

2 Scheiben und Träger

2.3 Verformungsvermögen

Die Anwendung der statischen und der kinematischen Methode der Plastizitätstheorie erlaubt die Eingrenzung der Traglast eines Tragwerks. Dabei wird implizit von einem ausreichenden Verformungsvermögen ausgegangen, da die Traglast unter der Annahme eines ideal plastischen Verhaltens ermittelt wird. Aufgrund der effektiv begrenzten Duktilität von Stahlbeton stellt sich insbesondere bei der Anwendung der statischen Methode der Plastizitätstheorie die Frage, ob sich ein der Bemessung zugrunde gelegter Gleichgewichtszustand tatsächlich einstellen und ein vorzeitiges Versagen ausgeschlossen werden kann.

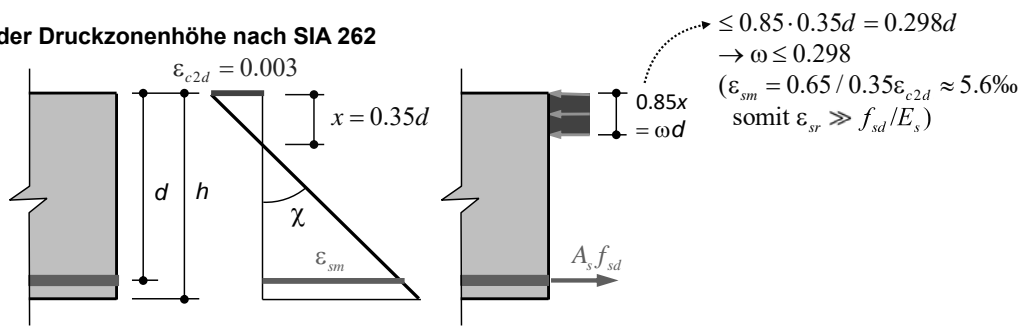
Für diese Fragestellung lassen sich grundsätzlich kaum eindeutige Lösungen finden. Ein Grundproblem besteht darin, dass die wirkliche Belastungs- und Zwängungsgeschichte eines Tragwerks nicht hinreichend bekannt ist; üblicherweise wird stillschweigend angenommen, dass der initiale (lastfreie) Zustand frei von Spannungen und Verformungen ist. Tatsächlich liegen in jedem Fall aber mehr oder minder beträchtliche initiale Spannungen und Verformungen infolge vorangegangener Belastungen und Zwängungen vor. Ein weiteres Problem ergibt sich aus dem Umstand, dass für die Berechnung von Verformungen eine Vielzahl von Material- und Systemkennwerten benötigt werden, die oft entweder ungenügend bekannt sind oder grossen Streuungen unterliegen.

Aus den oben erwähnten Gründen begnügt man sich bei praktischen Anwendungen in der Regel damit, bestimmte Verformungsgrössen zuverlässig abzuschätzen. Detaillierte Berechnungen sind vergleichsweise aufwendig und nur bei speziellen Problemstellungen gerechtfertigt. Immer sollte man sich aber über die mit dem gewählten Rechenverfahren erreichbare Genauigkeit und über die Aussagekraft der gewonnenen Resultate im Klaren sein.

In diesem Kapitel wird gezeigt, wie das Verformungsvermögen von Trägern untersucht und damit ein Nachweis des plastischen Verformungsvermögens erbracht werden kann.

Träger – Verformungsvermögen

Begrenzung der Druckzonenhöhe nach SIA 262



Maximaler Bewehrungsgehalt und Biege­widerstand nach SIA 262, Ziffer 4.1.4.2: (für vorwiegend auf Biegung beanspruchte Bauteile)

- $x/d \leq 0.35$: Schnittgrössenumlagerungen **ohne** Nachweis des Verformungsvermögens
 $x/d \leq 0.35 \rightarrow \omega \leq 0.298 \rightarrow M_{Rd} \leq b d^2 f_{cd} \omega \cdot (1 - \omega/2) = 0.253 \cdot b d^2 f_{cd}$

Wiederholung aus Stahlbeton I, Biegung: Gemäss der Norm SIA 262 dürfen Schnittgrössen von Trägern ohne Nachweis des Verformungsvermögens umgelagert werden, sofern die Druckzonenhöhe auf $x/d \leq 0.35$ begrenzt wird; Druckzonenhöhen mit $x/d > 0.5$ sind zu vermeiden. Auszug aus der Norm:

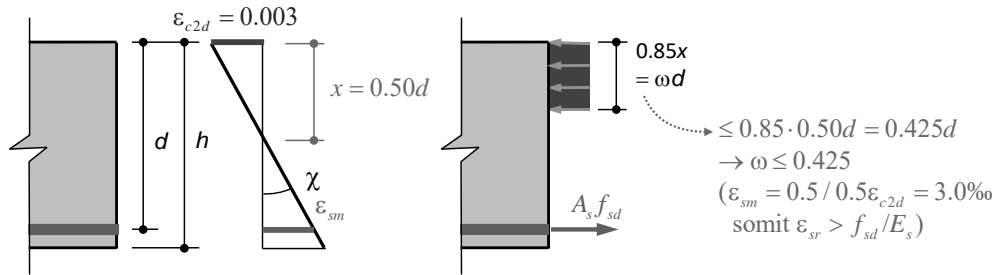
- 4.1.4.2.4 Ein duktilen Verhalten ist durch konstruktive Massnahmen (z.B. Verbügelung der Biegedruckzone), die Wahl der Baustoffe und das Einlegen einer Mindestbewehrung sicherzustellen.
- 4.1.4.2.5 Schnittgrössen statisch unbestimmter, vorwiegend auf Biegung beanspruchter Bauteile, die nach Ziffer 4.1.4.1 (*elastisch*) ermittelt wurden, können unter Einhaltung der Gleichgewichtsbedingungen und unter Beachtung von Ziffer 4.1.4.2.4 ohne rechnerischen Nachweis des Verformungsvermögens umgelagert werden, wenn:
 - die bezogene Druckzonenhöhe den Wert $x/d = 0.35 \cdot 435/f_{sd}$ nicht überschreitet
 - bei Flachdecken die Plattenrotation ψ gemäss Gleichung (59) grösser als 0,020 ist
 - Betonstahl der Klassen B oder C und Beton der Klassen $\leq C50/60$ verwendet wird.

Für die Ermittlung der Druckzonenhöhe x gelten die Idealisierungen gemäss Ziffer 4.2.1; eine allenfalls vorhandene Druckbewehrung darf in Rechnung gestellt werden.

- 4.1.4.2.6 Falls die Bedingungen der Ziffer 4.1.4.2.5 nicht eingehalten werden, **ist ein rechnerischer Nachweis des plastischen Verformungsvermögens zu erbringen**. Sowohl Werte $x/d > 0.5 \cdot 435/f_{sd}$ in Biegedruckzonen als auch $\psi < 0,008$ in Flachdecken sind wenn möglich zu vermeiden.

Träger – Verformungsvermögen

Begrenzung der Druckzonenhöhe nach SIA 262



Maximaler Bewehrungsgehalt und Biegevermögen nach SIA 262, Ziffer 4.1.4.2:
(für vorwiegend auf Biegung beanspruchte Bauteile)

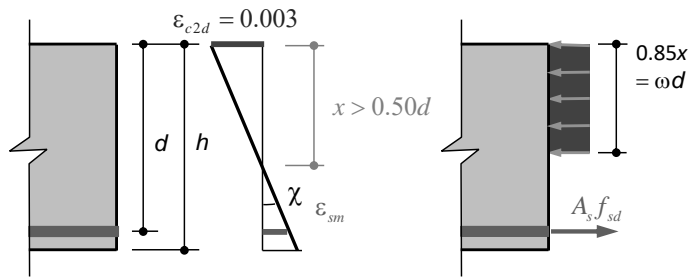
- $0.35 \leq x/d \leq 0.5$: Schnittgrössenumlagerungen mit Nachweis des Verformungsvermögens
 $x / d \leq 0.50 \rightarrow \omega \leq 0.425 \rightarrow M_{Rd} \leq bd^2 f_{cd} \omega \cdot (1 - \omega/2) = 0.335 \cdot bd^2 f_{cd}$

Ergänzende Bemerkung:

- Die für die Einhaltung der Bedingung x/d nötige minimale Trägerhöhe kann aus den angegebenen Beziehungen für M_{Rd} ermittelt werden.
- Mit einer Umschnürungs- oder einer Druckbewehrung kann die Druckzonenhöhe verringert und damit das Verformungsvermögen erhöht werden.
- Wird eine Druckbewehrung vorgesehen, ist der Betonierbarkeit besondere Aufmerksamkeit zu schenken (mehrere Lagen Druckbewehrung erschweren das Einbringen und Verdichten des Betons); wenn der Beton nicht einwandfrei verdichtet werden kann, ist eine Druckbewehrung kontraproduktiv. Sind mehrere Lagen Druckbewehrung erforderlich, ist es günstig, die Stäbe in Vertikalebene auszurichten (so dass dazwischen Platz für Vibriernadeln bleibt).
- Als Druckbewehrung kommt auch Bewehrung der Festigkeitsklasse B700B in Frage, insbesondere wenn die Platzverhältnisse knapp sind.

Träger – Verformungsvermögen

Begrenzung der Druckzonenhöhe nach SIA 262

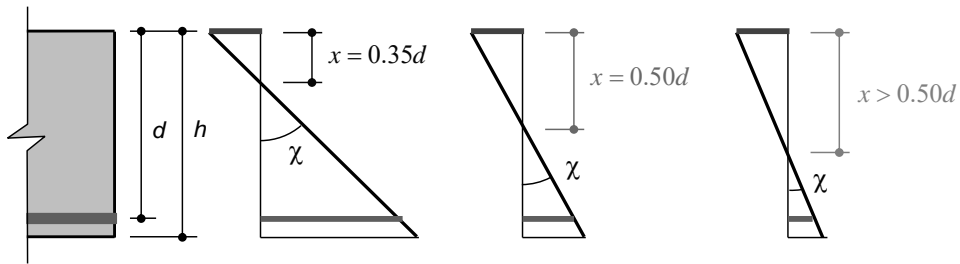


Maximaler Bewehrungsgehalt und Biege­widerstand nach SIA 262, Ziffer 4.1.4.2:
(für vorwiegend auf Biegung beanspruchte Bauteile)

- $x/d > 0.50$: ist zu vermeiden

Träger – Verformungsvermögen

Begrenzung der Druckzonenhöhe nach SIA 262

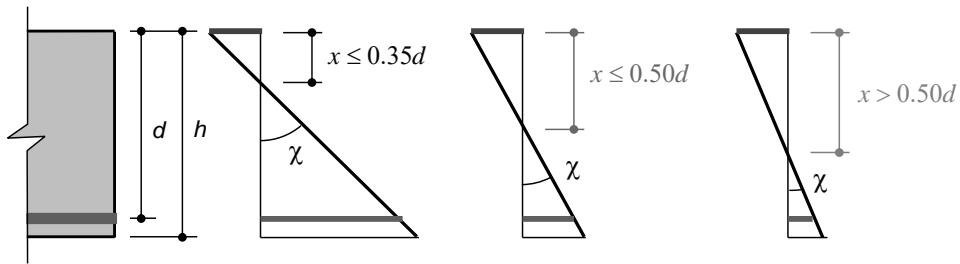


Maximaler Bewehrungsgehalt und Biegewiderstand nach SIA 262, Ziffer 4.1.4.2:
(für vorwiegend auf Biegung beanspruchte Bauteile)

- $x/d \leq 0.35$: Schnittgrössenumlagerungen **ohne** Nachweis des Verformungsvermögens
 $x/d \leq 0.35 \rightarrow \omega \leq 0.298 \rightarrow M_{Rd} \leq bd^2 f_{cd} \omega \cdot (1 - \omega/2) = 0.253 \cdot bd^2 f_{cd}$
- $0.35 \leq x/d \leq 0.5$: Schnittgrössenumlagerungen **mit** Nachweis des Verformungsvermögens
 $x/d \leq 0.50 \rightarrow \omega \leq 0.425 \rightarrow M_{Rd} \leq bd^2 f_{cd} \omega \cdot (1 - \omega/2) = 0.335 \cdot bd^2 f_{cd}$
- $x/d > 0.50$: **ist zu vermeiden**

Träger – Verformungsvermögen

Begrenzung der Druckzonenhöhe nach SIA 262



Maximaler Bewehrungsgehalt und Biege­widerstand nach SIA 262, Ziffer 4.1.4.2:
(für vorwiegend auf Biegung beanspruchte Bauteile)

- $0.35 \leq x/d \leq 0.5$: Schnittgrössenumlagerungen **mit** Nachweis des Verformungsvermögens

Wie bereits angemerkt, ist der Nachweis des plastischen Verformungsvermögens nur näherungsweise möglich, und selbst dazu sind relativ aufwändige Untersuchungen erforderlich.

Ein mögliches Vorgehen wird auf den folgenden Folien erläutert.

