholt sich periodisch, wenn das Fermi-Niveau oder Magnetfeld über weite Bereiche geändert werden. Die entsprechenden Leitwertoszillationen werden in dieser Arbeit zur Abgrenzung gegenüber den quasi- und kurzperiodischen Strukturen (Abschnitt 3.2) in den Leitwertkurven als „Landau-Oszillationen“ bezeichnet. In den Bereichen des Füllfaktors oder Magnetfelds, für die das Fermi-Niveau innerhalb einer Bandlücke liegt, tritt ein stark erhöhter Leitwert auf. Unabhängig von der tatsächlichen Form werden die entsprechenden Erhebungen in den Leitwertkurven „Leitwertspitzen“ (engl. *conductance peaks*) oder synonym „Leitwertmaxima“ genannt.

Wenn das Fermi-Niveau in einer der Bandlücken im Kopplungsbereich beider Elektronensysteme liegt, so gilt sowohl für starke (Abb. 2.5) als auch schwache (Abb. 2.6) Kopplung, daß entlang der Barriere genau zwei gegenüberliegende Randkanäle existieren (Abb. 3.1c). Trennt die betreffende Energielücke das n -te und $(n+1)$ -te Landau-Band ($n \in \mathbb{N}$), so führen $(n+1)$ Transportkanäle jeweils direkt über die beiden Enden der Barriere und der Leitwert des Systems beträgt $2(n+1)e^2/h$. Weiter unten in Abschnitt 3.1.4 wird gezeigt, daß die Randkanäle entlang der Barriere in schwach gekoppelten Elektronensystemen nahezu gleichzeitig verloren gehen, wenn das Fermi-Niveau in eine Bandlücke eintritt. Im experimentell noch nicht realisierten Fall einer starken Kopplung wird hingegen aufgrund von Abb. 3.1a erwartet, daß der Leitwert im Bereich von Bandlücken, die energetisch oberhalb der Tunnelbarriere liegen, stufenweise ansteigt. So verschwinden bei steigendem Fermi-Niveau bei $\varepsilon_F = 3,25$ zunächst zwei und bei $\varepsilon_F = 3,50$ nochmals vier Randzustände. Trotz der später in Abschnitt 3.1.3 diskutierten starken Verbreiterung der Landau-Oszillationen sollte aufgrund der erheblichen Energiedifferenz von $\Delta\varepsilon = 0,25$ in der dritten Leitwertspitze eine Stufe als Folge des Leitwertanstiegs von $2e^2/h$ auf $6e^2/h$ zu beobachten sein.

3.1.2 Füllfaktor vs. Energieskala

Die Landau-Bandstruktur von schwach gekoppelten Elektronensystemen ändert sich, wie in Abschnitt 2.4.1 festgestellt wurde, bei variierendem Magnetfeld auf der Skala der Zyklotron-Energie nur wenig. Wenn der Zusammenhang zwischen Landau-Oszillationen und der Bandstruktur untersucht werden soll, ist deshalb der Füllfaktor $\nu = n_{\square}h/eB$ das natürliche Pendant zur dimensionslosen Energieskala ε_{nk} der Landau-Zustände (Gl. 1.23). Auf den ersten Blick erscheint es unmöglich, die in Abb. 3.1 skizzierten Fälle mit nicht ganzzahligem ε_F zu realisieren. Bei einer Variation des Füllfaktors springt die Fermi-Energie schließlich zwischen den einzelnen Landau-Niveaus, für die $\varepsilon_{nk} \in \mathbb{N}$ gilt. Im folgenden wird nun untersucht, in welcher Weise die Randzustände und insbesondere die im Unordnungspotential realer Proben auftretenden lokalisierten Zustände den funktionalen Zusammenhang $\varepsilon_F(\nu)$ bestimmen.

Infolge der Bandverbiegung im Bereich des lateralen Einschlußpotentials eines 2DESs gibt es mit den Randzuständen durchaus Energieniveaus, die zwischen den Landau-Niveaus

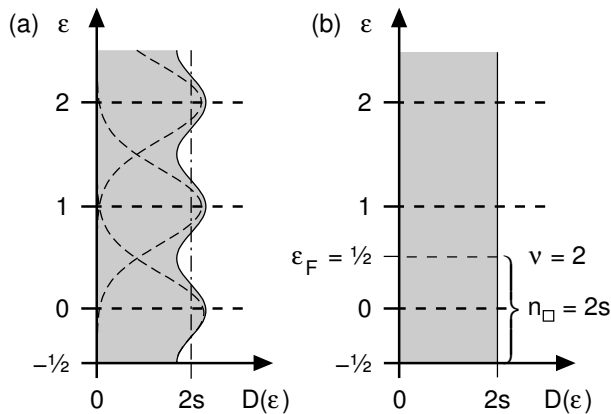


Abb. 3.2. Zustandsdichte $D(\epsilon)$ eines spin-entarteten 2DESs im Magnetfeld. **(a)** Verbreiterte Landau-Niveaus in der Form von Gaußschen Glockenkurven (gestrichelt). Die summierte Zustandsdichte (durchgezogene Linie) oszilliert um den Mittelwert $2s = 2eB/h$. **(b)** Gleichförmige Zustandsdichte (3.1) als asymptotische Näherung für (a). Für $E_F = \hbar\omega_c$ bzw. $\epsilon_F = \frac{1}{2}$ befinden sich alle Elektronen im untersten Landau-Niveau.

des Probenvolumens liegen und so ein quasi-kontinuierliches Durchfahren des Fermi-Niveaus ermöglichen. Der Streifen mit Randzuständen entlang der Tunnelbarriere hat nach (1.62) die Breite $\Delta x = \sqrt{2\epsilon_F + 1}\ell$. Für typische Systemparameter (vgl. Tab. 4.2) nimmt Δx Werte in der Größenordnung von 50 nm an. Selbst bei schmalen Elektronensystemen wie denen dieser Arbeit (Abb. 2.1a) beträgt der Anteil der Randzustände deshalb nur etwa $0,05 \mu\text{m}/2 \mu\text{m} = 2,5\%$. Für diese Abschätzung können die Chklovskii-Randzustände an der Probenbegrenzung ① in Abb. 3.1b vernachlässigt werden.

Quantitativ entscheidender als die Randzustände sind bei der Verwirklichung von nicht ganzzahligen Werten von ϵ_F die lokalisierten Zustände. In realen Proben ist das elektrostatische Potential in der Ebene der Elektronensysteme niemals exakt konstant, sondern es ist von einem Unordnungspotential überlagert. Die Potentialvariationen führen zur Entstehung von lokalisierten Zuständen, die gegenüber den ausgedehnten Zuständen mit ganzzahligen Energieeigenwerten energetisch verschoben sind (Verbreiterung der Landau-Niveaus, Abb. 3.2). Als ein Maß für das Verhältnis der Zahl zwischen lokalisierten und ausgedehnten Zuständen kann die Breite der Plateaus in einer Hall-Geraden herangezogen werden [Gra06]. Allerdings ist eine Messung des Hall-Widerstands (1.9) mit den Proben dieser Arbeit nicht möglich, da deren Quantenregion nur über zwei Kontakte erschlossen ist (Zweipunktmessung, Abb. 4.2).

In [Kan00a] und [Hub05] wird die Beweglichkeit im Elektronensystem parallel zur Spaltfläche jeweils mit $\sim 10^5 \text{ cm}^2/\text{Vs}$ angegeben. Beide Autorengruppen gehen von einer starken Verbreiterung der Landau-Niveaus aus und verwenden die Näherung einer flachen Zustandsdichte. In [Yan04, Fig. 1(a)] treten etwa elf bis zwölf Leitwertspitzen auf. Da bei der Messung des Tunnelstroms in Kapitel 4 höchstens acht Landau-Oszillationen nachzuweisen sind (Abb. 4.8), ist die Beweglichkeit in den Strukturen dieser Arbeit noch niedriger anzusetzen, so daß die Annahme von stark verbreiterten Landau-Bändern mindestens in gleichem Maße gerechtfertigt ist.

Abbildung 3.2 zeigt, wie verbreiterte Landau-Niveaus in nullter Ordnung durch eine konstante Zustandsdichte genähert werden. Letztere ist mit der 2D-Zustandsdichte (1.36) ohne Magnetfeld identisch und hat in der Einheit $\text{m}^{-2}(\hbar\omega_c)^{-1}$ den Wert $D(\epsilon) = 2s$. Dabei ist s die Besetzungszahl (1.34) von spinpolarisierten Landau-Niveaus. Im Falle einer konstanten Zustandsdichte ist das unterste Landau-Niveau, wie in Abb. 3.2b exemplarisch dargestellt wird, für $\epsilon_F = \frac{1}{2}$ gerade vollständig gefüllt ($\nu = 2$). Die lineare Fortsetzung auf andere Werte

der dimensionslosen Energie ergibt die asymptotische Näherung⁴

$$\nu \simeq 2 \left(\varepsilon_F + \frac{1}{2} \right) \quad (3.1)$$

für den Füllfaktor in einem System mit flacher Zustandsdichte. Mit dieser Formel kann die Energieskala der Bandstruktur auf den Füllfaktor bzw. das Magnetfeld übertragen werden, wodurch gemäß Abschnitt 3.1.1 ein Vergleich zwischen der Lage der theoretisch bestimmten Landau-Bandlücken und den experimentell zugänglichen Landau-Oszillationen möglich wird.

Nach Auffassung von [Kan00a] erwartet man für lateral gekoppelte Elektronensysteme einen endlichen Leitwert nur dann, wenn das Fermi-Niveau innerhalb einer der Bandlücken liegt. Abschnitt 2.4 hat gezeigt, daß die Bandlücken bei schwacher Kopplung klein gegenüber der Zyklotron-Energie sind. So erhält man im Beispiel von Abb. 2.6 als kleinsten Abstand zwischen dem 1. und 2. Band den Wert $\Delta\varepsilon = 0,016$ ($B = 2,84$ T). Nach (3.1) entspricht dies dem Intervall $\Delta\nu = 0,032$ auf der Skala des Füllfaktors. Zur Bestimmung der äquivalenten Magnetfeldänderung läßt sich (3.1) unter Verwendung von $\nu = n_{\square}/s$ und (1.34) zu

$$\frac{n_{\square}}{2,418 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-2}} \simeq 2 \frac{B}{1 \text{ T}} \left(\varepsilon_F + \frac{1}{2} \right) \quad (3.2)$$

umformen. Dem Fermi-Niveau $\varepsilon_F = 2,105$ (Abb. 2.6b) entspricht also eine Elektronendichte $n_{\square} = 3,6 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$. Für $\Delta\varepsilon \ll \varepsilon_F$ folgt aus (3.1) außerdem die Beziehung

$$\Delta B \simeq - \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_F + \frac{1}{2}} B. \quad (3.3)$$

Die Näherung in dieser Formel besteht darin, daß sich die Bandlücke $\Delta\varepsilon$ mit dem Magnetfeld ändert, so daß das exakte ΔB eigentlich iterativ durch wiederholte Berechnung der Bandstruktur bei konstantem ε_F bestimmt werden müßte. Der Fehler ist jedoch bei den kleinen Bandlücken schwach gekoppelter Elektronensysteme zu vernachlässigen. Für $\Delta\varepsilon = 0,016$ erhält man mit (3.3) $|\Delta B| = 17 \text{ mT}$ als Breite der Energielücke auf der Skala des Magnetfelds. Die Frage, weshalb die tatsächlich gemessenen Leitwertspitzen viel breiter sind, ist Gegenstand des nächsten Abschnitts.

3.1.3 Vergrößerung der Landau-Bandlücken

Als Breite der ersten beiden Leitwertspitzen wird in [Kan00a] $\Delta\nu = 1,5 - 1,2 = 2,5 - 2,2 = 0,3$ angegeben. Von vergleichbarer Größe sind die Halbwertsbreiten, die sich an den Leitwertspitzen in [Yan04, Fig. 1(a)] ausmessen lassen: $\Delta\nu = 1,65 - 1,30 = 0,35$ bzw. $\Delta\nu = 2,99 - 2,61 = 0,38$. Daß die Leitwertmaxima um ein Vielfaches breiter sind als es den Bandlücken entspricht, deren Ausdehnung von der Größenordnung $\Delta\varepsilon = 0,02$ ist, wird mit dem experimentellen Teil dieser Arbeit bestätigt: Die Breite beider Leitwertmaxima in Abb. 4.10a beträgt sogar

⁴Wenn die Zeeman-Aufspaltung wie in GaAs mit $\sim 1/68 \hbar\omega_c$ (Gl. 4.20) kleiner als die Landau-Aufspaltung ist, gilt die Formel (3.1) auch für spinaufgespaltene Landau-Niveaus, zumindest auf großem Maßstab. Deshalb ist unklar, warum in [Kan00a] $\nu \approx E_L/\hbar\omega_c$ als Beziehung zwischen der Energieskala des linken Elektronensystems und dem Füllfaktor verwendet wird. Vergleiche auch Fußnote 27 auf Seite 39.

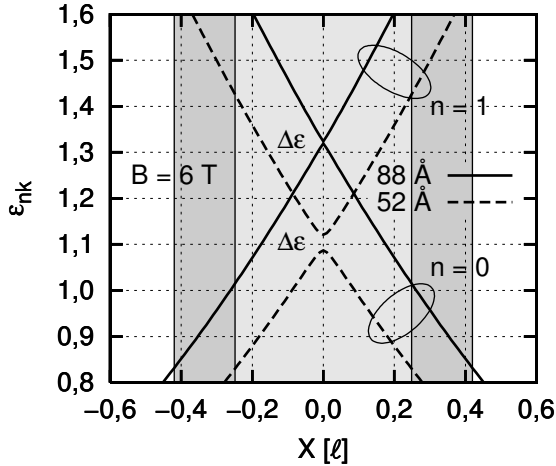


Abb. 3.3. Bandstruktur mit Antikreuzung für $V_0 = 212 \text{ meV}$ und $B = 6 \text{ T}$. Die Werte der Energielücke $\Delta\varepsilon$ finden sich in nebenstehender Tabelle.

Tab. 3.1. Energielücke $\Delta\varepsilon_{(\text{ww})}$ nach verschiedenen Modellen. Systemparameter wie in Abb. 3.3 und $m^* = 0,067m_e$. Zu [Ho94] siehe Abschnitt 2.4.2 sowie Formel (2.7).

Quelle	Coul.-WW	88 Å	52 Å
Habl	nein	0,00471	0,0341
[Mit01]	nein	0,00432	0,0332
[Ho94]	nein	0,00283	0,0227
[Mit01]	ja	0,0105	0,0549
[Kol02]	ja	0,0124	0,0769

$\Delta\nu = 1,0$. Dieser Wert beinhaltet jedoch eine Verdopplung infolge der Spinartung und eine zusätzliche Verbreiterung aufgrund der geringeren Elektronenbeweglichkeit und einer dünneren Barriere.

Das Ziel des vorliegenden Abschnitts ist es, eine kurze Übersicht zu theoretischen Arbeiten zu geben, die den Einfluß von Vielteilcheneffekten auf die Größe der Landau-Bandlücken und damit auch der Breite der Leitwertspitzen untersuchen. Die Breite der Tunnelbarrieren in den Experimenten aus [Kan00a] und [Hab06] ist mit $a = 5\text{--}9 \text{ nm}$ deutlich kleiner als der mittlere Ladungsträgerabstand

$$\langle d \rangle = 1/\sqrt{n_{\square}} \approx 18\text{--}30 \text{ nm} \quad (3.4)$$

in den Elektronenfilmen. Die Coulomb-Wechselwirkung zwischen den gegenüberliegenden Randkanälen kann also nicht aufgrund eines großen Abstands vernachlässigt werden, sondern muß dahingehend untersucht werden, ob sie eine signifikante Veränderung der Einteilchen-Bandstruktur bewirkt. Mit dem Einfluß der Elektron-Elektron-Wechselwirkung auf die Breite der Bandlücken beschäftigen sich die Arbeiten von Mitra und Girvin [Mit01] sowie von Kollar und Sachdev [Kol02]. In beiden Fällen ist die Bandlücke durch die Solitonen-Energie eines Sine-Gordon-Modells gegeben, auf welches die Anordnung 2DES-Barriere-2DES abgebildet wird.

Mitra und Girvin berechnen im Rahmen einer Hartree-Fock-Theorie den Luttinger-Parameter, die Kollektivmoden-Geschwindigkeit und schließlich den Impuls-Cutoff eines effektiven Sine-Gordon-Modells. Für nicht wechselwirkende Elektronen und die Parameter $B = 6 \text{ T}$, $a = 52 \text{ Å}$ und $V_0 = 212 \text{ meV}$ wird als Energielücke zwischen den beiden untersten Landau-Bändern der Wert $\Delta\varepsilon = 0,033$ angegeben.⁵ Dabei ist jedoch unklar, welcher Ansatz genau der Berechnung dieser Größe zugrundeliegt. Der Vergleich aus Tab. 3.1 zeigt jedenfalls, daß die erzielten Ergebnisse um weniger als 10 % von der exakten Lösung der

⁵Die Autoren von [Mit01] und [Kol02] drücken Energiegrößen in der Einheit Kelvin aus. Die Umrechnung in ein Vielfaches der Zyklotron-Energie ist mit der Beziehung $1 \text{ K} \hat{=} (1 \text{ K} \cdot k_B \cdot 0,067m_e/eB\hbar) \hbar\omega_c \approx 0,04987 \hbar\omega_c/(B/1 \text{ T})$ möglich.

Einteilchen-Schrödinger-Gleichung (Abb. 3.3) abweichen und somit deutlich genauer sind als die nach der quasiklassischen Methode von [Ho94] gewonnenen Werte. Unter Berücksichtigung der Coulomb-Wechselwirkung entlang und über die Barriere hinweg wird in [Mit01] eine erweiterte Bandlücke mit $\Delta\varepsilon_{\text{ww}} = 0,055$ erhalten. Dieser Wert übertrifft $\Delta\varepsilon$ zwar um 67 %, ist aber noch immer deutlich zu klein, um die Breite der Leitwertspitzen in allen Experimenten zu erklären.

Kollar und Sachdev [Kol02] kombinieren mit einer asymptotischen Analyse (engl. *method of matched asymptotics*) die Ergebnisse zweier separater Rechnungen. Die Gültigkeitsbereiche beider Ansätze liegen auf unterschiedlichen Längenskalen, besitzen aber einen dazwischenliegenden, gemeinsamen Bereich der Überschneidung. Auf kleinem Maßstab wird im Rahmen einer mikroskopischen Störungsrechnung die Coulomb-Wechselwirkung zwischen den Randkanälen berücksichtigt, während auf großer Längenskala mit einer exakt lösbarer Quantenfeldtheorie die durch den Tunneleffekt bedingte Energielücke bestimmt wird. Den Ausgangspunkt bilden eine zusammengesetzte Bandstruktur *à la* [Ho94] und eine unterste Bandlücke $\Delta\varepsilon$, deren Wert bei fehlender Wechselwirkung aus [Mit01] übernommen wird. Für wechselwirkende Elektronen und $a = 52 \text{ \AA}$ erhalten Kollar und Sachdev mit $\Delta\varepsilon_{\text{ww}} = 0,077$ eine auf das Zweifache angestiegene Energielücke. Das Ergebnis aus [Mit01] wird insgesamt um 20–40 % übertroffen (Tab. 3.1).

Obwohl die Coulomb-Wechselwirkung gegenüber der Einteilchen-Bandstruktur immerhin ungefähr zu einer Verdopplung der Breite der Energielücken führt, bleibt trotz allem zwischen dem experimentellen $\Delta\nu$ und dem theoretischen $\Delta\varepsilon$ ein Faktor von ca. 5,5 bestehen. Zur Erklärung dieser Diskrepanz bleibt nur der Hinweis auf die Unordnung, die realen Proben immanent ist. Wie in den Abschnitten 3.2 und 4.6 zu sehen sein wird, sind Abweichungen vom idealen Potentialverlauf experimentell sogar direkt nachweisbar, zumindest was sog. Tunnelzentren anbelangt, die Unvollkommenheiten der Barriere mit lokal erhöhter Tunnelwahrscheinlichkeit darstellen [Yan05]. Die Streuung der entlang der Barriere propagierenden Elektronen lockert das Prinzip der Kristallimpulserhaltung (Abschnitt 1.2.4) und führt damit zu einem Auswaschen der Bandstruktur [Kan00a]. Ähnlich wird in [Mit01] argumentiert: Die ionisierten Donatoren der Modulationsdotierung verursachen ein zufälliges Unordnungspotential. Infolgedessen ist das Intervall des chemischen Potentials, für das Rückstreuung in gegenüberliegende Randkanäle stattfinden kann, weniger durch die Größe der Bandlücke als durch die Stärke des Unordnungspotentials bestimmt.

Es ist ein wenig erfolgversprechendes Unterfangen, quantitative Aussagen über das Unordnungspotential in einer konkreten Probe treffen zu wollen. Doch trotz der Tatsache, daß aufgrund dieser Unkenntnis aus der nominellen Breite der Bandlücken nur in unzulänglicher Weise auf die Breite der Leitwertspitzen geschlossen werden kann, sollen abschließend die Werte von $\Delta\varepsilon$ für $a = 88 \text{ \AA}$ oder 52 \AA verglichen werden. Während die Barrierendicke um 40 % abnimmt, steigt die Bandlücke gemäß Tab. 3.1 ohne und mit Berücksichtigung von Wechselwirkung um das 7,2- bzw. 5,7-fache an. Prinzipiell sind also für die 52 \AA -Proben dieser Arbeit im Vergleich zu denen von Kang *et al.* (88 \AA) breitere Leitwertspitzen zu erwarten.

3.1.4 Äquidistanz der Antikreuzungen

Während die beiden Energielücken zwischen dem 1. und 2. Landau-Band in Abb. 3.1a allein aus Symmetriegründen auf gleicher Höhe liegen, ist das bei den drei darüberliegenden Bandlücken gleicher Ordnung schon nicht mehr der Fall. In diesem Abschnitt wird jedoch nicht die Bandstruktur von stark, sondern von schwach gekoppelten Elektronensystemen untersucht. Das Ziel besteht dabei darin, für Abschnitt 4.4 eine Methode zu entwickeln, mit der die Elektronendichte aus den magnetfeldabhängigen Leitwertkurven bestimmt werden kann. Im Fokus des Interesses steht der energetische Abstand von Antikreuzungen gleicher sowie aufeinanderfolgender Ordnung und die Frage, inwiefern diese Energiedifferenzen von der Stärke des Magnetfelds abhängen. Insgesamt handelt es sich dabei um eine Verallgemeinerung der Betrachtungen aus Abschnitt 2.4.1. Dort wurde für $V_0 \gg \hbar\omega_c$ festgestellt, daß sich die Antikreuzungen bei einer Magnetfeldänderung nur um Bruchteile der Zyklotron-Energie verschieben. Beispielsweise sorgt in Abb. 2.6b, ausgehend von 1,84 T, der Anstieg des Magnetfelds um 1 T für ein Anheben der Energielücke zwischen dem 1. und 2. Band um $0,02 \hbar\omega_c$.

In Abb. 2.6a liegen alle Energielücken, die zwei aufeinanderfolgende Bänder trennen, auf nahezu derselben Höhe. Die vergrößerte Darstellung in Abb. 3.4a zeigt, daß die Bandlücken größtenteils überlappen und ihre Position mit zunehmendem $|X|$ leicht abfällt. Es ist jedoch nicht möglich, im Experiment die einzelnen Antikreuzungen aufzulösen, da, wie zuvor diskutiert, die Halbwertsbreite $\Delta\nu$ der Leitwertspitzen die Ausdehnung $\Delta\varepsilon$ der Energielücken um ein Vielfaches übertrifft. Im folgenden wird deshalb nur die mittlere Position von Energielücken gleicher Ordnung betrachtet. Deren energetische Lage ist in Abb. 3.4b für zwei verschiedene Magnetfeldstärken gegen den Bandindex aufgetragen. Da die Antikreuzungen äquidistant sind, kann ihre Position durch die empirischen Geradengleichungen

$$B = 1,84 \text{ T} : \quad \varepsilon_n^{AK} = (1,075 \pm 0,005) + (1,007 \pm 0,001) n \quad (3.5a)$$

$$B = 2,84 \text{ T} : \quad \varepsilon_n^{AK} = (1,094 \pm 0,003) + (1,009 \pm 0,001) n \quad (3.5b)$$

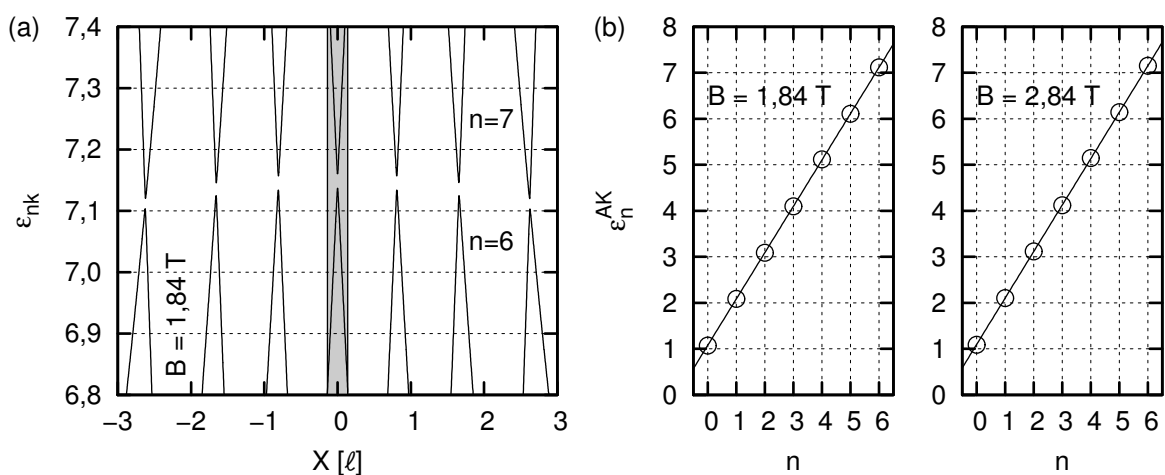


Abb. 3.4. (a) Bandstruktur für $V_0 = 268 \text{ meV}$ und $a = 52 \text{ \AA}$ (Vergrößerung aus Abb. 2.6a). (b) Mittlere Position der Energielücken zwischen dem n -ten und $(n+1)$ -ten Landau-Band. Die Relationen (3.5) ergeben sich durch Anpassung einer Geradengleichung an die Datenpunkte.

beschrieben werden. Die eingangs dieses Abschnitts erwähnte Verschiebung der Antikreuzungen bei einer Änderung des Magnetfelds ist fast vollständig im ersten Term enthalten. Dieser reproduziert mit $1,094 - 1,075 = 0,019$ den Wert $0,02 \hbar\omega_c$ aus Abschnitt 2.4.1. Die im zweiten Term von (3.5) enthaltene Magnetfeldabhängigkeit ist um eine Größenordnung schwächer und nimmt mit dem Bandindex zu. Zusammenfassend hat man also äquidistante Antikreuzungen, die mit steigendem Magnetfeld ($\Delta B = 1$ T) kollektiv angehoben werden ($\Delta\varepsilon_n^{AK} = 0,02$), wobei der Abstand der einzelnen Lücken ebenfalls leicht zunimmt ($\Delta\varepsilon_n^{AK} = 0,002n$).

Auch Takagaki und Ploog [Tak00] gehen bei der Interpretation ihrer Tight-Binding-Rechnung (Abschnitt 2.6) kurz auf die Lage der Antikreuzungen und deren Abstand ein. Die Distanz zwischen den Leitwertspitzen ist konstant und hat unabhängig von der Elektronendichte den Wert 2 auf der Skala des Füllfaktors. Unter Berücksichtigung der auch in [Tak00] vorausgesetzten Spinentartung entspricht diese Zahl nach (3.1) einer Energiedifferenz von $\varepsilon_{n+1}^{AK} - \varepsilon_n^{AK} = 1$. Dieser Wert geht mit dem Zusammenhang (3.5) konform, welcher mit höherer Genauigkeit aus der exakten Einteilchenrechnung gewonnen wurde.

Die Autoren von [Tak00] stellen ferner fest: Wenn N Landau-Bänder unterhalb des Fermi-Niveaus besetzt sind, ist die für die Leitwertspitze verantwortliche Energielücke N -fach entartet. Auch dieser Punkt wird von Abb. 3.4a mit einer kleinen Einschränkung bestätigt: Wenn das Fermi-Niveau im Überlappungsbereich der sieben Energielücken zwischen dem ε_{6k} - und ε_{7k} -Band liegt, sind die Landau-Bänder $n = 0, 1, \dots, 6$ besetzt. Die Energielücken liegen jedoch, wie weiter oben ausgeführt wurde, auf leicht unterschiedlicher Höhe, so daß das Fermi-Niveau nicht exakt gleichzeitig durch alle Lücken geht und man insofern von Entartung nur bedingt sprechen kann.

3.2 Tunnelzentren und Quanteninterferenz

Die Landau-Oszillationen bestimmen die Grundstruktur der Leitwertkurven. Ihr Entstehen wird am einfachsten in der Theorie der Mischung von Landau-Zuständen verstanden, der eine atomar glatte Potentialerhebung zugrunde liegt. Gleichwohl ist nicht ausgeschlossen, daß in der ca. 18 Monolagen starken Barriere Unvollkommenheiten in der Kristallstruktur enthalten sind. Selbst bei idealen Wachstumsbedingungen sind Unregelmäßigkeiten allein aufgrund der statistischen Verteilung der Gruppe-III-Elemente in der ternären Verbindung AlGaAs unvermeidbar. Kim und Fradkin haben basierend auf der Hypothese von punktförmigen Tunnelzentren innerhalb der Barriere die Wechselwirkung zwischen gegenüberliegenden Randkanälen untersucht. Mit den Ergebnissen der ersten Veröffentlichung [Kim03a], die sich noch auf ein einzelnes Tunnelzentrum beschränkt, kann die Entstehung der ersten beiden Leitwertspitzen mit kleinstem Füllfaktor nachvollzogen werden. Abschnitt 3.2.1 rekapituliert die wichtigsten Punkte dieser Theorie. Die Erweiterung des Modells auf zwei Tunnelzentren in [Kim03b] eröffnet die Möglichkeit von Quantenkohärenzeffekten. Im Zentrum der Diskussion von Abschnitt 3.2.2 steht der Aharonov-Bohm-Effekt an Randkanälen, die durch zwei oder mehr Tunnelzentren gekoppelt sind. Interferenzen zwischen einzelnen Teiltrajektorien führen zu kurz- und quasiperiodischen Oszillationen im Tunnelstrom, die den Landau-Oszillationen überlagert sind. Der Effekt wurde erstmals in [Yan05] an der Leitwertspitze mit kleinstem

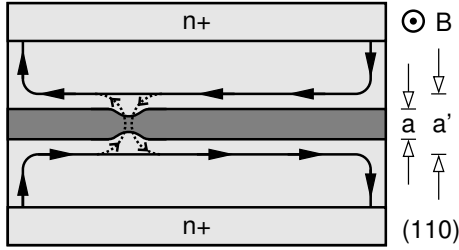


Abb. 3.5. Zwei gegenüberliegende, entgegengesetzt propagierende Randkanäle können als eine singuläre Luttinger-Flüssigkeit ohne Chiralität angesehen werden. Rückstreuung zwischen beiden Zweigen der eindimensionalen Fermi-Flüssigkeit findet nur an Tunnelzentren in der Barriere statt [Kim03a].

Füllfaktor beobachtet. Die vorliegende Arbeit bestätigt das Verhalten des Tunnelstroms in diesem Bereich des Füllfaktors und zeigt zusätzlich die Existenz ähnlicher quasiperiodischer Oszillationen im Bereich kleiner Magnetfelder auf, die noch vor dem Einsatz der regulären Landau-Oszillationen zu beobachten sind.

3.2.1 Kopplung durch ein einzelnes Tunnelzentrum

Kim und Fradkin ersetzen die beiden lateral gekoppelten Quanten-Hall-Systeme aus Abb. 3.5 durch das Modell eines Paares von gekoppelten, chiralen Luttinger-Flüssigkeiten und betrachten dabei den Fall $\nu \approx 1$ [Kim03a]. Die Chiralität der Luttinger-Flüssigkeiten ist durch die Dispersion aus Abb. 2.6 bzw. durch den sich daraus ergebenden Elektronenimpuls (1.28) für Zustände an der Fermi-Kante bestimmt. Aus der Erhaltung der Chiralität folgt, daß die Elektron-Elektron-Wechselwirkung zwischen den gegenüberliegenden eindimensionalen Fermi-Flüssigkeiten nur zu Vorwärtstreuung führen kann. Ohne Rückstreuung verhalten sich die zwei Randkanäle mit entgegengesetztem Impuls wie eine einzige Luttinger-Flüssigkeit ohne Chiralität (Abb. 3.5). Diese kann durch die effektive Geschwindigkeit v_0 und die effektive Luttinger-Kopplungskonstante g_c , ein Maß für die Stärke der Wechselwirkungen, beschrieben werden. Unter Verwendung des Abstands a' der gegenüberliegenden Randkanäle schätzen Kim und Fradkin die Kopplungskonstante g_c mit Hilfe des Verhältnisses zwischen Coulomb- und Fermi-Energie grob ab: $g_c \approx (e^2/\epsilon_r\epsilon_0 a')/E_F$. Nur für Füllfaktoren $\nu > 1$ erhält man einen Luttinger-Parameter $K < 1$, der dann durch $K = \sqrt{(1-g_c)/(1+g_c)}$ gegeben ist. Andernfalls gilt $K > 1$ und das Tunneln durch die Barriere ist unterdrückt.

Während im Bild der Mischung von Landau-Zuständen der Tunnelstrom ausschließlich an den äußeren Enden der Barriere auftritt (Abschnitt 3.1.1), sind Tunnelprozesse nach dem Modell von [Kim03a] nur an einer hypothetischen lokalen Deformation der Barriere möglich. Eine solche Unregelmäßigkeit, die in einer Störstelle oder einem lokal erniedrigten Aluminiumgehalt bestehen kann, wird als Tunnelzentrum oder Punktkontakt bezeichnet und ist die Ursache für Rückstreuung zwischen den links- und rechtspropagierenden Zweigen der nicht-chiralen Luttinger-Flüssigkeit. In Abb. 3.5 repräsentieren die durchgezogenen Linien die Bahn der Orbitzentren von Elektronen in einem Randkanal, während die gestrichelten Kreisbögen einen Teil des Orbits von tunnelnden Elektronen (vgl. Abb. 1.1) darstellen. Kim und Fradkin bilden das System Randkanal-Barriere-Randkanal auf das Problem einer einzigen Luttinger-Flüssigkeit ab, die eine schwache Verbindungsstelle (engl. *link* oder *junction*) enthält. Ein entsprechendes System wurde bereits von Kane und Fisher untersucht [Kan92a, Kan92b]. Nach erfolgter Bosonisierung übertragen Kim und Fradkin schließlich das Modell auf das Sine-Gordon-Problem, für welches exakte Lösungen bekannt sind.

Für ein spinaufgespaltenes System liefert die Rechnung in [Kim03a] u. a. folgende Ergebnisse: Die Höhe der Leitwertspitzen liegt in Abhängigkeit von einer Tunnelamplitude t (vgl. Abschnitt 2.6) deutlich unterhalb des Hall-Leitwerts $(n+1)e^2/h$ und hat im Limit von $T = 0$ den Wert

$$G_t = Ke^2/h. \quad (3.6)$$

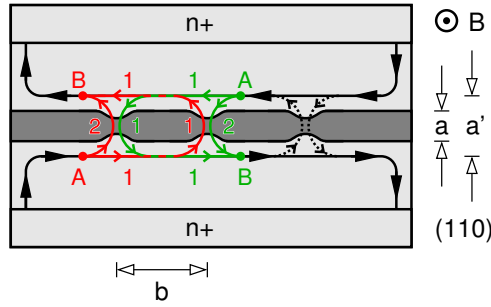
Weiterhin wird festgestellt, daß die Leitwertspitzen wesentlich breiter sind als aufgrund der schmalen Lücken in der Einteilchen-Bandstruktur zu erwarten ist. Die erste Leitwertspitze liegt bei $\nu \gtrsim 1$, und eine Erweiterung des Modells auf das nächsthöhere Landau-Niveau, das mit Elektronen entgegengesetzten Spins besetzt ist, ergibt die Position $\nu \gtrsim 2$ für eine zweite Leitwertspitze. Leitwertspitzen bei höheren Füllfaktoren werden von Kims und Fradkins Modell nicht erfaßt. Aufgrund der ungenauen Angaben über die Lage der Leitwertspitzen und der Tatsache, daß die Werte keine Magnetfeldabhängigkeit enthalten, wird in dieser Arbeit bei der Analyse der Position der Leitwertspitzen auf die Bandstruktur aus Kapitel 2 zurückgegriffen.

Abschließend bleibt zu bemerken, daß das Modell aus [Kim03a] primär für ein Elektronensystem im Regime des fraktionalen Quanten-Hall-Effekts entwickelt wurde und auf den Eigenschaften von Luttinger-Flüssigkeiten beruht. Trotz der Bezugnahme auf [Kan00a] unterlassen es die Autoren jedoch, die Anwendbarkeit der Theorie auf ganzzahlige Quanten-Hall-Zustände zu diskutieren. Im Bild der Mischung von Landau-Zuständen folgt das periodische Auftreten von Leitwertspitzen aus der Existenz von Landau-Bandlücken. Die Coulomb-Wechselwirkung ist dabei nur für die Verbreiterung der Leitwertspitzen, nicht jedoch für ihr Auftreten verantwortlich. Im Gegensatz dazu wird nach [Kim03a] die Coulomb-Wechselwirkung als allein ursächlich für die Existenz der Leitwertmaxima bei $\nu \gtrsim 1$ und $\nu \gtrsim 2$ angesehen. Die Bandstruktur und ihre Energielücken finden in diesem Modell keine Berücksichtigung.

3.2.2 Aharonov-Bohm-Effekt an Tunnelzentren

Es erscheint sehr wahrscheinlich, daß eine Probe nicht nur ein Tunnelzentrum, sondern gleich mehrere dieser Störungen in der Barriere aufweist. Durch mehrfaches Tunneln ergibt sich für ein Elektron die Möglichkeit der Selbstinterferenz. Abbildung 3.6 illustriert, wie mit zwei Tunnelzentren das von Aharonov und Bohm (AB) vorgeschlagene Interferenzexperiment realisiert werden kann [Aha59, Web88, Dat97]: Die Elektronentrajektorie teilt sich am Punkt A in zwei Wege 1 und 2 auf, die bei B wieder zusammentreffen. Beide Teiltrajektorien schließen den magnetischen Fluß $\Phi = Bba'$ ein, wobei $a' > a$ der Abstand der interferierenden Randkanäle und b die Distanz zwischen beiden Tunnelzentren ist.⁶ Die Wellenfunktion eines Elektrons

⁶Im Gegensatz zu Abb. 3.6 schließen in [Kim03b, Fig. 1] und [Yan05, Fig. 1(b)] die beiden innersten Tunnelpfade den maßgeblichen magnetischen Fluß ein, was hier einer Kombination von Teilen der roten und grünen 1er-Wege entsprechen würde. Eine solche Interferenzmöglichkeit widerspricht zwar der klassischen AB-Anordnung mit Strahlteiler [Aha59], ergibt aber dasselbe Meßergebnis, wie zum Beispiel in [Umb87] sogar für einen AB-Ring gezeigt wurde, der nur über eine einzige Zuleitung mit dem Stromkreis verbunden war.



⊙ B
 $\downarrow \downarrow$
 $a \ a'$
 $\uparrow \uparrow$
 (110)

Abb. 3.6. Barriere mit drei Tunnelzentren. Die roten und grünen Pfade sind zueinander äquivalent.⁶ Das AB-Experiment stellt sich so dar: Ein Elektron am Punkt A gelangt entweder über den Weg 1 oder 2 zum Punkt B. Unter Einbeziehung des rechten Tunnelzentrums wären weitere und komplexere Interferenzpfade möglich.

erfährt entlang der Teiltrajektorie $i \in \{1,2\}$ die Phasenverschiebung $S_i/\hbar = -e/\hbar \int_i \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$. Die Phasendifferenz zwischen beiden Teiltrajektorien erhält man demnach durch das Wegintegral

$$\frac{1}{\hbar} (S_2 - S_1) = \frac{e}{\hbar} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \quad (3.7a)$$

$$= \frac{e}{\hbar} \int_F (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{F} \quad (3.7b)$$

$$= \frac{e}{\hbar} B (ba') = \frac{ba'}{\ell^2} = 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}, \quad (3.7c)$$

wobei F die Fläche bezeichnet, welche von den Wegstücken 1 und 2 eingeschlossen wird. Der Ausdruck (3.7b) ergibt sich durch Anwendung des Integralsatzes von Stokes, und (3.7c) folgt aus der Definition des Vektorpotentials, $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$. Am Punkt B in Abb. 3.6 herrscht konstruktive Interferenz, wenn der magnetische Fluß $\Phi = Bba'$ ein ganzzahliges Vielfaches des Diracschen Flußquantums $\Phi_0 = h/e$ annimmt. Die Periodizität bezüglich des Magnetfelds beträgt deshalb

$$\Delta B = \frac{1}{ba'} \frac{h}{e}. \quad (3.8)$$

Während die Landau-Oszillationen (Abschnitt 3.1.1) eine glatte, langperiodische Funktion des Magnetfelds darstellen ($\Delta\nu \approx 1$), liegt die Periodenlänge der AB-Oszillationen im Bereich einiger Millitesla.

Der Abstand a' der Randkanäle kann anhand der Bandstruktur und der zugehörigen Wellenfunktionen bestimmt werden. Für schwach gekoppelte Elektronensysteme wurde in Abschnitt 2.4.3 festgestellt, daß Landau-Zustände abseits der kleinen Antikreuzungen Randzustände darstellen, deren Aufenthaltswahrscheinlichkeit sich auf einen der beiden Elektrodenfilme konzentriert (Abb. 2.8). Gemäß (1.62) hat ein Zustand der Energie ε_{nk} im allgemeinen eine Ausdehnung von $2\Delta X$, wobei $\Delta X = \sqrt{2\varepsilon_{nk} + 1} \ell$ gilt. Aus Abb. 1.6b wird ersichtlich, daß der Schwerpunkt eines Randzustandes mit $X > 0$ näherungsweise bei $[\frac{a}{2} + (X + \Delta X)]/2$ liegt. Der Abstand zum spiegelsymmetrischen Zustand bei $-X$ beträgt deshalb

$$a' \approx \frac{a}{2} + |X| + \Delta X. \quad (3.9)$$

Die Schwankungsbreite dieser Angabe hat für das Grundzustandsband etwa den Wert $\pm\ell$ und nimmt mit steigender Ordnung bzw. Ausdehnung der Randzustände zu.

Unter Fortentwicklung ihres Modells untersuchen Kim und Fradkin in [Kim03b] den Einfluß des AB-Effekts auf den Tunnelstrom durch die Barriere. Anstatt der Abschätzung (3.9) für den Abstand der Aufenthaltsschwerpunkte wird in [Kim03b] und [Yan05] als Trajektorienabstand unmittelbar die Barrierenbreite a verwendet.⁷ Die Interferenz der am Punkt B zusammentreffenden Elektronen steht in Konkurrenz zu thermischen Fluktuationen, weshalb die Autoren zwischen einem kohärenten und inkohärenten Regime unterscheiden. Inkohärenz liegt bei hoher Temperatur T und großem Abstand b zweier Tunnelzentren vor:⁸ $\hbar v/4b \ll k_B T$. Die Tunnelzentren wirken in diesem Fall voneinander unabhängig, d. h., sie sind entkoppelt und das in [Kim03a] entwickelte Modell für einen einzelnen Punktkontakt kann auf beide separat angewandt werden. Interessanter ist daher das kohärente Regime mit

$$\frac{\hbar v}{4b} \gg k_B T. \quad (3.10)$$

Kim und Fradkin unterscheiden hier zwischen den Grenzfällen starker und schwacher Kopplung. In beiden Fällen ergeben sich dabei AB-Oszillationen mit gleicher Periodizität (3.8), aber verschiedener Kurvenform. Bei starker Kopplung, also an einem Leitwertmaximum der Landau-Oszillationen, führt eine Serie resonanter Tunnelprozesse zu überlagerten Leitwertoszillationen, die den durch (3.6) gegebenen Maximalwert zudem etwas verringern. Aus der aufwendigen Rechnung in [Kim03b] resultiert nur ein Ausdruck für die Amplitude der Schwingungen, nicht jedoch für die genaue Magnetfeldabhängigkeit. Dahingegen wird im Grenzfall schwacher Kopplung ein einfaches sinusförmiges Verhalten des Tunnelstroms erhalten:

$$G_t \propto \frac{1}{2} \left[1 + \cos \left(2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \right) \right] + \dots . \quad (3.11)$$

Die Amplitude dieser Oszillationen, die im Bereich der Leitwertminima der Landau-Oszillationen zu erwarten sind, ist deutlich kleiner als Ke^2/h (Gl. 3.6).

Wenn eine Barriere mehr als zwei Tunnelzentren enthält und wenn diese so nahe beieinander liegen, daß die Kohärenzbedingung (3.10) auch für mehr als zwei Punktkontakte gleichzeitig erfüllt ist, werden die Möglichkeiten für AB-Oszillationen komplexer. So existieren für N Tunnelzentren $N(N-1)/2$ konkurrierende Interferenzpfade. Der jeweilige Beitrag zum Leitwert hängt von der Kopplungsstärke der beteiligten Punktkontakte ab. Die Überlagerung der Tunnelströme führt zu quasiperiodischen Oszillationen des Leitwerts für das Gesamtsystem. Die Bandbreite der Periodizität ΔB ist dabei durch die räumliche Verteilung der Tunnelzentren gegeben und durch das Kohärenzkriterium (3.10) nach oben hin beschränkt.

⁷Auf diesen Aspekt wird in Abschnitt 4.6.1 näher eingegangen.

⁸Die in [Kim03b] angeführte, aber nicht näher erläuterte Bedingung $\hbar v/b \ll k_B T$ für Inkohärenz läßt sich folgendermaßen ableiten: Mit der Geschwindigkeit v braucht ein Elektron für den Weg 1 in Abb. 3.6 die Zeit $\Delta t \simeq 2b/v$. Aufgrund der Energie-Zeit-Unschärferelation beträgt die mittlere Schwankung der Teilchenenergie $\Delta E \geq \hbar/2\Delta t$ [Mes91]. Im inkohärenten Regime wird ΔE von den thermischen Fluktuationen deutlich übertroffen. Es gilt also $\Delta E \ll k_B T$, woraus $\hbar v/4b \ll k_B T$ folgt. Während der Faktor 1/4 in [Kim03b] offenbar außer acht blieb, ist er im Übergangsbereich zwischen Kohärenz und Inkohärenz durchaus von Bedeutung, so daß er im folgenden berücksichtigt wird.

3.3 Zusammenfassung

Das magnetfeldabhängige Verhalten des Leitwerts zweier schwach gekoppelter Quanten-Hall-Systeme wird gemäß dem aktuellen Stand der Forschung mit Hilfe zweier unterschiedlicher Modellansätze erklärt. Die langperiodischen und regelmäßigen Landau-Oszillationen ergeben sich im Bild der Mischung von Landau-Zuständen unmittelbar aus der Bandstruktur: Wenn das Fermi-Niveau in eine Bandlücke eintritt, verschwinden alle Randkanäle entlang der Barriere mit Ausnahme von zweien. Die verbleibenden Teiltrajektorien fügen sich an der Probenbegrenzung zu erweiterten Randkanälen zusammen, welche die Barriere an deren Enden durchdringen und so zum Entstehen eines Leitwertmaximums beitragen. Die Einteilchen-Bandstruktur aus Kapitel 2 beinhaltet keine Coulomb-Wechselwirkung. Die Berücksichtigung derselben würde jedoch nur zu geringen Modifikationen der Dispersion führen. Denn die Resultate aus [Mit01] und [Kol02] zeigen für wechselwirkende Elektronen zwar eine etwa doppelt so große, aber im Vergleich zur Zyklotron-Energie nach wie vor sehr kleine Bandlücke.

