



# DISEÑO DE SISTEMAS DE SONIDO: FILTROS ANÁLOGOS Y ALTAVOZ ELECTRODINÁMICO

Ing. Manuel Fernando Torres Cifuentes

# 1 CONTENIDO

---

2	ATENUADOR PASIVO PARA ALTAVOCES .....	3
2.1	Ejemplo:.....	3
3	FILTROS PASIVOS DE PRIMER ORDEN .....	11
3.1	Respuesta Temporal.....	12
3.2	Respuesta en Frecuencia Filtro Pasa Bajos RC.....	15
3.3	Respuesta en Frecuencia Filtro Pasa Altos RC. ....	21
3.4	Respuesta en Frecuencia Filtros pasa altos y pasa bajos RL. ....	24
4	FILTROS DE SEGUNDO ORDEN .....	27
4.1	Circuitos de segundo orden con dos etapas RC de primer orden pasa bajos....	28
4.2	Filtro pasa bajos, pasa altos y pasa banda a partir de un circuito serie RLC. ...	34
4.2.1	Filtro Pasa Bajos .....	35
4.2.2	Efectos del amortiguamiento (Q) en el filtro pasa bajos de segundo orden RLC. 37	
4.2.3	Tipos de Filtros según su diseño a partir del Q.....	40
4.2.4	Filtro Pasa Altos .....	41
4.2.5	Filtro Pasa banda .....	45
5	FILTROS SEPARADORES DE FRECUENCIA PARA ALTAVOCES (CROSSOVER) .....	51
5.1	Ejercicio .....	51
5.1.1	Sensibilidad de los altavoces.....	53
5.1.2	Diseño de los atenuadores.....	55
5.1.3	Frecuencias de cruce.....	58
5.1.4	Diseño del filtro pasa bajos para el altavoz de baja frecuencia .....	59
5.1.5	Diseño del filtro pasa altos para el altavoz de alta frecuencia .....	60
5.1.6	Diseño del filtro pasa banda para el altavoz de rango medio.....	61
5.1.7	Análisis de cada altavoz para una frecuencia de operación de 20Hz. ....	63
5.2	Filtros separadores de frecuencia de segundo orden. ....	71
5.2.1	Filtro pasa altos pasivo de segundo orden. ....	71
5.2.2	Filtro pasa bajos pasivo de segundo orden. ....	74
5.2.3	Efectos del Q en el cruce de frecuencias de cada filtro. ....	75
6	Impedancia Mecánica de Radiación.....	76
6.1	Impedancia Acústica Específica .....	76
6.1.1	Presión Acústica.....	76
6.1.2	Velocidad de partícula .....	79

6.1.3	Impedancia Específica de una onda plana.....	80
6.1.4	Impedancia Específica de una onda esférica .....	81
6.1.5	Comparación entre la impedancia de la onda plana y la esférica .....	81
6.2	Impedancia Mecánica de Radiación Fuente Esférica.....	82
6.2.1	Aproximación en baja frecuencia.....	86
6.2.2	Aproximación para alta frecuencia.....	88
6.3	Impedancia Mecánica de Radiación Pistón plano .....	89
6.3.1	Aproximación en baja frecuencia.....	93
6.3.2	Aproximación en alta frecuencia.....	95
7	Altavoz Electrodinámico .....	96
7.1	Descripción.....	97
7.1.1	Suspensión .....	97
7.1.2	Masa móvil .....	99
7.1.3	Sistema magnético.....	99
7.1.4	Variables Electroacústicas del altavoz .....	100
7.2	Circuito equivalente.....	104
7.2.1	Transductor anti recíproco .....	105
7.2.2	Circuito mecánico.....	106
7.2.3	Circuito mecánico eléctrico de movilidad.....	109
7.2.4	Circuito mecánico-eléctrico de Impedancia .....	114
7.2.5	Aproximación en baja frecuencia.....	117
7.2.6	Aproximación en alta frecuencia.....	121
8	Lista de Variables .....	124

## 2 ATENUADOR PASIVO PARA ALTAVOCES

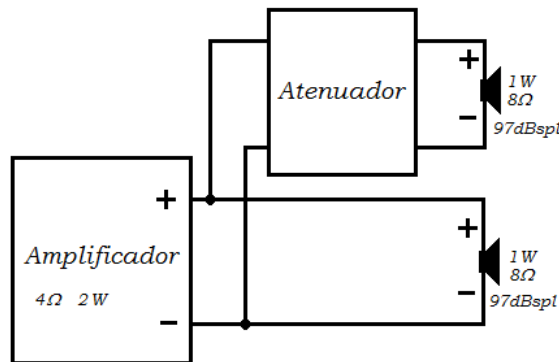
Un atenuador es un circuito eléctrico que permite controlar la cantidad de voltaje que pasa a través de él. Con dos resistencias, una parte del voltaje de entrada se transfiere a la salida tomada en una resistencia y el voltaje restante es retenido por la otra resistencia, permitiendo que la transferencia de voltaje sea dependiente de los valores de los resistores.

Este circuito es útil en el diseño de sistemas de sonido cuando se tiene un sistema que reproduce sonido con diferentes altavoces y es común que los altavoces tengan diferente valor de sensibilidad, esta situación hace que con el mismo valor de potencia eléctrica cada altavoz emite un diferente valor de nivel de presión sonora (NPS).

Si se requiere que todos los altavoces reproduzcan el mismo nivel de presión sonora, es posible igualar dicho nivel de cada altavoz con la ayuda de un atenuador pasivo, pues la cantidad de decibeles de atenuación en el voltaje será la misma cantidad de decibeles que se atenuarán en la presión sonora.

### 2.1 EJEMPLO:

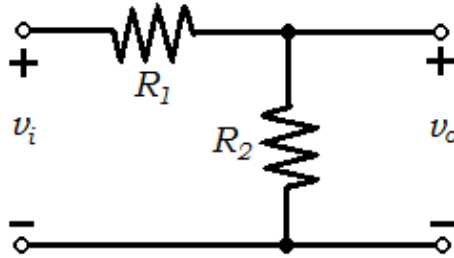
Se tienen dos altavoces de 8 Ohmios, pero con sensibilidades diferentes;  $S_1 = 100dBspl/1W$  y  $S_2 = 97dBspl/1W$ , y se requieren conectar al mismo amplificador de 4 Ohmios pero que ambos altavoces emitan el mismo nivel de presión sonora.



**Figura 2.1** Muestra la conexión de dos altavoces a un mismo amplificador en paralelo, donde se pone un atenuador para modificar la sensibilidad del altavoz y que ambos reproduzcan el mismo nivel de presión sonora con el mismo vatio eléctrico.