Träger – Verformungsvermögen

Systemverhalten

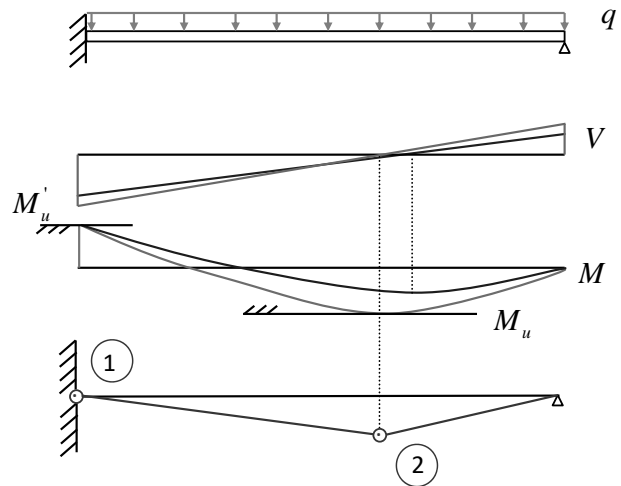
(siehe auch [1], p. 2-32ff)

Kontinuierliche Steigerung der Last q :

- Fließbeginn zuerst bei der Einspannung, erstes plastisches Gelenk an dieser Stelle
- Einfach statisch unbestimmtes System wird (für die Zusatzbelastung) zu einfachem Balken

Weitere Laststeigerung möglich, bis sich im Feld ein zweites plastisches Gelenk bildet (= Mechanismus):

- Plastische Rotation bei der Einspannstelle erforderlich
- **Rotationsbedarf** abhängig vom statischen System und der Belastungskonfiguration
- **Rotationsvermögen** begrenzt durch Stahldehnungen und Betonstauchungen



Nachweis = Vergleich:
Verformungsvermögen Θ_{pu} \leftrightarrow Verformungsbedarf $\Theta_{pu,req}$

Wiederholung aus Baustatik: Bei der Ermittlung der Traglast statisch unbestimmter, ideal plastischer Systeme geht man in der Regel von einem initial Eigenspannungsfreien Zustand aus und nimmt an, dass sich das Tragwerk zunächst elastisch verhält. Sobald in einem Querschnitt der Biegezugspannung den Biegezugwiderstand erreicht wird, bildet sich dort ein plastisches Gelenk, und für die weitere Belastung bleibt das Moment im plastischen Gelenk konstant. Mit jedem plastischen Gelenk wird der Grad der statischen Unbestimmtheit reduziert, bis ein statisch bestimmtes System vorliegt. Bildet sich ein weiteres plastisches Gelenk, ist die Traglast erreicht, und der Kollapsmechanismus stellt sich ein.

Der **Verformungsbedarf** (Rotationsbedarf) kann ermittelt werden, indem die plastischen Rotationen in den plastischen Gelenken (ab dem Moment, in dem im entsprechenden Querschnitt der Biegezugwiderstand erreicht wurde) ermittelt werden.

Für den Nachweis eines ausreichenden plastischen Verformungsvermögens ist der Verformungsbedarf dem **Verformungsvermögen** (Rotationsvermögen, resp. «rotation capacity») gegenüberzustellen.

Träger – Verformungsvermögen

Rotationsbedarf $\Theta_{pu,req}$ (Näherung, Beispiel Zweifeldträger)

Allgemein sind Verformungsvermögen und Verformungsbedarf gekoppelt.

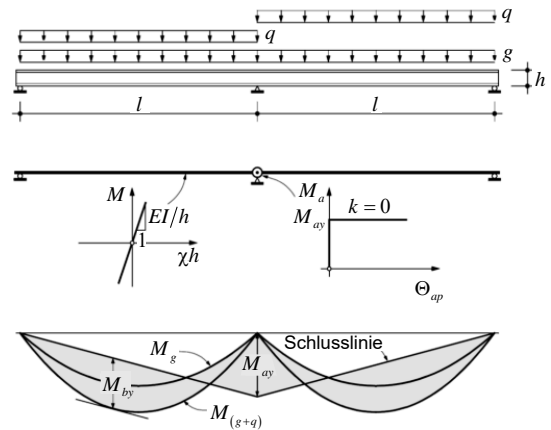
Nur für moderate Umlagerungen kann die Wechselwirkung vernachlässigt werden.

Zusätzliche Vereinfachungen:

- Biegesteifigkeit konstant
- $M-\Theta$ starr-ideal plastisch (keine Verfestigung im plastischen Gelenk)

Damit entspricht der Rotationsbedarf $\Theta_{pu,req}$ des Gelenks beim Zwischenaufleger dem Auflagerdrehwinkel der beiden Trägerhälften, die nach dem Erreichen von M_{ay} (bei $q = q_y$) als einfache Balken betrachtet werden können:

$$\Theta_{pu,req} = \frac{(q - q_y) l^3}{12EI}$$



(Zweifeldträger, erstes plastisches Gelenk beim Zwischenaufleger, Verformungsbedarf für Vollast)

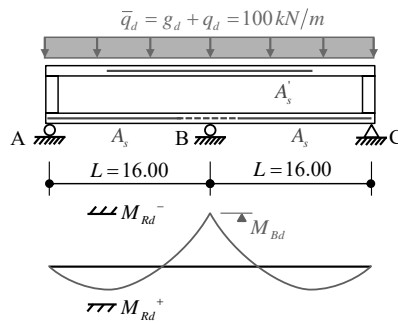
Eine getrennte Behandlung des Verformungsvermögens und des Verformungsbedarfs ist im Allgemeinen nicht möglich, da die erreichbaren plastischen Gelenkwinkel bei statisch unbestimmten Systemen von den Verformungen des Systems, respektive von den Schnittgrössenumlagerungen, abhängig sind. Für moderate Schnittgrössenumlagerungen kann diese Wechselwirkung aber näherungsweise vernachlässigt werden.

Nachfolgend wird entsprechend das Verformungsvermögen unabhängig vom Verformungsbedarf untersucht. Dazu wird bei der Ermittlung des Verformungsbedarfs vorausgesetzt, dass sich das plastische Gelenk ideal plastisch verhält (keine Verfestigung). Dies steht grundsätzlich im Widerspruch zur bei der Ermittlung des Verformungsvermögens angesetzten bilinearen Stoffbeziehung (mit Verfestigung) der Bewehrung, ist jedoch in Anbetracht der getrennten Betrachtung von Verformungsvermögen und –bedarf zulässig und vereinfacht die Berechnungen stark. Um zuverlässige Resultate zu erhalten, ist grundsätzlich der Einfluss der Rissbildung bei der Ermittlung der Beanspruchungen zu berücksichtigen. Das Verhalten ist damit bereits vor der Bildung des ersten plastischen Gelenks nichtlinear. Näherungsweise kann von einem (über die ganze Trägerlänge) gerissen-elastischen Verhalten (Zustand II) und damit einer in erster Näherung konstanten Biegesteifigkeit ausgegangen werden. Dies ist insbesondere deshalb zulässig, da sich die Rissbildung nach dem Auftreten von plastischen Verformungen kaum mehr auf die Schnittgrössenumlagerung auswirkt.

Obwohl mit der Entkopplung des Verformungsvermögens vom Verformungsbedarf und den getroffenen Annahmen die tatsächlichen Gegebenheiten stark vereinfacht werden, lassen sich doch brauchbare Näherungen finden; dies zumindest für übliche Trägerabmessungen und Bewehrungsanordnungen.

Träger – Verformungsvermögen

Rotationsbedarf – Beispiel Zweifeldträger



$$A_s f_{sd} = 8 \cdot 530 \cdot 0.435 = 1848 \text{ kN}$$

$$M_{Rd^{\pm}} = z \cdot A_s f_{sd} \approx 1848 \text{ kNm}$$

Kraftmethode

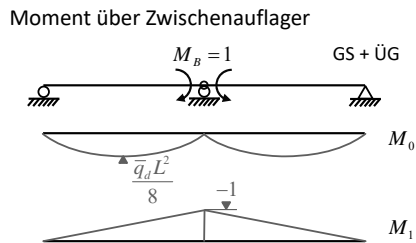
$$\Theta_{B0} = \int \frac{M_0 M_1}{EI} = 2 \cdot \frac{\bar{q}_d L^2}{8} \cdot \left(-\frac{L}{3EI^+} \right) = -\frac{\bar{q}_d L^3}{12EI^+}$$

$$\Theta_{B1} = \int \frac{M_1^2}{EI} = 2 \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot \frac{L}{3EI^-} = \frac{2L}{3EI^-}$$

$$\Theta_B = \Theta_{B0} + M_B \Theta_{B1} = 0$$

$$\rightarrow M_B = -\frac{\Theta_{B0}}{\Theta_{B1}} = \frac{\bar{q}_d L^2}{8} \frac{EI^-}{EI^+} = \alpha_r \frac{\bar{q}_d L^2}{8} \leq \frac{\bar{q}_d L^2}{8} \text{ (i.d.R.)}$$

Da meist $EI^- < EI^+$ ist (Rissbildung beginnt über B) findet ein Teil der Schnittkraftumlagerungen bereits vor Fließbeginn statt (dadurch wird der plastische Rotationsbedarf reduziert → günstig!)

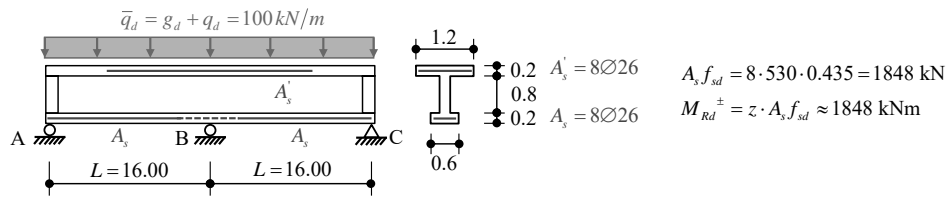


Die Untersuchung des Verformungsvermögens wird am Beispiel des in der Abbildung gezeigten Zweifeldträgers illustriert.

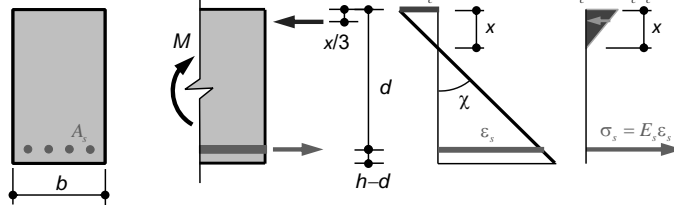
In einem ersten Schritt wird die elastische Schnittkraftverteilung des Systems ermittelt (einfach statisch unbestimmter Träger, Kraftmethode). Dabei kann der Einfluss der Rissbildung auf die Steifigkeiten (hier insbesondere positive / negative Biegesteifigkeit) berücksichtigt werden. Wie in der Stabstatik üblich, werden die (untergeordneten) Verformungen infolge Querkraft nicht berücksichtigt.

Träger – Verformungsvermögen

Rotationsbedarf – Beispiel Zweifeldträger



EI'' (gerissen)



$$M = A_s E_s \epsilon_s \left(d - \frac{x}{3} \right), \quad \chi = \frac{\epsilon_s}{d - x} = \frac{M}{EI''} \quad (\text{hier vereinfachend } \epsilon_{sm} = \epsilon_{sr} \text{ angenommen, mit } \epsilon_{sm} < \epsilon_{sr} \text{ resultiert ein kleinerer Rotationsbedarf})$$

$$\rightarrow EI'' = \frac{M}{\chi} = A_s E_s \underbrace{\left(d - \frac{x}{3} \right)}_{\approx z} \underbrace{(d - x)}_{\approx 0.9z} \approx 0.9 A_s E_s z^2 = 0.9 \cdot 4240 \cdot 205'000 \cdot 1^2 = 780 \text{ MNm}^2 \quad (EI'_i = 3502 \text{ MNm}^2)$$

Die Berechnung erfolgt mit der Biegesteifigkeit im Zustand II (gerissen elastisch). Diese liegt bei etwas mehr als 22% der ungerissenen Biegesteifigkeit.

Träger – Verformungsvermögen

Rotationsbedarf – Beispiel Zweifeldträger

Fließbeginn

$$\alpha_r \frac{\bar{q}_d L^2}{8} = M_{Rd}^- \rightarrow \bar{q}_{dy} = \frac{8M_{Rd}^-}{\alpha_r L^2} = \frac{1}{\alpha_r} \frac{8 \cdot 1848}{256} = \frac{1}{\alpha_r} 57.8 \text{ kNm}^{-1}$$

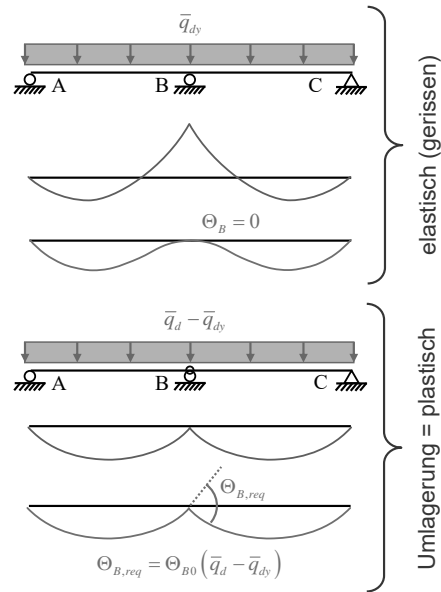
$$\rightarrow \bar{q}_d - \bar{q}_{dy} = 100 - \frac{1}{\alpha_r} 57.8 \text{ kNm}^{-1} = 42.2 \text{ kNm}^{-1} \quad (\alpha_r = 1.0)$$

$$= 27.8 \text{ kNm}^{-1} \quad (\alpha_r = 0.8)$$

$$\Theta_{B,req} = (\bar{q}_d - \bar{q}_{dy}) \frac{L^3}{12EI} = \frac{42.2 \cdot 16^3}{12 \cdot 780 \cdot 10^3} \frac{\text{kNm}^2}{\text{kNm}^2} = 18.5 \text{ mrad} \quad (\alpha_r = 1)$$

$$= 12.2 \text{ mrad} \quad (\alpha_r = 0.8)$$

Nach Erreichen von M_{Rd}^- :
zwei Einfeldträger für Zusatzbelastung $\bar{q}_d - \bar{q}_{dy}$
mit entsprechender Relativverdrehung der
Trägerenden über B (siehe GS+ÜG in Folie 9)



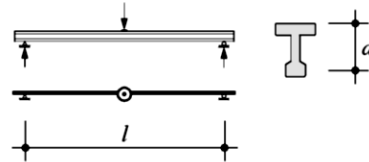
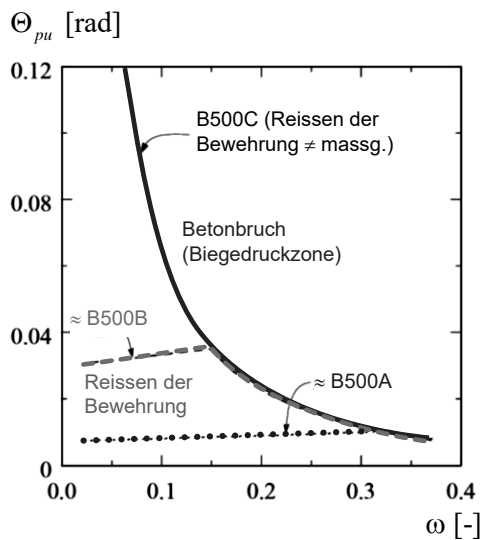
Der Rotationsbedarf entspricht der Relativverdrehung im plastischen Gelenk ab dem Erreichen des Biege widerstands.

