Kalkulus feladatok megoldása

7. Olvasólecke

Függvények határértéke, folytonossága

Az olvasólecke szerzője

Kozma József
PhD, főiskolai docens
SZTE TTIK
Bolyai Intézet, Geometria tanszék

A lecke feldolgozásának időigénye 45 perc.

Jelen tananyag a Szegedi Tudományegyetemen készült az Európai Unió támogatásával. Projekt azonosító: EFOP-3.4.3-16-2016-00014

1. A lecke tartalma

Szükséges ismeretek

- ☐ Folytonosság szemléletes fogalma, függvény szakadása, megszüntethető és nem megszüntethető szakadás. A függvényhatárérték fogalmának szemléletes bevezetése.
- ☐ Függvények határértéke, véges, illetve végtelen határérték. Határérték az értelmezési tartomány egy pontjában, határérték az értelmezési tartományhoz nem tartozó helyen.
- ☐ Féloldali határérték. Függvény szakadásának fajtája: megszüntethető, illetve nem megszüntethető.
- ☐ Folytonosság fogalma. A folytonosság és a féloldali folytonosság.
- ☐ Elemi függvények folytonossága, példák nem elemi függvényekre
- ☐ Véges zárt intervallumon folytonos függvények alapvető tulajdonságai.

Jó tanácsok az Olvasónak

Itt olvashatja el a lecke feldolgozása előtt a szerző tanácsait. Ennek a leckének a feldolgozásához már szükséges tudni a IV. és az V. olvasóleckében feldolgozott anyagot. Ezért érdemes azokon átfutni, mielőtt az olvasó nekilát ennek a leckének.

A gyakorlati OL fókusza

- Függvények határértéke, véges, illetve végtelen határérték.
- Határérték az értelmezési tartomány egy pontjában.
- Határérték az értelmezési tartományhoz nem tartozó (véges) helyen.
- Függvény szakadásának fajtái: megszüntethető, illetve nem megszüntethető szakadás.
- Folytonosság fogalma.
- Folytonosság vizsgálata elemi függvények esetén.

Az OL áttanulmányozásával az olvasó elérheti, hogy

- ✓ meg tudja határozni alapvető függvények határértékét egy pontban, illetve a végtelenben (mínusz végtelenben);
- ✓ meg tudja állapítani a határérték létezését egy olyan véges helyen, amely nem tartozik bele a függvény értelmezési tartományába;
- ✓ meg tudja állapítani a szakadás fajtáját egy adott helyen;
- ✓ nyilatkozni tudjon a folytonosságról az értelmezési tartomány pontjaiban.

Az OL áttanulmányozásának időigénye

- A feladatok és számítások áttanulmányozásának és az ellenőrző kérdések megválaszolásának ideje: kb. 40 perc.
- A szükséges időbe nem számítottuk bele az előismeretként nélkülözhetetlen megelőző olvasóleckék tartamának rövid átismétlését.
- Természetesen szükséges lehet megszakítani az előre haladást, és az előadás Olvasó-, valamint Videóleckéjébe, hasonlóképpen a Gyakorlatéba is beletekinteni magyarázatért, fogalmak pontos meghatározásáért, iránymutatásért, és ez további egyéni időszükségletet jelent.
- A tudás elmélyítését szolgáló kitűzött gyakorlatok elvégzése szintén további időszükséglettel jár.

2. Kidolgozott mintafeladatok

2.1. Mintafeladat.

Határozza meg a következő határértékeket!

$$\text{(a)}\quad \lim_{x\to\infty} x^3, \qquad \text{(b)}\quad \lim_{x\to-\infty} x^3, \qquad \text{(c)}\quad \lim_{x\to\infty} x^4.$$

Megoldás a 4. oldalon

2.2. Mintafeladat.

Határozza meg a következő határértéket!

$$\text{(a)}\quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^3-5x-4}{3x^2-2x-12}, \qquad \text{(b)}\quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-5x-4}{3x^2-2x-12}.$$

Megoldás az 5. oldalon

2.3. Mintafeladat.

Határozza meg a következő határértéket!

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-7x+10}{x^2-5x+6}$$

Megoldás a 7. oldalon

2.4. Mintafeladat.

Határozza meg a következő határértéket!

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{7x}$$

Megoldás a 8. oldalon

2.5. Mintafeladat.

Ábrázolja a következő függvényt! Vizsgálja meg a szakadási helyekhez tartozó féloldali határértékeket, és a végtelenben vett határértékeket!

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^3 - x}$$

Megoldás a 9. oldalon

2.1. Mintamegoldások

2.1. Mintafeladat megoldása (3. o.)

Határozza meg a következő határértékeket!

$$\text{(a)} \quad \lim_{x\to\infty} x^3, \quad \text{(b)} \quad \lim_{x\to-\infty} x^3, \quad \text{(c)} \quad \lim_{x\to\infty} x^4.$$

Mit kell tudni a feladat megoldásához?