Im Experiment übertrifft die Breite der Leitwertspitzen die Ausdehnung der theoretisch berechneten Bandlücken um ein Vielfaches. Dieses Phänomen kann letztlich nur auf das in den Proben vorherrschende Unordnungspotential zurückgeführt werden. Die durch Unordnung bedingte Verbreiterung der Landau-Bänder findet allerdings in keinem der bisherigen Modelle eine quantitative Berücksichtigung. Zum Abschluß des Teilkapitels zur Theorie der Mischung von Landau-Zuständen wird für schwach gekoppelte Elektronensysteme gezeigt, daß Landau-Bandlücken gleicher Ordnung nahezu entartet sind und zu den Bandlücken benachbarter Ordnung einen Abstand aufweisen, der nur geringfügig von der Magnetfeldstärke abhängt.

Während die Landau-Oszillationen über die gesamte verfügbare Skala des Füllfaktors auftreten und direkt aus der Bandstruktur abgeleitet werden können, benötigt man zur Erklärung von ebenso sichtbaren kurz- und quasiperiodischen Oszillationen, welche nur streckenweise den Landau-Oszillationen überlagert sind, eine alternative Betrachtungsweise. Ein entsprechendes Modell von Kim und Fradkin fußt auf der Annahme der Existenz von Tunnelzentren in der Barriere. Bereits für ein einzelnes Tunnelzentrum lassen sich die beobachteten Eigenschaften der ersten beiden Leitwertmaxima herleiten. Dabei besteht allerdings eine erhebliche Unsicherheit hinsichtlich der Position der Leitwertspitzen auf der Skala des Füllfaktors, weshalb in diesem Punkt die Verwendung der Bandstruktur aus Kapitel 2 unverzichtbar ist. Bei zwei oder mehr kohärenten Tunnelzentren wird der Aharonov-Bohm-Effekt möglich. Die entsprechenden Quanteninterferenzen bewirken das Auftreten von Signaturen im Leitwert, die bezüglich der Magnetfeldstärke periodisch sind.

Die beiden vorgestellten Modelle sind in ihrem Ansatz ziemlich gegensätzlich: Das Modell von Kim und Fradkin ignoriert die Bandstruktur, insbesondere die Bandlücken, und basiert auf der Elektron-Elektron-Wechselwirkung gegenüberliegender Randkanäle. Dieser Vielteilcheneffekt kommt im Bild der Mischung von Landau-Zuständen nur in Form von Korrekturen zum Tragen. Bei der Entwicklung beider Theorien konnte bisher, was das mathematische Gerüst anbelangt, weitgehend analytisch vorgegangen werden. Für eine Zusammenführung

der Modelle müßte das System der gekoppelten Elektronensysteme inklusive der Tunnelzentren jedoch diskretisiert werden, um dann die Schrödinger-, Poisson-, Kontinuitäts- und Diffusionsgleichungen unter Berücksichtigung der Coulomb-Wechselwirkung und der extern angelegten elektrischen und magnetischen Felder numerisch und selbstkonsistent zu lösen.

Kapitel 4

Experiment und Auswertung

In diesem Kapitel werden die bisher erarbeiteten theoretischen Grundlagen und Vorhersagen bei der Interpretation von experimentellen Ergebnissen angewandt, überprüft und auch weiterentwickelt. Den Ausgangspunkt bildet eine Probenstruktur, die mit Hilfe der Methode des Überwachsens von Spaltflächen hergestellt wurde und die eine Steuerelektrode zur Induzierung zweier schwach gekoppelter Elektronensysteme enthält. Während Interferenzeffekte an Tunnelzentren auch in modulationsdotierten Proben auftreten, ist es zur Analyse der magnetfeldabhängigen Position einer bestimmten Leitwertspitze erforderlich, daß der Parameter der Elektronendichte *in situ* variabel ist. Zu Beginn dieses Kapitels wird die Probenstruktur samt Präparationsmethode vorgestellt. Die nachfolgenden Abschnitte beschäftigen sich mit der verwendeten Meßtechnik, den wichtigsten Unterschieden zur modulationsdotierten Struktur von Kang *et al.* sowie einem Verfahren zur Bestimmung der Elektronendichte aus den Landau-Oszillationen. Ferner werden der Effekt einer internen Vorspannung, die sich aufgrund von Leckströmen aufbaut, und das Phänomen von unerwartet hohen Leitwerten für den Tunneltransport durch die gekoppelten Quanten-Hall-Systeme diskutiert.

Die beiden letzten Abschnitte widmen sich im Detail den Eigenschaften der Leitwertkurven in Abhängigkeit der magnetischen Flußdichte. Abschnitt 4.6 behandelt quasi- und kurzperiodische Oszillationen, die im Leitwert vor allem aufgrund des Aharonov-Bohm-Effekts zutage treten. Im Gegensatz zum Experiment von Kang *et al.* [Yan05] werden entsprechende Signaturen nicht nur an der Leitwertspitze mit dem niedrigsten Füllfaktor, sondern auch bei kleinen Magnetfeldern, noch vor dem Einsatz der regulären Landau-Oszillationen beobachtet. Letztere sind schließlich Gegenstand des Abschnitts 4.7. Zunächst wird die Form und Lage der Leitwertspitzen im Hinblick auf eine etwaige Spinaufspaltung der Landau-Zustände diskutiert. Darauf aufbauend erfolgt eine eingehende Analyse der magnetfeldabhängigen Maximumpositionen, die auf der Skala des Füllfaktors mit den theoretischen Positionen der Landau-Bandlücken auf der Skala der Zyklotron-Energie verglichen werden.

4.1 Probendesign und -herstellung

Seit etwa drei Jahrzehnten werden AlGaAs-Heterostrukturen mittels Molekularstrahlepitaxie (MBE) hergestellt. Die Rauigkeit der Heterogrenzflächen kann in GaAs/AlGaAs-Strukturen

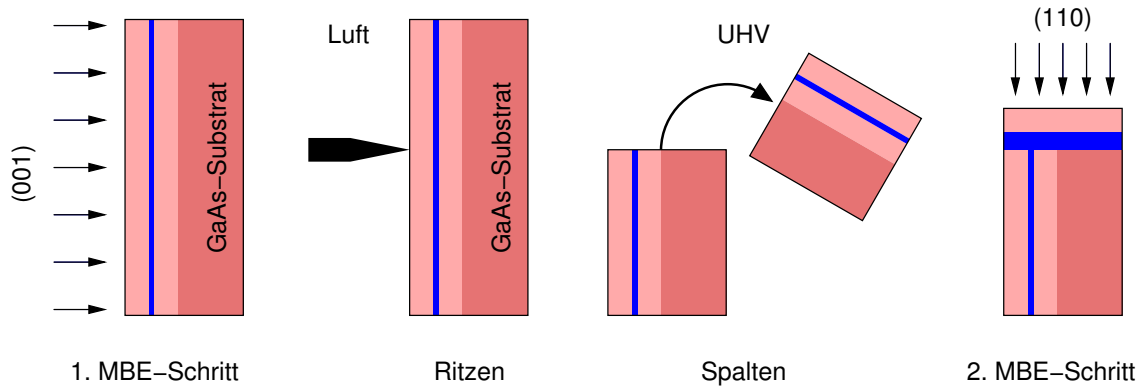


Abb. 4.1. Überwachsen einer Spaltfläche.

bis zu einer Monolage reduziert werden. Zur Realisierung von niedrigdimensionalen Quantensystemen ist häufig eine Strukturierung in mindestens einer weiteren Raumrichtung bei ähnlich guter Qualität wünschenswert (vgl. [Pfe05]). Trotz aller Fortschritte in der Photo- und Elektronenstrahlolithographie können scharf definierte Potentialmodulationen auf einer Längenskala von 5 nm nur durch epitaktisches Wachstum verwirklicht werden. Ein AlGaAs-Kristall besitzt die Eigenschaft, daß durch Spalten entlang der unpolaren $\{110\}$ -Ebenen atomar glatte Oberflächen freigelegt werden können. Dies ermöglicht die Durchführung zweier zueinander senkrechter Wachstumsschritte und damit die Methode des Überwachsens von Spaltflächen (engl. *cleaved-edge overgrowth*, CEO), die von Pfeiffer *et al.* eingeführt wurde [Pfe90]. Verschiedene Details dieser Technik, deren Prinzip in Abb. 4.1 dargestellt ist, finden sich in [Sch03], [Sch05] und [Fei06].

Den Ausgangspunkt für CEO-Proben wie aus Abb. 4.2 bilden monokristalline, ca. $400\ \mu\text{m}$ dicke GaAs-Scheiben. Um bei der späteren Kontaktierung der Steuerelektrode (engl. *gate electrode*) einen Kurzschluß mit der unteren (001)- n^+ -Schicht zu vermeiden, ist semiisolierendes Material zu bevorzugen. Das Wachstum auf der Kristallscheibe wird in der Regel mit einem Übergitter begonnen. Die alternierende Abfolge von GaAs- und AlGaAs-Schichten führt zur einer verbesserten Glättung der (001)-Wachstumsoberfläche. Um später den Meßstrom senkrecht zu den Schichten des ersten Wachstums aufprägen zu können, folgt dem Übergitter eine 500 nm dicke n^+ -Kontaktschicht (Rückkontakt) mit einer Dotierkonzentration von $2 \cdot 10^{17}\ \text{cm}^{-3}$ (Abschnitt 5.2). Die Quantenregion der Probe besteht aus einer 52 Å dicken Barrierenschicht aus $\text{Al}_{0,34}\text{Ga}_{0,66}\text{As}$ und zwei flankierenden GaAs-Schichten, die jeweils $2\ \mu\text{m}$ stark sind. Den Abschluß des ersten Wachstumsschritts bildet eine weitere n^+ -Schicht (1100 nm), die ebenfalls der Stromzuführung dient (Frontkontakt).

Beim (001)-Wachstum von GaAs entstehen sog. ovale Defekte. Die Problematik dieser makroskopischen Störungen der Epitaxieschichten wird in Abschnitt 5.1 ausführlich behandelt. Maßnahmen zur Reduzierung der Defektdichte gehen in der Regel mit einer Verringerung der Elektronenbeweglichkeit einher. Jedoch wird selbst bei einer sehr niedrigen Defektdichte von $500\ \text{cm}^{-2}$ der Wert $6 \cdot 10^6\ \text{cm}^2/\text{Vs}$ für die Beweglichkeit in der (001)-Ebene nicht unterschritten.

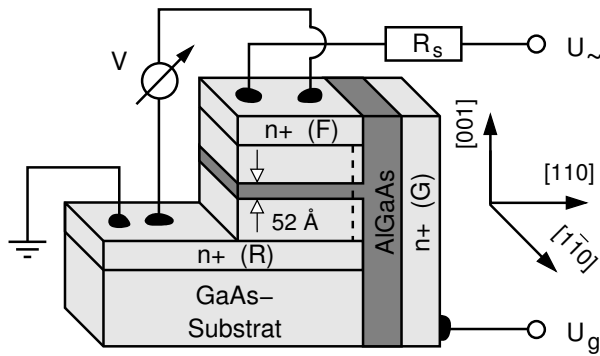


Abb. 4.2. Schemazeichnung einer fertiggestellten Probe samt elektrischer Verschaltung. Die gestrichelte Linie kennzeichnet die Lage des zweidimensionalen Elektronensystems. Bezogen auf den Rückkontakt (R) liegen zwei Spannungen an: Die Steuerspannung U_g und eine Wechselspannung U_{\sim} , mit der über einen großen Vorwiderstand R_s ein konstanter Strom eingepreßt wird.

Nach dem ersten Wachstumsschritt wird die Kristallscheibe aus der MBE-Anlage geschleust, mit einer Brom-Methanol-Lösung auf eine Dicke von 80–100 μm chemisch poliert und in $7 \times 6,5 \text{ mm}^2$ große Stücke vereinzelt. Mit Hilfe einer rechnergesteuerten Ritzmaschine wird an definierter Stelle ein Oberflächendefekt erzeugt, der später beim Spalten als Sollbruchstelle dient. Besonders vorteilhaft ist es, wenn – wie in Abschnitt 5.4 erläutert wird – beim Ritzen bereits ein initialer Spalt entsteht. Nach gründlicher Reinigung werden die präparierten Stücke senkrecht stehend auf einen speziellen Wachstumshalter montiert und wieder in die Anlage geschleust.

Der zweite Wachstumsschritt beginnt unmittelbar nach dem Spaltvorgang, durch den im Ultrahochvakuum unter Verwendung einer speziellen Vorrichtung eine (110)-Kristallfläche *in situ* freigelegt wird. Die zweite Schichtabfolge besteht aus 100 nm $\text{Al}_{0,31}\text{Ga}_{0,69}\text{As}$ und 200 nm n^+ -GaAs ($n = 2 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3}$) und wird im folgenden als Steuerelement (engl. *gate structure*) bezeichnet. Während die Qualität der Schichten des zweiten Wachstums im Auflichtmikroskop begutachtet wird, können Bereiche ohne erkennbare Riefen oder angeschnittene ovale Defekte (vgl. Abb. 5.3b und c) für die weitere Zerteilung der Probenstücke vorgemerkt werden.

Die vergrabene n^+ -Schicht muß zur Ankontaktierung freigelegt werden, was am einfachsten mit Hilfe des naßchemischen Ätzens geschieht. Bei der Herstellung der Mesa-Struktur wird diejenige Probenhälfte maskiert, die auch die überwachsene Spaltfläche beinhaltet. Da die Probe in [110]-Richtung mit ca. 3 mm sehr lang ist, bietet sich zur Maskierung besonders das manuelle Aufbringen von Klarwachs an. Anstatt Photolack aufzuschleudern und zu belichten etc., können so in einem Arbeitsgang sowohl das obere Mesa-Plateau als auch die Spaltfläche vor der Ätzlösung geschützt werden. Bei der Strukturierung stellte sich heraus, daß die Dicke der unteren Kontaktschicht im Verhältnis zu den darüberliegenden Schichten sehr dünn gewählt wurde (ca. 1:11). Um den Kontakt trotzdem treffen zu können, ist die Ätzrate präzise einzustellen und konstant zu halten. Die Ergebnisse einer entsprechenden Versuchsreihe sind in Abschnitt 5.3 zusammengefaßt.

Vor der elektrischen Kontaktierung werden die geätzten Probenstücke in Streifen gespalten, und zwar dergestalt, daß die Länge der überwachsenen Spaltfläche in $[\bar{1}0]$ -Richtung 500 μm beträgt. Auf die n^+ -Schichten werden ohmsche Kontakte aufgebracht, indem mit dem LötKolben Indiumtröpfchen auf der Kristalloberfläche abstreift und anschließend einleiert werden. Die Temperatur und Dauer des Legiervorgangs dürfen nicht zu hoch bzw. zu groß sein, damit es nicht zu einem Kurzschluß zwischen Front- und Rückkontakt kommt.

Die Methode von manuell aufgebrachtten Indiumkontakten zeichnet sich gegenüber flächigen und photolithographisch definierten Metallisierungen [Kim97] zwar nicht durch Präzision, aber durch Zuverlässigkeit, Schnelligkeit und eine hohe Flexibilität aus. Gerade auf der unteren Kante der Spaltfläche (Abb. 4.2) können leicht mehrere Kontakte hergestellt werden, was bei photolithographischen Methoden mit sehr großem Aufwand verbunden wäre, vgl. [Ler06]. Obwohl zum Anlegen des Steuerpotentials U_g ein einzelner Kontakt genügen würde, ist ein zweiter Kontakt sehr hilfreich, wenn es die Funktionsfähigkeit des ersten zu prüfen gilt. Nach dem Aufkleben des Probenstücks auf einen DIL-Sockel¹ samt aufgelöteter Platine werden die elektrischen Verbindungen mit Golddrähtchen hergestellt, wobei letztere an den Indiumlötstellen nach einer manuellen Platzierung am leichtesten mit Silberleitkleber zu befestigen sind.

4.2 Verschaltung und Meßtechnik

Abbildung 4.2 illustriert, wie eine zu vermessende Probe typischerweise an die verwendeten Spannungsquellen und Meßgeräte angeschlossen wird. Ein Ankontaktieren des Elektronensystems entlang der Spaltfläche ist nur mittelbar über die beiden n^+ -Schichten des (001)-Wachstums möglich. Trotzdem werden vier Indiumkontakte verwendet, um die Metall-Halbleiter-Übergangswiderstände in einer Vierpunktmessung auszuschließen. Potentialabgriffe erfolgen generell an den Indiumlötstellen, die der Spaltfläche am nächsten sind. Der Meßstrom wird dahingegen über die äußeren Kontakte eingeprägt, um die Quantenregion mit einer in $[1\bar{1}0]$ -Richtung möglichst homogenen Stromdichte zu versorgen. Der Rückkontakt (R) stellt den gemeinsamen Massepunkt sowohl für die Steuerspannung U_g als auch für die Sinusspannung U_{\sim} dar. Mit U_{\sim} wird über einen vorgeschalteten, hochohmigen Widerstand R_s ein konstanter Tunnelstrom I in den Frontkontakt (F) eingespeist. Eine positive Steuerspannung U_g induziert das Elektronensystem an der Spaltfläche.

Meßstrom

Das zweidimensionale Elektronensystem wird durch die im ersten Wachstumsschritt hergestellte, 268 meV hohe (Gl. 1.14) und 52 Å breite Potentialbarriere in zwei schwach gekoppelte Teilsysteme aufgeteilt (Abb. 4.3a). Die Kontaktierung der Quantenregion erfolgt über Front- bzw. Rückkontakt, welche beide die gesamte Breite der Elektronensysteme einnehmen (Abb. 4.3b). In Gegenwart eines zur Spaltfläche senkrechten Magnetfelds bilden sich Randkanäle aus [Hal82]. Da die Kanäle beider Elektronensysteme jeweils nur über einen Kontakt erschlossen sind, ist eine separate Charakterisierung der Teilsysteme nicht möglich. Trotzdem kann die Landau-Bandstruktur im Bereich der Tunnelbarriere spektroskopiert werden (Abschnitt 3.1.1), wenn der Leitwert $G = I/V$ der gekoppelten Systeme in Abhängigkeit des Magnetfelds bzw. des Fermi-Niveaus gemessen wird.

Um Quanteneffekte nicht zu zerstören, darf die frei werdende Joulesche Wärme nicht zu groß sein. In dieser Hinsicht hat sich ein Meßstrom von $I = 10$ nA bewährt: Für alle eingestell-

¹Dual in-line (DIL): Norm für die Gehäuseform von elektronischen Bauelementen. Die Anschlußstifte sind in zwei gegenüberliegenden Reihen im Rastermaß 1/10 Zoll angeordnet.

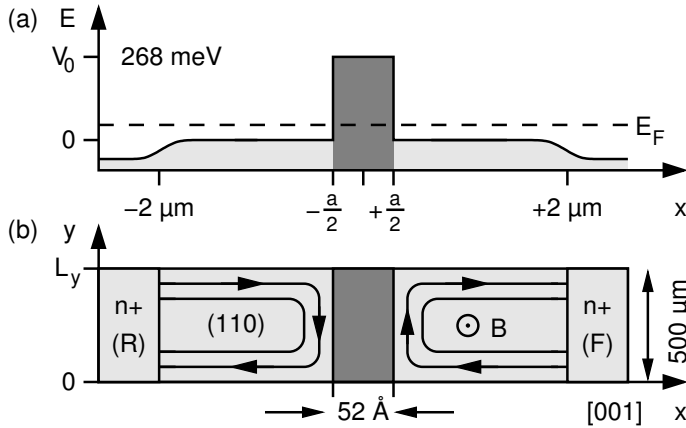


Abb. 4.3. Schnitt (nicht maßstäblich) durch die Heterostruktur aus Abb. 4.2 in der Ebene des 2DESs. (a) Verlauf der Leitungsbandkante. (b) Skizze des 2DESs, das durch eine ca. 18 Monolagen dicke $Al_{0,34}Ga_{0,66}As$ -Barriere unterbrochen ist. Die Trajektorien repräsentieren die beiden äußeren Randkanäle.

ten Werte von B und U_g befindet sich das System im Regime der linearen Antwort, während die abfallende Spannung V noch groß genug ist, um sie in Lock-In-Methode rauscharm messen zu können. Wenn für die Sinusspannung eine niedrige Frequenz wie etwa $f = 17 \text{ Hz}$ gewählt wird, hat die Messung quasistatischen Charakter² und die Phasenverschiebung zwischen I und V ist nahezu Null. Bei Verwendung des Vorwiderstands R_s ist der Tunnelstrom durch

$$I = (U_{\sim} - V)/R_s \quad (4.1)$$

gegeben. Wenn $R_s \gg R = V/I$ bzw. $U_{\sim} \gg V$ gilt, ist die Stromstärke näherungsweise konstant. Die Voraussetzung ist für einen Effektivwert von $U_{\sim} = 1 \text{ V}$ und $R_s = 100 \text{ M}\Omega$ erfüllt, wobei sich $I \simeq U_{\sim}/R_s = 10 \text{ nA}$ ergibt.

Volumenleckstrom

Die Qualität der Indiumkontakte kann anhand von paarweise aufgenommenen Gleichstromkennlinien beurteilt werden. Im Beispiel von Abb. 4.4 weisen sowohl das Lötunktddoppel auf dem Front- als auch das auf dem Rückkontakt ein perfektes ohmsches Verhalten auf. Das Verhältnis der reziproken Widerstände entspricht erwartungsgemäß in etwa dem Verhältnis der Schichtdicken beider n^+ -Lagen.

Wenn bei CEO-Proben die aktive Region entlang der Spaltfläche über n^+ -Schichten des (001)-Wachstums kontaktiert wird, tritt häufig ein sog. Volumenleckstrom auf. Im Fall der Struktur aus Abb. 4.2 ist das der Strom, der abseits der Spaltfläche durch den $4 \mu\text{m}$ starken intrinsischen Bereich samt Tunnelbarriere fließt. Da im (001)-Querschnitt durch die Heterostruktur das induzierte 2DES an der Gesamtfläche nur einen Anteil von etwa $1/100\,000$ einnimmt, muß die Tunnelbarriere einen genügend großen elektrischen Widerstand aufbieten, damit der Volumenleckstrom im Vergleich zum Transport entlang der Spaltfläche, dem das eigentliche Interesse gilt, nicht zu groß wird. Aus diesem meßtechnischen Grund können mit dem Probendesign aus Abb. 4.2 nur schwach gekoppelte Elektronensysteme realisiert werden, also solche Strukturen, die eine Barriere mit hohem Aluminiumanteil besitzen.

Die Kennlinie für den Volumenleckstrom aus Abb. 4.4 zeigt, daß die Probe ein ausreichend gutes Sperrverhalten besitzt. So ist der Volumenwiderstand für Spannungen $\leq 10 \text{ mV}$

²Dieser Punkt wird in Abschnitt 4.6.1 im Hinblick auf die Besonderheit einer dünnen Tunnelbarriere näher betrachtet.

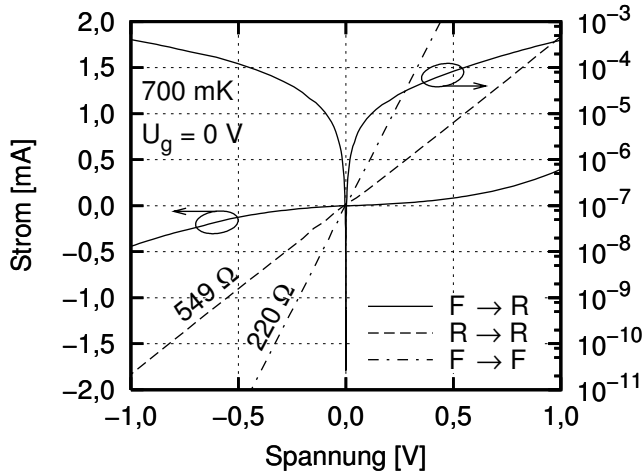


Abb. 4.4. Zweipunkt-Kennlinien für verschiedene Kombinationen der Indiumlötunkte auf dem Front- (F) und Rückkontakt (R). Der Volumenleckstrom ($F \rightarrow R$) über die beiden $2 \mu\text{m}$ dicken intrinsischen GaAs-Schichten und die Tunnelbarriere ist sowohl in linearer als auch halblogarithmischer Auftragung dargestellt.

größer als $21 \text{ k}\Omega$ und fällt bis auf $2,7 \text{ k}\Omega$ bei 1 V ab. Während einer Magnetotransport-Messung ($U_g > 0$) herrschen zwischen Front- und Rückkontakt nur so kleine Wechselfspannungen vor, daß der Sperrwiderstand im Volumen der Probe immer deutlich größer ist als der Widerstand der gekoppelten Elektronensysteme an der Spaltfläche.³ Solange keine Vorspannung angelegt wird, ist der parallel zum 2D-Transport auftretende Volumenleckstrom deshalb eine vernachlässigbare Größe.

Meßapparatur

Im Rahmen dieser Arbeit wurde ein Tieftemperatur-Meßplatz zur elektrischen Charakterisierung der Proben aufgebaut. Der Aufbau basiert auf einem $7/9 \text{ T}$ -Magnetkryostaten von CryoVac, für den ein ^3He -Einsatz mit eigener Kühlstufe zur Verflüssigung von $^3\text{Helium}$ konstruiert wurde. In Anhang C findet sich eine maßstabsgerechte Projektion des 3D-Modells mit Erläuterungen zu den einzelnen Komponenten. Die beschränkten Platzverhältnisse machten die unkonventionelle Konstruktion einer ringförmigen 1 K -Stufe erforderlich, deren ^4He -Zufluß nicht durch ein Nadelventil geregelt wird, sondern mit einer eingelöteten Strömungsimpedanz⁴ fest eingestellt ist. Das Ansaugen von flüssigem $^4\text{Helium}$ erfolgt über eine Öffnung im Boden des ^3He -Einsatzes, wobei die Zuleitung mit einer tieftemperaturfesten Indiumdichtung angeflanscht ist, die die Zerlegbarkeit des Systems für Arbeiten an der Strömungsimpedanz (Justierung, Reinigung) gewährleistet.

Obwohl der Wärmeeintrag bis zur 1 K -Stufe nur etwa 5 mW beträgt, weist die 1 K -Stufe hinsichtlich der latenten Wärme von ^4He eine Kühlleistung von 230 mW auf. Der Leistungsüberschuß wird beim Einkondensieren des ^3He -Gases benötigt, wozu allerdings, da dieses anfänglich Raumtemperatur hat, zusätzlich die Hilfe eines Austauschgases (^4He) im Isolationsvakuum notwendig ist. Der ^3He -Kryostat wird mit einer externen Gasversorgung⁵ betrieben, die im wesentlichen aus einem Tank mit $15 \text{ Litern } ^3\text{He}$ (unter Normalbedingungen), zwei Drehschieberpumpen, einer Turbomolekularpumpe, zwei Manometern (Pirani und Kapselfeder) sowie diversen Vakuumkomponenten besteht. Anstatt einer speziellen Drehschie-

³In Abb. 4.6 ist der Tunnelwiderstand im Bereich der Landau-Oszillationen durchgehend kleiner als $10 \text{ k}\Omega$.

⁴Die Impedanz [Pob96] beträgt $Z = 1,5 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ und ist als Kapillare mit eingeführtem Draht realisiert.

⁵Details zum ^3He -Pumpstand und dem übrigen Meßaufbau finden sich in [Bau06].

berpumpe mit heliumdichter Wellendurchführung wurde eine kostengünstige, magnetgekuppelte Drehschieberpumpe ($10\text{ m}^3/\text{h}$) von Pfeiffer Vacuum mit ausgebautem Hochvakuum-Sicherheitsventil und blindgeflechtem Gasballast eingebaut. Das ^3He -System erreicht in Gegenwart des konstruktionsbedingten Wärmeeintrags von $63\ \mu\text{W}$ eine Endtemperatur von 350 mK .

Die aus dem ^3He -Kryostaten geführten Meßleitungen werden innerhalb eines Schaltkastens an BNC-Buchsen verteilt, wobei konsequent das Konzept einer doppelten Schirmung verfolgt wird. Die äußere Schirmung, die mit dem Schutzleiter des Stromnetzes verbunden ist, bildet eine geschlossene Fläche, die aus dem Gehäuse, der äußeren Schirmung eines Bündels von Koaxialkabeln und der Außenhaut des Kryostaten besteht. Im Inneren des Aufbaus ist jede Signalleitung koaxial bzw. durch Verdrillung mit einem zweiten Draht geschirmt. Diese Schirmung ist in Richtung Probe einseitig offen und wird sternförmig auf den gemeinsamen Bezugspunkt der sog. Betriebsmasse zusammengeführt. In Ermangelung eines besseren Massepotentials ist auch die Betriebsmasse mit dem Schutzleiter verbunden. Die erzielte elektromagnetische Abschirmung genügt sowohl zur Messung kleiner Gleichströme ($\lesssim 1\text{ pA}$) als auch zur Detektion kleiner Spannungsschwankungen aufgrund von Quanteninterferenzen (Abschnitt 4.6).

4.3 Vergleich mit der Struktur von Kang *et al.*

Ein zweidimensionales Elektronensystem, das durch eine scharf definierte Barriere mit einer Breite in der Größenordnung der magnetischen Länge lateral unterbrochen ist, wurde erstmals von Kang *et al.* mit Hilfe der CEO-Technik realisiert [Kan00a]. Die in Abb. 4.5 dargestellte Heterostruktur unterscheidet sich vom Probedesign dieser Arbeit hauptsächlich durch das Fehlen der drei n^+ -Schichten für Steuerelektrode, Front- und Rückkontakt. Von vergleichbaren Ausmaßen ist die Tunnelbarriere: Die $88\ \text{\AA}$ dicke Schicht besteht in abwechselnder Folge aus $\text{Al}_{0,1}\text{Ga}_{0,9}\text{As}$ und AlAs (engl. *digital alloy*) und hat eine effektive Höhe⁶ von 232 meV . Die Ladungsträger des zweidimensionalen Elektronensystems an der Spaltfläche stammen aus einer Modulationsdotierung, die sich in $500\ \text{\AA}$ Entfernung in der 350 nm dicken, im zweiten Wachstumsschritt hergestellten AlGaAs -Schicht befindet. In [Kan00a] werden Meßdaten für Proben mit einer Elektronendichte von $1,1$ und $2,0 \cdot 10^{11}\text{ cm}^{-2}$ präsentiert.⁷ Den Abschluß der Schichtfolge in $[110]$ -Richtung bildet eine dünne GaAs -Schicht [Kan00b].

Bei Verwendung einer Modulationsdotierung anstelle eines Steuerelements ist es möglich, das Elektronensystem direkt über die Spaltfläche zu kontaktieren (Abb. 4.5). Zu diesem Zweck definierten Kang *et al.* auf der Spaltfläche einen Mesa, der ein $100\ \mu\text{m}$ langes Stück der Tunnelbarriere enthält [Yan04]. Die obligate Photolithographie ist auf der Stirnfläche einer CEO-Probe mit erheblichem Aufwand verbunden, vgl. [Ler06]. Damit die Kontakte im Bereich der schmalen aktiven Region überhaupt unterzubringen sind, wurden beide (001) - GaAs -Schichten auf 13 bzw. $14\ \mu\text{m}$ dimensioniert.

⁶Bei der Angabe von 370 meV in [Kan00a] handelt es sich laut Ref. 9 in [Mit01] um einen typographischen Fehler. Der mittlere Aluminiumanteil der Barriere beträgt 30% [Yan05].

⁷Es ist wahrscheinlich, daß es sich um eine einzige Probe handelt, die vor und nach Beleuchtung (Persistenter Photoeffekt) vermessen wurde.

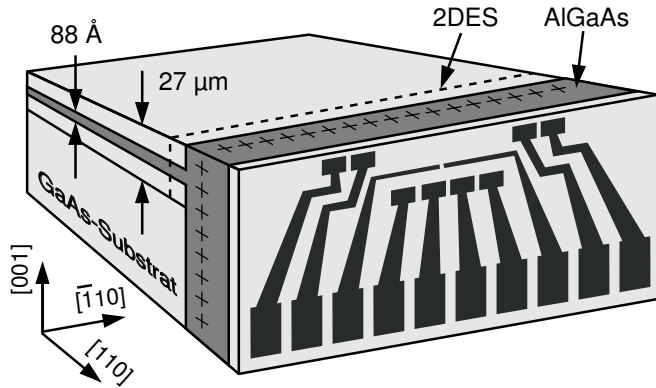


Abb. 4.5. Heterostruktur von Kang et al. Die schematische Zeichnung der Kontaktgeometrie basiert auf mikroskopischen Aufnahmen, die unter [Kan00b] verfügbar sind. Ionisierte Störstellen der Modulationsdotierung sind mit + gekennzeichnet. Die Zeichnung zeigt nur einen von mindestens zwei Mesas, die pro CEO-Probe strukturiert wurden.

Die Herstellungstechnik und Anordnung der Kontakte kann aus [Kan00b] erschlossen werden: Zur Vermeidung eines Wulstes überschüssigen Photolacks an der oberen $[\bar{1}10]$ -Kante wurde ein planer Verbund mit einem weiteren GaAs-Kristall hergestellt. Pro Mesa sind zehn Kontakte vorgesehen: je vier pro Elektronensystem und zwei für Steuerelektroden. Letztere ermöglichen durch lokale Verarmung des darunterliegenden Elektronenfilms eine separate Charakterisierung der gekoppelten Systeme. Es bereitet massive Schwierigkeiten, auf der Spaltfläche ohmsche Kontakte zum 350 nm entfernten Elektronenfilm herzustellen.⁸ In [Yan04] wird zwar eine Messung des longitudinalen Widerstands eines einzelnen Elektronensystems präsentiert, die augenscheinlich in Vierpunktmethode erfolgte, jedoch findet sich in keiner der Veröffentlichungen von Kang, Yang *et al.* eine Messung des Tunnelstroms, die ausdrücklich mit mehr als zwei Kontakten durchgeführt wurde.

Durch den Verzicht auf n^+ -Schichten als Front- und Rückkontakte werden Volumenleckströme weitgehend verhindert. Entsprechend konnten in [Kan00a, Fig. 2] verhältnismäßig hohe Vorspannungen zwischen 10 und 50 mV verwendet werden. Bei solchen Spannungswerten würde sich der Sperrwiderstand in den Proben dieser Arbeit auf bis zu 10 k Ω verringern (Abb. 4.4), was zumindest ein Herausrechnen des Volumenleckstroms erforderlich machen würde. Der wesentliche Vorteil einer direkten Kontaktierung über die Spaltfläche liegt darin, daß die Elektronendichte beider Systeme z. B. mittels einer Shubnikov-de Haas-Messung ohne Einfluß der Tunnelbarriere bestimmt werden kann.

Im Gegensatz zu modulationsdotierten Proben ermöglicht die in Abb. 4.2 eingeführte Steuerelektrode eine Veränderung des Füllfaktors unabhängig von der Amplitude des Magnetfelds. Während bei fest eingestellter Elektronendichte eine bestimmte Bandlücke nur bei genau einem Wert der magnetischen Flußdichte spektroskopiert werden kann, erlaubt die Kontrolle über das Fermi-Niveau die Verfolgung einer Bandlücke über einen großen Bereich des Magnetfelds. Anstatt Proben mit unterschiedlich dicken Tunnelbarrieren herzustellen, kann also mit dem Magnetfeld die effektive Höhe und Breite der Barriere durchgestimmt werden, während der Füllfaktor mit Hilfe der Steuerelektrode konstant gehalten wird. Verschiedene Elektronendichten mit *einer* Probe zu realisieren hat zudem den Vorteil, daß Auswirkungen von unvermeidbaren Fluktuationen zwischen aufeinanderfolgenden Wachstumsprozessen keine Rolle spielen. Dies gilt sowohl für den schwachen Effekt der magnetfeldabhängigen Position

⁸[Kan00b]: „Ohmic contacts: never ending battle.“

der Energielücken auf der Skala der Zyklotron-Energie als auch für Quanteninterferenzen, die auf Unvollkommenheiten der Kristallstruktur in der Barriere beruhen.

4.4 Elektronendichte und interne Vorspannung

Um die Position der Leitwertspitzen mit der Lage der theoretisch berechneten Energielücken vergleichen zu können (Abschnitt 4.7), ist die Kenntnis des Füllfaktors $\nu = n_{\square}h/eB$ bzw. der Elektronendichte n_{\square} erforderlich. Da eine direkte Messung der Elektronendichte à la Shubnikov-de Haas nicht möglich ist, muß der Zusammenhang mit der Steuerspannung U_g auf andere Weise bestimmt werden.

Man kann das Steuerelement in der Heterostruktur aus Abb. 4.2 näherungsweise als Plattenkondensator auffassen. Das zweidimensionale Elektronensystem und die n^+ -Schicht der Steuerelektrode bilden die Leiterplatten und die $d = 100$ nm dicke $\text{Al}_{0,31}\text{Ga}_{0,69}\text{As}$ -Schicht hat die Funktion des Dielektrikums. Die Kapazität dieses Kondensators beträgt

$$C = \frac{Q}{U_g} = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{A}{d}, \quad (4.2)$$

wobei $\epsilon_r = 11,6$ die relative Dielektrizitätskonstante von $\text{Al}_{0,31}\text{Ga}_{0,69}\text{As}$ bei 0 K [Ada94] ist und die Influenzkonstante ϵ_0 den Wert $8,85 \cdot 10^{-12}$ As/Vm hat. Die Fläche A des Kondensators fällt aus der Gleichung, wenn die Ladung Q durch Aen_{\square} ersetzt wird:

$$n_{\square}(U_g) = \frac{\epsilon_r \epsilon_0}{de} (U_g - U_0) \quad (4.3a)$$

$$\approx 6,4 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2} (U_g - U_0) / 1 \text{ V}. \quad (4.3b)$$

Bei der Größe U_0 handelt es sich um einen probenspezifischen Spannungsoffset, der nur experimentell bestimmt werden kann (Abb. 4.7). In (4.3) ist folglich zwar die Steigung von $n_{\square}(U_g)$ bekannt, zur Berechnung von n_{\square} ist jedoch zusätzlich die Kenntnis von U_0 erforderlich. Eine direkte Bestimmung von U_0 scheidet aus, weil sich ein leitender Kanal entlang der Spaltfläche erst für eine Steuerspannung ausbildet, die deutlich größer als U_0 ist. Letztlich sind also Meßwerte für die Elektronendichte unverzichtbar.

Im Probendesign aus Abb. 4.2 stehen effektiv drei Kontakte zur Verfügung. Die Elektronendichte kann entweder durch Messung der Kapazität (Rück- und Steuerkontakt) oder aus dem magnetfeldabhängigen Verhalten des Tunnelstroms (Rück- und Frontkontakt) bestimmt werden. Ein C-V-Meter mißt unmittelbar die Ladung Q , die beim Einschalten der Spannung U_g auf die Steuerelektrode und mit entgegengesetztem Vorzeichen in das induzierte Elektronensystem fließt. Hieraus läßt sich direkt die Elektronendichte $n_{\square} = Q/Ae$ berechnen. Da das Elektronensystem in der CEO-Probe eine Ausdehnung von $500 \times 5,7 \mu\text{m}^2$ hat, kann die Kapazität nach (4.2) zu $C = 2,9$ pF abgeschätzt werden. Obwohl dieser theoretische Wert durchaus im Meßbereich des eingesetzten C-V-Meters⁹ liegt, konnten keine Meßwerte mit brauchbarer Genauigkeit gewonnen werden.

⁹Keithley 595 Quasistatic C-V-Meter.

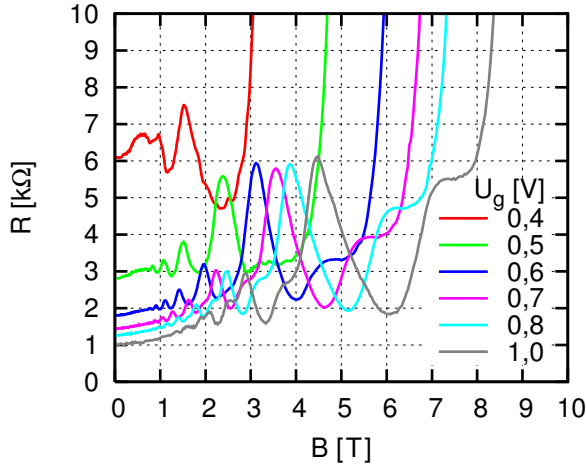


Abb. 4.6. Messung des Tunnelwiderstands $R = V/I$ in Abhängigkeit der magnetischen Flußdichte B für verschiedene Steuerspannungen U_g bei einer Temperatur von 400 mK. Mit einer Verschaltung gemäß Abb. 4.2 wurde als Vorwiderstand $R_s = 100 \text{ M}\Omega$ verwendet, um für $U_{\sim} = 1 \text{ V}$ einen konstanten Wechselstrom $I = 10 \text{ nA}$ zu erzielen.

In Abschnitt 3.1.4 wurde eine Methode entwickelt, nach der die Elektronendichte aus den Landau-Oszillationen (Abb. 4.6) bestimmt werden kann. Im Vergleich zu Shubnikov-de Haas-Messungen ist der Abstand der Widerstandsminima auf der Skala des Füllfaktors nicht exakt gleich 2 (bei Spinaufspaltung: 1). Die Abweichung ist jedoch so klein, daß sie in [Tak00] nicht erwähnt wurde und auch in [Hab06] noch unberücksichtigt blieb. Wenn ein mittleres Magnetfeld $B = 3 \text{ T}$ zugrundegelegt wird, ergibt sich nach (3.5b) für den Abstand zweier Bandlücken ein Wert von

$$\Delta\varepsilon = 1,01. \quad (4.4)$$

Erst wenn die Position der Leitwertspitzen in Abschnitt 4.7.2 im Detail analysiert wird, ist es erforderlich, die geringe Magnetfeldabhängigkeit des Abstands aufeinanderfolgender Bandlücken zu berücksichtigen. An selber Stelle wird auch die Fehlerspanne von $\Delta\varepsilon$ bestimmt.

Für spinentartete¹⁰ Systeme mit stark verbreiterten Landau-Bändern gilt für Füllfaktor und Fermi-Niveau in asymptotischer Näherung der Zusammenhang $\nu = 2\varepsilon_F + 1$ (Gl. 3.1). Die Landau-Bandlücken sind auf der Energieskala äquidistant verteilt (Abschnitt 3.1.4). Ihrem Abstand $\Delta\varepsilon$ entspricht eine Periodizität $\Delta\nu = 2\Delta\varepsilon$ auf der Skala des Füllfaktors. Die Größe $\Delta\nu$ kann nach der Definition des Füllfaktors wiederum durch die Periodizität bezüglich des reziproken Magnetfelds ausgedrückt werden (Gl. 1.35):

$$\Delta\nu = 2\Delta\varepsilon = \frac{n_{\square}\hbar}{e} \Delta(1/B). \quad (4.5)$$

Dabei ist $\Delta(1/B)$ der mittlere Abstand benachbarter Minima bzw. Maxima der Landau-Oszillationen in einer Auftragung gegen $1/B$. Aus (4.5) folgt schließlich ein Ausdruck für die Elektronendichte:

$$n_{\square} = \frac{2e\Delta\varepsilon}{\hbar \Delta(1/B)}. \quad (4.6)$$

Die Leitwertoszillationen aus Abb. 4.6 sind die Grundlage für eine Bestimmung der Elektronendichte nach dieser Formel. Bei der Auswertung fällt ins Auge, daß die Widerstandsminima mit dem kleinsten Füllfaktor eine Anomalie aufweisen. Dieses Phänomen, das für

¹⁰Daß in den Proben dieser Arbeit tatsächlich Spinentartung vorliegt, wird nachträglich im Laufe dieses Kapitels nachgewiesen.

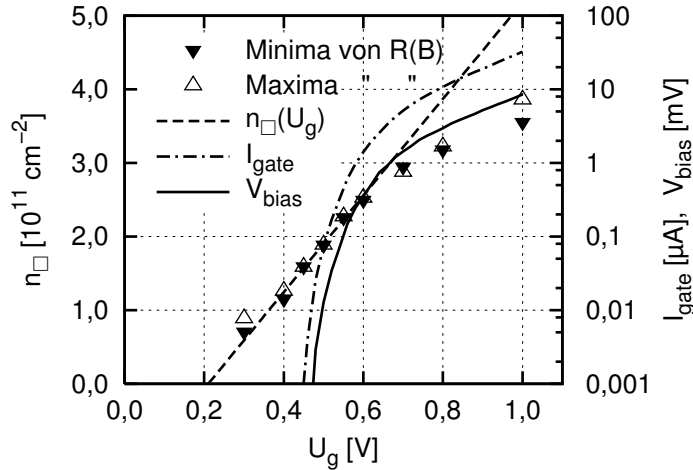


Abb. 4.7. Elektronendichte, Leckstrom I_{gate} und interne Vorspannung V_{bias} . Die n_{\square} -Werte wurden mit der gängigen Auswertemethode für Shubnikov-de Haas-Messungen unter Verwendung von (4.6) erhalten. Für Gleichung (4.3a) konnte mittels Ausgleichsrechnung im Bereich $0,4 \text{ V} \leq U_g \leq 0,6 \text{ V}$ die Formel $n_{\square}(U_g) = 6,5 \cdot 10^{11} (U_g - 0,21 \text{ V}) \text{ cm}^{-2}/\text{V}$ gefunden werden.¹¹

$U_g = 0,5 \text{ V}$ zwischen 3 und 4 T besonders stark zutage tritt, ist Gegenstand einer eingehenden Diskussion in Abschnitt 4.6.1.

Abbildung 4.7 gibt die Elektronendichten wieder, die sich aus den Minima und Maxima der Widerstandskurven aus Abb. 4.6 sowie für weitere nicht gezeigte Messungen mit Zwischenwerten der Steuerspannung ergeben. Die Dichte steigt linear mit U_g an, bis die Akkumulation der Elektronen bei $U_g = 0,7 \text{ V}$ zu sättigen beginnt. Für Steuerspannungen unterhalb dieses Wertes kann als Steigung der Datenpunkte mittels Ausgleichsrechnung der Wert $6,5 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}/\text{V}$ bei einer Unsicherheit von 5% bestimmt werden. Die sehr gute Übereinstimmung mit dem Wert aus (4.3) ist eine Bestätigung der anfänglich angenommenen Spinartung. Denn bei spinaufgelösten Landau-Zuständen würde der Faktor 2 in (4.6) wegfallen, was für die Meßwerte in Abb. 4.7 einen nur halb so steilen Anstieg zur Folge hätte. Ein weiterer Hinweis auf Spinartung besteht darin, daß die Oszillationen des Tunnelwiderstands in Abb. 4.6 keinen Übergang zwischen Bereichen mit und ohne Spinaufspaltung erkennen lassen. Die Messungen von Kang *et al.* sind dahingegen durchgehend bezüglich des Elektronenspins aufgespalten, worauf in Abschnitt 4.7.1 näher eingegangen wird.