Da das System (aufgrund der Annahme, dass das plastische Gelenk keine Verfestigung aufweist) ab diesem Zeitpunkt als zwei Einfeldträger wirkt, kann diese Relativverdrehung sehr einfach aus den Endverdrehungen der beiden Einfeldträger unter der Zusatzbelastung, welche nach dem Erreichen des Biege widerstands aufgebracht wird, ermittelt werden.

Träger – Verformungsvermögen

Rotationsvermögen Θ_{pu} allgemein

Beispiel: Plastischer Gelenkwinkel in Funktion von ω (Duktilitätsklassen A-C, 1999)



Grundlagen für die Berechnungen:

$f_y = 500 \text{ MPa}$	$l/d = 20$
$E_s = 200 \text{ GPa}$	$\theta = 45^\circ$
$f_c = 30 \text{ MPa}$	$\varnothing = 20 \text{ mm}$
$\epsilon_{cu} = 5 \text{ ‰}$	$s_{rm} = 150 \text{ mm}$

Das Verformungsvermögen (Rotationsvermögen) eines Trägers ist durch folgende Versagensarten begrenzt:

- Stauchung der Biegedruckzone (Betonbruch)
- Reissen der Bewehrung (Stahlbruch).

Massgebend ist diejenige Versagensart, welche zuerst (bei kleinerer Rotation) auftritt.

Das Diagramm illustriert eindrücklich, dass bei Verwendung einer Bewehrung mit niedriger Duktilität (B500A) ein sehr kleines Rotationsvermögen besteht. Auch mit Betonstahl B500B ist in vielen Fällen (etwa für $x/d < 0.17$) das Reissen der Bewehrung massgebend.

Träger – Verformungsvermögen

Rotationsvermögen Θ_{pu} vereinfacht (siehe auch [1], p. 2-32ff)

Beschränkung der plastischen Rotation
infolge Betonstahl (Reissen der Bewehrung):

$$\Theta_{pus} = L_{pl} \cdot \left(\frac{\varepsilon_{smu}}{d-x} + \frac{\varepsilon_{smy}}{d-x} \right)$$

Krümmung bei Fliessbeginn
Krümmung beim Reissen
der Bewehrung

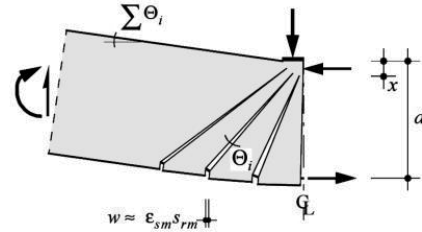
Beschränkung der plastischen Rotation
infolge Beton (Erreichen Bruchstauchung):

$$\Theta_{puc} = L_{pl} \left(\frac{\varepsilon_{c2d}}{x} + \frac{\varepsilon_{smy}}{d-x} \right)$$

Krümmung bei Fliessbeginn
Krümmung bei Betonbruch

Rotation pro Riss: $\Theta_i \approx \frac{\varepsilon_{sm} s_{rm}}{d-x}$

Plastische Gelenkrotation = Summe der plastischen
Rotationen aller Risse ab Fliessbeginn



L_{pl} Plastische Gelenklänge, abhängig von Belastungskonfiguration und Geometrie: Bereich, in welchem die Gurtbewehrung fliesst (\rightarrow Gurtkraftverlauf i.A. aus Spannungsfeld ermitteln)

ε_{smu}	Mittlere Stahldehnung beim Erreichen von	$\varepsilon_{sr} = \varepsilon_{ud}$	$\sigma_{sr} = f_t$	} $\varepsilon_{sr} \leftrightarrow \varepsilon_{sm}$ \rightarrow Zuggurtmodell (Stahlbeton I)
ε_{smy}	Mittlere Stahldehnung beim Erreichen von	$\varepsilon_{sr} = \frac{f_s}{E_s}$	$\sigma_{sr} = f_s$	

In erster Näherung kann das Rotationsvermögen abgeschätzt werden, indem einerseits eine Annahme über die Länge des plastischen Gelenks getroffen und andererseits die plastische Krümmung bei der massgebenden Versagensart (Betonbruch resp. Reissen der Bewehrung) anhand einer Querschnittsanalyse ermittelt wird.

Das Rotationsvermögen (plastische Rotation in [rad]) resultiert sodann aus der Multiplikation der plastischen Krümmungen [1/m] mit der Länge des plastischen Gelenks [m].

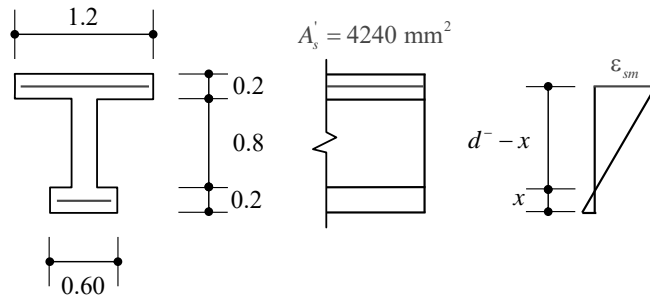
Die plastische Krümmung entspricht der Bruchkrümmung (beim Erreichen der Bruchstauchung des Betons, resp. der Bruchdehnung der Bewehrung), abzüglich der Krümmung bei Fliessbeginn der Bewehrung. Sie beinhaltet somit keine elastischen Verformungsanteile.

Massgebend für die Bruchkrümmung ist diejenige Versagensart, welche zuerst (bei kleinerer Rotation) auftritt. Bei der Versagensart «Reissen der Bewehrung» darf nicht die Bruchdehnung ε_{su} der nackten Bewehrung verwendet werden, da die Duktilität durch die Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen («Tension Stiffening», zugversteifende Wirkung des Betons) stark reduziert wird.

Träger – Verformungsvermögen

Rotationsbedarf ↔ Rotationsvermögen vereinfacht – Beispiel Zweifeldträger

- C30/37:
 $f_{cd} = 20 \text{ MPa}$, $f_{ctm} = 2.9 \text{ MPa}$
- $d^- \approx 1.1 \text{ m}$, $A_s' f_{sd} = 1848 \text{ kN}$
 $\rightarrow x = \frac{1848}{0.85 \cdot 0.6 \cdot 20} = 181 \text{ mm}$
 $d^- - x = 919 \text{ mm}$



Rotation im Bruchzustand

$$\left. \begin{aligned} \Theta_{puc} &= L_{pl} \cdot \left(\frac{\varepsilon_{cu}}{x} - \frac{\varepsilon_{smy}}{d^- - x} \right) \\ \Theta_{pus} &= L_{pl} \cdot \left(\frac{\varepsilon_{smu}}{d^- - x} - \frac{\varepsilon_{smy}}{d^- - x} \right) \end{aligned} \right\} \text{ mit } \frac{\varepsilon_{smy}}{d^- - x} = \text{Krümmung bei Fließbeginn} \approx \frac{f_s/E_s}{d^- - x} = 2.3 \text{ mrad/m}, \quad L_{pl} = \text{plastische Länge} = \text{ca. } 2d^-$$

Auf dieser und der folgenden Seite wird das Rotationsvermögen für das Beispiel (Folie 9 ff.) in erster Näherung abgeschätzt.

Dabei wird angenommen, dass für die Bewehrung eine mittlere Bruchdehnung von $\varepsilon_{smu} \approx 0.5 \cdot \varepsilon_{ud}$ angesetzt werden darf, und dass die Länge des plastischen Gelenks der doppelten statischen Höhe entspricht, $l_{pl} \approx 2 \cdot d$.

Diese Annahmen werden anschliessend mit einer genaueren Berechnung verifiziert. Es wird sich zeigen, dass sie für B500C relativ gut stimmen, für B500B jedoch nicht konservativ sind. Für Betonstahl der Duktilitätsklasse B müssten kleinere Werte für ε_{smu} und l_{pl} gewählt werden, um auf der sicheren Seite zu sein (beispielsweise $l_{pl} \approx 1.5 \cdot d$ und $\varepsilon_{smu} \approx 0.3 \cdot \varepsilon_{ud}$).

Träger – Verformungsvermögen

Rotationsbedarf ↔ Rotationsvermögen vereinfacht – Beispiel Zweifeldträger

Rotation im Bruchzustand

Betonbruch

$$\Theta_{puc} = L_{pl} \cdot \left(\frac{\varepsilon_{cu}}{x} - \frac{\varepsilon_{smy}}{d' - x} \right) \approx 2 \cdot 1.10 \cdot \left(\frac{0.003}{0.181} - 0.0023 \right) = 14.3 \frac{\text{mrad}}{\text{m}} \cdot 2.2 \text{ m} = 31.4 \text{ mrad}$$

→ $\Theta_{puc} > \Theta_{B,req}$ → OK

Stahlreißen

grobe Annahme: $\varepsilon_{smu} \approx 0.5 \varepsilon_{ud} = \begin{cases} 22.5\text{‰} \text{ (B500B)} \\ 32.5\text{‰} \text{ (B500C)} \end{cases}$ (geschätzte Abminderung der Bruchdehnung infolge Zugversteifung – siehe hinten)

$$\Theta_{pus} = L_{pl} \cdot \left(\frac{\varepsilon_{smu}}{d' - x} - \frac{\varepsilon_{smy}}{d' - x} \right) = \begin{cases} 2 \cdot 1.10 \cdot \left(\frac{0.0225}{0.919} - 0.0023 \right) = 22.2 \frac{\text{mrad}}{\text{m}} \cdot 2.2 \text{ m} = 48.8 \text{ mrad (B500B)} \\ 2 \cdot 1.10 \cdot \left(\frac{0.0325}{0.919} - 0.0023 \right) = 33.1 \frac{\text{mrad}}{\text{m}} \cdot 2.2 \text{ m} = 72.7 \text{ mrad (B500C)} \end{cases}$$

→ $\Theta_{pus} > \Theta_{B,req}$ → OK

Damit wäre der Nachweis des Verformungsvermögens erbracht.

Aber: Ist die Annahme von L_{pl} , ε_{smu} in Ordnung?

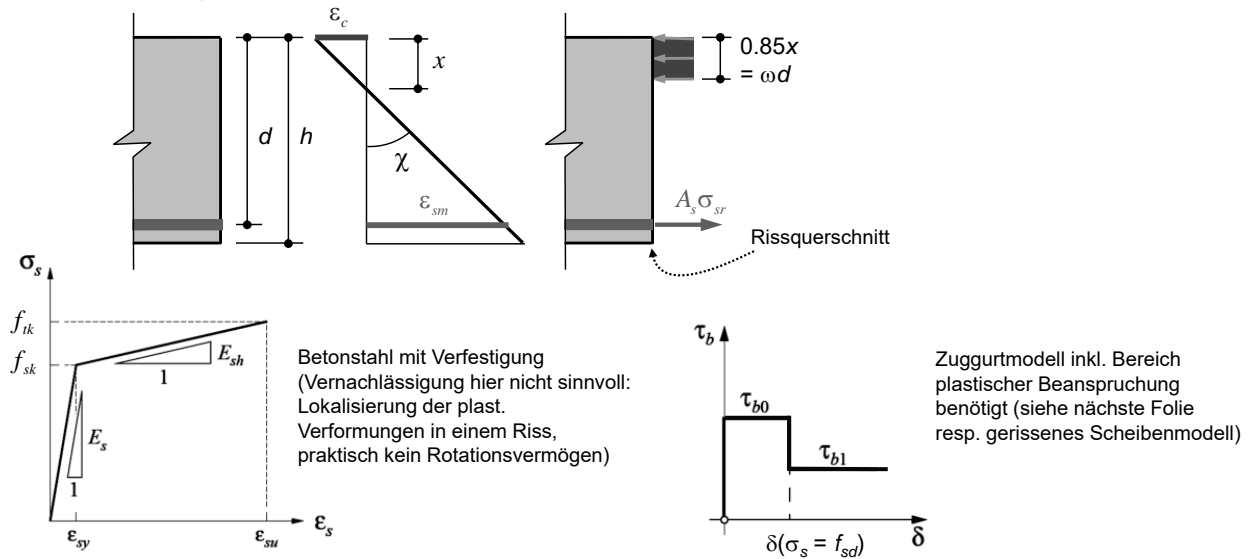
Mit den getroffenen Annahmen ($\varepsilon_{smu} \approx 0.5 \cdot \varepsilon_{ud}$, $l_{pl} \approx 2 \cdot d$) kann der Nachweis des ausreichenden Verformungsvermögens erbracht werden (für B500B und B500C), d.h. das Rotationsvermögen ist grösser als der Rotationsbedarf.