1. Függvény értelmezési tartománya.
2. Mit értünk azon, hogy a függvény független változója tart a végtelenbe $(x \to \infty)$?
3. Függvény végtelenben vett határértékének szemléletes fogalma.
4. A függvény végtelenben vett határértékének fogalma.
5. Páratlan és páros függvények.

(a)

- Tapasztalataink alapján, és pl. egyre nagyobb 10 hatványokat beírva, x^3 egyre nagyobb értékeket vesz föl.
- Sejtésünk: $\lim_{x\to\infty} x^3 = \infty$.
- Alkalmazzuk a definíciót!
- Legyen A tetszőleges pozitív valós szám. Mikor lesz x^3 ennél nagyobb?

$$x^3 > A \Leftrightarrow x > \sqrt[3]{A}.$$

Ezért ha $K = \sqrt[3]{A}$, akkor

$$x > K \Rightarrow f(x) = x^3 > A.$$

Eszerint a határérték valóban ∞.

(b) feladat
A bal oldali grafikon mutatja a függvényünket.
Az $f : x \mapsto x^3$ függvény páratlan, ezért grafikonja szimmetrikus az Origóra. Ellentett helyeken ellentett értékeket vesz fel: $f(-x) = -f(x)$.
Valóban: $(-x)^3 = \left((-1)\cdot x\right)^3 = -x^3$.

(b) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = ?$

• Megfigyelés:
Egyre nagyobb abszolút értékű negatív x-eket véve egyre kisebb számokat kapunk.

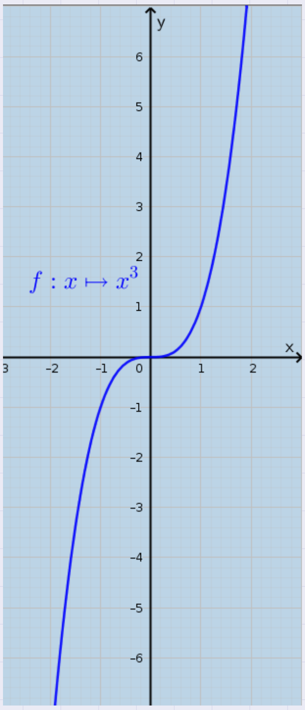
Pl. $x=-10^k$: $x^3=-1000^k$

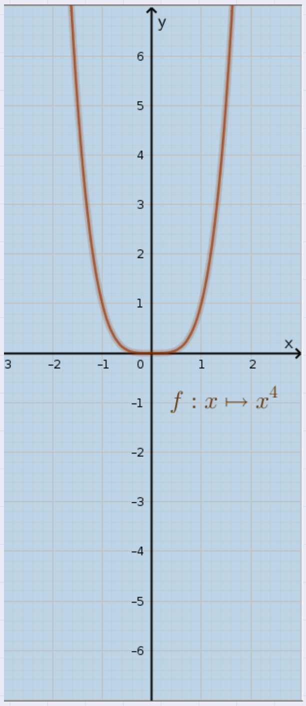
• SEJTÉS: $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$.

• Legyen A tetszőleges ($\in \mathbb{R}$).
Mikor lesz $f(x)<A$?
Ha: $x^3<A \iff x<\sqrt[3]{A}$

• Ezért $K=\sqrt[3]{A}$ esetén
$f(x)=x^3<A$, ha $x<K$.

• A SEJTÉS helyes volt. ∎





(c) $\lim\limits_{x\to\infty} x^4 = ?$

(•) Sejtés: $x^4\to\infty$, ha $x\to\infty$.

(•) a (b) feladat mintáján:
az $x^4>A$ teljesül $\iff x>\sqrt[4]{A}$.
$K=\sqrt[4]{A}$ választással:
$x>K \Rightarrow f(x)=x^4>A$,
bármilyen szám is az A.

PARITÁS
$(-x)^4 = x^4$
$\Rightarrow f(-x)=f(x)$
$f(x)$ PÁROS;
y-tengelyre szimmetrikus grafikon
$\Downarrow$
$f(x)\to\infty$,
akár $x\to+\infty$,
akár $x\to-\infty$