Se deben conectar en paralelo y aplicar al altavoz de mayor nivel de presión sonora un atenuador para que esté al mismo valor que el altavoz de menor nivel de presión sonora como se muestra en la Figura 2.1

El atenuador debe disminuir 3dB ( $100dBspl - 97dBspl = 3dB$ ) al altavoz de mayor nivel de presión sonora, luego se propone hacer un atenuador que disminuya 3dB de voltaje. Para este atenuador se propone el siguiente circuito que se muestra en la Figura 2.2



**Figura 2.2** Circuito eléctrico con dos resistores que permite hacer un control de atenuación.

Para el circuito de la Figura 2.2. Se obtiene la función de transferencia teniendo así una función matemática que permita establecer la cantidad de atenuación del circuito en función de sus dos resistores. Se plantea la relación de voltaje de salida ( $v_o$ ) respecto voltaje de entrada ( $v_i$ ) a partir de un divisor de voltaje que está basado en la ley de Ohm.

Se tiene que:

$$v_o = \frac{v_i \cdot R_2}{R_1 + R_2} \quad (2.1)$$

A partir de la ecuación ( 2.1), se puede calcular el voltaje de salida a partir de dividir el producto del voltaje de entrada por el elemento al cual se desea conocer el voltaje, que en este caso es  $R_2$ , como numerador, y tomar como denominador la suma de los dos resistores que es igual que la resistencia total equivalente de todo el circuito.

También se puede determinar la función de transferencia pasando el voltaje de entrada que está multiplicando el numerador del lado derecho de la ecuación ( 2.1), a dividir al lado izquierdo de la ecuación.

$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (2.2)$$

Observando el lado derecho de la ecuación ( 2.2), se puede decir que si  $R_2 \gg R_1$ , la función de transferencia tiende a la unidad como se ve en la ecuación ( 2.3), es decir, prácticamente todo el voltaje de entrada se transfiere a la salida y el atenuador realmente no tiene algún efecto en como atenuador.

$$R_2 \gg R_1 \quad ; \quad \frac{R_2}{R_1 + R_2} \rightarrow 1 \quad (2.3)$$

Por otro lado, si  $R_1 \gg R_2$ , la función de transferencia tiende a cero como aparece en la ecuación ( 2.4), y así el atenuador tendría a la salida cero voltios, de alguna manera el circuito retiene el voltaje de entrada y no lo transfiere a la salida.

$$R_2 \ll R_1 \quad ; \quad \frac{R_2}{R_1 + R_2} \rightarrow 0 \quad (2.4)$$

Esto pasa llevando el circuito a los extremos, pero en la aplicación lo que se quiere es establecer un control de ganancia estableciendo valores de  $R_1$  y  $R_2$  de manera que su función de transferencia esté en un valor entre cero y uno, así poder dar atenuación controlada que permita ajusta la ganancia según se requiera.

Como una posible solución al problema planteado, se tiene el circuito de la Figura 2.2, y se debe establecer algún valor para  $R_1$  y para  $R_2$  de manera que nos dé una atenuación de 3dB para el altavoz uno.

Para estimar la atenuación en decibeles tenemos que:

$$L(dB) = 20 \text{Log}_{10} \left( \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) \quad (2.5)$$

Ahora se despeja de la ecuación ( 2.5),  $R_2$  y para poder resolver se decide asumir el valor de la  $R_1$ , teniendo:

$$10^{L(dB)/20} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (2.6)$$

$$R_1 \cdot 10^{L(dB)/20} + R_2 \cdot 10^{L(dB)/20} = R_2 \quad (2.7)$$

$$R_1 \cdot 10^{L(dB)/20} = R_2 - R_2 \cdot 10^{L(dB)/20} \quad (2.8)$$

$$R_2 = \frac{R_1 \cdot 10^{L(dB)/20}}{1 - 10^{L(dB)/20}} \quad (2.9)$$

Ahora reemplazando  $R_1$  por un valor cualquiera;  $R_1 = 1000\Omega$  y  $L(dB) = -3dB$  haciendo uso de la ecuación ( 2.9) se tiene:

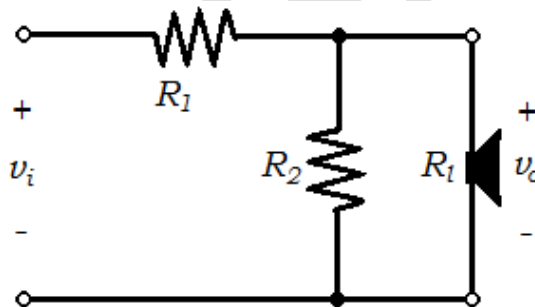
$$R_2 = \frac{(1000) \cdot 10^{-3/20}}{1 - 10^{-3/20}} = 2424,02\Omega$$

Así se tiene un atenuador de 3dB a partir de las dos resistencias; una asumida y la otra calculada. Ahora si conectamos el atenuador al altavoz en cuestión, revisemos y verifiquemos que se estén atenuando los 3dB que corresponden.

En este caso se evalúa la función de transferencia del circuito de la Figura 2.3. Que contempla el altavoz como la carga del circuito  $R_L$ , luego en este caso se toma como base la ecuación ( 2.1) con la diferencia que ahora en vez de  $R_2$  se tiene el paralelo entre  $R_2$  y  $R_L$ , de la siguiente manera:

$$v_o = \frac{v_i(R_2 \parallel R_L)}{R_1 + (R_2 \parallel R_L)} \quad (2.10)$$

Pasando el voltaje de entrada a dividir al lado izquierdo de la ecuación ( 2.10):



**Figura 2.3** Circuito atenuador conectado a un altavoz.

$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{(R_2 \parallel R_L)}{R_1 + (R_2 \parallel R_L)} \quad (2.11)$$

Donde sí:

$$R_1 = 1000\Omega$$

$$R_2 = 2424,02\Omega$$

$$R_L = 8\Omega$$

Desarrollando la ecuación ( 2.11) tomando sólo el numerador de la función:

$$(R_2 \parallel R_L) = \frac{R_2 \cdot R_L}{R_2 + R_L}$$

Se reemplazan los valores propuestos:

$$\frac{(2424,02) \cdot (8)}{2424,02 + 8} = 7,97\Omega$$

Ahora la resistencia equivalente del circuito es:

$$R_{eq} = R_1 + (R_2 \parallel R_L) = 1000 + 7,97 = 1007,97\Omega$$

Si se calcula la atenuación de este circuito se toma como base la ecuación ( 2.5) que muestra el cálculo de magnitud, pero teniendo en cuenta la carga  $R_L$ , se tiene,

$$dB = 20\text{Log}_{10} \left( \frac{(R_2 \parallel R_L)}{R_1 + (R_2 \parallel R_L)} \right) \quad (2.12)$$

Reemplazando en la ecuación ( 2.12), obtenemos,

$$dB = 20\text{Log}_{10} \left( \frac{7,97}{1007,97} \right) = -42,03dB$$

La atenuación es de 42dB lo cual es bastante diferente a los 3dB que se supone debían atenuarse, la razón por la cual no se dio el resultado esperado, es porque no se tuvo en cuenta en los cálculos la carga y su valor, ahora se propone hacer el cálculo correcto teniendo en cuenta la carga y así no se asumen los valores de las resistencias sino que son calculadas según la cantidad de atenuación que se requiera y el altavoz que se quiere atenuar, del cual se conoce su Impedancia nominal que llamamos  $R_L$  en este ejercicio.