Es stellt sich jedoch die Frage, ob die Annahmen gerechtfertigt sind. Dies wird auf den folgenden Seiten mittels einer genaueren Untersuchung überprüft:

- Mittlere Dehnung des Zuggurts beim Reißen der Bewehrung: Überprüfung mit Zuggurtmodell
- Länge des plastischen Gelenks (und Dehnungsverteilung über die Länge des plastischen Gelenks): Überprüfung mit Spannungsfeldern

Ergänzungen – Verformungsvermögen

Rotationsvermögen Θ_{pu} «genauere Untersuchung» – Grundlagen

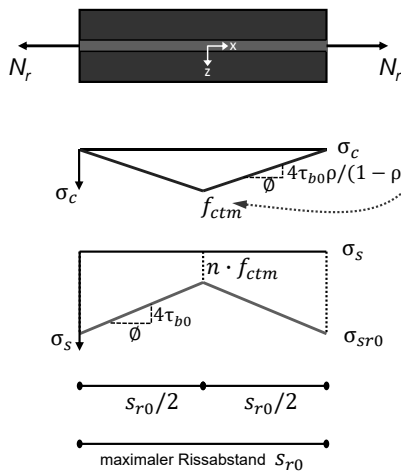


Wiederholung aus Stahlbeton I: Zuggurtmodell

- Die Steifigkeit und das Verformungsvermögen eines Zuggurts können mit dem *Zuggurtmodell* (Tension Chord Model) untersucht werden.
- Das Zuggurtmodell ist ein stark vereinfachtes, jedoch auf klaren mechanischen Grundlagen basierendes Modell zur Erfassung der zugversteifenden Wirkung des Betons zwischen den Rissen. Es basiert auf einer abgetrepten, starr-ideal plastischen Verbundspannungs-Schlupf-Beziehung, mit welcher das komplexe Verbundverhalten vereinfacht analysiert werden kann. Dabei wird die komplexe Kraftübertragung zwischen Beton und Bewehrung durch nominelle Schubspannungen erfasst, welche entlang des nominellen Stabumfangs als konstant verteilt wirkend vorausgesetzt werden.

Zuggurtmodell – Last – Rissbildung (SBI)

Betrachtung eines Zuggurtes (Brutto-QS A_c), bewehrt mit Stab mit Durchmesser \emptyset ([1], Seite 3.5f)



Betonspannung in Mitte des Elements mit Länge s_{r0} ist $\sigma_c = f_{ctm}$, d.h. dort könnte sich ein weiterer Riss bilden.

Somit ist der minimale Rissabstand:

$$s_{r,min} = s_{r0}/2$$

Allgemein mit Parameter λ :

$$s_r = \lambda \cdot s_{r0} \quad \left(\frac{1}{2} < \lambda < 1 \right)$$

→ theoretische Grenzen der Rissabstände bei abgeschlossenem Rissbild!

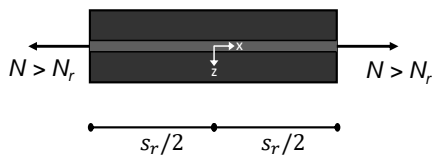
NB: Bei Rissbildung stellt sich unter Last (theoretisch) schlagartig das abgeschlossene Rissbild ein.

Wiederholung aus Stahlbeton I: Zuggurtmodell

- Mit dem Zuggurtmodell können die maximalen und minimalen Rissabstände, die Spannungen in der Bewehrung bei Rissbildung und bei darüber hinausgehender Belastung, Rissbreiten sowie über die Länge des Zugglieds gemittelte Dehnungen (welche für die Untersuchung des Verformungsvermögens massgebend sind) ermittelt werden.
- Die Rissabstände können nicht exakt bestimmt werden. Vielmehr besteht eine Unsicherheit (Faktor 2) selbst bei «idealen» Verhältnissen. Hinzu kommen diverse weitere Unsicherheiten (Streuung Betonzugfestigkeit, Verbund, ...).
- Rechnerisch wird der Einfluss des Rissabstands im Zuggurtmodell mit dem Parameter λ erfasst, welcher zwischen $\lambda = 0.5$ (minimaler theoretischer Rissabstand) und $\lambda = 1$ (maximaler theoretischer Rissabstand) liegt.
- Alle Verformungsberechnungen (auch mit komplexeren Modellen als dem Zuggurtmodell) sind daher als Näherung zu betrachten.

Zuggurtmodell – Last – Zugversteifung (SBI)

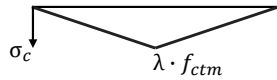
Steigerung der Normalkraft nach der Rissbildung $N > N_r$ ([1], Seite 3.5f)



Betonspannungen bleiben nach Rissbildung konstant. Stahlspannungen steigen weiter.

Mittlere Betondehnung

$$\varepsilon_{cm} = \frac{\int_0^{s_r} \varepsilon_c dx}{s_r} = \frac{\int_0^{s_r} \frac{\sigma_c}{E_c} dx}{s_r} = \frac{\lambda f_{ctm}}{2E_c}$$



Verschiebung

$$u_c(x) = \int_0^x \varepsilon_c(x) dx = \int_0^x \frac{\sigma_c(x)}{E_c} dx$$

$$u_{cr} = u_c\left(x = \frac{s_r}{2}\right)$$

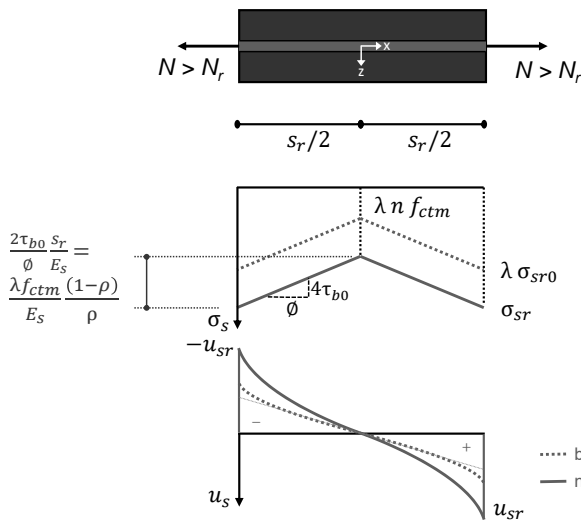


Wiederholung aus Stahlbeton I: Zuggurtmodell

- Die «mittleren Betondehnungen» (über Länge des Risselements gemittelter Wert = Verlängerung des Betons über das Risselement dividiert durch die Länge des Risselements) können durch einfache Integration der linear verlaufenden Betondehnungen ermittelt werden.
- Die relative Verschiebung des Rissufers, ausgehend von der Mitte des Risselements, entspricht dem Integral der Betondehnungen über des halbe Risselement.

Zuggurtmodell – Last – Zugversteifung (SBI)

Steigerung der Normalkraft nach der Rissbildung $N > N_r$ ([1], Seite 3.5f)



Betonspannungen bleiben nach Rissbildung konstant.
Stahlspannungen steigen weiter.

Mittlere Stahldehnung

$$\varepsilon_{sm} = \frac{\int_0^{s_r} \frac{\sigma_s}{E_s} dx}{s_r} = \frac{\sigma_{sr}}{E_s} - \frac{4\tau_{b0}}{\phi} \frac{s_r}{4E_s} = \frac{\sigma_{sr}}{E_s} - \frac{\lambda f_{ctm}(1-\rho)}{2\rho E_s}$$

Verschiebung

$$u_s(x) = \int_0^x \varepsilon_s(x) dx = \int_0^x \frac{\sigma_s(x)}{E_s} dx$$

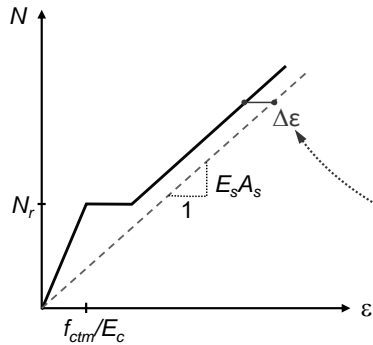
$$u_{sr} = u_s\left(x = \frac{s_r}{2}\right)$$

Wiederholung aus Stahlbeton I: Zuggurtmodell

- Die «mittleren Stahldehnungen» (über Länge des Risselements gemittelter Wert = Verlängerung des Betonstahls über das Risselement dividiert durch die Länge des Risselements) können durch einfache Integration der linear verlaufenden Stahldehnungen ermittelt werden.
- Die Verlängerung des Zugglieds (über Risselement gemittelt) entspricht der Verlängerung des Betonstahls, die «mittlere Dehnung» des Zugglieds somit der mittleren Stahldehnung.
- Man erkennt, dass die mittlere Dehnung des Zugglieds derjenigen der nackten Bewehrung, abzüglich eines konstanten Terms, entspricht.

Zuggurtmodell – Last – Zugversteifung

Steigerung der Normalkraft nach der Rissbildung $N > N_r$ ([1], Seite 3.5f)



N - ε - und σ_{sr} - ε -Diagramme: Reduktion der Dehnung des nackten Stahls um $\Delta\varepsilon$ ($\Delta\varepsilon$ bleibt bis Fließbeginn konstant).

NB: gute Näherung für w_r (kleine ρ)

$$\frac{\phi/4\rho}{2E_s} \left(\frac{N}{A_s} - \frac{f_{ctm}}{4\rho} \right) \leq w_r \leq \frac{\phi/4\rho}{E_s} \left(\frac{N}{A_s} - \frac{f_{ctm}}{2\rho} \right)$$

Betonspannungen bleiben nach Rissbildung konstant.
Stahlspannungen steigen weiter.

Stahldehnung am Riss

$$\varepsilon_{sr} = \sigma_{sr}/E_s$$

Mittlere Betondehnung

$$\varepsilon_{cm} = \lambda f_{ctm}/(2E_c)$$

Mittlere Stahldehnung

$$\varepsilon_{sm} = \frac{\sigma_{sr}}{E_s} - \frac{\tau_{b0} s_r}{\phi E_s} = \frac{\sigma_{sr}}{E_s} - \frac{\lambda f_{ctm}(1-\rho)}{2\rho E_s}$$

Rissbreiten: Differenz der mittleren Stahl- und Betondehnungen, multipliziert mit s_r ($\lambda = 0.5 \dots 1$):

$$w_r = s_r \left[\frac{\sigma_{sr}}{E_s} - \frac{\lambda f_{ctm}(1-\rho)}{2\rho E_s} - \frac{\lambda f_{ctm}}{2E_c} \right] = \frac{\lambda s_{r0}(2\sigma_{sr} - \lambda\sigma_{sr0})}{2E_s}$$

mit $\sigma_{sr} = N/A_s$

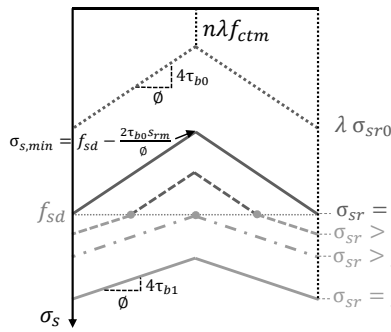
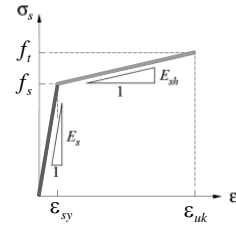
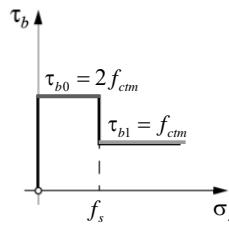
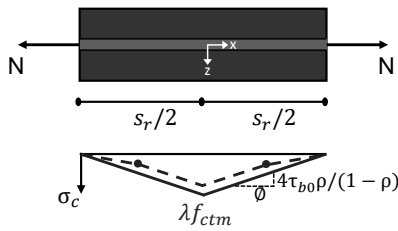
$$\frac{s_{r0}}{2E_s} \left(\sigma_{sr} - \frac{\sigma_{sr0}}{4} \right) \leq w_r \leq \frac{s_{r0}}{E_s} \left(\sigma_{sr} - \frac{\sigma_{sr0}}{2} \right)$$

Wiederholung aus Stahlbeton I: Zuggurtmodell

- Die mittlere Dehnung des Zugglieds entspricht derjenigen der nackten Bewehrung abzüglich eines konstanten Terms $\Delta\varepsilon$.