2.2. Mintafeladat megoldása (3. o.)

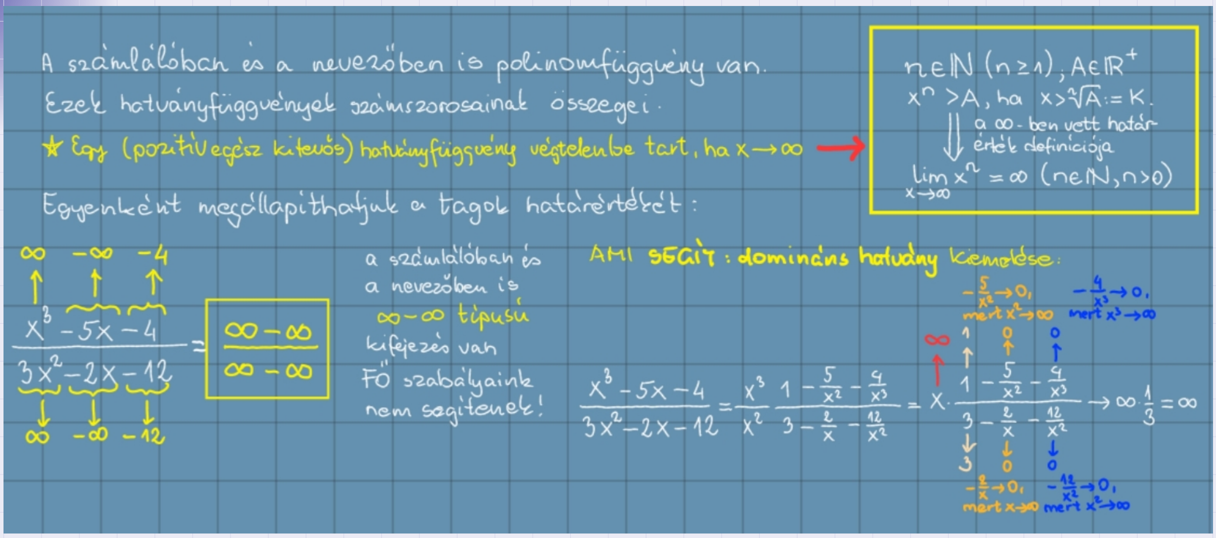
Határozza meg a következő határértéket!

$$\text{(a)} \quad \lim_{x\to\infty}\frac{x^3-5x-4}{3x^2-2x-12}, \qquad \text{(b)} \quad \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-5x-4}{3x^2-2x-12}.$$

Mit kell tudni a feladat megoldásához?

1. Függvények összegének, szorzatának, hányadosának értelmezése, határértéke.
2. Függvények skalárszorosának (valós számszorosának) értelmezése, határértéke.

Az (a) feladat megoldása



A szimbolikus jelölésekkel elvégzett levezetés teljesen szabatos formában:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 5x - 4}{3x^2 - 2x - 12} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^2} \frac{1 - \frac{5}{x^2} - \frac{4}{x^3}}{3 - \frac{-2}{x} - \frac{12}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} x \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{5}{x^2} - \frac{4}{x^3}}{3 - \frac{-2}{x} - \frac{12}{x^2}} = \frac{1}{3} \lim_{x\to\infty} x = \infty.$$

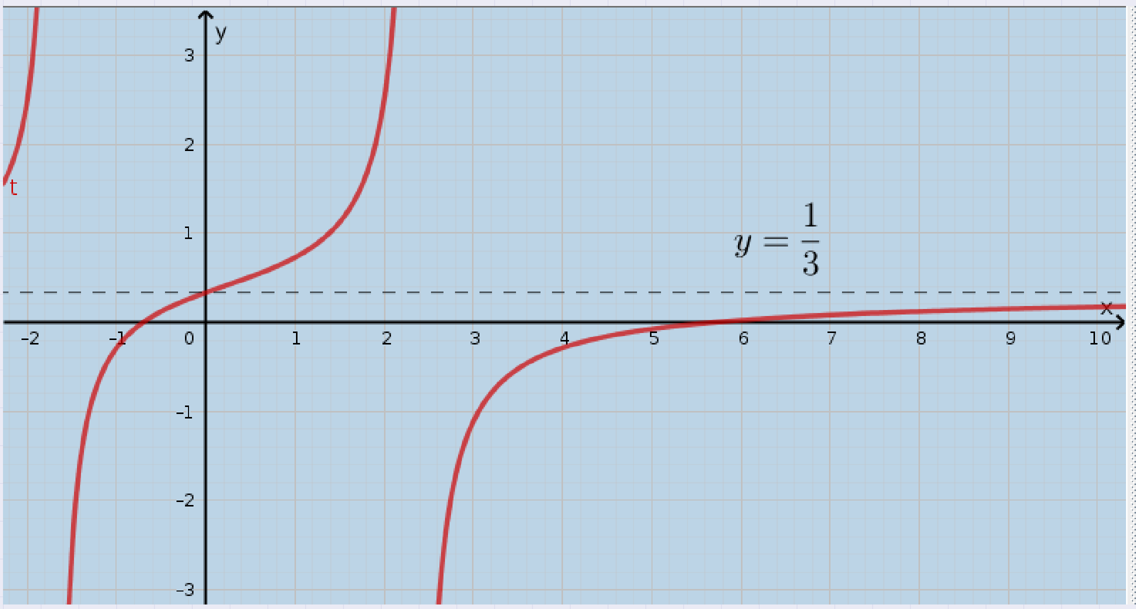
A (b) feladat megoldása

Most is polinomfüggvények hányadosáról van szó, ezért próbálkozzunk az (a) feladatnál tanult módszerrel!

- Próbálkozzunk a domináns hatvány kiemelésével a számlálóban és a nevezőben is!