Mit zunehmender Steuerspannung ist es unvermeidlich, daß im Steuerelement ein Leckstrom I_{gate} durch die AlGaAs-Barriere zutage tritt. Für die folgenden Experimente ist weniger die Stromstärke relevant, die in Abb. 4.7 angetragen ist, sondern vielmehr der durch den Leckstrom bedingte Aufbau einer internen Vorspannung zwischen den lateral getrennten 2DESe. Die entstehende Gleichspannung V_{bias} (Abb. 4.7) wurde mit einem Voltmeter parallel zum Lock-In-Verstärker in Abb. 4.2 abgegriffen. Im Potentialgefälle der Steuerspannung fließen die Ladungsträger aus dem Elektronenfilm in die Steuerelektrode ab. Während im unteren 2DES die Elektronen einfach aus dem Rückkontakt (Masse) nachströmen können, verarmt das obere System, weil der Elektronennachschub durch die 52 Å-Barriere eingeschränkt wird. Entsprechend baut sich die *interne* Vorspannung V_{bias} auf, die näherungsweise proportional zu I_{gate} ist und welche die Elektronensysteme energetisch gegeneinander verschiebt. Die Auswirkungen dieses Effekts sind sehr ähnlich zu denen einer *externen* Vorspannung, deren Einfluß in [Ho94] und [Kan00a] diskutiert wird. Der Zusammenhang zwischen interner Vorspannung und den Positionen der Leitwertspitzen wird in Abschnitt 4.7.2 behandelt.

¹¹Der Meßpunkt für $U_g = 0,3 \text{ V}$ in Abb. 4.7 kann aufgrund eines sehr hohen Tunnelwiderstands und schwach

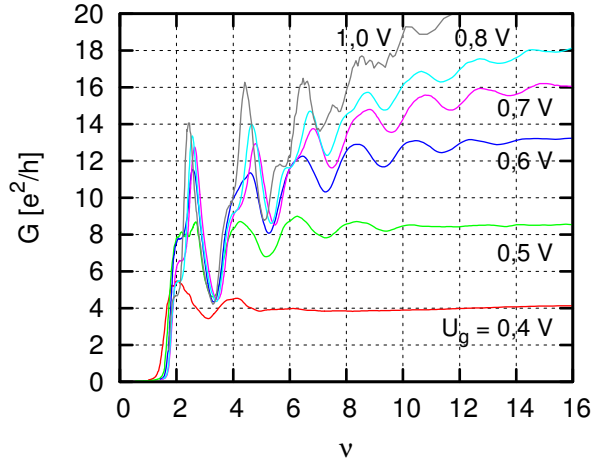


Abb. 4.8. Die Landau-Oszillationen aus Abb. 4.6 in einer Auftragung Leitwert $G = I/V$ gegen Füllfaktor $\nu = n_{\square}h/eB$. Der Darstellung liegen die Elektronendichten aus Abb. 4.7 zugrunde.

4.5 Leitwertüberhöhung

Erst wenn die Landau-Oszillationen wie in Abb. 4.8 gegen den Füllfaktor aufgetragen wird, ist ein aussagekräftiger Vergleich der Leitwertkurven für verschiedene Steuerspannungen möglich. Da der Transport der Elektronen in gekoppelten, eindimensionalen Randkanälen stattfindet, ist es ferner von Vorteil, auf der Ordinatenachse anstelle des Tunnelwiderstands R den Leitwert $G = 1/R$ in Einheiten des Leitwertquantums $G_0 = e^2/h$ (Abschnitt 3.1.1) aufzutragen. Ohne auf die Einzelheiten der Kurven aus Abb. 4.8 einzugehen, behandelt dieser Abschnitt schwerpunktmäßig nur die Amplitude der Leitwertoszillationen.

Die Quantenregion der Probe aus Abb. 4.2 ist nur über zwei Kontakte erschlossen, und zwar mittels der zwei n^+ -Schichten des ersten Wachstums (Abb. 4.3b). Folglich ist im Quanten-Hall-Regime bei Spinentartung zu erwarten, daß der Leitwert des Systems um höchstens zwei Leitwertquanten ansteigt, wenn das Tunneln eines Randkanals durch die Barriere einsetzt (Abschnitt 3.1.1). Dieses Limit kann nur bei höheren Füllfaktoren, wenn mehrere Randkanäle am Tunnelprozeß beteiligt sind, überschritten werden (Abschnitt 3.1.1). Aus Abb. 4.8 geht jedoch hervor, daß die Leitwertspitzen bereits für einen einzigen spinentarteten Randkanal ($\nu \approx 2$) eine Amplitude von $10 e^2/h$ erreichen.

Im Gegensatz zum experimentellen Ergebnis dieser Arbeit berichten Kang, Yang *et al.* von Leitwertoszillationen in einer Größenordnung von $0,1 e^2/h$ [Kan00a, Yan04, Yan05]. Wenngleich die Autoren keine Gründe für den zu geringen Tunnelstrom angeben, ist es doch prinzipiell leichter, ein Unterschreiten des prognostizierten Leitwertanstiegs von $2 e^2/h$ nachzuvollziehen, als das für ein Überschreiten der Fall ist. Zum Beispiel ergibt die Tight-Binding-Methode (Abschnitt 2.6) aus [Tak00], daß das zweifache Leitwertquantum nicht erreicht wird, wenn die relative Sprungamplitude t_b/t kleiner oder ungefähr gleich 0,2 ist. Das Ergebnis $G > 2G_0$ widerspricht auch dem Resultat von Kim und Fradkin (Abschnitt 3.2.1), die $G_t = K e^2/h$ mit $K < 1$ als maximalen Strom durch ein oder mehr Tunnelzentren erhalten. Generell gilt also, daß die hohen Leitwerte aus Abb. 4.8 nicht im Rahmen der bis dato entwickelten Modelle verstanden werden können. Deshalb bleibt zu untersuchen, ob

ausgeprägter Oszillationen nur ungenau bestimmt werden. Er wird deshalb nur der Vollständigkeit halber aufgeführt, ohne im weiteren Verlauf berücksichtigt zu werden.

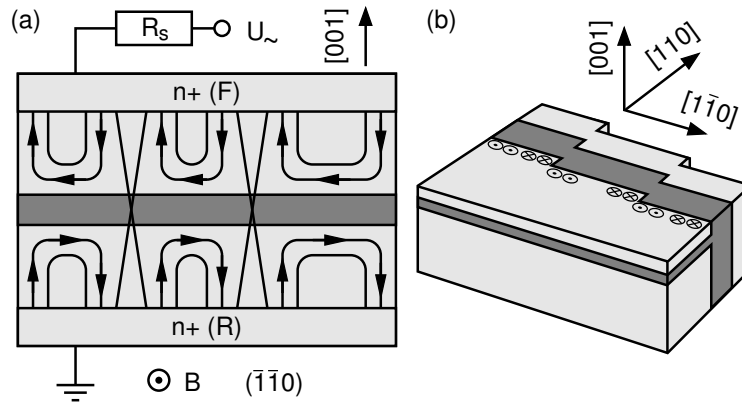


Abb. 4.9. Schemazeichnung einer Quantenregion, die durch makroskopische Defekte in unabhängige Sektionen unterteilt ist. (a) Schnitt durch das 2DES. (b) CEO-Probe mit gestufter Spaltfläche. Die Aus- und Eintrittspunkte der Randkanäle sind mit \odot bzw. \otimes gekennzeichnet.

die CEO-Probe aus Abb. 4.2 möglicherweise Eigenschaften besitzen kann, die in keinem der idealisierenden Modelle bisher berücksichtigt werden.

Der Tunnelbarriere stehen zu beiden Seiten hochdotierte Kontaktschichten in einem Abstand von $2\ \mu\text{m}$ gegenüber (Abb. 4.3b). Im Magnetfeld kann das Leitwertquantum prinzipiell nur dann übertroffen werden, wenn zwischen den ausgedehnten Kontakten und den Randkanälen entlang der Barriere ein Strom fließt, der zusätzlich zu demjenigen auftritt, der von den Randkanälen an den physischen Begrenzungen der Probe getragen wird. Die Randkanäle nehmen senkrecht zur Potentialstufe der Barriere einen Bereich ein, der eine Ausdehnung von einigen magnetischen Längen (Abb. 2.6a) bzw. eine Breite der Größenordnung $0,1\ \mu\text{m}$ hat. Der Abstand zwischen den Randkanälen an der Barriere und dem Front- bzw. Rückkontakt beträgt daher ca. $1,9\ \mu\text{m}$ und ist im Vergleich zur magnetischen Länge so groß, daß eine Wechselwirkung zwischen Randkanälen und n^+ -Kontakten auszuschließen ist. Daran ändern auch mikroskopische Störpotentiale nichts, da im senkrechten Magnetfeld die mittleren Aufenthaltsorte (Orbitzentren) der Elektronen den Äquipotentiallinien des Unordnungspotentials folgen [Yos02]. Zusammenfassend kann also festgestellt werden, daß eine Rückstreuung der Elektronen in die Kontakte als Ursache für eine Leitwertüberhöhung nicht in Frage kommt.

Abbildung 4.9a veranschaulicht, wie die $2e^2/h$ -Grenze trotzdem durch Ausbildung von parallelgeschalteten Randkanälen überwunden werden kann. Makroskopische Defekte unterteilen die Quantenregion in einzelne Bereiche, die mit dem Front- und Rückkontakt gemeinsame Stromanschlüsse besitzen. Als Ursache für Unterbrechungen der in $[1\bar{1}0]$ -Richtung $0,5\ \text{mm}$ langen Quantenregion kommen verschiedene Unregelmäßigkeiten der Probe in Frage. Das sind zunächst kleine ovale Defekte (Abschnitt 5.1), die zwar beispielsweise den lateralen Transport in einem (001)-2DES nur geringfügig beeinträchtigen. Es ist aber zu erwarten, daß sie zu einer erheblichen Störung der Quantenregion einer CEO-Probe führen, wenn sie beim Spalten angeschnitten werden. Eine andere Quelle für lokale Beschädigungen der oberen $[1\bar{1}0]$ -Kante besteht in der Manipulation der Kristallstücke während der Probenpräparation. Bei der Reinigung der Probenrückseite von Gallium kann zum Beispiel eine Läsion der Kante durch Unebenheiten des verwendeten Objektträgers nicht ausgeschlossen werden.

Zu den wahrscheinlichsten Ursachen für die Separierung der Elektronensysteme zählen Riefen und Stufen auf der Spaltfläche. Derartige Defekte entstehen bei jedem nicht perfekt verlaufenden Spaltvorgang. Da das Elektronensystem in $[110]$ eine Ausdehnung von ca. $15\ \text{nm}$ hat [Deu01], wird aus Abb. 4.9b deutlich, daß der Elektronenfilm bereits durch eine Stufe

der Höhe 15 nm durchtrennt werden kann. Prinzipiell liegen Erhebungen diesen Ausmaßes noch im vertikalen Auflösungsvermögen der Nomarski-Mikroskopie [Abl04]. Es wurden auch keine Proben präpariert, die bei der optischen Kontrolle nach dem zweiten Wachstumsschritt im Bereich der Quantenregion Stufen aufwiesen. Allerdings ist das tatsächliche Auflösungsvermögen des verwendeten Auflichtmikroskops im Nomarski-Modus unbekannt. Es könnte zum Beispiel durch den Vergleich mit AFM-Aufnahmen¹² abgeschätzt werden, indem etwa der Übergang zwischen sichtbaren Riefen und offenbar atomar glatten Bereichen der Spaltfläche mit beiden Methoden untersucht wird.

Als Folge der zufällig verteilten makroskopischen Defekte variiert der Leitwert von Probe zu Probe und verhält sich im wesentlichen indirekt proportional zur Länge L_y der Barriere. Ein quantitativer Vergleich der Leitwertamplitude mit den Werten von Kang *et al.* ist nicht zweckdienlich. Es müßten hierfür nicht nur die Anzahl der Sektionen, in die die Quantenregion unterteilt ist, sondern auch die Kontaktwiderstände und die Tunneleigenschaften der Barriere bekannt sein. Die in [Kan00a] beschriebene Barriere ist mit $a = 88 \text{ \AA}$ nicht nur 69 % dicker, sondern unterscheidet sich als *digital alloy* (Abschnitt 4.3) auch in ihren strukturellen Eigenschaften von den Proben dieser Arbeit. Bei der in Abb. 4.5 skizzierten Kontaktgeometrie ist zudem eine Leitwertüberhöhung *à la* Abb. 4.9a prinzipiell ausgeschlossen. Die im photolithographisch definierten Mesa enthaltene Quantenregion hat anstatt $500 \mu\text{m}$ nur eine Länge von $100 \mu\text{m}$. Vor allem erstreckt sich jedoch die Stromzuführung nicht über die gesamte Quantenregion, sondern die Ausdehnung der Kontakte beschränkt sich auf eine Länge von ca. $15 \mu\text{m}$ [Kan00b]. Selbst wenn die Quantenregion aufgrund makroskopischer Defekte in mehrere Sektionen unterteilt ist, werden mit dieser kleinen Kontaktfläche höchstens zwei davon getroffen.¹³

4.6 Interferenzeffekte

Trotz der strukturellen und experimentellen Unterschiede zu den Ergebnissen von Kang *et al.* zeigen die Proben dieser Arbeit in bezug auf den Aharonov-Bohm-Effekt an Tunnelzentren ein sehr ähnliches Verhalten, was eine Konsequenz des identischen Grundprinzips beider Experimente ist: Entgegengesetzt propagierende Randkanäle, die durch eine dünne Barriere getrennt sind, koppeln aneinander, und zwar einerseits aufgrund der endlichen Höhe und Breite der Potentialerhebung (Mischung von Landau-Zuständen, Abschnitt 3.1) sowie andererseits aufgrund der erhöhten Tunnelwahrscheinlichkeit an lokalen Deformationen der Barriere (Tunnelzentren, Abschnitt 3.2).

Abschnitt 4.6.1 beschäftigt sich im Detail mit dem AB-Effekt, dessen Signaturen an der Leitwertspitze mit dem kleinsten Füllfaktor auftreten. Während von entsprechenden quasi-periodischen Oszillationen schon in [Yan05] berichtet wurde, liegt hier das Hauptgewicht auf Betrachtungen zur Phasenkohärenz, der Erklärung von langperiodischen, irregulären Anteilen in den AB-Oszillationen sowie auf der Berücksichtigung der Landau-Bandstruktur bei

¹²Rasterkraftmikroskop, engl. *atomic force microscope*.

¹³Für die Proben dieser Arbeit wird die Mindestlänge der Sektionen in Abschnitt 4.6.1 bei der Betrachtung von kurzperiodischen Oszillationen des Tunnelstroms bei $\nu \approx 2$ grob abgeschätzt.

der Bestimmung des Abstands von Tunnelzentren. In Abschnitt 4.6.2 werden quasiperiodische Leitwertfluktuationen eingehend diskutiert, die bei den Proben dieser Arbeit im Bereich kleiner Magnetfelder, noch vor dem Einsatz der regulären Landau-Oszillationen, zutage treten.

4.6.1 AB-Effekt am Leitwertmaximum

In Abb. 4.6 weist das rechte Widerstandsminimum der Kurve für $U_g = 0,5\text{ V}$ starke Unregelmäßigkeiten auf, die mit steigender Steuerspannung verschwinden. Der Effekt ist in vergrößerter Darstellung auch in Abb. 4.10a für einen kleineren Bereich der Steuerspannung zu sehen. Die linke Leitwertspitze ist erheblich gestaucht und das Maximum bei $\nu = 4,5$ weist ebenfalls leichte Unregelmäßigkeiten auf. Mit steigender Steuerspannung tritt aus dem ersten Maximum eine glatte Spitze hervor und die oszillatorische Struktur des rechten Maximums wird ebenfalls etwas schwächer.

4.6.1(a) Kurz- und langperiodische Strukturen

Die Autoren von [Yan05] unterscheiden zwischen zwei Arten von Oszillationen, die gleichzeitig und ausschließlich an dem Leitwertmaximum auftreten, das den kleinsten Füllfaktor hat. Es handelt sich dabei um die in Abschnitt 3.2.2 besprochenen, kurz- und quasiperiodischen AB-Oszillationen sowie um langperiodische, irreguläre Leitwertfluktuationen. Die Signaturen beider Oszillationsarten überlagern sich gegenseitig, können aber im Frequenzspektrum eindeutig auseinandergelassen werden. Ein weiteres Unterscheidungskriterium besteht im Temperaturverhalten. Während die kurzperiodischen AB-Oszillationen in Übereinstimmung zur Kohärenzbedingung (3.10) mit steigender Temperatur verschwinden [Yan05, Fig. 2], werden die langperiodischen Fluktuationen weit weniger stark gedämpft.

Das Vorhandensein zweier unterschiedlicher Arten von Leitwertoszillationen bestätigt sich mit den Proben dieser Arbeit. Eine Unterscheidung ist durch den Vergleich der jeweils in schwarzer Farbe gezeichneten Kurven aus Abb. 4.10a und b möglich. Diese beiden Messungen differieren nur in der Geschwindigkeit, mit der das Magnetfeld bei gleichbleibender Integrationszeit des Lock-In-Verstärkers durchgeföhren wurde. Bei Abb. 4.10b war dB/dt so groß, daß die AB-Oszillationen durch Mittelung geglättet sind und nur die langperiodischen Leitwertfluktuationen zutage treten. Dahingegen erscheinen in Abb. 4.10a beide Oszillationstypen zugleich, wobei die kurzperiodischen AB-Oszillationen eine so niedrige Amplitude aufweisen, daß sie detailliert erst in einer Auftragung wie in Abb. 4.11 zu erkennen sind.

Die kurz- und langperiodischen Leitwertoszillationen sind nicht einfach den Landau-Oszillationen in einem bestimmten Magnetfeldbereich überlagert, sondern sie gehen mit einer Stauchung und Abflachung des Leitwertmaximums einher. Während diese Stauchung in Abb. 4.10 schon bei 400 mK sehr deutlich zutage tritt, ist dasselbe Maximum in [Yan04, Fig. 1(a)] selbst für 300 mK vollkommen glatt. Erst in [Yan05] zeigt – bei einer leicht niedrigeren Temperatur von 220 mK – auch eine Probe von Kang *et al.* das Phänomen einer starken Stauchung der zur untersten Landau-Bandlücke korrespondierenden Leitwertspitze.

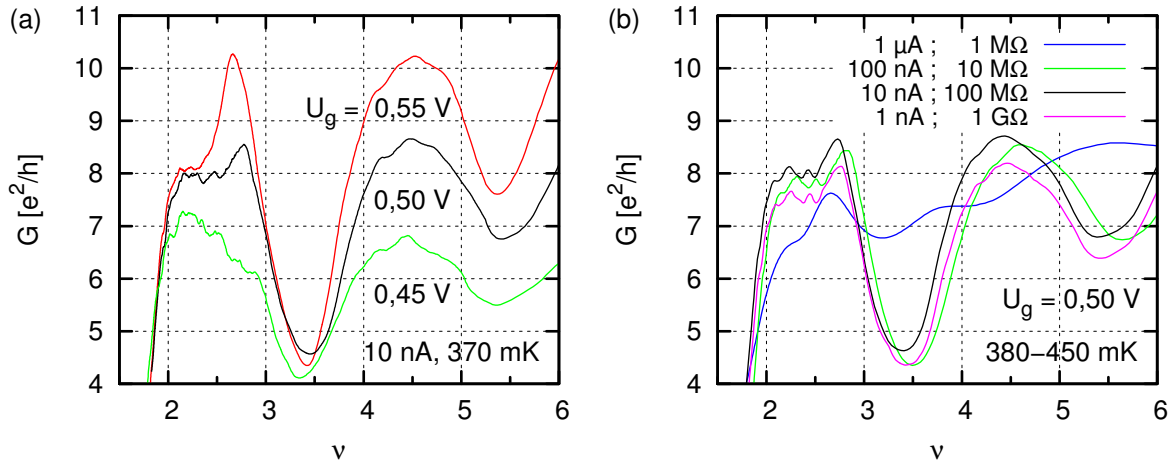


Abb. 4.10. Die ersten beiden Leitwertspitzen auf der Skala des Füllfaktors. **(a)** Landau-Oszillationen für verschiedene Steuerspannungen. Es handelt sich um eine Wiederholung der Messungen aus Abb. 4.8. **(b)** Leitwertkurven für verschiedene Tunnelströme I (Gl. 4.1) bei konstantem $U_g = 0,5$ V und $U_{\perp} = 1$ V. Im Vergleich zu (a) war bei der Messung die Magnetfeldgeschwindigkeit höher (stärkere Glättung). Die Leitwertkurve für $I = 100$ nA wurde mit abwärts laufendem Magnetfeld aufgenommen, weshalb sie gegenüber den anderen horizontal leicht verschoben ist.

4.6.1(b) Phasen(in)kohärenz

Kang *et al.* stellen in [Yan05] fest, daß die Stauchung des Leitwertmaximums beim Anlegen einer Vorspannung verschwindet. Dieses Phänomen wird mit dem Aufheizen der Elektronen in Gegenwart der endlichen Potentialdifferenz begründet. Eine analoge Situation liegt in den Proben dieser Arbeit vor, da sich mit zunehmender Steuerspannung die interne Vorspannung V_{bias} aufbaut (Abschnitt 4.4). Für die Graphen in Abb. 4.10a steigt die Vorspannung von $V_{\text{bias}} \ll 1 \mu\text{V}$ bis auf $0,1$ mV ($U_g = 0,55$ V) an. Wenn die Auswirkung einer Vorspannung auf das Bestehen von Phasenkohärenz untersucht wird, ist es erforderlich, auch den Einfluß der thermischen Unordnung in die Betrachtungen miteinzubeziehen.

Die kurz- und quasiperiodischen Oszillationen am Leitwertmaximum bei $\nu = 2,5$ sind, wie weiter unten näher erläutert wird, eine Folge des AB-Effekts an benachbarten Tunnelzentren (Abschnitt 3.2.2). In Gegenwart mehrerer Tunnelzentren existiert eine Vielzahl möglicher Tunnelpfade. Für meßbare AB-Signaturen sind all jene Pfade verantwortlich, die dem kohärenten Regime angehören, also die Bedingung $\hbar v/4b \gg k_B T$ (Gl. 3.10) für den Abstand b der beteiligten Tunnelzentren erfüllen. Die Bedingung für Inkohärenz lautet umgekehrt $\hbar v/4b \ll k_B T$. Der Übergangsbereich zwischen beiden Regimen kann demnach durch die Temperatur $T_{\text{AB}} = \hbar v/4bk_B$ charakterisiert werden. Mit dieser Definition wird (3.10) zu

$$T \ll T_{\text{AB}}. \quad (4.7)$$

Die Gruppengeschwindigkeit senkrecht zum Gradienten des unidirektionalen Potentials lautet $v = \frac{1}{m^*} \frac{\hbar}{\ell} (\langle x \rangle - X)/\ell$ (Gln. 1.28 und B.8b). Der Aufenthaltsschwerpunkt eines Randzustands im Bereich der ersten Bandlücke liegt für $X = 0,1 \ell$ bei $\langle x \rangle = 1,2 \ell$, wie weiter unten aus Abb. 4.12b abgelesen werden kann. Zusammen mit den Vorgriff auf den mittleren Abstand $b = 2 \mu\text{m}$

(Gl. 4.12) der Tunnelzentren ergibt sich für die AB-Oszillationen am ersten Leitwertmaximum ($B = 3,5 \text{ T}$) aus Abb. 4.10a eine kritische Temperatur von

$$T_{\text{AB}} = \frac{\hbar v}{4bk_B} = \frac{\hbar^2(\langle x \rangle - X)}{4bk_B m^* \ell^2} \approx 130 \text{ mK}. \quad (4.8)$$

Dieser Wert ist insofern plausibel, als die AB-Oszillationen bei 400 mK in Abb. 4.11 schon stark gedämpft sind ($\Delta G/G \approx 0,2\%$), während sie in [Yan05, Fig. 1] bei 25 mK eine im Verhältnis deutlich größere Amplitude aufweisen ($\Delta G/G = 2\%$). Die aus der Energie-Zeit-Unschärferelation abgeleitete¹⁴ Temperatur T_{AB} kennzeichnet also wie erwartet den Übergangsbereich zwischen Kohärenz ($T \ll T_{\text{AB}}$) und Inkohärenz ($T \gg T_{\text{AB}}$). Der Herleitung von (4.7) liegt prinzipiell die Temperatur T der Elektronen und nicht die Gittertemperatur zugrunde. Während letztere mit der Temperatur des ³Helium-Bads übereinstimmt und damit meßtechnisch unmittelbar zugänglich ist, kann die Elektronentemperatur aufgrund extern angelegter Spannungen und einer nicht erfolgten Equilibrierung von diesem Meßwert abweichen. Da der Wert für T_{AB} jedoch gut mit der experimentellen Realität übereinstimmt, ist davon auszugehen, daß beide Temperaturen für kleine interne Vorspannungen ($U_g \leq 0,5 \text{ V}$) von derselben Größenordnung sind.

Nicht nur die geringe Amplitude der AB-Oszillationen, sondern auch der Wert $T_{\text{AB}} = 130 \text{ mK}$ zeigt, daß die im Experiment eingesetzten ³Helium-Temperaturen das System bereits in den Anfangsbereich des inkohärenten Regimes versetzen. Ein jeder weiterer phasenzerstörender Einfluß auf die Elektronen der Randkanäle hat zur Folge, daß bei einem Teil der Tunnelpfade, und zwar zuerst bei solchen mit großen Werten für b , die Kohärenz verloren geht. Dadurch ändert sich die Form der quasiperiodischen Leitwertoszillationen, die sich aus allen kohärenten AB-Interferenzen zusammensetzen. Wenn die Elektronentemperatur um einen Betrag erhöht wird, der T_{AB} deutlich übersteigt, ist deshalb zu erwarten, daß der AB-Effekt am Leitwertmaximum gänzlich zum Erliegen kommt und zugleich die Stauchung der Leitwertspitze verschwindet.

Das erste Leitwertmaximum aus Abb. 4.10a zeigt das eben beschriebene Verhalten, wenn die Steuerspannung bzw. die interne Vorspannung (Abschnitt 4.4) erhöht wird. Ein tunnelndes Elektron besitzt aufgrund der internen Vorspannung, die an der Barriere abfällt, gegenüber dem Fermi-Niveau des Zielsystems einen Energieüberschuß. Je größer diese Differenz ist, desto mehr freie Zustände stehen in der Umgebung der Kreiswellenzahl k des Elektrons zur Verfügung und desto häufiger können phasenrelaxierende Elektron-Elektron-Streuprozesse auftreten [Dat97]. Dieser Effekt ist in Entsprechung zur thermischen Unordnung (Gl. 4.7) solange nicht kohärenzgefährdend wie

$$eV_{\text{bias}} \ll k_B T_{\text{AB}} \quad (4.9)$$

gilt. Das Energieäquivalent zur kritischen Temperatur (4.8) lautet $k_B T_{\text{AB}} = 11 \mu\text{eV}$. Nach obiger Ungleichung ist zu erwarten, daß der AB-Effekt für Vorspannungen bis etwa $V_{\text{bias}} = 11 \mu\text{V}$ zu beobachten ist. Dieser Spannungswert liegt nach Abb. 4.7 bei einer Steuerspannung

¹⁴Siehe Fußnote 8 auf Seite 82.

der Höhe $U_g = 0,498 \text{ V}$ an. Tatsächlich zeigt in Abb. 4.10a die Leitwertkurve für $U_g = 0,50 \text{ V}$ bereits ein deutliches Merkmal erhöhter Inkohärenz: Im Vergleich zur Kurve mit $U_g = 0,45 \text{ V}$ ist der rechte Teil der Leitwertspitze für $\nu \geq 2,6$ teilweise geglättet. Bei $U_g = 0,55 \text{ V}$ verstärkt sich dieser Effekt soweit, daß die Stauchung der Leitwertspitze fast ganz verschwindet und AB-Signaturen nur noch an der Kurvenschulter in der Umgebung von $\nu = 2,25$ auftreten. Zusammenfassend gilt also, daß die Kohärenzbedingungen bezüglich der Temperatur (Gl. 4.7) und der internen Vorspannung (Gl. 4.9) in gleicher Weise mit den experimentellen Ergebnissen konsistent sind.

4.6.1(c) Vorspannung vs. Wechselspannung

Da die Wirkung einer Vorspannung auf die Leitwertoszillationen des AB-Effekts semiquantitativ nachvollzogen werden kann, stellt sich die Frage, inwieweit auch eine niederfrequente Wechselspannung, wie sie bei der Lock-In-Technik zum Einsatz kommt, die Kohärenzbedingung (4.9) erfüllt. Grundsätzlich ist zu erwarten, daß eine Sinusspannung, die an der Barriere aufgrund des eingepprägten Meßstroms abfällt, in gleicher Weise die Phasenkohärenz der interferierenden Randkanäle beeinflusst wie das für die Gleichspannung V_{bias} in Abb. 4.10a der Fall ist. Zur Klärung dieser Fragestellung wurde in Abb. 4.10b anstelle der Steuerspannung die Stärke des Tunnelstroms variiert. Dabei ist zu beobachten, daß die Kurvenform bis zu einer Stromstärke von 100 nA erhalten bleibt, wobei die abfallende Wechselspannung am Leitwertmaximum Werte von bis zu $V = 330 \mu\text{V}$ annimmt. Im Vergleich zur Wirkung der internen Vorspannung kann also mindestens eine um den Faktor 30 höhere Effektivspannung angelegt werden, ohne daß der AB-Effekt eine wesentliche Störung erfährt.

Erst wenn der Meßstrom den Wert $I = 1 \mu\text{A}$ bei einer Spannung von $V = 3,7 \text{ mV}$ erreicht,¹⁵ verschwinden am linken Leitwertmaximum in Abb. 4.10b alle Oszillationen. Die Kurvenform gleicht dabei sehr stark derjenigen für $U_g = 0,55 \text{ V}$ bzw. $V_{\text{bias}} = 104 \mu\text{V}$ in Abb. 4.10a. Auch bei hohen Meßströmen wird also ein ähnlicher Effekt wie aufgrund der internen Vorspannung erst dann erzielt, wenn der Effektivwert der Wechselspannung etwa das 30-fache von V_{bias} beträgt. Zur Klärung dieser Diskrepanz muß geprüft werden, ob die durchgeführte Wechselstrommessung tatsächlich quasistatisch ist.

In Analogie zu dem Steuerelement, mit dem das modulierte Elektronensystem an der Spaltfläche induziert wird (Abschnitt 4.4), bilden die 52 \AA -Barriere und die flankierenden Randzustände ebenfalls eine Kondensatoranordnung. Nur wenn deren Kapazität gering genug ist, kann die an der Barriere abfallende Spannung zu jedem Zeitpunkt proportional zum oszillierenden Meßstrom sein (ohmsches Verhalten). Unter der Annahme, daß die Randzustände in x - und z -Richtung in etwa dieselbe Ausdehnung besitzen, läßt sich die Anordnung ersatzweise durch zwei parallele, zylindrische Drähte (Radius r , Länge L_y) im Abstand a' be-

¹⁵In Abb. 4.10b sind die Extrema der Leitwertkurve für $I = 1 \mu\text{A}$ für Füllfaktoren mit $\nu \gtrsim 3$ stark verschoben. Die Ursache dieses Effekts wurde nicht systematisch untersucht und bleibt daher ungeklärt. Der Zweck der Messungen aus Abb. 4.10b bestand primär in der Bestimmung des Bereichs der linearen Antwort.

schreiben.¹⁶ Für die Kapazität¹⁷ der entgegengesetzt geladenen Leiter gilt dann [Lan74b, §3, Aufg. 7]

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon_r L_y}{2 \operatorname{arcosh}\left(\frac{a'^2}{2r^2} - 1\right)} \approx 0,17 \text{ pF}. \quad (4.10)$$

Dabei wurde $\epsilon_r = 11,6$ (Seite 93) und $L_y = 500 \mu\text{m}$ (Abb. 4.3) verwendet. Für den Abstand der gegenüberliegenden Randzustände kann aus Abb. 4.12b der Wert $a' = 2,4\ell$ und als Halbwertsbreite ihres Wellenberges $2r = 1,6\ell$ abgelesen werden.

Für eine grobe Abschätzung der Zeit Δt , die zum Laden des Kondensators mittels des Meßstroms I benötigt wird, kann die Beziehung $Q = C \cdot V = I \cdot \Delta t$ angesetzt werden. Mit dem Leitwert $G = I/V \approx 8e^2/h$, der in Abb. 4.10 im Bereich des ersten Leitwertmaximums vorliegt, erhält man $\Delta t = C/G \approx 0,5 \text{ ns}$. Diese Zeitspanne ist bedeutend kleiner als die Periode $f^{-1} = 59 \text{ ms}$ des aufgeprägten Meßstroms. Die Kapazität ist also so klein, daß bei niedriger Frequenz f und gleicher effektiver Stromstärke im DC- und AC-Fall dieselbe effektive Spannung ohne Phasenverschiebung an der Barriere abfällt. Es kann also zumindest festgehalten werden, daß eine nicht-quasistatische Messung als mögliche Ursache für die unterschiedliche Auswirkung von Gleich- und Wechselspannung bezüglich der AB-Oszillationen sicher ausscheidet.

4.6.1(d) Langperiodische Leitwertfluktuationen

Die Schwingungslänge der langsam variierenden Oszillationen am linken Leitwertmaximum in Abb. 4.10b beträgt etwa $0,23 T$. In [Yan05] wird hierfür mit $\sim 0,2 T$ ein vergleichbarer Wert angegeben. Die irregulären Strukturen lassen sich bei $^3\text{Helium}$ -Temperaturen leicht beobachten und verschwinden bis etwa $1,6 \text{ K}$. Da sie gemeinsam mit den kurzperiodischen AB-Oszillationen auftreten und bei steigender interner Vorspannung auch gleichzeitig mit diesen verschwinden (Abb. 4.10a), liegt auch hier ein Zusammenhang mit den Tunnelzentren der Barriere nahe. Allerdings findet sich in den entsprechenden theoretischen Arbeiten [Kim03a, Kim03b] kein Hinweis auf ein mögliches Entstehen dieser Oszillationen. Auch in [Yan05] bleiben die langperiodischen und irregulären Leitwertfluktuationen ohne Erklärung.

Von mikrostrukturierten AB-Ringen ist bekannt [Umb84, Web85], daß die Leitwertoszillationen, die bezüglich Φ_0 periodisch sind, von aperiodischen Fluktuationen überlagert sein können, die eine höhere Amplitude und eine wesentlich größere Periodenlänge aufweisen. Stone führt diesen Effekt mit Hilfe eines Tight-Binding-Modells [Sto85] auf die endliche Breite des betreffenden AB-Rings zurück. Wenn die Elektronen durch das mesoskopische System diffundieren, liegen ihre Trajektorien mal näher am inneren oder äußeren Radius der ringförmigen Leiterbahn. Die einhergehende Variation des eingeschlossenen magnetischen Flusses tritt zusätzlich zu derjenigen aufgrund eines steigenden oder fallenden Magnetfelds auf. Die zufällige Lage der Elektronenpfade innerhalb der Leiterbahn bestimmt unmittelbar die Phasendifferenz $2\pi\Phi/\Phi_0$ (Gl. 3.7) zwischen beiden Teilwegen des AB-Rings und spiegelt

¹⁶Die Ausdehnung der gekoppelten Elektronensysteme beträgt in z -Richtung etwa 15 nm [Deu01]. Da die Breite des Randkanals etwa den Wert $1,6\ell = 22 \text{ nm}$ hat (siehe Text), ist die Annahme einer radialsymmetrischen Elektronenverteilung in erster Näherung gerechtfertigt.

¹⁷NB: Auch in [Hal82] wird mit der Kapazität der Randzustände pro Längeneinheit argumentiert, ohne diese jedoch konkret zu berechnen.

sich in entsprechenden irregulären Fluktuationen des Leitwerts wieder. Solche langperiodischen Strukturen im Leitwert können reduziert oder vermieden werden, wenn der Flächeninhalt des AB-Rings klein gegenüber der umschriebenen Kreisfläche ist [Sto85].

Mit einer ähnlichen Argumentation ist es möglich, die langperiodischen Strukturen in den Leitwertkurven aus Abb. 4.10b zu verstehen. Die Elektronen sind hier nicht innerhalb einer Leiterbahn, sondern im magnetischen Einschlußpotential (1.29) gefangen. Mit variierendem Magnetfeld ändert sich der magnetische Fluß $\Phi = Bba'$ (Abschnitt 3.2.2), der von den interferierenden Randkanälen eingeschlossen wird, aus zweierlei Gründen: Neben der Proportionalität zu B ist zusätzlich zu berücksichtigen, daß die magnetische Flußdichte auch den Abstand a' der gegenüberliegenden Randkanäle bestimmt. Dieser Zusammenhang ergibt sich aus der magnetfeldabhängigen Landau-Bandstruktur und kann nach einer detaillierten Betrachtung in Abschnitt 4.6.2 durch die Formel $a' \approx \sqrt{\nu}\ell$ (Gl. 4.16) beschrieben werden. Die durch die Bandstruktur bestimmte Länge a' ändert sich also sowohl bei einer Variation des Fermi-Niveaus als auch der magnetischen Flußdichte. Beides führt also zu einer Verschiebung der AB-Periodenlänge $\Delta B = \frac{1}{ba'} \frac{h}{e}$ (Gl. 3.8).

In einem idealen System ist a' eine glatte Funktion von B . Dasselbe gilt für das Fermi-Niveau, das bei steigendem oder fallendem Magnetfeld in Abhängigkeit der Verbreiterung der Landau-Bänder variiert (Abb. 3.2a). Beide Zusammenhänge können im Bereich eines schmalen Leitwertmaximums vernachlässigt werden. In einer realen Probe tritt jedoch der Effekt auf, daß sich die magnetfeldinduzierte Änderung der räumlichen Lage der Randzustände im Unordnungspotential in unvorhersehbarer Weise verstärken kann, wenn die Elektronen an der Fermi-Kante einen Weg entlang einer anderen Äquipotentiallinie einschlagen. Wegen $a' \ll b$ und $a' \sim \ell$ ist es möglich, daß bereits eine geringe Verlagerung eines Randkanals zu einer Änderung des eingeschlossenen magnetischen Flusses in der Größenordnung des Flußquants führt. Dies wiederum bewirkt das Auftreten von langperiodischen und irregulären Leitwertoszillationen (Abb. 4.10b), die folglich ein abstraktes Abbild des Unordnungspotentials in der Probe darstellen.

4.6.1(e) Auswertung der AB-Oszillationen

Experimente zum Nachweis von AB-Oszillationen an Tunnelzentren wurden von Kang *et al.* bei 25 mK durchgeführt [Yan05]. Die Autoren stellten fest, daß der AB-Effekt oberhalb von 200 mK im wesentlichen unterdrückt wird. Dieses Verhalten entspricht gerade der Kohärenzbedingung $T_{AB} \gg T$ (Gl. 4.7). Da für die Proben dieser Arbeit $T_{AB} = 130$ mK (Gl. 4.8) gilt, ist es nicht überraschend, daß auch die AB-Oszillationen aus Abb. 4.11 für 440 mK schon stark gedämpft sind. Trotzdem können die Quanteninterferenzen mindestens bis etwa 500 mK in der Ableitung von $G(B)$ klar nachgewiesen werden. Zur Berechnung der Ableitung ist dabei aufgrund des geringen Abstands der Meßpunkte von 1,4 mT eine Glättung der Meßkurve unerlässlich. In der Umgebung eines jeden Meßpunktes wurde hierzu mittels Ausgleichsrechnung eine Parabel an zwölf benachbarten Stützstellen angepaßt. Die Steigung der Parabel am zentralen Datenpunkt gibt die Ableitung der Meßkurve wieder, die durch dieses Verfahren automatisch geglättet wird. Der Vergleich beider Messungen aus Abb. 4.11 zeigt, daß die feinen Strukturen am Leitwertmaximum in hohem Maße reproduzierbar sind.

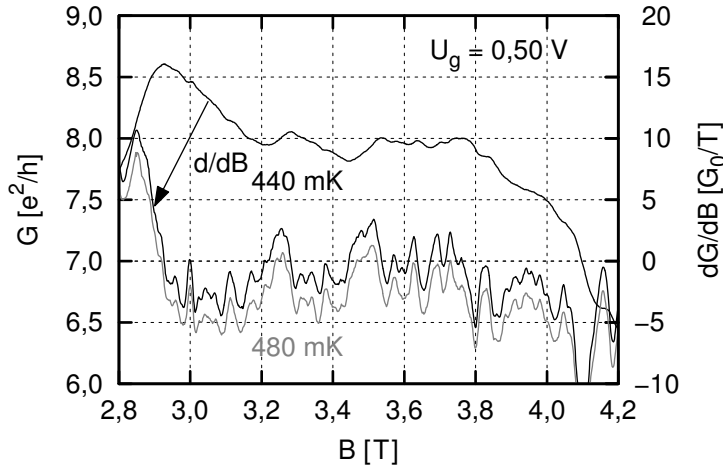


Abb. 4.11. Vergrößerung der gestauchten Leitwertspitze bei $\nu = 2,5$. Im Gegensatz zu Abb. 4.10 wird hier wieder eine Auftragung gegen B verwendet. Die erste Ableitung ist für zwei aufeinanderfolgende Durchläufe des Magnetfelds wiedergegeben. Die Kurve für 480 mK wurde zur Wahrung der Übersichtlichkeit etwas nach unten verschoben.

Dabei können Halbschwingungen mit einer Breite von minimal 5 mT und einer Amplitude von wenigstens $0,02 e^2/h$ aufgelöst werden.

Die Oszillationen von dG/dB aus Abb. 4.11 weisen einen stark quasiperiodischen Charakter auf. Dies ist eine Folge dessen, daß in der Barriere mehr als zwei Tunnelzentren existieren, und zwar in solchen Abständen, daß die Kohärenzbedingung $\hbar v/4b \gg k_B T$ für mehrere Kontaktpaare gleichzeitig erfüllt ist. Das Resultat einer schnellen Fourier-Transformation wird in Abb. 4.12a für den Bereich des Leitwertmaximums aus Abb. 4.11 dargestellt. Einzelne Sinusschwingungen treten in dem Spektrum besonders stark hervor, wobei sich die Periodenlängen ΔB auf die zwei Intervalle 52–79 mT und 106–144 mT konzentrieren. Der Vergleich mit $G(B)$ aus Abb. 4.11 zeigt, daß die Komponenten des zweiten Intervalls der zweiten Harmonischen der langperiodischen Schwingungen mit $\Delta B = 0,23$ T (z. B. in der Umgebung von $B = 3,3$ T) zugeordnet werden können.

Die langperiodischen Leitwertfluktuationen besitzen eine große Amplitude ($\sim 0,2 e^2/h$) und werden hier, wie weiter oben erläutert wurde, als eine Folge des Zusammenspiels von Unordnungspotential und magnetfeldabhängiger Bandstruktur angesehen. Im Gegensatz dazu weisen die kurzperiodischen AB-Oszillationen mit einer Periodenlänge zwischen 52 und 79 mT eine nur geringe Amplitude ($\sim 0,02 e^2/h$) auf. Der Effekt, daß sich die irregulären, langperiodischen Leitwertfluktuationen und die AB-Oszillationen in ihrer Amplitude so stark unterscheiden, wurde auch bei mikrostrukturierten AB-Ringen beobachtet [Web85].

4.6.1(f) Abstand der Tunnelzentren

Der Abstand b der Tunnelzentren kann aus der Periodizität ΔB der AB-Oszillationen bestimmt werden (Gl. 3.8):

$$b = \frac{1}{\Delta B a'} \frac{h}{e}, \quad (4.11)$$

wobei a' der Abstand der gegenüberliegenden, interferierenden Randkanäle ist (Abb. 3.6). In [Yan05] wird $a' = a$ gesetzt, wobei die Autoren allerdings darauf hinweisen, daß aufgrund der Unschärfe der Trajektorien ein Abstand von bis zu $a' = 2a$ nicht ausgeschlossen sei. Genauere Aussagen sind unter Verwendung von Bandstrukturrechnungen für die gekoppelten Elektronensysteme möglich. Entsprechende Resultate werden in Abb. 4.12b für $B = 3,5$ T

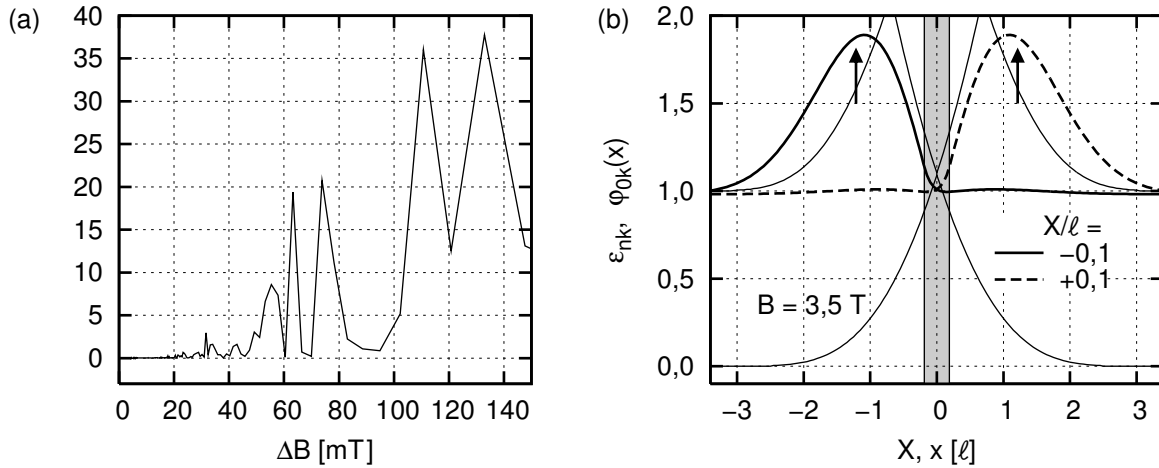


Abb. 4.12. (a) Fourier-Analyse von dG/dB aus Abb. 4.11 im Magnetfeldbereich 2,93–4,26 T. Die Ordinatenachse ist ohne Einheiten. (b) Bandstruktur (dünne Linien) für $V_0 = 268 \text{ meV}$, $a = 52 \text{ \AA} = 0,38\ell$ und $B = 3,5 \text{ T}$. Als fette Linien sind zwei Wellenfunktionen aus dem Grundzustandsband aufgetragen. Ihre Energie $\varepsilon_{0k} = 0,98$ liegt knapp unterhalb der ersten Antikreuzung. Die Pfeile markieren die jeweiligen Aufenthaltsschwerpunkte $\langle \varphi_{0k} | x | \varphi_{0k} \rangle$. Ihr Abstand beträgt $a' = 2,4\ell$.

dargestellt. Dieser Wert der magnetischen Flußdichte herrscht im Mittel an der Leitwertspitze mit dem kleinsten Füllfaktor vor (Abb. 4.11). Für die Leitzentren von Zuständen im Bereich der Antikreuzung zwischen dem 0. und 1. Band gilt $X \ll \ell$. Da die Theorie von Kim und Fradkin (Abschnitt 3.2.2) auf örtlich getrennten, eindimensionalen Fermi-Flüssigkeiten beruht, werden in Abb. 4.12b zwei Zustände betrachtet, deren Energie knapp unterhalb der Antikreuzung liegt, so daß sie als Randzustände des jeweiligen Elektronensystems gelten können.

Wenn die Aufenthaltsschwerpunkte der Randzustände an der Fermi-Kante zur Festlegung des Abstandes der korrespondierenden Randkanäle herangezogen werden, erhält man nach Abb. 4.12b die Distanz $a' = 2,4\ell$. Ein vergleichbares Ergebnis liefert die Formel (3.9): Für $X = 0,1\ell$ und $\varepsilon_{0k} = 0,98$ bzw. $\Delta X = \sqrt{2\varepsilon_{0k} + 1}\ell = 1,72\ell$ ergibt diese den Wert $a' = 2,0\ell$. Die Abweichung gegenüber der exakten Rechnung beträgt also weniger als 20%. Da die Bandstruktur auf den Skalen der magnetischen Länge und der Zyklotron-Energie nur geringfügig mit der Amplitude des Magnetfelds variiert (Abschnitt 2.4.1), ist $a' = 2,4\ell$ gleichzeitig auch für andere Systemparameter als denen aus Abb. 4.12b ein repräsentativer Wert für den Abstand der interferierenden Elektronentrajektorien. Ausgedrückt in Einheiten der Barrierenbreite gilt in unserem Beispiel $a' = 6,3a$, während man unter Bedingungen wie aus [Yan05] ($a = 88 \text{ \AA}$, $B = 5,7 \text{ T}$) $a' = 3,0a$ erhält. Es bleibt also festzuhalten, daß der Abstand der Randkanäle bei dünnen Barrieren weniger durch die Barrierendicke, als vielmehr durch die Ausdehnung ΔX der Wellenfunktionen bestimmt ist. Durch diese Aussage kommt letztlich eine Verknüpfung zwischen der Theorie zum Tunneln durch Punktkontakte und dem Modell der Mischung von Landau-Zuständen zustande.