Zuggurtmodell – Last – Duktilität (SBI)

Verhalten nach Überschreiten der Fließgrenze ($\sigma_{sr} > f_{sd} \rightarrow \tau_{b1} = \tau_{b1}/2$)



Regimes:

Bewehrung in Rissnähe plastifiziert, dazwischen elastisch (N.B: bei kleiner Verfestigung Bruch in diesem Regime)
Beziehung für ϵ_{sm} kompliziert (aber geschlossen lösbar)

Bewehrung fließt im ganzen Risselement.
 ϵ_{sm} analog wie im elastischen Bereich (τ_{b1} statt τ_{b0} , mit $\tau_{b1} = \tau_{b0}/2$):

$$\epsilon_{sm} = \frac{f_{sd}}{E_s} + \frac{\sigma_{sr} - f_{sd}}{E_{sh}} - \frac{\lambda f_{ctm} (1 - \rho)}{4 \rho E_{sh}}$$

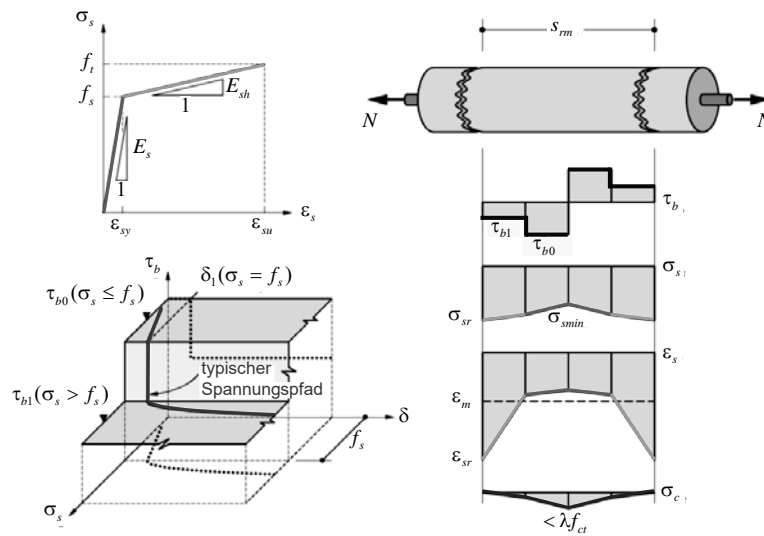
"nackter Stahl" " $\Delta \epsilon_1 = \Delta \epsilon \frac{1}{2} \frac{E_s}{E_{sh}}$ "

Wiederholung aus Stahlbeton I: Zuggurtmodell

- Die Zugversteifung wirkt sich nachteilig auf die Duktilität aus. Um die Duktilität beurteilen zu können, muss eine Verfestigung des Betonstahls berücksichtigt werden. Vereinfachend wird hier ein bilineares Stoffgesetz verwendet, siehe Abbildung rechts.
- Nach dem Überschreiten der Fließgrenze der Bewehrung nimmt die Verbundspannung gemäss Zuggurtmodell auf die Hälfte des Ausgangswerts ab. Da die Fließgrenze zuerst in den Rissen erreicht wird, wachsen die Bereiche mit reduzierter Verbundspannung sukzessive von den Rissen aus in Richtung «Mitte zwischen zwei Rissen» (teilplastifiziertes Risselement: in Rissnähe fließt die Bewehrung, dazwischen ist sie noch elastisch). Die Beziehungen für die mittleren Dehnungen in Funktion der Stahlspannung am Riss (und umgekehrt) sind in diesem Regime etwas komplizierter als für elastisches Verhalten.
- Ab einer bestimmten Beanspruchung fließt die Bewehrung im ganzen Risselement (vollplastifiziertes Risselement). Die Beziehungen für die mittleren Dehnungen in Funktion der Stahlspannung am Riss (und umgekehrt) sind in diesem Regime analog wie im elastischen Bereich, einfach mit reduzierter Verbundspannung.

Zuggurtmodell – Last – Duktilität (SBI)

Stoffbeziehung der Bewehrung (Zuggurtmodell mit bilinearer Kennlinie des Bewehrungsstahls):



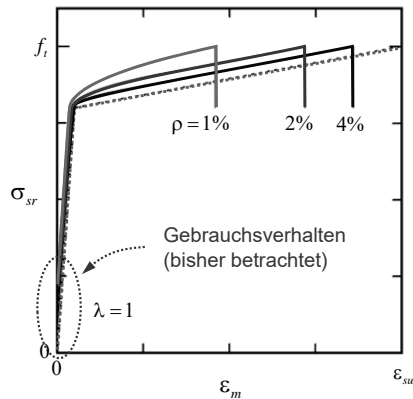
Wiederholung aus Stahlbeton I: Zuggurtmodell

- Die Abbildung zeigt nochmals die gleichen Punkte wie die vorhergehende Folie, in etwas anderer Darstellung, für das teilplastifizierte Regime.
- Zusätzlich sind neben den Stahlspannungen auch die Stahldehnungen angegeben (in etwa massstäblich). Man erkennt, dass – obschon die Stahlspannungen weniger stark variieren – die Stahldehnungen im Bereich, wo die Bewehrung fließt (Rissnähe) wesentlich stärker anwachsen und der grösste Teil der Verlängerung des Zugglieds durch diese Dehnungen hervorgerufen wird. Dies, da die Steifigkeit der Bewehrung nach Fließbeginn drastisch abfällt (Verfestigungsmodul ist viel kleiner als Elastizitätsmodul).

Zuggurtmodell – Last – Duktilität (SBI)

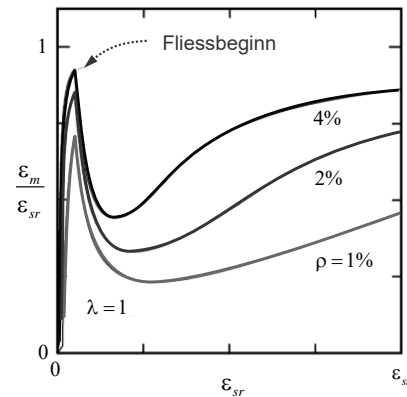
Last-Verformungsverhalten mit Berücksichtigung des Verbunds bei hoher Beanspruchung

- Kein Einfluss auf Zugwiderstand
- Steiferes Verhalten als nackter Stahl



Verhältnis mittlere Dehnungen zu maximaler Dehnung in den Rissen mit Berücksichtigung des Verbunds

- Starker Abfall nach Fließbeginn
- Einfluss auf Duktilität beachten!



$f_s = 500 \text{ MPa}$
 $f_{su} = 625 \text{ MPa}$
 $E_s = 200 \text{ GPa}$
 $\epsilon_{su} = 0.05$
 $\varnothing = 16 \text{ mm}$
 $f_c = 30 \text{ MPa}$

Wiederholung aus Stahlbeton I: Zuggurtmodell

- Die Abbildung illustriert die Reduktion der Duktilität durch die Zugversteifung. Obschon die Berechnungen für verhältnismässig duktile Bewehrung und grosse Bewehrungsgehalte durchgeführt wurden, ist der Einfluss markant.
- Der auf der rechten Seite dargestellte Wert $\epsilon_{sm} / \epsilon_{sr}$ ist ein Mass dafür, inwieweit die Duktilität des nackten Betonstahls durch den Verbund vermindert wird.

Träger – Verformungsvermögen

Rotationsvermögen Θ_{pl} «genauere Untersuchung» – Grundlagen

Stoffbeziehung der Bewehrung (Zuggurtmodell)

1. Bewehrung über ganzes Risselement elastisch,

$$\sigma_{sr} \leq f_s :$$

$$\varepsilon_{sm} = \frac{\sigma_{sr}}{E_s} - \frac{\tau_{b0} s_r}{E_s \varnothing} \quad (\text{nackte Bewehrung} - \Delta\varepsilon_0, \Delta\varepsilon_0 = \frac{\tau_{b0} s_r}{E_s \varnothing})$$

2. Bewehrung fließt in Rissnähe,

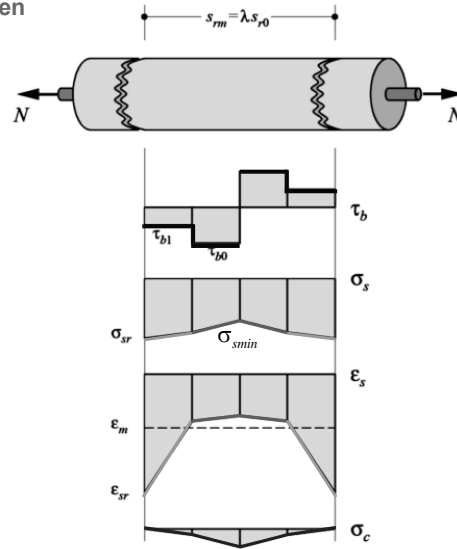
$$f_s \leq \sigma_{sr} \leq \left(f_s + \frac{2\tau_{b1} s_r}{\varnothing} \right) :$$

$$\varepsilon_{sm} = \frac{(\sigma_{sr} - f_s) \varnothing}{4E_{sh} \tau_{b1} s_r} \left(1 - \frac{E_{sh} \tau_{b0}}{E_s \tau_{b1}} \right) + \frac{(\sigma_{sr} - f_s) \tau_{b0}}{E_s \tau_{b1}} + \left(\varepsilon_{sy} - \frac{\tau_{b0} s_r}{E_s \varnothing} \right)$$

3. Bewehrung fließt über ganzes Risselement,

$$\left(f_s + \frac{2\tau_{b1} s_r}{\varnothing} \right) \leq \sigma_{sr} \leq f_t :$$

$$\varepsilon_{sm} = \varepsilon_{sy} + \frac{(\sigma_{sr} - f_s) \varnothing}{E_{sh}} - \frac{\tau_{b1} s_r}{E_{sh} \varnothing} \quad (\text{nackte Bewehrung} - \Delta\varepsilon_1, \Delta\varepsilon_1 = \frac{\tau_{b1} s_r}{E_{sh} \varnothing})$$



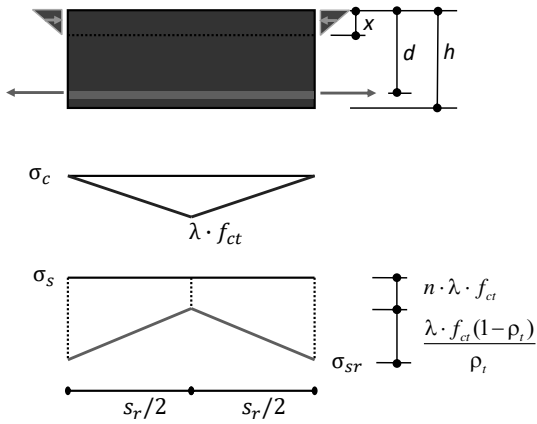
Ergänzung zu Stahlbeton I: Zuggurtmodell

In der Abbildung sind die Beziehungen für die Ermittlung der mittleren Dehnungen in allen drei Regimes (1 ganzes Risselement elastisch / 2 Bewehrung fließt in Rissnähe / 3 Bewehrung fließt im ganzen Risselement) angegeben. Die Beziehungen gelten für eine bilineare Spannungs-Dehnungs-Beziehung der Bewehrung.

Man erkennt, dass im Regime 3, genau wie im Regime 1, die mittleren Dehnungen um einen konstanten Betrag kleiner sind als diejenigen der nackten Bewehrung. Die Differenz ist jedoch im Regime 3 deutlich grösser (Spannungsdifferenz bei gleicher Dehnung halb so gross (da $\tau_{b0} = 2 \cdot \tau_{b1}$ ist), aber Verfestigungsmodul ca. 40 mal kleiner als Elastizitätsmodul).

Elastische Biegesteifigkeit – Zugversteifung (SBI)

[1], Seite 2.16f



Setzt man die Stahlspannung am Riss

$$\sigma_{sr0} = \frac{M_r(d-x)E_s}{EI''}$$

beim Erreichen von M_r gleich der Spannung

$$\sigma_{sr0} = f_{ct} \left(\frac{1}{\rho_t} + n - 1 \right)$$

beim Reißen eines Zuggurtelements, resultiert der äquivalente Bewehrungsgehalt ρ_t :

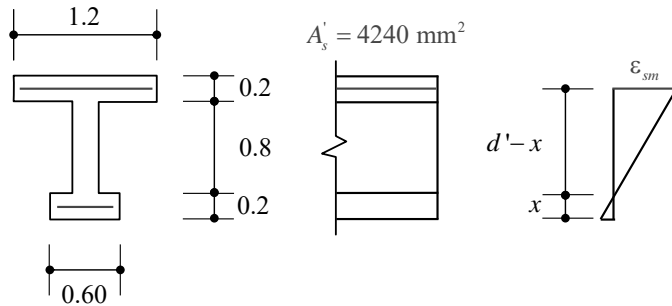
$$\rho_t = \frac{1}{\frac{M_r(d-x)E_s}{f_{ct}EI''} + 1 - n}$$

Wiederholung aus Stahlbeton I: Mit der Definition eines äquivalenten Bewehrungsgehalts können die Beziehungen des Zuggurtmodells auf Biegeträger angewendet werden.

Träger – Verformungsvermögen

Rotationsvermögen «genauere Untersuchung» – Beispiel Zweifeldträger

- C30/37:
 $f_{cd} = 20 \text{ MPa}, f_{ctm} = 2.9 \text{ MPa}$
- $d^- \approx 1.1 \text{ m}, A_s' f_{sd} = 1848 \text{ kN}$
 $\rightarrow x = \frac{1848}{0.85 \cdot 0.6 \cdot 20} = 181 \text{ mm}$
 $d^- - x = 919 \text{ mm}$



Äquivalenter Bewehrungsgehalt

$$\rho_t = \frac{1}{\frac{M_r (d^- - x) E_s}{f_{ct} E I^H} + 1 - n} = 2.2\%$$

$$s_{rm0} \approx \frac{\emptyset}{4} \cdot \left(\frac{1}{\rho_t} - 1 \right) = 292 \text{ mm} \left(\lambda = \frac{1}{2} \dots 1 \right)$$

$$\rightarrow s_{rm} \approx 250 \text{ mm (Bügelabstand)}$$

NB: Zum Vergleich
 \rightarrow Bewehrungsgehalt Zuggurt:

$$\rho \approx \frac{4240}{1.2 \cdot 0.20} = 1.75\%$$

$$s_{rm0} \approx \frac{\emptyset}{4} \cdot \left(\frac{1}{\rho} - 1 \right) = 365 \text{ mm} \left(\lambda = \frac{1}{2} \dots 1 \right)$$

Auf dieser und den folgenden Seiten wird das Verformungsvermögen mit dem Zuggurtmodell untersucht. Dazu wird in einem ersten Schritt der äquivalente Bewehrungsgehalt des Biegeträgers (Zuggurt) ermittelt.