Una condición que no se puede obviar en este procedimiento es el acople de impedancia correcto, en este caso donde se tiene una conexión entre un amplificador de potencia y el altavoz, lo que se pretende es transferir la mayor cantidad de potencia del amplificador al altavoz, la única forma de lograr la mejor condición es que la impedancia del amplificador sea igual a la impedancia del altavoz (carga), esto indica que para que el pad cumpla la función de atenuar la señal y además no altere el correcto acople de impedancias, se sugiere igualar el valor de impedancia del altavoz (carga) al valor de impedancia total de toda la red.

$$R_{eq} = R_L = R_1 + (R_2 \parallel R_L) \quad (2.13)$$

Se reemplaza el denominador de la ecuación ( 2.11), por la  $R_L$  que se define en la ecuación ( 2.13), y así se obtiene la ecuación ( 2.14)

$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{(R_2 \parallel R_L)}{R_1 + (R_2 \parallel R_L)} = \frac{(R_2 \parallel R_L)}{R_L}$$

$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{(R_2 \parallel R_L)}{R_L} \quad (2.14)$$

Se resuelve la ecuación ( 2.14), para obtener una expresión en función de  $R_2$  y  $R_L$ ,

$$\frac{(R_2 \parallel R_L)}{R_L} = \frac{\left(\frac{R_2 \cdot R_L}{R_2 + R_L}\right)}{R_L}$$

$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{(R_2 \parallel R_L)}{R_L} = \frac{R_2}{R_2 + R_L} \quad (2.15)$$

La ecuación ( 2.15) determina la atenuación de forma lineal, para determinar la magnitud en dB,

$$L(dB) = 20 \log_{10} \left( \frac{R_2}{R_2 + R_L} \right) \quad (2.16)$$

Si se despeja de la ecuación ( 2.16) la resistencia  $R_2$  se logra obtener su valor a partir de la atenuación  $L(dB)$  que se quiera y el valor de impedancia del altavoz  $R_L$ , con la condición de satisfacer el acople de impedancias para máxima transferencia de potencia. Se obtiene:

$$R_2 = \frac{R_L \cdot 10^{L(dB)/20}}{1 - 10^{L(dB)/20}} \quad (2.17)$$

Donde la ecuación ( 2.17) es similar a la ecuación ( 2.9), con la diferencia que en vez de  $R_1$  se tiene  $R_L$ , cumpliendo así con el correcto acople de impedancias. Una vez determinado el valor de  $R_2$ , faltaría determinar el valor de  $R_1$ , que se puede hallar a partir de la ecuación ( 2.13), despejando el término  $R_1$ , y como ya se conoce  $R_2$  y  $R_L$ , se tiene,

$$R_1 = R_L - (R_2 \parallel R_L) \quad (2.18)$$

A partir de las ecuaciones, ( 2.17) y ( 2.18) se obtiene los valores de las resistencias que complacen el ejercicio propuesto, de manera que se mantenga el valor de impedancia de la carga  $R_L$  igual a la impedancia total de toda la red  $R_{eq}$  y así mantener el acople de impedancias correcto y poder atenuar el altavoz los 3dB que se requieren. Y así, aplicando la ecuación ( 2.17) se tiene:

$$R_2 = \frac{(8) \cdot 10^{-3/20}}{1 - 10^{-3/20}} = 19,39\Omega$$

Y se determina  $R_1$  con la ecuación ( 2.18),

$$R_1 = 8 - \left( \frac{8 \cdot 19,39}{8 + 19,39} \right) = 2,33\Omega$$

Si se quiere comprobar que estos valores son correctos se usa la ecuación ( 2.12) para verificar que la atenuación es la correcta a partir de  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_L$ . Y además si se cumple el acople de impedancias.

$$dB = 20\text{Log}_{10} \left( \frac{(R_2 \parallel R_L)}{R_1 + (R_2 \parallel R_L)} \right)$$

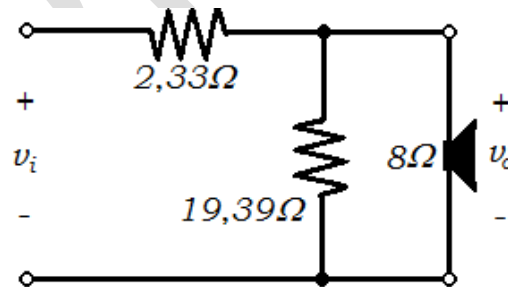
Se reemplazan los valores en la ecuación

$$dB = 20\text{Log}_{10} \left( \frac{5,66}{2,33 + 5,66} \right) = 20\text{Log}_{10} \left( \frac{5,66}{8} \right)$$

Se verifica que la impedancia total la red que es lo que está en el denominador es igual a la impedancia del altavoz (carga).

$$L(dB) = 20\text{Log}_{10}(0,707) = -3dB$$

Se verifica que hay una atenuación de 3dB, que si en voltaje existe esta cantidad de atenuación así mismo los decibeles SPL de presión sonora decaen en la misma magnitud que el voltaje. Y el circuito resultado será el de la Figura 2.4.



**Figura 2.4** Se muestra el circuito atenuador conectado al altavoz de  $8\Omega$ , que da una atenuación de 3dB, tanto en voltaje como en nivel de presión sonora, con la seguridad de mantener la impedancia total del circuito igual a la impedancia del altavoz.

### 3 FILTROS PASIVOS DE PRIMER ORDEN

---

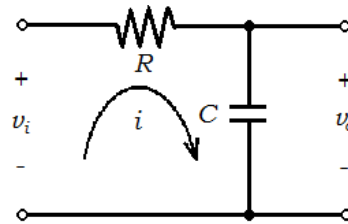
En el capítulo anterior se observó una función de transferencia de un circuito con dos resistores que controlan la cantidad de voltaje, lo que permitía el control de presión sonora sobre un altavoz. En este sistema visto anteriormente sólo se usaban resistencias que son elementos que disipan la energía en forma de temperatura y así es como parte de la energía que no se convertía en presión sonora por medio del altavoz, se convertía en temperatura por medio de los resistores que forman el atenuador pasivo.

