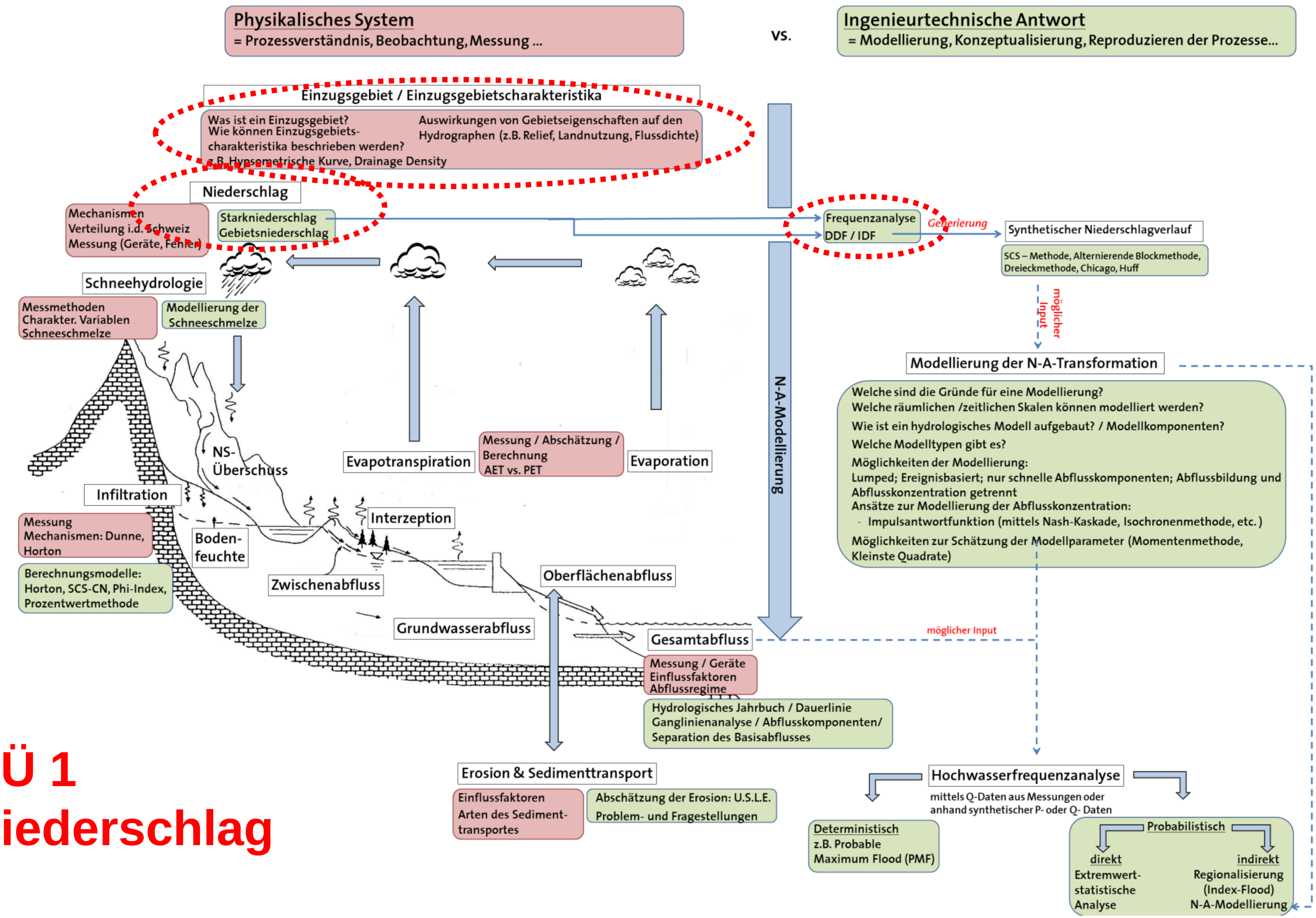
Hydrologie

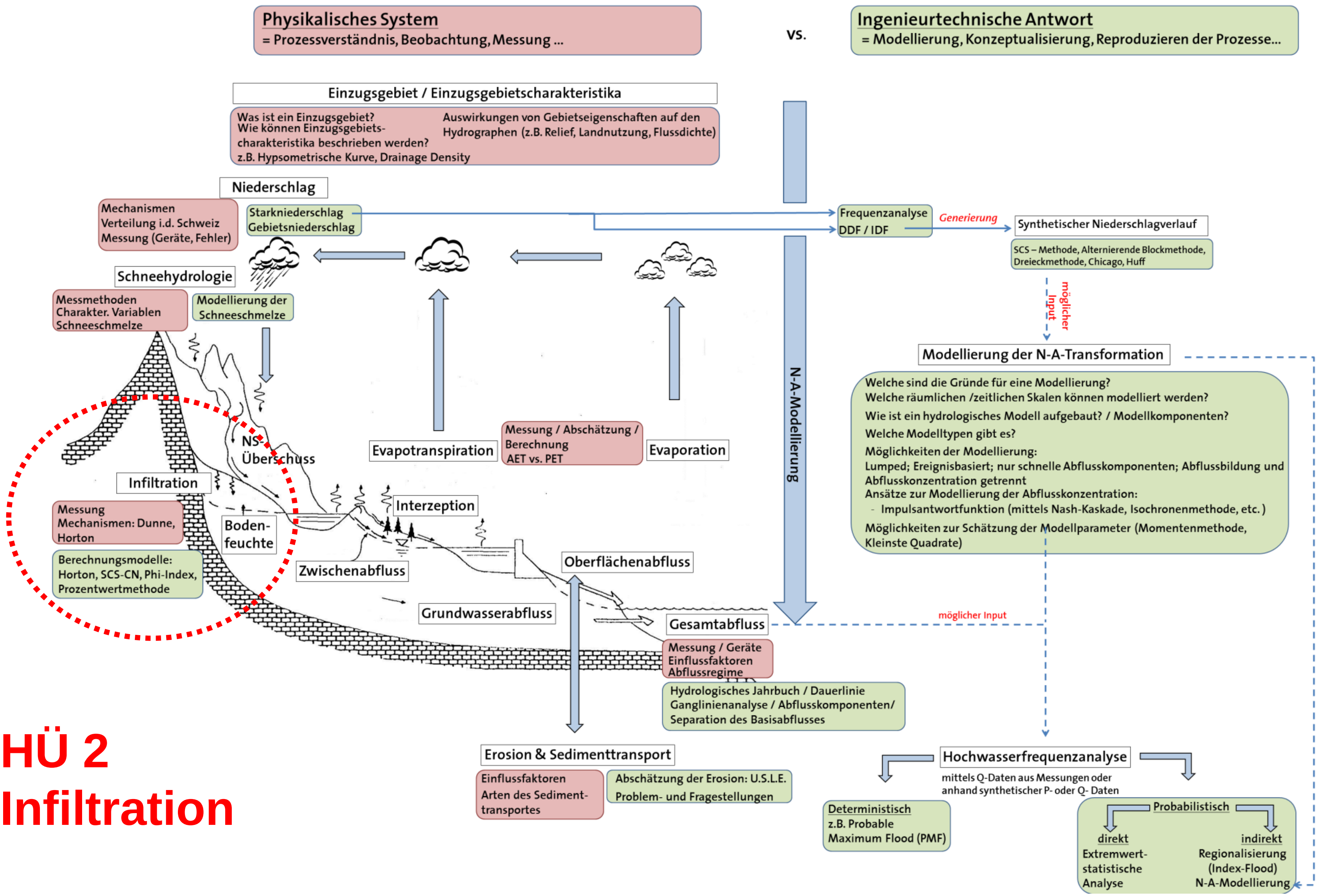
Hausübung 3: Abflusskonzentration (Einheitsganglinie)

Institut für Umweltingenieurwissenschaften (IfU)
Lehrstuhl für Hydrologie und Wasserwirtschaft

