

Matériaux oxydes pour les applications électriques et électroniques

P. Marchet
marchet@unilim.fr

R. El Bouayadi
rachid.elbouayadi@uit.ac.ma

Chapitre 1 QUELQUES NOTIONS DE PHYSIQUE CRISTALLINE

Introduction à l'utilisation des tenseurs dans
l'étude des propriétés des cristaux

Introduction à l'utilisation des tenseurs dans l'étude des propriétés des cristaux

Une propriété physique est l'entité qui relie deux grandeurs mesurables, elles mêmes ne représentant aucune propriété particulière

Ces grandeurs mesurables peuvent être des scalaires ou des vecteurs

Exemples :

force = masse x accélération $f = m \cdot a$

induction magnétique = perméabilité x champ magnétique

$$\mathbf{B} = \mu_0 \cdot \mathbf{H}$$

Matériaux **isotropes** : la propriété est un **scalaire**

Matériaux **anisotropes** : la plupart des cristaux étant anisotropes, leurs propriétés physiques seront décrites par des **équations tensorielles**

induction magnétique = perméabilité x champ magnétique

$$\mathbf{B} = \mu_0 \cdot \mathbf{H}$$

1.1 Influence des matériaux magnétiques sur les lignes de champ

On a calculé le champ magnétique crée, dans le vide, au centre d'une bobine plate de N spires circulaires de rayon R et d'axe \vec{x} parcourue par le courant i : $\vec{B} = \mu_0 \frac{Ni}{2R} \vec{x}$.

On définit l'excitation magnétique $\vec{H} = \frac{Ni}{2R} \vec{x}$ qui s'exprime en A/m , elle est caractéristique de la géométrie bobine et indépendante du milieu (ici le vide).

Le milieu est caractérisé par la perméabilité μ_0 .

Dans le vide on a : $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$.

Il existe des matériaux, qui se magnétisent très facilement, c'est-à-dire qui conduisent à une valeur élevée de B avec une valeur faible de H , ce sont les **matériaux ferro-magnétiques et ferri-magnétiques**.

En simplifiant (hypothèse de linéarité) on peut écrire $\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$

μ_r est la perméabilité relative du matériau

$\mu = \mu_0 \mu_r$ est la perméabilité magnétique absolue du matériau

$$\text{Propriété} = \frac{\text{Effet (ex : B)}}{\text{Cause (ex : H)}}$$

Cas général des cristaux :

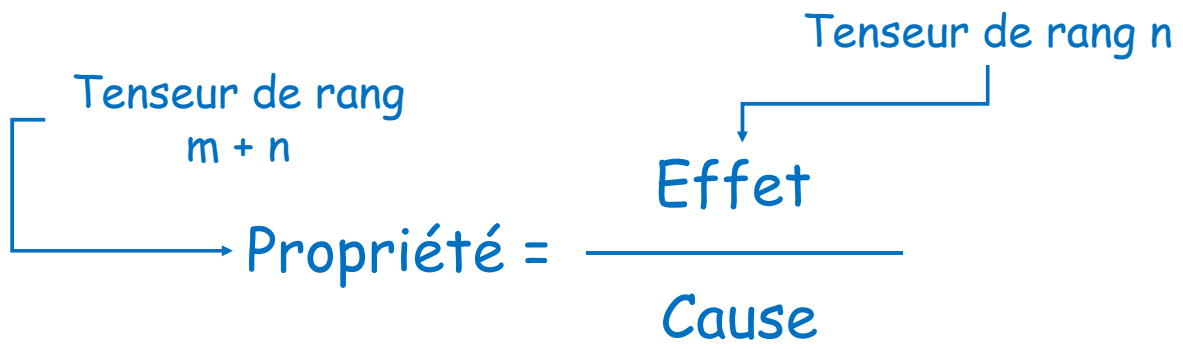
$$\text{Propriété} = \frac{\text{Effet}}{\text{Cause}}$$

Tenseur de rang $m+n$
Tenseur de rang n

↑
↓

←
→

Tenseur de rang m



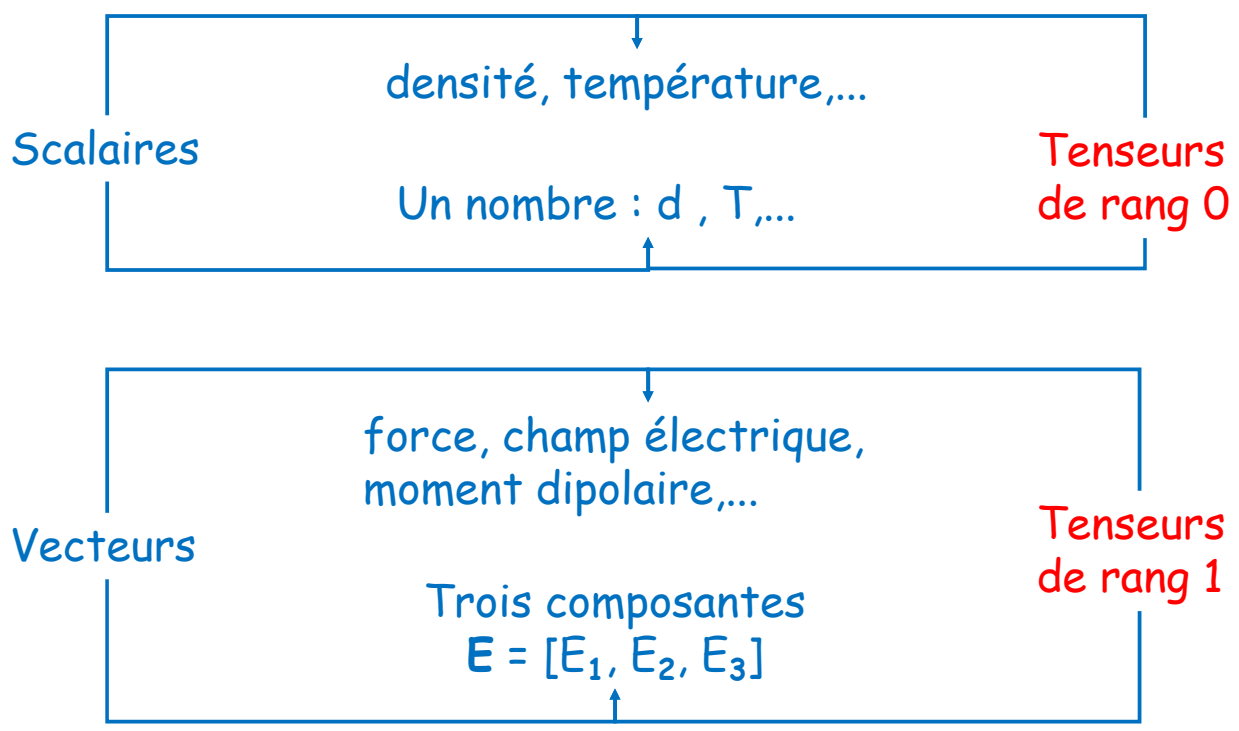
the formulation of the Hooke's law that describes the response of a linear elastic material to the application of mechanical stress. The coefficient s is called the elastic compliance. The tensor form of this equation is given

$$\epsilon_{mn} = S_{mnpq} \sigma_{pq}$$

where: S_{mnpq} is the **compliance tensor**

We notice in the above equation that both stress and strain are second-rank tensors that makes the compliance, s , a fourth rank tensor.

Scalars et vecteurs

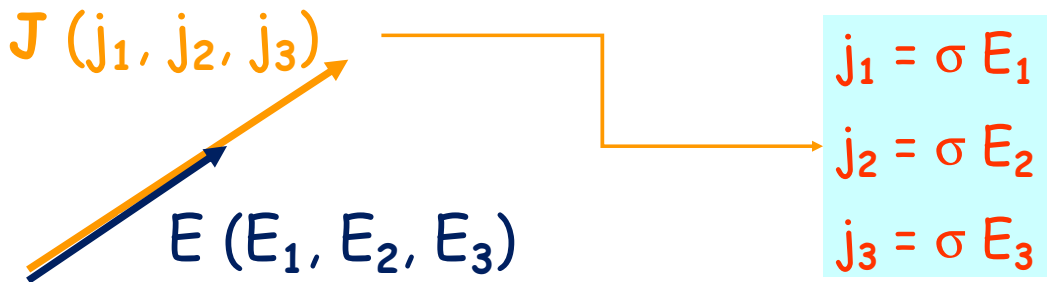


Tenseurs du 2^{ème} rang

Exemple : densité de courant \mathbf{J} dans un conducteur sous champ électrique \mathbf{E}



\mathbf{J} et \mathbf{E} sont colinéaires



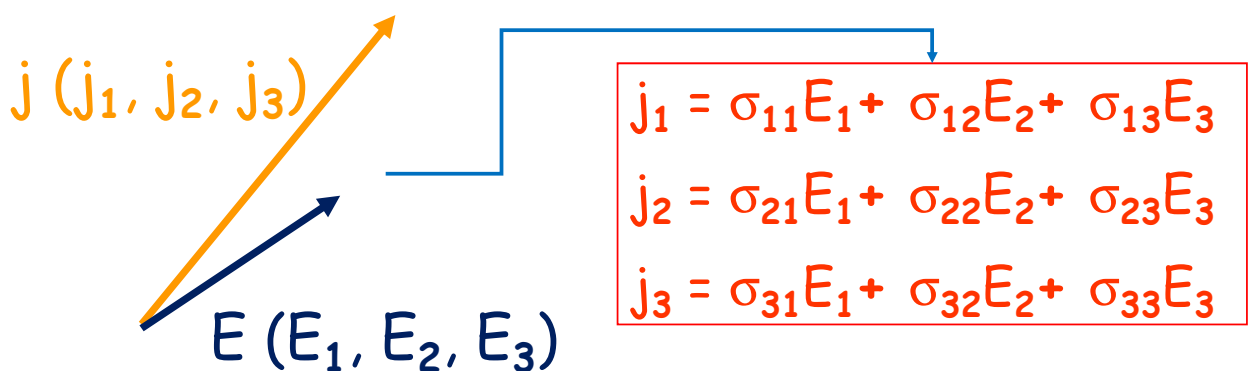
σ est alors un scalaire = tenseur de rang 0

Tenseurs du 2^{ème} rang

Exemple : densité de courant \mathbf{J} dans un conducteur sous champ électrique \mathbf{E}



\mathbf{J} et \mathbf{E} peuvent être non colinéaires



σ est alors un *tenseur de rang 2*

Tenseurs du 2^{ème} rang

$$j_1 = \sigma_{11}E_1 + \sigma_{12}E_2 + \sigma_{13}E_3$$

$$j_2 = \sigma_{21}E_1 + \sigma_{22}E_2 + \sigma_{23}E_3$$

$$j_3 = \sigma_{31}E_1 + \sigma_{32}E_2 + \sigma_{33}E_3$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