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 5x - 4}{3x^2 - 2x - 12} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2} \frac{1 - \frac{5}{x} - \frac{4}{x^2}}{3 - \frac{2}{x} - \frac{12}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{5}{x} - \frac{4}{x^2}}{3 - \frac{2}{x} - \frac{12}{x^2}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 1 - \dfrac{5}{x} - \dfrac{4}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty} 3 - \dfrac{2}{x} - \dfrac{12}{x^2}} = \frac{1}{3}.$$

A polinomfügvények hányadosával adott függvényt ábrázoltuk is. Láthatóan szigorúan monoton növekszik az $(\frac{1+\sqrt{47}}{3}; +\infty)$ intervallumon (az intervallum bal oldali végpontja a nevező nagyobbik zérushelye).



2.3. Mintafeladat megoldása (3. o.)

Határozza meg a következő határértéket!

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-7x+10}{x^2-5x+6}$$

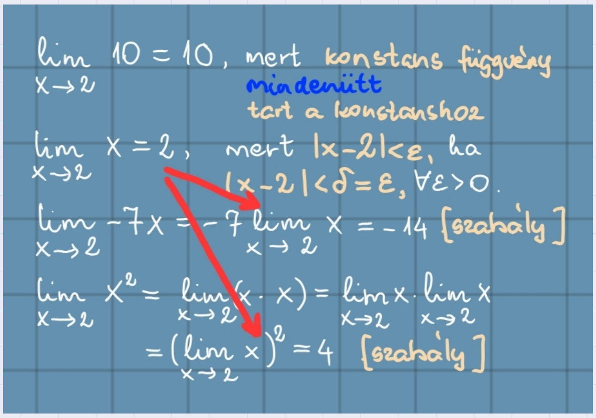
Mit kell tudni a feladat megoldásához?

1. Ha két függvénynek egy valós helyen létezik a végtelen vagy véges határértéke, akkor a belőlük megkonstruált összeg, szorzat és skalárszoros függvényeknek mi a határértéke.
2. Az elmélet szerinti ismeretekre mint [szabály]-ra hivatkozunk.

A függvény, amelynek a határértékét keressük, egy törtfüggvény.

(⋆) Ismételten polinomfüggvények hányadosáról van szó.
(⋆) Vizsgáljuk meg először a számláló, illetve a nevező határértékét az $x_0 = 2$ helyen! A számláló tagjainak határértékei könnyen megállapíthatóak:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}(x^2-7x+10) &= \lim_{x\to 2} x^2 + \lim_{x\to}(-7x) + \lim_{x\to}(10)\\ &= 4 + (-14) + 10 = 0\end{aligned}$$



(⋆) A nevező tagjainak határértékei hasonlóképpen könnyen megállapíthatóak. Minden tag határértéke létezik, és van rá [szabály].

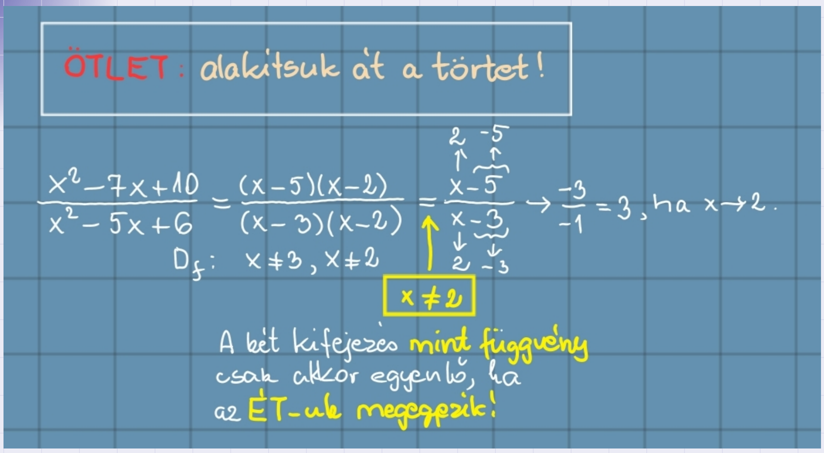
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}(x^2-5x+6) &= \lim_{x\to 2} x^2 + \lim_{x\to 2}(-5x) + \lim_{x\to 2}(6)\\ &= \left(\lim_{x\to 2} x\right)^2 + (-5)\lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2}(6)\\ &= 4 + (-10) + 6 = 0\end{aligned}$$

(⋆) A függvény értékének határértéke ezért formálisan $\frac{0}{0}$,

(⋆) de ilyen típusú határérték létezésére, illetve értékére nincsen [szabály].

(⋆) Vegyük még észre azt is, hogy a törtfüggvényünk nincs is értelmezve ott, ahol a nevező 0 értéket vesz fel, vagyis: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$.