Ergänzende Bemerkung:

- Der angegebene äquivalente Bewehrungsgehalt wurde entsprechend dem in der Vorlesung Stahlbeton I beschriebenen Vorgehen ermittelt ($f_{ct} = 2.9 \text{ MPa}$, $M_r = 612 \text{ kNm}$, $E I^H = 780 \text{ MNm}^2$, $(d-x) = 919 \text{ mm}$ (mit Flansch $b = 0.60 \text{ m}$, Steg $b = 0.20 \text{ m}$))

Träger – Verformungsvermögen

Rotationsvermögen «genauere Untersuchung» – Beispiel Zweifeldträger

Zuggurtmodell

$$\varnothing = 26 \text{ mm}$$

$$s_{rm} = 250 \text{ mm (Bügelabstand)}$$

$$E_s = 205 \text{ GPa}$$

$$f_{ctm} = 2.9 \text{ MPa}$$

$$\tau_{b0} = 2f_{ctm} = 5.8 \text{ MPa}$$

$$\tau_{b1} = 1f_{ctm} = 2.9 \text{ MPa}$$

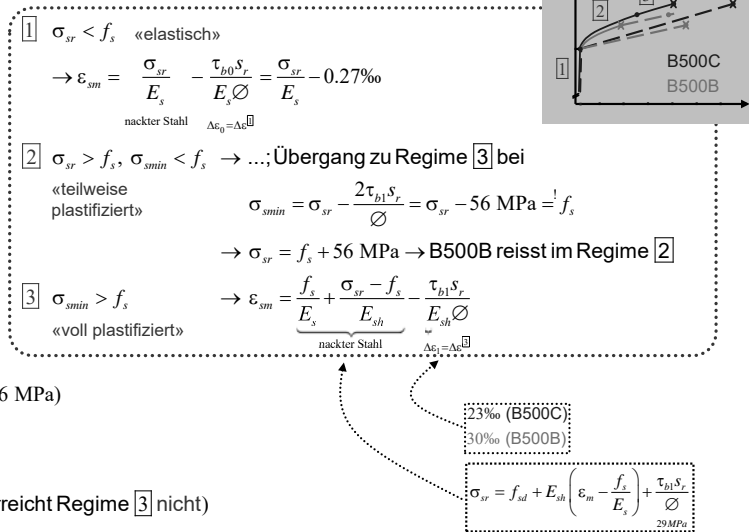
$$\text{B500C: } \varepsilon_{sm}(\sigma_{sr} = f_s) = 2.43 - 0.27 = 2.16\text{‰}$$

$$\varepsilon_{sm}(\sigma_{smin} = f_s) = 25.9\text{‰} \quad (\text{3}) \text{ mit } \sigma_{sr} = 556 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon_{sm}(\sigma_{sr} = f_t) = 65 - 23 = 42\text{‰} = \varepsilon_{smu}$$

$$\text{B500B: } \varepsilon_{sm}(\sigma_{sr} = f_s) = 2.16\text{‰}$$

$$\varepsilon_{smu} = 17.7\text{‰} \text{ (Regime 2) mit } \sigma_{sr} = f_t, \text{ erreicht Regime 3 nicht}$$



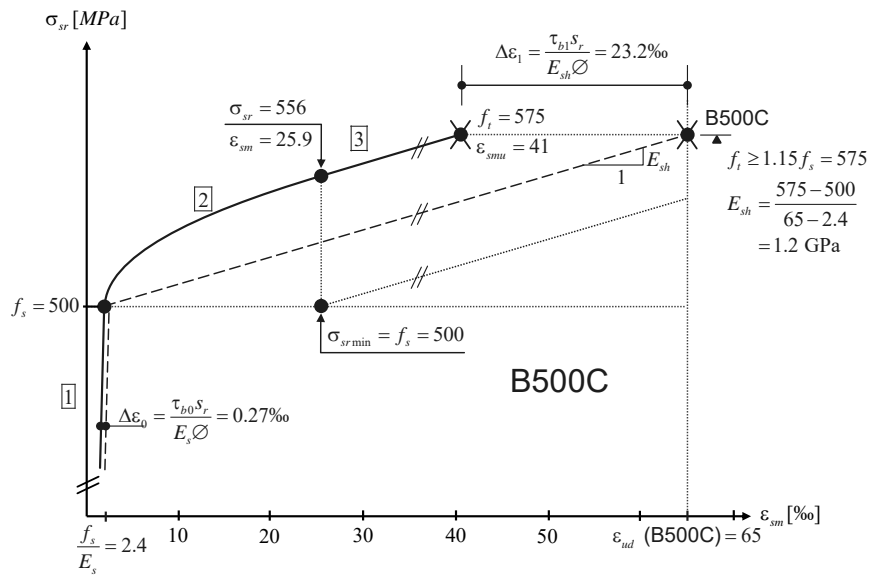
Mit dem äquivalenten Bewehrungsgehalt können die Kennlinien des Zuggurts (Kraft resp. Stahlspannung - mittlere Dehnung) ermittelt werden.

Diese sind auf den folgenden Folien für B500B und B500C dargestellt. Bemerkenswert ist, dass die Bewehrung B500B das Regime 3 (Bewehrung fließt über ganzes Risselement) nicht erreicht, sondern im Regime 2 (Bewehrung fließt nur in Rissnähe) versagt. Dadurch wird die Duktilität stark beeinträchtigt. Der Grund liegt primär in der zu geringen Verfestigung des B500B (und weniger in der Bruchdehnung).

Bei der (graphischen) Konstruktion der Kennlinien kann man sich zu Nutzen machen, dass Regime 3 erreicht wird, wenn die minimale Stahlspannung σ_{smin} (in der Mitte zwischen zwei Rissen) die Fließgrenze überschreitet. Diese unterscheidet sich von der Kennlinie des nackten Bewehrungsstahls σ_s um den gleichen Betrag (im Beispiel 56 MPa) wie die maximale Stahlspannung σ_{sr} (am Riss).

Träger – Verformungsvermögen

Rotationsvermögen «genauere Untersuchung» – Beispiel Zweifeldträger

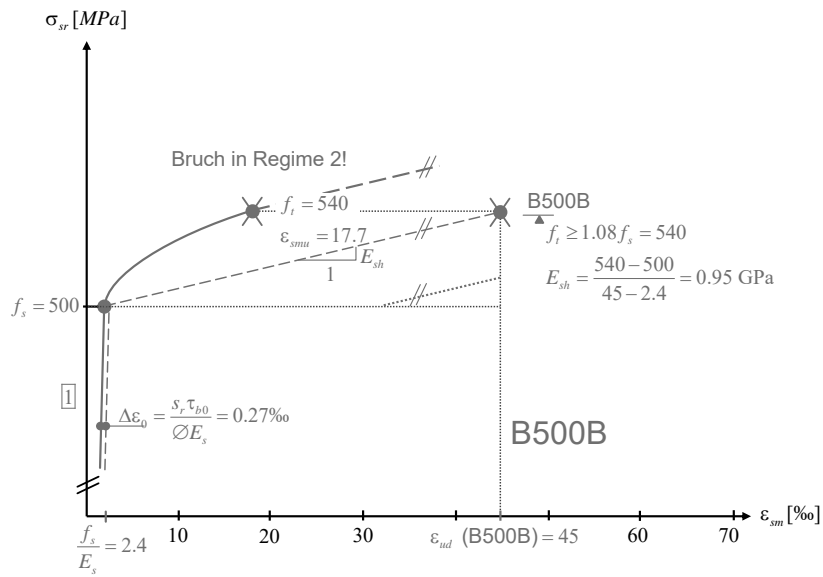


Kennlinie des Zuggurts für B500B:

- Reduktion der Bruchdehnung von $\epsilon_{ud} = 6.5\%$ (nackte Bewehrung) auf $\epsilon_{smu} = 4.2\%$ (Zuggurt)
- Bruch im Regime 3 (voll plastifiziert)

Träger – Verformungsvermögen

Rotationsvermögen «genauere Untersuchung» – Beispiel Zweifeldträger

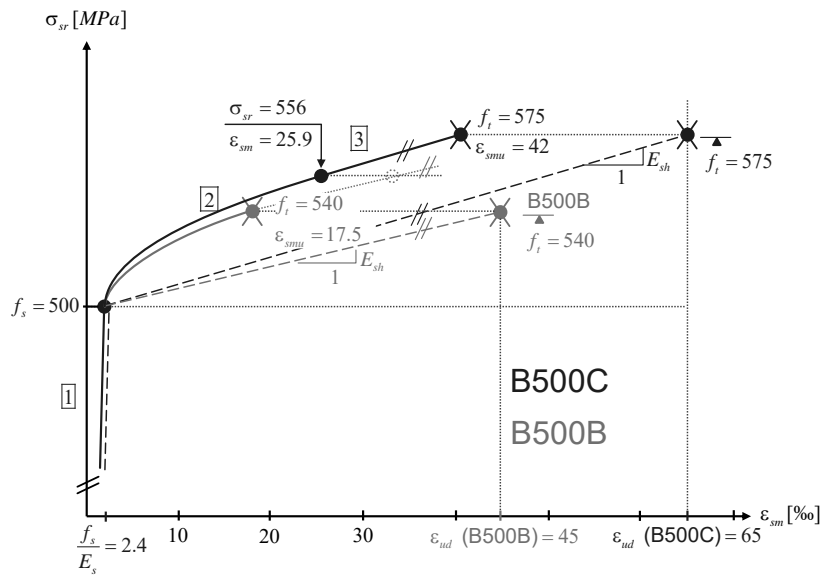


Kennlinie des Zuggurts für B500B:

- Reduktion der Bruchdehnung von $\epsilon_{ud} = 4.5\%$ (nackte Bewehrung) auf $\epsilon_{smu} = 1.8\%$ (Zuggurt)
- Bruch im Regime 2 (teilplastifiziert)

Träger – Verformungsvermögen

Rotationsvermögen «genauere Untersuchung» – Beispiel Zweifeldträger

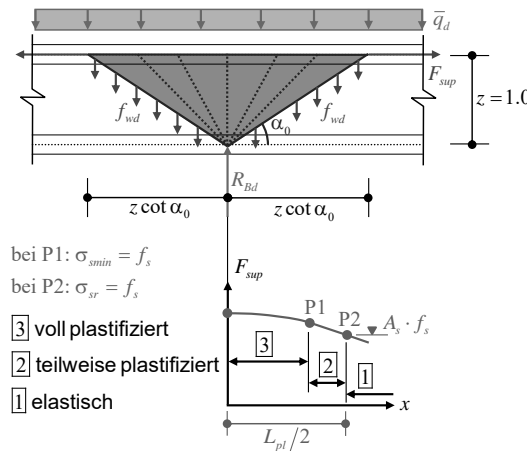


Vergleich der Kennlinien des Zuggurts für B500B und B500C. Der Unterschied in der Duktilität der nackten Bewehrung wird durch den Verbund deutlich akzentuiert.

Träger – Verformungsvermögen

Rotationsvermögen «genauere Untersuchung» – Beispiel Zweifeldträger

«Plastische Länge» (über welche Länge ist der Zuggurt plastifiziert?)



bei P1: $\sigma_{smin} = f_s$

bei P2: $\sigma_{sr} = f_s$

3 voll plastifiziert

2 teilweise plastifiziert

1 elastisch

$$\frac{dF_{sup}}{dx} = -(\bar{q}_d + f_{wd}) \cot \alpha_0(x)$$

$$\cot \alpha_0(x) = x/z$$

$$F_{sup}(x) = A_s f_t - \frac{x^2}{2} \frac{(\bar{q}_d + f_{wd})}{z}$$

$$\sigma_{sr} = f_s : F_{sup} = A_s f_s \stackrel{!}{=} A_s f_t - \frac{x^2}{2} \frac{(\bar{q}_d + f_{wd})}{z}$$

$$\rightarrow x_{P2} = \sqrt{\frac{2A_s(f_t - f_s)z}{\bar{q}_d + f_{wd}}}$$

$$\sigma_{smin} = f_s, \sigma_{sr} = f_s + \frac{2\tau_{bl} s_{rm}}{\emptyset}$$

$$\rightarrow x_{P1} = \sqrt{\frac{2A_s \left(f_t - f_s - \frac{2\tau_{bl} s_{rm}}{\emptyset} \right) z}{\bar{q}_d + f_{wd}}}$$

Neben der Grösse der Dehnung des Zuggurts beim Reißen der Bewehrung ist auch die Länge des plastischen Gelenks zu bestimmen, und ebenso die Dehnungsverteilung in diesem Bereich.

Diese Werte können mit einem Spannungsfeld untersucht werden, wobei vereinfachend ein punktzentrierter Fächer angenommen wird. Im untersuchten Bruchzustand (Reissen der Zuggurtbewehrung) beträgt die Spannung in der Gurtbewehrung über dem Auflager $\sigma_{sr} = f_t$ (Zugfestigkeit der Bewehrung). Ausgehend von diesem Punkt kann der parabolische Verlauf der Zuggurtkraft bestimmt werden.

Durch Gleichsetzen der Spannung im Zuggurt mit den Regimegrenzen aus dem Zuggurtmodell (vollplastifiziert-teilplastifiziert bei $\sigma_{smin} = f_s$, teilplastifiziert-elastisch bei $\sigma_{sr} = f_s$) kann der Bereich, in welchem im Zuggurt plastische Dehnungen auftreten («plastische Gelenklänge»), bestimmt werden; der erste Bereich (Auflager bis P1) ist voll plastifiziert, der zweite (P1 bis P2) teilweise plastifiziert.