Tenseur du
2^{ème} rang

σ_{ij} : composantes du tenseur

$\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{33}$: diagonale principale

$$j_i = \sigma_{ij} E_j$$

Utilisation des tenseurs du 2^{ème} rang

q = cause et p = effet : peuvent être non colinéaires

$$p = [p_1 \ p_2 \ p_3] \longleftrightarrow q = [q_1 \ q_2 \ q_3]$$

$$p_1 = T_{11}q_1 + T_{12}q_2 + T_{13}q_3$$

$$p_2 = T_{21}q_1 + T_{22}q_2 + T_{23}q_3$$

$$p_3 = T_{31}q_1 + T_{32}q_2 + T_{33}q_3$$

$$p_i = T_{ij}q_j$$

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}$$

Chaque T_{ij} représente une
quantité physique qui
dépend du repère choisi

Quelques exemples de tenseurs du 2^{ème} rang

Propriété	cause	effet
Conductivité électrique	Champ électrique	Densité de courant
Conductivité thermique	Gradient de température	Densité de flux de chaleur
Permittivité	Champ électrique	Déplacement diélectrique
Susceptibilité diélectrique	Champ électrique	Polarisation
Perméabilité	Champ magnétique	Induction magnétique
Susceptibilité magnétique	Champ magnétique	Aimantation

Exemples de propriétés et des tenseurs associés

Rang du tenseur	Nb de coefficients	Nature	Exemples
0	1	Scalaire	Densité, température, masse
1	3	Vecteur	Champ électrique, polarisation Déplacement électrique, Coefficients pyroélectriques
2	9	Tenseur	Permittivité, conductivité, Contrainte, déformation
3	27	Tenseur	Coefficients piézoélectriques
4	81	Tenseur	Coefficients élastiques

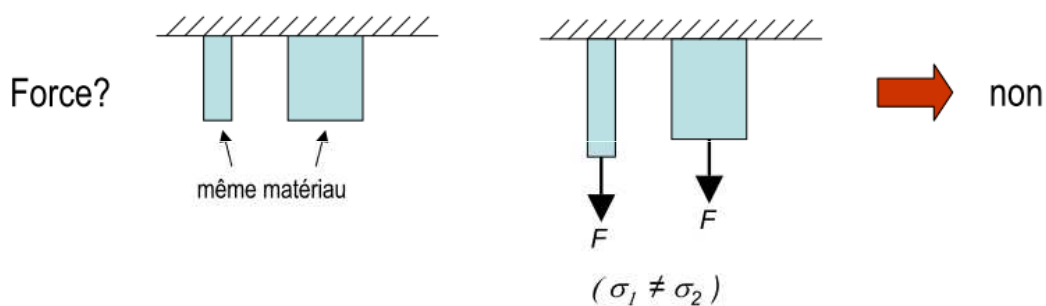
Contraintes et déformations

Contraintes et déformations

Introduction

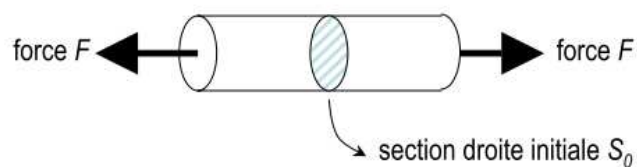
- Comment caractériser un effort pour bien représenter les propriétés mécaniques d'un matériau ?

Exemple : traction



Contrainte

$$\sigma = \frac{\text{force appliquée}}{\text{section initiale}} = \frac{F}{S_0}$$



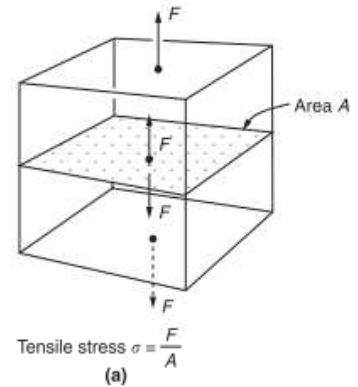
Contraintes et déformations

La contrainte

Une force F est appliquée à un bloc de matériau : F se transmet à travers le bloc, et est compensée par une force opposée (exercée par le support sur le bloc) : support est remplacé par le force opposé. F agit sur les sections du bloc *parallèles* à la *surface d'application* : le bloc est dans un état **contraint**.

L'intensité de la contrainte est :

$$\sigma = \frac{F}{A}$$



σ est produite par une force qui tire *perpendiculairement* à la surface :
Contrainte de **traction**

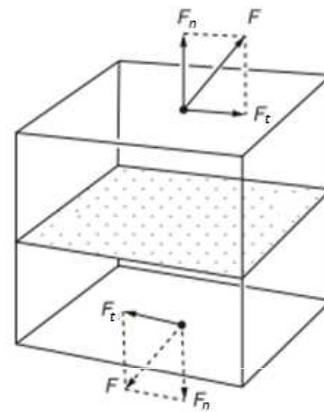
Contraintes et déformations

si la force fait un angle avec la surface :
la force est décomposée en deux composantes :

Une composante normale, qui engendre une contrainte de traction $\sigma = F_n/A$.

La contrainte de **cisaillement** τ (Cission) égale à F_t/A .

Dimension d'un contrainte [N/m²] ou *pascal*, unité trop petite dans la plupart des applications, on utilise souvent [MN/m²] ou Mpa.



Loi de HOOKE

Contraintes et déformations

Définir les constantes élastique (élasticité linéaire)

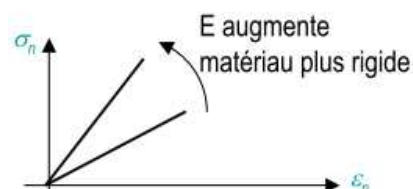
En *traction* simple : la déformation en traction est proportionnelle à la contrainte de traction : $\sigma = E\varepsilon_n$
 E : module de Young.

Idem, la déformation de cisaillement est proportionnelle à la cission : $\tau = G\gamma$
 G : module de cisaillement.

L'opposé de la dilatation est proportionnel à la pression : $p = -K\Delta$
 K : module de compressibilité.

Rqs : les modules ont la même dimension que les contraintes (GPa)
La plupart des solides ont une réponse élastique seulement pour les *très petites* déformations (<0,1%).
On a défini **quatre** constantes élastiques, mais pour la plupart des matériaux : $K \sim E$, $\nu \sim 0,33$ et $G \sim 3E/8$.

Les modules élastiques caractérisent la **rigidité** d'un matériau (**résistance à la déformation élastique**)



Contraintes et déformations

La déformation

Les matériaux *réagissent* aux contraintes en se *déformant*.

Une traction simple entraîne des *déformations de traction*. Le cube s'allonge de u dans la direction de traction.

On définit la déformation longitudinale conventionnelle (nominale) par :

$$\varepsilon_n = \frac{u}{l}$$

La section du cube sous contrainte *diminue* : la déformation *latérale* est décrite par le *coefficient de poisson* ν :

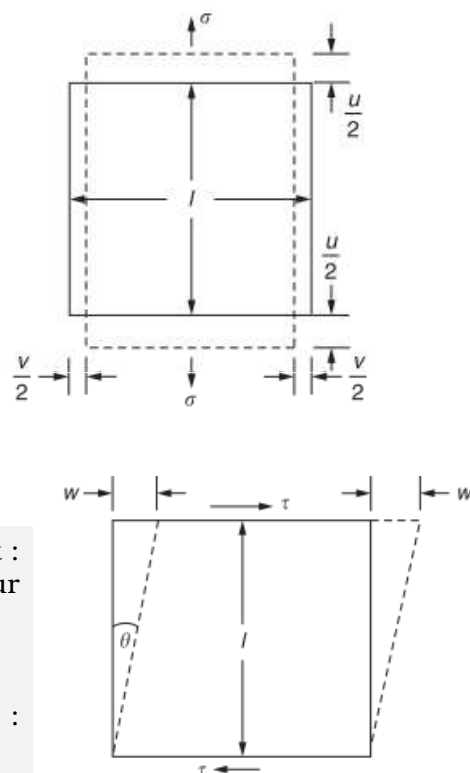
$$\nu = - \frac{\text{déformation latérale}}{\text{déformation longitudinale}}$$

Une cission crée des déformations de cisaillement : le tube est cisailé latéralement sur une longueur w , la *déformation de cisaillement* (**distorsion**) est :

$$\gamma = \frac{\omega}{l} = \tan\theta$$

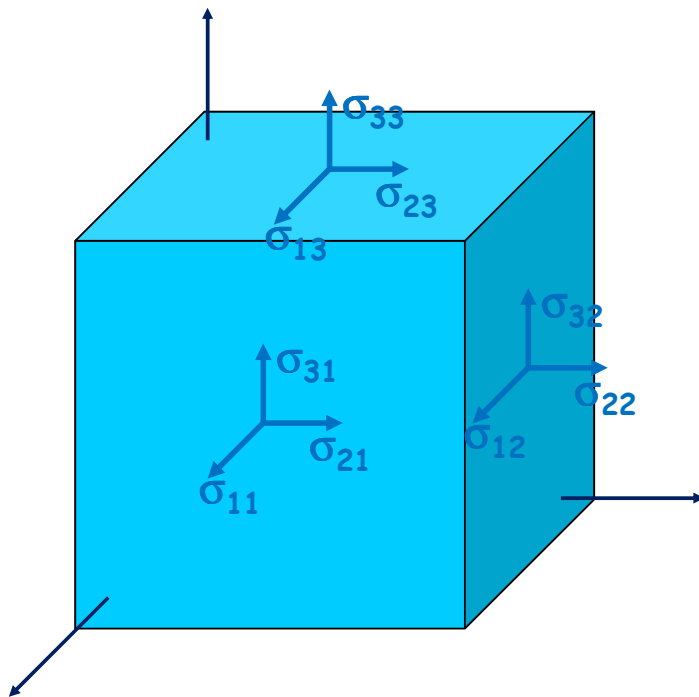
θ : angle de cisaillement.

Déformations élastiques sont toujours très petites : $\gamma = \theta$



Dilatation (variation du volume) : $\Delta = \frac{\Delta V}{V}$ Pression hydrostatique

Contraintes agissant sur un parallélépipède en équilibre statique : élément de matière de forme cubique (amorphe, polycristallin ou monocristallin)



$$\text{Contrainte} = \frac{\text{Force}}{\text{Aire}} = \sigma \text{ [N m}^{-2}\text{]}$$

Tenseur des contraintes σ_{ij}

i : direction de la force

j : normale à la face sur laquelle la contrainte agit

9 composantes :
tension (3) + cisaillement (6)

$i = j$

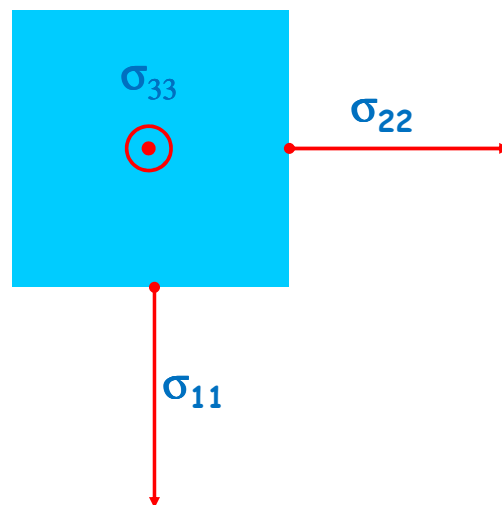
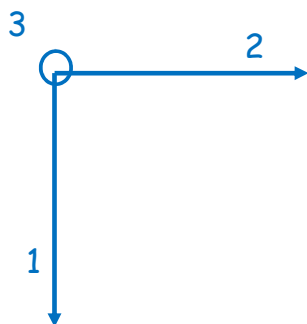
$i \neq j$