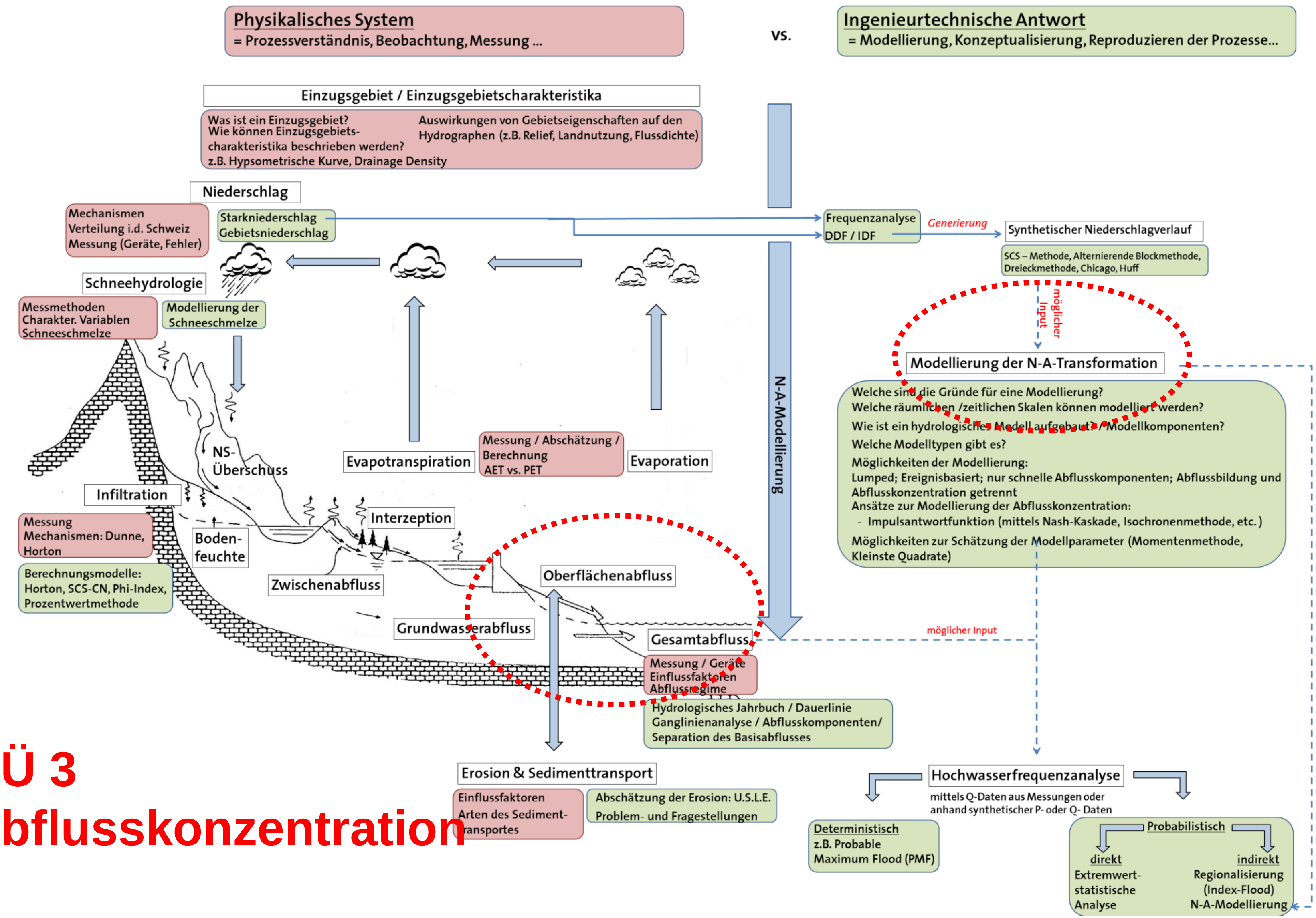
ETH zürich



HÜ 1
Niederschlag



HÜ 2 Infiltration



HÜ 3 Abflusskonzentration

Kernfrage der Hausübung

Wie transformiert sich eine gegebene Nettoniederschlagsganglinie in eine Direktabflussganglinie?

Gliederung

- **Aufgabe 1**

  Einheitsganglinie

- **Aufgabe 2**

  Lineare Speicherkaskade

Abflusskonzentration & Übertragungsfunktion

Nettoniederschlag → Abflusskonzentration → Direktabfluss

$$P_{eff} \rightarrow h \rightarrow q_D$$

Eingabefunktion → Übertragungsfunktion → Ausgabefunktion

(= Einheitsganglinie)

Ausgabefunktion: a. zeitlich verzögert (Translation)

b. verformt (Retention)

Einflussfaktoren

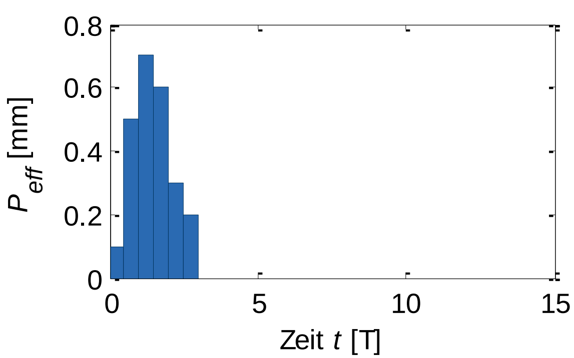
Die Reaktion eines Einzugsgebiets wird durch dessen Eigenschaften beeinflusst

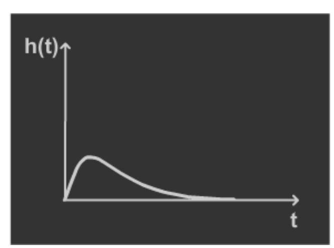
- Einzugsgebietsform
- Einzugsgebietsgrösse
- Dichte und Zustand des Entwässerungsnetzes
- Steilheit
- usw.

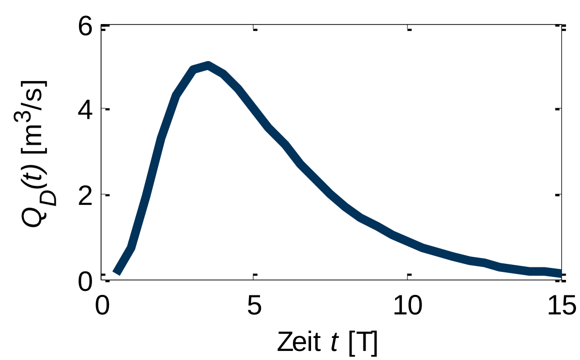
Aufgabe 1: Abflusskonzentration (EGL)

Wie wird der zeitliche Verlauf des Nettoniederschlags in die Direktabflussganglinie transformiert?

Nettoniederschlag → Mathematisches Modell? ⇨Einheitsganglinie → Direktabfluss



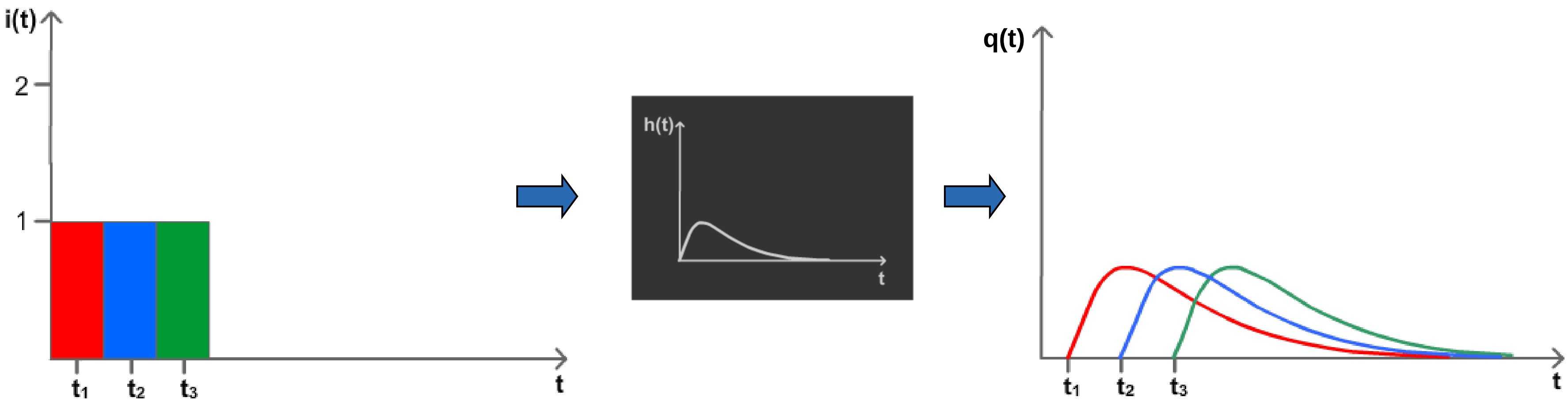




Aufgabe 1: Einheitsganglinie (Grundprinzipien)

Zeitinvarianz - Proportionalität - Superposition

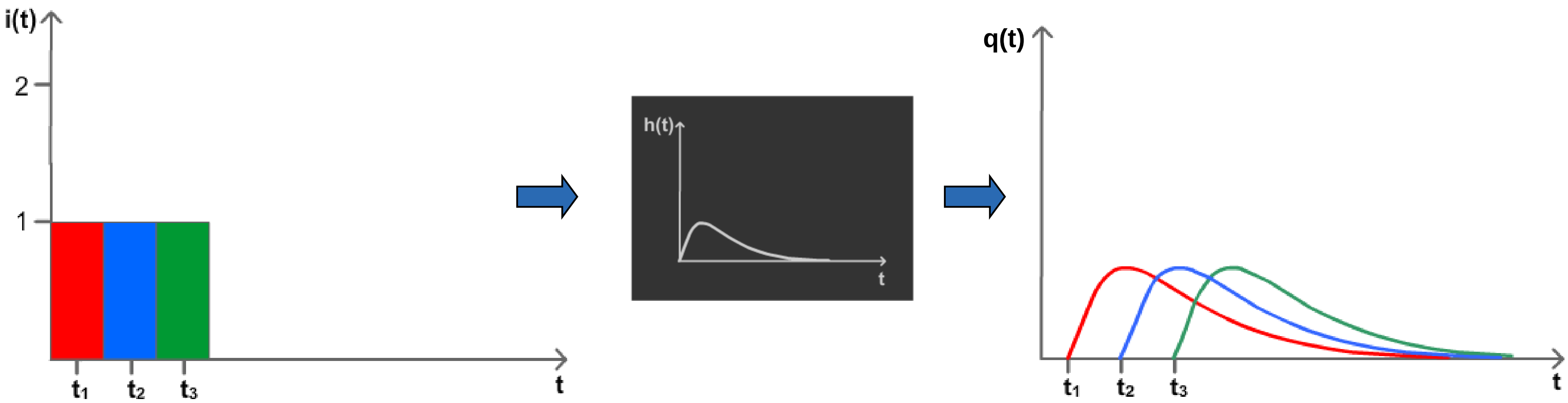
- Die Übertragungsfunktion h(t) ist zeitlich unverändert