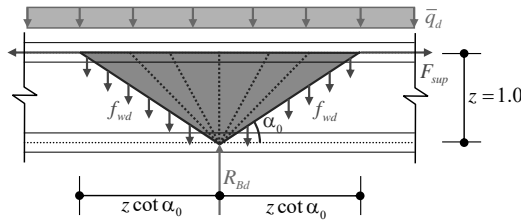
Ergänzende Bemerkung:

- Hier wird vorausgesetzt, dass die Bewehrung nicht abgestuft ist, eine Abstufung könnte aber ebenfalls berücksichtigt werden (der plastifizierte Bereich würde grösser).

Träger – Verformungsvermögen

Rotationsvermögen «genauere Untersuchung» – Beispiel Zweifeldträger

«Plastische Länge» (über welche Länge ist der Zuggurt plastifiziert?)



$$R_{Bd} = 2z \cot \alpha_0 (\bar{q}_d + f_{wd})$$

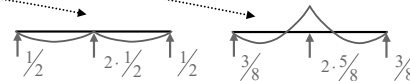
$$\rightarrow (\bar{q}_d + f_{wd}) = \frac{R_{Bd}}{2z \cot \alpha_0}$$

$\rightarrow x_{p1}, x_{p2}$ abhängig von der Wahl von α_0 !

grosses $\alpha_0 \rightarrow x_{p1}, x_{p2}$ klein

kleines $\alpha_0 \rightarrow x_{p1}, x_{p2}$ gross

$$\text{für } EI^- = EI^+ \left\{ \begin{aligned} R_{Bd} &= 2 \cdot \frac{5}{8} \cdot L \cdot \bar{q}_{dy} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot L \cdot (\bar{q}_d - \bar{q}_{dy}) \\ &= \underbrace{1156 \text{ kN}}_{\text{Erreichen } \bar{q}_{dy} = \text{Beginn Umlagerung}} + \underbrace{675 \text{ kN}}_{\text{zusätzlich für } \bar{q}_d > \bar{q}_{dy}} = 1831 \text{ kN} \end{aligned} \right.$$



$\rightarrow R_{Bd} \neq \text{konstant}$, minimales x_p für maximale Reaktion!
(hoher Gradient von M ungünstig für Rotationsvermögen, da stärkere Lokalisierung der Verformungen auftritt)

\rightarrow Für die Ermittlung des Verformungsvermögens sind diverse Annahmen erforderlich

\rightarrow Abschätzung, nicht exakte Berechnung!

Ergänzende Bemerkungen:

- Grundsätzlich ist (bei starker Bügelbewehrung) der Fall denkbar, wo sich der plastifizierte Bereich bis ins angrenzende Parallelfeld ausdehnt, dessen Neigung (und damit die Länge des Fächerbereichs) daraus folgt, dass die Bügel auf einer Länge $z \cdot \cot \alpha$ (beidseits des Auflagers) die Auflagerreaktion aufnehmen können. In diesem Fall wären die Gurtkraftverläufe anzupassen (über dem Parallelfeld ist der Verlauf linear).
- Der Verlauf der Gurtkraft hängt von der Grösse der Auflagerkraft ab (wenn die Bügel nicht voll ausgenützt sind), entsprechend dem Gradienten der Momentenlinie. Da die Auflagerkraft im Laufe der Schnittkraftumlagerung zunimmt, ist die Länge des plastifizierten Bereichs nicht konstant. Solche Effekte beeinflussen auch den Rotationsbedarf, weshalb streng genommen beide Effekte (Rotationsvermögen und Rotationsbedarf) gekoppelt untersucht werden müssten.
- Streng genommen müsste bei der Bestimmung der Bereiche, in welchen plastische Dehnungen auftreten, die diskreten Rissabstände berücksichtigt werden. Darauf wird der Einfachheit halber verzichtet.

Träger – Verformungsvermögen

Rotationsvermögen «genauere Untersuchung» – Beispiel Zweifeldträger

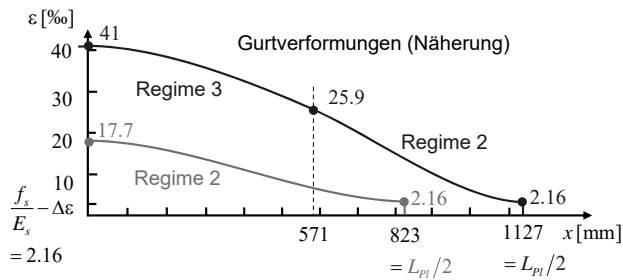
«Plastische Länge» (über welche Länge ist der Zuggurt plastifiziert?) → Verlauf der Obergurtkraft F_{sup} aus Spannungsfeld

→ Annahme: $R_{Bd} \approx 1500 \text{ kN}$, $\cot \alpha_0 = 1.5$ ($\alpha_0 = 33.5^\circ$), $(\bar{q}_d + f_{wd}) = \frac{1500}{2 \cot \alpha_0} = \frac{1500}{3} = 500 \text{ kNm}^{-1}$

$$B500B: x_{p2} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4240(540 - 500) \cdot 1000}{500}} = 823 \text{ mm ("} L_{pl}/2 \text{"})$$

$$B500C: x_{p2} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4240(575 - 500) \cdot 1000}{500}} = 1127 \text{ mm ("} L_{pl}/2 \text{"})$$

$$x_{p1} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4240(575 - 556) \cdot 1000}{500}} = 571 \text{ mm}$$



$$B500B: \bar{\epsilon}_{smu} = \frac{2}{L_{pl}} \cdot \int_0^{x_{p2}} \epsilon_{sm}(x) \cdot dx = 10.5\text{‰ (im Mittel über } L_{pl} = 1.65 \text{ m)}$$

$$B500C: \bar{\epsilon}_{smu} \approx \frac{2}{L_{pl}} \cdot \left(\int_0^{x_{p1}} \epsilon_{sm}(x) \cdot dx + \int_{x_{p1}}^{x_{p2}} \epsilon_{sm}(x) \cdot dx \right) = 24.1\text{‰ (im Mittel über } L_{pl} = 2.25 \text{ m)}$$

Die plastische Verlängerung des Zuggurts resultiert aus der Integration der plastischen Dehnungen über den Bereich, in welchem solche Dehnungen auftreten («plastische Gelenklänge»).

Die plastischen Dehnungen sind nicht gleichmässig verteilt, sondern variieren relativ stark.

Mit den getroffenen Annahmen resultiert eine plastische Gelenklänge (doppelte Distanz vom Auflager bis P1, da symmetrisch) von 1.65 m für B500B und 2.25 m für B500C, mit über diese Längen gemittelten plastischen Dehnungen von 1.05% (B500B) resp. 2.4% (B500C).

Träger – Verformungsvermögen

Rotationsbedarf ↔ Rotationsvermögen «genauere Untersuchung» - Beispiel Zweifeldträger

Plastische Rotation im Bruchzustand

Betonbruch

$$\Theta_{puc} = L_{pl} \cdot \left(\frac{\varepsilon_{cu}}{x} - \frac{\varepsilon_{smy}}{d-x} \right) \approx 2 \cdot 1.10 \cdot \left(\frac{0.003}{0.181} - 0.0023 \right) = 14.3 \frac{\text{mrad}}{\text{m}} \cdot 2.2 \text{ m} = 31.4 \text{ mrad}$$

→ $\Theta_{puc} > \Theta_{B,req}$ → OK

Stahlreißen

Grobe Annahme: $\varepsilon_{smu} \approx 0.5\varepsilon_{ud} = \begin{cases} 22.5\% \text{ mit } L_{pl} = 2.2 \text{ m (B500B)} \\ 32.5\% \text{ mit } L_{pl} = 2.2 \text{ m (B500C)} \end{cases}$

Genauere Untersuchung: $\bar{\varepsilon}_{smu} = \begin{cases} 10.5\% \text{ mit } L_{pl} = 1.65 \text{ m (B500B)} \\ 24.1\% \text{ mit } L_{pl} = 2.25 \text{ m (B500C)} \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{\varepsilon}_{smu} \approx 0.23 \cdot \varepsilon_{ud}, L_{pl} \approx 1.5 \cdot d \\ \bar{\varepsilon}_{smu} \approx 0.37 \cdot \varepsilon_{ud}, L_{pl} \approx 2.0 \cdot d \end{cases}$

$$\Theta_{pus} = L_{pl} \cdot \left(\frac{\bar{\varepsilon}_{smu}}{d-x} - \frac{\varepsilon_{smy}}{d-x} \right) = \begin{cases} 1.65 \cdot \left(\frac{0.0125}{0.919} - 0.0023 \right) = 15.1 \text{ mrad (B500B)} < \Theta_{B,req} = 18.5 \text{ mrad } (\alpha_r = 1) \\ \hspace{10em} \rightarrow \text{nicht erfüllt!} \\ 2.25 \cdot \left(\frac{0.0241}{0.919} - 0.0023 \right) = 53.8 \text{ mrad (B500C)} \gg \Theta_{B,req} = 18.5 \text{ mrad } (\alpha_r = 1) \\ \hspace{10em} \rightarrow \text{ok (problemlos)} \end{cases}$$

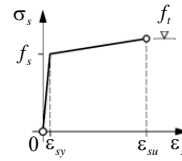
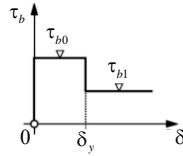
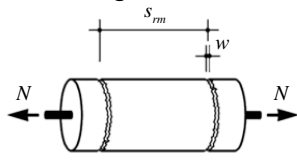
Der Vergleich mit der groben Abschätzung zeigt, dass beim Betonstahl der Duktilitätsklasse C die plastische Gelenklänge mit den dortigen Annahmen übereinstimmt, jedoch werden die mittleren Dehnungen des Zuggurts bei Reißen der Bewehrung überschätzt. Beim Betonstahl der Duktilitätsklasse B sind aufgrund der genaueren Untersuchung beide Werte deutlich kleiner. Das Rotationsvermögen, welches mit der groben Abschätzung als unkritisch beurteilt worden wäre, kann damit nicht nachgewiesen werden.

Die für die grobe Abschätzung getroffenen Annahmen ($\varepsilon_{smu} \approx 0.5 \cdot \varepsilon_{ud}$ und $l_{pl} \approx 2 \cdot d$) sind somit für B500B wie auch B500C nicht konservativ. Es müssten kleinere Werte (beispielsweise $l_{pl} \approx 1.5 \cdot d$ und $\varepsilon_{smu} \approx 0.23 \cdot \varepsilon_{ud}$ für Betonstahl B500B) angesetzt werden, um mit der groben Abschätzung zutreffende Ergebnisse zu erhalten.

Anhand der vorangehenden Ausführungen kommt die Komplexität des Problems zum Ausdruck. Die gezeigten Beispiele verdeutlichen zudem, dass berechnete Verformungen mit erheblich grösseren Unsicherheiten behaftet sind, als beispielsweise die Tragwiderstände. Daran ändert sich auch nichts, wenn aufwendige Berechnungsverfahren angewendet werden. Gerade deshalb kommt der Wahl geeigneter Materialien und der sorgfältigen konstruktiven Durchbildung besondere Bedeutung zu.

Träger – Verformungsvermögen

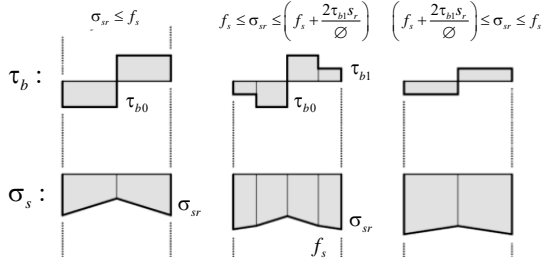
Verhältnis mittlere Dehnungen zu maximaler Dehnung in den Rissen mit Berücksichtigung des Verbunds – Ergänzende Betrachtungen



1 Bewehrung auf ganzer Länge elastisch

2 Bewehrung in Rissnähe plastifiziert

3 Bewehrung auf ganzer Länge plastifiziert



Mittlere Dehnungen in den drei Regimes für bilineare Kennlinie der Bewehrung:

$$1 \quad \varepsilon_{sm} = \frac{\sigma_{sr}}{E_s} - \frac{\tau_{b0}s_r}{E_s\phi}$$

$$2 \quad \varepsilon_{sm} = \frac{(\sigma_{sr} - f_s)^2}{4E_{sh}\tau_{b1}s_r} \cdot \left(1 - \frac{E_{sh}\tau_{b0}}{E_s\tau_{b1}}\right) + \frac{(\sigma_{sr} - f_s)}{E_s} \cdot \frac{\tau_{b0}}{\tau_{b1}} + \left(\varepsilon_{sy} - \frac{\tau_{b0}s_r}{E_s\phi}\right)$$

$$3 \quad \varepsilon_{sm} = \frac{(\sigma_{sr} - f_s)}{E_{sh}} + \left(\varepsilon_{sy} - \frac{\tau_{b1}s_r}{E_{sh}\phi}\right)$$

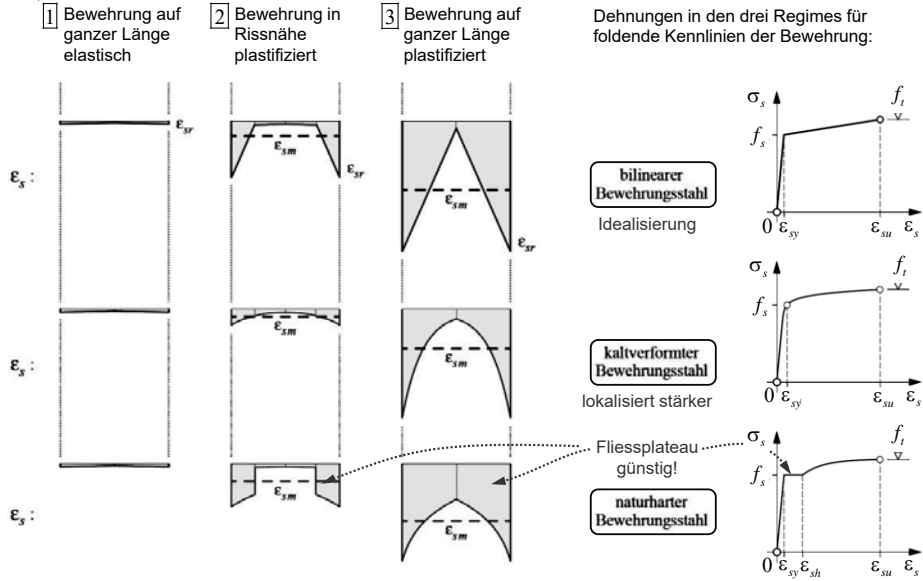
[Alvarez 1999]

Bisher wurde eine stark vereinfachte, bilineare Kennlinie des nackten Bewehrungsstahls angenommen. Analoge Untersuchungen können für allgemeine Stoffgesetze durchgeführt werden.