Tenseur symétrique

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

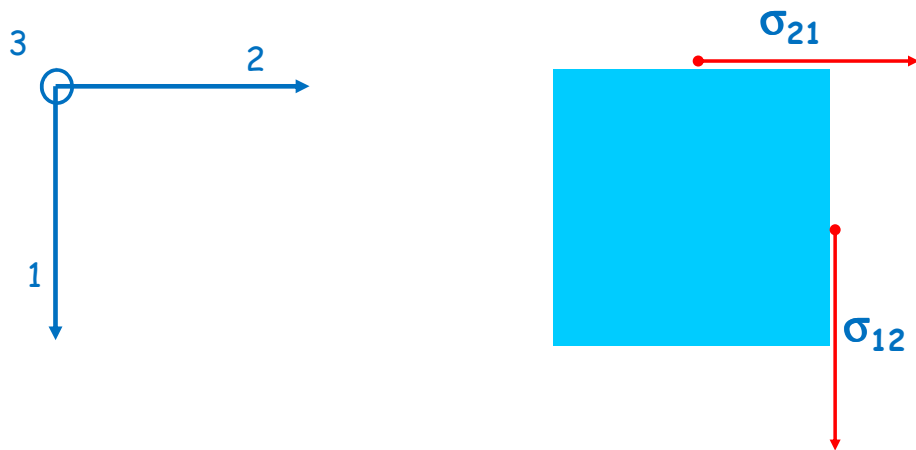
tension

On ne considère ici que des contraintes donnant naissance à des déformations purs ! (pas de mouvement général du corps)



$\sigma_{ii} = \text{tension}$ (traction ou compression)

cisaillement



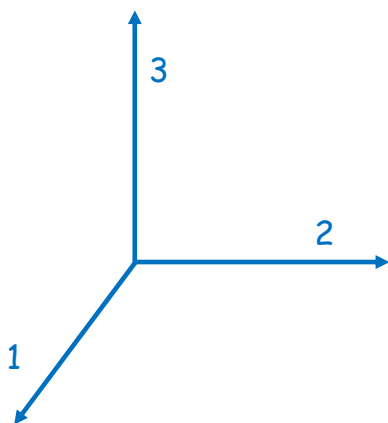
σ_{12} et σ_{21} ont donc le même effet :
cisaillement autour de l'axe 3

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} = \text{cisaillement}$$

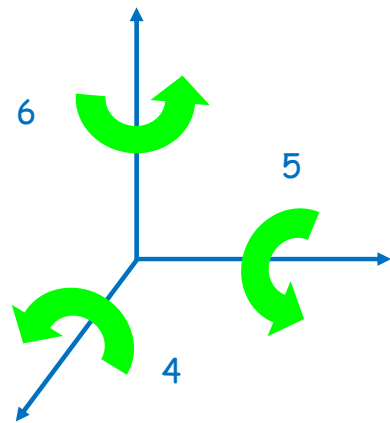
Tenseur symétrique

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_6 & \sigma_5 \\ \sigma_6 & \sigma_2 & \sigma_4 \\ \sigma_5 & \sigma_4 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

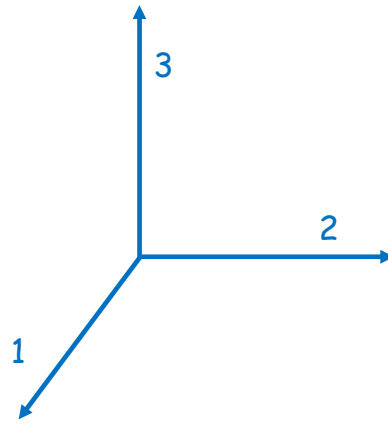
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$: composantes normales ou axiales



$\sigma_4, \sigma_5, \sigma_6$: composantes de cisaillement



Notation tensorielle

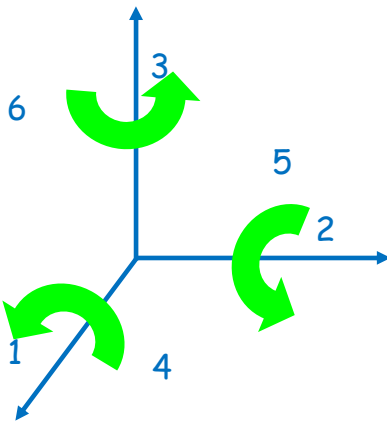


$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

Ou bien

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_6 & \sigma_5 \\ \sigma_6 & \sigma_2 & \sigma_4 \\ \sigma_5 & \sigma_4 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

Notation matricielle (Notation de Voigt)



$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix}$$

Déformations

$$e_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

$$e_{ij} = \epsilon_{ij} + \bar{\omega}_{ij}$$

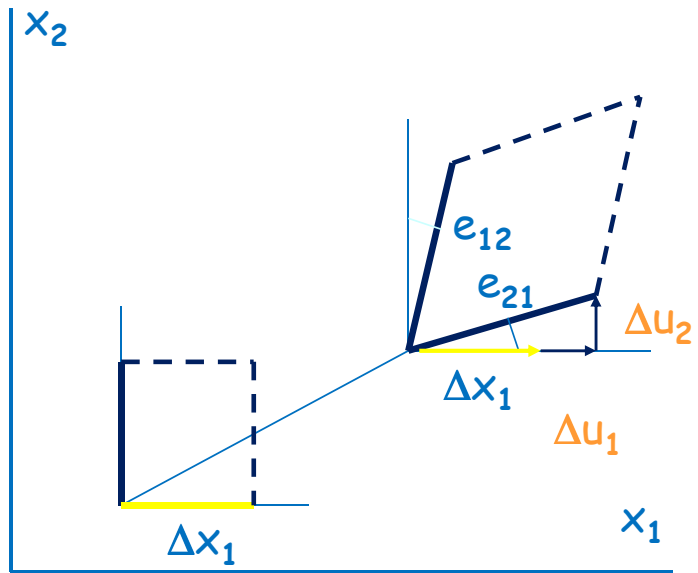
déformation

rotation

$$\bar{\omega}_{ij} = 1/2(e_{ij} - e_{ji})$$

$$\epsilon_{ij} = 1/2(e_{ij} + e_{ji})$$

Tenseur des déformations



$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{12} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} & \epsilon_{23} & \epsilon_{33} \end{bmatrix}$$

$i = j$: extensions
 $i \neq j$: cisaillement

14-1-2 Le tenseur des déformations

Considérons dans un solide deux points voisins A et B , distants de Δx (Figure 14-2). Avant toute déformation les coordonnées de ces deux points sont :

(x_i) pour A et $(x_i + \Delta x_i)$ pour B

Après déformation du solide, quelle qu'en soit la cause, les deux points ont été déplacés l'un par rapport à l'autre et, occupent les positions A' et B' dont les coordonnées sont :

$A' : (x_i + u_i)$ $B' : (x_i + \Delta x_i + u_i + \Delta u_i)$

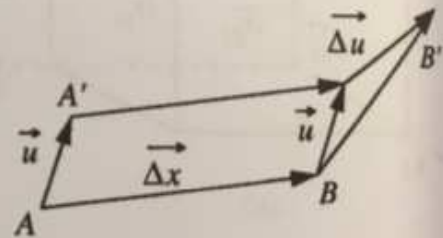


Figure 14-2

La variation de position de B par rapport à A est donnée par Δu puisque l'on a :

$$\vec{AB} = \Delta x$$

$$\vec{A'B'} = \Delta x + \Delta u$$

et donc

$$\vec{A'B'} - \vec{AB} = \Delta u$$

$$\Delta u_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \Delta x_2$$

$$\Delta u_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \Delta x_2$$

avec $\Delta u_i \ll \Delta x_j$ quels que soient i et j

Les coefficients $\frac{\partial u_i}{\partial x_k}$ sont notés e_{ik} : ils caractérisent les déplacements de matière aux environs de A .

Quelle est la signification physique des e_{ik} ? Prenons le cas particulier où AB est parallèle à Ox_1 , ce qui implique $\Delta x_2 = 0$. Lorsque B se déplace vers B' , la variation de position par rapport à A aura pour composantes Δu_1 et Δu_2 (Figure 14-3, sur laquelle les distances Δu_1 et Δu_2 sont largement exagérées). Ces composantes s'écrivent :

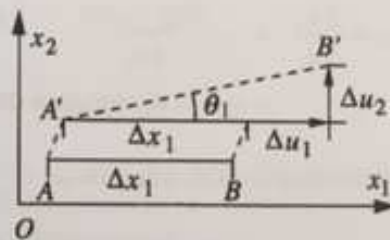


Figure 14-3

$$\Delta u_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \Delta x_1 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\Delta u_1}{\Delta x_1} = e_{11}$$

$$\Delta u_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \Delta x_1 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \frac{\Delta u_2}{\Delta x_1} = e_{21}$$

La figure 14-3 montre que e_{11} constitue l'allongement relatif du segment AB le long de Ox_1 . D'après cette même figure on a :

$$\text{tg} \theta_1 = \frac{\Delta u_2}{\Delta x_1 + \Delta u_1} \approx \frac{\Delta u_2}{\Delta x_1} = e_{21} = \theta_1$$

e_{21} correspond donc à un petit déplacement en rotation d'un élément linéaire parallèle à Ox_1 , vers Ox_2 .

On peut envisager une déformation analogue parallèle à Ox_2 : e_{22} sera l'allongement relatif d'un élément linéaire le long de Ox_2 . e_{12} correspondra donc à un petit déplacement en rotation d'un élément linéaire parallèle à Ox_2 , vers Ox_1 , (Figure 14-4).

$$e_{11} = \frac{\Delta u_1}{\Delta x_1}$$

= allongement relatif de AB_1 selon Ox_1

$$e_{22} = \frac{\Delta u'_2}{\Delta x_2}$$

= allongement relatif de AB_2 selon Ox_2

$$e_{12} = \frac{\Delta u'_1}{\Delta x_2} = \frac{\Delta u'_1}{\Delta x_2 + \Delta u'_2}$$

= $\text{tg} \theta_2 \approx \theta_2$ rotation de AB_2

$$e_{21} = \frac{\Delta u_2}{\Delta x_1} = \frac{\Delta u_2}{\Delta x_1 + \Delta u_1}$$

= $\text{tg} \theta_1 \approx \theta_1$ rotation de AB_1

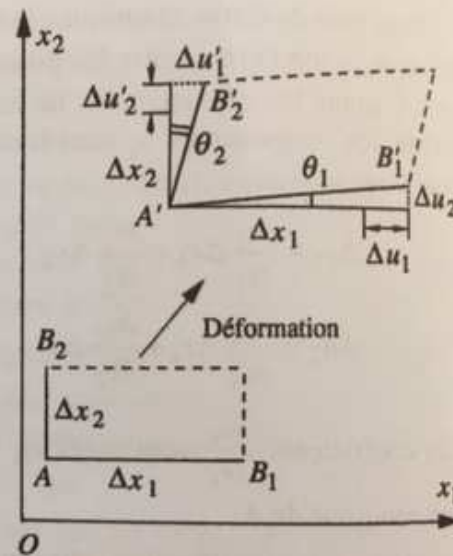


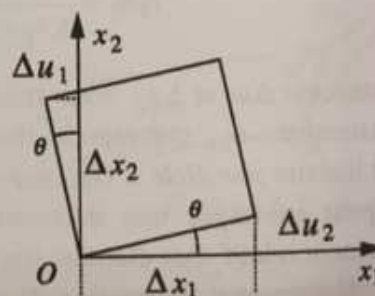
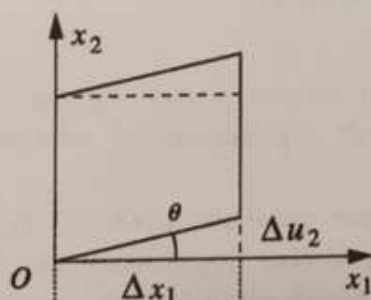
Figure 14-4 :
Déformation à deux dimensions