Aufgabe 1: Einheitsganglinie (Grundprinzipien)

Zeitinvarianz - Proportionalität - Superposition

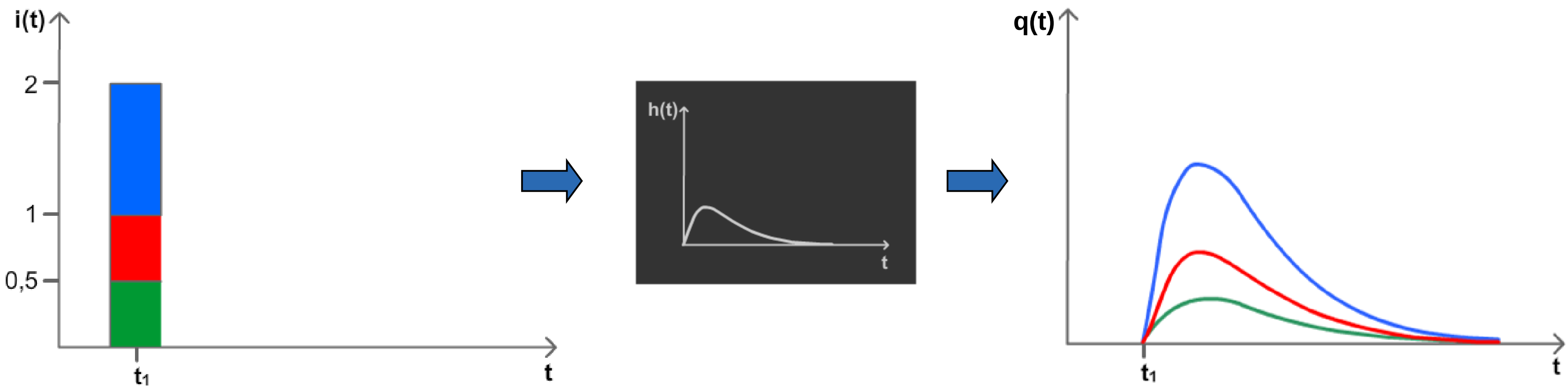
Wenn ein System auf eine Ursache i(t) mit der Wirkung q(t) reagiert, dann reagiert es auch noch zu einem späteren Zeitpunkt auf dieselbe Ursache mit der gleichen Wirkung.



Aufgabe 1: Einheitsganglinie (Grundprinzipien)

Zeitinvarianz - **Proportionalität** - Superposition

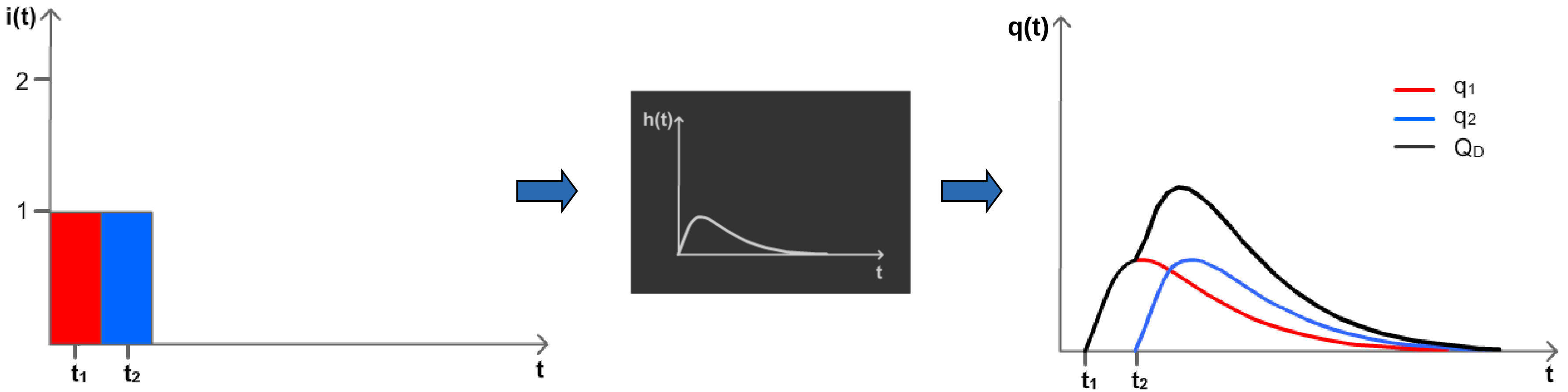
- Verstärkung
  - Die Höhe des resultierenden Direktabflusses hängt linear von der Höhe des Effektivniederschlagimpulses ab.
  - Die Form und Dauer des Direktabflusses sind davon unabhängig.



Aufgabe 1: Einheitsganglinie (Grundprinzipien)

Zeitinvarianz - Proportionalität - **Superposition**

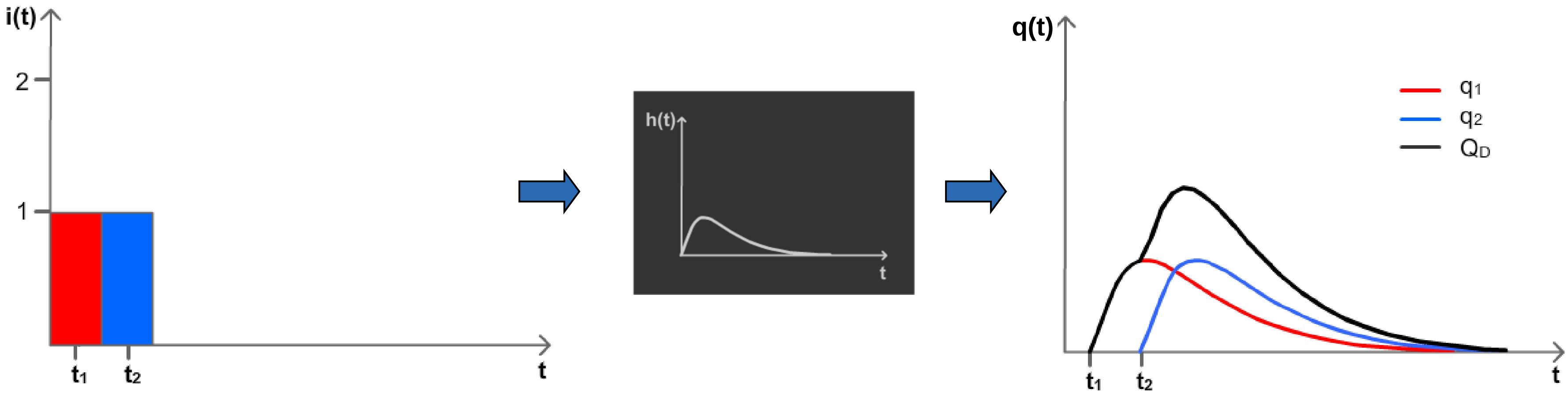
- Überlagerung
  - Der Direktabfluss zum Zeitpunkt t ergibt sich aus der Summe der einzelnen Impulsantworten zu diesem Zeitschritt.



Aufgabe 1: Einheitsganglinie (Grundprinzipien)

Zeitinvarianz - Proportionalität - **Superposition**

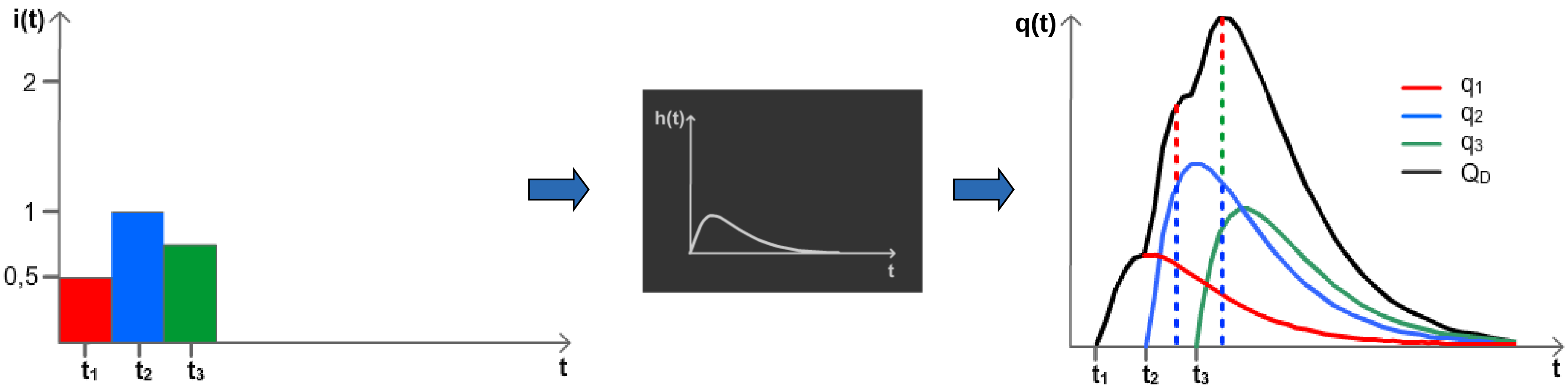
Die Summe der Ursachen (Eingangssignale) bewirkt die Summe der Wirkungen.



