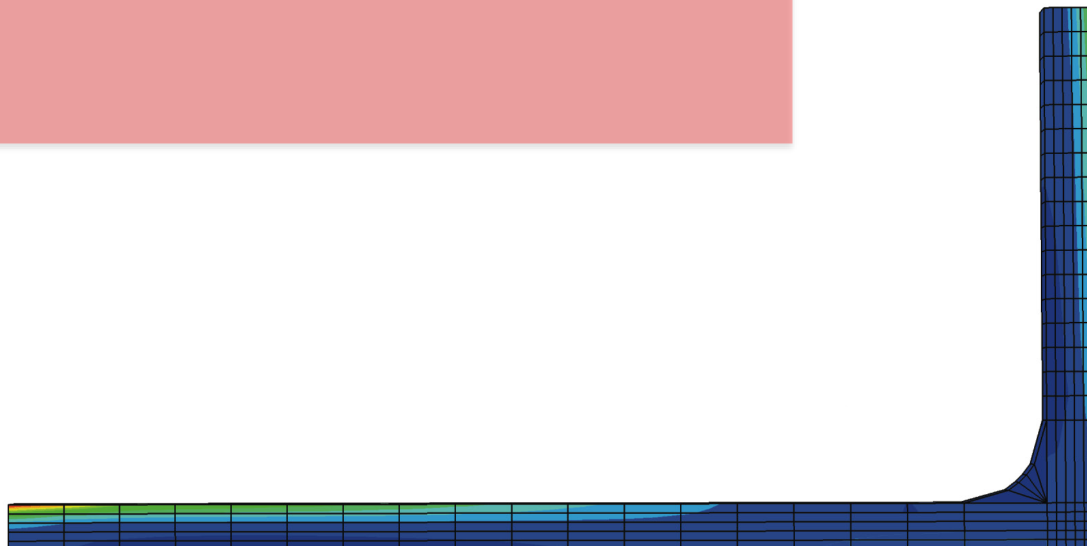
Baustatik II - Kapitel VIc

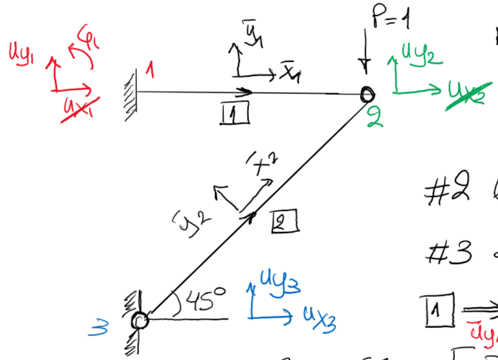
Anwendungsbeispiele
Kombinierte Systeme



DSM Beispiel – Hybridsystem

Gegeben

$P=1$
$EI_1=9$
$L_1=3$
$EA=3\sqrt{2}$
$L_2=3\sqrt{2}$



#1 globales System definieren (y, x)

Knoten / Elemente & Freiheitsgrade nummerieren

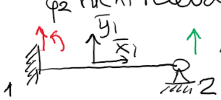
– $M_2 = M_3 = 0 \Rightarrow \varphi_2, \varphi_3$ werden ignoriert

– Elem $\boxed{1}$: dehnstarr $\Rightarrow u_{x2} = u_{x1} = 0$ (ignoriert)

#2 lokales Koordinatensystem definieren

#3 Steifigkeitsmatrix definieren im lokalen System

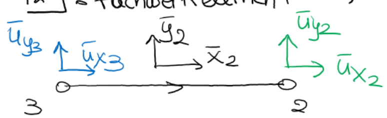
$\boxed{1} \Rightarrow$ EEB (aus Hilfsblatt) $\Rightarrow$ axiale Steifig. & u_{x1}, u_{x2}; φ_2 nicht relevant



$$[K_1] = \frac{EI_1}{L_1^3} \begin{array}{ccc} \bar{u}_{y1} & \bar{\varphi}_1 & \bar{u}_{y2} \\ \end{array} \begin{bmatrix} 3 & 3L_1 & -3 \\ 3L_1 & 3L_1^2 & -3L_1 \\ -3 & -3L_1 & 3 \end{bmatrix}$$

$\boxed{2}$: Fachwerkelement $\Rightarrow$

$$[K_2] = \frac{EA}{L_2} \begin{array}{cccc} \bar{u}_{x3} & \bar{u}_{y3} & \bar{u}_{x2} & \bar{u}_{y2} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