En los sistemas que se describen a continuación denominados filtros de primer orden, su característica principal radica en que el circuito tendrá un elemento almacenador de energía (condensador o bobina) acompañado de un elemento disipador de energía como lo son los resistores. Estos sistemas se caracterizan por:

- ◀ Tiene un elemento almacenador de energía puede ser un capacitor o un inductor.
- ◀ Pueden haber casos donde existan más de un elemento almacenador de energía pero si estos son reducibles a un sólo elemento que represente todos los elementos reactivos del mismo tipo se podría considerar como un sistema de primer orden.
- ◀ La Impedancia del circuito será descrita por un número complejo donde la parte Real representa la parte resistiva del circuito y la parte imaginaria representa al elemento reactivo del circuito con la frecuencia imaginaria ( $j\omega$ ).
- ◀ Estos sistemas tendrán efectos en función de la frecuencia, donde la variación de frecuencia variará la reactancia y así los circuitos de primer orden pueden cambiar la caída de voltaje en cada elemento según la frecuencia de la señal de entrada.
- ◀ Estos circuitos actúan en el tiempo con una respuesta transitoria que depende de los elementos del circuito.
- ◀ De alguna manera si hay efectos en la frecuencia también hay efectos en las respuestas transitorias.
- ◀ Son circuitos selectores de frecuencia según el componente reactivo si es capacitor o inductor y también depende dicha selección si la señal de salida se ubica en el elemento resistivo o el reactivo. Este fenómeno de cambio en función de la frecuencia es lo que también hace llamar a estos circuitos Filtros de primer orden.

Para comenzar el análisis se toma como base un circuito eléctrico serie con dos elementos; un resistor que disipada energía además de controlar la corriente en el circuito y también se tiene un capacitor que sería el elemento almacenador de energía que a su vez será el elemento reactivo que altera la respuesta del sistema donde su salida cambia según su entrada en función del tiempo y la frecuencia. El circuito RC que se analiza se puede observar en la Figura 3.1.

### 3.1 RESPUESTA TEMPORAL



**Figura 3.1** Muestra el circuito RC serie, con el capacitor como elemento de salida.

Para estos circuitos se debe tener en cuenta que el voltaje en la resistencia y en el capacitor son funciones dependientes del tiempo. Así mismo más adelante se analizará cómo responden estos circuitos y sus elementos en función de la frecuencia donde se revisará el comportamiento de filtro que tienen los circuitos de primer orden.

Tenemos un circuito serie como se muestra en la Figura 3.1, donde circula una sola corriente que se describe como:

$$i(t) = \frac{v_R(t)}{R} = C \frac{dv_C(t)}{dt} \quad (3.1)$$

En la ecuación ( 3.1) se muestra, la corriente en función de la Resistencia  $R$  y el voltaje en el resistor  $v_R$ , según la ley de Ohm. Sin embargo, la corriente en el capacitor depende de la cantidad de capacitancia que tenga éste y además del cambio de voltaje  $v_c$  en el capacitor en función del tiempo.

Gracias a procedimientos de cálculo y ecuaciones diferenciales, el circuito es descrito como:

$$i(t) = \frac{v_i(t)}{R} e^{-t/RC} \quad (3.2)$$

El voltaje en la resistencia se determina a partir de la ley de Ohm descrita en la ecuación ( 3.1), despejando  $v_R$  después de reemplazar la corriente determinada en la ecuación ( 3.2), se tiene:

$$v_R(t) = i(t) \cdot R = \frac{v_i(t) \cdot R}{R} e^{-t/RC} \quad (3.3)$$

$$v_R(t) = v_i(t) e^{-t/RC} \quad (3.4)$$

Se obtiene en la ecuación ( 3.4), la forma de calcular el voltaje en el resistor en cualquier instante de tiempo, en función del voltaje de entrada  $v_i$  y los valores de los elementos que tiene el circuito  $R$  y  $C$ . Que tendrá una forma exponencial.

Ahora se estima el voltaje en el capacitor  $v_C$ , restando el voltaje del resistor  $v_R$  al voltaje de entrada  $v_i$ , como se presenta en la ecuación ( 3.5).

$$v_C(t) = v_i(t) - v_R(t) \quad (3.5)$$

Se reemplaza el voltaje en el resistor de la ecuación ( 3.4) en la ecuación ( 3.5), y se obtiene,

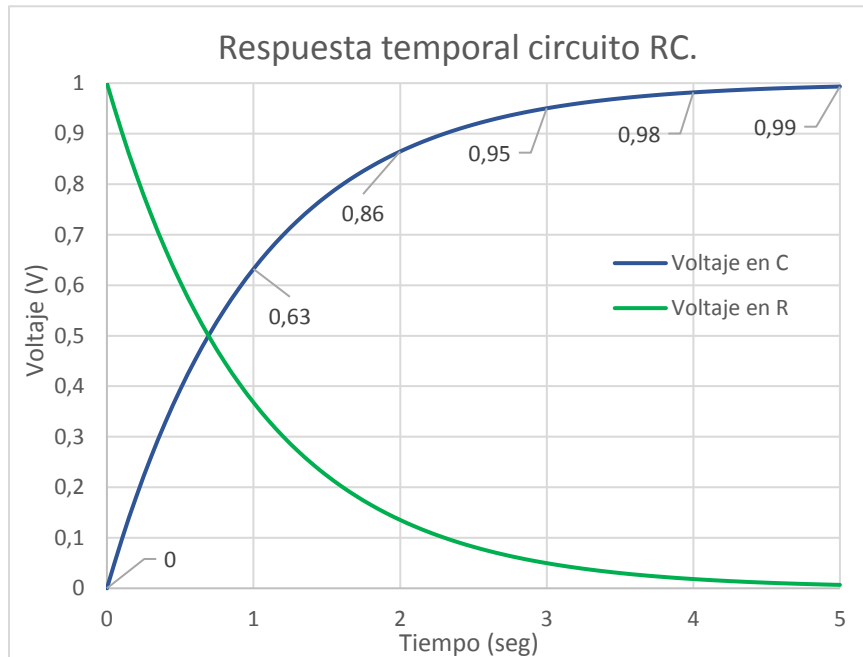
$$v_C(t) = v_i(t) - v_i(t) e^{-t/RC} \quad (3.6)$$

Se factoriza el voltaje de entrada  $v_i$  en la ecuación ( 3.6), para calcular el voltaje en el capacitor  $v_C$  en función de tiempo,

$$v_C(t) = v_i(t)(1 - e^{-t/RC}) \quad (3.7)$$

La ecuación ( 3.7), permite para estimar el estado de carga de voltaje en el capacitor en función del tiempo que posee un comportamiento exponencial.

Como se puede observar en la Figura 3.2, se tiene la respuesta temporal para una entrada con señal paso, para un circuito RC como el que se muestra en la Figura 3.1. Esta gráfica muestra en verde el voltaje en la resistencia  $v_R$  que empieza con el mismo valor inicial del voltaje de entrada  $v_i$  así como se muestra en la ecuación ( 3.4) y decae exponencialmente al ritmo del valor del exponente que depende del instante de tiempo de análisis  $t$  y del producto  $RC$ .