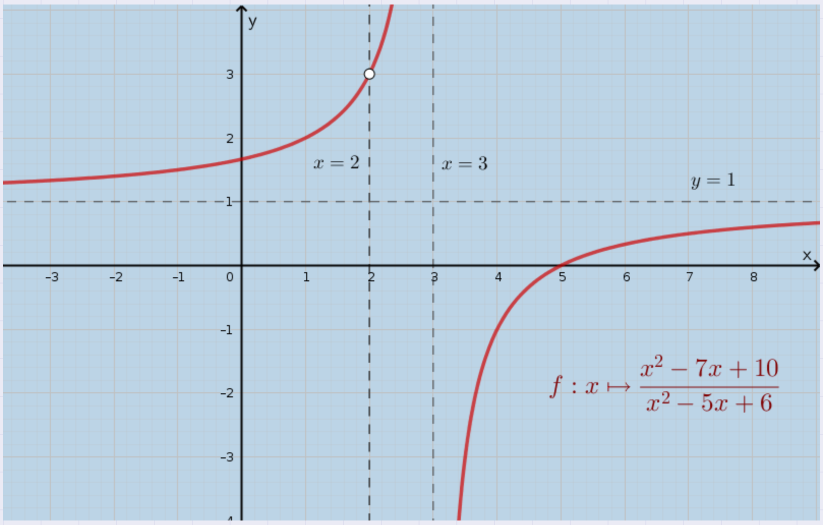
(⋆) De ettől a törtfüggvénynek még létezhet határértéke az $x = 2$ helyen!



Tehát

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-7x+10}{x^2-5x+6} = 3.$$

Alul ábrázoljuk a függvény grafikonját.
A számolás mutatta, hogy egy lineáris törtfüggvény, mely az $x = 2$ helyen "ki van lyukasztva" (nincsen értelmezve).



A grafikon alapján további igazolandó kérdések vethetőek fel:
(1) Létezik-e, és mi a határérték az $x = 3$ helyen?
(2) Léteznek-e, és mekkorák a $+\infty$ és $-\infty$ végtelenben vett határértékek?
A grafikon azt sugallja, hogy $x = 3$-ban nincs határérték; plusz és mínusz ∞-ben pedig egyaránt 1.

2.4. Mintafeladat megoldása (3. o.)

Határozza meg a következő határértéket!

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{7x}$$

Mit kell tudni a feladat megoldásához?

1. Trigonometrikus függvények alapvető tulajdonságai, periodicitása.
2. Az $f : x \mapsto \sin x$ függvény határértéke létezik 0-ban, és értéke 0.
3. A $\frac{\sin x}{x}$ függvény határértéke létezik 0-ban, és értéke 1.
4. Összetett függvény határértékére vonatkozó állítás: Ha $\lim_{x\to x_0} h(x) = y_0$, és $\lim_{y\to y_0} f(y) = A$, akkor $\lim_{x\to x_0}(f \circ h)(x) = \lim_{x\to x_0} f(h(x)) = A$.

A függvényünk $f : x \mapsto \frac{\sin 5x}{3x}$ egy törtfüggvény, melynek számlálója és nevezője is mindenütt értelmezhető.

Az $f: x \mapsto \frac{\sin 5x}{7x}$ függvény egy „klasszikus" függvényből állítható elő, melynek határértéke ismert:

$g: y \mapsto \frac{\sin y}{y}$ $\boxed{\lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} = 1.}$

alakítsuk át!

$$f(x) = \frac{\sin 5x}{7x} = \frac{5}{7} \cdot \frac{\sin 5x}{5x} = \frac{5}{7} \cdot \frac{\sin(h(x))}{h(x)}$$

$h: x \mapsto 5x$

$h(x) = y$

$$= \frac{5}{7} \frac{\sin y}{y} = \frac{5}{7} g(y) = \frac{5}{7} g(h(x))$$

$\boxed{\forall \delta: 0 < |x - 0| < \delta \Downarrow h(x) = 5x \neq y_0 = 0}$

Az összetett függvény határértékére vonatkozó állítás szerint:

(1) ha $\lim_{x \to x_0} h(x) = y_0$,

(2) ha $\lim_{y \to y_0} g(y) = A$, és

(3) $\exists \delta > 0$ szám, hogy $0 < |x - x_0| < \delta$ esetén $h(x) \neq y_0$,

(*) akkor létezik a $\lim_{x \to x_0} (g \circ h)(x)$ határérték, és: $\lim_{x \to x_0} g(h(x)) = A$.

Most: $\lim_{x \to 0} (\underbrace{5 \cdot x}_{y = h(x)}) = 0$; $\lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} = 1 \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{7x} = \frac{5}{7} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{5x}$

x_0 $\qquad$ y_0

$$= \frac{5}{7} \lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} = \frac{5}{7} \cdot 1 = \frac{5}{7}$$

2.5. Mintafeladat megoldása (4. o.)

Ábrázolja a következő függvényt! Vizsgálja meg a szakadási helyekhez tartozó féloldali határértékeket, és a végtelenben vett határértékeket!

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^3 - x}$$

Mit kell tudni a feladat megoldásához?

1. Nevezetes algebrai azonosságok polinomokra.
2. Függvény adott pontbeli folytonosságának fogalma.
3. Szakadási hely fogalma.
4. Jobb oldali és bal oldali határérték.
5. A határérték létezése és a féloldali határértékek.
6. Szakadási helyek fajtái.

(⋆) Először állapítsuk meg a szakadási helyeket! Ezek olyan helyek, ahol a függvény nincsen értelmezve.

Számegyenesen ábrázoljuk az értelmezési tartományt!

* a számláló polinomfüggvény, nevező ezért minden valós számra értelmezettek.
* a hányadosuk ott nincsen értelmezve, ahol a nevező 0 értéket vesz föl.