#4 Rotationsmatrix R_e

$\boxed{1} \Rightarrow \theta_1 = 0 \Rightarrow R_1 = I_{3\times3} \Rightarrow$

#5 globale k_i

$$K_1 = \bar{K}_1 = \begin{array}{c|ccc|c} & u_{y1} & \varphi_1 & u_{y2} & \\ \hline & 1 & 3 & -1 & u_{y1} \\ & 3 & 9 & -3 & \varphi_1 \\ & -1 & -3 & 1 & u_{y2} \end{array}$$

$\boxed{2} \Rightarrow \theta_2 = 45° \Rightarrow$

$$R_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

$\cos 45° = \sin 45° = \sqrt{2}/2$

$$K_2 = R_2^T \bar{K}_2 R_2 = \dots = \begin{array}{c|cccc|c} & u_{x3} & u_{y3} & u_{x2} & u_{y2} & \\ \hline & 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 & u_{x3} \\ & 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 & u_{y3} \\ & \cancel{-0.5} & \cancel{-0.5} & \cancel{0.5} & \cancel{0.5} & u_{x2} = 0 \\ & -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 & u_{y2} \end{array}$$

Hilfsblatt

$$k_{glob} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) & \cos(\theta)\sin(\theta) & -\cos^2(\theta) & -\cos(\theta)\sin(\theta) \\ \cos(\theta)\sin(\theta) & \sin^2(\theta) & -\cos(\theta)\sin(\theta) & -\sin^2(\theta) \\ -\cos^2(\theta) & -\cos(\theta)\sin(\theta) & \cos^2(\theta) & \cos(\theta)\sin(\theta) \\ -\cos(\theta)\sin(\theta) & -\sin^2(\theta) & \cos(\theta)\sin(\theta) & \sin^2(\theta) \end{bmatrix}$$

DSM Beispiel 2 – Rahmensystem

fixierte freie

Anordnung: $u_{y1}\ \varphi_1\ u_{x3}\ u_{y3}\ u_{y2}$

#6 Zusammenbau #1

$$K_{sys} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} u_{y1} & \varphi_1 & u_{x3} & u_{y3} & u_{y2} \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 9 & 0 & 0 & -3 \\ \hline 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ \hline -1 & -3 & -0.5 & -0.5 & 1+0.5 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} u_{y1} \\ \varphi_1 \\ u_{x3} \\ u_{y3} \\ u_{y2} \end{array}$$

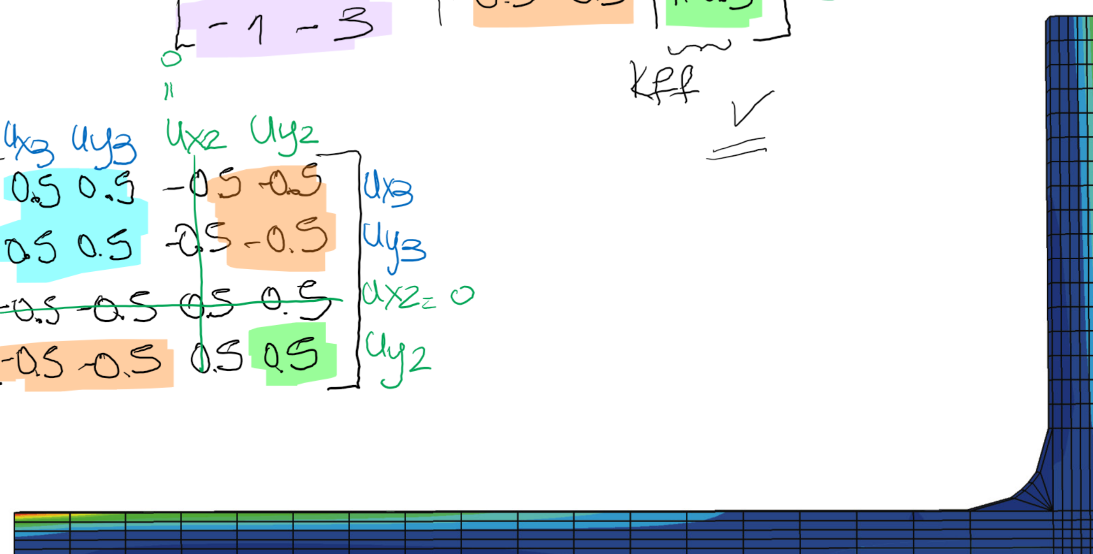
K_{ff} ✓

0 =

#5 globale K_i

$$K_1 = \bar{K}_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u_{y1} & \varphi_1 & u_{y2} \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 9 & -3 \\ -1 & -3 & 1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} u_{y1} \\ \varphi_1 \\ u_{y2} \end{array}$$