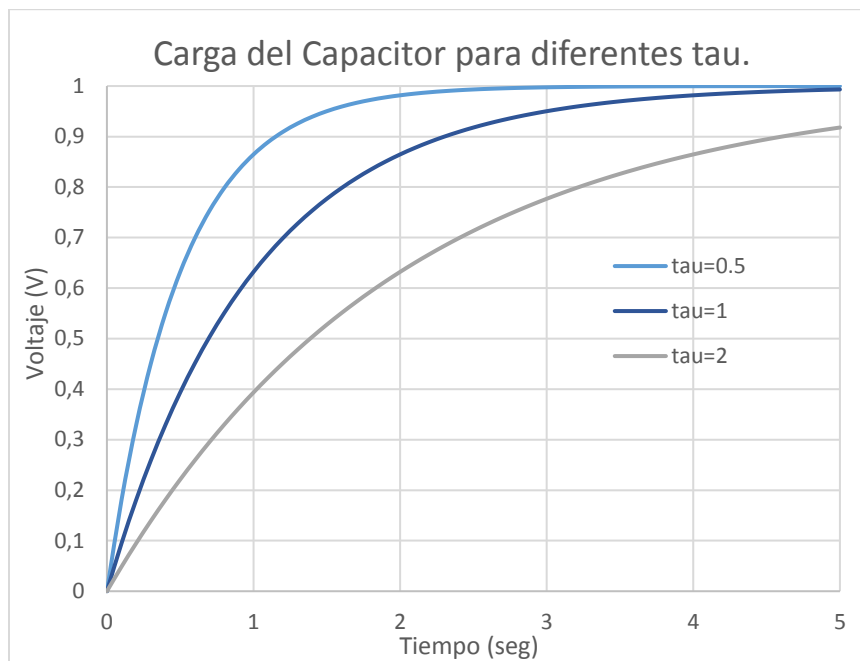


**Figura 3.2** Muestra el voltaje en el Capacitor (azul) y en el Resistor (verde) en función del tiempo, cuando el voltaje de entrada es nulo, en los tiempos antes de cero segundos y es la unidad en los tiempos mayores a cero.

Este producto  $\tau = RC$  es lo que se denomina tau  $\tau$  que es una constante de tiempo que indica el ritmo de decaimiento exponencial. También es claro anotar que el comportamiento típico de estos transitorios de primer orden el decaimiento total dura aproximadamente  $5\tau$  hasta que se estabiliza el sistema mientras no existan cambios en la entrada del sistema.

A su vez como se observa en la Figura 3.2. Se muestra la gráfica correspondiente al voltaje en el condensador. En este circuito el sistema antes de la señal paso en tiempos inferiores al tiempo cero, el condensador no tiene ninguna condición inicial de carga previa al inicio de la señal paso. Se observa como el condensador a medida que avanza el tiempo, va cargando el voltaje que está en su totalidad retenido en la resistencia y en un ritmo exponencial, la resistencia va transfiriendo voltaje al condensador que va adquiriendo el voltaje como lo describe la ecuación ( 3.7).

Para el caso analizado el tau del circuito es de un segundo y como se ve en la Figura 3.2, se muestra en detalle que tanto porcentaje del voltaje de entrada hay en el condensador a medida que aumenta el tiempo en el sistema desde que inicia cada segundo. Donde para el primer tau el voltaje en el condensador es el 63% del voltaje de entrada, y así sucesivamente hasta que en el quinto tau la carga del condensador muestra un voltaje prácticamente igual al voltaje de entrada.



**Figura 3.3** Muestra la respuesta temporal del mismo circuito RC, con diferentes constantes de tiempo  $\tau$ .

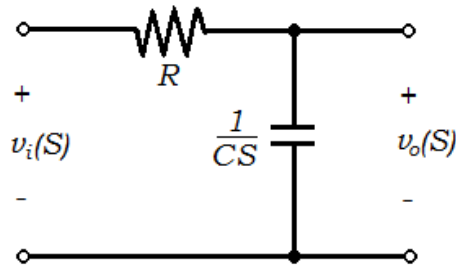
Todo este análisis nos muestra la respuesta transitoria de un sistema de primer orden, donde su comportamiento temporal va a depender de la interacción entre el elemento disipador de energía y el elemento almacenador de energía, descrito por la constante temporal  $\tau$ . En la Figura 3.3, se muestra cómo cambia el ritmo de carga según diferentes valores de  $\tau$ , donde para valores pequeños de  $\tau$  el ritmo de carga es acelerado mientras que para valores de  $\tau$  grandes el tiempo de carga se hace más prolongado.

### 3.2 RESPUESTA EN FRECUENCIA FILTRO PASA BAJOS RC.

En el dominio de la frecuencia se analiza como es el comportamiento en el espectro y se evalúa la magnitud y fase a través de gráficas de bode, así se comprende el comportamiento del circuito como un filtro selector de frecuencias. En estos análisis se toma como fuente generadores de frecuencia de forma seno en todo el espectro de análisis.

Para describir bien el comportamiento del filtro se sugiere determinar la función de transferencia y hacer la gráfica de bode. Para determinar la función del sistema se hace un divisor de voltaje determinando la relación voltaje de salida sobre el voltaje de entrada en función de la frecuencia y los elementos del circuito.





**Figura 3.4** Se analiza el circuito RC en función de la frecuencia.

El divisor de voltaje en un circuito serie consiste en determinar el voltaje en cualquier elemento a partir de todos los elementos que intervienen en el circuito. Para este caso teniendo el circuito de la Figura 3.4, Se multiplica el voltaje de entrada  $v_i$  con el elemento al cual se desea conocer el voltaje, el mismo elemento donde está el voltaje de salida que en este caso es el condensador (se multiplica la reactancia capacitiva  $1/SC$ ), luego se le divide a ese producto la impedancia del circuito o impedancia equivalente de todo el circuito que para este caso es la suma de la resistencia y la reactancia capacitiva que están en serie, teniendo así,

$$v_c(S) = v_o(S) = \frac{v_i(S) \cdot \frac{1}{SC}}{R + \frac{1}{SC}} \quad (3.8)$$

Ahora se pasa a dividir el voltaje de entrada al lado izquierdo de la ecuación ( 3.8) y se multiplica por  $(S/R)$  en el numerador y el denominador del lado derecho.

$$\frac{v_o(S)}{v_i(S)} = \frac{\frac{1}{SC} \left(\frac{S}{R}\right)}{\left(R + \frac{1}{SC}\right) \left(\frac{S}{R}\right)} = \frac{\frac{1}{RC}}{S + \frac{1}{RC}} \quad (3.9)$$