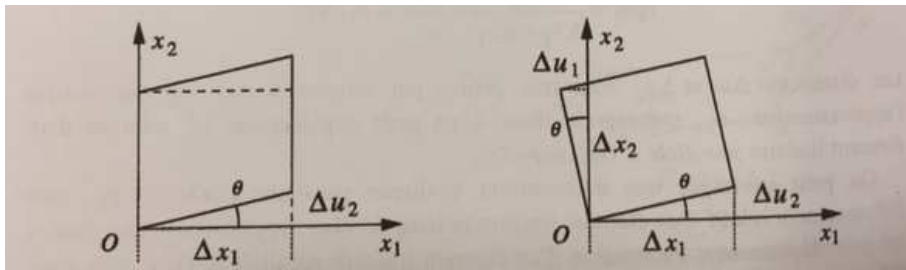
À trois dimensions, nous avons :

$$\Delta u_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial u_i}{\partial x_2} \Delta x_2 + \frac{\partial u_i}{\partial x_3} \Delta x_3$$

L'ensemble des neuf grandeurs $\partial u_i / \partial x_k = e_{ik}$ caractérise le déplacement de la matière aux environs de A. Ce sont les composantes d'un tenseur de rang 2. C'est à

comme nous allons le voir, les e_{ik} incluent simultanément les déformations relatives pures dues aux contraintes auxquelles est soumis l'élément de matière et les rotations d'ensemble de cet élément de matière. La figure 14-5 représente une déformation due à un cisaillement simple parallèlement à la direction Ox_2 . La figure 14-6 représente une rotation pure autour d'un axe perpendiculaire au plan Ox_1x_2 .





Ces figures montrent qu'un angle de déformation est caractérisé rigoureusement par la même expression qu'un angle de rotation :

Figure 14-5: $e_{21} = \frac{\Delta u_2}{\Delta x_1} = \tan \theta = \theta = \text{angle de déformation}$

Figure 14-6: $e_{21} = \frac{\Delta u_2}{\Delta x_1} = -\frac{\Delta u_1}{\Delta x_2} = -e_{12} = \text{angle de rotation}$

l'élément de matière considéré. Puisqu'on ne s'intéresse qu'aux déformations pures, il faut définir des paramètres qui ne contiennent aucune information sur les rotations pures. Écrivons les e_{ik} sous la forme :

$$e_{ik} = \frac{1}{2}(e_{ik} + e_{ki}) - \frac{1}{2}(e_{ki} - e_{ik}) = \varepsilon_{ik} - \rho_{ik}$$

en posant : $\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2}(e_{ik} + e_{ki})$ et $\rho_{ik} = \frac{1}{2}(e_{ki} - e_{ik})$

La figure 14-7 montre que, géométriquement, on peut toujours décomposer le déplacement d'un élément de matière en une déformation pure + une rotation pure. Sur la figure, on a pris l'exemple d'un élément initialement carré soumis à une traction selon la diagonale du carré.

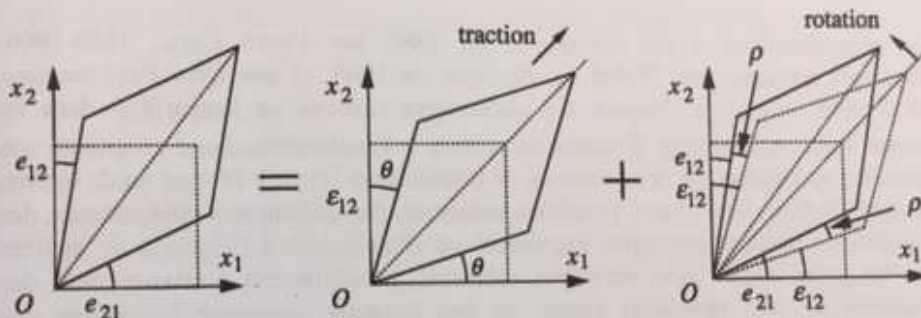


Figure 14-7 : déplacement = déformation + rotation

L'angle θ dû au cisaillement est :

$$2\theta = e_{12} + e_{21}$$

$$\theta = \frac{1}{2}(e_{12} + e_{21}) = \varepsilon_{12}$$

L'angle ρ dû à la rotation est :

$$\rho = e_{21} - e_{12} \quad \rho = \varepsilon_{12} - e_{12}$$

$$2\rho = e_{21} - e_{12} \Rightarrow \rho = \frac{1}{2}(e_{21} - e_{12}) = \rho_{12}$$

Dans cet exemple l'angle dû uniquement au cisaillement est donné par $(e_{12} + e_{21})/2$, et l'angle dû uniquement à la rotation est donné par $(e_{21} - e_{12})/2$.

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2}(e_{ik} + e_{ki}) \quad \text{et} \quad \varepsilon_{ki} = \frac{1}{2}(e_{ki} + e_{ik}) \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}$$

ε_{ik} est donc un tenseur symétrique

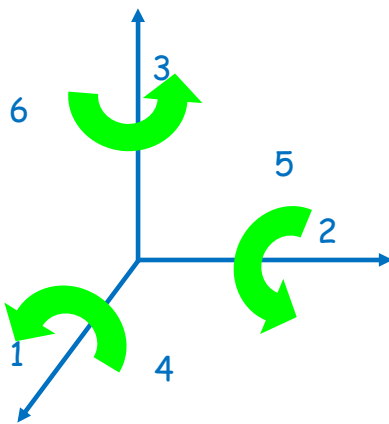
$$\rho_{ik} = \frac{1}{2}(e_{ki} - e_{ik}) \quad \text{et} \quad \rho_{ki} = \frac{1}{2}(e_{ik} - e_{ki}) \quad \Rightarrow \quad \rho_{ik} = -\rho_{ki}$$

ρ_{ik} est donc un tenseur antisymétrique. Il est normal d'avoir $\rho_{ii} = 0$, puisque les e_{ii} correspondent à des allongements purs, donc à des absences de rotation.

$\Rightarrow \varepsilon_{ik}$ est le tenseur des déformations. Les ε_{ii} représentent des allongements relatifs. Les ε_{ik} ($i \neq k$) représentent des déformations par cisaillement pur.

Le tenseur des déformations étant symétrique, il est caractérisé par six composantes indépendantes. On peut donc le représenter sous forme matricielle

Notation matricielle



$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}$$

14-3-1 Le tenseur rigidité et le tenseur élasticité

Considérons d'abord le cas d'un milieu homogène et isotrope, par exemple une tige métallique, corps polycristallin et de ce fait isotrope. Soumis à une contrainte pure σ selon son axe, la tige va subir un allongement relatif $\varepsilon = \Delta l/l$. Pour des contraintes relativement faibles, la tige se comporte de manière élastique, c'est-à-dire que, lors du relâchement de la contrainte, elle va reprendre sa forme initiale. Dans ces conditions, la loi de Hooke indique que contrainte et allongement sont reliés linéairement : $\varepsilon = s \sigma$. Le coefficient s s'appelle constante élastique. On peut exprimer la contrainte en fonction de l'allongement : $\sigma = c \varepsilon$. Le coefficient c s'appelle constante de rigidité ; la constante c est également le module d'Young E (Thomas Young, 1773-1829, était un physicien anglais).

Si on considère maintenant le cas d'un cristal, dont les propriétés sont en général anisotropes, il faut faire intervenir le tenseur des contraintes σ_{ij} et le tenseur des déformations ε_{kl} . La loi de Hooke et son « inverse » s'écrivent alors en toute généralité :

$$\varepsilon_{kl} = s_{kl ij} \sigma_{ij} \quad \text{et} \quad \sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

$s_{kl ij}$ est le tenseur élasticité et c_{ijkl} est le tenseur rigidité ; ce sont des tenseurs de

Notation matricielle

Avec des indices contractés S_{nm}

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix}$$

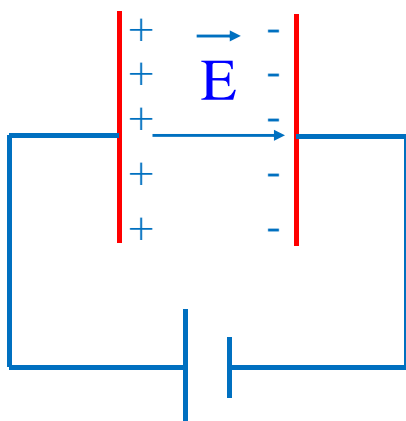
$$\varepsilon_i = S_{ij} \sigma_j$$

Propriétés diélectriques et magnétiques :

Aimantation, Polarisation diélectrique

Induction diélectrique et magnétique : dans le vide

Electrostatique

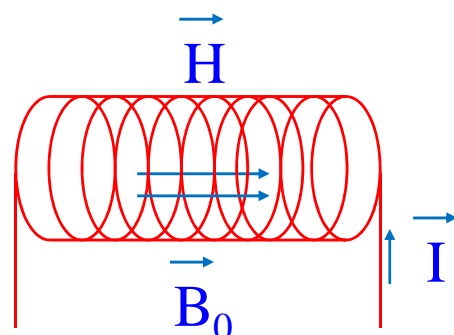


$$\vec{D}_0 = \left(\frac{q}{S} \right) \vec{U}$$

$$\vec{D}_0 = \epsilon_0 \vec{E}$$

la densité de charge sur les plaques est égale à la valeur du champ **D** entre les plaques

Magnétisme



$$\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}$$



Dans le vide

Electrostatique

Magnétisme

$$\vec{D}_0 = \epsilon_0 \vec{E} \longleftrightarrow \vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}$$

Effet :
Déplacement
diélectrique

Cause :
Champ
électrique

Effet :
Induction
magnétique

Cause :
Champ
magnétique

UNITES

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$$

C / m²

V / m

1.1 Influence des matériaux magnétiques sur les lignes de champ

On a calculé le champ magnétique créé, dans le vide, au centre d'une bobine plate de N spires circulaires de rayon R et d'axe \vec{x} parcourue par le courant i : $\vec{B} = \mu_0 \frac{Ni}{2R} \vec{x}$.

On définit l'excitation magnétique $\vec{H} = \frac{Ni}{2R} \vec{x}$ qui s'exprime en A/m , elle est caractéristique de la géométrie bobine et indépendante du milieu (ici le vide).

Le milieu est caractérisé par la perméabilité μ_0 .

Dans le vide on a : $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$.

Il existe des matériaux, qui se magnétisent très facilement, c'est-à-dire qui conduisent à une valeur élevée de B avec une valeur faible de H , ce sont les **matériaux ferro-magnétiques et ferri-magnétiques**.