Im Spektrum von Abb. 4.12a treten im ersten Intervall, das dem AB-Effekt zugeordnet wird, drei Periodenlängen besonders stark hervor: $\Delta B = 56, 63$ und 74 mT . Für einen Trajektorienabstand von $a' = 2,4\ell = 329 \text{ \AA}$ erhält man damit als Abstand zwischen den Tun-

nelzentren unter Anwendung von (4.11) die Werte $b = 2,2, 2,0$ und $1,7 \mu\text{m}$. Als Mittelwert wird im folgenden

$$b = (2,0 \pm 0,2) \mu\text{m} \quad (4.12)$$

verwendet. Wenn ein Punktkontaktpaar im Abstand b dem kohärenten Regime (Gl. 3.10) angehört, muß die Phasenkohärenzlänge (= Phasenrelaxationslänge) [Web88, Dat97] nach Abb. 3.6 mindestens $L_{\Phi}^{\text{AB}} = a' + 2b \simeq 2b$ betragen. Aus den experimentellen Werten für b folgt für die Phasenkohärenzlänge in den Proben dieser Arbeit eine untere Grenze von $L_{\Phi}^{\text{AB}} \approx 4,4 \mu\text{m}$. Die entsprechende Beweglichkeit wird in Abschnitt 4.6.2 berechnet und diskutiert.

4.6.1(g) Tunnelzentren vs. makroskopische Defekte

In Abschnitt 4.5 wurde die beobachtete Leitwertüberhöhung mit der Existenz von makroskopischen Defekten erklärt, die eine Unterteilung der Quantenregion in einzelne Sektionen bewirken (Abb 4.9). Anhand der experimentell bestimmten Abstände der interferierenden Tunnelzentren kann zwar nicht die Breite der Sektionen abgeschätzt werden, gleichwohl ist eine Konsistenzprüfung möglich. Bei einer Probenbreite von $500 \mu\text{m}$ beträgt die durchschnittliche Breite der Sektionen höchstens $100 \mu\text{m}$, wenn man die mittlere Amplitude $10 e^2/h$ der ersten Leitwertspitze aus Abb. 4.8 mit dem Leitwert $2 e^2/h$ eines spinentarteten Randkanals ins Verhältnis setzt (Abschnitt 3.1.1). Selbst wenn wie beim Experiment von Kang *et al.* der Leitwert pro Sektion nur ein Zehntel des zweifachen Leitwertquantums betragen sollte, wäre die durchschnittliche Breite der Sektionen mit $10 \mu\text{m}$ noch deutlich größer als der beobachtete maximale Abstand von interferierenden Tunnelzentren.

4.6.2 Leitwertoszillationen bei kleinen Magnetfeldern

Die AB-Oszillationen treten nur an der Leitwertspitze mit dem kleinsten Füllfaktor auf. Schon beim nächstgelegenen Maximum ist der AB-Effekt weitgehend unterdrückt (Abb. 4.10). Obwohl die entsprechenden Signaturen mit kleiner werdendem Magnetfeld schnell verschwinden, erscheinen bei niedrigen Flußdichten in Abb. 4.13a erneut ähnliche Leitwertoszillationen. Die Schwingungen setzen bereits bei $B = 0 \text{T}$ ein, nehmen bei $B \approx 0,27 \text{T}$ in ihrer Amplitude deutlich zu und verschwinden bei $B = 0,8 \text{T}$, just dem Punkt, wo die regulären Landau-Oszillationen aufzutreten beginnen. Ebenso wie die AB-Oszillationen aus Abb. 4.11 zeichnen sich die Leitwertstrukturen bei kleinen Feldern durch quasiperiodisches Verhalten und hohe Reproduzierbarkeit aus. Außerdem besitzen die prägnantesten Oszillationen im Fourier-Spektrum von Abb. 4.13b mit $\Delta B = 30\text{--}65 \text{ mT}$ ähnliche Periodenlängen. Im Vergleich zu den AB-Oszillationen aus Abb. 4.11 sind die Schwingungsamplituden in Abb. 4.13a etwas größer. Sie betragen für $0,27 \text{T} \leq B \leq 0,8 \text{T}$ mit $0,03 e^2/h$ etwa das Anderthalb- bis Zweifache.

Trotz der Ähnlichkeit zu den in Abschnitt 4.6.1 behandelten AB-Oszillationen gibt es Anhaltspunkte, daß die quasiperiodischen Strukturen bei kleinen Magnetfeldern nicht auf dem AB-Effekt beruhen. In Abb. 4.14 sind Leitwertkurven für verschiedene Steuerspannungen nach einer dort erklärten Methode aufbereitet. Diese Oszillationen werden im Gegensatz zu Abb. 4.10a nicht bei steigender Steuerspannung zunehmend unterdrückt. Ab $U_g = 0,60 \text{ V}$ kommt sogar ein hochfrequentes Rauschen hinzu, während die Kurven aus Abb. 4.10a bei

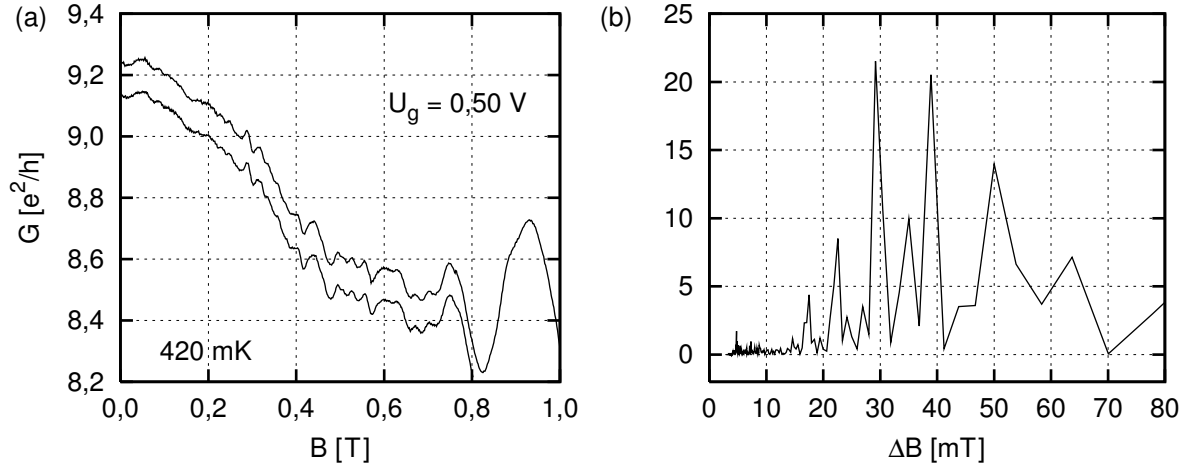


Abb. 4.13. (a) Kurzperiodische Leitwertoszillationen im Bereich kleiner Magnetfelder. Die Leitwertkurven sind für aufeinanderfolgende Durchläufe des Magnetfelds in hohem Maße reproduzierbar. Der untere Graph wurde zur besseren Erkennbarkeit um $-0,1 e^2/h$ verschoben. (b) Fourier-Analyse von $G(B)$ für $B < 0,8$ T. Die Ordinatenachse ist ohne Einheiten.

ähnlich hoher Steuerspannung stark geglättet sind. Da die AB-Oszillationen schon am zweiten Leitwertmaximum nahezu verschwunden sind (Abb. 4.10), erscheint es abwegig, daß sie bei noch höheren Füllfaktoren, also etwa im Bereich $B = 0-0,8$ T, erneut auftreten, zumal wenn dort die Verbreiterung der Landau-Bänder im Vergleich zur Zyklotron-Energie so groß ist, daß auch Landau-Oszillationen unterdrückt werden.

4.6.2(a) Phasenkohärenz

Ungeachtet der Abweichungen zum Verhalten der AB-Oszillationen gibt es klare Indizien, daß auch die Leitwertschwankungen bei kleinen Magnetfeldern auf einem Interferenzphänomen beruhen. Sobald die Temperatur auf $1,5$ K erhöht wird (Abb. 4.14), verschwinden die quasiperiodischen Oszillationen in Übereinstimmung zur Kohärenzbedingung (4.7) weitgehend. Mit der in Abb. 4.14 ansteigenden Ladungsträgerdichte werden innerhalb der gekoppelten Elektronensysteme Störpotentiale, die z. B. von ionisierten Donatoren in der Schicht der Steuerelektrode (Abb. 4.2) herrühren, zunehmend effektiver abgeschirmt, was zu einer Erhöhung der Elektronenbeweglichkeit (Gl. 1.5) führt. Letztere kann mit Hilfe der Kohärenzbedingung (1.11)

$$B_c \mu_\Phi \gtrsim 2\pi \quad (4.13)$$

abgeschätzt werden. Diese Gleichung erhält man im semiklassischen Bild (Abschnitt 1.1.2) aus der Forderung, daß ein quasifreies Elektron zwischen zwei (inelastischen) Streuprozessen genügend Zeit zur Vollendung eines ganzen Orbits im senkrechten Magnetfeld hat. Aufgrund des Kriteriums (4.13) und der mit der Ladungsträgerdichte ansteigenden Elektronenbeweglichkeit ist zu erwarten, daß die quasiperiodischen Oszillationen mit zunehmend höherer Steuerspannung bei kleineren Magnetfeldern einsetzen.

In der Tat läßt sich in Abb. 4.14 ein derartiges Verhalten ablesen, wenn man als Kriterium für den Beginn signifikanter Oszillationen *ad hoc* fordert, daß die quasiperiodischen Schwingungen eine Amplitude von mindestens $0,03 e^2/h$ aufweisen und in „dichter Abfolge“

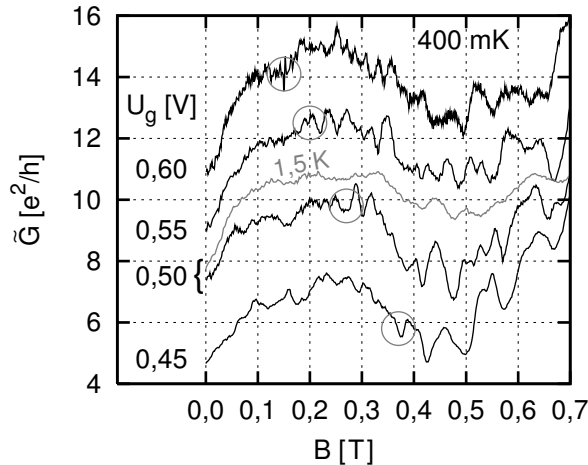


Abb. 4.14. Leitwertoszillationen bei kleinen Feldstärken für verschiedene Steuerspannungen. Um Details besser hervortreten zu lassen, wurde an $G(B)$ (Abb. 4.13a) jeweils eine Gerade angepaßt und die Differenz zwischen beiden mit dem Faktor 20 multipliziert ($\rightarrow \tilde{G}$). Die Kreise markieren den jeweiligen Beginn B_c des Bereichs quasiperiodischer Schwingungen mit der Amplitude $\gtrsim 0,03 e^2/h$. Die Messung der grauen Leitwertkurve mit $U_g = 0,50$ V erfolgte bei 1,5 K.

auftreten. Das solchermaßen definierte und in Abb. 4.14 durch Kreise markierte kritische Magnetfeld B_c fällt bei steigender Elektronendichte im Bereich zwischen $U_g = 0,45$ V und $0,55$ V von $B_c = 0,37$ T auf $0,20$ T ab. Für $B_c = 0,27$ T, d. h. der kritischen Flußdichte der Leitwertkurve mit $U_g = 0,50$ V, erhält man mit (4.13) eine Beweglichkeit von

$$\mu_\Phi \approx 2,3 \cdot 10^5 \text{ cm}^2/\text{Vs}. \quad (4.14)$$

Bei dieser Größe handelt es sich in erster Linie um eine „Phasenkohärenz-Beweglichkeit“, da für die Unterdrückung von meßbaren Quanteninterferenzen hauptsächlich Phasenrelaxationsprozesse verantwortlich sind. In Analogie zu der für Impulsrelaxationsprozesse aufgestellten Gleichung (1.5) kann aus μ_Φ die Phasenkohärenzlänge

$$L_\Phi^{<1\text{ T}} = \frac{\mu_\Phi \hbar k_F}{e} \stackrel{(1.6)}{=} \frac{\mu_\Phi \hbar}{e} \sqrt{2\pi n_\square} \approx 1,7 \mu\text{m} \quad (4.15)$$

berechnet werden. Während diese Größe auf dem Wert des kritischen Magnetfelds B_c für $U_g = 0,50$ V beruht (Abb. 4.14), wurde in Abschnitt 4.6.1 bei derselben Steuerspannung anhand der Periodenlänge der AB-Oszillationen die Phasenrelaxationslänge zu $L_\Phi^{\text{AB}} \gtrsim 4,4 \mu\text{m}$ abgeschätzt. Die beiden auf grundverschiedene Weise bestimmten Phasenkohärenzlängen sind also von derselben Größenordnung.

Die Phasenkohärenzlänge L_Φ kann wesentlich größer als die mittlere freie Weglänge L_m sein. Letztere wird bei tiefen Temperaturen hauptsächlich durch elastische Streuprozesse bestimmt, welche die Phaseninformation der Elektronen nicht zerstören [Web88]. Trotzdem ist L_Φ nicht von L_m unabhängig, da bei elastischen Streuprozessen der Streuwinkel weitgehend dem Zufall unterworfen ist, was die effektive Strecke verkürzt, die zwischen zwei inelastischen Stößen zurückgelegt werden kann. Bei gegebenen Impuls- und Phasenrelaxationszeiten gilt $L_\Phi = v_F \sqrt{\tau_m \tau_\Phi / 2}$ [Dat97]. Wenn mit steigender Elektronendichte elastische Streuzentren besser abgeschirmt werden, erhöht sich folglich nicht nur die Impulsstreuzeit τ_m , sondern auch die Phasenkohärenzlänge L_Φ . Der funktionale Zusammenhang $L_\Phi(\tau_m)$ erklärt also die experimentelle Beobachtung aus Abb. 4.14, daß sich die kritische Flußdichte $B_c \stackrel{(4.13)}{\approx} \frac{2\pi}{\mu_\Phi} \stackrel{(4.15)}{=} \frac{\hbar k_F}{e L_\Phi}$ mit zunehmender Steuerspannung kleiner wird.

4.6.2(b) AB-Effekt interferierender Randkanäle?

Im folgenden wird durch Rechnung überprüft, ob der in Abschnitt 3.2.2 beschriebene AB-Effekt an Tunnelzentren als Ursache für die Leitwertoszillationen bei kleinen Magnetfeldern in Frage kommen kann. Gleichung (3.9) beschreibt den Abstand a' zwischen gegenüberliegenden Randkanälen näherungsweise in Abhängigkeit des Leitzentrums X und der halbseitigen Ausdehnung ΔX der zugehörigen Wellenfunktionen. Falls man nur Zustände in der Nähe von $X = 0$ betrachtet, also X im Vergleich zu ΔX vernachlässigt, vereinfacht sich (3.9) zu $a' \approx \Delta X = \sqrt{2\varepsilon_{nk} + 1} \ell$. Unter Verwendung des Zusammenhangs (3.1) zwischen Füllfaktor und Fermi-Niveau folgt

$$a' \approx \Delta X \simeq \sqrt{\nu} \ell. \quad (4.16)$$

Durch Einsetzen in (3.8) erhält man schließlich die Periodenlänge möglicher AB-Oszillationen:

$$\Delta B \approx \frac{1}{b\sqrt{\nu} \ell} \frac{h}{e} = \frac{B}{b\sqrt{n_{\square}/2\pi}}. \quad (4.17)$$

Eigentlich gilt für den AB-Effekt, daß die Periodizität der Leitwertoszillationen von der Amplitude des Magnetfelds unabhängig ist. Da die interferierenden Stromkanäle in dieser Arbeit jedoch nicht etwa durch Leiterbahnen definiert sind, sondern in ihrer x -Position durch die feldabhängige Landau-Bandstruktur bestimmt werden, ist die Periodenlänge in (4.17) sogar proportional zu B . Während dieses Phänomen in Abschnitt 4.6.1 für den Bereich der Leitwertspitze mit dem kleinsten Füllfaktor vernachlässigt werden konnte (abgesehen von dem Wechselspiel mit dem Unordnungspotential), ist das für Abb. 4.14 nicht mehr möglich.

Unter der Annahme, daß bei geringen Flußdichten dieselben Tunnelzentren aktiv sind wie bei den AB-Oszillationen am Leitwertmaximum aus Abb. 4.11, kann für den Abstand der Tunnelzentren der Mittelwert $b = 2,0 \mu\text{m}$ aus Abschnitt 4.6.1 übernommen werden. In der Leitwertkurve für $U_g = 0,50 \text{ V}$ aus Abb. 4.14 treten die zur Diskussion stehenden quasi-periodischen Oszillationen im Feldbereich $B = 0,27\text{--}0,80 \text{ T}$ auf. Dem Intervall entsprechen nach (4.17) Periodenlängen ΔB zwischen 8 und 23 mT. Um diesen Wertebereich mit den tatsächlich auftretenden Oszillationen vergleichen zu können, müßte eigentlich das Fourier-Spektrum der Leitwertkurve aus Abb. 4.14 wegen $\Delta B \propto B$ (Gl. 4.17) in Abhängigkeit der magnetischen Flußdichte betrachtet werden.¹⁸ Die vorhandene Datengrundlage ist jedoch zu dünn, um etwa Spektralanalysen auf Unterabschnitten des Intervalls 0–0,8 T durchführen zu können, so daß der Vergleich zwischen Theorie und Experiment anhand von Abb. 4.13b stattfinden muß. Auch aus diesem Spektrum kann sofort ersehen werden, daß das Gros der beobachteten Periodenlängen nicht mit dem Bereich $\Delta B = 8\text{--}23 \text{ mT}$ möglicher AB-Oszillationen übereinstimmt.

4.6.2(c) Leitwertfluktuationen

Der AB-Effekt interferierender Randkanäle scheidet also als Ursache für die quasiperiodischen Oszillationen bei kleinen Magnetfeldern aus. Deshalb ist zu klären, ob sich die beobachteten

¹⁸In den Graphen aus Abb. 4.14 ist mit zunehmender Magnetfeldamplitude tatsächlich ein leichter Anstieg der Periodenlängen auszumachen.

Oszillationen dem Phänomen der sog. Leitwertfluktuationen zuordnen lassen. Dieser Effekt, der in [Dat97] eingehend behandelt wird, ist dann relevant, wenn die Phasenkohärenzlänge die mittlere freie Weglänge deutlich übertrifft. Günstige Voraussetzungen sind tiefe Temperaturen und eine niedrige Elektronenbeweglichkeit. Prinzipiell unterscheidet man zwischen schwacher und starker Lokalisierung. Die maßgebliche Größe hierfür ist die Lokalisierungslänge, die in einem System mit M transversalen Moden $L_c \approx ML_m$ beträgt. Für ein zweidimensionales Elektronensystem der Breite $W = 500 \mu\text{m}$ und der Flächendichte $n_{\square} = 1,89 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$ hat die Modenzahl den Wert¹⁹ [Dat97]

$$M = \left\lfloor \frac{k_F W}{\pi} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{W}{\lambda_F/2} \right\rfloor \stackrel{(1.63b)}{=} 17244. \quad (4.18)$$

Die Probenstruktur aus Abb. 4.2 weist in [001]-Richtung eine Länge von $L_x = 4,0052 \mu\text{m}$ auf, die von vergleichbarer Größe ist wie die weiter oben bestimmten Phasenkohärenzlängen L_{Φ}^{AB} und $L_{\Phi}^{<1\text{T}}$. Folglich bildet die Quantenregion in x -Richtung eine phasenkohärente Einheit. Man spricht von schwacher Lokalisierung, wenn die Länge eines solchen Systems wesentlich kürzer als die Lokalisierungslänge ist. Aufgrund der hohen Modenzahl wird diese Bedingung in den Proben dieser Arbeit leicht erfüllt. Selbst wenn die Beweglichkeit μ gemäß (1.5) um zwei Größenordnungen kleiner wäre als die Phasenkohärenz-Beweglichkeit (4.14) würde $L_c \approx 250 \mu\text{m}$ die Länge L_x der Quantenregion noch immer deutlich übertreffen.

Die eben festgestellte schwache Lokalisierung kann nicht die Ursache für die beobachteten quasiperiodischen Oszillationen sein. Dagegen spricht zum einen, daß in breiten Proben mit schwacher Lokalisierung keine Leitwertfluktuationen auftreten und zum anderen die Tatsache, daß in Abb. 4.13a die quasiperiodischen Oszillationen sich bis zu einer Flußdichte von $0,8 \text{ T}$ erstrecken, während der Zustand der schwachen Lokalisierung im allgemeinen schon durch ein kleines Magnetfeld von $\sim 10 \text{ mT}$ zerstört wird [Dat97]. Der Grund für die mangelnde Schlagkraft der bisherigen Argumentation liegt darin, daß die Modenzahl (4.18) nur für die beiden gekoppelten Elektronensysteme korrekt ist, nicht jedoch für das Gesamtsystem, das zusätzlich die Barriere beinhaltet. Eine quantitative Betrachtung des Systems unter Berücksichtigung der Eigenschaften der Tunnelbarriere wird dadurch sehr erschwert, daß viele Systemparameter²⁰ nur ungenau oder gar nicht bekannt sind. Die folgenden Überlegungen können deshalb nur skizzenhaft und ohne zahlenmäßige Untermauerung dargelegt werden.

Es ist anzunehmen, daß der Tunnelstrom nicht gleichmäßig verteilt über die gesamte Länge der Barriere auftritt, sondern diese nur punktuell an den Tunnelzentren durchdringt, deren Existenz in Abschnitt 4.6.1 nachgewiesen wurde. Hierdurch erniedrigt sich die Anzahl der Moden erheblich, und zwar um etwa zwei Größenordnungen, wenn man den mittleren Abstand b der Tunnelzentren ins Verhältnis zur Breite W der Quantenregion setzt. Bei diesem Mehrfachspalt-Experiment ist die Länge der interferierenden Moden von der Größenordnung der Distanz b , welche wiederum mit der Systemlänge L_x vergleichbar ist. Deshalb und aufgrund der massiven Reduzierung der Modenzahl M nimmt der Systemzustand im Bereich der Barriere den Charakter einer starken Lokalisierung an, da nun die entsprechende

¹⁹ $\lfloor x \rfloor$ bezeichnet die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist.

²⁰Impulsrelaxationslänge L_m ; Anzahl und Breite der Sektionen, in welche die Quantenregion unterteilt ist (Abschnitt 4.5); Anzahl und Abstand der Tunnelzentren, sowie deren Transmissionswahrscheinlichkeiten.

Bedingung $L_c \approx L_x$ erfüllt wird. In diesem Regime führt die Quanteninterferenz zwischen gestreuten Elektronen zu Leitwertfluktuationen, wenn die de Broglie-Wellenlänge (1.63a) der Elektronen durch Variation des Fermi-Niveaus oder des Magnetfelds verändert wird [Dat97]. Wenngleich oben gezeigt worden ist, daß bei kleinen Magnetfeldern kein AB-Effekt zwischen den gegenüberliegenden und nahe ($\Delta X \sim \ell$) benachbarten Randkanälen auftritt, stellt sich das aus Bereichen mit hoher und niedriger Modenzahl bestehende Hybridsystem als ein Mehrfachspalt-Interferometer dar, das mit der AB-Anordnung aus [Aha59] einige Ähnlichkeit aufweist und in der Tat auch Leitwertfluktuationen erzeugt, die mit Abb. 4.11a vergleichbar sind.

4.7 Landau-Oszillationen

Bisher wurden nur solche Details der Leitwertkurven besprochen, die auf kleinem Maßstab auftreten. Dieses Unterkapitel wendet sich nun den Landau-Oszillationen in ihrer Gesamtheit zu, wobei das Hauptaugenmerk auf den Leitwertspitzen und ihrer Position auf der Skala des Füllfaktors liegt. Als erstes wird die allgemeine Form und Lage der Leitwertspitzen in Abschnitt 4.7.1 unter Berücksichtigung einer etwaigen Spinaufspaltung diskutiert und mit dem Ergebnis anderer Arbeiten verglichen. Die verwendete Probenstruktur (Abb. 4.2) ermöglicht es, die Entwicklung einer bestimmten Leitwertspitze in Abhängigkeit des Magnetfelds zu verfolgen, indem die Elektronendichte mit Hilfe der Steuerelektrode in geeigneter Weise der veränderten Bandstruktur angepaßt wird. Solchermaßen untersucht Abschnitt 4.7.2 die Position der Leitwertspitzen auf der Skala des Füllfaktors in Abhängigkeit der magnetischen Feldstärke. Von besonderem Interesse ist dabei, inwieweit die experimentelle Beobachtung mit der Landau-Bandstruktur aus Kapitel 2 und dem daraus abgeleiteten Verhalten des Tunnelstroms (Kapitel 3) übereinstimmt.

4.7.1 Position der Leitwertspitzen und Spinrentartung

Im Magnetfeld spalten die Energieniveaus von Elektronen bezüglich beider Spinausrichtungen auf. Die entstehende Energielücke läßt sich durch [Hua02]

$$\Delta E_s = |g_0| \mu_B B + E_{\text{ex}} = g^* \mu_B B \quad (4.19)$$

beschreiben. Dabei ist g_0 der Landé-Faktor im jeweiligen Materialsystem, und g^* bezeichnet den effektiven Landé-Faktor, der zusätzlich eine Modifikation E_{ex} aufgrund von Austausch-Wechselwirkungen enthält. In GaAs hat man mit $g_0 \simeq -0,44$ [Her77] einen Landé-Faktor, der aufgrund starker Spin-Bahn-Wechselwirkung im Vergleich zum Wert für freie Elektronen auf etwa ein Viertel reduziert ist. Mit dem Bohrschen Magneton $\mu_B = e\hbar/2m_e$ gilt für Elektronen im Leitungsband das Verhältnis

$$\frac{|g_0| \mu_B B}{\hbar \omega_c} = \frac{1}{2} \frac{m^*}{m_e} |g_0| \stackrel{(1.13)}{\approx} \frac{1}{68}. \quad (4.20)$$

Da die Zeeman-Aufspaltung deutlich kleiner als die Landau-Aufspaltung ist, kann leicht der Fall eintreten, daß Landau-Bänder mit starker Verbreiterung (Abb. 3.2) bezüglich ihrer Spinart experimentell nicht aufgelöst werden können.

Bei der Zeeman-Aufspaltung handelt es sich um einen Einteilcheneffekt. Die hohe Elektronendichte in Quanten-Hall-Systemen (mittlerer Abstand der Elektronen: Gl. 3.4) macht es jedoch notwendig, auch den Einfluß der Elektron-Elektron-Wechselwirkung auf die Spinaufspaltung zu berücksichtigen. Theoretische [Dem93] und experimentelle Untersuchungen [Ush90, Dol97, Hua02] zeigen, daß die auftretende Austauschenergie E_{ex} ungefähr zu einer Verzehnfachung des effektiven Landé-Faktors (engl. *exchange enhanced g-factor*) führt. In Abhängigkeit von Füllfaktor und der jeweiligen Probe werden in der Literatur für GaAs Werte zwischen $g^* = 3$ und 7 angegeben.

4.7.1(a) Kurvenschulter

Die in dieser Arbeit beobachteten Leitwertspitzen weisen an der Flanke hin zu höherem Magnetfeld eine Schulter auf, die umso ausgeprägter wird, je mehr die angelegte Steuerspannung ansteigt. Dies wird z. B. in Abb. 4.10a deutlich, wobei weiterhin auffällt, daß zwar am linken Maximum für $U_g = 0,55 \text{ V}$ eine Schulter vorliegt, nicht jedoch am benachbarten Maximum, welches bei einem höheren Füllfaktor auftritt. Allerdings zeigt Abb. 4.8, daß bei genügend großer Steuerspannung auch die Leitwertspitzen höherer Ordnung einen Absatz aufweisen, was beispielsweise bei $\nu = 8,1$ für $U_g = 0,8 \text{ V}$ der Fall ist.

Das Phänomen einer Schulter in den Leitwertkurven existiert auch bei dem Experiment von Huber *et al.*. Dort besteht die Versuchsanordnung in einer CEO-Struktur, die zwei zueinander senkrechte 2DESe enthält [Hub05]. Elektronen tunneln aus dem zum Magnetfeld parallelen System (\parallel), das eine parabolische Dispersion besitzt, durch eine 50 \AA -Barriere in die Randzustände des benachbarten Quanten-Hall-Systems (\perp). In Analogie zu Abb. 4.10a weist die Meßkurve aus [Hub05, Fig. 1] bei $\nu^\perp = 1,9$ eine Schulter auf, welche an den Flanken der übrigen Leitwertspitzen nicht existiert. Der Effekt, daß die Schulter auch bei Leitwertspitzen höherer Ordnung auftritt, sofern die Elektronendichte mindestens etwa $3 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$ beträgt (Abb. 4.8), konnte mit den modulationsdotierten Strukturen in [Hub05] nicht beobachtet werden. In jenen Proben ist die Elektronendichte auf den Wert $n^\perp = 1,9 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$ fest eingestellt. Diese Elektronendichte liegt in den Proben dieser Arbeit vor, wenn die Steuerspannung $U_g = 0,5 \text{ V}$ anliegt (Abb. 4.7), wobei dann ebenfalls nur die Leitwertspitze mit kleinstem Füllfaktor eine Schulter besitzt (Abb. 4.10a).

Huber *et al.* führen als mögliche Ursachen für das Auftreten einer Schulter einen erhöhten effektiven Landé-Faktor sowie den Sprung des chemischen Potentials aus den Volumenniveaus des 0. Landau-Bandes in das 1. Band an. In dieser Arbeit wird das Auftreten einer Kurvenschulter als Folge einer einsetzenden Spinaufspaltung angesehen. Die Beweglichkeit in den gekoppelten Elektronensystemen nimmt, wie in Abschnitt 4.6.2 beobachtet wurde, mit steigender Elektronendichte zu. Deshalb tritt die Schulter in Abb. 4.6 mit größer werdender Steuerspannung schon bei kleineren Feldstärken auf. Unabhängig von der einsetzenden Spinaufspaltung gilt für die Leitwertspitze mit kleinstem Füllfaktor (Abb. 4.10a), daß das

Maximum bei kleiner Steuerspannung, d. h. einer geringen internen Vorspannung, gleichzeitig mit dem Auftreten von AB-Oszillationen gestaucht wird, wodurch die Schulter verschwindet.

4.7.1(b) Spinentartung

Während Huber, Grayson *et al.* spinentartete Landau-Bänder konstatieren [Hub05, Gra04a], liegt beim Experiment von Kang *et al.* offenbar Spinaufspaltung vor.²¹ Zumindest zeigen in Tab. 4.1 die Positionen der Widerstandsminima einer Shubnikov-de Haas-Messung, daß im einzelnen Elektronensystem spinpolarisierte Landau-Niveaus für $\nu \lesssim 4$ aufgelöst werden können. Dahingegen weist die Leitwertkurve $G(B)$ aus [Yan04, Fig. 1(a)] bei kleinen Füllfaktoren keinerlei Anzeichen einer zum Erliegen kommenden Spinaufspaltung auf. Vielmehr sind die Positionen $\nu(G^{\max})$ der Leitwertspitzen auf der gesamten verfügbaren Skala des Füllfaktors äquidistant verteilt (Tab. 4.1). Der mittlere Abstand beträgt dabei $\Delta\nu = 1,36 \pm 0,06$ und steht somit in starkem Widerspruch zu der in Abschnitt 3.1.4 berechneten Distanz $\Delta\varepsilon = 1,01$ (Gl. 4.4) zwischen Landau-Bandlücken aufeinanderfolgender Ordnung.

Es stellt sich also die Frage, ob Kang *et al.* spinentartete oder spinaufgelöste Bandlücken spektroskopiert haben. Je nach dem hätten die Landau-Bandlücken einen Abstand von $\Delta\varepsilon$ oder sie wären – als Mittelwert über mehrere Landau-Bänder – um den Betrag $\Delta\varepsilon/2$ voneinander entfernt. Gemäß (3.1) entspräche diesen Energiedifferenzen auf der Skala des Füllfaktors eine Distanz $\Delta\nu = 2,02$ (Spinentartung) bzw. $\Delta\nu = 1,01$ (Spinaufspaltung) für aufeinanderfolgende Leitwertspitzen. Takagaki und Ploog interpretieren in [Tak00] die experimentellen Ergebnisse aus [Kan00a] dahingehend, daß Spinaufspaltung vorliegt, und führen dies auf einen erhöhten g -Faktor zurück. Weiterhin läßt sich auch aus den Ausführungen in [Yan04], und zwar denen betreffend der Dephasierung zwischen $R_{xx}(B)$ und $G(B)$, indirekt schließen, daß Kang *et al.* Spinaufspaltung annehmen: Es wird aus der Tatsache, daß die ortsfeste Ladung der Modulationsdotierung im Bereich der Barriere unkompensiert ist (siehe weiter unten), auf eine Erhöhung (also im Vergleich zu $\Delta\nu \simeq 1$) des Abstands der Leitwertspitzen geschlossen. Zusammengefaßt gilt, daß in den Proben dieser Autoren der Tunnelstrom bis mindestens $\nu = 14$ von Spinaufspaltung beherrscht wird, während bei einer Shubnikov-de Haas-Messung an einem einzelnen 2DES die Landau-Bänder nur bis $\nu = 4$ nach ihrer Spinart zu unterscheiden sind.

Während die Elektronendichte in modulationsdotierten Strukturen allein durch Messung bestimmt werden kann, bietet sich in feldinduzierten Elektronensystemen eine zusätzliche Möglichkeit, indem n_{\square} unter Anwendung des Kondensatormodells aus der Steuerspannung (bis auf einen Offset) berechnet wird. Als in Abschnitt 4.4 die Elektronendichte für verschiedene Steuerspannungen anhand der Beziehung $\Delta\nu = 2\Delta\varepsilon$ ermittelt wurde, konnte die Größe n_{\square}/U_g , welche durch das Kondensatormodell (4.3) gegeben ist, mit einer Unsicherheit von 5% bestätigt werden. Deshalb darf die Annahme, daß bei den Proben dieser Arbeit Spinentartung vorherrscht, als eine gesicherte Tatsache angesehen werden. Ein entscheidender

²¹Kang, Yang *et al.* behandeln das Thema der Spinaufspaltung am Rande. Dabei wird in [Kan00a] angemerkt, daß es unklar sei, inwieweit die Landau-Dispersion von der Zeeman-Aufspaltung oder einer etwaigen Erhöhung des g -Faktors betroffen ist. Abschließend stellen die Autoren fest: „This absence of spin-dependent features in the tunnelling data remains a central puzzle.“ Für den Gegenstand der weiteren Veröffentlichungen [Yan04] und [Yan05] besitzt eine mögliche Spinaufspaltung keine Relevanz und wird daher auch nicht diskutiert.

Tab. 4.1. Analyse der Meßwertkurven aus [Yan04, Fig. 1]. Die erste Zeile gibt die Füllfaktoren der Minima des longitudinalen Widerstands R_{xx} wieder, der für ein einzelnes 2DESe aufgezeichnet wurde. In der zweiten Zeile stehen die Positionen der Maxima des Leitwerts G für den Tunneltransport durch die Barriere. Der Berechnung von ν liegt jeweils die aus $R_{xx}(B)$ bestimmte Elektronendichte $n_{\square} = (2,0 \pm 0,1) \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$ zugrunde. In der Tabelle ist die horizontale Lage der Zahlenangaben proportional zum jeweiligen Nennwert.

$\nu(R_{xx}^{\min})$:	0,97	2,03	3,03	4,19	6,52	8,58	10,7	12,7		
$\nu(G^{\max})$:	1,48	2,77	4,11	5,58	6,89	8,31	9,72	11,1	12,7	14,1

Parameter für die Auflösbarkeit von spinaufgespaltenen Landau-Niveaus ist die Elektronenbeweglichkeit. Diese Größe ist allerdings bei dem Probedesign aus Abb. 4.2 in Ermangelung einer möglichen Vierpunktcharakterisierung für die einzelnen Elektronensysteme experimentell nicht bestimmbar. Die Leitwertkurven aus Abb. 4.8 weisen jedoch im Vergleich zu [Yan04, Fig. 1(a)] breitere Leitwertspitzen und im Verhältnis größere Minimalwerte in $G(\nu)$ auf, woraus geschlossen werden kann, daß in den Proben dieser Arbeit ein größeres Ausmaß an Unordnung vorliegt. Dies erklärt zumindest phänomenologisch, weshalb es hier im Gegensatz zum Experiment von Kang *et al.* nicht möglich ist, die spinaufgespaltenen Landau-Bänder bei der Messung des Tunnelstroms aufzulösen.

4.7.1(c) Distanz der Leitwertspitzen

Abbildung 4.15 stellt einen direkten Vergleich zwischen den Positionen der Leitwertspitzen aus Abb. 4.8 und dem Ergebnis von Kang *et al.* her. Unabhängig von den Werten der zugrunde gelegten Elektronendichten folgt aus dieser Auftragung, daß die Leitwertspitzen auf der Skala des Füllfaktors äquidistant sind. Damit wird ein Teil des Ergebnisses aus Abschnitt 3.1.4 experimentell bestätigt. Unter Vergabe einer Nummer für die Leitwertmaxima können für die Datenpunkte folgende empirische Formeln aufgestellt werden:

$$\text{Habl:} \quad \nu(G^{\max}) = (2,23 \pm 0,03) + (2,02 \pm 0,01) \cdot m/2, \quad (4.21a)$$

$$[\text{Yan04}]: \quad \nu(G^{\max}) = (1,43 \pm 0,03) + (1,367 \pm 0,006) \cdot m. \quad (4.21b)$$

Die Fehlergrenzen zeigen, daß sich die statistische Streuung für Distanz $\Delta\nu$ aufeinanderfolgender Leitwertspitzen in beiden Fällen auf weniger als 0,5% beläuft. Die Tatsache, daß die Distanz bei den Proben dieser Arbeit genau $\Delta\nu = 2,02$ beträgt, ist der Methode aus Abschnitt 4.4 zuzuschreiben, mit der unter Verwendung gerade dieses Wertes die Elektronendichte bestimmt wurde.²² Überraschend ist jedoch, daß in (4.21b) der Maximumsabstand $\Delta\nu = 1,37$ so stark von einer ganzen Zahl und insbesondere dem Wert $\Delta\nu \simeq 1$ abweicht, der für eine spinaufgelöste Messung zu erwarten wäre.

Das Auftreten einer stark unterschiedlichen Periodenlänge für die Shubnikov-de Haas ($\Delta\nu = 1$ und $\Delta\nu = 2$) und die Landau-Oszillationen ($\Delta\nu = 1,37$), vgl. Tab. 4.1, wird in [Yan04] nicht konkret erklärt. Die Autoren weisen jedoch auf unkompenzierte Ladungsträger unterhalb der Barriere hin, die für eine Anhebung der Energieniveaus im Kopplungsbereich

²²Dieser Punkt wird in Abschnitt 4.7.2 noch eingehend diskutiert.

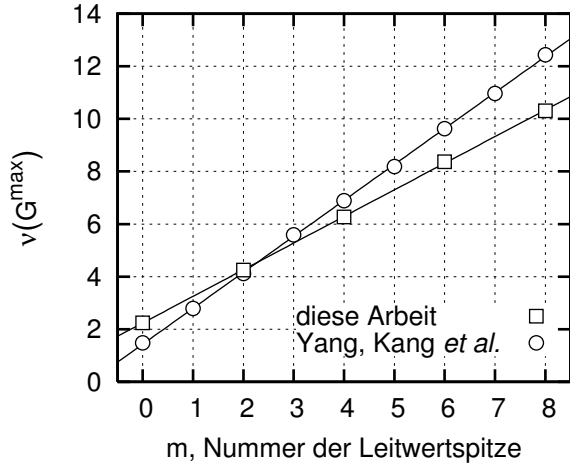


Abb. 4.15. Position der Leitwertspitzen auf der Skala des Füllfaktors. Datenpunkte mit dem Symbol \square stammen aus Abb. 4.8 von der Kurve mit $U_g = 0,5 \text{ V}$ bzw. $n_{\square} = 1,89 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$. Die durch \circ repräsentierten Werte sind dem Graphen Fig. 1(a) in [Yan04] entnommen, siehe auch Tab. 4.1. An beide Datensätze wurde mittels Ausgleichsrechnung eine Gerade angepaßt. Die entsprechenden Koeffizienten finden sich in den Gleichungen (4.21).

beider 2DESe verantwortlich sind. Hierzu ist zu bemerken, daß eine derartige Ladungsver-schiebung im wesentlichen von der Stärke des Magnetfelds unabhängig ist. Deshalb werden alle Energielücken bzw. Leitwertspitzen um etwa denselben Betrag verschoben, was insbesondere bedeutet, daß ihr Abstand $\Delta\varepsilon$ bzw. $\Delta\nu$ dabei nahezu unverändert bleibt. In der Tat wurde in Abschnitt 2.4.1 für eine Anhebung der effektiven Barrierenhöhe $v = V_0/\hbar\omega_c$ gezeigt, daß bei schwach gekoppelten Elektronensystemen sich die Positionen der Bandlücken nur um Beträge $\ll 1$ ändern. Anschaulich erkennt man diesen Effekt auch anhand von Abb. 2.6a, in der gezeigt wird, daß die Bandstruktur für $V_0 = 268 \text{ meV}$ nur wenig von derjenigen gleicher Breite, aber unendlicher Höhe abweicht. Folglich würde die in [Yan04] angeführte Änderung des Leitungsbandverlaufs nur eine geringfügige, kollektive Anhebung aller Bandlücken bewirken, nicht jedoch die starke Vergrößerung ihres Abstandes von $\Delta\nu \simeq 1$ auf $\Delta\nu = 1,37$ erklären. Die starke Dephasierung zwischen der energetischen Lage der Bandlücken (Energielücke zwischen dem ε_{nk} - und $\varepsilon_{(n+1)k}$ -Band) und den Volumenzuständen (Energie $\varepsilon_{nk} = n$) widerspricht also sowohl den theoretischen als auch experimentellen Ergebnissen dieser Arbeit und bleibt als eine ungeklärte Frage bestehen.

4.7.2 Magnetfeldabhängige Anhebung der Bandlücken

Die Landau-Bandstrukturen aus den Kapiteln 1 und 2 ändern, sofern sie in Einheiten der magnetischen Länge und der Zyklotron-Energie aufgetragen sind, ihre Form unter einer Variation des Magnetfelds nur wenig, und zwar selbst für Änderungen des Füllfaktors in der Größenordnung von $\Delta\nu = 1$. Während die Landau-Dispersion an einer unendlich hohen Barriere bezüglich des Magnetfelds invariant ist (Abschnitt 1.4), werden die Landau-Bandlücken im Bereich einer Tunnelbarriere, die zwei schwach gekoppelte Elektronensysteme trennt, um einen Betrag von etwa $\Delta\varepsilon_B/\Delta B \approx (1/50) \hbar\omega_c/1 \text{ T}$ angehoben (Abschnitt 2.4). Eine Untersuchung dieses kleinen Effekts ist nur möglich, wenn ein und dieselbe Bandlücke bei verschiedenen Magnetfeldstärken spektroskopiert werden kann. Die idealen Voraussetzungen hierfür bietet die Steuerelektrode, mit der in dieser Arbeit anstelle einer Modulationsdotierung (Abschnitt 4.3) die Elektronenfilme an der Spaltfläche induziert werden. Der Effekt der Anhebung der Landau-Bandlücken ist am einfachsten zugänglich, wenn die Landau-Oszillationen für ver-

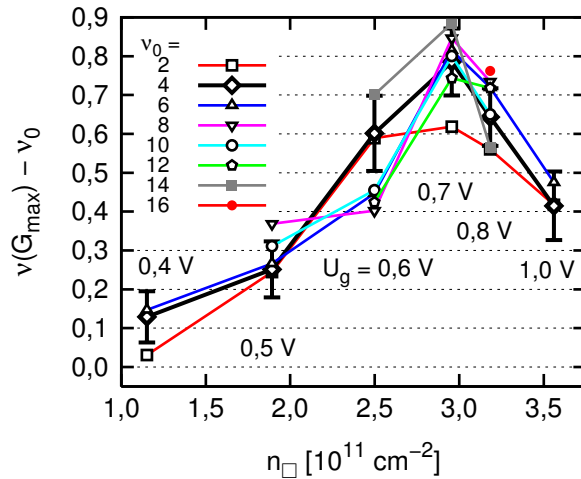


Abb. 4.16. Verschiebung der Leitwertspitzen. Für einen festen Basisfüllfaktor ν_0 nimmt das Magnetfeld von links nach rechts zu. Die Werte für $\nu(G_{\max})$ entstammen den Leitwertkurven aus Abb. 4.8. Für die Datenpunkte mit $\nu_0 = 4$ sind die Fehlergrenzen gemäß (4.22) angetragen. Die vertikale Differenz zweier Datenpunkte wird mit $\Delta\nu_B^{\text{exp}}$ bezeichnet und erfüllt die Gleichung (4.23).

schiedene Elektronendichten aufgezeichnet werden, um dann die Position der Leitwertspitzen auf der Skala des Füllfaktors zu analysieren.

Bereits aus der Auftragung von Abb. 4.8 erkennt man, daß die Position der Leitwertspitzen von der Stärke des Magnetfelds abhängig ist. Mit steigender Elektronendichte verschieben sich die Leitwertspitzen anfänglich in Richtung höherer Füllfaktoren. Für $U_g > 0,7\text{ V}$ erfolgt wieder eine Verschiebung zu kleineren Werten hin. Jedem Leitwertmaximum kann ein Basisfüllfaktor $\nu_0 = 2, 4, 6, \dots$ zugewiesen werden. Die Differenz zwischen der Maximumposition und dieser Kenngröße wird in Abb. 4.16 in Abhängigkeit der Elektronendichte bzw. der Steuerungsspannung dargestellt. In diesem Graphen nimmt bei festem ν_0 die magnetische Flußdichte B von links nach rechts zu, denn um das Fermi-Niveau in derselben Bandlücke zu halten, muß eine ansteigende Elektronendichte mit einer erhöhten Besetzungszahl $s = eB/h$ (Gl. 1.34) kompensiert werden. Wie der graphische Vergleich der einzelnen Kurven in Abb. 4.16 zeigt, entwickeln sich alle Leitwertspitzen in ähnlicher Weise. Tabelle 4.2 gibt eine Übersicht zu den experimentell und theoretisch bestimmten Eigenschaften einer repräsentativ herausgegriffenen Leitwertspitze.

Die bei niedrigen Elektronendichten auftretende Zunahme von $\nu(G_{\max}) - \nu_0$ (Abb. 4.16) rührt vom Anstieg der energetischen Lage der Landau-Bandlücken her, welcher in den Abschnitten 2.4.1 und 3.1.4 diskutiert und in Abb. 2.6b illustriert wurde. Der weiter unten stattfindende zahlenmäßige Vergleich zwischen experimentellen Daten und der Bandstruktur beschränkt sich auf Steuerungsspannungen mit $U_g \leq 0,5\text{ V}$. Unter dieser Vorgabe kann eine Verzerrung der Meßergebnisse aufgrund einer zu großen internen Vorspannung V_{bias} ausgeschlossen werden, da der Versatz beider Elektronensysteme für $U_g \leq 0,5\text{ V}$ mit $eV_{\text{bias}}/\hbar\omega_c < 5 \cdot 10^{-3}$ (Abb. 4.7) vernachlässigbar klein ist.