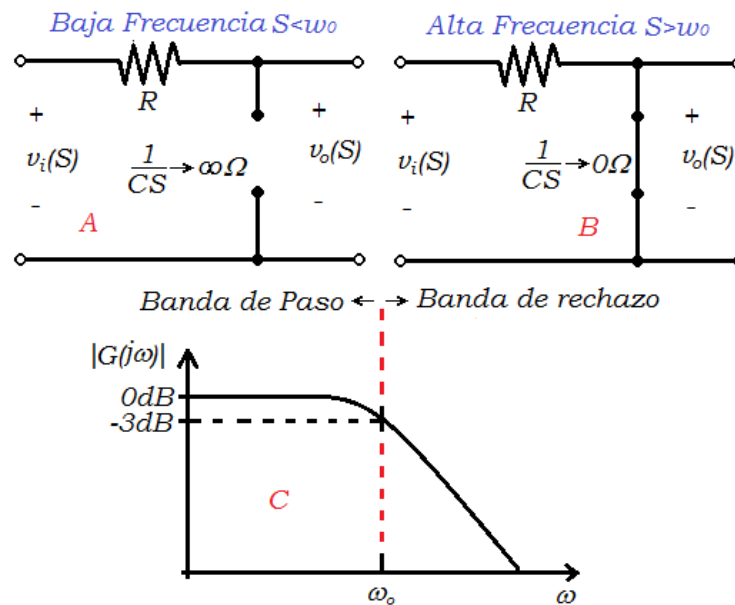
El cociente  $1/RC$  que resulta en la ecuación ( 3.9), será llamado frecuencia crítica, que representa el límite entre la banda de frecuencias de paso y la banda de frecuencias de rechazo que tendrá el filtro. Esta frecuencia será representada por omega sub cero  $[\omega_0]$ . En esta frecuencia el voltaje en cada elemento será el mismo, pero están desfasados  $90^\circ$  entre sí, y el voltaje de la salida es  $1/\sqrt{2}$  veces menor que en la entrada y están desfasados  $45^\circ$  en la frecuencia crítica.

$$\omega_0 = \frac{1}{RC} = 2\pi f_0 \quad (3.10)$$

La ecuación ( 3.10), muestra que la frecuencia crítica está dada en radianes/segundo y establece la relación para determinar la frecuencia lineal en Hertz. También muestra la dependencia que tiene esta frecuencia crítica con los elementos del circuito. La función de transferencia para este filtro de primer orden queda entonces:

$$G_{LP}(S) = \frac{v_o(S)}{v_i(S)} = \frac{\omega_0}{S + \omega_0} \quad (3.11)$$

Quedando entonces la ecuación ( 3.11), como la función de transferencia del filtro RC de primer orden donde la frecuencia crítica  $\omega_0$  ya descrita, también representa los elementos del circuito y S que es  $j\omega$  la frecuencia compleja sería la frecuencia de operación del sistema o la frecuencia de análisis del circuito, dicho de otra manera el espectro de audio que se va a filtrar.



**Figura 3.5** Muestra el comportamiento del circuito en función de la frecuencia. En la parte A, se observa el circuito equivalente en baja frecuencia, mientras que la parte B, muestra el comportamiento de alta frecuencia. En la parte C, el resultado de la función de transferencia en varias frecuencias, donde se evidencia el límite entre la banda de paso y la banda de rechazo en la frecuencia crítica  $\omega_0$ .

En la Figura 3.5. Se muestra de manera analítica el comportamiento del circuito RC en el dominio de la frecuencia llevando el circuito a extremos de alta y baja frecuencia, entendiéndose que cuando se refiere a baja frecuencia se refiere a frecuencias que son

inferiores a  $\omega_0$  y alta frecuencia quiere decir que el circuito opera con frecuencias superiores a  $\omega_0$ .

En un circuito serie como el de la Figura 3.4 el voltaje de la entrada se distribuye en los elementos del circuito según la cantidad de Ohmios que tenga cada uno, a partir de la ley de Ohm, luego se observa que en baja frecuencia donde las frecuencias de operación son inferiores a  $\omega_0$  la reactancia capacitiva tiende a ser elevarse y en el circuito el capacitor se empieza a comportar como un circuito abierto donde los Ohmios tienden a superar el valor de R, esto hace que la mayoría del voltaje de entrada se transfiera a la salida donde está el capacitor, determinando la banda de paso, pues en esta zona de frecuencia el voltaje de salida tiende a ser igual al voltaje de entrada con ganancia de 0dB.

Por el contrario si analizamos el circuito en alta frecuencia la reactancia capacitiva empieza a disminuir pues la frecuencia es alta, esto hace que la cantidad de ohmios que tiene la resistencia empiezan a ser superior que los ohmios en el capacitor, y la reactancia capacitiva tiende a cero, lo que hace que la mayor cantidad de voltaje de entrada se queda en la resistencia, que de alguna manera retiene el voltaje y no permite que se transfiera a la salida donde en el capacitor sólo habrá un pequeño porcentaje del voltaje de entrada.

En conclusión el cambio de frecuencia hace que cambie la reactancia capacitiva y el cambio de Ohmios en el condensador causa que cambie el voltaje en éste, que es donde está ubicada la salida. Este cambio de voltaje en función de la frecuencia, es lo que permite tener cierto control del espectro a partir de los componentes eléctricos del circuito.

Después de ver un análisis del circuito ahora lo comprobamos matemáticamente, para esto se debe tener en cuenta que se tiene un número complejo en la función de transferencia el cual tendrá su parte real e imaginaria. Para evaluar la respuesta en frecuencia o gráfica de bode, se evalúa la magnitud que quiere decir que se mide la distancia del vector que conforma el número complejo y para esto se eleva al cuadrado la parte real y la imaginaria, se suman y se le calcula la raíz cuadrada a dicha suma de cuadrados. De esta manera se puede conocer la magnitud en función de la frecuencia de la señal de entrada. A su vez se puede estimar el ángulo de desfase entre la entrada y la salida en función de la frecuencia.

Para hacer más sencillo y universal el estudio en la frecuencia, se normaliza la frecuencia lo que quiere decir que se hace la frecuencia crítica en radianes por segundo igual a uno, teniendo así, la ecuación ( 3.12):

$$\omega_0 = 1 \quad (3.12)$$

Reemplazando la ecuación ( 3.12) en ( 3.11), se obtiene,

$$G_{LP}(S) = \frac{1}{S + 1} \quad (3.13)$$

Así se tiene la función de transferencia normalizada en la ecuación ( 3.13), ahora la magnitud en dB:

$$G_{dB}(j\omega) = 20\text{Log}_{10}\left(\frac{1}{j\omega + 1}\right) \quad (3.14)$$

Para facilitar los cálculos de magnitud en la ecuación ( 3.14), se aplican propiedades de los logaritmos para obtener,

$$G_{dB}(j\omega) = 20\text{Log}_{10}(1) - 20\text{Log}_{10}(j\omega + 1) \quad (3.15)$$

El logaritmo en base 10 de 1 es cero luego el término se elimina,

$$G_{dB}(j\omega) = -20\text{Log}_{10}(j\omega + 1) \quad (3.16)$$

Ahora, a partir de la ecuación ( 3.16), se evalúa la magnitud en el número complejo.