Aufgabe 1: Einheitsganglinie (Grundprinzipien)

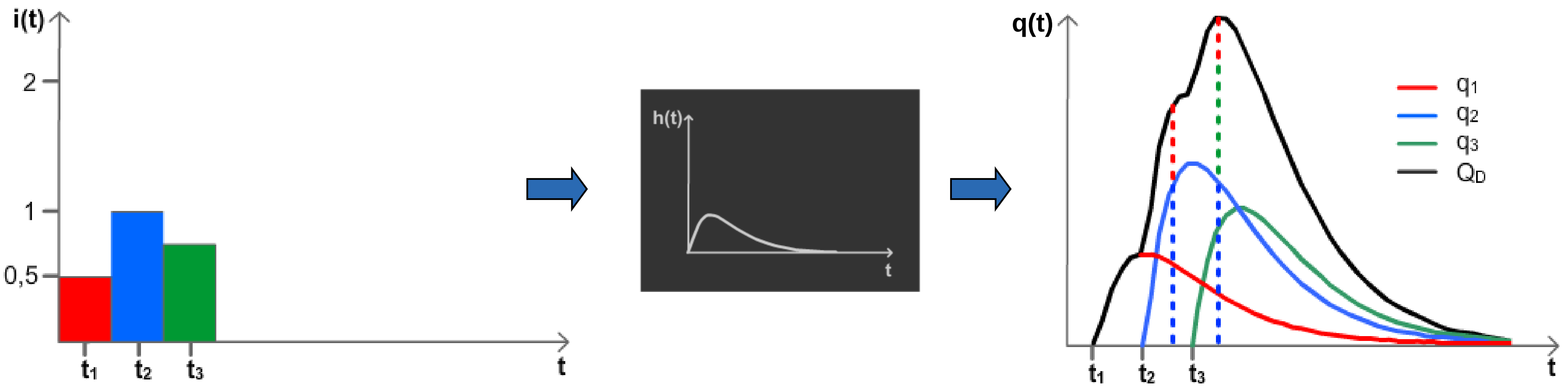
Zeitinvarianz - **Proportionalität - Superposition**

Linearität



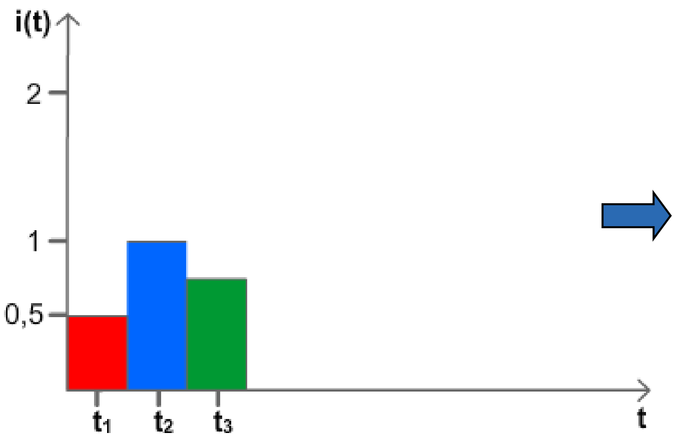
Einheitsganglinie (Anwendung)

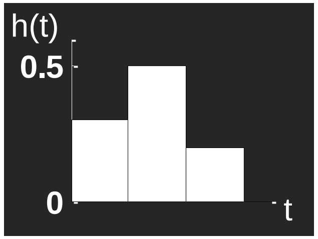
Faltungsintegral: $$q(t) = \int_{0}^{t} p(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau$$

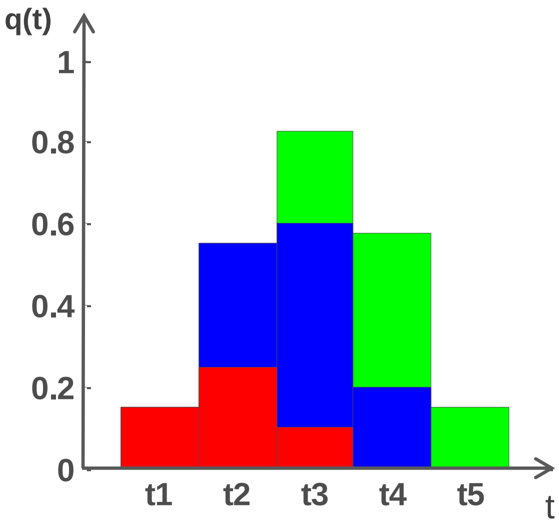


Einheitsganglinie (Anwendung)

Faltung diskret: $$q(t_m) = \sum_{i=1}^{n} p_{m-i+1} \cdot h_i \cdot \Delta t$$

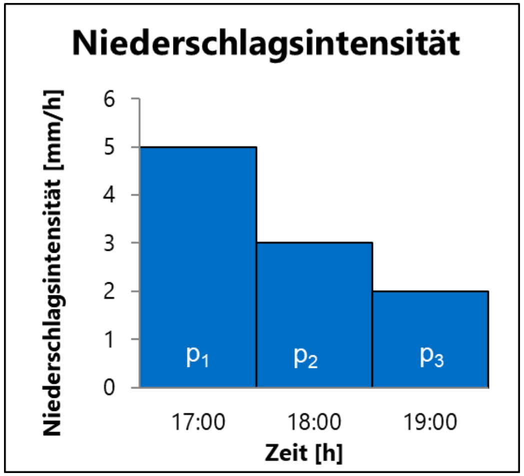


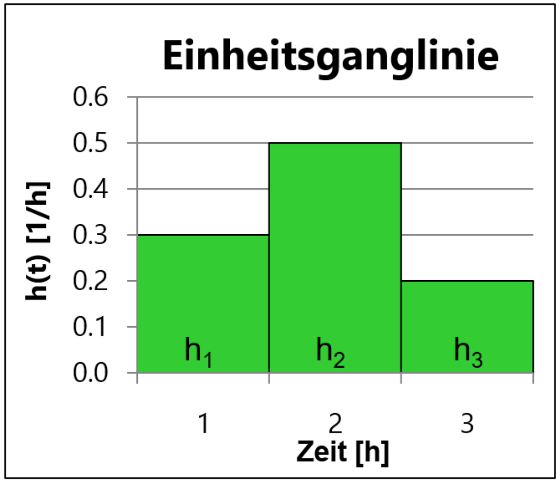


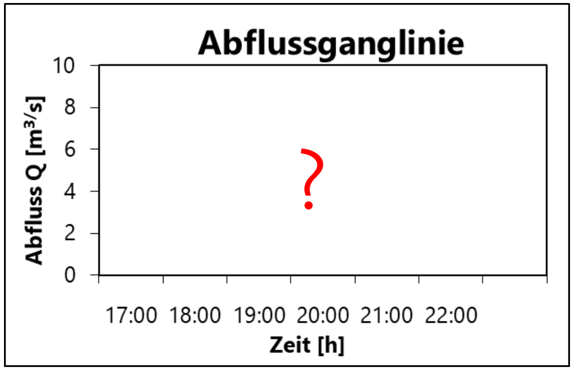


Einheitsganglinie (Anwendung)

Faltung diskret: $$q(t_m) = \sum_{i=1}^{n} p_{m-i+1} \cdot h_i \cdot \Delta t$$







Einheitsganglinie (Anwendung)

Rechenweg: $$q(t_m) = \Delta t \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} p_{m-i+1} \cdot h_i \right)$$

Anzahl Zeitschritte: q = Anzahl Zeitschritte (des Niederschlags + der EGL – 1)

Anzahl Zeitschritte: q = 3 + 3 – 1 = 5

$q(t_1)=$	$\Delta t \cdot$	$p_1 \cdot h_1$					$1\cdot$	$5\cdot0.3$					= 1.5mm/h
$q(t_2)=$	$\Delta t \cdot$	$(p_1 \cdot h_2$	+	$p_2 \cdot h_1)$			$1\cdot$	$(5\cdot0.5$	+	$3\cdot0.3)$			= 3.4mm/h
$q(t_3)=$	$\Delta t \cdot$	$(p_1 \cdot h_3$	+	$p_2 \cdot h_2$	+	$p_3 \cdot h_1)$	$1\cdot$	$(5\cdot0.2$	+	$3\cdot0.5$	+	$2\cdot0.3)$	= 3.1mm/h
$q(t_4)=$	$\Delta t \cdot$			$(p_2 \cdot h_3$	+	$p_3 \cdot h_2)$	$1\cdot$			$(3\cdot0.2$	+	$2\cdot0.5)$	= 1.6mm/h
$q(t_5)=$	$\Delta t \cdot$					$p_3 \cdot h_3)$	$1\cdot$					$2\cdot0.2)$	= 0.4mm/h