$$K_2 = R_2^T \bar{K}_2 R_2 = \ldots = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_{x3} & u_{y3} & u_{x2} & u_{y2} \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|cc} 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ \cancel{-0.5} & \cancel{-0.5} & \cancel{0.5} & \cancel{0.5} \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} u_{x3} \\ u_{y3} \\ u_{x2} = 0 \\ u_{y2} \end{array}$$



DSM Beispiel 2 – Rahmensystem

Anordnung: $\underbrace{u_{y1}\ \varphi_1\ u_{x3}\ u_{y3}}_{\text{fixierte}}\ \underbrace{u_{y2}}_{\text{freie}}$

#6 Zusammenbau #1

$$K_{sys} = \begin{array}{ccccc|c} u_{y1} & \varphi_1 & u_{x3} & u_{y3} & u_{y2} & \\ \left[\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 9 & 0 & 0 & -3 \\ \hline 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ \hline -1 & -3 & -0.5 & -0.5 & \underbrace{1+0.5}_{K_{ff}} \end{array}\right] & & & & & \begin{array}{c} u_{y1} \\ \varphi_1 \\ u_{x3} \\ u_{y3} \\ u_{y2} \end{array} \end{array}$$

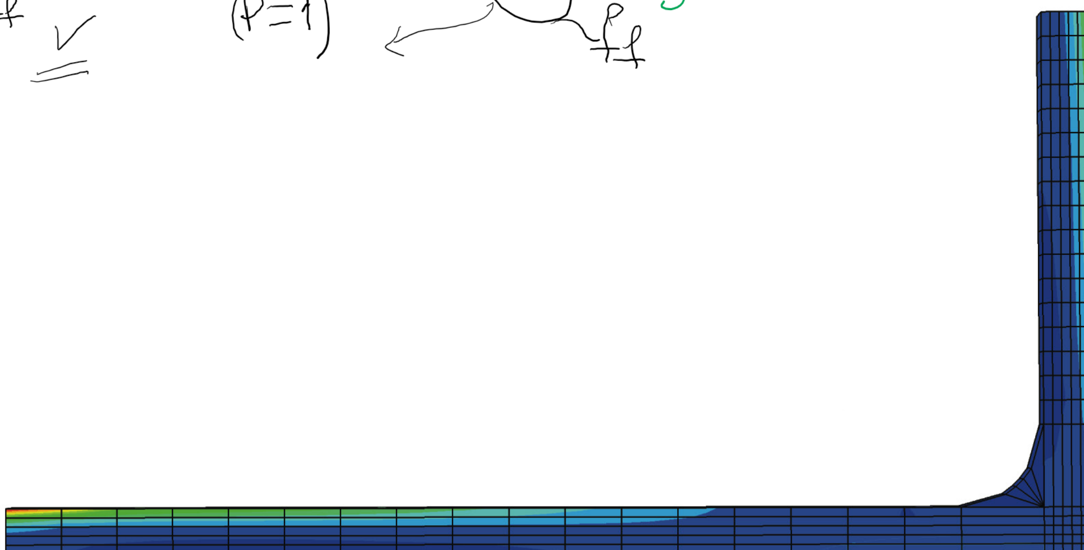
✓

#7 $K_{sys} \cdot u_{sys} = f_{sys}$

globale Kraftvektor f_{sys}

$$f_{sys} = \begin{bmatrix} R_{y1} \\ M_x \\ R_{x3} \\ R_{y3} \\ \underbrace{-1}_{f_f} \end{bmatrix} \begin{array}{l} u_{y1} \\ \varphi_1 \\ u_{x3} \\ u_{y3} \\ u_{y2} \end{array} \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} \text{fixierte} \\ \}\ \text{freie} \end{array}$$

$(P=1)$



DSM Beispiel 2 – Rahmensystem

#8 Randbedingungen anführen

K_{sys}: volle Matrix des Systems: nicht invertierbar (in der Regel)

die freien (f) von den fixierten DOFs (s) separieren:

$$\begin{bmatrix} K_{ss} & K_{sf} \\ K_{fs} & K_{ff} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \overset{0}{u_s} \\ u_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_s \\ f_f \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$K_{ss} \cdot 0 + \boxed{K_{sf} \cdot u_f = f_s} \Rightarrow$ Gl. zur Berechnung der Auflagerreaktionen f_s I