$x^3 - x = 0$ megoldása:

$x(x^2 - 1) = 0$

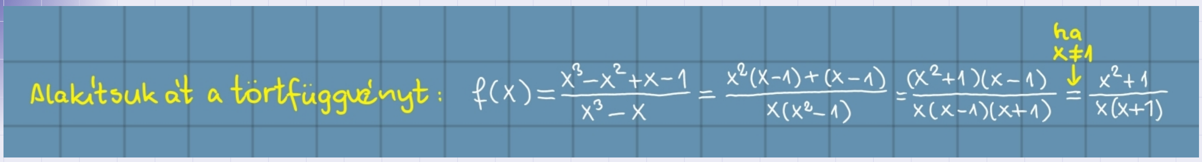
$x(x-1)(x+1) = 0$

A nevező 0-helyei $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -1$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$

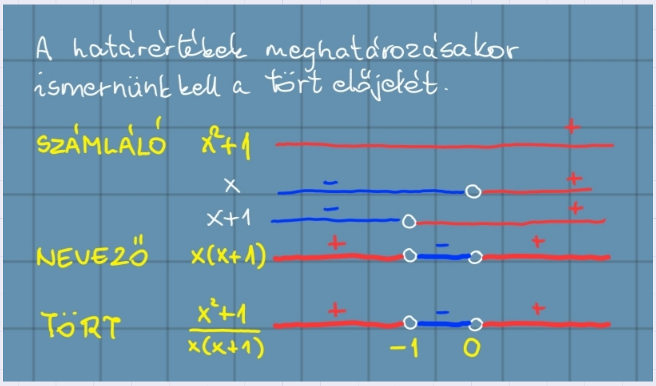
SZAKADÁSI HELYEK: $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$.

A továbblépéshez át kell alakítanunk a törtfüggvényt.

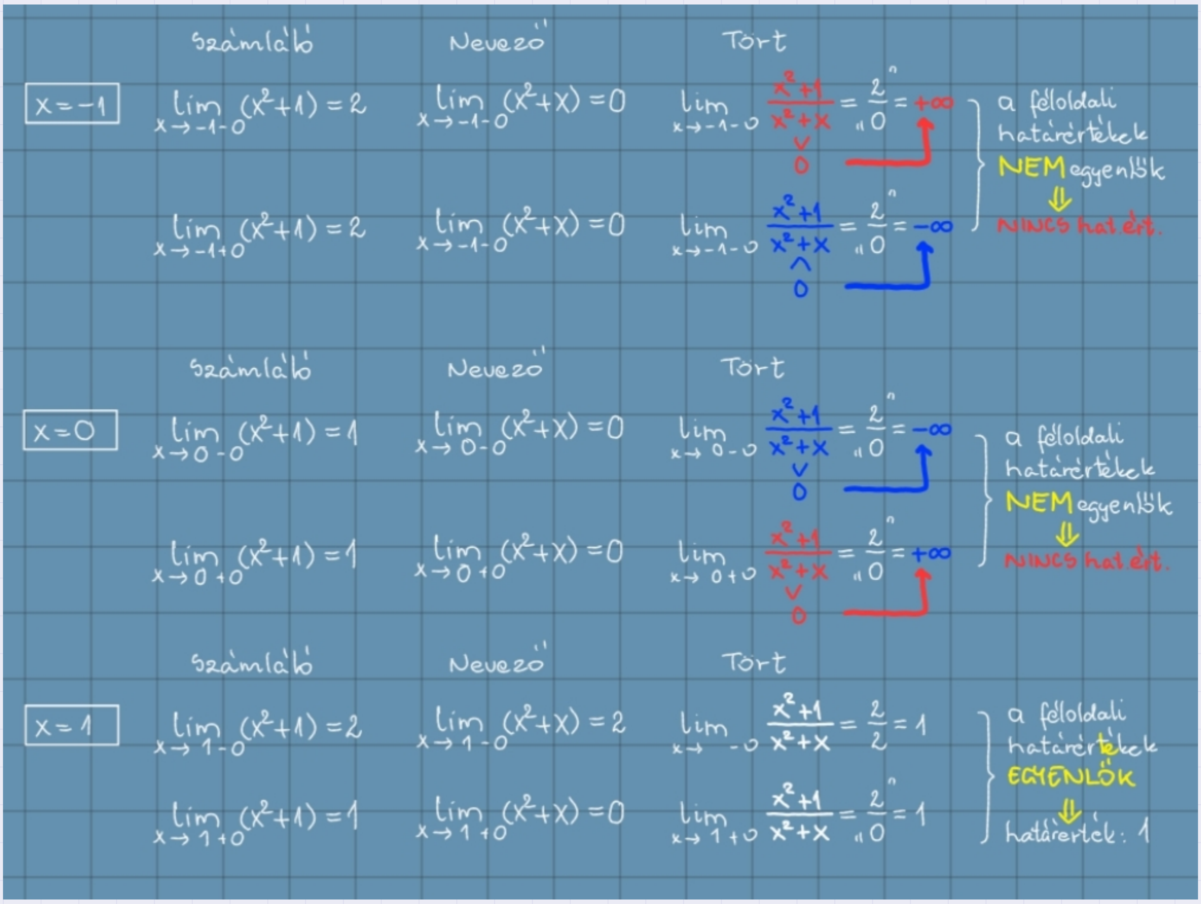


A féloldali határértékek meghatározásához algebrai levezetés helyett grafikus megoldást választunk. Először megállapítjuk a tört előjelét a szakadási helyekkel három intervallumra felosztott számegyenesen.