En simplifiant (hypothèse de linéarité) on peut écrire $\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$

μ_r est la **perméabilité relative** du matériau

$\mu = \mu_0 \mu_r$ est la **perméabilité magnétique absolue** du matériau

ϵ_0  Permittivité (diélectrique) du vide
en F / m

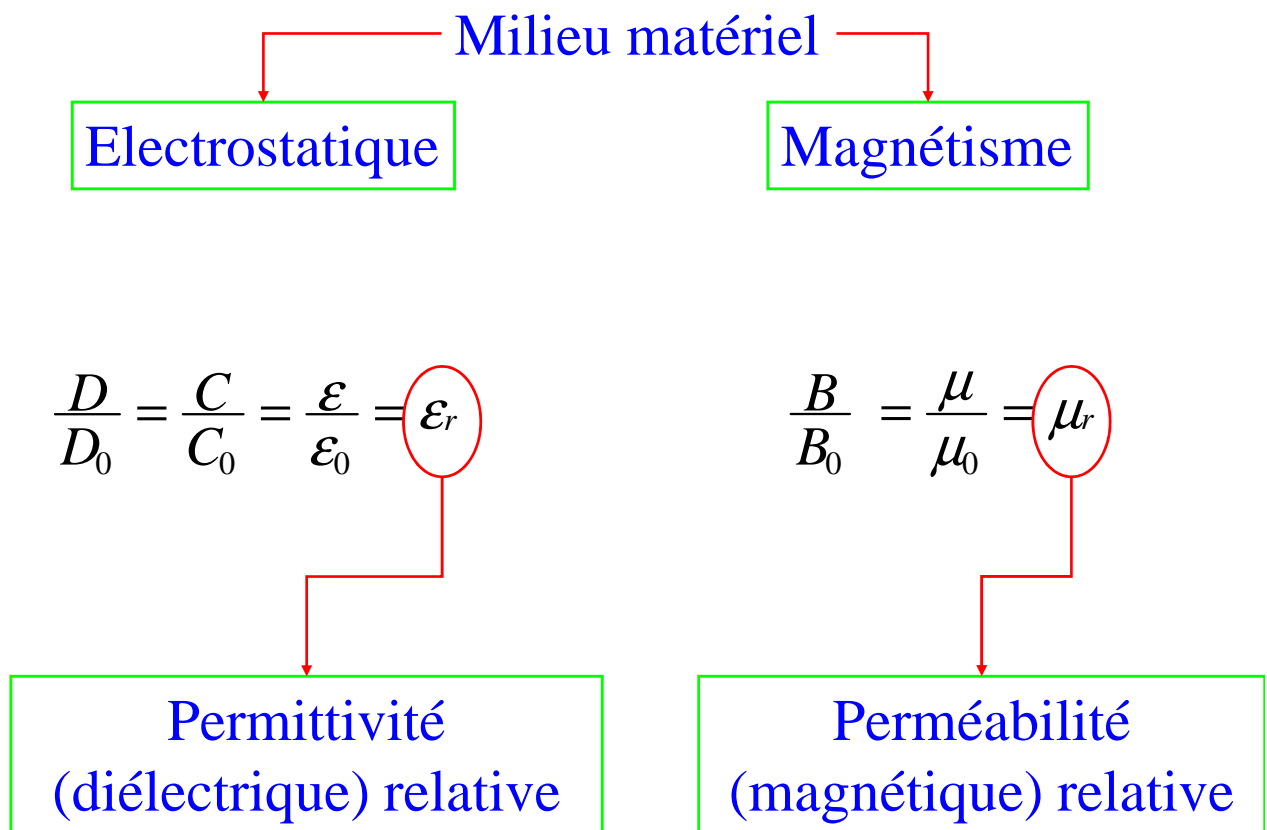
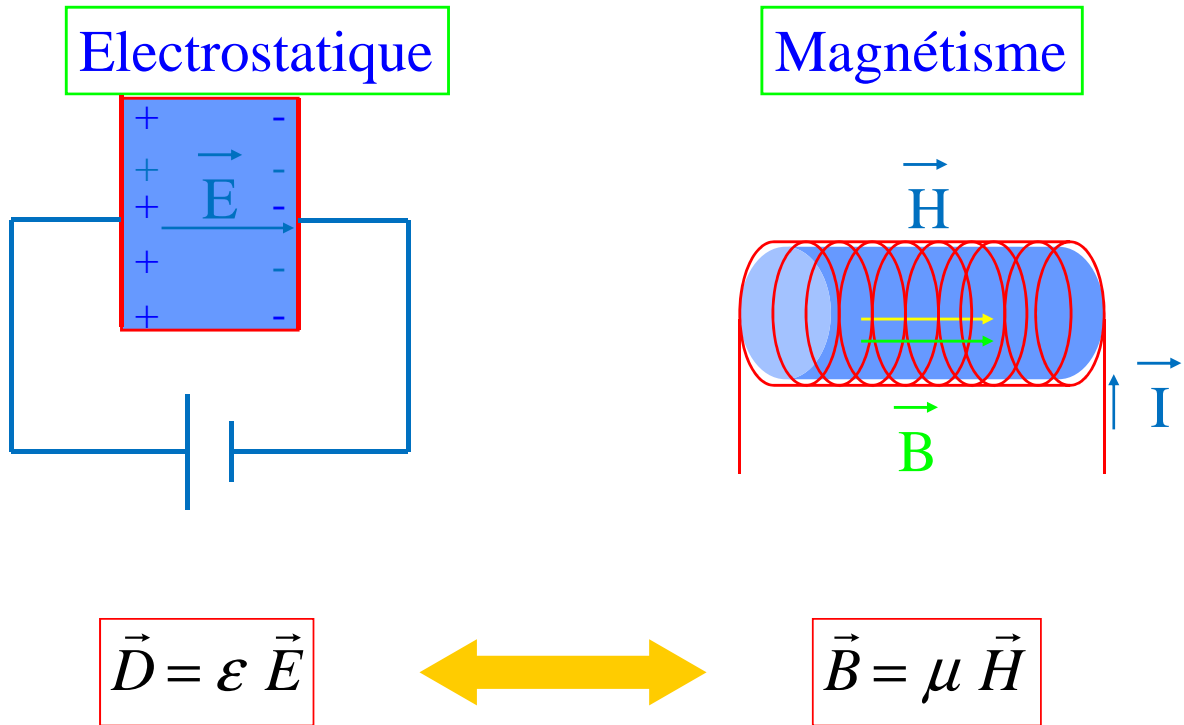
μ_0  Perméabilité (magnétique) du vide
en N / A^2

 $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N} / \text{A}^2$ exactement

 $\epsilon_0 \mu_0 \text{ C}^2 = 1$ 

$\epsilon_0 \approx 1 / (36\pi \cdot 10^9) \text{ F} / \text{m}$ 

Induction diélectrique et magnétique : dans un milieu matériel



ϵ_r et μ_r sans dimension

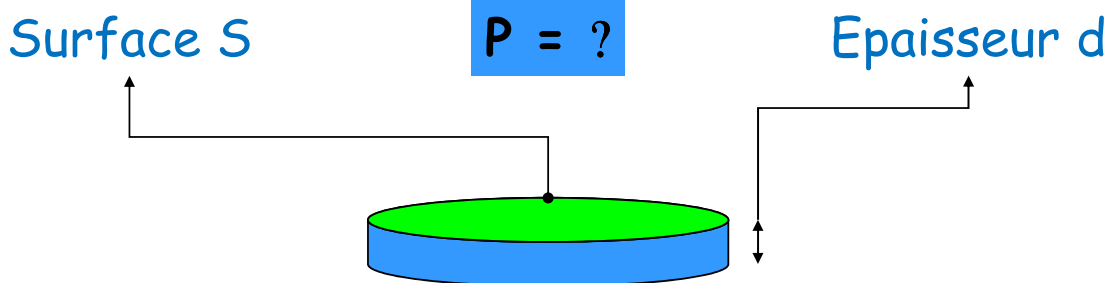
5.8 Les vecteurs polarisation et déplacement

Soit un matériau dont chaque élément de volume $d\vartheta$ possède le moment dipolaire \overline{dp} , on définit le **vecteur polarisation** par $\overline{P} = \frac{d\overline{p}}{d\vartheta}$ qui s'exprime en *coulomb/m²* (ou en *debye/m³*) homogène à une densité surfacique de charge. Ce vecteur polarisation est aussi homogène à $\epsilon_0 \cdot \overline{E}$ qui s'exprime aussi en *coulomb/m²* (pour une charge ponctuelle, $\epsilon_0 \cdot E = \frac{q}{4\pi r^2}$). On définit ainsi le **vecteur déplacement** $\overline{D} = \epsilon_0 \cdot \overline{E} + \overline{P}$ qui, par superposition, permet de prendre en compte les effets du champ électrique appliqué à la matière et de l'influence propre de la matière. Ce vecteur est nommé déplacement car, dans un milieu isolant, il contribue au déplacement des barycentres des charges positives et négatives et des dipôles. Il ne s'agit pas d'un déplacement permanent de charges mobiles (comme pour un courant électrique).

Pour de nombreux matériaux la polarisation acquise par la matière est proportionnelle au champ électrique appliqué : $\overline{P} = \chi \cdot \overline{E} = \epsilon_0 \cdot \alpha \cdot \overline{E}$ alors $\overline{D} = \epsilon_0 \cdot \overline{E} + \overline{P} = \epsilon_0 \cdot \overline{E} + \epsilon_0 \cdot \alpha \cdot \overline{E} = \epsilon_0 \cdot (1 + \alpha) \cdot \overline{E} = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \overline{E}$

$\epsilon_r = 1 + \alpha$ est la permittivité diélectrique du matériau

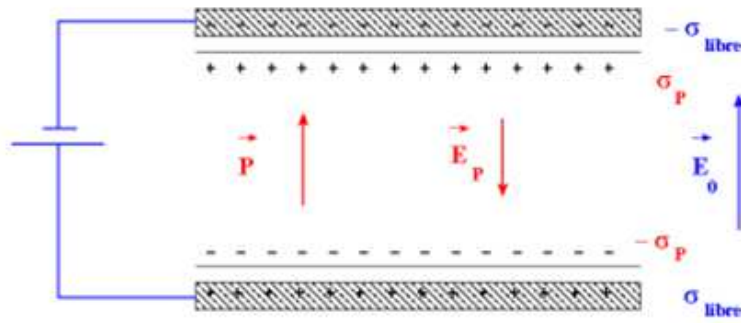
permittivité diélectrique relative du matériau. Il caractérise la réduction du champ électrique dans le matériau par rapport à la valeur qu'il aurait dans le vide.



$$\vec{P} = \frac{q}{S} \vec{U} \quad \vec{P} = \frac{q}{S} \frac{d}{d} \vec{U} \quad \longrightarrow \quad \vec{P} = \frac{\mu}{V} \vec{U}$$

$P = \text{charge} / \text{unité de surface}$

$P = \text{moment dipolaire} / \text{unité de volume}$



- Les charges libres des armatures créent le champ $\vec{E}_0 = \frac{\sigma_{libre}}{\epsilon_0} \vec{u}_z$
- E_0 induit dans le diélectrique une polarisation P de même sens
- Il apparaît sur les faces du diélectrique des densités de charges de polarisation

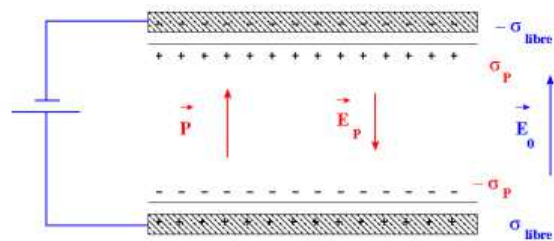
$$\sigma = \vec{P} \cdot \vec{n} = \pm P$$

- Ces charges créent un autre champ dans le diélectrique

$$\vec{E}_P = \frac{-\sigma_P}{\epsilon_0} \vec{u}_z = -\frac{\vec{P}}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E}_P = -\frac{\vec{P}}{\epsilon_0}$$

- E_P est de sens opposé à E_0



- Le champ total dans la plaque vaut :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_P = \vec{E}_0 - \frac{\vec{P}}{\epsilon_0}$$

- Généralisation : le champ E_P créé par la polarisation est toujours de sens opposé à E_0 (loi de modération). On l'appelle **champ dépolarisant** (même s'il n'est associé à aucun mécanisme de dépolérisation)

Milieu matériel

Electrostatique

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) = \varepsilon_0 \varepsilon_r$$

Magnétisme

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

$$\vec{M} = \chi \vec{H}$$

$$\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi) \vec{H}$$

$$\mu = \mu_0 (1 + \chi) = \mu_0 \mu_r$$

Relations entre les propriétés
d'équilibre thermiques, électriques et
mécaniques des cristaux

Relations entre les propriétés d'équilibre thermiques, électriques et mécaniques des cristaux

In this chapter, we will investigate how solids respond to the applications of external agents leading to the origin of novel effects that are exploited in a number of ways to develop new devices and their applications. We can define two types of agent–effect relationship: the first being the interactions arising from electric field (E), mechanical stress (X), and temperature (T); and second consisting of E , X , and magnetic field (H). Both categories form the backbone for a variety of applications. For example, the E – X – T relationship gives rise to multiple interesting phenomena having significant impacts on the electronic and mechanical technology, sensor and detectors, and harvesting of green energy.