$\boxed{K_{ff} \cdot u_f = f_f}$ II $\Rightarrow$ Gleichung zur Berechnung der u_f

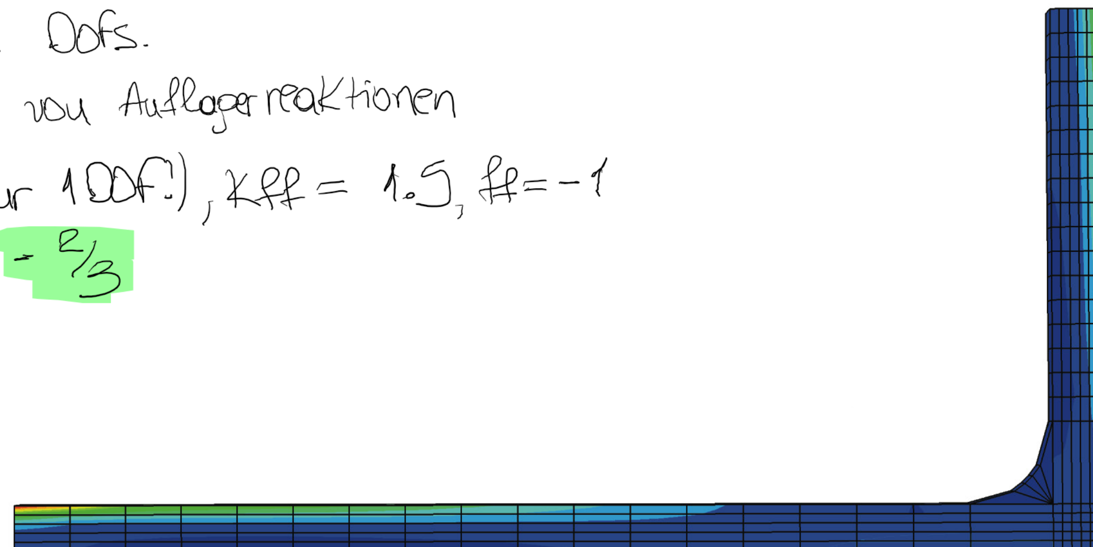
u_f: unbekannte Verformungen (Versch./Verdreh.)

Dies bedeutet, dass für eine Lösung von Hand, können wir einfach $\boxed{K_{ff}}$ berechnen: die Untermatrix der freien DOFs.

K_{sf} ist nützlich bei der Berechnung von Auflagerreaktionen

In unserem System: $u_f = u_{y2}$ (nur 1 DOF!), $K_{ff} = 1.5$, $f_f = -1$

(II) $\Rightarrow$ $u_f = K_{ff}^{-1} \cdot f_f = \frac{1}{1.5}(-1) = -2/3$



DSM Beispiel 2 – Rahmensystem

#10. Elementkräfte berechnen

a) Elementverformungen bestimmen

$\boxed{1}$ glob. $\quad u_1 = \begin{bmatrix} u_{y1} \\ \varphi_1 \\ u_{y2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2/3 \end{bmatrix} \Longrightarrow$ b) $\bar{u}_1 = R_1 \cdot u_1 = u_1 = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2/3 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \bar{u}_{y1} \\ \bar{\varphi}_1 \\ \bar{u}_{y2} \end{array}$

lokal $\quad (R_1 \equiv I_{3\times 3})$

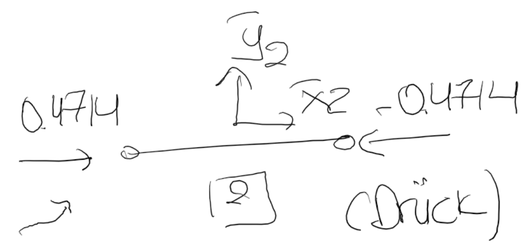
$\boxed{2} \quad u_2 = \begin{bmatrix} u_{x3} \\ u_{y3} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2/3 \end{bmatrix} \xrightarrow{G \to L} \bar{u}_2 = R_2 \, u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.4714 \\ -0.4714 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \bar{u}_{x3} \\ \bar{u}_{y3} \\ \bar{u}_{x2} \\ \bar{u}_{y2} \end{array}$

c) Berechnung der lokalen Elementkräfte

lokales Gleichgewicht: $\bar{F}_i = \bar{K}_i \cdot \bar{u}_i$

$\boxed{1} \Longrightarrow \bar{F}_1 = \bar{K}_1 \bar{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 9 & -3 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 2 \\ -2/3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow$