4.7.2(a) Interne Vorspannung

Die Positionen der Leitwertspitzen steigen bis $U_g = 0,7\text{ V}$ monoton an. Für größere Steuerungsspannungen wird der magnetfeldabhängige Anstieg von einem anderen Effekt überkompensiert, der nicht mit dem Magnetfeld korreliert ist. Das Absinken der Maximumpositionen ist eine Folge der internen Vorspannung V_{bias} , die sich zwischen beiden Elektronensystemen aufgrund des Leckstroms I_{gate} aus der Steuerelektrode aufbaut (Abschnitt 4.4). In Abschnitt 2.5

wurde anhand von Abb. 2.10b festgestellt, daß die Bandlücken im kathodenseitigen Elektronensystem mit steigender Vorspannung sich in Richtung kleinerer Energien verschieben. Die korrespondierenden Leitwertspitzen treten deshalb bei kleineren Füllfaktoren auf. Dieser Effekt wurde erstmals in [Kan00a] mit Hilfe einer *extern* angelegten Vorspannung nachgewiesen. Die Proben dieser Arbeit zeigen ein gleichartiges Verhalten, wenn eine genügend große *interne* Vorspannung V_{bias} anliegt, wie das in Abb. 4.16 für eine Steuerspannung $U_g \geq 0,7$ V etwa der Fall ist. Nach Abb. 4.7 steigt V_{bias} im Bereich $U_g = 0,7-1,0$ V von 1,4 auf 8,5 mV an. Der energetische Versatz eV_{bias} zwischen beiden Elektronensystemen ist also von der Größenordnung der Zyklotron-Energie $\hbar\omega_c \approx 1,7 \text{ meV} \cdot (B/1 \text{ T})$. Die Grenze zwischen steigenden und fallenden Maximumpositionen ist bei $U_g = 0,7$ V deshalb so scharf ausgeprägt, weil die Vorspannung mit U_g nahezu exponentiell ansteigt, so daß eine signifikante Änderung der Bandstruktur mit entsprechend beobachtbarer Erniedrigung der Maximumpositionen bei zunehmender Elektronendichte ziemlich abrupt eintritt.

Es ist nicht möglich, die Verschiebung der Leitwertspitzen ausschließlich in Abhängigkeit der internen Vorspannung zu untersuchen. Da sich mit $V_{\text{bias}}(U_g)$ gleichzeitig die Elektronendichte ändert, erfordert die Spektroskopie einer bestimmten Leitwertspitze das Nachführen des Magnetfelds, wodurch jedoch zusätzlich zu V_{bias} die Landau-Bandstruktur beeinflusst wird. Die Verzerrung der Bandstruktur aufgrund von V_{bias} kann also experimentell nicht unabhängig von der magnetfeldabhängigen Veränderung der Maximumpositionen untersucht werden. Trotz dieser Problematik soll auf einen zahlenmäßigen Vergleich mit dem Ergebnis von Kang *et al.* nicht verzichtet werden: Im Zuge der Spannungserhöhung von $U_g = 0,7$ V auf 1,0 V fällt die Position der Leitwertspitze mit $\nu_0 = 4$ in Abb. 4.16 um den Wert $\Delta\nu_B = 0,36$ ab. Der einhergehende Anstieg der internen Vorspannung von $\Delta V_{\text{bias}} = 7,1$ mV bedeutet bei einem Magnetfeld von $B = 2,5-3,3$ T bzw. der mittleren Zyklotron-Energie $\hbar\omega_c = 5,0$ meV eine Erhöhung der Potentialdifferenz um $\Delta(eV_{\text{bias}}) = 1,4 \hbar\omega_c$. Für eine solche Spannung zwischen beiden Elektronensystemen beträgt in [Kan00a, Fig. 2] die Position des ersten Leitwertmaximums $\nu = 1,04$ anstatt des Wertes $\nu = 1,35$ bei $V_{\text{bias}} = 0$. Die beobachtete Verschiebung $\Delta\nu_B = 0,31$ ist also von vergleichbarer Größe wie der Abfall der Maximumpositionen in Abb. 4.16.

Tab. 4.2. Vergleich zwischen der Position $\nu(G_{\text{max}})$ der Leitwertspitze mit dem Basisfüllfaktor $\nu_0 = 4$ (Abb. 4.16) und der korrespondierenden Bandlücke, die das ε_{1k} - und ε_{2k} -Band trennt (Abb. 2.6b). Die Ober- (ε_2^∇) und Untergrenzen (ε_1^\triangle) der Energielücke wurden mit Bandstrukturechnungen für das jeweilige Magnetfeld B bestimmt.

U_g [V]	n_\square [10^{11} cm^{-2}]	B [T]	$\nu(G_{\text{max}})$	ε_1^\triangle	ε_2^∇
0,4	1,16	1,15	4,13	2,062	2,072
0,5	1,89	1,84	4,24	2,078	2,091
0,6	2,49	2,25	4,58	2,086	2,100
0,7	2,95	2,56	4,77	2,092	2,107
0,8	3,18	2,84	4,63	2,097	2,113

4.7.2(b) Fehlerbetrachtung

Weiter unten werden quantitative Aussagen über den Anstieg der Maximumpositionen getroffen. Um deren Tragfähigkeit einschätzen zu können, ist die Kenntnis der Meßwertunsicherheiten erforderlich. Zunächst wird hierzu die Fehlerspanne für die Elektronendichte bestimmt, die in Abb. 4.16 auf der Abszisse angetragen ist und die auch in die Berechnung von $\nu(G_{\max})$ eingeht. Der Bestimmung von n_{\square} in Abschnitt 4.4 liegt die Größe $\Delta(1/B)$ zugrunde, also der mittlere Abstand der Extrema von Leitwertkurven, die gegen das reziproke Magnetfeld aufgetragen sind. Wenn für $\Delta(1/B)$ die Maxima von $R(B)$, die weder durch Stauchung (Abschnitt 4.6.1) noch durch eine Kurvenschulter (Abschnitt 4.7.1) gestört sind, verwendet werden, beträgt die Standardabweichung des statistischen Fehlers – abhängig von der jeweiligen Leitwertkurve – etwa 1 %. Dieser relative Fehler pflanzt sich gemäß (4.6) in gleicher Höhe in die Elektronendichte fort. Auf das Einzeichnen entsprechender horizontaler Fehlerbalken wurde in Abb. 4.16 jedoch verzichtet, da die Unsicherheit zu gering ist, als daß sie für die Analyse der Maximumpositionen von Relevanz wäre.

Die Position ν einer Leitwertspitze ist durch die Definition (1.35) des Füllfaktors gegeben, so daß für ihren relativen Fehler

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\Delta n_{\square}}{n_{\square}} + \frac{\Delta B}{B} \quad (4.22)$$

gilt. Bei einer Beschränkung auf Leitwertspitzen ohne Stauchung, kann deren Position bis auf $\Delta B \leq 20$ mT genau bestimmt werden. Da die Leitwertmaxima aufgrund ihrer äquidistanten Verteilung auf der reziproken Magnetfeldskala bei kleinen Feldstärken mit erhöhter Dichte auftreten, wird als mittlere Bezugsgröße für ΔB mit $B = 2$ T ein eher kleiner Wert angesetzt. Damit gilt $\Delta B/B = 1\%$ für den relativen Fehler der Maximumpositionen auf der Skala des Magnetfelds. Der Gesamtfehler (4.22) hat dann im Mittel den Wert $\Delta\nu/\nu = 2\%$. Die individuelle Fehlerspanne der Meßwerte für $\nu_0 = 4$ ist in Abb. 4.16 durch vertikale Fehlerbalken dargestellt. Für die übrigen Basisfüllfaktoren ist die Unsicherheit kleiner ($\nu_0 = 2$) bzw. größer ($\nu_0 > 4$), wobei auf die zugehörigen Fehlerbalken zur Wahrung der Übersichtlichkeit verzichtet wird. Die Betrachtung der Fehlergrenzen in Abb. 4.16 zeigt, daß die Unsicherheit $\Delta\nu$ zwar vorhanden ist, aber auch nicht den Kurvenverlauf $\nu(G_{\max})$ in Frage stellt, auf den sich die bisherigen und weiteren Überlegungen stützen.

4.7.2(c) Anstieg der Maximumpositionen

Die Positionen der Leitwertspitzen verschieben sich bis zu einer Steuerspannung von $U_g = 0,7$ V in Richtung höherer Füllfaktoren (Abb. 4.16). Die folgenden Betrachtungen beschränken sich jedoch in der Hauptsache auf den Bereich $U_g \leq 0,5$ V. Solchermaßen kann ausgeschlossen werden, daß infolge einer zu hohen internen Vorspannung die Bandstruktur wie in Abb. 2.10b verzerrt wird. Im Anfangsbereich der Steuerspannung sind die Maximumpositionen also allein durch die Magnetfeldabhängigkeit der Landau-Bandstruktur bestimmt. Das Verhalten der Leitwertspitze mit dem Basisfüllfaktor $\nu_0 = 2$ ähnelt sehr stark dem der Spitzen mit höherem Füllfaktor (Abb. 4.16). Weil die Stauchung dieser Leitwertspitze (Abb. 4.10a) die Ablesbarkeit ihrer Position erschwert, unterbleibt jedoch eine quantitative Analyse des Falles

$\nu_0 = 2$. Stattdessen wird stellvertretend für alle anderen Basisfüllfaktoren die Entwicklung der $\nu_0 = 4$ Leitwertspitze im Detail betrachtet, die zu der Energielücke zwischen den ε_{1k} - und ε_{2k} -Bändern korrespondiert (Abb. 2.6b). Diese Bandlücke tritt zweimal auf (Abb. 2.6a), und zwar aus Symmetriegründen in identischer Breite bei entgegengesetzter Kreiswellenzahl.

Tabelle 4.2 stellt die Positionen der $\nu_0 = 4$ Leitwertspitze dem Resultat entsprechender Bandstrukturrechnungen gegenüber. Die maßgebliche Bandlücke kann wahlweise durch die Grenzen ihrer Ausdehnung $[\varepsilon_1^\wedge; \varepsilon_2^\vee]$ oder ihre Position $(\varepsilon_1^\wedge + \varepsilon_2^\vee)/2$ und Breite $(\varepsilon_2^\vee - \varepsilon_1^\wedge)$ charakterisiert werden. Bei einer Erhöhung der Steuerspannung von $U_g = 0,4$ V auf $0,5$ V ist ein Anstieg des Magnetfelds von $B = 1,15$ T auf $1,84$ T erforderlich, um die höhere Elektronendichte zu kompensieren und das Fermi-Niveau in der $\varepsilon_{1k}/\varepsilon_{2k}$ -Bandlücke zu halten. Dieser Zusammenhang ist gleichbedeutend mit der Verschiebung der Leitwertspitze um $\Delta\nu_B^{\text{exp}} = 0,11$ (Tab. 4.2). Entsprechende Bandstrukturrechnungen ergeben, daß das stärkere Magnetfeld dazu führt, daß der Mittelpunkt $(\varepsilon_1^\wedge + \varepsilon_2^\vee)/2$ der Landau-Bandlücke um $\Delta\varepsilon_B = 0,018$ ansteigt (Tab. 4.2). Die Umrechnung dieser Energieverschiebung auf die Skala des Füllfaktors (Gl. 3.1) führt zum doppelten Wert $\Delta\nu_B^{\text{theo}} = 0,036$. Mit einem anderen Datensatz, der in Abb. 4.10a dargestellt ist und bei dem die Amplitude des Magnetfelds aufgrund abweichender experimenteller Bedingungen leicht verschoben ist, erhält man den Anstieg $\Delta\nu_B^{\text{exp}} = 0,06$ anstatt von $2\Delta\varepsilon_B^{\text{theo}} = 0,026$. Bevor konkrete Schlüsse aus dem Vergleich zwischen $\Delta\nu_B^{\text{theo}}$ und $\Delta\nu_B^{\text{exp}}$ gezogen werden, ist es geboten, den Einfluß von Meßfehlern auf die Verschiebung der Leitwertspitzen zu betrachten.

4.7.2(d) Signifikanz der Beobachtung

Selbst wenn in Abb. 4.16 die volle Fehlerspanne für zwei herausgegriffene Datenpunkte in entgegengesetzter Richtung ausgeschöpft wird, kann eindeutig auf einen Anstieg der Maximumpositionen geschlossen werden. Dies gilt zumal dann, wenn man höhere Steuerspannungen als $U_g = 0,5$ V betrachtet und dabei berücksichtigt, daß eine endliche interne Vorspannung auf $\Delta\nu_B^{\text{exp}}$ kompensierend und nicht verstärkend wirkt. Aus Sicht der Meßungenauigkeiten besteht also kein Zweifel daran, daß der rechnerisch vorhergesagte Anstieg der Bandlücken im Experiment zumindest qualitativ nachgewiesen ist.

Neben der Bedeutung der Meßfehler ist noch die Tatsache zu untersuchen, daß die Auftragung in Abb. 4.16 hinsichtlich n_\square und $\nu(n_\square, B)$ von dem Teilergebnis (4.6) der Theorie abhängt, die es mit dem Experiment zu bestätigen gilt. In Abschnitt 3.1.4 wurde bei der Frage nach der Äquidistanz der Landau-Bandlücken bereits mit dem Nachweis begonnen, daß diese Verschränkung keinen grundsätzlichen Zielkonflikt darstellt. Die Überlegungen können nun unter Verwendung von experimentellen Ergebnissen fortgeführt werden. Wenn $\Delta\varepsilon$ der Abstand aufeinanderfolgender Landau-Bandlücken ist, berechnet sich der Anstieg einer Leitwertspitze bei der Erhöhung des Magnetfelds von B_1 auf B_2 nach (Gln. 1.35 und 4.6)

$$\Delta\nu_B^{\text{exp}} = \nu_2 - \nu_1 = 2\Delta\varepsilon \left(\frac{1}{\Delta(1/B)_2 B_2} - \frac{1}{\Delta(1/B)_1 B_1} \right). \quad (4.23)$$

Die Gültigkeit dieser Beziehung beruht auf dem Umstand, daß die Leitwertspitzen kollektiv gegenüber ganzzahligen Füllfaktoren verschoben sind. Diese Eigenschaft und die damit im-

plizierte Äquidistanz der Leitwertspitzen wird durch Abb. 4.15 sowohl mit den Daten von Kang *et al.* als auch mit denen dieser Arbeit experimentell bestätigt. Selbst wenn die anhand von Bandstrukturrechnungen in Abschnitt 3.1.4 bestimmte und mit (4.4) auf den Mittelwert $\Delta\varepsilon = 1,01$ festgelegte Energiedifferenz deutlich von der Realität abweichen sollte,²³ würde dies nichts an der Tatsache ändern, daß Gleichung (4.23) einen signifikanten magnetfeldabhängigen Anstieg der Leitwertspitzen ergibt.

Etwas schwieriger zu beurteilen als eine Änderung von $\Delta\varepsilon$ ist die Auswirkung der geringen Magnetfeldabhängigkeit, die in dieser Größe beinhaltet ist. Der Zusammenhang zwischen $\Delta\varepsilon$ und B wurde in Abschnitt 3.1.4 besprochen, fand bisher jedoch noch keine Berücksichtigung. Die empirischen Gleichungen (3.5) besagen, daß der Abstand $\Delta\varepsilon$ zwischen zwei Bandlücken bei der Magnetfelderhöhung $1,84 \text{ T} \rightarrow 2,84 \text{ T}$ von 1,007 auf 1,009 ansteigt. Die Extrapolation auf den ersten Datensatz von Tab. 4.2 ergibt $\Delta\varepsilon = 1,0056$ für $B = 1,15 \text{ T}$. Um den Einfluß der feldabhängigen Veränderung von $\Delta\varepsilon$ abzuschätzen, ist statt (4.23) die präzisierte Formel

$$\Delta\nu_B^{\text{exp}} = 2 \left(\frac{\Delta\varepsilon_2}{\Delta(1/B)_2 B_2} - \frac{\Delta\varepsilon_1}{\Delta(1/B)_1 B_1} \right). \quad (4.24)$$

zu verwenden. Während $\Delta\varepsilon$ in (4.23) ein Mittelwert für alle Steuerspannungen ist, wird mit den Parametern $\Delta\varepsilon_i$ der Tatsache Rechnung getragen, daß mit steigender Steuerspannung alle Leitwertspitzen in Richtung höherer Magnetfelder verschoben werden,²⁴ wodurch sich gemäß (3.5) auch der Abstand der Bandlücken auf der Skala der Zyklotron-Energie geringfügig vergrößert. An Stelle des Resultats $\Delta\nu_B^{\text{exp}} = 0,1101$ der Gleichung (4.23) erhält man mit (4.24) für $\Delta\varepsilon_1 = 1,0056$ und $\Delta\varepsilon_2 = 1,007$ eine Verschiebung um $\Delta\nu_B^{\text{exp}} = 0,1155$. Die Berücksichtigung der Magnetfeldabhängigkeit von $\Delta\varepsilon$ führt also zu einer sehr kleinen Erhöhung von $\Delta\nu_B^{\text{exp}}$. Das Vernachlässigen der feldabhängigen Komponente von $\Delta\varepsilon$ in Gleichung (4.23) scheidet folglich als eine mögliche Ursache für einen Anstieg der Leitwertspitzen aus. Es ist vielmehr so, daß der in Abb. 4.16 sichtbare Anstieg aufgrund der Verwendung von (4.23) sogar noch etwas niedriger (für die Beispieldaten von oben: etwa 5 %) ist, als das bei Berücksichtigung der geringen feldabhängigen Zunahme von $\Delta\varepsilon$ der Fall wäre.

4.7.2(e) Fazit

Trotz der nicht geringen Meßfehler und des komplexen Zusammenhangs zwischen Maximumpositionen, Elektronendichte und der Verteilung der Landau-Bandlücken auf der Energieskala ist es im Rahmen der bis dato entwickelten Theorie möglich, in Abb. 4.16 sowohl

²³Für eine mögliche Bezifferung einer solchen Abweichung wird auf den Abstand $\Delta\nu = 1,37$ der Leitwertspitzen in der Arbeit von Kang *et al.* verwiesen. Dieser Wert läßt sich nicht mit den in Kapitel 2 berechneten Bandstrukturen in Einklang bringen (Abschnitt 4.7.1). Trotzdem würde bei einer ähnlich großen Abweichung auf der Energieskala, etwa $\Delta\varepsilon = 1 \pm 0,37$, ein endlicher Anstieg $\Delta\nu_B^{\text{exp}}$ gemäß (4.23) nur skaliert werden, jedoch nicht verschwinden.

²⁴Diese Verschiebung ist eine Folge davon, daß die vermehrte Elektronendichte durch eine höhere Besetzungszahl s (Gl. 1.34) kompensiert werden muß. Sie tritt also unabhängig von einer etwaigen Verschiebung der Leitwertspitzen auf der Skala des Füllfaktors auf. Es wird darauf hingewiesen, daß auch Gleichung (4.24) noch eine Näherung beinhaltet: Sie verwendet nämlich $\Delta(1/B)_i$, also den mittleren Abstand der Bandlücken bei fester Elektronendichte. Eine absolut näherungsfreie Bestimmung von $\Delta\nu_B^{\text{exp}}$ wäre nur mit einer Probenstruktur möglich, die eine Messung der Elektronendichte völlig unabhängig vom Geschehen an der Tunnelbarriere erlaubt.

den Anstieg der Maximumpositionen als auch den folgenden Abfall nachzuvollziehen. Deutlich kann zwischen der feldabhängigen kollektiven Verschiebung aller Bandlücken und der wesentlich schwächeren Feldabhängigkeit ihres Abstands $\Delta\varepsilon$ unterschieden werden. Letzterer Effekt ist zu vernachlässigen, wie der Vergleich zwischen (4.23) und (4.24) zeigt. Die mit dem Magnetfeld stärker werdende gleichzeitige Anhebung aller Bandlücken kann im Experiment bis $U_g = 0,7\text{ V}$ in Form eines Anstiegs der Position der Leitwertspitzen auf der Skala des Füllfaktors beobachtet werden. Für die Leitwertspitze mit dem Basisfüllfaktor $\nu_0 = 4$ beträgt das Verhältnis zwischen experimentell und theoretisch bestimmter Verschiebung $\Delta\nu_B^{\text{exp}}/\Delta\nu_B^{\text{theo}} = 2,7 \pm 0,4$. Der Grund für den merklichen Unterschied zwischen erwarteter und tatsächlicher Verschiebung der Maximumpositionen ist noch ungeklärt. Als Ursache kommt vor allem die bisher nicht berücksichtigte Coulomb-Wechselwirkung der gegenüberliegenden Randkanäle in Frage, die mit abnehmender magnetischer Länge an Stärke gewinnt.²⁵ Der für $U_g > 0,7\text{ V}$ auftretende Abfall der Maximumpositionen wird auf die interne Vorspannung zurückgeführt, die aufgrund ihres nahezu exponentiellen Anstiegs ab diesem Schwellenwert eine energetische Verschiebung der gekoppelten Elektronensysteme in der Größenordnung der Zyklotron-Energie bewirkt.

²⁵Vgl. Abschnitt 3.1.3. Die dort diskutierten Arbeiten [Mit01, Kol02] behandeln nur die Breite, nicht jedoch die absolute Position der Landau-Bandlücken.

Kapitel 5

Halbleitertechnologische Aspekte

Im letzten Kapitel werden Aspekte der Probenherstellung diskutiert, für die besondere Untersuchungen und Optimierungen notwendig waren, um die Ausbeute und Reproduzierbarkeit des aufwendigen CEO-Prozesses zu erhöhen. Aufgrund der zusätzlichen Gestaltungsmöglichkeiten, die die Methode des Überwachsens von Spaltflächen bietet, kann häufig auf eine photolithographische Strukturierung der Proben verzichtet werden. So auch in dieser Arbeit, wobei allerdings eine Ätzstufe zur Freilegung des Rückkontakts mit den einfachen Mitteln eines Chemielabors hergestellt wurde. Neben dem Erreichen präziser Ätztiefen widmet sich dieses Kapitel der Entstehung und Reduzierung von ovalen Defekten sowie der Eichung der Volumendotierung mit Silizium. Zum Abschluß wird kurz auf die Anbringung hochwertiger Initialritze für die CEO-Methode eingegangen.

5.1 Ovale Defekte

Seit Anfang der 80er Jahre ist die Molekularstrahlepitaxie (MBE) als routinemäßige Herstellungsmethode von GaAs/AlGaAs-Heterostrukturen etabliert. Seitdem wird beim (001)-Wachstum auch die Bildung und Vermeidung von sog. ovalen Defekten diskutiert. Die Epitaxieschichten im AlGaAs-Materialsystem können heute mit einer Reinheit und kristallinen Qualität hergestellt werden, die bei anderen Halbleiterverbindungen bei weitem nicht zu erreichen sind. Trotzdem sind die makroskopischen (Größenordnung: $1\ \mu\text{m}$) ovalen Defekte noch ein allgemein gegenwärtiges Problem. Dabei ist bemerkenswert, daß gerade nicht diese augenfälligen Kristallfehler, sondern vor allem andere Faktoren wie etwa der Einbau von Fremdatomen limitierend auf die Beweglichkeit zweidimensionaler Elektronensysteme wirken. Zur Steigerung der Beweglichkeit werden sogar Wachstumsmodi gewählt, die mit einer höheren Dichte an ovalen Defekten einhergehen. Letztere sind allerdings sehr störend, wenn eine photolithographische Strukturierung auf kleinen Skalen erforderlich ist. Dies ist einer der Gründe, weshalb bei der industriellen Fertigung meist auf die metallorganische Gasphasenepitaxie (engl. *metal organic chemical vapor deposition*, MOCVD) ausgewichen wird. Die ovalen Defekte stellen auch einen potentiellen Störfaktor dar, wenn anstatt des lateralen Stromflusses in einem (001)-2DES ein vertikaler Transport wie in den CEO-Strukturen dieser Arbeit stattfindet (Abschnitt 4.1). Deshalb wurden sowohl die Defekte an sich als auch die Möglichkeiten zu ihrer Reduzierung untersucht.

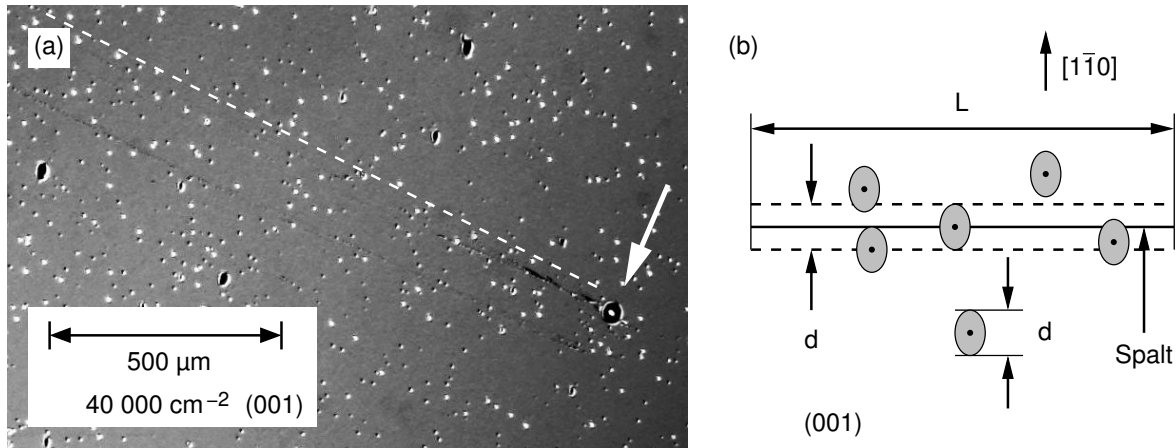


Abb. 5.1. (a) Lichtmikroskopische Aufnahme des Wafers D031119A bei 50-facher Vergrößerung. Der Pfeil zeigt auf ein Galliumtröpfchen. Die gestrichelte Linie verläuft parallel zu der Spur, die zu diesem Tröpfchen führt. Weiter unten ist noch eine weitere, parallel verlaufende Spur zu erkennen. (b) Skizze zur Abschätzung der Anzahl von ovalen Defekten, die im Mittel von einem Spalt der Länge L angeschnitten werden.

5.1.1 Morphologie

Ovale Defekte lassen sich, wenn sie in hoher Dichte auftreten, bereits mit bloßem Auge aufgrund der veränderten Reflexionseigenschaften der Kristallscheibe erkennen. Das Auszählen der Defekte geschieht am zweckmäßigsten an lichtmikroskopischen Bildern der Vergrößerung 5×10 (Objektiv \times Okular) innerhalb von Fenstern der Größenordnung eines Quadratmillimeters. Der in Abb. 5.1a gezeigte Wafer weist ovale Defekte mit einer Dichte von $n_{\text{od}} = 40\,000\text{ cm}^{-2}$ auf. Auf seiner Oberfläche befinden sich zudem etwa zehn größere Galliumtröpfchen pro Quadratzentimeter. Die Tröpfchen befinden sich häufig am Ende einer feinen Galliumspur und lassen sich deshalb klar als das Ergebnis von Spritzern aus dem Galliumtiegel (Abschnitt 5.1.2) identifizieren.

Die Anzahl der beim Spaltvorgang zerteilten ovalen Defekte kann anhand der Skizze 5.1b abgeschätzt werden. Die Defekte haben typischerweise eine Ausdehnung von $d = 10\ \mu\text{m}$ (siehe weiter unten), wobei ihre Längsachse entlang der $[1\bar{1}0]$ -Richtung ausgerichtet ist. Beim Spalten eines Kristallstücks der Länge L werden im Mittel Ldn_{od} Defekte angeschnitten. Im Fall von Abb. 5.1a hätte man somit $dn_{\text{od}} = 4\text{ mm}^{-1}$ Defekte pro Länge der Spaltfläche. Bei dieser Dichte ist es nicht einfach, einen defektfreien Streifen der Breite 0,5 mm aus einem CEO-Stück zu gewinnen. Neben der ungünstigen Statistik ist vor allem die Tatsache problematisch, daß wegen der lateralen Auflösung des Lichtmikroskops von $\sim 0,25\ \mu\text{m}$ bei der Begutachtung der Spaltfläche niedrige oder an ihren Flanken gespaltene ovale Defekte nicht zu entdecken sind. Weiterhin bereitet das begrenzte Sichtfeld von Mikroskopen Schwierigkeiten bei der genauen Lokalisierung eines ovalen Defekts. Um herauszufinden, welchen Einfluß die Defekte an der Spaltfläche und/oder auf dem Rest eines CEO-Stücks auf die elektronischen Eigenschaften einer Probe tatsächlich haben, ist eine systematische Untersuchung mit unterschiedlichen Parametern für den ersten Wachstumsschritt erforderlich. Wegen des entsprechend hohen Aufwandes und der ohnehin großen Streuung der Qualität von fertig prozessierten Proben

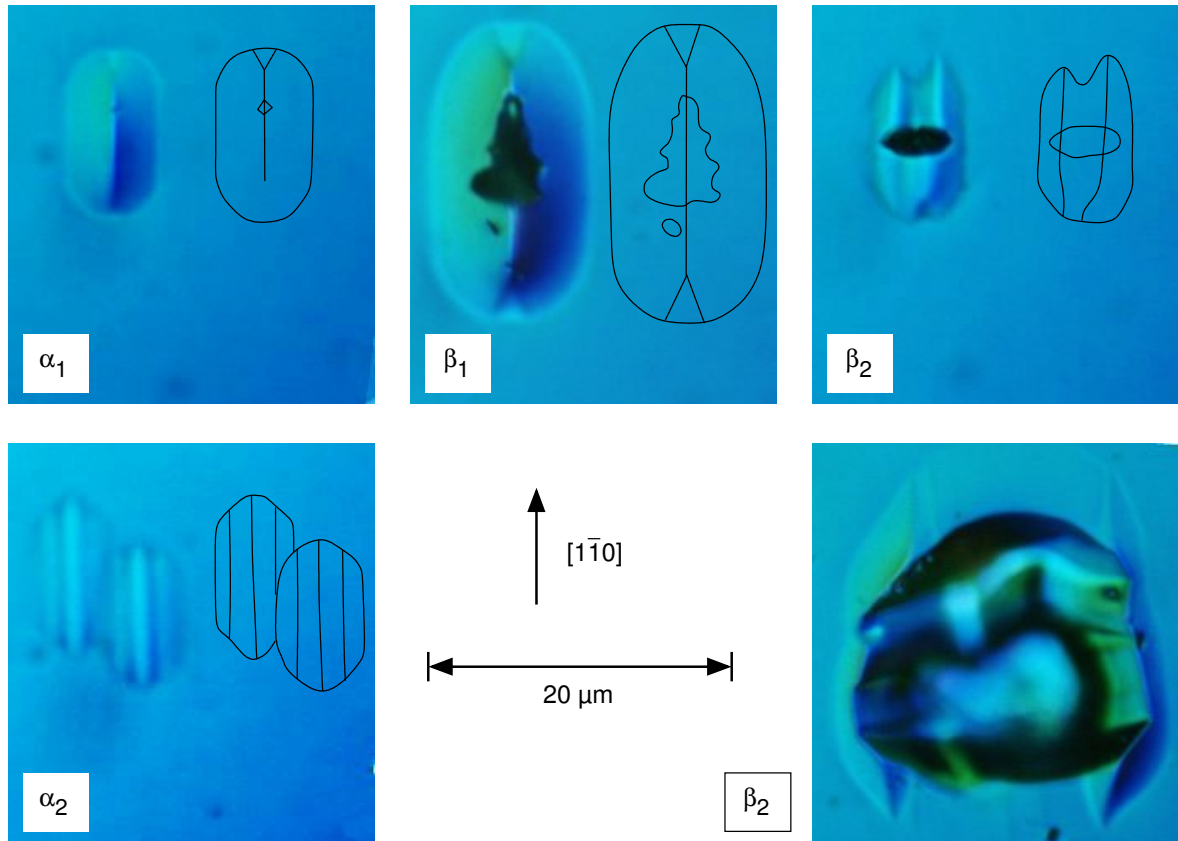


Abb. 5.2. Ovale Defekte auf der Probe D031119A in 1000-facher Vergrößerung im Nomarski-Modus. Die Skizzen verdeutlichen jeweils Umrisse und Kanten der Erhebungen. Die beiden Defekte vom Typ α_2 überlappen hier nur zufällig.

wurde jedoch auf eine solche Studie verzichtet. Stattdessen wurde in Zusammenarbeit mit Hans-Peter Tranitz und Werner Wegscheider das Ziel verfolgt, die Dichte an ovalen Defekten zu reduzieren.

Für alle auftretenden Arten der ovalen Defekte sind in Abb. 5.2 stellvertretend einige Exemplare herausgegriffen. Die Aufnahmen entstanden mit Nomarski-Mikroskopie. Der mittels Polarisator und Analysator hergestellte Phasenkontrast beruht im Nomarski-Modus nicht nur auf einer Polarisationsdrehung, die bei Halbleiterschichten eher gering ausfällt, sondern er gibt vor allem Höheninformation wieder, die aus zwei parallelen und zueinander versetzten Strahlen unter Einsatz eines Wollaston-Prismas entsteht [Abl04]. Die im folgenden festgelegte Klassifizierung der ovalen Defekte orientiert sich an derjenigen aus [Fuj87] (vgl. auch [Baf83] und [Lee88]). Defekte in rein kristalliner Qualität werden mit α_i und solche mit einem makroskopischen und amorphen Kern mit β_i gekennzeichnet. Die Längsachse aller Defekte fällt mit der $[1\bar{1}0]$ -Richtung des Kristalls zusammen und ihre Länge variiert zwischen 8 und 25 μm , wobei die Dicke der Epitaxieschichten 3 μm beträgt.

Als Ursachen für die Entstehung von ovalen Defekten wurden in der Vergangenheit hauptsächlich das Galliumoxid, das in der Schmelze möglicherweise vorhanden ist, und die Kontamination der Substratoberfläche mit Kohlenstoff oder Galliumtröpfchen angeführt. Bei den Tröpfchen wiederum stand die Anlagerung von metallischem Gallium an Nukleationszen-

tren [Pet84] sowie die Entstehung durch Galliumspritzer aus der Effusionszelle [Tak91] zur Debatte. Letzterer Effekt spielt mittlerweile eine zentrale Rolle in der Diskussion über ovale Defekte, und er wird auch in dieser Arbeit als der entscheidende Faktor in der Regensburger Hochbeweglichkeitskammer angesehen, in der Kontaminationseffekte praktisch ausgeschlossen werden können.

Der klassische ovale Defekt ist in Abb. 5.2 α_1 zu sehen. Seine Form weicht von einer Ellipse insofern ab, als seine Begrenzung zur Linken und Rechten nur schwach bis gar nicht gekrümmt ist. Die Erhebung α_1 weist entlang ihrer vertikalen Symmetrieachse einen scharfen Grat auf, der oben und unten aufspaltet, so daß kleine dreieckige Facetten (besser bei β_1 zu sehen) entstehen. Letztere sind eventuell arsenterminierte $\{1\bar{1}1\}$ -Flächen, deren Wachstum bei einem Überangebot von Gallium bevorzugt sein sollte. Häufig hat der Grat eine kleine Vertiefung, die wohl in Zusammenhang mit einem Galliumtröpfchen steht, das beim Entstehen dieses Defektes aufgebraucht wurde. Bei (001)-Wachstumsbedingungen hat der Materialfluß des Arsens (As_4) einen etwa 20-fach höheren Partialdruck (engl. *beam equivalent pressure*, *BEP*) als der des Galliums. Aufgrund des starken Überangebots an Arsen kommt es unter einem Galliumtröpfchen zu einer erhöhten Wachstumsrate. Ähnlich wie beim Gas-Flüssigkeit-Festkörper-Wachstumsmechanismus (engl. *vapour-liquid-solid*, *VLS*) adsorbiert das Arsen auf dem flüssigen Metall. Hierbei bildet sich an der Oberfläche keine GaAs-Kruste, wie das zum Beispiel bei Galliumtröpfchen auf dem Wachstumshalter aus Tantal zu beobachten ist, sondern es ist energetisch günstiger, wenn das Arsen in den darunterliegenden Kristall eingebaut wird.¹ Die Anisotropie der ovalen Defekte kann durch die Oberflächendiffusion von Gallium bedingt sein, die in der $\langle 1\bar{1}0 \rangle$ -Richtung stärker ist als entlang von $\langle 110 \rangle$ [Fuj87]. Der rein kristalline Defekt vom Typ α_2 zeichnet sich durch seine offenbar geringe Höhe und die Welligkeit des Phasenkontrastes aus, die drei stark abgerundete Grate vermuten läßt. In der Literatur konnten keine Hinweise auf das Auftreten einer solchen Ausprägung gefunden werden.

Von den ovalen Defekten mit Kern, die also der Klasse β zugehören, sind drei Exemplare in Abb. 5.2 dargestellt. Der Typ β_1 unterscheidet sich von α_1 nur durch einen Kern, bei dem es sich offenbar um ein unregelmäßig geformtes Galliumtröpfchen handelt. Dabei ist unklar, ob dieses von einer dünnen GaAs-Kruste überzogen ist, die ein weiteres Wachstum des ovalen Defektes behindern würde. Zur Klärung dieser Frage wäre eine Untersuchung im Rasterelektronenmikroskop unter Einsatz eines EDS-Detektors notwendig, um eine röntgenspektroskopische, chemische Analyse (engl. *energy dispersive X-ray spectroscopy*, *EDS* oder *EDX*) vornehmen zu können [Lee88, Meh92]. Der Typ β_2 ist dadurch gekennzeichnet, daß sich unter einem Galliumtröpfchen gleich zwei sich überlappende ovale Defekte ausbilden. Er tritt weitaus seltener als β_1 auf, wird aber beispielsweise in [Fuj87] erwähnt. Wie aus Abb. 5.3a $_1$ und a $_2$ zu erkennen ist, ließ sich der Kern auf einem β -Defekt mit einem Kupferdraht, der sehr viel weicher als kristallines GaAs ist, mechanisch verändern. Auch die während der Prozedur unterhalb des Defekts entstandenen kleinen Galliumtröpfchen sind

¹In [Baf83] wird berichtet, daß dieser Effekt bei leichtem Überschuß an Gallium (als Materialfluß) zum Wachstum von Nadeln anstatt von ovalen Defekten führt. Gezielte Herstellung von Nanodrähten ist unter Verwendung von Goldpartikeln möglich [Sam04, Wac06].

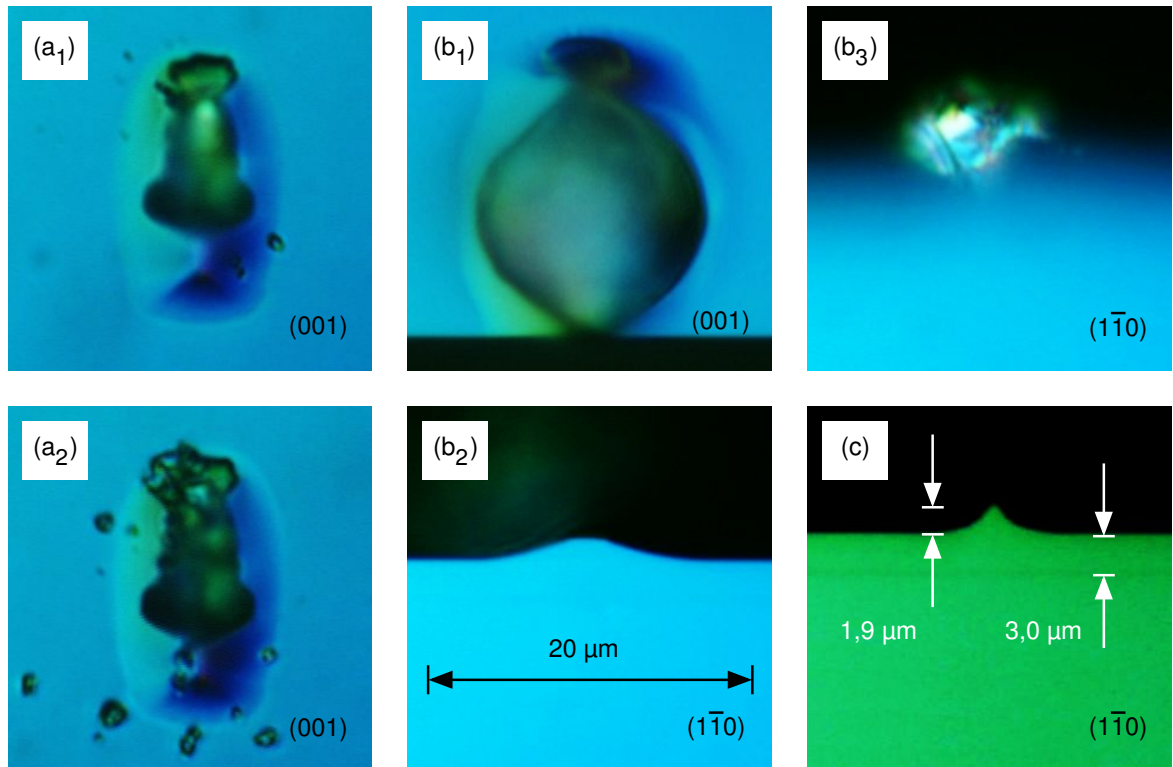


Abb. 5.3. Zum Nachweis von Galliumtröpfchen auf β -Defekten. Die Nomarski-Aufnahmen in 1000-facher Vergrößerung stammen von der Probe D031119A. Das Längenmaß in (b₂) gilt für alle Teilbilder. (a) Defekt vor (a₁) und nach (a₂) der mechanischen Manipulation mit einem feinen Kupferdraht. (b) Ein Defekt, dessen unterer Teil weggespalten wurde (b₁). Im Querschnitt (b₂) erscheint er als Erhebung ohne jede makroskopische Kristallstörung. Bei Verschiebung der Fokalebene nach hinten (b₃) wird das metallisch glänzende Galliumtröpfchen sichtbar. (c) Ein anderer, mittig gespaltenen Defekt. Die Längenangaben beziehen sich auf seine Höhe und die Dicke der epitaktisch gewachsenen Schichten.

ein weiterer Hinweis auf das Material des Kerns. Der gesplante β -Defekt aus Abb. 5.3b₁ bis b₃ läßt eine scharfe Trennung zwischen dem Kern und dem darunterliegenden Defekt erkennen. Insbesondere wird bestätigt, daß der eigentliche ovale Defekt durch epitaktisches Wachstum zustande kommt. Der Schnitt durch einen anderen Defekt in Abb. 5.3c zeigt, daß die Höhe der Defekte größenordnungsmäßig die Dicke der gewachsenen Schichten erreichen kann. In [Fuj87] wird mittels rasterelektronenmikroskopischer Aufnahmen demonstriert, daß ovale Defekte kein Oberflächenproblem darstellen, sondern mit einer erhöhten Schichtdicke der darunterliegenden Lagen einhergehen.

Zusammenfassend kann festgehalten werden, daß die hier dokumentierten Wachstumsfehler der Kristalloberfläche sehr gut mit dem in der Literatur gezeichneten Bild der ovalen Defekte übereinstimmen. Die β -Defekte sind von einem Galliumtröpfchen bedeckt, das eine erhöhte Wachstumsrate bewirkt. Der β -Typ wird hier also als Vorläufer von ovalen Defekten des Typs α angesehen, bei denen das metallische Gallium während des Wachstums vollständig aufgezehrt wurde. Die Entstehungsursache der Galliumtröpfchen wird im folgenden Abschnitt diskutiert.

5.1.2 Einfluß der Effusionszelle

Die beiden in der MBE-Anlage installierten Tiegel zur Effusion von Gallium liegen in zwei unterschiedlichen, in Abb. 5.4 dargestellten Ausführungen vor. Ohne den Einsatz der jeweiligen oberen Heizung ergibt die Standardquelle eine niedrigere Defektdichte als die SUMO-Zelle. Letztere zeichnet sich durch einen besonders kleinen Öffnungsquerschnitt und eine zylindrische Grundform aus, die einen radialsymmetrischen Fluß bei geringer Abhängigkeit vom Füllstand ermöglichen. Im Rahmen dieser Arbeit wurde nur das Verhalten der SUMO-Zelle systematisch untersucht, da diese bauartbedingt bei richtiger Beheizung beider Filamente die geringste Defektdichte ergibt. Bei einer Zelle, die über ihre gesamte Länge gleichmäßig beheizt wird, ist die Öffnung aufgrund der erhöhten Strahlungsverluste deutlich kühler als der Rest des Tiegels. Das verdampfte Material schlägt sich deshalb im Bereich der Öffnung zum Teil nieder, falls diese nicht zusätzlich beheizt wird.

In der Literatur ist es unbestritten, daß die Tröpfchen auf der Öffnung in Zusammenhang mit den Galliumspritzen auf dem Substrat stehen. Der zugrundeliegende Mechanismus ist allerdings nicht vollständig geklärt. Eine Möglichkeit, die auch der Hersteller der Zellen unter Bezug auf [Sch89] bzw. [Woo81] anführt, ist das Zurückgleiten der Tröpfchen in die heiße Schmelze, wobei es aufgrund des absorbierten Arsens und dessen hohen Dampfdrucks zu heftigem Sieden und Verspritzen von Gallium kommt. Dieser Auffassung ist jedoch entgegenzuhalten, daß zumindest in unserer Anlage die Temperatur der Zellenöffnung mit mindestens 872 °C (siehe weiter unten) so hoch ist, daß die Niederschlagung von elementarem Arsen unmöglich ist (Sublimation bei 616 °C).

In [Tak91] wird das Zurückfallen der Tröpfchen von der Zellenöffnung sogar ausgeschlossen, da das Wachstum eines GaAs-Mantels um die Tröpfchen beobachtet wurde, der sich im Rasterelektronenmikroskop als eine in mehrere Schalen zerbrochene Hülle darstellt. Die Autoren gehen nicht weiter auf einen möglichen alternativen Entstehungsmechanismus der Galliumspritzen ein. Wir vermuten, daß die Tröpfchen auf der Öffnung des Tiegels spontan „explodieren“, wobei der Einfluß einer möglichen GaAs-Kruste unklar ist. Bei vollständiger Ummantelung könnten Temperaturschwankungen zum Beispiel aufgrund der Shuttertätigkeit zu Änderungen der Druck- und Spannungsverhältnisse im Tröpfchen führen und so sein Zerplatzen verursachen. Die SUMO-Zelle bietet den Vorteil, daß ihre kleine Öffnung im Vergleich zum Standardtiegel eine gute Abschirmung vor den im Inneren entstehenden Galliumspritzen bewirkt.