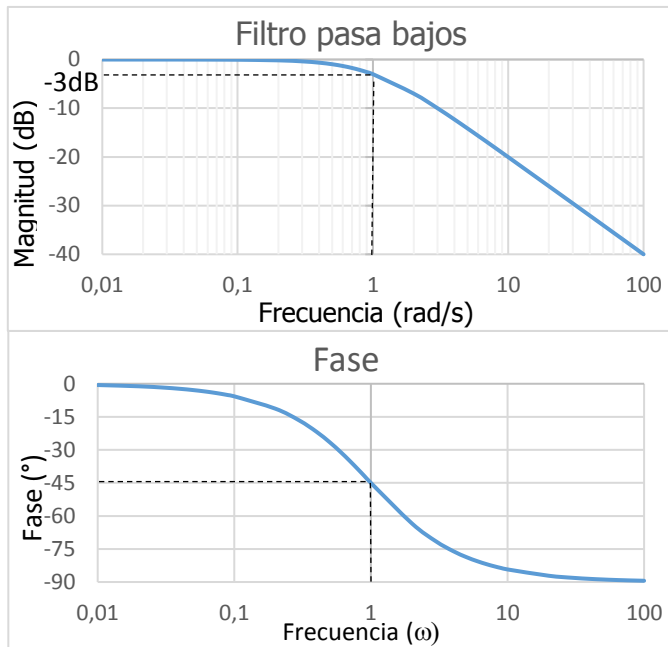
$$|G_{dB}(j\omega)| = -20\text{Log}_{10}\left(\sqrt{1^2 - \omega^2}\right) \quad (3.17)$$

Con la ecuación ( 3.17), se puede estimar la magnitud en decibels para cualquier valor de frecuencia, para determinar el ángulo de corrimiento se usa la ecuación ( 3.18):

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-\omega}{1}\right) \quad (3.18)$$

Se tabulan resultados para diferentes valores de frecuencia y así evaluar la magnitud y el ángulo en función de la frecuencia.

$\omega$	$dB$	$\theta$
0,01	0	0,6
0,1	0	5,7
1	-3	45,0
10	-20	84,3
20	-26	87,1
100	-40	89,4



**Figura 3.6** En la parte izquierda se da la tabulación de la magnitud y la fase en función de la frecuencia a partir de las ecuaciones ( 3.17) y ( 3.18). En la parte derecha se observa la de manera gráfica la tabulación en un espacio semi logarítmico,

En la Figura 3.6, se observa que el comportamiento del filtro a cada lado de la frecuencia crítica  $\omega_0$ , es diferente y cambia tanto la magnitud como la fase, esto permite tener un control sobre el espacio de la frecuencia haciendo uso de los elementos del circuito R y C, que definen la frecuencia crítica del sistema. En la zona de la pendiente donde se ve lineal se puede determinar la razón de decaimiento al incremento de frecuencia, se puede ver en la Figura 3.6, que un cambio de  $\omega$  entre 10 y 20 decae 6dB, de aquí se concluye que el decaimiento de la magnitud progresa en frecuencias superiores a la frecuencia crítica en un ritmo de -6dB cada vez que se duplica la frecuencia lo que se denomina octava, siendo la pendiente -6dB/oct.

Así mismo otra notación para la pendiente consiste en observar el ritmo no cada vez que se duplica la frecuencia (octava) sino cada vez que aumenta 10 veces la frecuencia que se denomina década, donde según la tabla y la gráfica decae 20dB cuando aumenta  $\omega$  de 10 a 100, de esta manera la pendiente también puede ser dada como un ritmo de -20dB/dec.

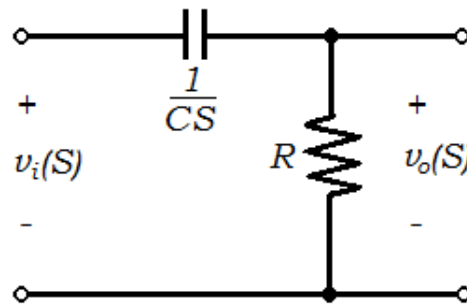
Para el caso del filtro de primer orden en la frecuencia crítica siempre habrá una magnitud de -3dB con respecto a la banda de paso, por lo cual en este tipo de filtro la frecuencia crítica  $\omega_0$ , es la misma frecuencia de corte  $\omega_c$  del sistema donde la magnitud decae 3dB respecto la banda de paso.

Para este circuito RC serie donde la salida del circuito es vista en el condensador el comportamiento del filtro permite el paso de frecuencias bajas y retiene el paso de

frecuencias altas lo que hace que este filtro sea llamado filtro pasa bajos RC serie de primer orden.

### 3.3 RESPUESTA EN FRECUENCIA FILTRO PASA ALTOS RC.

Ahora para hacer un circuito pasa altos simplemente se cambian de ubicación en el circuito los elementos y ahora la salida del sistema es vista en la resistencia como se observa en la Figura 3.7.



**Figura 3.7** Circuito RC serie con la salida en el resistor, que de forma inversa al caso anterior se tiene un filtro pasa altos.

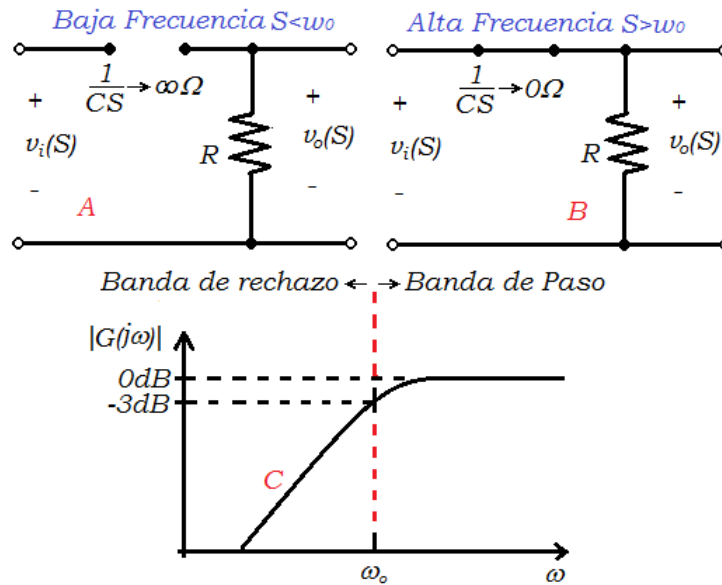
El comportamiento del filtro es bastante similar, su diferencia es que la banda de paso y la banda de rechazo cambian de lugar respecto a la frecuencia crítica, es decir que la banda de paso ya no son las frecuencias inferiores a la frecuencia crítica sino que la banda de paso serán las frecuencias superiores a la frecuencia crítica, de ahí que cambie el nombre de pasa bajos a pasa altos.

De manera analítica también se puede entender el comportamiento del filtro como se ve en la Figura 3.8, donde entre más baja sea la frecuencia de entrada respecto la frecuencia crítica, el capacitor tiende a circuito abierto y tiene más cantidad de ohmios que la Resistencia, lo que hace que la mayor cantidad de voltaje de entrada quede retenido en el capacitor, impidiendo la transferencia de voltaje a la salida donde está el Resistor, es por eso que esta zona es llamada banda de rechazo.