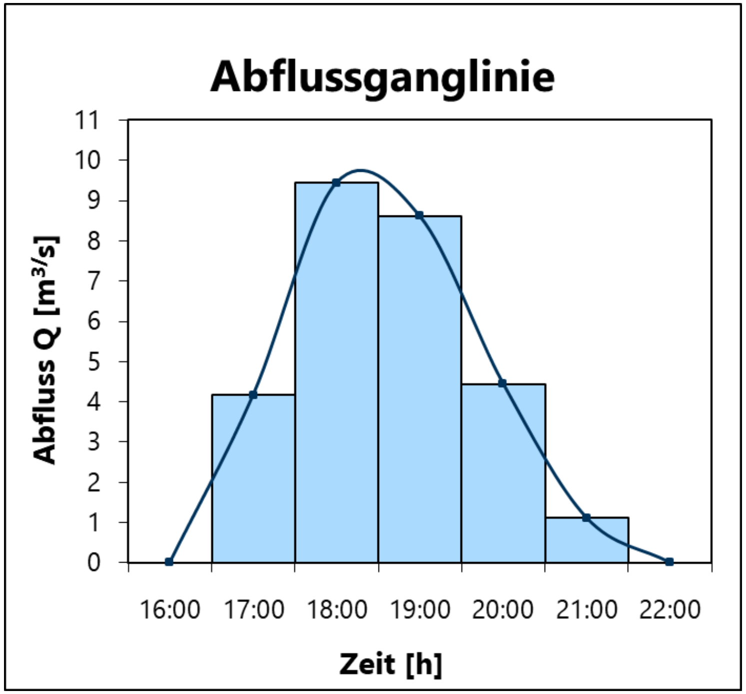
Einheitsganglinie (Anwendung)

Lösung:

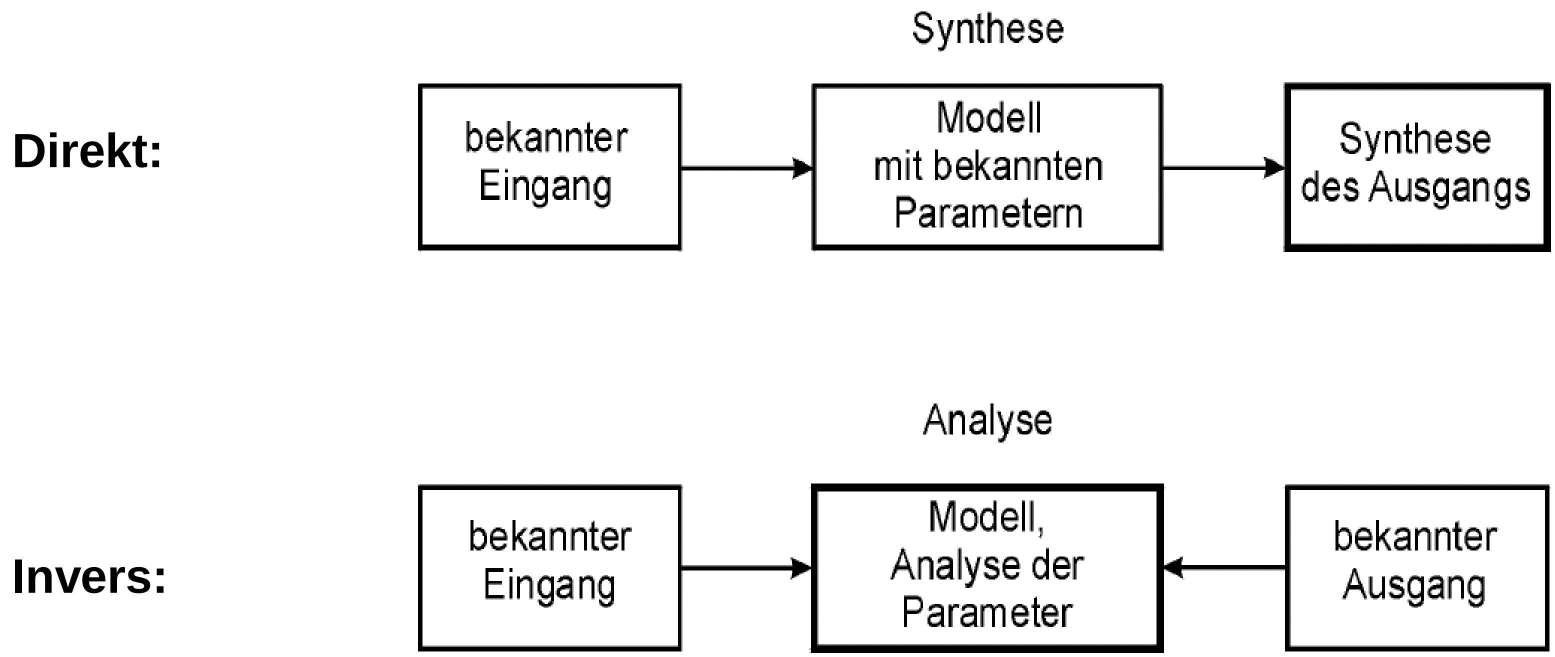
$$q(t_m) = \sum_{i=1}^{n} p_{m-i+1} \cdot h_i \cdot \Delta t$$

$q(t_1)$ =	1.5 mm/h =	4.17 m³/s
$q(t_2)$ =	3.4 mm/h =	9.44 m³/s
$q(t_3)$ =	3.1 mm/h =	8.61 m³/s
$q(t_4)$ =	1.6 mm/h =	4.44 m³/s
$q(t_5)$ =	0.4 mm/h =	1.11 m³/s

⇨



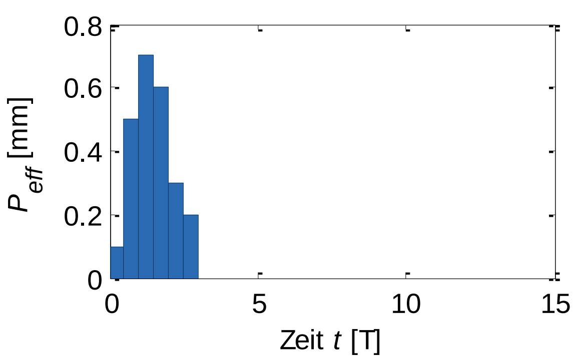
Direkte vs. Inverse Modellierung

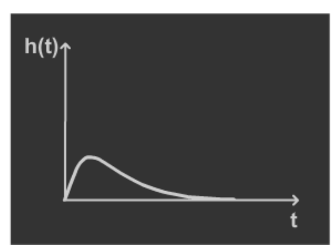


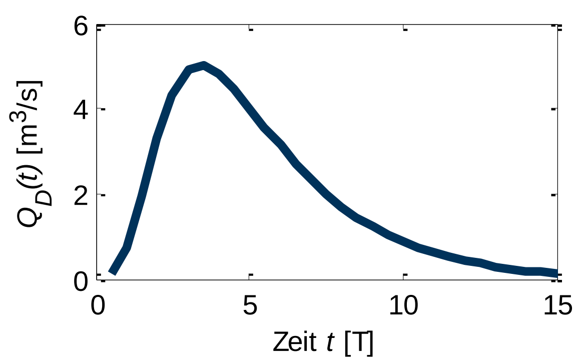
Niederschlag – Abfluss Modellierung
Systemidentifikation

Welches Modell?