Berajzoljuk először a számláló előjelét ezeken az intervallumokon (piros a pozitív, kék a negatív értékek halmaza), majd a nevezőét (ott előbb az egyes tényezőkét), végül a kettő alapján a törtét:
ahol a két szín megegyezik, ott a tört értéke pozitív; ahol a két szín különböző, ott negatív.



Véges számláló és nullához tartó nevező esetén a végtelen előjelét az dönti el, hogy pozitív vagy negatív számokon keresztül tartunk a végtelenbe.



Eredményünk:

- $x=-1$-nél a függvény bal és jobb oldali határértéke különböző, ezért a függvénynek itt nincsen határértéke. Itt a függvénynek nem megszüntethető szakadása van.

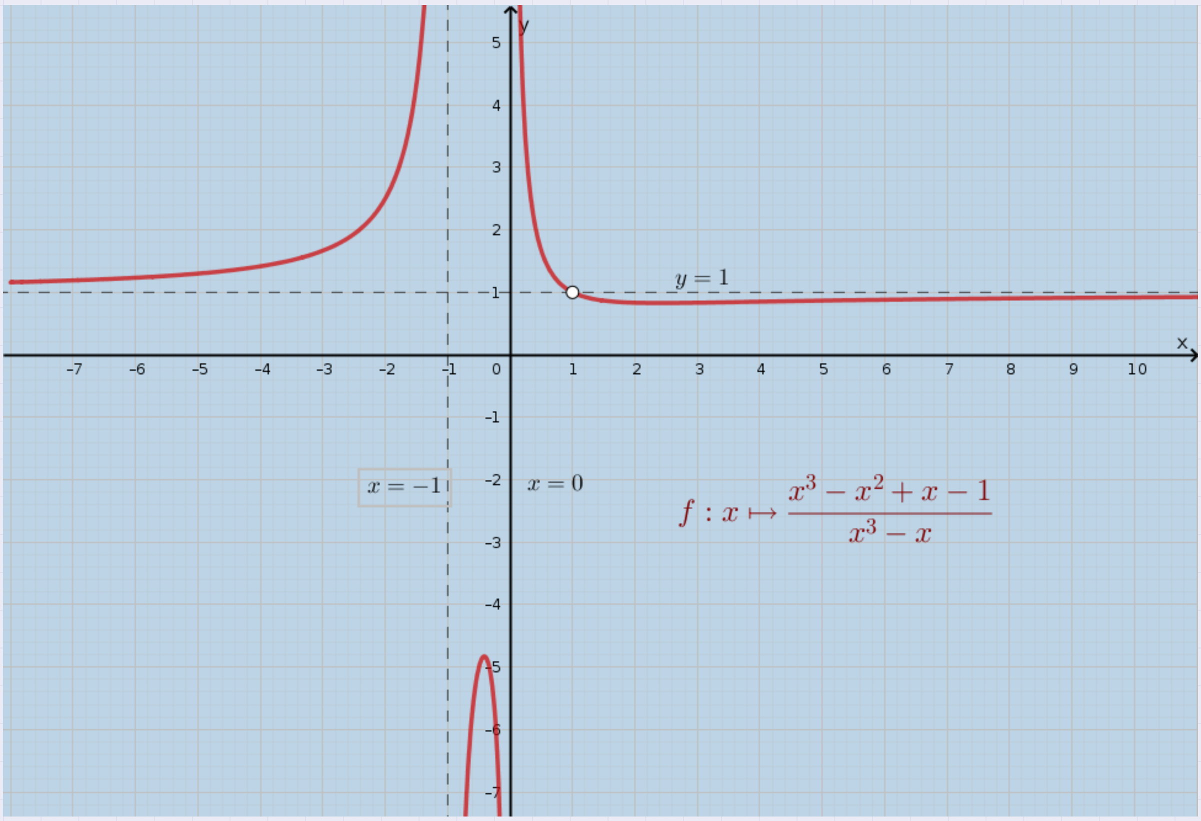
- $x = 0$-nál a függvény bal és jobb oldali határértéke különböző, ezért a függvénynek itt sincsen határértéke. Itt a függvénynek nem megszüntethető szakadása van.
- $x = 1$-nál a függvény bal és jobb oldali határértéke megegyezik, ezért a függvénynek itt van határértéke: 1. Itt a függvénynek nem megszüntethető szakadása van. A grafikonon a szakadást jelképező lyuk "betömhető" egy olyan függvény megadásával, amelynek az szakadási hely is az értelmezési tartományába esik:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-x^2+x-1}{x^3-x}, & \text{ha } x \neq 1; \\ 1, & \text{ha } x = 1. \end{cases}$$