Fundamentals of Electroceramics: Materials, Devices, and Applications, First Edition. R. K. Pandey.
 © 2019 The American Ceramic Society, Inc. Published 2019 by John Wiley & Sons, Inc.
 Companion website: www.wiley.com/go/Pandey/Fundamentals_Electroceramics

Variable cause Variable effet	ϵ	σ	D	E	S	T
σ	Elasticité		Effet piézo-électrique		Dilatation thermique	
ϵ						
E	Effet piézo-électrique		Propriétés diélectriques		Effet pyro-électrique	
D						
T	Effet piézo-calorique		Effet électro-calorique		Capacité calorifique	
S						

Electric Field (E), Mechanical Stress (X), and Temperature (T) Diagram: Heckmann Diagram

The interaction of solids with each of these three agents can manifest itself in variety of ways. They are the foundations for the origin of primary and coupled effects exhibiting some unique electronic, thermal, and mechanical properties. There are three principal effects and six associated coupled effects. It is not a trivial task to present them in a unified and consistent way. This problem was solved in 1925 by G. Heckmann of Germany who invented a diagram, which now bears his name, representing all the effects that can occur in solid when subjected to the interactive forces of $E-X-T$ [1].

Fundamentals of Electroceramics: Materials, Devices, and Applications, First Edition. R. K. Pandey.
© 2019 The American Ceramic Society, Inc. Published 2019 by John Wiley & Sons, Inc.
Companion website: www.wiley.com/go/Pandey/Fundamentals_Electroceramics

PRINCIPAL EFFECT

The three corners of the larger triangle are occupied by the agents E , X , and T , respectively. The smaller triangle has its corners labeled as electrical displacement (D), mechanical strain (x), and entropy (S). These six parameters form three groups that are (i) between electric field (E) and displacement (D); (ii) between stress (X) and strain (x); and (iii) between temperature (T) and entropy (S). They are called the three *principal effects*.

Principal effect No. 1: Permittivity (ϵ) is a fundamental property of all solids, but it plays a very special role in the field of dielectric materials like an oxide.

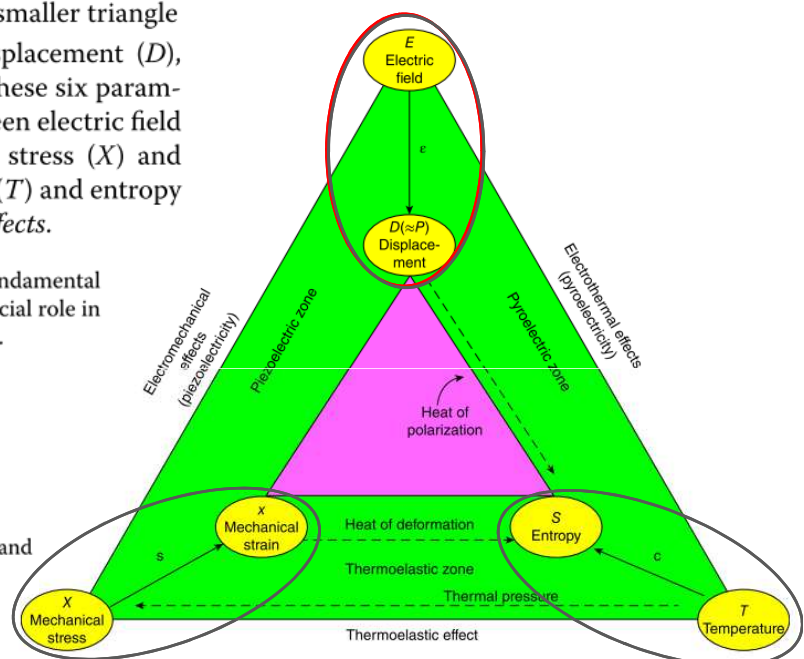
$$D = \epsilon E$$

Since both D and E are first rank tensors, also be expressed as

$$D_i = \epsilon_{ij} E_j$$

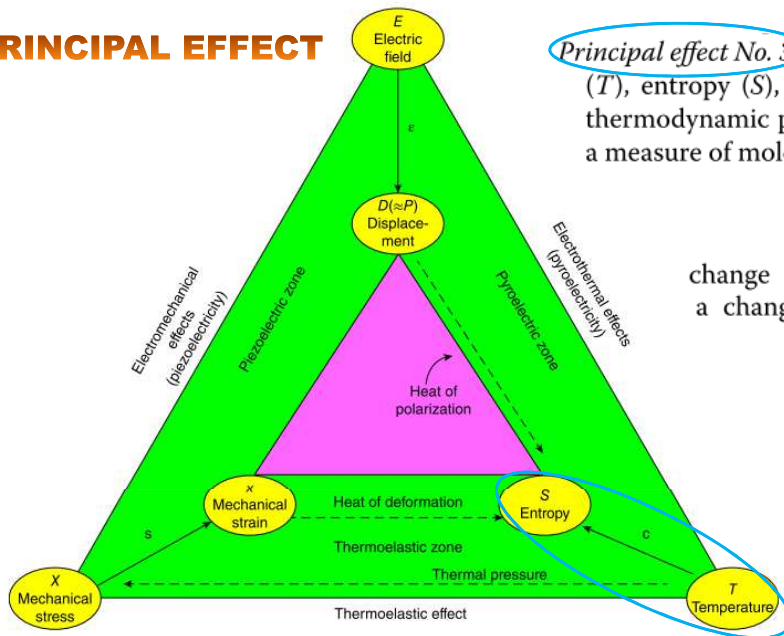
The relationship between displacement (D) and entropy (S) is called heat of polarization

Heckmann Diagram



Fundamentals of Electroceramics: Materials, Devices, and Applications, First Edition. R. K. Pandey.
© 2019 The American Ceramic Society, Inc. Published 2019 by John Wiley & Sons, Inc.
Companion website: www.wiley.com/go/Pandey/Fundamentals_Electroceramics

PRINCIPAL EFFECT



Principal effect No. 3: This effect constitutes temperature (T), entropy (S), and heat capacity (c). Entropy is a thermodynamic parameter and can be understood as a measure of molecular disorder within a microscopic

change in temperature, dT , produces a change in entropy, dS , so that

$$dS = \left(\frac{c}{T}\right) dT$$

The relationship between displacement (D) and entropy (S) is called heat of polarization and similarly between the strain (s) and entropy (S) it is called the heat of deformation.

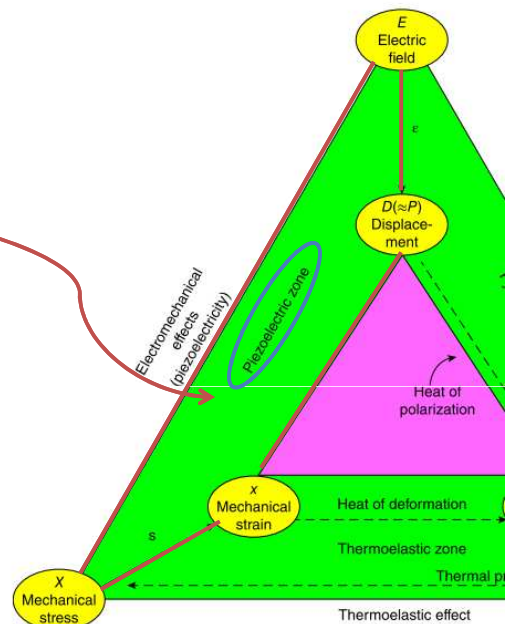
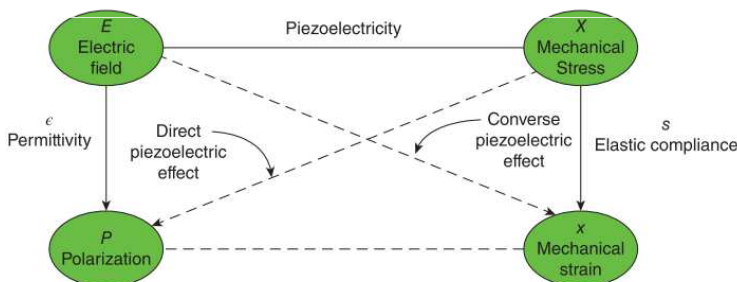
Fundamentals of Electroceramics: Materials, Devices, and Applications, First Edition. R. K. Pandey. © 2019 The American Ceramic Society, Inc. Published 2019 by John Wiley & Sons, Inc. Companion website: www.wiley.com/go/Pandey/Fundamentals_Electroceramics

COUPLED EFFECT

Besides these three *principal effects*, there are six secondary effects that form the group of *coupled effects*. They reside in the three zones identified in Figure 5.1 as the pyroelectric zone, the piezoelectric zone, and the thermoelastic zone. Each of these zones contains two coupled effects.

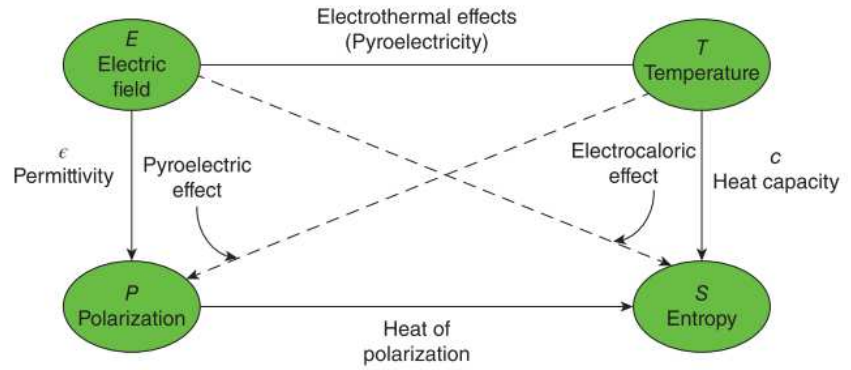
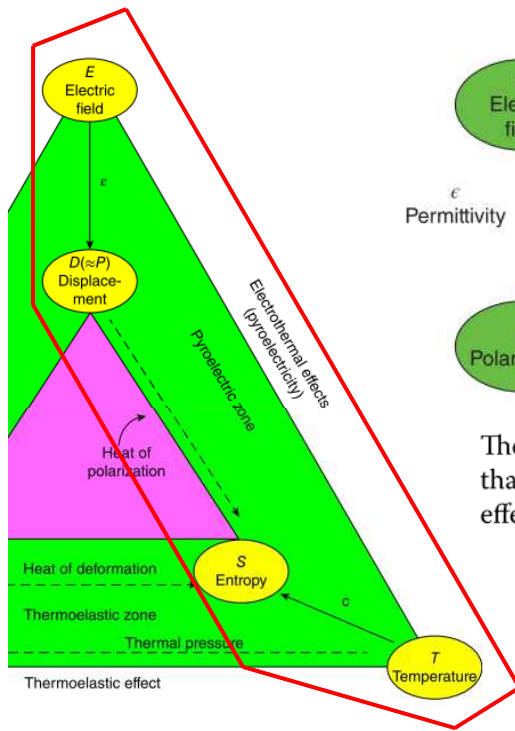
Piezoelectric Zone

Figure 5.2 is the detailed version of piezoelectric zone. We see here that there are two types of piezoelectric effects: one being the direct piezoelectric effect, and the other the converse piezoelectric effect.