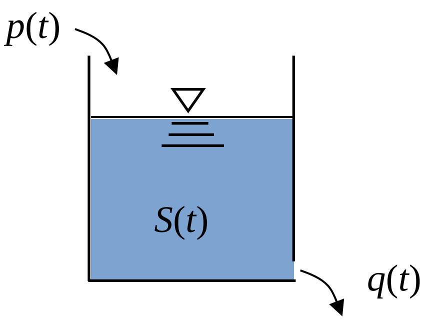
Nettoniederschlag → Einheitsganglinie → Direktabfluss







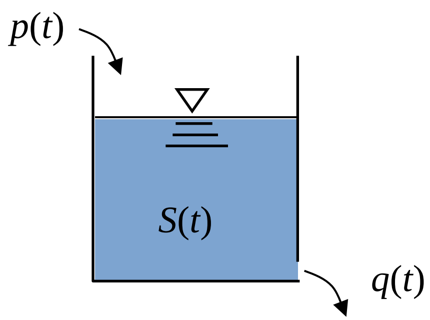
Grundlagen des Nash-Modells - Einzellinearspeicher



Einzellinearspeicher

k	= Speicherkonstante	[h]
S	= Speicherinhalt	[m^3]
$p(t)$	= Zufluss	[m^3/s]
$q(t)$	= Ausfluss	[m^3/s]

Grundlagen des Nash-Modells - Einzellinearspeicher



Einzellinearspeicher

Speicherglechung

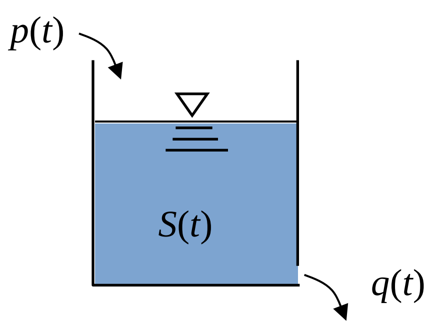
$$q(t) \square S(t) \rightarrow S(t) = k \cdot q(t) \qquad (1)$$

Kontinuitätsgleichung

$$p(t) - q(t) = \frac{dS(t)}{dt} \qquad (2)$$

k	= Speicherkonstante	[h]
S	= Speicherinhalt	[m^3]
$p(t)$	= Zufluss	[m^3/s]
$q(t)$	= Ausfluss	[m^3/s]

Grundlagen des Nash-Modells - Einzellinearspeicher



Einzellinearspeicher

Speicherglechung

$$q(t) \propto S(t) \rightarrow S(t) = k \cdot q(t) \qquad (1)$$

Kontinuitätsgleichung

$$p(t) - q(t) = \frac{dS(t)}{dt} \qquad (2)$$

(1) + (2)

Lineare, inhomogene DGL 1.Ordnung

$$q(t) = p(t) - \frac{dS}{dt} = p(t) - k\frac{dq}{dt}$$

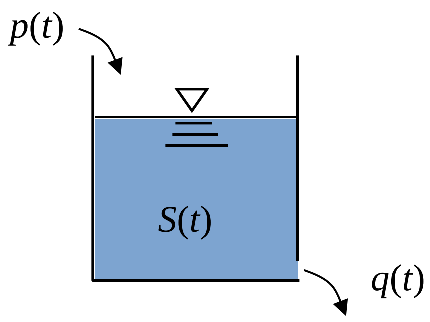
Lösung der DGL

$$q(t) = q(t_0) \cdot e^{-(t-t_0)/k} + \int_{t_0}^{t} p(\tau) \cdot \frac{1}{k} e^{-(t-\tau)/k} \, d\tau$$

Leerlauf des Speichers ohne Zuflüsse   *Zuflüsse*

k	= Speicherkonstante	[h]
S	= Speicherinhalt	[m³]
$p(t)$	= Zufluss	[m³/s]
$q(t)$	= Ausfluss	[m³/s]

Grundlagen: Einheitsganglinie des Einzellinearspeichers



Einzellinearspeicher

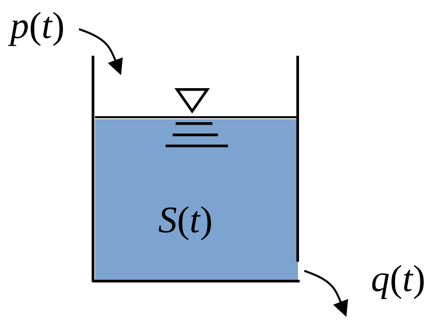
<u>Lösung der DGL</u>

$$q(t) = \underbrace{q(t_0) \cdot e^{-(t-t_0)/k}}_{\text{Leerlauf des Speichers ohne Zuflüsse}} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} p(\tau) \cdot \frac{1}{k}\, e^{-(t-\tau)/k}\, d\tau}_{\text{Zuflüsse}}$$

Einheitsimpuls füllt Speicher zur Zeit t_0 = 0: $S(t_0) = 1$ mit $q(t) = \frac{1}{k} \cdot S(t) \rightarrow q(t_0) = \frac{1}{k} \cdot 1$

Leerlauf des Speichers ohne weitere Zuflüsse:

Grundlagen: Einheitsganglinie des Einzellinearspeichers



Einzellinearspeicher

Lösung der DGL

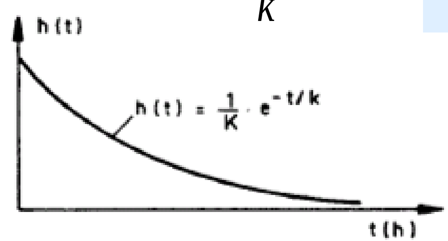
$$q(t) = \underbrace{q(t_0) \cdot e^{-(t-t_0)/k}}_{\text{Leerlauf des Speichers ohne Zuflüsse}} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} p(\tau) \cdot \frac{1}{k} e^{-(t-\tau)/k} \, d\tau}_{\text{Zuflüsse}}$$

Einheitsimpuls füllt Speicher zur Zeit $t_0 = 0$:

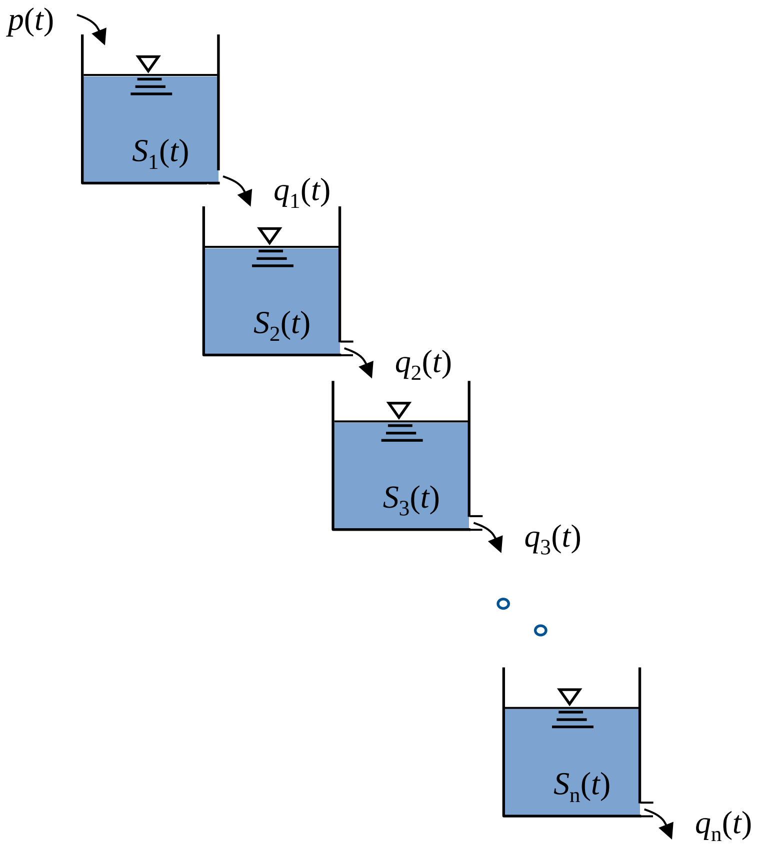
$$S(t_0) = 1 \quad \text{mit} \quad q(t) = \frac{1}{k} \cdot S(t) \rightarrow q(t_0) = \frac{1}{k} \cdot 1$$

Leerlauf des Speichers ohne weitere Zuflüsse:

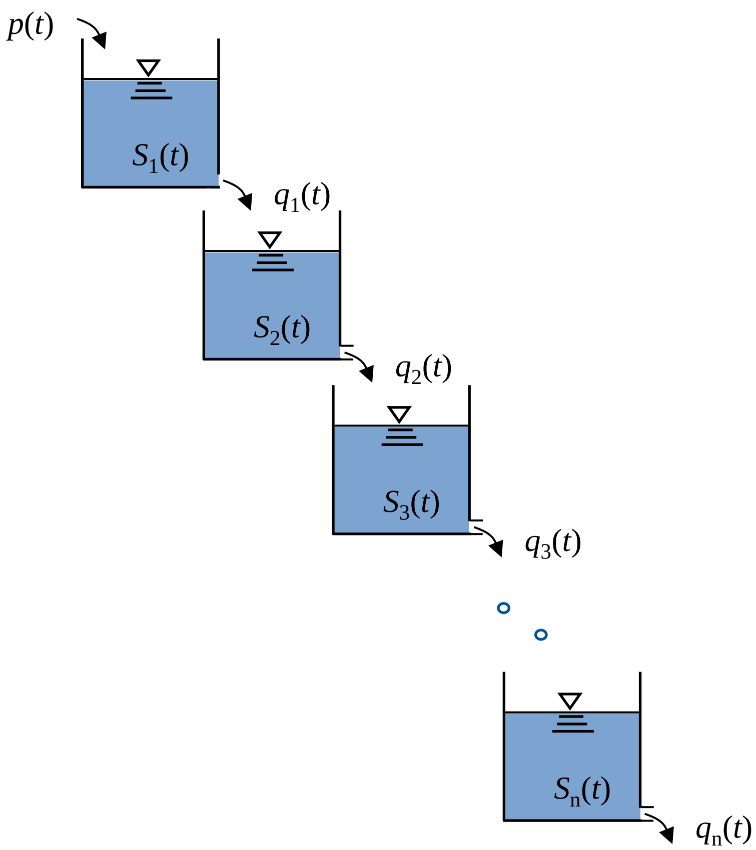
$$q(t) = q(t_0) \cdot e^{-(t-t_0)/k} \quad \text{mit} \quad q(t_0) = \frac{1}{k} \cdot 1 \quad \rightarrow \quad \boxed{h(t) = \frac{1}{k} e^{-t/k}}$$