Die Regensburger III-V-Epitaxieanlage ist unter anderem zur Erreichung höchster Beweglichkeiten konzipiert [Rei06]. Dieses Ziel wird vor allem durch die Minimierung des Einbaus von Fremdatomen erlangt. Der Partialdruck der Verunreinigungen in der Wachstumskammer ist – abgesehen von der Dichtheit der Vakuumapparatur – durch die installierte Saugleistung und die verwendeten Materialien bestimmt. Da die ovalen Defekte in direktem Zusammenhang mit der Galliumzelle stehen, kann ihr Entstehen nur durch die Heizleistung der beiden Filamente beeinflusst werden. Eine erhöhte Temperatur des PBN-Tiegels und der übrigen Teile der Zelle kann zum verstärkten Ausgasen von Fremdatomen führen, so daß bei Maßnahmen zur Verringerung der Anzahl an ovalen Defekten gleichzeitig die mikroskopische Qualität der

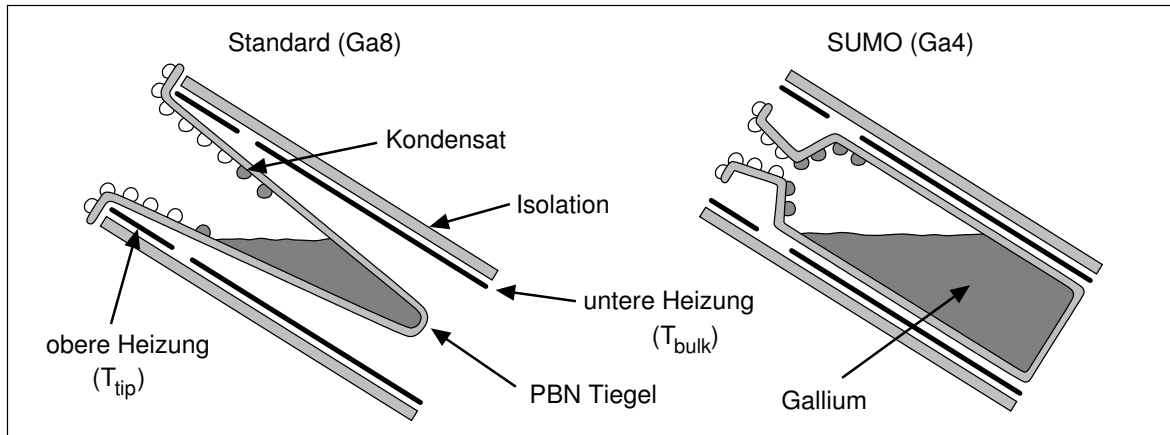


Abb. 5.4. Schemazeichnungen der beiden Gallium-Effusionszellen in der Hochbeweglichkeitskammer. Flüssiges Gallium befindet sich in einem Tiegel aus pyrolytischem Bornitrid (PBN), der im Falle der Standardzelle kelchförmig und bei der SUMO[®]-Zelle flaschenförmig ausgeformt ist. Zur Heizung des unteren Teils des Tiegels und dessen Öffnung existiert jeweils ein Tantaldraht-Filament. An den Tiegelwänden sind kondensierte Galliumtröpfchen skizziert. Bei hinreichend hoher Temperatur T_{tip} der oberen Heizung verschwinden im Bereich der Öffnung diejenigen Tröpfchen, die in der Zeichnung durch offene Symbole dargestellt sind.

gewachsenen Schichten überwacht werden muß. Die Fremdatome haben in den hergestellten Proben eine viel zu geringe Dichte, als daß sie mit spektroskopischen Methoden nachweisbar wären. Dahingegen ist die Beweglichkeit (Gl. 1.5) der Leitungsbandelektronen ein sehr empfindliches Maß für die Dichte der Störstellen, die durch Fremdatome verursacht werden. Um die Beweglichkeit im intrinsischen Halbleiter messen zu können, wurden bei den Versuchen zur Verringerung der Defektdichte Strukturen gewachsen, die ein modulationsdotiertes 2DES entlang einer GaAs/AlGaAs-Grenzfläche (engl. *modulation-doped single interface*, MDSI) enthalten.

Vor der Durchführung zweier Versuchsreihen (Tab. 5.1) wurde einmalig das gesamte auf der Öffnung der SUMO-Zelle befindliche Gallium weggeheizt, welches sich dort im Laufe von mehreren Monaten angesammelt hatte. Hierzu war die obere Heizung etwa zwölf Stunden bei ca. 175 Watt in Betrieb, wobei an der Öffnung zwischen 1120 und 1140 °C vorherrschten. Bei diesen Temperaturen hat Gallium einen Dampfdruck von $1,3 \cdot 10^{-2}$ mbar. Ein Sichtfenster ermöglichte die Beobachtung der Zellenöffnung während des Heizvorgangs.

Als die Öffnung tröpfchenfrei war, wurde eine erste vierteilige Versuchsreihe (Tab. 5.1, D040315A bis D040316B) begonnen, die in der sukzessiven Erniedrigung der Öffnungstemperatur T_{tip} bestand. Eine entsprechende Erhöhung der Leistung der unteren Heizung gewährleistete eine weitgehend konstante Wachstumsrate von $R = (2,83 \pm 0,07) \text{ \AA}/\text{sec}$. Auch bei abgeschalteter Heizung der Zellenöffnung wurde $T_{tip} = 872 \text{ °C}$ nicht unterschritten. Mit einer frisch gereinigten und auf 1080 °C geheizten Zellenöffnung läßt sich eine äußerst geringe Defektdichte von 500 cm^{-2} erreichen. Die Absenkung auf 1040 °C bewirkt bereits eine Erhöhung auf 3000 Defekte pro cm^2 . Die angegebenen Temperaturen wurden mit zwei Thermoelementen gemessen, die in direktem Kontakt zum oberen bzw. unteren Teil des PBN-Tiegels stehen. Wenn die Zellenöffnung tatsächlich durchweg um 120 °C heißer als der untere Teil des Tiegels

Tab. 5.1. Chronologisch geordnete² Ergebnisse zweier Versuchsreihen mit der SUMO-Zelle. Alle 2DES-Strukturen unterscheiden sich nur durch den Abstand Δ der Modulationsdotierung von der GaAs/AlGaAs-Grenzfläche. Die Leistung P gibt die Summe der oberen und unteren Heizleistung an.

Probe	T_{bulk} [°C]	T_{tip} [°C]	P [W]	Δ [Å]	n_{od} [$\frac{1}{\text{cm}^2}$]	μ [$10^6 \frac{\text{cm}^2}{\text{Vs}}$]	n_{\square} [$10^{11} \frac{1}{\text{cm}^2}$]
D040315A	910	1080	154	700	500	6,19	2,10
D040315B	920	1040	145	700	3 000	8,76	2,32
D040316A	935	1000	135	700	10 000	8,58	2,32
D040316B	958	872	107	700	80 000	9,77	2,31
D040320A	960	872	108	700	56 000	8,79	2,21
D040320B	960	872	108	800	52 000	10,48	2,20
D040321A	925	1040	146	700	56 000	8,81	1,98
D040321B	925	1040	146	800	52 000	6,44	1,88

wäre, könnte das im Inneren verdampfte Gallium auf der Öffnung nicht wieder kondensieren. Es ist also davon auszugehen, daß manche Teile der Öffnung, insbesondere der äußere Rand, eine niedrigere Temperatur aufweisen als das Thermoelement angibt. Wird die obere Heizung schließlich ganz abgeschaltet (D040316B), so steigt die Defektdichte enorm an, während die Beweglichkeit (Gl. 1.5) im 2DES, die sich aus dem Schichtwiderstand ρ_{\square} und der nahezu konstanten Elektronendichte n_{\square} zusammensetzt, ihren höchsten Wert erreicht.

Zur Klärung dieses scheinbaren Widerspruchs ist ein Vergleich des mittleren Abstandes der ovalen Defekte mit der mittleren freien Weglänge der Elektronen nützlich. Letztere ergibt sich unter Verwendung von (1.5) und (1.6) aus der Elektronenbeweglichkeit μ und der Flächendichte n_{\square} gemäß

$$L_m = \frac{\hbar k_F \mu}{e} = \frac{\hbar \sqrt{2\pi n_{\square}} \mu}{e}. \quad (5.1)$$

Die Probe D040316B hat demnach eine mittlere freie Weglänge von $L_m = 77 \mu\text{m}$, während sich gemäß der Überlegungen zu Abb. 5.1b ein mittlerer Abstand der Defekte von $125 \mu\text{m}$ ergibt. Ein Elektron muß beim Durchlaufen eines ovalen Defektes nicht zwangsläufig gestreut werden, da zwar die Schichtdicken kontinuierlich variieren [Fuj87], die mikroskopische Kristallqualität jedoch nicht unbedingt stark gestört sein muß. Deshalb kann aus dem Zahlenvergleich geschlossen werden, daß die makroskopischen Defekte sogar bei einer Dichte der Größenordnung von 10^5cm^{-2} noch nicht limitierend auf die Beweglichkeit wirken. Dies unterstützt die Theorie, nach der mit steigender Temperatur der Zellenöffnung vermehrt Fremdatome emittiert werden. Die Zunahme der eingebauten Streuzentren kann durch die einhergehende Verringerung der Defektdichte nicht kompensiert werden.

Um höchste Beweglichkeiten im Bereich von $3 \cdot 10^7 \text{cm}^2/\text{Vs}$ zu erreichen, sollte nach obiger Abschätzung eine Reduzierung der Defektdichte unerlässlich sein. Als zielführend erachten wir zum einen den Einsatz zweier Galliumquellen, wobei die SUMO-Zelle mit niedriger Öffnungs-

²Die Probenamen werden in der Form DJJMMTXX angegeben. Der erste Buchstabe steht für die Hochbeweglichkeitskammer, die darauffolgenden sechs Buchstaben geben das Datum in der Reihenfolge Jahr-Monat-Tag wieder und mit dem letzten, lateinischen Großbuchstaben werden die Proben eines Tages fortlaufend nummeriert.

temperatur, $T_{\text{tip}} \lesssim 900^\circ\text{C}$, nur für den Bereich des 2DESs zu verwenden ist. Andererseits könnte die Öffnung der SUMO-Zelle langfristig ausgeheizt werden, um das Ausgasen von Fremdatomen zu verringern. Damit verbunden wäre allerdings ein nicht unerheblicher Materialverbrauch, da der untere Teil des Tiegels auf bis zu $T_{\text{bulk}} = 903^\circ\text{C}$ bei $T_{\text{tip}} = 1140^\circ\text{C}$ mitgeheizt werden würde. Am effektivsten könnten die Galliumtröpfchen wohl vermieden werden, wenn man bei der Konstruktion einer neuen SUMO-Zelle auf den konischen Hals verzichtete (Abb. 5.4). Sich trotzdem noch niederschlagendes Gallium könnte zudem mit einer beheizten Lochblende gegen die Kristallscheibe hin abgeschirmt werden. Im Gegensatz zur oberen Heizung der SUMO-Zelle wären für ein solches separates Bauteil dauerhaft hohe Temperaturen möglich, ohne unnötig Gallium aus dem Tiegel zu verdampfen.

Die zweite Versuchsreihe (Tab. 5.1, D040320A bis D040321B) untersucht die Abhängigkeit der Defektdichte von T_{tip} , wobei das inzwischen wieder auf der Zellenöffnung niedergeschlagene Gallium zuvor nicht weggeheizt wurde. Im Rahmen der Schwankungsbreite der Auszählung der ovalen Defekte ergibt sich bei allen vier Kristallscheiben dieselbe Defektdichte. Diese wird nicht durch die Distanz Δ beeinflusst, die für anderweitige Zwecke variiert wurde. Der Temperaturunterschied $\Delta T_{\text{tip}} = 168^\circ\text{C}$ bedeutet einen um fast zwei Größenordnungen unterschiedlichen Dampfdruck des Galliums auf der Öffnung. Während für die ersten beiden Proben der Serie wegen ($T_{\text{bulk}} > T_{\text{tip}}$) zusätzliches Gallium auf der Öffnung kondensierte, wurde dieses bei den beiden anderen Wachstumsprozessen ($T_{\text{bulk}} < T_{\text{tip}}$) wieder verdampft. Die Tatsache, daß in beiden Fällen eine ähnliche Defektdichte erhalten wurde, weist darauf hin, daß nicht die (positive oder negative) Größenänderung der Galliumtröpfchen auf der Öffnung für die Galliumspritzen verantwortlich ist. Ausschlaggebend ist vielmehr das bloße Vorhandensein der Tröpfchen. Der zuvor festgestellte Zusammenhang zwischen Beweglichkeit und Öffnungstemperatur wird auch von der zweiten Versuchsreihe bestätigt.

Es bleibt festzuhalten, daß in der Hochbeweglichkeitskammer die ovalen Defekte eindeutig nicht durch Verunreinigungen mit Kohlenstoff und sonstigen Partikeln oder durch Anreicherung von Gallium an Nukleationszentren verursacht werden. Vielmehr kondensiert Gallium auf einer zu kühlen Zellenöffnung in Form von Tröpfchen, die wahrscheinlich durch Zerplatzen zu Galliumspritzen auf dem Substrat führen. Prinzipiell gehen eine hohe Elektronenbeweglichkeit und eine hohe Dichte an ovalen Defekten einher. Durch gezieltes Wegheizen der Galliumtröpfchen von der Zellenöffnung kann die Defektdichte jedoch auf einen sehr niedrigen Wert von 500 cm^{-2} reduziert werden, während die Beweglichkeit einen Wert von $6 \cdot 10^6\text{ cm}^2/\text{Vs}$ nicht unterschreitet.

5.2 Dotierung mit Silizium

Bei der Herstellung der n^+ -dotierten Kontaktschichten der CEO-Probe aus Kapitel 4 werden an die Genauigkeit der erhaltenen Elektronendichte keine besonders hohen Anforderungen gestellt. Dahingegen ist die Höhe der Elektronendichte sehr entscheidend, wenn zum Beispiel ein bestimmter Wert erzielt werden soll, der in einer dotierten Schicht eine genügend scharfe Landau-Quantisierung zuläßt, ohne daß die Leitfähigkeit des Halbleiters dabei zu gering

wird.³ In beiden Kammern der Regensburger III-V-Epitaxieanlage dient ein Streifen eines dotierten Silizium-Wafers als Donatorenquelle. Er ist zwischen zwei Haltern aus Tantal eingeklemmt und wird mit einem Strom von bis zu 14 A geheizt. Diese Sublimationsquelle gilt als wartungsfrei und sollte während der gesamten Lebensdauer der Anlage einen konstanten Fluß liefern. Da jedoch im Laufe dieser Arbeit eine substantielle Änderung der Flußrate auftrat, wurde eine Untersuchung des Verhaltens der Siliziumquelle notwendig.

Für Eichungszwecke wurden zumeist $d = 1 \mu\text{m}$ dicke, dotierte GaAs-Schichten auf semiisolierendem Substrat gewachsen. Die Charakterisierung einer Schicht erfolgte bei 4,2 K an etwa $4 \times 4 \text{ mm}^2$ großen Stücken, an deren Ecken und Kanten Indiumkontakte (Skizze in Abb. 5.5) einlegiert waren. Die Flächendichte n_{\square} wurde unter Ausnutzung des Hall-Effekts (Abschnitt 1.1.2, Gl. 1.10) gemessen. Außerdem erfolgte eine Bestimmung des Schichtwiderstandes ρ_{\square} nach der van der Pauw-Methode [Pau58a]. Im weiteren Verlauf dieses Abschnitts werden die Dichten der Donatoren, der eingebauten Siliziumatome und der Leitungsbandelektronen gleichgesetzt. Abweichungen von dieser Annahme treten erst bei sehr hohen Dichten ($\gg 10^{18} \text{ cm}^{-3}$, teilweiser Einbau als Akzeptor) oder Dichten jenseits des Metall-Isolator-Übergangs ($\lesssim 2 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$, [Ban88]) auf.

Da die Volumendichte n der Elektronen bzw. Donatoren von der GaAs-Wachstumsrate R abhängt, wird sie zweckmäßigerweise auf eine Referenzrate R_0 bezogen und mit n_0 bezeichnet. Als Referenz bietet sich

$$R_0 = 1 \mu\text{m/h} = 2,7 \text{ \AA/sec} \approx 0,987 \text{ ML/sec} \quad (5.2)$$

an, weil im Bereich dieses Wertes gerade gute (001)-Wachstumsbedingungen vorherrschen. Eine Monolage (ML) ist halb so groß wie die Gitterkonstante, die für GaAs bei Raumtemperatur $5,65330 \text{ \AA}$ beträgt [Ada94]. Wenn $f = n_{\square}/t$ der von der Wachstumsrate unabhängige Siliziumfluß ist, dann gilt

$$n = \frac{n_{\square}}{d} = \frac{n_{\square}}{Rt} = \frac{f}{R}. \quad (5.3)$$

Zur Eichung einer Siliziumquelle ist die Flußrate f in Abhängigkeit des Heizstroms I , mit dem die Sublimationsquelle gespeist wird, zu bestimmen. Da beim Design einer Probenstruktur jedoch die Volumendichte der freien Elektronen von Interesse ist, wird in Abb. 5.5 der Wert $n_0 = f/R_0 = nR/R_0$ angetragen. Für Schichten, die ohne RHEED-Eichung innerhalb der Zeitspanne t gewachsen wurden, kann unmittelbar $n_0 = n_{\square}/R_0t$ gesetzt werden.

Bei der Bestimmung der Elektronendichte mit Hilfe einer Hall-Messung tritt eine systematische Diskrepanz auf: Wenn der Meßstrom über zwei auf einer Diagonalen liegende Eckkontakte aufgeprägt und die Hall-Spannung an den beiden anderen Eckkontakten abgegriffen wird (Skizze in Abb. 5.5), erhält man eine kleinere Elektronendichte als bei Verwendung der Kontakte auf den Kanten. Für den Hall-Koeffizienten $A_H = 1/ne$ (Gl 1.9) gilt also $A_H^{\text{Ecke}} > A_H^{\text{Kante}}$. In [Pau58b] werden die Auswirkungen einer Abweichung vom Ideal des Punktkontaktes diskutiert. Bei einer kreisförmigen Probe mit dem Durchmesser D und einem strichförmigen Kontakt der Länge l (senkrecht oder tangential zum Probenrand) ergibt sich $\Delta A_H/A_H \approx -3l/\pi^2 D$ als relative Abweichung des Hall-Koeffizienten. Wenn dieses Ergebnis

³So bei laufenden Arbeiten in Kooperation mit Laurence Eaves, Nottingham.

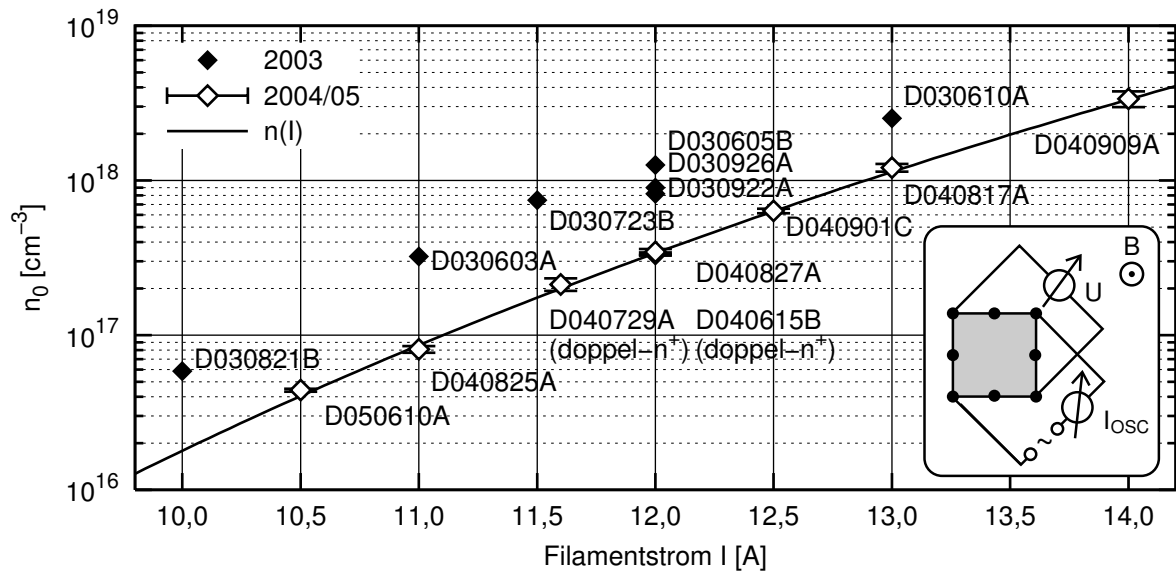


Abb. 5.5. Elektronendichte von siliziumdotierten (001)-Schichten bei Wachstum mit $R_0 = 1 \mu\text{m/h}$. An die Datenpunkte der Jahre 2004 und 2005 wurde die Funktion $n(I, R_0)$ (Gl. 5.4) angepaßt. Die oberen Fehlerbalken geben die Werte bei Verwendung der Kontakte an den Kanten wieder, während die unteren Balken zu den Eckkontakten korrespondieren. Skizze: Messung der Hall-Spannung in Lock-In-Methode bei Verwendung der Eckkontakte.

auf die rechteckigen, zur Eichung verwendeten Proben angewendet wird, deren Kontakte eine endliche Ausdehnung von $l \lesssim 100 \mu\text{m}$ haben, so gilt $|\Delta A_H|/A_H < 1\%$ für die Abweichung zum Idealfall punktförmiger Kontakte. Während die Abschätzung aus [Pau58b] für die Kontakte an den Kanten näherungsweise Gültigkeit besitzt, ist dies für die Eckkontakte wohl nicht der Fall. Nur eine auf die Rechtecksgeometrie der Proben zugeschnittene Rechnung kann zeigen, ob Eckkontakte endlicher Größe für die Abweichung von bis zu 20% zwischen den Messungen von A_H^{Ecke} und A_H^{Kante} verantwortlich sein können. Die starke Streuung der Größe $(A_H^{\text{Ecke}} - A_H^{\text{Kante}}) / \frac{1}{2}(A_H^{\text{Ecke}} + A_H^{\text{Kante}})$ ist jedenfalls ein Hinweis daraufhin, daß die Probengeometrie nicht allein, sondern im Zusammenspiel mit den Fluktuationen bei den manuell aufgetragenen Kontakten für die beobachtete Diskrepanz verantwortlich ist. Zur Klärung der Problematik könnte eine umfangreichere und in bezug auf die Kontakte fundiertere Datenbasis beitragen. Hilfreich wäre auch der Vergleich mit einer Hall-Messung bei parallelen Strompfaden (Hall-Struktur).

Die Datenpunkte aus Abb. 5.5 lassen erkennen, daß der Siliziumfluß sich zwischen den Jahren 2003 und 2004 bei konstantem Heizstrom stark verringerte. Wir führen dies auf die Klemmvorrichtung des Waferstreifens zurück. Anfangs hatte der elektrische Kontakt einen noch eher punktuellen Charakter, welcher bei der Berührung harter Flächen selbst bei geringen Unebenheiten unvermeidlich ist. Die reduzierte Kontaktfläche hatte eine höhere lokale Stromdichte und Temperatur des Siliziumkristalls mit entsprechend größerer Sublimationsrate zur Folge. Diese Theorie wird durch die im Jahr 2003 noch vergleichsweise instabile Dotier-rate gestützt. So war der Siliziumfluß bei 12 A Heizstrom im September 2003 (D030922A und D030926A) deutlich niedriger als noch drei Monate zuvor. Erst im Jahr 2004 – der genaue Zeitpunkt ist unklar – waren die punktuellen Kontakte durch Materialverlust und -diffusion soweit beseitigt, daß die Siliziumquelle seitdem ein stabiles Ergebnis liefert.

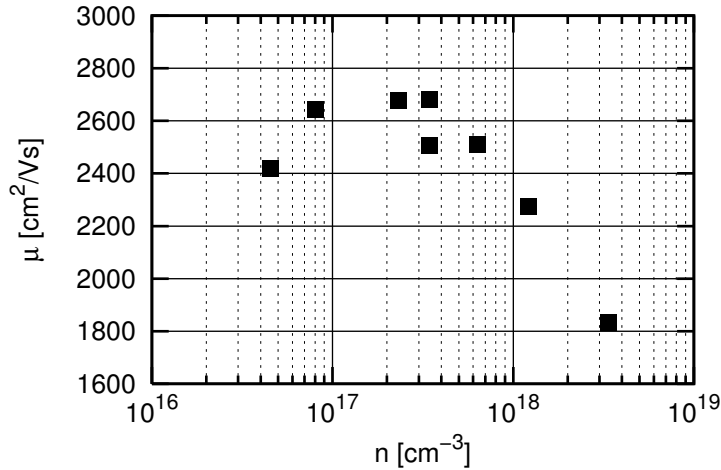


Abb. 5.6. Beweglichkeit bei 4K in Abhängigkeit der Elektronendichte. Es sind die Werte der Eichproben aus den Jahren 2004 und 2005 (vgl. Abb. 5.5) dargestellt.

Zusätzlich zu eigens hergestellten Proben werden in Abb. 5.5 auch die Substrate D040615B und D040729A zur Eichung der Siliziumrate herangezogen. Diese enthalten zwischen zwei n^+ -Schichten intrinsische Übergitter und GaAs-Schichten. Damit wird gleichzeitig gezeigt, daß bei Verwendung von Indiumkontakten am Rand eines Waferstücks nicht nur die oberste Schicht, sondern auch eine zweite n^+ -Schicht, die 1 bis 2 μm darunter liegt, zwangsläufig ankontaktiert wird.

Wie aus der halblogarithmischen Auftragung von Abb. 5.5 ersichtlich ist, folgt der Siliziumfluß in Abhängigkeit des Filamentstroms über zwei Größenordnungen hinweg nahezu einem Exponentialgesetz. Eine besser zutreffende Formel kann folgendermaßen abgeleitet werden: Die Sublimationsrate von Silizium wird über weite Temperaturbereiche durch $f \propto \exp(-Q/k_B T)$ beschrieben, wobei $Q = 4,10 \text{ eV}$ die Aktivierungsenergie zur Auslösung eines Atoms aus dem Kristallverbund ist [Sou86]. Bei Vernachlässigung der Wärmeleitung über die Anschlußklemmen und unter Annahme einer Abstrahlcharakteristik nach dem Stefan-Boltzmann-Gesetz (Schwarzkörperstrahlung) gilt für den Zusammenhang zwischen Filamenttemperatur und der zugeführten elektrischen Leistung die Beziehung $P = RI^2 \propto T^4$. Daraus folgt näherungsweise $f \propto \exp(-\kappa/\sqrt{T})$, wobei κ ein noch zu bestimmender Proportionalitätsfaktor ist. Wird weiterhin die Abhängigkeit der Dotierkonzentration von der Wachstumsrate (Gl. 5.3) miteinbezogen, so findet man:

$$n(I, R) = 8,2 \cdot 10^{30} \text{ cm}^{-3} \exp\left\{-\frac{106,8}{\sqrt{I/1 \text{ A}}}\right\} \frac{R_0}{R}. \quad (5.4)$$

Durch die Wahl der empirischen Zahlenwerte stimmt diese Funktion sehr gut mit den experimentellen Daten aus den Jahren 2004 und 2005 überein (Abb. 5.5). Da auch der Meßwert für $I = 14 \text{ A}$ auf der leicht gekrümmten Kurve liegt, kann geschlossen werden, daß bis ca. $2 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-2}$ noch kein nennenswerter Einbau der Dotieratome auf Arsenplätzen stattfindet.

Die Beweglichkeit μ der volumendotierten Schichten kann gemäß (1.5) sowohl anhand der Volumengrößen n und ρ als auch aus n_{\square} und ρ_{\square} berechnet werden. Die Kenntnis der Wachstumsrate ist also nicht notwendig. Die in Abb. 5.6 aufgetragenen Beweglichkeiten variieren für niedrige Elektronendichten nur wenig, während für $n \gtrsim 5 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ mit steigender Dotierkonzentration N_D ein deutlicher Abfall zu erkennen ist. Bei tiefen Temperaturen ist die

Beweglichkeit durch Streuung an ionisierten Störstellen bestimmt, wobei der Zusammenhang $\mu \propto T^{3/2}/N_D$ gilt [Ada94, Jor02]. Für $n \gtrsim 10^{18} \text{ cm}^{-2}$ trägt zudem die Elektron-Elektron-Wechselwirkung zur Verringerung der Beweglichkeit bei [Ada94, Kap. 14].

5.3 Ätzen mit Phosphorsäure

Naßchemisches Ätzen von AlGaAs mit einer wässrigen Lösung aus Phosphorsäure und Wasserstoffperoxid ist ein häufig verwendetes Verfahren in Forschung und Industrie. Es wurde 1978 von Mori und Watanabe vorgestellt [Mor78]. Bei der Heterostruktur aus Kapitel 4 beträgt das Verhältnis der Schichtdicke des Rückkontakts zur Ätztiefe ca. 9%. Zur Gewährleistung einer hohen Treffsicherheit⁴ bei der Freilegung der unteren n^+ -Schicht ist deshalb eine Reproduzierbarkeit der Ätzrate mit einer Schwankungsbreite von höchstens $\pm 4,5\%$ erforderlich. Um den Ausschuß der aufwendig hergestellten CEO-Proben unter 10% zu halten, darf unter Annahme einer Gaußverteilung die Standardabweichung maximal 2,7% bezogen auf die mittlere Ätzrate betragen. Wird als Zielvorgabe eine Standardabweichung von 2% gewählt, so ist auch eine genügende Restdicke der Kontaktschicht sichergestellt. Neben der Ätzrate R_0 bei einer bestimmten Referenztemperatur T_0 muß zur Extrapolation auf beliebige andere Prozeßtemperaturen auch die Aktivierungsenergie E_a bekannt sein. Da mit Literaturwerten für R_0 und E_a unerwartete Ergebnisse erzielt wurden, konnte erst durch eine genauere Bestimmung der beiden Parameter ein präzises Ätzen für einen weiten Temperaturbereich ermöglicht werden.

Phosphorsäure H_3PO_4 und Wasserstoffperoxid H_2O_2 sind in wässriger Lösung erhältlich, wobei auf dem Gebinde in der Regel der Gewichtsanteil der Substanz angegeben ist. Bei der Zubereitung einer Ätzlösung wird in Volumenanteilen gerechnet, während für die Reaktionskinetik die Stoffmengenkonzentration c_i^a der reinen Substanz (ohne Wasser) maßgeblich ist. Die Konzentration einer Komponente a der Chemikalie i ist in der Lösung durch

$$c_i^a = g_i^a \delta_i v_i / M^a \quad (5.5)$$

gegeben. Dabei bezeichnet g_i^a den (handelsüblichen) Gewichtsanteil der Komponente a in der Chemikalie i . Letztere hat die Dichte δ_i und nimmt in der Lösung den Volumenanteil v_i ein. Die Molmasse eines Moleküls des Stoffes a wird mit M^a bezeichnet. Für das System $\text{H}_3\text{PO}_4\text{-H}_2\text{O}_2\text{-H}_2\text{O}$ ergeben sich die in Tab. 5.2 aufgeführten Kenngrößen und Stoffmengenkonzentrationen.

Eine Lösung mit dem Mischungsverhältnis 1:1:30 hat besonders günstige Eigenschaften [Mor78]. Das molare Verhältnis von H_2O_2 zu H_3PO_4 ist hierbei $m_r = c(\text{H}_2\text{O}_2)/c(\text{H}_3\text{PO}_4) = 0,66$, während der molare Anteil des Wassers $m_f = c(\text{H}_2\text{O})/\sum_{i=1}^3 c_i = 0,87$ beträgt. Laut [Mor78] weisen Lösungen mit $m_r \lesssim 2,3$ und $m_f \gtrsim 0,9$ eine besonders stabile Ätzrate auf. Im Rahmen dieser Arbeit wurde selbst im Laufe von zwölf Monaten keine Degeneration der

⁴Bei Verwendung einer Photolackmaske kann der Ätzzvorgang unterbrochen werden, um die aktuelle Ätzrate mit einem Profilmeßgerät zu bestimmen. Dies ist bei einer Maskierung mit synthetischem Wachs (Abschnitt 4.1) nicht möglich.

Tab. 5.2. Eigenschaften der H_3PO_4 - H_2O_2 - H_2O -Ätzlösung.

i	δ_i [g/cm ³]	a	g_i^a	M^a [g/mol]
H ₃ PO ₄ (85 %)	1,71	H ₃ PO ₄	0,85	98
		H ₂ O	0,15	18
H ₂ O ₂ (30 %)	1,11	H ₂ O ₂	0,30	34
		H ₂ O	0,70	18
H ₂ O	1,00	H ₂ O	1,00	18

$$c(H_3PO_4) = 14,8 v(85 \% H_3PO_4) \text{ mol/l}$$

$$c(H_2O_2) = 9,79 v(30 \% H_2O_2) \text{ mol/l}$$

$$c(H_2O) = [14,3 v(85 \% H_3PO_4) + 43,2 v(30 \% H_2O_2) + 55,6 v(H_2O)] \text{ mol/l}$$

angesetzten Lösung festgestellt. Im Gegensatz dazu lieferte das H_2SO_4 - H_2O_2 - H_2O System [Iid71] schon nach zwei Stunden Standzeit eine deutlich unterschiedliche Ätztiefe.

Die Ätzrate R ist proportional zu $\exp\{-E_a/k_B T\}$. Wenn eine Eichung der Ätzrate bei der Temperatur T_0 den Wert R_0 ergibt, dann erhält man für die Temperatur T durch Extrapolation die Rate

$$R(T) = R_0 \exp\left\{\frac{E_a}{k_B} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)\right\}. \quad (5.6)$$

In [Mor78] wird als Aktivierungsenergie der Wert 10 kcal/mol angegeben, was einem Koeffizienten $E_a/k_B = 5040$ K entspricht. Weicht die Temperatur um einen kleinen Betrag δ von der Eichtemperatur ab, so folgt aus (5.6) die Näherung

$$R(T_0 + \delta) \approx R_0 \left(1 + \frac{E_a}{k_B} \frac{\delta}{T_0^2}\right). \quad (5.7)$$

Da eine Eichung in der Regel bei $T_0 \approx 300$ K erfolgt, beträgt für eine Temperaturänderung von $\delta = 1$ K die relative Abweichung von der geeichten Ätzrate bereits $\Delta R/R_0 \approx 6\%$. Die halbe Schwankungsbreite der Ätzrate beträgt während eines Ätzzvorgangs entlang einer mehrere Millimeter langen Stufe nach der Erfahrung dieser Arbeit 0,5 bis 1 % (inkl. des statistischen Fehlers des Profilmessgeräts „Dektak 3“). Um die Vorgabe einer gesamten mittleren Abweichung von 2 % zu erreichen, muß die Temperatur auf ca. 0,1 °C genau bekannt sein. Anstatt mit hohem Aufwand die Temperatur mittels aktiver Regelung einzustellen, ist die Ätzung am einfachsten bei der jeweiligen Raumtemperatur durchzuführen. Eine thermische Ankopplung an einen schweren Aluminiumblock, der zusammen mit der Lösung immer bei Raumtemperatur gelagert wird, führt zu einer hohen Temperaturkonstanz mit $\Delta T/\Delta t < 0,1$ °C/h. Da die Verdampfungskälte der Lösung eine Temperaturerniedrigung von bis zu 2 °C bewirken kann, sollte beim Ätzen ein verschleißbares Behältnis verwendet werden.

In [Mor78] wird eine Ätzrate von $R = 0,28 \mu\text{m}/\text{min}$ bei 30 °C und eine molare Aktivierungsenergie von 10 kcal/mol bzw. $E_a/k_B = 5040$ K angegeben.⁵ Die hieraus berechnete und in Abb. 5.7 dargestellte Eichkurve $R_{\text{Lit}}(T)$ ergibt Ätzraten, die die im Rahmen dieser Arbeit bestimmten Raten um mehr als 20 % übersteigen. Insbesondere weicht die Aktivierungsenergie

⁵Diese Ätzrate wurde folgendermaßen aus [Mor78, Fig. 3] abgelesen: Bei niedriger H_2O_2 -Konzentration ist die Ätzrate in weiten Bereichen des Molverhältnisses $m_r = c(H_2O_2)/c(H_3PO_4)$ (mindestens für $m_r = 0,43 \dots 1,02$) von der Säurekonzentration unabhängig. Für eine 1:1:30-Lösung hat man $m_r = 0,66$ und $c(H_2O_2)/\sum_{i=1}^3 c_i = 0,0056$ als molaren Anteil des Wasserstoffperoxids, weshalb aus dem Graphen die Rate $R = 0,28 \mu\text{m}/\text{min}$ bei 30 °C bestimmt werden kann.

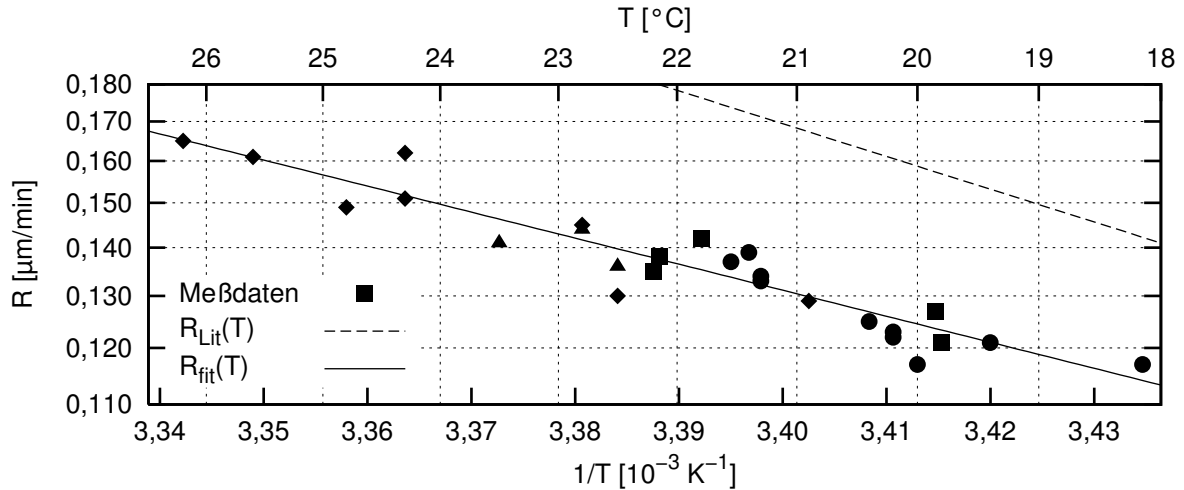


Abb. 5.7. Arrheniusgraph der Ätzrate einer $\text{H}_3\text{PO}_4\text{-H}_2\text{O}_2\text{-H}_2\text{O}$ -Lösung mit dem Mischungsverhältnis 1:1:30 in Abhängigkeit der Temperatur. Die vier unterschiedlichen Symbole stehen für verschiedene Lösungen, denen mehrere Monate lang kleine Mengen zum Gebrauch entnommen wurden. Die Anpassung $R_{\text{fit}}(T)$ gemäß (5.6) ergibt $R_0 = 0,125 \mu\text{m}/\text{min} \pm 1\%$ und $E_a/k_B = 4000 \text{K} \pm 7\%$. Die gestrichelte Linie steht für die in [Mor78] angegebene Temperaturabhängigkeit der Ätzrate.

gie, die sich mit dem Mischungsverhältnis der Lösung nur wenig ändert, von dem hier mittels Anpassung bestimmten Wert $E_a/k_B = 4000 \text{K}$ stark ab.

Zur Erklärung der im Vergleich zu [Mor78] deutlich niedrigeren Ätzrate kann nur auf die unterschiedliche Kristallqualität verwiesen werden. Eine eventuell stark differierende Versetzungsdichte scheidet allerdings als Grund aus, da die $\text{H}_3\text{PO}_4\text{-H}_2\text{O}_2\text{-H}_2\text{O}$ -Lösung laut [Ric74] nicht zum anisotropen Ätzen im Bereich von Versetzungen führt.⁶ Möglicherweise ist die Diskrepanz bezüglich der Ätzrate in der unterschiedlichen Dichte der Verunreinigungen begründet. Während in dieser Arbeit MBE-hergestellte Schichten geätzt wurden, kamen in [Mor78] mit Tellur dotierte Kristallscheiben unmittelbar zum Einsatz.

Die Ätzraten aus Abb. 5.7 streuen – auf die Referenztemperatur $T_0 = 20^{\circ}\text{C}$ bezogen – um den Mittelwert $R_0 = 0,125 \mu\text{m}/\text{min}$ mit einer relativen Standardabweichung von 3%. Der eingangs dieses Abschnitts erwähnte Anspruch an die Ätzlösung wird also nicht ganz erfüllt. Deshalb wurde bei Strukturen, bei denen nur sehr wenig brauchbares Probenmaterial vorhanden war, der Ätzvorgang in zwei Schritten unter Verwendung von Photolack vollzogen, während bei dem Gros der Proben ein einmaliger Ätzprozeß mit per Hand aufgetragenem synthetischem Wachs genügte. Wenn die freizulegende Schicht im Vergleich zur Ätztiefe besonders dünn ist, kann auch selektives Ätzen mit einer wässrigen Citronensäure-Wasserstoffperoxid-Lösung ($\text{C}_6\text{H}_8\text{O}_7\text{-H}_2\text{O}_2\text{-H}_2\text{O}$) [Jua90, DeS92, Mao94] von Nutzen sein. Hier wird GaAs bis zu 80mal schneller als $\text{Al}_{0,3}\text{Ga}_{0,7}\text{As}$ abgetragen. Selbst wenn der Einbau einer Stoppschicht in die Struktur nicht möglich ist, kann beispielsweise durch Freilegen des Übergitters auf dem GaAs-Substrat (Abschnitt 4.1) eine Stufe mit definierter Tiefe hergestellt werden, die zumindest eine präzise Eichung der verwendeten Tiefenmeßmethode erlaubt.

⁶Bei bestimmten Kombinationen von Halbleitermaterial und Ätze ist die Abtragsrate im Bereich von Versetzungen erhöht, was mit der Ausbildung von Vertiefungen einhergeht. Eine entsprechende Ätzgrubendichte (engl. *etch pit density*) wird deshalb häufig als ein Maß für die Kristallqualität verwendet.

5.4 Initialspalt

Die Erfolgsquote beim Spalten einer CEO-Probe vor dem zweiten Wachstumsschritt hängt von deren Dicke und der Qualität des Initialritzes ab. Bei der Dünnung der Kristallscheiben hat sich in der Vergangenheit eine Zieldicke von 80 bis 120 μm als ein guter Kompromiß zwischen den komplementären Zielen guter Spaltbarkeit und leichter Handhabung der Proben erwiesen. Im Rahmen dieser Arbeit erfolgte zwar keine systematische Untersuchung zur Anbringung des Initialritzes. In Bestätigung entsprechender Versuche aus [Rot99] hat sich jedoch gezeigt, daß das Herbeiführen einer teilweisen Spaltung des Probenstücks bereits während des Ritzens sehr zuverlässig zu perfekten (im Rahmen von Nomarski-Mikroskopie) Spaltflächen führt.

Zum Ritzen wird das Probenstück mit einem dünnen Film synthetischen Wachses auf einen Objektträger geklebt. Das Aufkleben soll die Probe nicht nur fixieren, sondern vor allem verhindern, daß der Kristall schon während des Ritzvorgangs komplett spaltet. Geritzt wird mit einer Nadel aus Wolfram-Carbid, deren Spitze einen Krümmungsradius von ca. 13 μm aufweist. Bewährt hat sich eine Anpresskraft von 0,6 bis 0,8 N bei einem Winkel von 60 bis 70° gegen die Horizontale. Unter diesen Bedingungen erzielt man, wie aus Abb. 5.8a hervorgeht, eine massive Schädigung der Kristalloberfläche. Sie dient – genauso wie das gelegentliche Herausbrechen eines kleinen, häufig dreieckigen Stücks am Probenrand – zur Ausbildung eines Spaltes unterhalb des Ritzes. Dieser im Idealfall entstehende Initialspalt pflanzt sich meist sofort um einige 100 μm nach innen fort. Er ist häufig bereits auf der Probenvorderseite zu erkennen (Abb. 5.8a), wenn nicht, kann sein Auftreten auf der Rückseite kontrolliert werden. Der Initialspalt braucht zur Erzielung eines guten Spaltergebnisses keineswegs eine durchgehende, gerade Linie darstellen, sondern er kann sich auch aus mehreren, gegeneinander versetzten Teilstücken zusammensetzen.

Wenn das CEO-Stück in der Wachstumskammer mit dem Spaltbügel unter Spannung gesetzt wird, breitet sich der Initialspalt in der gesamten Probe aus. Wurde durch das Ritzen nur die Oberfläche geschädigt, ohne daß ein Initialspalt entstand, so muß beim Brechen eine größere Kraft aufgewendet werden, was das Auftreten von Riefen auf der Spaltfläche stark

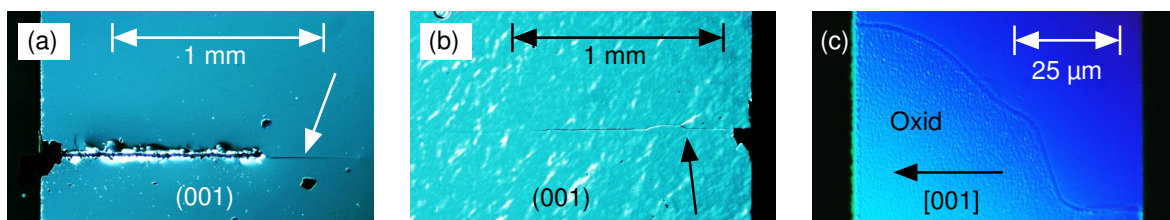


Abb. 5.8. Lichtmikroskopische Aufnahmen eines CEO-Stücks. **(a)** Der 1 mm lange Initialritz. Am Probenrand ist ein Stück herausgebrochen und GaAs-Splitter liegen auf der Kristalloberfläche. Der Pfeil deutet auf den bereits um ca. 440 μm fortgepflanzten Initialspalt hin. **(b)** Die Rückseite der Probe durch den Objektträger hindurch betrachtet. Der Pfeil gekennzeichnet eine (unkritische) Unregelmäßigkeit des Initialspalts. **(c)** Aufnahme der 72 μm breiten Spaltfläche nach dem Überwachsen. Die Grenzlinie trennt den atomar glatten (oben) vom rauhen, an Luft oxidierten Bereich (unten).

fördert. Bis zum Einschleusen in die MBE-Anlage kann Luftsauerstoff in den Initialspalt eindringen. Dies führt zu einer mikrorauen Oberfläche, da das CEO-Wachstum unmittelbar nach dem Spalten, also ohne die vorherige Desorption von Oxiden stattfindet. In Abb. 5.8c ist die Grenzlinie, bis zu der sich der Initialspalt an Luft fortgesetzt hat, klar zu erkennen. Durch Manipulation der Probe während der Reinigung und dem Einbau in den Wachstumshalter kann sich der Initialspalt noch um bis zu einen Millimeter verlängern, wodurch ein weiteres Stück der Probenlänge unbrauchbar wird. Die restliche Spaltfläche ist jedoch meist perfekt glatt, zumindest lassen sich unter dem Lichtmikroskop im Nomarski-Modus keine Unebenheiten erkennen.

Zusammenfassung

Zum Gegenstand der vorliegenden Arbeit zählen die Realisierung eines zweidimensionalen Elektronensystems, das bei variablem Fermi-Niveau durch eine epitaktisch definierte Tunnelbarriere lateral moduliert ist, die Messung und Analyse des Tunnelstroms in Abhängigkeit von Magnetfeld und Elektronendichte sowie die Berechnung von Landau-Bandstrukturen zur Interpretation der Leitwertkurven. Der mit einer Steuerelektrode eingeführte freie Parameter der Elektronendichte ermöglicht in experimenteller Hinsicht eine Fortentwicklung der Arbeit von Kang und Yang [Kan00a, Yan05]. In ihrem theoretischen Teil befaßt sich die Dissertation mit der Berechnung von Landau-Bandstrukturen in abschnittsweise konstanten Potentials. Das vorgestellte Verfahren zur Lösung der Einteilchen-Schrödinger-Gleichung zeichnet sich im Vergleich zu früheren Vorgehensweisen [Ho94, Tak00] durch den Verzicht auf Näherungen und die universelle Anwendbarkeit auf alle unidirektional modulierten Quanten-Hall-Systeme mit bis zu drei Bereichen unterschiedlich hohen Potentials aus.