Fundamentals of Electroceramics: Materials, Devices, and Applications, First Edition. R. K. Pandey. © 2019 The American Ceramic Society, Inc. Published 2019 by John Wiley & Sons, Inc. Companion website: www.wiley.com/go/Pandey/Fundamentals_Electroceramics

Pyroelectric Zone



The pyroelectric zone consists of the two coupled effects that are the pyroelectric effect and the electrocaloric effect.

In pyroelectric materials, a change in temperature can induce a change in the electrical polarization. The relationship between the temperature gradient (dT) and the change in resulting polarization (dP) is linear with the coefficient being the pyroelectric coefficient, $P(T)$. Mathematically expressed, it is given by Eq. (5.6).

$$dP_i = P_i(T)dT$$

Diagramme de Heckmann

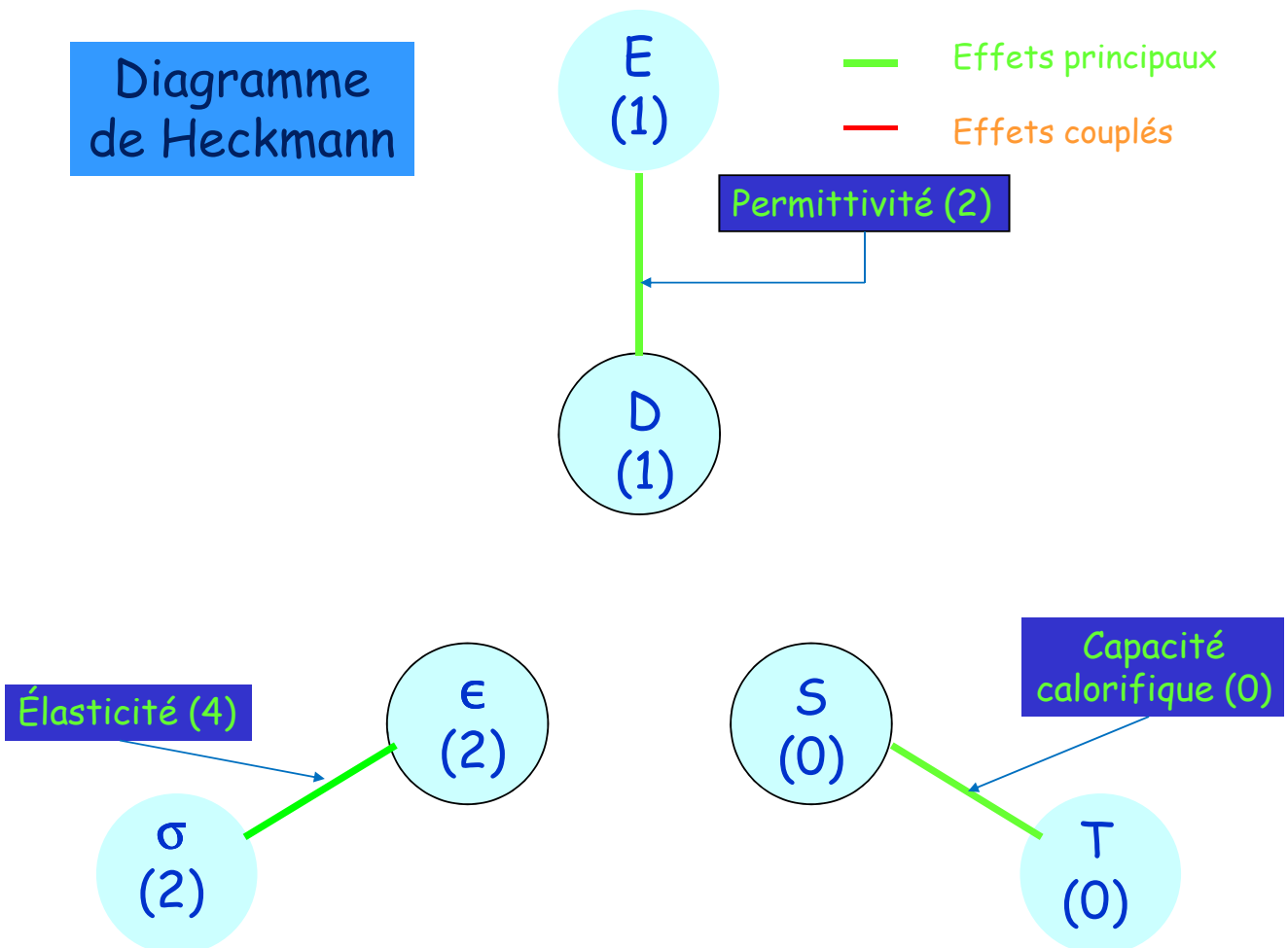


Diagramme de Heckmann

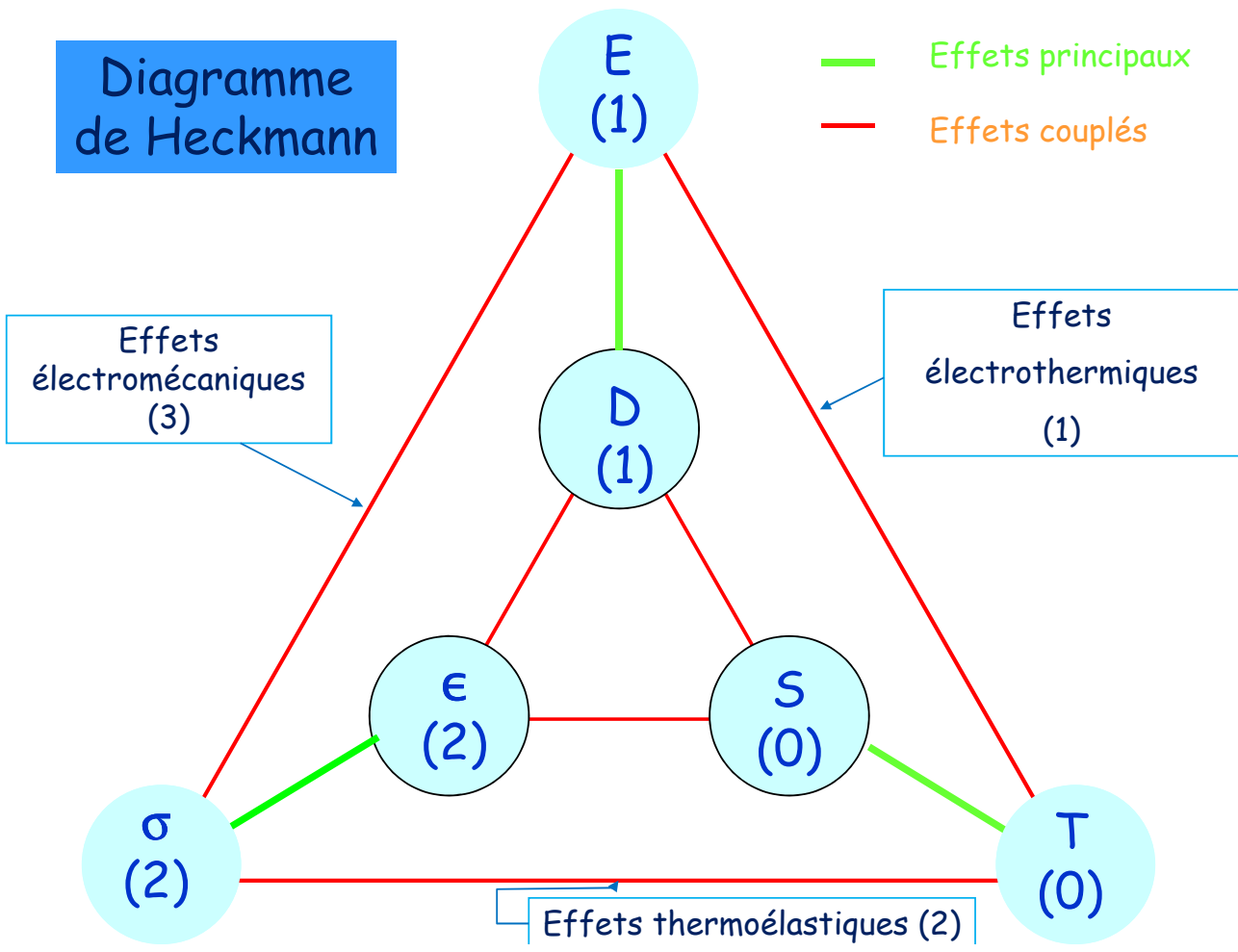


Diagramme de Heckmann

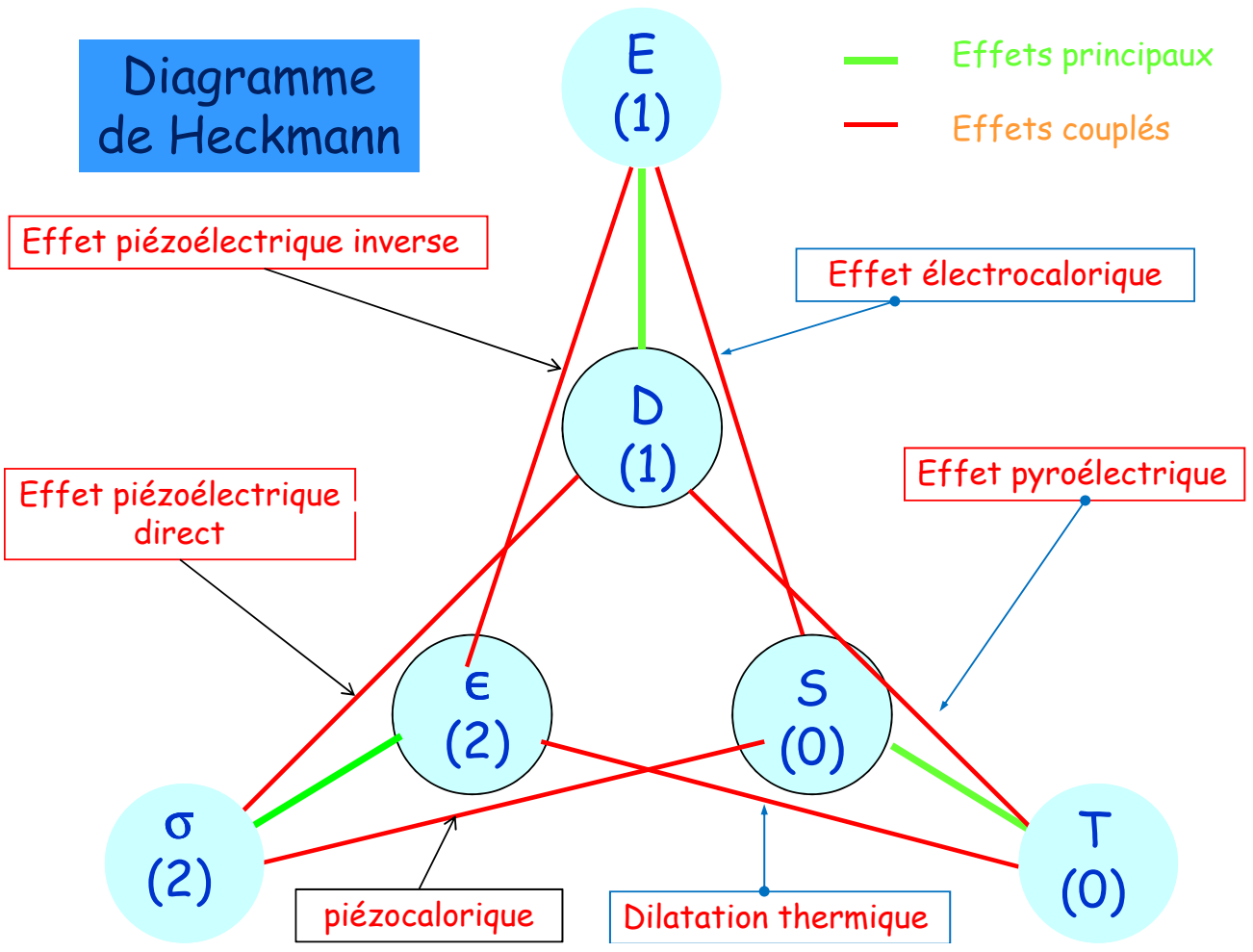
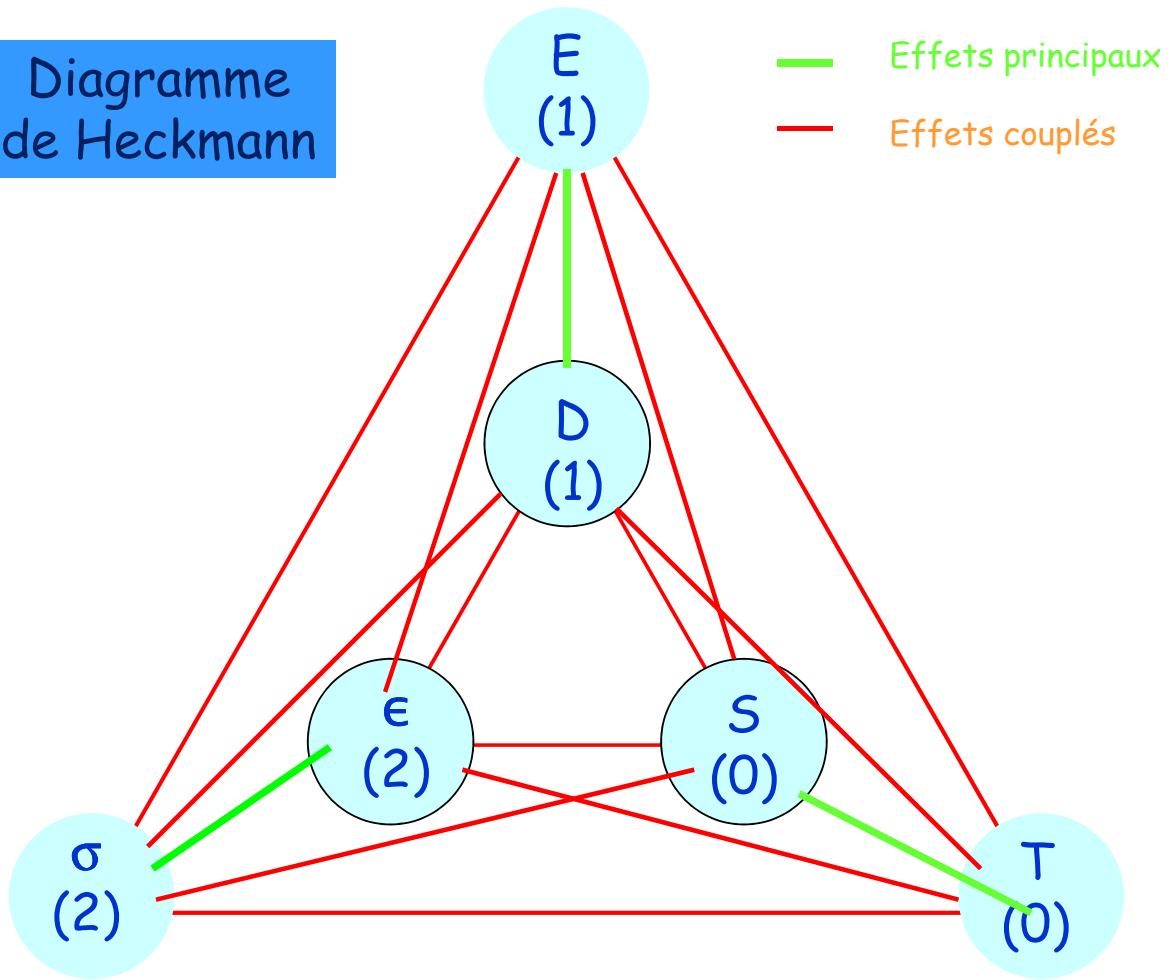


Diagramme de Heckmann



Effets principaux

Variation de température dT \longrightarrow Variation d'entropie dS

$$dS = \frac{C}{T} dT$$

Capacité calorifique

Variation du champ électrique dE_j



Variation du déplacement électrique dD_i

$$dD_i = \varepsilon_{ij} dE_j$$

Permittivité

Variation de la contrainte $d\sigma_{kl}$



Variation de la déformation $d\epsilon_{ij}$

$$d\epsilon_{ij} = s_{ijkl} d\sigma_{kl}$$

Elasticité

Quelques effets couplés

Variation de température dT \longrightarrow Variation de la déformation $d\epsilon_{ij}$

$$d\epsilon_{ij} = \alpha_{ij} dT$$

Dilatation thermique

Variation de la contrainte $d\sigma_{jk}$

Variation du déplacement électrique dD_i (ou de la polarisation dP_i)

$$dD_i = d_{ijk} d\sigma_{jk}$$

Effet piézoélectrique direct

Variation de température dT

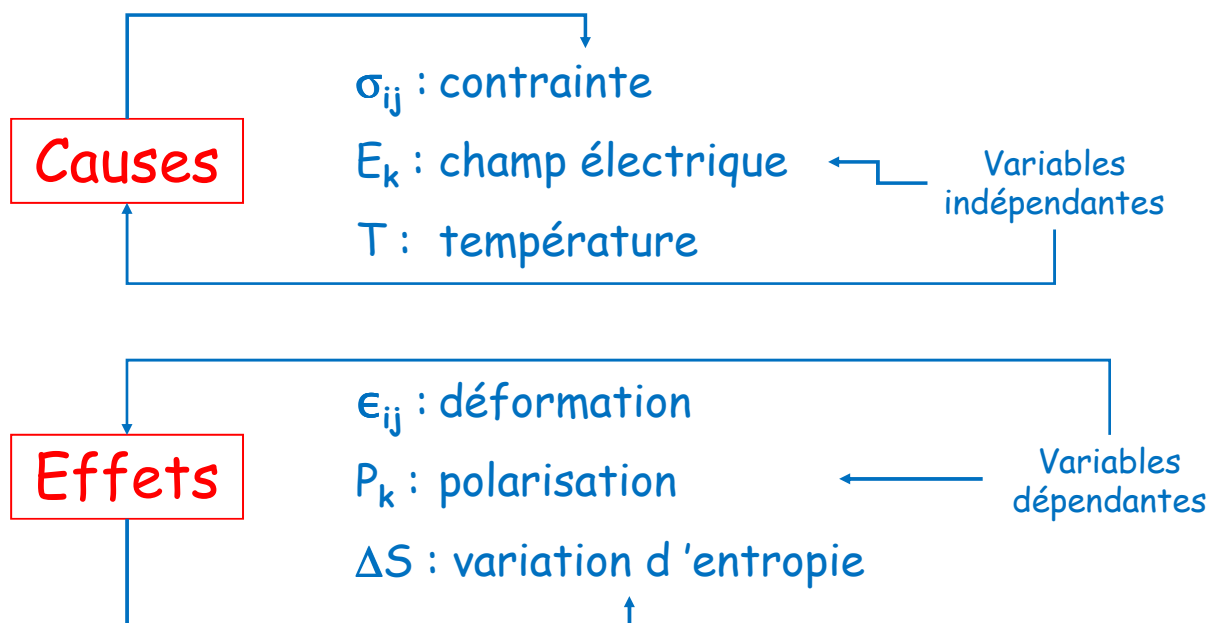
Variation du déplacement électrique dD_i (ou de la polarisation dP_i)

$$dD_i = p_i dT$$