Lineare Speicherkaskade – Nash-Kaskade



Lineare Speicherkaskade – Nash-Kaskade



<u>Lösung der DGL - Einzellinearspeicher</u>

$$q(t) = \underbrace{q(t_0)\cdot e^{-(t-t_0)/k}}_{\text{Leerlauf des Speichers ohne Zuflüsse}} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} p(\tau)\cdot \frac{1}{k}\, e^{-(t-\tau)/k}\, d\tau}_{\text{Zuflüsse}}$$

Antwort auf Einheitsimpuls: $q_1(t) = \frac{1}{k}\, e^{-t/k}$

$$q_n(t) = \int_0^t q_{n-1}(\tau)\cdot \frac{1}{k}\, e^{-(t-\tau)/k}\, d\tau$$

Annahme:
Speicher leer bei $t_0 = 0$
→ nur Zuflussterm

für $n \in \mathbb{N}$:

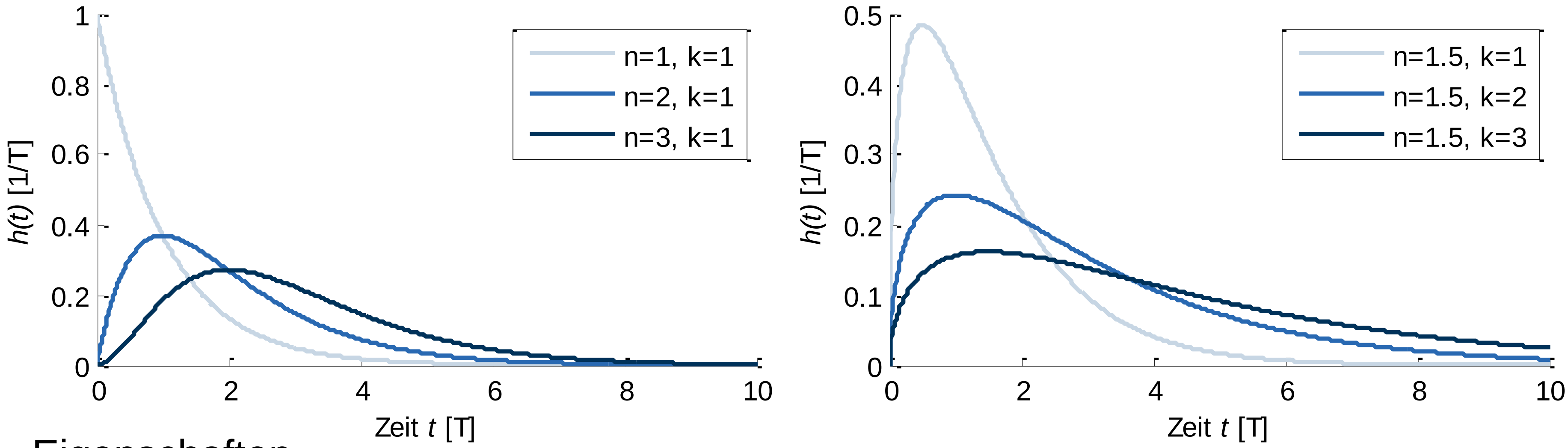
$$\Rightarrow\ h_n(t) = \frac{1}{k\cdot(n-1)!}\left(\frac{t}{k}\right)^{n-1}\cdot e^{-t/k}$$

für $n \in \mathbb{R}^+$:

$$\Rightarrow\ h_n(t) = \frac{1}{k\cdot\Gamma(n)}\left(\frac{t}{k}\right)^{n-1}\cdot e^{-t/k}$$

Gammaverteilung

Lineare Speicherkaskade – Eigenschaften & Verhalten



Eigenschaften

Scheitelzeit	$t_s = k \cdot (n-1)$
Schwerpunktslaufzeit (1. Moment, M_1)	$t_L = k \cdot n$
2. Moment	$M_2 = k^2 \cdot n$

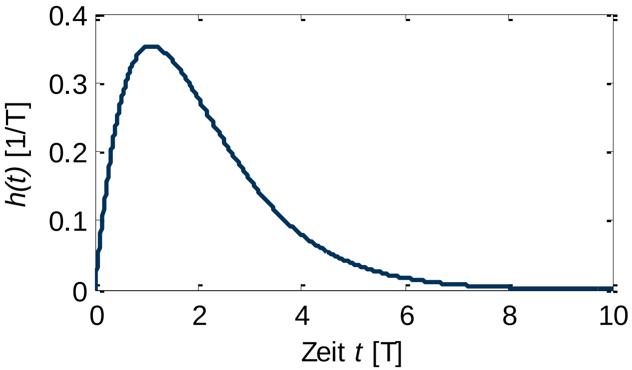
Verhalten

$n \rightarrow \infty$ verstärkte Verschiebung der Kurve (Translation)

$k \rightarrow \infty$ verstärkte Abflachung der Kurve (Retention)

$\rightarrow$über ***n*** und ***k*** lassen sich Translation und Retention im EZG nachbilden

Diskrete Einheitsganglinie



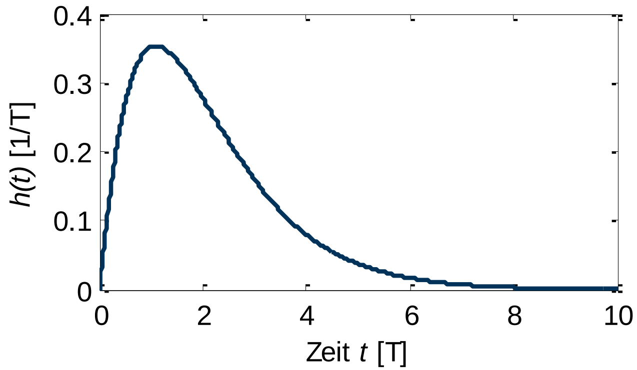
$$h(t) = \frac{1}{k \cdot \Gamma(n)} \left(\frac{t}{k} \right)^{n-1} \cdot e^{-t/k}$$

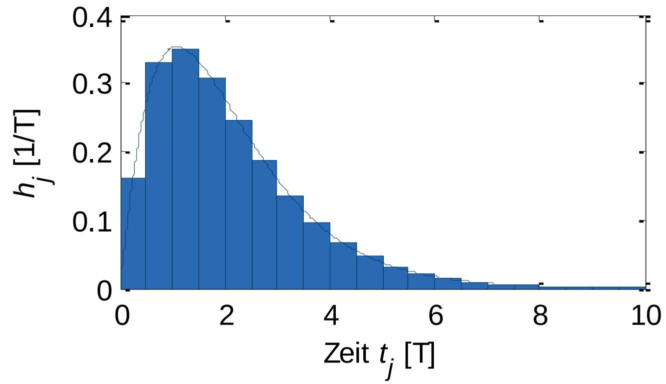
$$\int_0^\infty h(t)dt = 1$$

Faltung:

$$q(t) = \int_0^t p(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau$$

Diskrete Einheitsganglinie





$$h(t) = \frac{1}{k\cdot\Gamma(n)}\left(\frac{t}{k}\right)^{n-1}\cdot e^{-t/k}$$

$$\int_0^\infty h(t)dt = 1$$

$$h_j = \frac{\left[(j-0.5)\cdot\Delta t\right]^{n-1}}{k^n\cdot\Gamma(n)}\, e^{-(j-0.5)\Delta t/k}$$

$$\sum_{j=1}^{n} h_j\cdot\Delta t = 1$$

j Index des jeweiligen Zeitintervalls

Faltung:

$$q(t) = \int_0^t p(\tau)\cdot h(t-\tau)d\tau$$

Faltung diskret:

$$q(t_m) = \sum_{i=1}^{n} p_{m-i+1}\cdot h_i\cdot\Delta t$$

Aufgabe 2: Parameterbestimmung (Momentenmethode)

- Momente der Übertragungsfunktion:

$$M_{h_1} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot t \, dt = k \cdot n$$

$$M_{h_2} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot t^2 \, dt = k^2 \cdot n$$

$\Rightarrow$ $k = M_{h_2} / M_{h_1}$ und $n = M_{h1}^2 / M_{h2}$

Aufgabe 2: Parameterbestimmung (Momentenmethode)

- Momente der Übertragungsfunktion:

$$M_{h_1} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot t \, dt = k \cdot n$$

$$M_{h_2} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot t^2 \, dt = k^2 \cdot n$$