$\boxed{2} \Rightarrow \bar{F}_2 = \bar{K}_2 \bar{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.4714 \\ -0.4714 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4714 \\ 0 \\ -0.4714 \\ 0 \end{bmatrix}$



DSM Beispiel 2 – Rahmensystem

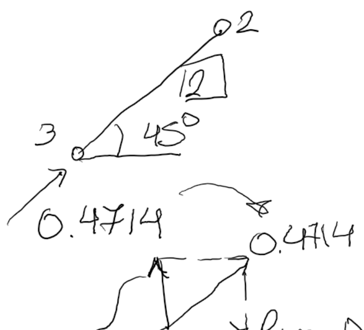
Sonderfälle

I) Berechnung der Auflagerreaktionen

a) Durch der lokalen Elementkräfte

$R_{y1} = 2/3 \ (\uparrow)$

$M_1 = 2 \ (\circlearrowleft)$



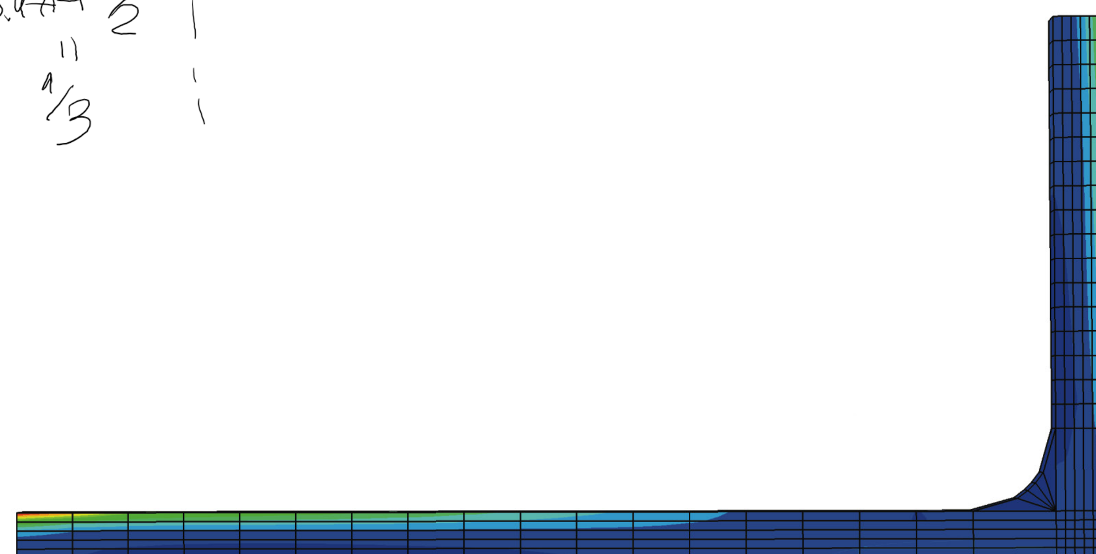
$R_{x3} = 0.4714 \frac{\sqrt{2}}{2} = 1/3$

$R_{y3} = 0.4714 \frac{\sqrt{2}}{2} = 1/3$

b) aus der Steifigkeitsuntermatrix K_{sf}

$(I) \Rightarrow K_{sf} \cdot u_f = f_s \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -0.5 \\ -0.5 \end{bmatrix} \left(-\tfrac{2}{3}\right) = \begin{bmatrix} R_{y1} \\ M_1 \\ R_{x3} \\ R_{y3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 2 \\ 1/3 \\ +1/3 \end{bmatrix}$$



Zusammenfassung

Am Ende dieses Kapitels sollten Sie in der Lage sein:

1. die **Steifigkeitsmatrizen für Fachwerk- und Balkenelemente** aufzustellen.
2. eine **Rahmenstruktur**, mittels Fachwerk- und Trägerelementen **zu idealisieren.**
3. **die globale (System-) Steifigkeitsmatrix** für die gesamte Struktur abzuleiten
4. **den globalen (System-) Kraftvektor** zu definieren.
5. **2 x 2 Systeme von Hand berechnen** zu können.
6. Den **Lösungsprozess von Tragwerksanalyse-Softwares zu verstehen**, um die erhaltenen Resultate beurteilen zu können.