Nach einem Exkurs der semiklassischen Betrachtung eines Elektrons in gekreuzten elektrischen und magnetischen Feldern wird im ersten Kapitel die quantenmechanische Beschreibung von 2D-Kristallelektronen im senkrechten Magnetfeld und in einem unidirektionalen Potential entwickelt. Anhand der Schrödinger-Gleichung wird zunächst der Zusammenhang zwischen Kreiswellenzahl, Leitzentrum, Aufenthaltsschwerpunkt und Elektronenimpuls für Volumen- und Randzustände geklärt und die Kristallimpulserhaltung für Tunnelprozesse diskutiert. Während die Energieeigenfunktionen im Gebiet eines räumlich konstanten, elektrostatischen Potentials durch die Lösungen des harmonischen Oszillators (Hermitesche Funktionen) gegeben sind, existieren für andere Potentialformen im allgemeinen keine analytischen Lösungen. Eine Ausnahme bildet das abschnittsweise konstante Potential, wie es zum Beispiel in einer nicht vorgespannten, intrinsischen AlGaAs-Heterostruktur in Gestalt eines stufenförmigen Leitungsbandverlaufs gegeben ist. Zur Darstellung der Energieeigenfunktionen kann hier innerhalb der einzelnen Potentialabschnitte auf die allgemeine Lösung der Weberschen Gleichung (Parabolische Zylinderfunktionen) zurückgegriffen werden. Im Anschluß an die Formulierung und Erörterung der Stetigkeitsbedingungen an den Heteroübergängen wird das Gleichungssystem zur Bestimmung der Eigenwerte des Hamilton-Operators sowie der übrigen Parameter der zugehörigen Eigenfunktionen aufgestellt.

Als erste Anwendung des dargelegten Lösungsweges erfolgt eine Berechnung der Landau-Bandstruktur im Bereich einer unendlich hohen Potentialstufe. Das zugehörige Eigenwertproblem wurde bereits in [Mac84] mittels eines äquivalenten Ansatzes aus konfluenten hypergeometrischen Funktionen gelöst. In dieser Arbeit wird mit Hilfe der entsprechenden Disper-

sion eine allgemeine Formel zur räumlichen Abgrenzung von Rand- und Volumenzuständen hergeleitet. Für die Dispersion an der unendlich hohen Barriere wird ferner eine empirische Näherungsformel aufgestellt, die die Energie der Randzustände mit einem deutlich geringeren Fehler als bekannte Näherungen aus der Literatur beschreibt. Als weitere Vorstufe zum Energiespektrum an einer Tunnelbarriere erfolgt eine Diskussion der Landau-Bandstruktur in der Umgebung einer endlich hohen Potentialstufe. In Ergänzung zu [Bar94] liegt der Fokus des Interesses auf den Antikreuzungen, die innerhalb eines bestimmten Bereichs der Bandstruktur an Schnittpunkten der Dispersionen von Randzuständen des unteren und Volumenzuständen des oberen Potentialplateaus zur Aufhebung der Entartung entstehen. Aufgrund formaler Ähnlichkeiten zur Bandstruktur an einem flach ansteigenden Randpotential wird außerdem kurz auf das Chklovskii-Bild [Chk92] eingegangen.

Kapitel 2 widmet sich der Berechnung der Landau-Bandstruktur an einer Tunnelbarriere. Dabei gilt es ein hochgradig nichtlineares Gleichungssystem zu lösen, das sowohl den Energieeigenwert als auch das Gewichtungsverhältnis von zwei linear unabhängigen Parabolischen Zylinderfunktionen bestimmt, die im mittleren Potentialabschnitt den Lösungsraum aufspannen. Zur Lösung dieses Problems wurde ein robustes numerisches Verfahren entwickelt, das unter Berücksichtigung der speziellen Eigenschaften des Gleichungssystems die Lösungstapel innerhalb eines bestimmten Energie- und Impulsintervalls auffindet und präzisiert. Eine erste Anwendung erfolgt zur Berechnung der gemeinsamen Landau-Bandstruktur zweier stark gekoppelter Elektronensysteme. Bei diesem experimentell bisher nicht realisierten Fall gibt es zur vollständigen quantenmechanischen Bandstrukturrechnung keine Alternative. Für den Fall schwacher Kopplung existiert hingegen nach [Ho94] eine Näherungslösung, deren Ergebnis der exakten Bandstruktur sehr ähnlich ist. Im Detail zeigen sich jedoch Unterschiede hinsichtlich der Größe und der Position der Bandlücken, die durchaus von experimenteller Bedeutung sind. Was die Energieeigenfunktionen anbelangt, werden im Hinblick auf deren spätere Verwendung vor allem die Eigenschaften von Zuständen gleicher Energie (etwa an der Fermi-Kante) und von Zuständen an den Bandkanten von Antikreuzungen diskutiert. Abschließend findet ein kurzer Vergleich mit dem Tight-Binding-Ansatz aus [Tak00] und dessen Ergebnis statt.

Die vorgestellte Methode zur Berechnung der Landau-Bandstruktur beinhaltet im Gegensatz zu anderen Vorgehensweisen [Ho94, Tak00] weder Näherungen, noch werden Bedingungen an die Höhe oder Breite der Barriere gestellt. Das Verfahren ist vielmehr universell auf alle 2D-Systeme im senkrechten Magnetfeld mit bis zu zwei Heteroübergängen anwendbar. Als Demonstrationsbeispiele dienen eine Tunnelbarriere mit angelegter Vorspannung und ein Quantendraht im rechteckigen, endlichen Potentialtrog. Im Gegensatz zu Lösungen der Schrödinger-Gleichung auf einem diskreten Gitter, liegen die Energieeigenfunktionen in analytischer Form vor und sind in kompakter Weise durch zwei Skalare (Energie und Gewichtungsverhältnis) eindeutig bestimmt. Für die quantenmechanischen Erwartungswerte des Ortsoperators und des Elektronenimpulses konnten durch Lösung der entsprechenden Integrale ebenfalls analytische Ausdrücke gefunden werden. Die Verwendung der Parabolischen Zylinderfunktionen stellt eine konsequente Erweiterung der mathematischen Beschreibung des harmonischen Oszillators dar, wobei auch nicht ganzzahlige Energieeigenwerte möglich

sind. Aufgrund der engen Verwandtschaft zu den Hermiteschen Funktionen kann zum Aufstellen von Abschätzungsformeln (etwa für den Abstand von interferierenden Randkanälen) unmittelbar auf deren Eigenschaften zurückgegriffen werden.

Kapitel 3 diskutiert die beiden wichtigsten Mechanismen, die zum Verständnis des magnetfeldabhängigen Verhaltens des Tunnelstroms notwendig sind. Das Zustandekommen der langperiodischen Landau-Oszillationen wird im Rahmen des „Modells der Mischung von Landau-Zuständen“ [Ho94, Kan00a, Tak00] erklärt. Als Voraussetzung für den späteren Vergleich zwischen Leitwertkurven und Landau-Bandstrukturen wird zudem eine Näherungsformel für den Zusammenhang zwischen Fermi-Niveau und Füllfaktor aufgestellt. Da die Bandstrukturen dieser Arbeit nur innerhalb des Einteilchenbildes exakt gelten, erfolgt weiterhin ein Vergleich mit Modellrechnungen zur Auswirkung der Coulomb-Wechselwirkung auf die Größe der Landau-Bandlücken [Mit01, Kol02]. Dabei zeigt sich, daß der Vielteilcheneffekt zwar ungefähr zu einer Verdopplung der kleinen Energielücken führt, aber im Vergleich zur Auswirkung des Unordnungspotentials zu vernachlässigen ist. Eine Analyse der für die schwach gekoppelten Elektronensysteme dieser Arbeit berechneten Bandstrukturen ergibt, daß Bandlücken gleicher Ordnung nahezu auf selber Höhe liegen und größtenteils überlappen. Außerdem ist festzustellen, daß aufeinanderfolgende Bandlücken äquidistant sind und bei einer Magnetfelderhöhung eine kollektive Anhebung erfahren, wobei sich auch ihr Abstand geringfügig vergrößert.

Der zweite Teil von Kapitel 3 behandelt die wesentlichen Aspekte des „Modells der Tunnelzentren“ [Kim03a, Kim03b]. Unter Annahme einer einzelnen lokalen Deformation der Barriere (Tunnelzentrum) kann das Auftreten der ersten beiden Maxima der Landau-Oszillationen (Leitwertspitzen) auf der Skala des Füllfaktors erklärt werden. In Gegenwart zweier oder mehrerer Tunnelzentren tritt der Aharonov-Bohm-(AB-)Effekt zwischen gegenüberliegenden Randkanälen auf. Zur Bestimmung des Abstands der Tunnelzentren aus der Periodenlänge entsprechender Leitwertoszillationen werden in dieser Arbeit die Aufenthaltsschwerpunkte der beteiligten Randzustände als Ergebnis von Bandstrukturechnungen herangezogen.

Die experimentellen Ergebnisse samt Auswertung und Schlußfolgerung sind in Kapitel 4 zusammengefaßt. Gegenüber dem Probedesign von Kang *et al.* zeichnet sich die verwendete AlGaAs-Heterostruktur durch eine Steuerelektrode aus, die es zum Beispiel ermöglicht, eine bestimmte Bandlücke bei verschiedenen Magnetfeldern zu spektroskopieren oder den Einfluß der Elektronendichte auf Leitwertfluktuationen bei kleinen Flußdichten zu untersuchen. Die elektrische Charakterisierung der Proben erfolgte in Lock-In-Technik in einem ³Helium-System, das für diesen Zweck konstruiert wurde. Da die gekoppelten Elektronensysteme aufgrund der Kontaktgeometrie nicht einzeln charakterisiert werden können, ist in dieser Arbeit eine Methode entwickelt worden, die unter Verwendung des berechneten Abstands der Bandlücken eine Bestimmung der Elektronendichte aus den Landau-Oszillationen erlaubt. In den Proben führt eine ansteigende Steuerspannung aufgrund von Leckströmen durch die Barriere auf der Spaltfläche zum Aufbau einer internen Vorspannung zwischen den gekoppelten Elektronensystemen. Unterhalb eines bestimmten Schwellenwerts der Steuerspannung ist diese Vorspannung zu vernachlässigen, während sie ansonsten als ein weiterer – wenn auch nicht unabhängiger – Systemparameter zur Verfügung steht. Die beobachteten

Landau-Oszillationen übertreffen in ihrer Amplitude deutlich das für den Leitwert erwartete Maximum von $2(n+1)e^2/h$. Die Leitwertüberhöhung wird auf makroskopische Defekte zurückgeführt, die die kristallkannennahe Quantenregion in einzelne Sektionen unterteilen. Letztere ermöglichen aufgrund ihrer Parallelschaltung durch die ausgedehnten n^+ -Kontakte ein Überschreiten des Leitwertquantums.

Die Landau-Oszillationen sind von kurz- und quasiperiodischen Schwingungen mit kleiner Amplitude überlagert, wobei in dieser Arbeit zwischen AB-Oszillationen an der Leitwertspitze mit dem kleinsten Füllfaktor und Leitwertfluktuationen bei kleinen Magnetfeldern unterschieden wird. Das Auftreten von AB-Oszillationen setzt einen phasenkohärenten Transport in den Teilstücken der Randkanäle zwischen den beteiligten Tunnelzentren voraus. Sowohl thermische Unordnung als auch extern angelegte Spannungen können die Phasenkohärenz zerstören. In entsprechenden Experimenten ist gezeigt worden, daß die Leitwertkurven eine für die interne Vorspannung aufgestellte Kohärenzbedingung erfüllen und auch hinsichtlich ihres Temperaturverhaltens mit einer kritischen Temperatur T_{AB} konsistent sind. Letztere markiert die Grenze zwischen dem inkohärenten und kohärenten Interferenzregime und kann unter Verwendung des Abstands der Tunnelzentren bestimmt werden. Mittels einer Kapazitätsabschätzung für die gegenüberliegenden Randkanäle kann zwar gezeigt werden, daß die Wechselstrom-Messung des Leitwerts quasistatisch ist. Trotzdem tritt bei den niederfrequenten Wechselspannungen eine ungeklärte Abweichung zur Kohärenzbedingung für Gleichspannungen auf.

Die AB-Oszillationen setzen sich aus lang- und kurzperiodischen Anteilen zusammen. Während die kurzperiodischen Schwingungen in ihrer Frequenz der bekannten Formel nach Aharonov und Bohm entsprechen, ist die Herkunft der gleichzeitig auftretenden langperiodischen und irregulären Leitwertfluktuationen bislang unklar gewesen [Yan05]. Sie werden in dieser Arbeit darauf zurückgeführt, daß sich der von den Elektronentrajektorien eingeschlossene magnetische Fluß nicht nur unmittelbar mit dem Magnetfeld, sondern auch mit der Lage der interferierenden Randkanäle ändert. Deren Abstand wird durch die Landau-Bandstruktur bestimmt, die eine Funktion der magnetischen Flußdichte, aber auch des vorherrschenden Unordnungspotentials ist. Letzteres bestimmt im Zusammenspiel mit dem magnetischen Einschlußpotential die Lage der Randkanäle, weshalb sich die Phasendifferenz zwischen beiden Teilwegen des AB-Interferometers bei einer Variation des Magnetfelds in irregulärer Weise ändert.

Aus dem Frequenzspektrum der kurzperiodischen Anteile der AB-Oszillationen lassen sich die Abstände der beteiligten Tunnelzentren bestimmen [Yan05]. Die Auswertung der bei $^3\text{Helium}$ -Temperaturen stark gedämpften Oszillationen geschieht in dieser Arbeit an geglätteten und differenzierten Leitwertkurven. Bandstrukturechnungen zeigen dabei, daß der Abstand der Randkanäle weniger durch die Barrierendicke als vielmehr durch die Ausdehnung der zugehörigen Wellenfunktionen bestimmt ist. Während die AB-Periodenlänge bei mikrostrukturierten Interferometern konstant ist, gilt das nicht für die experimentelle Anordnung dieser Arbeit. Hier ist die Periodenlänge, wie eine entsprechend aufgestellte Formel zeigt, näherungsweise proportional zur magnetischen Flußdichte. Für die Abstände der Tunnelzentren im kohärenten Interferenzregime ergeben sich aus dem Frequenzspektrum

Werte im Bereich $(2,0 \pm 0,2) \mu\text{m}$. Daraus läßt sich auf eine untere Grenze von $L_{\Phi}^{\text{AB}} \approx 4,4 \mu\text{m}$ für die Phasenkohärenzlänge schließen.

Bei kleinen Magnetfeldern bis etwa 0,8 T, noch bevor die regulären Landau-Oszillationen einsetzen, werden im Tunnelstrom Leitwertfluktuationen beobachtet, die wie die AB-Oszillationen in hohem Maße reproduzierbar sind. Der Vergleich des Frequenzspektrums mit Theoriewerten zeigt jedoch, daß die AB-Interferenz zwischen gegenüberliegenden Randkanälen als Ursache für diesen Effekt nicht in Frage kommt. Leitwertfluktuationen mit signifikanter Amplitude setzen mit steigender Elektronendichte bei zunehmend kleineren Magnetfeldern ein. Aus der kritischen Flußdichte folgt mit $L_{\Phi}^{\leq 1\text{T}} \approx 1,7 \mu\text{m}$ eine ähnlich hohe Phasenkohärenzlänge wie anhand des AB-Effekts abgeschätzt wird. Die getrennten Elektronensysteme scheiden aufgrund ihrer hohen Zahl an transversalen Moden als alleiniges Ursprungsgebiet der quasiperiodischen Leitwertoszillationen aus. Erst in Kombination mit der Tunnelbarriere, die vom Meßstrom nicht gleichmäßig, sondern punktuell an den Tunnelzentren durchdrungen wird, entsteht ein Mehrfachspalt-Interferometer, das aufgrund der lokal verringerten Modenzahl das Auftreten von Leitwertfluktuationen ermöglicht.

Neben den verschiedenen Arten der kurzperiodischen Leitwertoszillationen sind in dieser Arbeit schwerpunktmäßig die langperiodischen Landau-Oszillationen analysiert worden. In den hergestellten Proben liegt allgemein Spinentartung vor. Die Leitwertspitzen besitzen jedoch als Folge einsetzender Spinaufspaltung an ihren Flanken eine Schulter, die mit steigender Elektronendichte schon bei kleineren Magnetfeldern auftritt. Ferner erweisen sich die Leitwertspitzen auf der Skala des Füllfaktors als äquidistant, wodurch ein Teilergebnis der Bandstrukturechnungen bestätigt wird. Die Analyse der von Kang *et al.* publizierten Meßdaten ergibt ebenfalls äquidistante Leitwertspitzen, wobei deren Abstand $\Delta\nu = 1,37$ allerdings nicht mit der zugrundeliegenden Landau-Bandstruktur in Einklang gebracht werden kann.

Aus Bandstrukturechnungen für schwach gekoppelte Elektronensysteme wird ersichtlich, daß sich die Dispersion bei einer Variation des Magnetfelds auf den Skalen des Füllfaktors und der Zyklotron-Energie nur geringfügig ändert. Für einen Magnetfeldanstieg von beispielsweise $B = 1,84 \text{ T}$ auf $2,84 \text{ T}$ vergrößern sich die Bandlücken um $\sim 0,003 \hbar\omega_c$ und werden dabei um $\sim 0,02 \hbar\omega_c$ angehoben. Die Bandlücken können im Experiment aufgrund der starken Verbreiterung der Landau-Bänder zwar nicht bezüglich ihrer Ausdehnung aufgelöst werden. Jedoch ermöglicht es die variable Elektronendichte in den Proben dieser Arbeit, die Position der Bandlücken auf der Skala der Zyklotron-Energie in Abhängigkeit des Magnetfelds zu verfolgen. Bei zunehmender, aber nicht zu großer Steuerspannung steigt die Position der Leitwertspitzen wie erwartet auf der Skala des Füllfaktors an. Trotz des Dilemmas, daß die zugrunde gelegten Elektronendichten auf einem Teilergebnis der zu bestätigenden Theorie basieren, kann die Signifikanz der experimentellen Beobachtung durch eine sorgfältige Fehlerbetrachtung nachgewiesen werden. Für hohe Steuerspannungen nimmt die interne Vorspannung so große Werte an, daß aufgrund des energetischen Versatzes zwischen beiden Elektronensystemen die magnetfeldabhängige Verschiebung der Leitwertspitzen kompensiert und in die negative Richtung umgedreht wird.

Abschließend diskutiert Kapitel 5 ausgewählte Aspekte der Probenherstellung. Bei der Molekularstrahlepitaxie von GaAs ist das Auftreten von ovalen Defekten ein Phänomen, das nie vollständig zu unterbinden ist. Das in der Literatur vorherrschende indifferente Bild zum Entstehungsmechanismus dieser Defekte konnte im Rahmen einer Versuchsreihe zur Minimierung der Defektdichte geschärft werden. Als Folge von Galliumspritzern aus der Effusionszelle entstehen Galliumtröpfchen auf der GaAs-Kristallscheibe, die eine lokal erhöhte Wachstumsrate bewirken. Entsprechend treten nicht nur ovale Defekte in rein kristalliner Qualität auf, sondern es sind als deren Vorstufe auch ovale Defekte mit einem amorphen Kern aus metallischem Gallium zu beobachten. Die Galliumspritzer entstehen sehr wahrscheinlich durch spontan zerplatzende Galliumtröpfchen auf der Tiegelöffnung. Durch gezieltes Wegheizen letzterer gelingt es, die Defektdichte auf bis zu 500 cm^{-2} zu verringern. Trotz des verstärkten Ausgasens von Fremdatomen bei erhöhten Temperaturen sind dabei Elektronenbeweglichkeiten von mindestens $6 \cdot 10^6 \text{ cm}^2/\text{Vs}$ möglich.

Bei der Probenherstellung wurden neben einer Optimierung von CEO-Initialritzen auch Eichungen für die Siliziumdotierung und das Freiätzen des Rückkontakts durchgeführt. Eine Wachstumsserie zur Eichung der Silizium-Dotierquelle hat ergeben, daß die an sich stabile und wartungsfreie Sublimationsquelle während der ersten Monate im Betrieb der MBE-Anlage ihre Charakteristik veränderte. Nach Ausgleichsprozessen an den Übergängen zwischen Filament und Stromanschlußklemmen hat sich eine reproduzierbare Dotierkonzentration eingestellt. Letztere kann mit hoher Genauigkeit durch eine semi-empirische Formel beschrieben werden, die für den Materialfluß einer Sublimationsquelle in Abhängigkeit des Heizstroms aufgestellt worden ist. Bei Eichungen der Ätzrate einer Phosphorsäure-Wasserstoffperoxid-Lösung ist die Aktivierungsenergie bestimmt worden, um eine präzise Extrapolation der Ätzrate auf beliebige Prozeßtemperaturen zu ermöglichen. Von Interesse war ferner die Optimierung der Qualität des Initialritztes beim CEO-Prozeß. Wenn bei der Schädigung des gedünnten Waferstücks bereits ein Initialspalt entsteht, dringt in diesen zwar Luftsauerstoff ein, der Rest der Spaltfläche ist jedoch weiterhin oxidfrei und aufgrund der leichten Spaltbarkeit in der Regel durchgehend atomar glatt.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit ist die Landau-Bandstruktur zweier lateral gekoppelter Quanten-Hall-Systeme berechnet und für verschiedene Elektronendichten spektroskopiert worden. Bei konsequenter Verwendung der Bandstruktur und der zugehörigen Energieeigenfunktionen – auch im Rahmen des Modells der Tunnelzentren – werden zahlreiche experimentelle Details verstanden, die sowohl grundsätzlicher als auch probenspezifischer Natur sind. Zur unabhängigen Messung der Elektronendichte und -beweglichkeit könnte die Heterostruktur künftig um weitere Kontakte ergänzt werden, die eine separate Charakterisierung der gekoppelten Elektronensysteme ermöglichen. Als Weiterentwicklung der exakten Einteilchen-Bandstrukturen bietet sich das Miteinbeziehen von Coulomb-Wechselwirkungen im Rahmen einer Störungsrechnung an. Prinzipiell können die Bandstrukturrechnungen unmittelbar auch auf komplexere Systeme wie etwa das einer Doppelbarriere ausgedehnt werden. Als Herausforderung gilt es dabei das bestehende Lösungsverfahren hinsichtlich der zusätzlich auftretenden Mischungsparameter zu erweitern.

Anhang A

Integrale mit Parabolischen Zylinderfunktionen

An verschiedenen Stellen in dieser Arbeit treten Integrale auf, die Parabolische Zylinderfunktionen (Abschnitt 1.3.2) enthalten. Es handelt sich dabei immer um einen quantenmechanischen Erwartungswert für die reellwertige Wellenfunktion (1.52):

$$\langle \varphi_{nk} | \hat{f} | \varphi_{nk} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{nk}(x) \hat{f} \varphi_{nk}(x) dx. \quad (\text{A.1})$$

Dabei ist der Operator \hat{f} entweder die Identität $\hat{1}$ (\rightarrow Norm der Wellenfunktion) oder der Ortsoperator \hat{x} (\rightarrow Aufenthaltsschwerpunkt). Während schon die numerische Auswertung der Parabolischen Zylinderfunktionen sehr rechenintensiv ist, gilt das erst recht für bestimmte Integrale dieser Funktionen. Zu deren Berechnung müssen endliche Integrationsgrenzen¹ festgesetzt werden, wobei es einen Kompromiß zu finden gilt: Einerseits leidet bei zu engen Grenzen die Genauigkeit des Integralwertes, andererseits bereitet die Konvergenz von $D_\nu(\pm z)$ für zu große Argumente Schwierigkeiten (Abschnitt 1.3.2). Gegenüber der numerischen Approximation wäre die Verwendung einer Stammfunktion sowohl mit einem Zeit- als auch Genauigkeitsgewinn verbunden.

In der einschlägigen Literatur² finden sich ausschließlich bestimmte Integrale mit Parabolischen Zylinderfunktionen. Da die Wellenfunktion in (A.1) jedoch abschnittsweise definiert ist (Gl. 1.41), ist die Kenntnis der entsprechenden unbestimmten Integrale notwendig. Deshalb wird in diesem Anhang eine allgemeine Methode [Isr06] zur Berechnung der Stammfunktion von Dichtefunktionen der Form $\varphi_{nk}(x) \hat{f} \varphi_{nk}(x)$ vorgestellt und auf den Erwartungswert des Ortsoperators angewandt.

Zur Integration von Ausdrücken mit Parabolischen Zylinderfunktionen kann man auf die Rekursionsformel (1.50a)

$$D_{\nu+1}(z) = zD_\nu(z) - \nu D_{\nu-1}(z) \quad (\text{A.2})$$

¹Im physikalischen Erwartungswert geht der Integrand für $|x| \rightarrow \infty$ gegen Null.

²Zum Beispiel [Whi27], [Erd53], [Abr65], [Mag66], [Jef72] und [Spa87].

und die Ableitungsformel (1.51) zurückgreifen. Letztere läßt sich unter Anwendung von (A.2) auf zweierlei Weise schreiben:

$$D'_\nu(z) = \nu D_{\nu-1}(z) - \frac{z}{2} D_\nu(z), \quad (\text{A.3a})$$

$$D'_{\nu-1}(z) = \frac{z}{2} D_{\nu-1}(z) - D_\nu(z). \quad (\text{A.3b})$$

Die allgemeine Lösung der Weberschen Gleichung (1.44) ist durch

$$y_\nu(z) = aD_\nu(-z) + bD_\nu(z). \quad (\text{A.4})$$

gegeben. In dem Erwartungswert (A.1) besteht der Integrand in der Regel aus rein und gemischt quadratischen Termen $D_\nu(z)$ und $D_\nu(-z)$, die mit elementaren Funktionen als Koeffizienten versehen sind: z. B. $D_\nu^2(z)$ oder $zD_\nu(z)D_\nu(-z)$. Die zu integrierende Funktion stellt also eine quadratische Form dar. Aus den Ableitungsformeln (A.3) folgt, daß für die Stammfunktion ebenfalls eine quadratische Form anzusetzen ist, wobei zusätzlich Terme mit Parabolischen Zylinderfunktionen vom Grad $(\nu - 1)$ enthalten sein müssen [Isr06]. Wenn man $f_1 \equiv D_\nu(z)$, $f_2 \equiv D_{\nu-1}(z)$, $f_3 \equiv D_\nu(-z)$ und $f_4 \equiv D_{\nu-1}(-z)$ definiert, lautet die Stammfunktion in allgemeiner Form

$$Q(z) = \sum_{i \leq j} A_{ij}(z) f_i(z) f_j(z). \quad (\text{A.5})$$

Sie enthält zehn Koeffizientenfunktionen $A_{ij}(z)$, die es zu bestimmen gilt. Der Differentialquotient von $Q(z)$ kann, wie anhand der Produktregel und den Ableitungsformeln (A.3) zu erkennen ist, durch dieselbe quadratische Form, jedoch mit anderen Koeffizientenfunktionen dargestellt werden:

$$Q'(z) = \sum_{i \leq j} a_{ij}(z) f_i(z) f_j(z). \quad (\text{A.6})$$

Die zehn Koeffizientenfunktionen $a_{ij}(z)$ lassen sich durch Vergleich von $Q(z)$ und $Q'(z)$ in Abhängigkeit von $A'_{ij}(z)$ und $A_{ij}(z)$ ausdrücken. Solchermaßen erhält man ein lineares, inhomogenes System von zehn gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$A'_{ij}(z) = a_{ij}(z) + \sum_{l \leq m} k_{lm}^{ij}(\nu, z) A_{lm}(z) \quad (1 \leq i \leq j \leq 4). \quad (\text{A.7})$$

Wenn der Integrand durch den Ansatz $Q'(z)$ dargestellt werden kann, ist das Auffinden einer Stammfunktion gleichbedeutend mit dem Lösen dieses Differentialgleichungssystems. Da die Koeffizienten $k_{lm}^{ij}(\nu, z)$ von der freien Variablen z abhängen, gibt es für diese Aufgabe kein einfaches und allgemeingültiges Rezept [Jän90]. Während Computer-Algebrasysteme in der Regel schon an der Integration der einfachsten Ausdrücke mit Parabolischen Zylinderfunktionen, nämlich den Ableitungsformeln (A.3) scheitern, verfügen sie jedoch gegebenenfalls über mächtige Werkzeuge zum Lösen von Differentialgleichungssystemen.

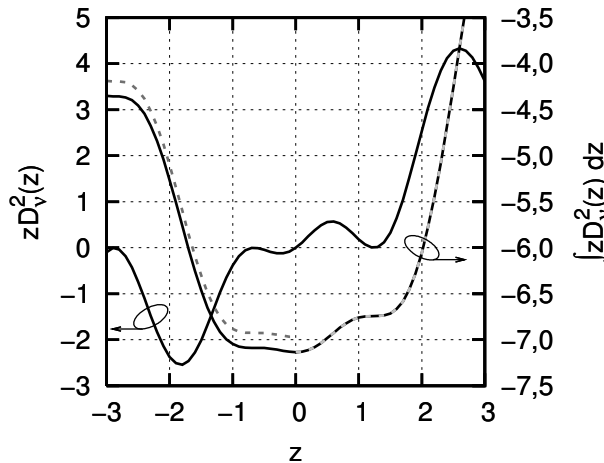


Abb. A.1. Die Funktion $zD_\nu^2(z)$ und ihre Stammfunktionen. Die durchgezogene Linie stellt die Stammfunktion mit den Koeffizientenfunktionen (A.9) dar. Alle anderen Stammfunktionen, die als Lösung von (A.8) erhalten werden, weisen bei $z = 0$ eine Stufe auf, sind aber stetig differenzierbar. Sie werden durch die grau-gestrichelte Linie repräsentiert.

Aufenthaltsschwerpunkt

Wenn die Stammfunktion von $zy_\nu^2(z) = a^2zD_\nu^2(-z) + 2abzD_\nu(-z)D_\nu(z) + b^2zD_\nu(z)$ gebildet werden soll (Gl. A.4), können die einzelnen Terme entweder gemeinsam durch (A.6) dargestellt oder auch jeder für sich integriert werden. Letzteres wird im folgenden exemplarisch für die Komponente mit $zD_\nu^2(z)$ durchgeführt. Mit dieser Beschränkung reduziert sich das Differentialgleichungssystem (A.7) auf

$$\begin{pmatrix} A'_{11}(z) \\ A'_{12}(z) \\ A'_{22}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & 1 & 0 \\ -2\nu & 0 & 2 \\ 0 & -\nu & -z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11}(z) \\ A_{12}(z) \\ A_{22}(z) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11}(z) \\ a_{12}(z) \\ a_{22}(z) \end{pmatrix}. \tag{A.8}$$

Wegen $Q'(z) = zD_\nu^2(z)$ ist dabei $a_{11}(z) = z$ und $a_{12}(z) = a_{22}(z) = 0$ zu setzen. Die allgemeine Lösung von (A.8) besteht aus der Summe des dreidimensionalen Lösungsraums des homogenen Systems ($a_{11}(z) = a_{12}(z) = a_{22}(z) = 0$) und einer speziellen Lösungen des inhomogenen Systems [Jän90]. Das Mathematikprogramm Maple liefert für $A_{11}(z)$, $A_{12}(z)$, $A_{22}(z)$ jeweils einen Ausdruck, der aus den Whittaker-Funktionen³ $M_{\nu;\mu}(z)$ und $W_{\nu;\mu}(z)$ besteht, wobei auf eine Wiedergabe der umfangreichen Lösungen hier verzichtet wird. Alle drei Koeffizientenfunktionen enthalten Skalare C_1 , C_2 und C_3 , mit denen der dreidimensionale Lösungsraum aufgespannt wird. Die Vielfältigkeit des Lösungsraums wird erst durch Einsetzen in den Ansatz $Q(z)$ für die Stammfunktion (teilweise) aufgehoben (Abb. A.1). Durch Setzen von $C_1 = C_2 = C_3 = 0$ ergeben sich elementare Funktionen:

$$A_{11}(z) = -1 - 2\nu; \quad A_{12}(z) = 2\nu z; \quad A_{22}(z) = -2\nu^2. \tag{A.9}$$

Für alle anderen Werte von C_i erhält man für $Q(z)$ eine Funktion, die für $z < 0$ parallelverschoben ist. Der Grund für das Auftreten dieser unstetigen Lösung ist unklar, zumindest handelt es sich um eine stetig differenzierbare Funktion, deren Ableitung $zD_\nu^2(z)$ ergibt.

Zur Lösung des Integrals von $zy_\nu^2(z)$ sind zusätzlich die Stammfunktionen von $zD_\nu^2(-z)$ und $zD_\nu(-z)D_\nu(z)$ zu bestimmen. Während erstere sich unmittelbar aus (A.9) ergibt, muß

³Die Whittaker-Funktionen sind mit den Parabolischen Zylinderfunktionen eng verwandt. Es gilt $D_\nu(z) = 2^{\frac{1}{2}\nu + \frac{1}{4}} z^{-\frac{1}{2}} W_{\frac{1}{2}\nu + \frac{1}{4}; -\frac{1}{4}}(\frac{1}{2}z^2)$. Für $M_{\nu;\mu}(z)$ existiert ein ähnlicher Ausdruck. [Whi27]

für weitere abermals ein Differentialgleichungssystem in der Form von (A.7) gelöst werden. Zusammengefaßt erhält man

$$\begin{aligned}
Y_\nu(z) &= \int z y_\nu^2(z) dz \stackrel{(A.4)}{=} \int z [aD_\nu(-z) + bD_\nu(z)]^2 dz = \\
&\quad \left[(-1 - 2\nu)D_\nu^2(-z) - 2\nu z D_\nu(-z)D_{\nu-1}(-z) - 2\nu^2 D_{\nu-1}^2(-z) \right] a^2 + \\
&\quad + 2 \left[(-1 - 2\nu)D_\nu(-z)D_\nu(z) - \nu z D_{\nu-1}(-z)D_\nu(z) + \right. \\
&\quad \left. + \nu z D_\nu(-z)D_{\nu-1}(z) + 2\nu^2 D_{\nu-1}(-z)D_{\nu-1}(z) \right] ab + \\
&\quad + \left[(-1 - 2\nu)D_\nu^2(z) + 2\nu z D_\nu(z)D_{\nu-1}(z) - 2\nu^2 D_{\nu-1}^2(z) \right] b^2 + C
\end{aligned} \tag{A.10}$$

Dieser Ausdruck enthält nun alle zehn Terme aus dem Ansatz (A.5).

Norm der Wellenfunktion

Zur Bestimmung der Norm der abschnittsweise definierten Wellenfunktionen (1.41) ist die Kenntnis des unbestimmten Integrals von $\int y_\nu^2(z) dz$ erforderlich. Für den Term $D_\nu^2(z)$ muß dabei das Differentialgleichungssystem (A.8) für $a_{11}(z) = 1$ und $a_{12}(z) = a_{22}(z) = 0$ gelöst werden. Es konnten jedoch mit Hilfe von Maple nur solche Lösungen gefunden werden, die selbst auf anderen unbestimmten Integralen beruhen. An dieser Stelle muß deshalb auf einen Ausdruck für $\int y_\nu^2(z) dz$ verzichtet werden.⁴ Der Vollständigkeit halber wird darauf hingewiesen, daß die Ordnung ν des Integranden mit der Rekursionsformel⁵ [Isr06]

$$\int D_\nu^2(z) dz = -D_{\nu-1}(z)D_\nu(z) + \nu \int D_{\nu-1}^2(z) dz \tag{A.11}$$

auf $(\nu - 1)$ reduziert werden kann. Von praktischem Nutzen ist diese Beziehung allerdings nur bei ganzzahligem ν , wenn ein Integral der quadrierten Hermiteschen Funktion (1.48) auf einfachere Ausdrücke zurückgeführt wird.

⁴Es ist sehr wahrscheinlich, daß das Integral $\int D_\nu^2(z) dz$ weder durch Parabolische Zylinderfunktionen noch durch andere spezielle Funktionen in einfacher Weise dargestellt werden kann. Zu demselben Fazit gelangt man bei dem Versuch, eine Stammfunktion für $D_\nu(z)$ zu finden. Hier scheitert sowohl der Ansatz einer linearen Form $\int D_\nu(z) dz = A(z)D_\nu(z) + B(z)D_{\nu-1}(z)$ als auch der Rückgriff auf die Literatur. Wenn zwischen dem Ergebnis einer Transformation zur Kummer-Funktion $U(a, c, z)$ mit angeschlossener partieller Integration ($z^2/2 = x$) und den unbestimmten Integralen für Ausdrücke mit $U(a, c, z)$ ein Vergleich unter Berücksichtigung von Multiplikationstheoremen für $U(a, c, \frac{1}{2}z)$ [Mag66] gezogen wird, zeigt sich nämlich, daß sich die Stammfunktion von $D_\nu(z)$ höchstens als eine Reihe darstellen läßt.

⁵Beweis durch Ableitung und Anwendung von (A.3).

Anhang B

Elektronenimpuls

Der Kristallimpuls $\hbar\mathbf{k}$ eines Elektrons stimmt im allgemeinen nicht mit dessen Teilchenimpuls $m^*\mathbf{v}$ überein. Bei letzterem handelt es sich um diejenige Größe, die in die eingeht. Sie ist durch die Gruppengeschwindigkeit eines Wellenpakets gegeben, das sich aus Wellenfunktionen von Zuständen in einer kleinen Umgebung von k zusammensetzt: $\psi = \int f(k')\psi_{nk'}(x, y) dk'$ [Mes91]. Für ein Elektron im Zustand $\psi_{n\mathbf{k}}$ sind der Erwartungswert des quantenmechanischen Geschwindigkeitsoperators $\hat{\mathbf{v}}$ und die Gruppengeschwindigkeit $\mathbf{v} = \frac{1}{\hbar}\nabla_{\mathbf{k}}E_{n\mathbf{k}}$ identisch [Kop02]. In diesem Anhang wird überprüft, ob diese Aussage auch dann noch gilt, wenn das Magnetfeld nicht als äußere Kraftquelle betrachtet wird, sondern wenn seine Wirkung bereits in der Dispersion, nämlich der Landau-Bandstruktur, enthalten ist. Als erster Schritt und in Ergänzung zu Abschnitt 1.2.3 wird zunächst der Erwartungswert $\langle\hat{\mathbf{v}}\rangle$ berechnet und im Rahmen einer semiklassischen Betrachtung diskutiert.

In der klassischen Mechanik ist der generalisierte Impuls (auch: verallgemeinerter Teilchenimpuls) eines Kristallelektrons im elektrischen und magnetischen Feld durch

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = m^*\mathbf{v} - e\mathbf{A} \quad (\text{B.1})$$

gegeben, wobei $L = \frac{1}{2}m^*\mathbf{v}^2 - e\mathbf{v}\mathbf{A} - V$ die Lagrange-Funktion des Einteilchensystems ist [Mes91]. Bei der Aufstellung der Schrödinger-Gleichung wird die Hamilton-Funktion $H = \mathbf{v}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} - L$ durch die Korrespondenzvorschrift $\mathbf{p} \rightarrow \hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla$ zum Hamilton-Operator (Gl. 1.16)

$$\hat{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2m^*} (\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A})^2 + V(\mathbf{r}). \quad (\text{B.2})$$

Der Operator des Teilchenimpulses $m^*\hat{\mathbf{v}}$ enthält die Ableitung des Ortsoperators: $\hat{\mathbf{v}} = \hat{\dot{\mathbf{r}}}$. Allgemein gilt für die totale Ableitung eines Operators \hat{f} nach der Zeit [Lan74a]

$$\hat{f} = \frac{\partial \hat{f}}{\partial t} + \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{f}]. \quad (\text{B.3})$$

Die Anwendung auf den Ortsoperator, der nicht explizit von der Zeit abhängt, ergibt mit

einfacher Kommutatoralgebra

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \mathbf{r}] = \frac{1}{m^*} (\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A}). \quad (\text{B.4})$$

Dieser Ausdruck ist mit der klassischen Beziehung (B.1) für den Teilchen- bzw. generalisierten Impuls formal identisch.

Die Berechnung des Erwartungswerts von (B.4) wird im folgenden unter den Voraussetzungen des Kapitels 1 durchgeführt, also für ein 2D-Elektron im senkrechten Magnetfeld und in einem elektrostatischen Potential, das in y -Richtung invariant ist. Die Wellenfunktion ist in diesem Fall durch

$$\psi_{nk}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{L_y}} e^{iky} \varphi_{nk}(x) \quad (\text{B.5})$$

gegeben (Gl. 1.21), wobei die Funktion $\varphi_{nk}(x)$ als reellwertig und normiert vorausgesetzt werden kann. Für den Erwartungswert von $m^*\hat{\mathbf{v}}$ gilt¹

$$\langle m^*\hat{\mathbf{v}} \rangle = \langle \psi | m^*\hat{\mathbf{v}} | \psi \rangle = \frac{\hbar}{i} \langle \psi | \nabla | \psi \rangle + e \langle \psi | \mathbf{A} | \psi \rangle. \quad (\text{B.6})$$

Dieser Ausdruck wird im folgenden komponentenweise für die Landau-Eichung $\mathbf{A} = (0, xB, 0)$ (Gl. 1.17) ausgewertet. Dabei bleibt die zum Magnetfeld parallel verlaufende z -Koordinate unbeachtet.

Die Impulskomponente in Richtung des Potentialgradienten läßt sich schreiben als

$$\begin{aligned} \langle m^*\hat{v}_x \rangle &= \frac{\hbar}{i} \langle \psi | \partial_x | \psi \rangle + e \langle \psi | 0 | \psi \rangle = \frac{\hbar}{i} \langle \varphi | \partial_x | \varphi \rangle \\ &= \frac{\hbar}{i} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{nk}(x) \frac{\partial}{\partial x} \varphi_{nk}(x) dx \\ &= \frac{\hbar}{2i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} \varphi_{nk}^2(x) dx = \frac{\hbar}{2i} \varphi_{nk}^2(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Das Ergebnis ist insofern nicht überraschend, als es sich bei $\varphi_{nk}(x)$ um einen im magnetischen Einschlußpotential (1.29) gebundenen Zustand handelt, dessen Impuls im Mittel verschwindet.

Für die y -Komponente des Teilchenimpulses findet man unter Verwendung der Definitionen des Leitzentrums $X \equiv -k\ell^2$ und der dimensionslosen Ortsvariablen $\xi \equiv (x - X)/\ell$

$$\begin{aligned} \langle m^*\hat{v}_y \rangle &= \frac{\hbar}{i} \langle \psi | \partial_y | \psi \rangle + e \langle \psi | xB | \psi \rangle \\ &= \frac{\hbar}{i} \langle \varphi | L_y^{-1} e^{-iky} \partial_y e^{iky} | \varphi \rangle + eB \langle \varphi | x | \varphi \rangle \\ &= \hbar k + eB \langle x \rangle \end{aligned} \quad (\text{B.8a})$$

$$= \frac{\hbar \langle x \rangle - X}{\ell} = \frac{\hbar}{\ell} \langle \xi \rangle. \quad (\text{B.8b})$$

¹Der Erwartungswert für den Operator \hat{f} ist durch das Integral $\langle \psi | \hat{f} | \psi \rangle = \int_0^{L_y} dy \int_{-\infty}^{+\infty} dx \psi^*(x, y) \hat{f} \psi(x, y)$ gegeben.

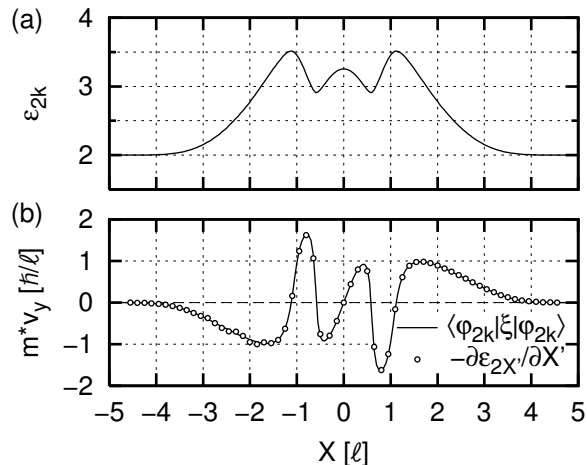


Abb. B.1. Berechnung des Teilchenimpulses mit zwei verschiedenen Ansätzen. (a) Zu-
 grundeliegendes Landau-Band mit System-
 parametern aus Abb. 2.5. (b) Elektronen-
 impuls. Durchgezogene Linie: Wert des Inte-
 grals (B.8b). Kreise: Numerische Ableitung
 der Bandstruktur aus (a) gemäß (B.9). Im
 Gegensatz zu (B.8b) hängt hier die Genauig-
 keit der Größe m^*v_y vom Rastermaß ΔX ab,
 mit dem die Dispersion ε_{nk} bestimmt wurde.

Ohne Magnetfeld sind für ein quasifreies Elektron die Erwartungswerte des Teilchenimpulses und des generalisierten Impulses identisch: $\langle m^* \hat{\mathbf{v}} \rangle = \langle \hat{\mathbf{p}} \rangle = \hbar \mathbf{k}$. Gleichung (B.8a) beinhaltet die Korrektur für ein endliches Magnetfeld und repräsentiert zugleich den Kristallimpuls-Erhaltungssatz. In Abschnitt 1.2.4 wurde am Beispielsystem zweier benachbarter Quantendrähte gesehen, daß ein Elektron, welches aus dem linken in den rechten Quantendraht tunnelt (Abb. 1.3), in positiver y -Richtung einen zusätzlichen Impuls $eB\Delta X$ erhält. Dieselbe Impulsänderung ergibt sich für konstantes $\hbar k$ auch aus (B.8a), wenn in diese Formel die Verschiebung ΔX des Aufenthaltsschwerpunkts $\langle x \rangle$ eingesetzt wird.

Gerade wie die magnetische Länge eine natürliche Einheit darstellt, um die Ausdehnung der Wellenfunktion mit kleinen Zahlen in der Größenordnung des Bandindex n anzugeben, so folgt aus (B.8b), daß der Impuls in y -Richtung von der Größenordnung \hbar/ℓ ist. In Abschnitt 1.2.3 wurde festgestellt, daß der Schwerpunkt von Volumenzuständen mit dem Leitzentrum zusammenfällt. Für diese Zustände ergibt sich aus (B.8b) ein in y -Richtung verschwindender Impuls. Im semiklassischen Bild korrespondiert der Volumenzustand zu einem Elektron, welches in einem Bereich konstanten Potentials eine geschlossene Kreisbahn beschreibt und folglich lokalisiert ist ($m^* \mathbf{v} = 0$).

In Bereichen mit Potentialvariationen entlang der x -Richtung weicht die Lösung der Schrödinger-Gleichung vom harmonischen Oszillator ab und die Positionen des Leitentrums X und des Aufenthaltsschwerpunkts $\langle x \rangle$ stimmen nicht mehr überein. Ihr Abstand ist laut (B.8b) proportional zum Teilchenimpuls in y -Richtung. Wenn die Variation des Potentials in der Potentialstufe eines Heteroübergangs besteht, entspricht dem Randzustand mit endlichem Impuls im semiklassischen Bild ein Elektron, das an der Potentialwand wiederholt reflektiert wird. Seine Trajektorie setzt sich aus Kreisbögen zusammen, deren Mittelpunkte sich innerhalb des Potentialwalls befinden. Folglich liegen die Orbitzentren außerhalb des Aufenthaltsbereichs des Elektrons, woraus $\langle x \rangle - X \neq 0$ und damit eben der von Null verschiedene Impuls in y -Richtung folgt. Je größer dieser Abstand wird, desto mehr dominiert in der Elektronenbahn, d. h. in den *skipping orbits*, der Richtungsanteil parallel zur Potentialwand und entsprechend nimmt m^*v_y zu. Mit kürzer werdenden Kreisbögen steigt zudem die Frequenz der oszillatorischen Bewegung an. Sie ist insbesondere immer höher als für ein Elektron im Probenvolumen, das Vollkreise mit der Frequenz ω_c ausführt (Gl. 1.7). Bereits aus dieser einfachen Betrachtung folgt also, daß Randzustände eine höhere Energie als Volumenzustände aufweisen.