$\Rightarrow$ $k = M_{h_2} / M_{h_1}$ und $n = M_{h1}^2 / M_{h2}$

- Momentbeziehung linearer Systeme: $M_{h_m} = M_{Q_m} - M_{I_m}$

$\Rightarrow$ Momente des Nettoniederschlags und des Direktabflusses berechnen

Aufgabe 2: Berechnung der Momente

- Für m = 1 (Schwerpunktszeit)

$$M_{Q_1} = \frac{\sum_{j=1}^{j_{\max}} Q_j \cdot t_j}{\sum_{j=1}^{j_{\max}} Q_j} = t_{SP(Q)}$$

$$M_{I_1} = \frac{\sum_{j=1}^{j_{\max}} I_j \cdot t'_j}{\sum_{j=1}^{j_{\max}} I_j} = t_{SP(I)}$$

- Für m = 2

$$M_{Q_2} = \frac{\sum_{j=1}^{j_{\max}} Q_j \cdot \left(t_j - t_{SP(Q)}\right)^2}{\sum_{j=1}^{j_{\max}} Q_j}$$

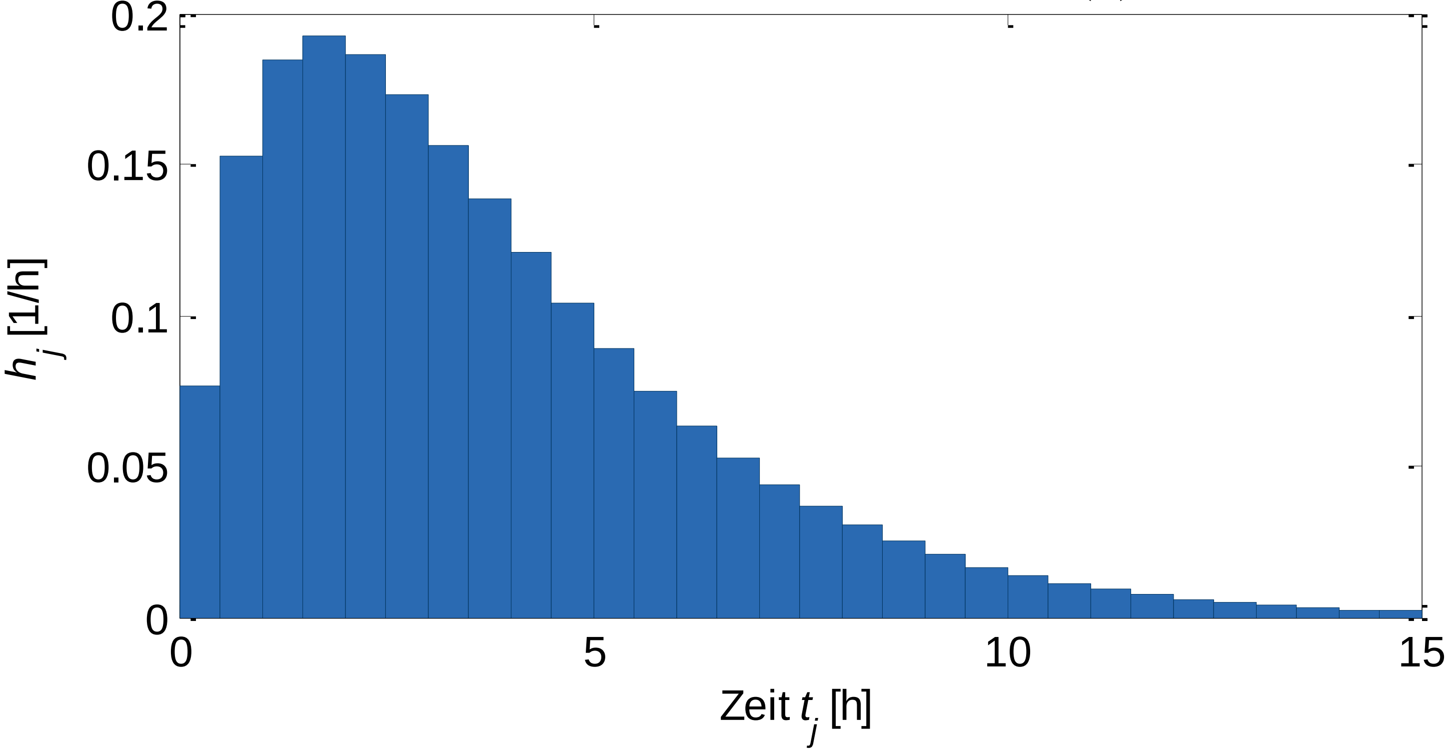
$$M_{I_2} = \frac{\sum_{j=1}^{j_{\max}} I_j \cdot \left(t'_j - t_{SP(I)}\right)^2}{\sum_{j=1}^{j_{\max}} I_j}$$

$t'_j = t_j - 0.5 \cdot \Delta t = \left(j - 0.5\right) \cdot \Delta t$ $\rightarrow$ Niederschlag um einen halben Zeitschritt zeitversetzt

ETH zürich

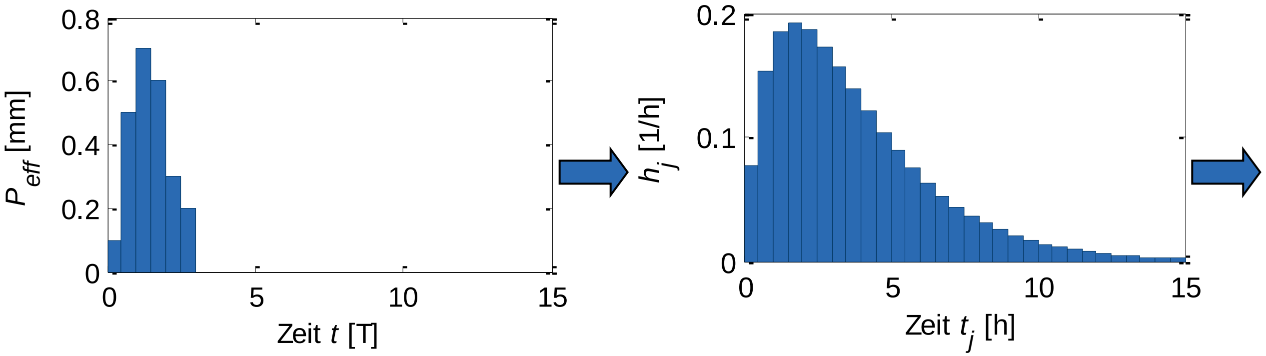
Aufgabe 2: Einheitsganglinie

$$h_j = \frac{\left[\left(j-0.5\right)\cdot\Delta t\right]^{n-1}}{k^n\cdot\Gamma(n)}\, e^{-(j-0.5)\Delta t/k}$$



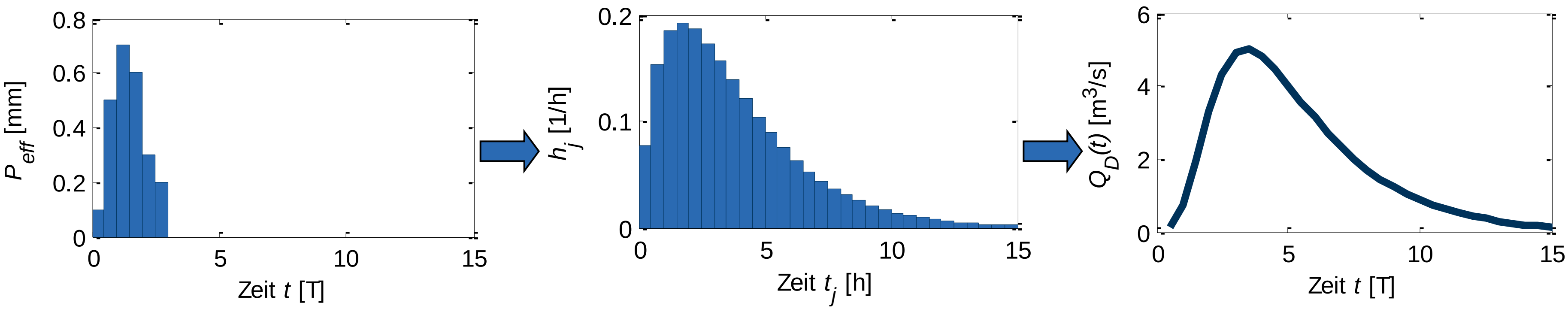
Aufgabe 2: Anwendung der Einheitsganglinie

$$q(t_m) = \sum_{i=1}^{n} p_{m-i+1} \cdot h_i(\Delta t) \cdot \Delta t$$



Aufgabe 2: Anwendung der Einheitsganglinie

$$q(t_m) = \sum_{i=1}^{n} p_{m-i+1} \cdot h_i(\Delta t) \cdot \Delta t$$



Durch Faltung werden Einheiten nicht verändert. → Einheiten umrechnen!

ETH zürich

Organisatorisches

- **Abgabedatum:** 6.12.2017 (bis 16 Uhr)
- **Abgabeort:** Ablagefächer vor HIL D 21.1
- Nach dem offiziellen Abgabedatum wird ein Lösungsvorschlag auf der Kurs Webseite veröffentlicht
- **Sprechstunden:** Di., 14:30 – 18:00 Uhr und nach Vereinbarung

  HIL D 21.3
- **E-Mail:** magdali@ifu.baug.ethz.ch