A plusz és mínusz végtelenben vett határértékeket a már megismert módon, a domináns hatványok kiemelésével kiszámolhatjuk:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-x^2+x-1}{x^3-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^3} \frac{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{1-\frac{1}{x^3}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{1-\frac{1}{x^3}} = \frac{1}{1} = 1,$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-x^2+x-1}{x^3-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^3} \frac{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{1-\frac{1}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{1-\frac{1}{x^3}} = \frac{1}{1} = 1.$$



3. Ellenőrző kérdések az olvasóleckéhez

Ellenőrző kérdések

- ? Lehetséges-e, hogy egy függvénynek az értelmezési tartomány minden pontjában van véges határértéke, a végtelenben vett határértéke mégis végtelen?
- ? Igaz-e, hogy ha egy függvény végtelenben vett határértéke $-\infty$, akkor akkor ellentettjének ((-1)-szeresének végtelenben vett határértéke ∞?
- ? Ha két sorozat $-\infty$-ben vett határértéke egyaránt ∞, akkor külkönbségük határértéke 0.
- ? Ha egy polinom legmagasabb fokszámú tagjának előjele pozitív, akkor mi a $+\infty$-ben vett határértéke? És mennyi a $-\infty$-ben vett határértéke?
- ? Igaz-e, hogy ha egy függvénynek adott véges helyen a jobb és bal oldali határértéke megegyezik, akkor ott a függvény folytonos?
- ? Keressen példát olyan függvényre, amelyiknek minden egész helyen megszüntethető szakadási helye van!
- ? Van-e olyan függvény, amelynek minden egész helyen nem megszüntethető szakadása van? Mutasson példát!

4. Önálló munkára kitűzött gyakorlatok

1. Határozza meg a következő végtelenben vett határértékeket!

$$\text{(a)}\quad \lim_{x\to\infty}\frac{x^3+5x-4}{3x^2-12},\quad \text{(b)}\quad \lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{(x-5)^2},\quad \text{(c)}\quad \lim_{x\to\infty}\frac{x^3+5x-4}{2x^3-3x^2-12}.$$

2. Határozza meg a következő végtelenben vett határértékeket!

$$\text{(a)}\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{3-6x}{1+2x^2},\quad \text{(b)}\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{2x-4x^3}{1+4x^2}.$$

3. Határozza meg a következő végtelenben vett határértékeket!

$$\text{(a)}\quad \lim_{x\to\infty}(x^2-5\sqrt[3]{x^3}),\quad \text{(b)}\quad \lim_{x\to-\infty}(x^2-5\sqrt[3]{x^3}).$$

4. Határozza meg a következő végtelenben vett határértékeket!

$$\text{(a)}\quad \lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-4x}-x),\quad \text{(b)}\quad \lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-x}-\sqrt{x^-2x+4}),\quad \text{(c)}\quad \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-6x}{4-3x}.$$

5. Határozza meg a következő véges helyen vett határértékeket!

$$\text{(a)}\quad \lim_{x\to3}\frac{3x-6}{x^+3x^2},\quad \text{(b)}\quad \lim_{x\to3}\frac{3x-6}{x^-3x^2},\quad \text{(c)}\quad \lim_{x\to2}\frac{4x^2-12x}{6-5x+x^2},\quad \text{(d)}\quad \lim_{x\to3}\frac{3-\sqrt{x}}{9-x}.$$

6. Határozza meg a következő véges helyen vett határértékeket!

$$\text{(a)}\quad \lim_{x\to0}\frac{\sin 7x}{5x},\quad \text{(b)}\quad \lim_{x\to0}\frac{6\sin 2x}{3x\cos x},\quad \text{(c)}\quad \lim_{x\to0}\frac{4x}{3x}.$$

7. Határozza meg a következő határértékeket!

$$\text{(a)}\quad \lim_{x\to 3}\frac{x+4}{9-x^2},\qquad \text{(b)}\quad \lim_{x\to 4}\frac{x+4}{16-x^2},\qquad \text{(c)}\quad \lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x^2+x-2}.$$

8. Határozza meg a következő határértékeket!

$$\text{(a)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{x^2+2x-2}{|x|},\qquad \text{(b)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x}{5x},\qquad \text{(c)}\quad \lim_{x\to 3} e^{\frac{x}{x-3}}.$$

9. Van-e olyan pont, amelyben az $f : x \mapsto \frac{|x|}{x}$ függvény nem folytonos? Ha van szakadása, milyen jellegű?
10. Mely pontokban folytonos az $f : x \mapsto \frac{x-1}{x^2}$ függvény? Ha van szakadása, milyen jellegű?

5. Ajánlott irodalom

1. eimann István: Matematika, Typotex
2. bádovics J. Gyula: Matematika, Scolar
3. zabó Tamás: Kalkulus I. példatár informatikusoknak, POLYGON
4. ülöp Vanda: Kalkulus I. példatár, POLYGON