Abschließend wird unter Berücksichtigung der Ergebnisse von Abb. B.1 der als Erwartungswert einer Messung bestimmte Impuls (B.8) mit der Gruppengeschwindigkeit verglichen, die sich aus der Ableitung der Energiedispersion ergibt. Beide sind – zumindest bei verschwindendem Magnetfeld – laut [Kop02] identisch. Für die mit der effektiven Masse multiplizierte Gruppengeschwindigkeit gilt

$$\begin{aligned}
m^* v_y &= \frac{m^*}{\hbar} \frac{\partial E_{nk}}{\partial k} = \frac{m^*}{\hbar} \frac{\partial E_{nX}}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial k} \\
&= -\frac{\ell^2 m^*}{\hbar} \frac{\partial (\hbar \omega_c \varepsilon_{nX} + \frac{1}{2})}{\partial X} \\
&= -\hbar \frac{\partial \varepsilon_{nX}}{\partial X} = -\frac{\hbar}{\ell} \frac{\partial \varepsilon_{nX'}}{\partial X'}.
\end{aligned} \tag{B.9}$$

Dabei wurde das dimensionslose Leitzentrum $X' \equiv X/\ell$ eingeführt. Aus Abb. B.1 folgt – jedenfalls für das Beispielsystem einer Potentialstufe – die Identität von (B.8b) und (B.9):

$$\frac{\partial \varepsilon_{nX'}}{\partial X'} = -\langle \xi \rangle. \tag{B.10}$$

Der Teilchenimpuls kann also auch in Gegenwart eines Magnetfelds wahlweise aus der Dispersion oder der Wellenfunktion bestimmt werden. Im abschnittsweise konstanten Potential ist $\varphi_{nk}(x)$ durch (1.41) und (1.53) gegeben. In den einzelnen Intervallen läßt sich die Wellenfunktion also durch die Parabolischen Zylinderfunktionen $D_{\varepsilon_{nk}-v_i}(-\xi\sqrt{2})$ und $D_{\varepsilon_{nk}-v_i}(\xi\sqrt{2})$ darstellen. Mit Hilfe der Stammfunktion (A.10),

$$\int z^2 [aD_\nu(-z) + bD_\nu(z)]^2 dz = Y_\nu(z), \tag{B.11}$$

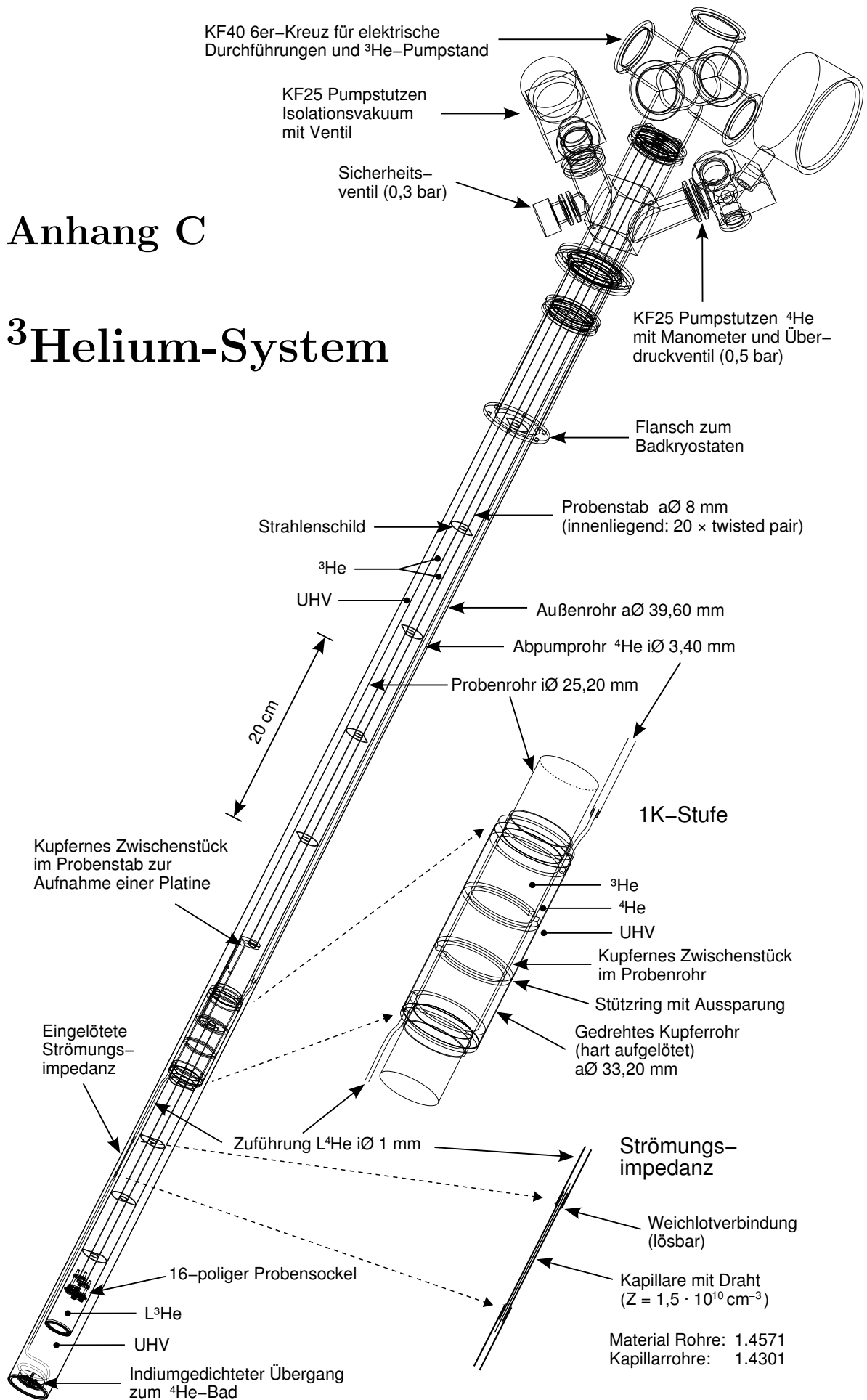
kann der Erwartungswert des Ortsoperators im i -ten Intervall als

$$\langle \xi \rangle_i = \gamma_i \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \varphi_{nk}^{(i)}(\xi) \xi \varphi_{nk}^{(i)}(\xi) d\xi = \frac{\gamma_i}{2} [Y_{\varepsilon_{nk}-v_i}(\xi_i\sqrt{2}) - Y_{\varepsilon_{nk}-v_i}(\xi_{i-1}\sqrt{2})] \tag{B.12}$$

geschrieben werden, wenn $a = 1$ und $b = \beta_{nk}^{(i)}$ in (B.11) und $Y_\nu(z)$ gesetzt wird.

Anhang C

³Helium-System





Literaturverzeichnis

- [Abl04] ABLE, ANDREAS: Untersuchungen zur metallorganischen Gasphasenepitaxie von Gruppe III Nitriden auf Silizium (111). Diss., Universität Regensburg, 2004.
- [Abr65] ABRAMOWITZ, M. und I. STEGUN: Handbook of Mathematical Functions. Dover Publications, New York, 1965.
- [Ada94] ADACHI, SADA O: GaAs and related materials. World Scientific, Singapore, 1994.
- [Aha59] AHARONOV, YAKIR und DAVID BOHM: Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory. Phys. Rev., 115:485, 1959.
- [Baf83] BAFLEUR, M. und A. MUNOZ-YAGUE: Crystal, impurity-related and growth defects in molecular beam epitaxial GaAs layers. Thin Solid Films, 101:299, 1983.
- [Ban88] BANDARA, K. M. S. V. und D. D. COON: Band offsets, Fermi levels and impurity bands in doped contact layers. Superlattices and Microstructures, 4:705, 1988.
- [Bar94] BARTOŠ, I. und B. ROSENSTEIN: Edge states in a strong magnetic field. J. Phys. A, 27:L53, 1994.
- [Bas96] BASTARD, GERALD: Wave mechanics applied to semiconductor heterostructures. les éditions de physique, Les Ulis Cedex, 1996.
- [Bau06] BAUER, JOHANNES: Transporteigenschaften zweidimensionaler Lochsysteme. Diplomarbeit, Universität Regensburg, 2006.
- [Boy69] BOYCE, WILLIAM E. und RICHARD C. DI PRIMA: Elementary differential equations and boundary value problems. Wiley, New York, 1969.
- [Bro96] BRONSTEJN, I. N., K. A. SEMENDJAEV, G. GROSCHE, V. ZIEGLER und D. ZIEGLER: Teubner-Taschenbuch der Mathematik. Teubner, Stuttgart, 1996.
- [Chk92] CHKLOVSKII, D. B., B. I. SHKLOVSKII und L. I. GLAZMAN: Electrostatics of edge channels. Phys. Rev. B, 46:4026, 1992.
- [Coh77] COHEN-TANNOUJJI, CLAUDE, BERNARD DIU und FRANCK LALOË: Quantum Mechanics. Wiley-Interscience, New York, 1977.
- [Dat97] DATTA, SUPRIYO: Electronic transport in mesoscopic systems. Cambridge University Press, 1997.
- [Dav98] DAVIES, JOHN H.: The physics of low-dimensional semiconductors. Cambridge University Press, 1998.
- [Dem93] DEMPSEY, JED, B. Y. GELFAND und B. I. HALPERIN: Electron-Electron Interactions and Spontaneous Spin Polarization in Quantum Hall Edge States. Phys. Rev. Lett., 70:3639, 1993.

- [DeS92] DESALVO, GREGORY C., WEN F. TSENG und JAMES COMAS: Etch Rates and Selectivities of Citric Acid/Hydrogen Peroxide on GaAs, $\text{Al}_{0.3}\text{Ga}_{0.7}\text{As}$, $\text{In}_{0.2}\text{Ga}_{0.8}\text{As}$, $\text{In}_{0.53}\text{Ga}_{0.47}\text{As}$, $\text{In}_{0.52}\text{Al}_{0.48}\text{As}$, and InP. *J. Electrochem. Soc.*, 139:831, 1992.
- [Deu01] DEUTSCHMANN, RAINER ALEXANDER: Two dimensional electron systems in atomically precise periodic potentials. Diss., Technische Universität München, 2001.
- [Dol97] DOLGOPOLOV, V. T., A. A. SHASHKIN, A. V. ARISTOV, D. SCHMEREK, W. HANSEN, J. P. KOTTHAUS und M. HOLLAND: Direct Measurements of the Spin Gap in the Two-Dimensional Electron Gas of AlGaAs-GaAs Heterojunctions. *Phys. Rev. Lett.*, 79:729, 1997.
- [Erd53] ERDÉLYI, ARTHUR (Hrsg.): Higher Transcendental Functions (Bd. 1 und 2). McGraw-Hill, New York, 1953.
- [Eza00] EZAWA, ZYUN FRANCIS: Quantum Hall Effects. Field Theoretical Approach and Related Topics. World Scientific, Singapore, 2000.
- [Fei06] FEIL, THOMAS: Non-Equilibrium Transport in Surface Superlattices Realized by Cleaved-Edge Overgrowth. Diss., Universität Regensburg, 2006.
- [Fis86] FISCHER, GERD: Lineare Algebra. Vieweg, Braunschweig, 1986.
- [Fuj87] FUJIWARA, K., K. KANAMOTO, Y. N. OHTA, Y. TOKUDA und T. NAKAYAMA: Classification and origins of GaAs oval defects grown by molecular beam epitaxy. *J. Cryst. Growth*, 80:104, 1987.
- [Ger93] GERTHSEN, CHRISTIAN und HELMUT VOGEL: Physik. Springer-Verlag, Berlin, 17. Aufl., 1993.
- [Gil04] GIL, AMPARO, JAVIER SEGURA und NICO M. TEMME: Integral representations for computing real parabolic cylinder functions. *Numer. Math.*, 98:105–134, 2004.
- [Gra04a] GRAYSON, M., M. HUBER, M. ROTHER, W. BIBERACHER, W. WEGSCHEIDER, M. BICHLER und G. ABSTREITER: Experimental demonstration of a sharp quantum Hall edge. *Physica E*, 25:212, 2004.
- [Gra04b] GRAYSON, M., D. SCHUH, M. BICHLER, M. HUBER, G. ABSTREITER, L. HOEPEL, J. SMET und K. VON KLITZING: Quantum Hall effect in a two-dimensional electron system bent by 90° . *Physica E*, 22:181, 2004.
- [Gra05] GRAYSON, M., D. SCHUH, M. HUBER, M. BICHLER und G. ABSTREITER: Corner overgrowth: Bending a high mobility two-dimensional electron system by 90° . *Appl. Phys. Lett.*, 86:032101, 2005.
- [Gra06] GRAYSON, MATTHEW: Persönliche Mitteilung, Technische Universität München, 2006.
- [Hab06] HABL, M., M. REINWALD, W. WEGSCHEIDER, M. BICHLER und G. ABSTREITER: Tunneling spectroscopy of Landau band gaps at a quantum Hall line junction with adjustable Fermi level. *Phys. Rev. B*, 73:205305, 2006.
- [Hal79] HALL, EDWIN H.: On a New Action of the Magnet on Electric Currents. *American Journal of Mathematics*, 2:287, 1879.
- [Hal82] HALPERIN, B. I.: Quantized Hall conductance, current-carrying edge states, and the existence of extended states in a two-dimensional disordered potential. *Phys. Rev. B*, 25:2185, 1982.

- [Har05] HARRISON, PAUL: Quantum wells, wires and dots. Wiley-Interscience, Chichester, 2. Aufl., 2005.
- [Her77] HERMANN, CLAUDINE und CLAUDE WEISBUCH: Optical detection of conduction-electron spin resonance in GaAs, $\text{Ga}_{1-x}\text{In}_x\text{As}$, and $\text{Ga}_{1-x}\text{Al}_x\text{As}$. Phys. Rev. B, 15:816, 1977.
- [Ho94] HO, TIN-LUN: Oscillatory tunneling between quantum Hall systems. Phys. Rev. B, 50:4524, 1994.
- [Hua02] HUANG, TSAI-YU, YU-MING CHENG, C.-T. LIANG, GIL-HO KIM und J. Y. LEEM: Exchange-enhanced Landé g -factor, effective disorder and collapse of spin-splitting in a two-dimensional GaAs electron system. Physica E, 12:424, 2002.
- [Hub05] HUBER, M., M. GRAYSON, M. ROTHER, W. BIBERACHER, W. WEGSCHEIDER und G. ABSTREITER: Structure of a Single Sharp Quantum Hall Edge Probed by Momentum-Resolved Tunneling. Phys. Rev. Lett., 94:016805, 2005.
- [Iid71] IIDA, SHINYA und KAZUHIRO ITO: Selective Etching of Gallium Arsenide Crystals in $\text{H}_2\text{SO}_4\text{-H}_2\text{O}_2\text{-H}_2\text{O}$ System. J. Electrochem. Soc., 118:768, 1971.
- [Isr06] ISRAEL, ROBERT: Persönliche Mitteilung, University of British Columbia, Vancouver, Kanada, 2006.
- [Jän90] JÄNICH, KLAUS: Funktionentheorie, Differentialgleichungen, Spezielle Funktionen. Springer, Berlin, 1990.
- [Jef72] JEFFREYS, HAROLD und BERTHA JEFFREYS: Methods of Mathematical Physics. Cambridge University Press, London, 1972.
- [Jor02] JORIO, ANOUAR, LAMIA SELLAMI, MARCEL AUBIN und COSMO CARLONE: Effect of intrinsic defects on the electron mobility of gallium arsenide grown by molecular beam epitaxy and metal organic chemical vapor deposition. J. Appl. Phys., 91:9887, 2002.
- [Jua90] JUANG, C., K. J. KUHN und R. B. DARLING: Selective etching of GaAs and $\text{Al}_{0.30}\text{Ga}_{0.70}\text{As}$ with citric acid/hydrogen peroxide solutions. J. Vac. Sci. Technol. B, 8:1122, 1990.
- [Kan92a] KANE, C. L. und MATTHEW P. A. FISHER: Transport in a One-Channel Luttinger Liquid. Phys. Rev. Lett., 68:1220, 1992.
- [Kan92b] KANE, C. L. und MATTHEW P. A. FISHER: Transmission through barriers and resonant tunneling in an interacting one-dimensional electron gas. Phys. Rev. B, 46:15233, 1992.
- [Kan00a] KANG, W., H. L. STORMER, L. N. PFEIFFER, K. W. BALDWIN und K. W. WEST: Tunnelling between the edges of two lateral quantum Hall systems. Nature (London), 403:59, 2000.
- [Kan00b] KANG, WOOWON: Tunneling between the Edges of Two Quantum Hall Systems. Vortrag, <http://online.itp.ucsb.edu/online/condmat99/kang/>, 2000.
- [Kim97] KIM, T.-J. und P. H. HOLLOWAY: Ohmic Contacts to GaAs Epitaxial Layers. Critical Reviews in Solid State and Materials Sciences, 22(3):239–273, 1997.

- [Kim03a] KIM, EUN-AH und EDUARDO FRADKIN: Interedge tunneling in quantum Hall line junctions. *Phys. Rev. B*, 67:045317, 2003.
- [Kim03b] KIM, EUN-AH und EDUARDO FRADKIN: Double Point Contact in Quantum Hall Line Junctions. *Phys. Rev. Lett.*, 91:156801, 2003.
- [Kli80] KLITZING, K. v., G. DORDA und M. PEPPER: New Method for High-Accuracy Determination of the Fine-Structure Constant Based on Quantized Hall Resistance. *Phys. Rev. Lett.*, 45:494, 1980.
- [Kli95] KLITZING, KLAUS v.: Physics and application of the quantum Hall effect. *Physica B*, 204:111, 1995.
- [Kol02] KOLLAR, MARCUS und SUBIR SACHDEV: Tunneling gap of laterally separated quantum Hall systems. *Phys. Rev. B*, 65:121304(R), 2002.
- [Kop02] KOPITZKI, KONRAD und PETER HERZOG: Einführung in die Festkörperphysik. B. G. Teubner, Stuttgart, 4. Aufl., 2002.
- [Lan30] LANDAU, L. D.: Diamagnetismus der Metalle. *Zeitschrift für Physik*, 64:629, 1930.
- [Lan65a] LANDAU, L. D. und D. TER HAAR: Men of physics: L. D. Landau (Bd. 1). Pergamon Press, Oxford, 1965.
- [Lan65b] LANDAU, LEV D.: Collected Papers. Pergamon Press, Oxford, 1965.
- [Lan73] LANDAU, L. D. und E. M. LIFSCHITZ: Lehrbuch der theoretischen Physik. Klassische Feldtheorie (Bd. II). Akademie-Verlag, Berlin (DDR), 6. Aufl., 1973.
- [Lan74a] LANDAU, L. D. und E. M. LIFSCHITZ: Lehrbuch der theoretischen Physik. Quantenmechanik (Bd. III). Akademie-Verlag, Berlin (DDR), 5. Aufl., 1974.
- [Lan74b] LANDAU, L. D. und E. M. LIFSCHITZ: Lehrbuch der theoretischen Physik. Elektrodynamik der Kontinua (Bd. VIII). Akademie-Verlag, Berlin (DDR), 3. Aufl., 1974.
- [Lan88] LANGER, JERZY M., C. DELERUE, M. LANNON und HELMUT HEINRICH: Transition-metal impurities in semiconductors and heterojunction band lineups. *Phys. Rev. B*, 38:7723, 1988.
- [Lee88] LEE, C. T. und Y. C. CHOU: Types of oval defects on GaAs grown by MBE. *J. Cryst. Growth*, 91:169, 1988.
- [Ler06] LERMER, MARKUS: Transportuntersuchungen an strukturierten Halbleiterheterostruktur-Spaltkanten. Diss., Universität Regensburg, 2006.
- [Mac84] MACDONALD, A. H. und P. STŘEDA: Quantized Hall effect and edge currents. *Phys. Rev. B*, 29:1616, 1984.
- [Mag66] MAGNUS, W., F. OBERHETTINGER und R. P. SONI: Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics. Springer, Berlin, 1966.
- [Mao94] MAO, B.-Y., J. A. NIELSEN, R. A. FRIEDMAN und G. Y. LEE: The Applications of Citric Acid/Hydrogen Peroxide Etching Solutions in the Processing of Pseudomorphic MODFETs. *J. Electrochem. Soc.*, 141:1082, 1994.

- [Meh92] MEHTA, S. K., R. MURALIDHARAN, G. D. SHARDA und R. K. JAIN: Some investigations on oval defects in MBE-grown GaAs. *Semicond. Sci. Technol.*, 7:635, 1992.
- [Mes91] MESSIAH, ALBERT: *Quantenmechanik* (1. Bd). Walter de Gruyter, Berlin, 2. Aufl., 1991.
- [Mit01] MITRA, ADITI und S. M. GIRVIN: Interedge phase coherence in quantum Hall line junctions. *Phys. Rev. B*, 64:041309(R), 2001.
- [Mor78] MORI, YOSHIFUMI und NAOZO WATANABE: A New Etching Solution System, $\text{H}_3\text{PO}_4\text{-H}_2\text{O}_2\text{-H}_2\text{O}$, for GaAs and its Kinetics. *J. Electrochem. Soc.*, 125:1510, 1978.
- [Nol93] NOLTING, W.: *Grundkurs: Theoretische Physik. Elektrodynamik* (3. Bd.). Zimmermann-Neufang, Ulmen, 4. Aufl., 1993.
- [Pau58a] PAUW, L. J. VAN DER: A method of measuring specific resistivity and Hall effect of discs of arbitrary shape. *Philips Res. Repts*, 13(1):1, 1958.
- [Pau58b] PAUW, L. J. VAN DER: Messung des spezifischen Widerstandes und des Hall-Koeffizienten an Scheibchen beliebiger Form. *Philips' Techn. Rdsch.*, 20(8):230, 1958.
- [Pet84] PETTIT, G. D., J. M. WOODALL, S. L. WRIGHT, P. D. KIRCHNER und J. L. FREEOUF: Summary Abstract: The MBE growth of GaAs free of oval defects. *J. Vac. Sci. Technol. B*, 2:241, 1984.
- [Pfe90] PFEIFFER, L., K. W. WEST, H. L. STORMER, J. P. EISENSTEIN, K. W. BALDWIN, D. GERSHONI und J. SPECTOR: Formation of a high quality two-dimensional electron gas on cleaved GaAs. *Appl. Phys. Lett.*, 56:1697, 1990.
- [Pfe05] PFEIFFER, LOREN N., KENNETH W. WEST, ROBERT L. WILLETT, HIDEFUMI AKIYAMA und LEONID P. ROKHINSON: Nanostructures in GaAs fabricated by molecular beam epitaxy. *Bell Labs Tech. J.*, 10(3):151, 2005.
- [Pob96] POBELL, FRANK: *Matter and Methods at Low Temperatures*. Springer, Berlin, 2. Aufl., 1996.
- [Pok05] POKROVSKI, ALEXIS: Estimates of parabolic cylinder functions on the real axis, [arXiv:math.CA/0510249](https://arxiv.org/abs/math.CA/0510249), 2005.
- [Pra90] PRANGE, RICHARD E. und STEVEN M. GIRVIN (Hrsg.): *The Quantum Hall Effect*. Springer, New York, 2. Aufl., 1990.
- [PTB98] PHYSIKALISCH-TECHNISCHE BUNDESANSTALT (Hrsg.): *Quanten-Hall-Effekt*. Physikalisch-Technische Bundesanstalt, Braunschweig, 3. Aufl., 1998.
- [Rei06] REINWALD, MATTHIAS: Herstellung und Charakterisierung von ferromagnetischem GaMnAs auf der GaAs (001)- und (311)A-Oberfläche. Diss., Universität Regensburg, 2006.
- [Ric74] RICHTER, H. und M. SCHULZ: Etch pit densities of $\langle 100 \rangle$ faces of GaAs single crystals. *Kristall und Technik*, 9:1041, 1974.
- [Rot99] ROTHER, MARTIN: Elektronische Eigenschaften von Halbleiternanostrukturen hergestellt durch Überwachsen von Spaltflächen. Diss., Technische Universität München, 1999.

- [Sam04] SAMUELSON, L., C. THELANDER, M. T. BJÖRK, M. BORGSTRÖM, K. DEPPERT, K. A. DICK, A. E. HANSEN, T. MÅRTENSSON, N. PANEV, A. I. PERSSON, W. SEIFERT, N. SKÖLD, M. W. LARSSON und L. R. WALLENBERG: Semiconductor nanowires for 0D and 1D physics and applications. *Physica E*, 25:313, 2004.
- [Sch89] SCHLOM, D. G., W. S. LEE, T. MA und J. S. HARRIS, JR.: Reduction of gallium-related oval defects. *J. Vac. Sci. Technol. B*, 7:296, 1989.
- [Sch03] SCHMULT, STEFAN: Intersubbandelektrolumineszenz im mittleren Infrarot von GaAs/AlGaAs-Quantendrahtkaskadenstrukturen hergestellt mittels Überwachsen von Spaltflächen. Diss., Universität Regensburg, 2003.
- [Sch05] SCHUSTER, ROBERT: Hochortsaufgelöste optische Spektroskopie an niedrigdimensionalen Halbleiterstrukturen. Diss., Universität Regensburg, 2005.
- [Sne87] SNELL, B. R., K. S. CHAN, F. W. SHEARD, L. EAVES, G. A. TOOMBS und D. K. MAUDE: Observations of Magnetoquantized Interface States by Electron Tunneling in Single-Barrier n^- (InGa)As-InP- n^+ (InGa)As Heterostructures. *Phys. Rev. Lett.*, 59:2806, 1987.
- [Sou86] SOUCHIÈRE, J. L. und VU THIEN BINH: On the Evaporation Rate of Silicon. *Surface Science*, 168:52, 1986.
- [Spa87] SPANIER, JEROME und KEITH B. OLDHAM: *An Atlas of Functions*. Springer, Berlin, 1987.
- [Sto83] STORMER, H. L. und D. C. TSUI: The Quantized Hall Effect. *Science*, 220:1241, 1983.
- [Sto85] STONE, A. DOUGLAS: Magnetoresistance Fluctuations in Mesoscopic Wires and Rings. *Phys. Rev. Lett.*, 54:2692, 1985.
- [Tak91] TAKAHASHI, KAZUE, HIROKI KAWADA, SHINJIRO UEDA, MUNEO FURUSE und SHIGERU SHIRAYONE: The origins and elimination of oval defects in GaAs layers grown by molecular beam epitaxy. *J. Vac. Sci. Technol. A*, 9:854, 1991.
- [Tak00] TAKAGAKI, Y. und K. H. PLOOG: Tunneling spectroscopy of Landau levels at the edge of a quantum Hall system. *Phys. Rev. B*, 62:3766, 2000.
- [Tem00] TEMME, NICO M.: Numerical and asymptotic aspects of parabolic cylinder functions. *J. Comput. Appl. Math.*, 121:221–246, 2000.
- [Tem03] TEMME, NICO M.; VIDUNAS, RAIMUNDAS: Parabolic cylinder functions: Examples of error bounds for asymptotic expansions. *Anal. Appl.*, Singap., 1(3):265–288, 2003.
- [Umb84] UMBACH, C. P., S. WASHBURN, R. B. LAIBOWITZ und R. A. WEBB: Magnetoresistance of small, quasi-one-dimensional, normal-metal rings and lines. *Phys. Rev. B*, 30:4048, 1984.
- [Umb87] UMBACH, C. P., P. SANTHANAM, C. VAN HAESSENDONCK und R. A. WEBB: Nonlocal electrical properties in mesoscopic devices. *Appl. Phys. Lett.*, 50:1289, 1987.

- [Ush90] USHER, A., R. J. NICHOLAS, J. J. HARRIS und C. T. FOXON: Observation of magnetic excitons and spin waves in activation studies of a two-dimensional electron gas. *Phys. Rev. B*, 41:1129, 1990.
- [Wac06] WACASER, BRENT A., KNUT DEPPERT, LISA S. KARLSSON, LARS SAMUELSON und WERNER SEIFERT: Growth and characterization of defect free GaAs nanowires. *J. Cryst. Growth*, 287:504, 2006.
- [Web85] WEBB, R. A., S. WASHBURN, C. P. UMBACH und R. B. LAIBOWITZ: Observation of h/e Aharonov-Bohm Oscillations in Normal-Metal Rings. *Phys. Rev. Lett.*, 54:2696, 1985.
- [Web88] WEBB, RICHARD und SEAN WASHBURN: Quantum interference fluctuations in disordered metals. *Physics Today*, 41(12):46, 1988.
- [Whi27] WHITTAKER, E. T. und G. N. WATSON: *A Course of Modern Analysis*. Cambridge University Press, London, 4. Aufl., 1927.
- [Woo81] WOOD, C. E. C., L. RATHBUN, H. OHNO und D. DESIMONE: On the origin and elimination of macroscopic defects in MBE films. *J. Cryst. Growth*, 51:299, 1981.
- [Yan04] YANG, I., W. KANG, K. W. BALDWIN, L. N. PFEIFFER und K. W. WEST: Cascade of Quantum Phase Transitions in Tunnel-Coupled Edge States. *Phys. Rev. Lett.*, 92:056802, 2004.
- [Yan05] YANG, I., W. KANG, L. N. PFEIFFER, K. W. BALDWIN, K. W. WEST, E.-A. KIM und E. FRADKIN: Quantum Hall line junction with impurities as a multislit Luttinger liquid interferometer. *Phys. Rev. B*, 71:113312, 2005.
- [Yos02] YOSHIOKA, DAIJIRO: *The Quantum Hall Effect*. Springer, Berlin, 2002.

Index

- α -Typ, ovaler Defekt, 126
- β -Typ, ovaler Defekt, 126
- δ -Dotierung, *siehe* Modulationsdotierung
- Γ -Punkt, 12
- 2DES, *siehe* zweidimensionales Elektronensystem
- 4-Punkt-Methode, *siehe* Vierpunktmessung
- AB-Effekt, *siehe* Aharonov-Bohm-Effekt
- Abelsche Identität, 27
- AFM, *siehe* Rasterkraftmikroskop
- Aharonov-Bohm-Effekt, 78, 80–84, 99–107
- Aktivierungsenergie
 - Ätzen (GaAs), 136
 - Sublimation (Si), 134
- anticrossing*, *siehe* Antikreuzung
- Antikreuzung, 23, 44, 58, 59, 106
- Äquipotentiallinie, 97, 104
- Ätzen (GaAs), 87, 135–137
- Ätzrate, 136
- Aufenthaltsschwerpunkt, 19, 44, 82, 100, 106, 147, 153
- Aufenthaltswahrscheinlichkeit, 14, 19, 28, 36
- Ausgasen (Galliumtiegel), 128
- Ausgedehnte Zustände, 73
- Bandindex, 16, 56
- Bandlücke, *siehe* Landau-Bandlücke
- BEP (*beam equivalent pressure*), 126
- Besetzungszahl, 20, 73, 117, 121
- Betriebsmasse, 91
- Beweglichkeit, 6, 8, 11, 67, 73, 109, 115, 123, 129, 134
- Blochfunktion, 12
- Bohrsches Magneton, 112
- Bornitrid, *siehe* pyrolytisches Bornitrid
- Brom-Methanol, 87
- bulk state*, *siehe* Volumenzustand
- CEO, *siehe* *cleaved-edge overgrowth*
- CGS-System, 15
- Chiralität, 79
- Chklovskii-Bild, 45–47, 70, 73
- Citronensäure, 137
- cleaved-edge overgrowth*, *siehe* Überwachsen von Spaltflächen
- Computer-Algebrasystem, 35, 56, 148
- Coulomb
 - Eichung, 14
 - Wechselwirkung, 14, 74–76, 79, 80, 122
- C-V-Meter, 93
- de Broglie-Wellenlänge, 38, 61, 112
- Dektak[®], 136
- Desorption (Oxid), 139
- Dielektrizitätskonstante, 93, 103
- DIL-Sockel, 88
- Diracsches Flußquantum, 21, 81
- Dotierung (Si), 131–135
- Dreieckspotential, 16
- Driftgeschwindigkeit, 6
- Ebene Welle, 15, 16
- EDS, EDX, 126
- Effektive Masse, 8, 11, 17, 154
 - Näherung, 9, 12–13, 31
 - in GaAs, 13
- Effusionszelle (Ga), 126, 129
- Eichtransformation, 14
- Einschlußpotential, *siehe* magnetisches Einschlußpotential
- Elektron-Elektron-Wechselwirkung, *siehe* Coulomb-Wechselwirkung
- Elektronen
 - dichte
 - dreidimensionale, 6, 8
 - zweidimensionale, 11, 93–95
 - impuls, 14, 18, 44, 64, 151–154
 - spin, *siehe* Spinaufspaltung
- Elementarladung, 6, 14
- EMN, *siehe* Effektive-Masse-Näherung
- Energie-Zeit-Unschärferelation, 82
- Energielücke, *siehe* Landau-Bandlücke
- Entartungsfaktor, *siehe* Besetzungszahl
- Envelope-Funktion, 12, 31

- exchange enhanced g-factor*, 113
- Facette (arsenterminiert), 126
- Feldeffekttransistor-Struktur, 16, 114
- Fermi
- Flüssigkeit, 79
 - Geschwindigkeit, 8
 - Niveau, 58, 70, 74, 92, 94
 - Vektor, 8
 - Wellenlänge, 38, 111
- FFT, *siehe* Schnelle Fourier-Transformation
- Flächendichte, *siehe* Elektronendichte, zweidimensionale
- Flächenwiderstand, *siehe* Schichtwiderstand
- Flußquantum, *siehe* Diracsches Flußquantum
- Fremdatom (MBE), 128
- Frontkontakt, 86, 88
- Füllfaktor, 21, 30, 60, 74, 93
- Gallium
- oxid, 125
 - spritzer, 124, 126, 131
 - tiegel, *siehe* Effusionszelle
- gate*, *siehe* Steuerelement
- Gaußsche Glockenkurve, 29, 44
- Gaußsches CGS-System, 15
- Gaußverteilung, 135
- Generalisierter Impuls, 14, 151
- Gesamtwellenfunktion, 25
- Gewichtungsverhältnis, 31, 50, 52
- g*-Faktor, 112, 114
- Gitterkonstante, 13, 132
- Golddrähtchen, 88
- Gruppengeschwindigkeit, 18, 59, 100, 151, 154
- guiding centre*, *siehe* Leitzentrum
- Hall
- , Edwin, 8
 - Effekt, 6, 8
 - Feld, 10
 - Gerade, 11
 - Koeffizient, 11, 132
 - Konstante, 11
 - Messung, 133
 - Plateau, 11, 73
 - Sensor, 11
 - Spannung, 10, 132
 - Struktur, 133
 - Widerstand, 11, 73
 - Winkel, 11
- Hamilton-Funktion, 151
- Hamilton-Operator, 14, 151
- Harmonischer Oszillator, 5, 17, 19, 25, 37, 153
- Hartree-Näherung, 12, 75
- ³Helium-System, 90, 155
- Hermitesche Funktion, 28, 36, 150
- Hermitesche Polynome, 29, 30
- Hermitezität, 20
- Höhere transzendente Funktionen, 17, 26
- hopping amplitude*, *siehe* Sprungamplitude
- Impuls, *siehe* Elektronenimpuls oder Generalisierter Impuls
- Impulsoperator, 14, 18, 20, 151
- Impulsrelaxationszeit, 8, 109
- Indiumkontakt, 87, 132
- Influenzkonstante, 93
- Initialspalt, 87, 138–139
- Inkohärenz, 82
- Inkompressible Streifen, 45
- Internationales Einheitensystem, 15
- Interpolationsverfahren, 54
- Intervallschachtelung, 53
- Kapazität, 10, 93, 103
- Knoten (Wellenfunktion), 24, 56
- Kohärenz, 82, 100
- Kompressible Streifen, 45
- Kondensatormodell, 93, 114
- Konfluente hypergeometrische Funktion, 26, 37, 56
- Kopplung,
- schwache, 21, 58–64
 - starke, 56–58, 70, 72
- Kreiswellenzahl, 16, 18–21
- Kristallimpuls, 16, 151
- Kristallimpulserhaltung, 21–23, 71, 76, 153
- Kryostat, *siehe* ³Helium-System
- Kummer-Funktion, 26
- Landau, 11
- Band, 5, 16
 - Bandlücke, 61, 70, 74–78
 - Bandstruktur, 12
 - Eichung, 15, 20, 37, 70, 152
 - Lev Dawidowitsch, 11
 - level mixing*, 69
 - Niveau, 5, 11, 12
 - Oszillationen, 70–72, 112–122
 - Quantisierung, 11
 - Zustand, 6

- Landé-Faktor, *siehe* g -Faktor
 Leckstrom (Steuerelektrode), 95
 Leitfähigkeit
 diagonale, 7
 spezifischer Leitfähigkeitstensor, 6
 transversale, 7
 Leitungsbandversatz, 13
 Leitwert, 71, 88, 96, 115
 -fluktuationen, 111
 -maximum, *siehe* Leitwertspitze
 -quantum, 71, 96
 -spitze, 72
 -überhöhung, 96, 107
 Leitzentrum, 18–21, 152
 Lochleitung, 6
 Lock-In-Technik, 71, 89, 95, 99, 102, 133
 Lösungsverfahren, 51–56
 Lokalisierte Zustände, 73
 Lokalisierung, 15, 111, 153
 Lorentz-Kraft, 8, 22, 66
- Magnetische Länge, 15, 153
 Magnetisches Einschlußpotential, 16, 18, 24, 36, 104, 152
 Maple[®], *siehe* Computer-Algebrasystem
 Masse (Verschaltung), 95
 MDSI, *siehe* Modulationsdotierung
 Mesa, 87, 91
 Mesoskopisches System, 12
 Metallorganische Gasphasenepitaxie, 123
 Metrologie, 8, 71
 Mischungsparameter, *siehe*
 Gewichtungsverhältnis
 Mittlere freie Weglänge, 8, 109, 130
 MOCVD, 123
 Modulationsdotierung, 45, 67, 91, 113, 114, 129, 130
 Monolage, 132
- Newtonsche Bewegungsgleichung, 18, 151
 Nomarski-Mikroskopie, 98, 125, 139
 Normierungsfaktor (Wellenfunktion), 50
 Nukleationszentrum, 126
- Oberflächendiffusion, 126
 Ohmscher Kontakt, 87
 Ohmsches Verhalten, 6
 Orbitzentrum, *siehe* Leitzentrum
 Ortsvariable, dimensionslos, 17, 152
 Ovale Defekte, 86, 97, 123–131
 Oxidation (GaAs), 139
- Parabolische Zylinderfunktionen, 26–29, 147–150
 Parameterfunktion, 52
 PBN, *siehe* Pyrolytisches Bornitrid
 Periodizitätsbedingung, 20
 Persistenter Photoeffekt, 91
 Phasenkohärenzlänge, 107, 109
 Phasenraum, 52, 55
 Phosphorsäure, 135
 Photolack, 87, 135, 137
 Photolithographie, 88, 91, 123
 Plattenkondensator, 93
 Polieren, chemisches, 87
 Pseudolösung, *siehe* Scheinlösung
 Punktkontakt, *siehe* Tunnelzentrum
 Pyrolytisches Bornitrid, 129
- QHE, *siehe* Quanten-Hall-Effekt
 Quanten
 -Hall-Effekt, 5, 8, 11, 34
 -draht, 21, 65–67, 153
 -interferenz, 11, 78–82
 -region, 86, 96, 111
 -topf, 65
 -zahl, 20
 Quasistatische Messung, 89, 103
- Randkanal, 34, 46, 63, 88
 Randpotential, 5
 endlich hoch, 40–47
 unendlich hoch, 34–40, 64, 116
 Randzustand, 19, 35, 44, 62, 72, 106, 153
 Rasterelektronenmikroskop, 126–128
 Rasterkraftmikroskop, 98
 REM, *siehe* Rasterelektronenmikroskop
 RHEED-Eichung, 132
 Riefen (Spaltfläche), 97, 138
 Ritznadel, 138
 Rückkontakt, 86, 88, 135
- Scheinlösung, 28, 34, 50, 54
 Schichtwiderstand, 7, 132
 Schnelle Fourier-Transformation, 106, 108
 Schrödinger-Gleichung, 14, 17, 151
 Schulter (Leitwertkurve), 113
 Selektives Ätzen, 137
 SEM, *siehe* Rasterelektronenmikroskop
 Semiklassisches Bild, 9, 22, 151
 Shubnikov-de Haas-Ozillationen, 92, 93, 95, 114
 Shutter, 128
 SI (*Système International d'Unités*), 15

- Silberleitkleber, 88
 Siliziumdotierung, 86, 131–135
 Sine-Gordon-Problem, 75, 79
 Singularität (Lösungsverfahren), 53
 Skalierungsfaktor (Wellenfunktion), 31, 50
skipping orbits, 19, 153
 Spaltbügel, 138
 Spinaufspaltung, 5, 14, 21, 74, 112–116
 Sprungamplitude, 67
 Stefan-Boltzmann-Gesetz, 134
 Stetigkeitsbedingungen, 25, 31–32, 52
 Steuerelektrode, 16, 45, 60, 67, 86, 91, 116
 Steuerelement, 87, 102
 Steuerspannung, 88, 93, 99
 Stokesscher Integralsatz, 81
 Stoppschicht (Ätzen), 137
 Streuung
 - an ionisierten Störstellen, 135
 - an Phononen, 6
 - an Störstellen, 6
 - Rück-, 79
 - Vorwärts-, 79
 Streuzzeit, 8, 11, 14
 Strömungsimpedanz, 90, 155
 Subband, 8
 Sublimationsquelle, 132
 Sublimationsrate, 134
 SUMO[®]-Zelle, 129

 Tantal, 126, 132
 Teilchenimpuls, *siehe* Elektronenimpuls
 Teilwellenfunktion, 30
 Tellur, 137
 Thermolement, 129
 Tight-Binding-Methode, 67, 78, 96, 103
 Trajektorie, 9, 19
 Triviale Lösung, 33
 Tunnelstrom, 67
 Tunnelzentrum, 76, 78–82, 98–112

 Überwachsen von Spaltflächen, 47, 86, 138
 Ultrahochvakuum, 87
 Unordnungspotential, 73, 104

 van der Pauw-Methode, 8, 132
 Vektorpotential, 14, 81, 151
 Vereinzelung des Wafers, 87
 Versetzungsdichte, 137
 Vierpunktmessung, 8, 88
 Volumenleckstrom, 58, 67, 89, 92
 Volumenzustand, 5, 19, 24, 35, 44, 153
 von Klitzing-Konstante, 71

 Vorspannung, 64, 93–95, 101, 117

 Wachs, synthetisch, 87, 135, 137, 138
 Wachstumsrate, 129, 132
 Wasserstoffperoxid, 135
 Weber-Hermiteische Funktionen, *siehe*
 Parabolische Zylinderfunktionen
 Webersche Gleichung, 26, 148
 Wellenvektor, 21
 Whittaker-Funktionen, 149
 Widerstand
 - longitudinaler, 8
 - transversaler, 7
 Widerstandsnormale, 11
 WKB-Methode, 38, 61
 Wronski-Determinante, 27

 X-Punkt, 12

 Zeeman-Aufspaltung, *siehe* Spinaufspaltung
 Zentrumsordinate, *siehe* Leitzentrum
 Zitronensäure, *siehe* Citronensäure
 Zustandsdichte, zweidimensional, 8, 21, 73
 Zweidimensionales Elektronensystem, 5, 123,
 129
 Zweipunktmessung, 71, 73, 96
 Zyklische Randbedingungen, 20
 Zyklotron
 - Energie, 17, 56
 - bahn, 10
 - frequenz, 10
 - periode, 14
 - radius, 10

Danksagung

Die folgenden Zeilen möchte ich all denen widmen, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben. Mein besonderer Dank gilt:

- Prof. Dr. Werner Wegscheider für die Vergabe des interessanten Themas, das ich unter Verwirklichung selbst gesteckter Ziele in einem motivierenden Forschungsumfeld bearbeiten durfte. Ebenso möchte ich mich für die fortwährende Unterstützung und die stete Diskussionsbereitschaft bedanken.
- Prof. Dr. Laurence Eaves (University of Nottingham) for proposing an interesting new experiment which is still in progress. Though the preliminary results are not considered in this thesis, the co-operation has given new impetus to the presented work.
- Dr. Matthew Grayson (Walter Schottky Institut) für das stete Interesse am Fortgang meiner Forschungsarbeit, der die lehrreichen Diskussionen und seine kritischen Anmerkungen zugute kamen.
- Prof. Dr. Wilfried Schoepe, Dr. Dieter Schowalter und Dr. Karl Neumaier (Walther-Meißner-Institut), die mir mit Rat und Tat bei Konstruktions- und Undichtigkeitsproblemen mit dem $^3\text{Helium}$ -System zur Seite standen.
- Max Bichler in der Gruppe von Prof. Dr. Gerhard Abstreiter (Walter Schottky Institut) für das Wachstum einiger Proben zu der Zeit als sich die Regensburger Anlage noch im Aufbau befand.
- Prof. Dr. Dieter Weiss und seinen Mitarbeitern für die Möglichkeit, den Reinraum nutzen zu dürfen, und für die häufige Überlassung des Helium-Lecksuchgerätes.
- Dr. Matthias Reinwald, Christian Gerl und Dr. Dieter Schuh für das Wachstum zahlreicher Proben. Besonderer Dank geht dabei an Dr. Hans-Peter Tranitz und Prof. Dr. Werner Wegscheider für die entscheidenden Maßnahmen zur erfolgreichen Reduzierung der ovalen Defekte bei hochbeweglichen Proben.
- Elisabeth Reinwald für die präzise Vermessung meiner Übergitterproben mit dem Rasterkraftmikroskop.
- Prof. Dr. Robert Israel (University of British Columbia, Vancouver) for the enlightening discussion about indefinite integrals involving parabolic cylinder functions.
- Dr. Thomas Feil, meinem langjährigen Büro- und Laborkollegen, für die vielen, auch kontroversen Gespräche und Diskussionen über Physik und nicht fachbezogene Themen. Besonders bedanken möchte ich mich auch für die beträchtliche Sorgfalt beim Korrekturlesen und die wertvollen Kommentare, die sich daraus ergaben.
- Dr. Robert Schuster für die sorgfältige Korrektur meiner Arbeit, die produktiven Verbesserungsvorschläge und für die aufmunternden Worte während des letzten Jahres. Ein großes Dankeschön geht ebenfalls an Tanja Schuster für die Durchsicht des Anhangs.

- Ursula Wurstbauer, Dr. Stefan Schmult (Bell Labs, Murray Hill) und Thomas Herrle für die kurzfristige und genaue Korrektur einiger Abschnitte dieser Arbeit.
- Renate Creuzburg und Annemarie Dinkel für die schnelle und freundliche Hilfe bei vielen verwaltungstechnischen Angelegenheiten.
- den aktuellen und ehemaligen Kollegen für die angenehme Atmosphäre am Lehrstuhl, die für ein konstruktives Arbeiten sehr förderlich war.
- Norbert Sommer, Johann Deinhart und allen Mitarbeitern der feinmechanischen Werkstatt für die akkurate und rechtzeitige Erledigung zahlreicher Aufträge. Besonderer Dank gilt Walter Wendt für die ideenreiche Umsetzung manch „abenteuerlicher“ Konstruktion.
- Fritz Koch für den kompetenten Aufbau des zuverlässig funktionierenden $^3\text{Helium}$ -Pumpstandes.
- der Deutschen Forschungsgemeinschaft und dem Bundesministerium für Bildung und Forschung für die finanzielle Unterstützung im Rahmen des DFG-Schwerpunktprogramms „Quanten-Hall-Systeme“ bzw. des BMBF-Verbundprojekts „Elektronenkorrelationen und Dissipationsprozesse in Halbleiterquantenstrukturen“.
- meinen Eltern für die begleitende Unterstützung während meiner Studien- und Promotionszeit und die interessierte Anteilnahme am Fortgang meiner Arbeit.