Auf dieser und den folgenden Folien sind zur Illustration rechnerische Untersuchungen aus der Dissertation von M. Alvarez (1998) dargestellt. Neben dem oben dargestellten bilinearen Stoffgesetz untersuchte er auch realitätsnähere Stoffgesetze für Betonstahl mit Fließplateau (naturhart / warmgewalzt & vergütet / mikrolegiert / tempcorisiert) und ohne Fließplateau (warmgewalzt & gereckt / kaltverformt).

Träger – Verformungsvermögen

Einfluss der Verfestigungscharakteristik

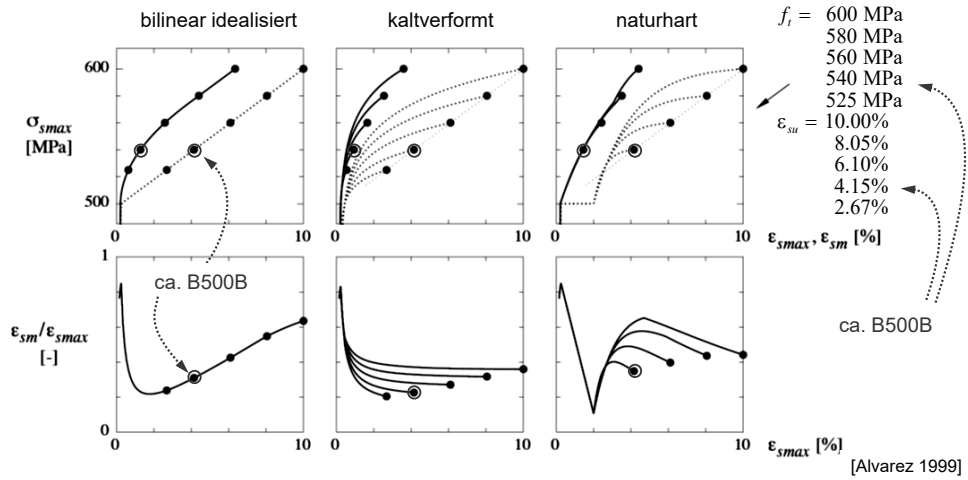


Man erkennt, dass sich das Fließplateau positiv auf die Duktilität auswirkt, da die Bereiche des Risselements, welche eine Spannung nur wenig oberhalb der Fließgrenze aufweisen, bereits eine markant grössere Dehnung zeigen (Länge des Fließplateaus).

Träger – Verformungsvermögen

Einfluss der Verfestigungscharakteristik

- Naturharte Bewehrung vor allem bei Bruch in Regime 2 günstiger als kaltverformte (Fließplateau als «zusätzliche» Dehnung über ganzen plastifizierten Bereich)
- Bilineare Idealisierung überschätzt Verformungsvermögen bei hochduktiler Bewehrung



28.08.2017

ETH Zürich | Prof. Dr. W. Kaufmann | Vorlesung Stahlbeton III

37

Die Form der Stahlkennlinie beeinflusst insbesondere das Verhalten unmittelbar nach dem Überschreiten der Fließgrenze (Regime 2) stark.

Zugversuche Dr. M. Alvarez – Versuchsanlage

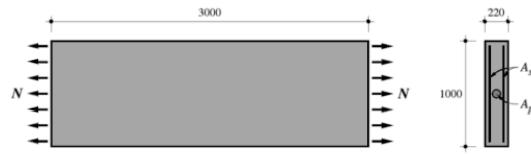
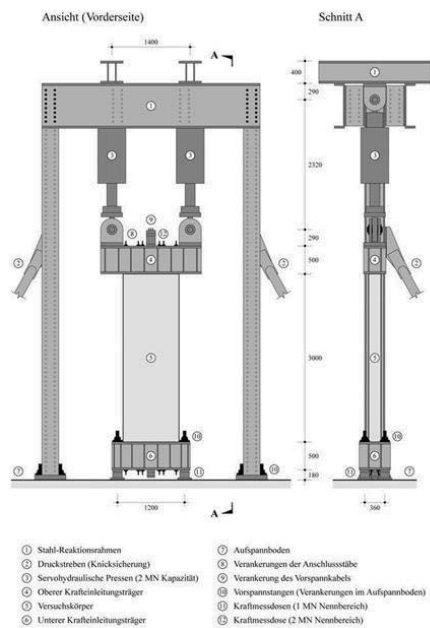


Bild 1.1 – Konzept der Zugversuche, [mm].

Versuchskörper	Z1	Z2	Z3	Z4	Z5	Z6	Z7	Z8	Z9
Längsbewehrung A_s [mm ²]			2156			1232	616	1540	4312
Vorspannbewehrung A_p [mm ²]			0				1050		0
Betonstahlqualität	H			N	L			H	
Bügelbewehrung [mm]	Ø 8 @ 200		0			Ø 8 @ 200			
Würfeldruckfestigkeit des Betons f_{cw} [MPa]	50	90				50			

H: $\epsilon_{su} = 14.6\%$ $f_t/f_s = 1.26$

N: $\epsilon_{su} = 3.8\%$ $f_t/f_s = 1.05$

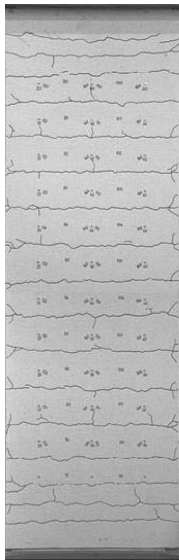
L: $\epsilon_{su} = 3.1\%$ $f_t/f_s = 1.06$

Wiederholung aus Stahlbeton I:

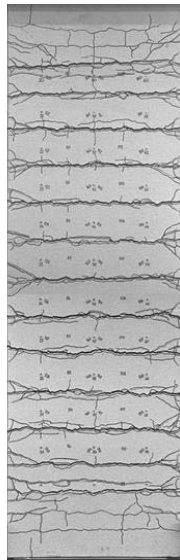
Die Abbildung zeigt den Versuchsaufbau und die Parameter der Versuche von Alvarez und Marti (1996), mit welchen die Duktilität von Stahlbeton unter Zugbeanspruchung untersucht wurde.

Hintergrund der Versuche waren mutmasslich ungenügende Duktilitätseigenschaften einiger der damaligen Betonstahl-Klassen (die Vermutung bestätigte sich in den Versuchen). Heute sind die Verhältnisse bei hochfesten Betonen mit entsprechend steifem Verbund ähnlich; die Duktilität des an sich als «duktil» geltenden Betonstahls B500B ist in solchen Fällen für plastische Umlagerungen nur knapp – wenn überhaupt – ausreichend.

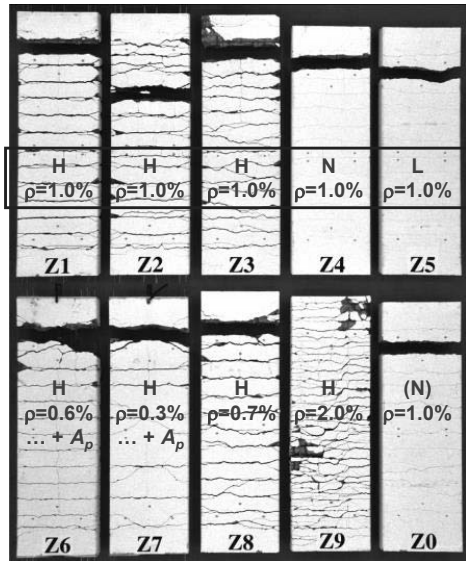
Zugversuche – Dr. M. Alvarez – Rissbilder / Bruchverlängerung



Versuch Z1 – LS 4



Versuch Z1 – LS 10



Alle Versuchskörper nach dem Bruch: Plastische (=bleibende) Verformungen stark unterschiedlich

Wiederholung aus Stahlbeton I:

Die Abbildung zeigt die Versuchskörper nach dem Bruch, mit den bleibenden (plastischen) Verformungen.

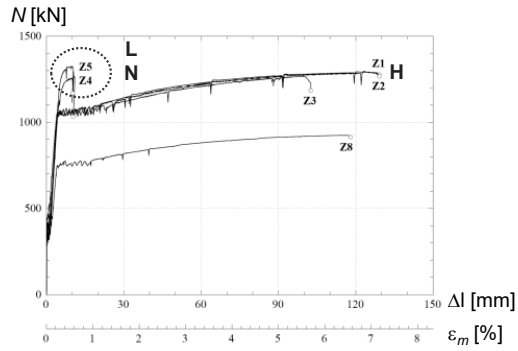
Die Versuchskörper Z1-Z5 wiesen den gleichen geometrischen Bewehrungsgehalt auf (1%), Versuch Z8 einen etwas geringeren (0.7%). In den Versuchskörpern Z1-Z3 und Z8 kam duktile Bewehrung zum Einsatz (damals «H» = hohe Duktilität), in Versuchskörper Z4 solche mit geringer Duktilität (damals «N» = normal duktil). In Versuchskörper Z5 wurde Bewehrung mit sehr niedriger Duktilität (damals «L» = low) eingesetzt.

Man erkennt in obigen Fotos die dramatischen Unterschiede in der plastischen Verformung der Versuchskörper. Auf den folgenden Seiten sind die entsprechenden Versuchsergebnisse angegeben, welche diese Erkenntnis bestätigen.

Zugversuche Dr. M. Alvarez – Versuchsergebnisse

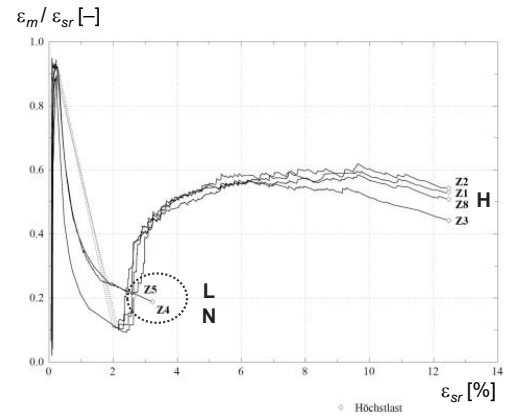
Last-Verformungsverhalten mit Berücksichtigung des Verbunds bei hoher Beanspruchung

→ Verformungsvermögen durch Bewehrung mit zu geringer Duktilität (Bruchdehnung und Verfestigung!) stark beeinträchtigt



Verhältnis mittlere Dehnungen zu maximaler Dehnung in den Rissen mit Berücksichtigung des Verbunds

→ gute Übereinstimmung mit Zuggurtmodell (bei Berücksichtigung der wirklichen Stahlkennlinie praktisch identisch)



Wiederholung aus Stahlbeton I

Ergänzungen – Verformungsvermögen

Zusammenfassung

- *Verformungsvermögen* und *Verformungsbedarf* sind gekoppelt. Nur für moderate Umlagerungen der Schnittkräfte kann die Wechselwirkung vernachlässigt werden.
- Der *Verformungsbedarf* kann mit vereinfachenden Annahmen (konstante Biegesteifigkeiten der elastischen Bereiche, starr-ideal plastische $M-\theta$ -Beziehungen der plastischen Gelenke) mit vernünftigem Aufwand näherungsweise ermittelt werden.
- Das *Verformungsvermögen* kann auch mit vereinfachenden Annahmen und aufwändigen Berechnungen nur grob abgeschätzt werden, da es von diversen, nicht genau quantifizierbaren Einflüssen abhängt:
 - Verbundverhalten, insbesondere Rissabstand
 - Verfestigungscharakteristik der Bewehrung
 - Kraftfluss im Bereich plastischer Gelenke, insbesondere Variation der Kraft im Zuggurt
(→ über die Länge des plastischen Gelenks gemittelte Dehnungen sind nochmals kleiner als die mittleren Dehnungen eines Zuggurts unter konstanter Zugbeanspruchung!)
- In der Praxis empfiehlt es sich daher, solche Nachweise bei Neubauten möglichst zu vermeiden (Bedingung $x/d < 0.35$ einhalten). Andernfalls ist es oft einfacher, auf Schnittkraftumlagerungen zu verzichten, d.h. die Tragsicherheit für die elastischen Beanspruchungen inkl. Zwängungen nachzuweisen (wobei die Abschätzung der Zwängungen ebenfalls aufwändig und von Annahmen abhängig ist).
- Wird ein Nachweis des Verformungsvermögens geführt (z. Bsp. bei bestehenden Bauwerken) ist mit Augenmass («engineering judgement») vorzugehen. Die entscheidenden Parameter sollten dabei möglichst genau erfasst werden (Bewehrung: Verfestigungscharakteristik bestimmen, nicht nur f_s).