Effet pyroélectrique

Un peu de thermodynamique

Dans un cristal



Un peu de thermodynamique (suite)

Enthalpie libre $\xrightarrow{\hspace{2cm}}$ $G = H - TS - E_k P_k - \sigma_{ij} \epsilon_{ij}$

$$dG = - \epsilon_{ij} d\sigma_{ij} - P_k dE_k - S dT$$

Le système est complètement défini par σ , E et T

G est une fonction d'état

$$dG = - \epsilon_{ij} d\sigma_{ij} - P_k dE_k - S dT = (\partial G / \partial \sigma_{ij})_{E,T} d\sigma_{ij} + (\partial G / \partial E_k)_{\sigma,T} dE_k + (\partial G / \partial T)_{\sigma,E} dT$$

$$(\partial G / \partial \sigma_{ij})_{E,T} = - \epsilon_{ij}$$

$$(\partial G / \partial E_k)_{\sigma,T} = - P_k$$

$$(\partial G / \partial T)_{\sigma,E} = - S$$

Un peu de thermodynamique (suite et fin)

$$\frac{- \partial^2 G}{\partial \sigma_{ij} \partial E_k} = \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial E_k} = d_{ijk}$$

Effet piézoélectrique inverse

$$\frac{- \partial^2 G}{\partial E_k \partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial P_k}{\partial \sigma_{ij}} = d_{ijk}$$

Effet piézoélectrique direct

$$\frac{- \partial^2 G}{\partial \sigma_{ij} \partial T} = \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial T} = \alpha_{ij}$$

Dilatation thermique

$$\frac{- \partial^2 G}{\partial T \partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial S}{\partial \sigma_{ij}} = e_{ij}$$

Effet piézocalorique

$$\frac{- \partial^2 G}{\partial E_k \partial T} = \frac{\partial P_k}{\partial T} = p_k$$

Effet pyroélectrique

$$\frac{- \partial^2 G}{\partial T \partial E_k} = \frac{\partial S}{\partial E_k} = e_k$$

Effet électrocalorique

Pour les cristaux, la plupart de ces grandeurs
sont des grandeurs tensorielles traduisant
leurs propriétés

Les propriétés des cristaux sont
liées à leur symétrie

Principe de Neumann

Les éléments de symétrie de toute
propriété physique d'un cristal doivent
contenir les éléments de symétrie du
groupe ponctuel du cristal