Por el contrario cuando la entrada tiene señales con frecuencias superiores a la frecuencia crítica, el capacitor tiende a un corto circuito con pocos ohmios comparado con la resistencia lo que permite que la mayor cantidad de voltaje de entrada se transfiera a la salida donde está el Resistor, por lo cual esta zona es llamada banda de paso.

Haciendo el divisor de voltaje se tiene que,

$$v_R(S) = v_o(S) = \frac{v_i(S) \cdot R}{R + \frac{1}{sC}} \quad (3.19)$$



**Figura 3.8** El comportamiento del circuito según la frecuencia, en la parte A, se tiene el circuito equivalente en baja frecuencia, la parte B, muestra el circuito equivalente en alta frecuencia, y la parte C, de manera gráfica el comportamiento de la magnitud en frecuencias inferiores y superiores a  $\omega_0$ .

Ahora se divide el voltaje de entrada al lado izquierdo de la ecuación ( 3.19), y se multiplica el numerador y el denominador por  $S/R$ ,

$$\frac{v_o(S)}{v_i(S)} = \frac{R \left(\frac{S}{R}\right)}{\left(R + \frac{1}{SC}\right) \left(\frac{S}{R}\right)} = \frac{S}{S + \frac{1}{RC}} \quad (3.20)$$

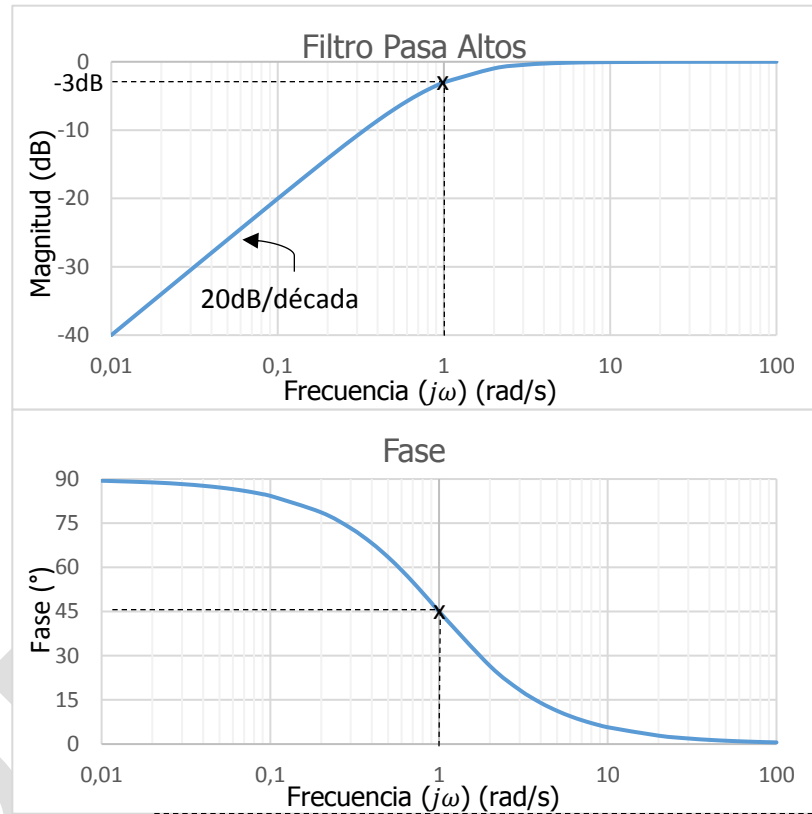
En la ecuación ( 3.20), aparece la misma frecuencia crítica que en el caso pasa bajos, en la ecuación ( 3.9), pero cambia el numerador,

$$\omega_0 = \frac{1}{RC} \quad (3.21)$$

Igual al caso anterior aparece el término correspondiente a la frecuencia crítica, relación que se da en la ecuación ( 3.21), quedando la función de transferencia,

$$G_{HP}(S) = \frac{v_o(S)}{v_i(S)} = \frac{S}{S + \omega_0} \quad (3.22)$$

$j\omega$	$ G_{dB}(j\omega) $	$\theta$
0,01	-40	89,4
0,05	-26	87,1
0,1	-20	84,3
<b>1</b>	<b>-3</b>	<b>45,0</b>
10	0	5,7
100	0	0,6



**Figura 3.9** En la parte izquierda se tiene la tabulación de la ecuación ( 3.24) y ( 3.25), para varios valores de frecuencia. En la parte derecha se da en forma gráfica la tabulación donde se puede analizar el comportamiento del filtro, con frecuencia crítica  $\omega_0 = 1$

Para evaluar la magnitud, se evalúa el modulo  $|G_{dB}(j\omega)|$  y el argumento  $\theta$ , de la función de transferencia que se tiene en la ecuación ( 3.22),

$$|G_{dB}(j\omega)| = 20\text{Log}_{10}|j\omega| - 20\text{Log}_{10}|j\omega + \omega_0| \quad (3.23)$$

Con ayuda de propiedades de los logaritmos se obtiene la ecuación ( 3.23), para obtener la ecuación ( 3.24), con la que es fácil obtener una respuesta en frecuencia del filtro, reemplazando sus valores.



$$|G_{dB}(j\omega)| = 20\text{Log}_{10}(-\omega) - 20\text{Log}_{10}\left(\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}\right) \quad (3.24)$$

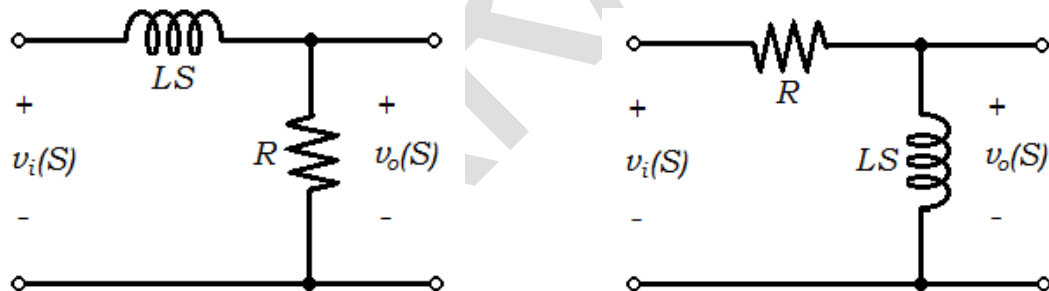
y la fase se puede calcular con la siguiente ecuación,

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right) \quad (3.25)$$

El ángulo se calcula con la ecuación ( 3.25), que muestra el argumento de la función de transferencia para un filtro pasa altos de primer orden.

Se observa para éste pasa altos en la frecuencia crítica la magnitud y fase son iguales respecto al pasa bajos, cambia el comportamiento a los lados de la frecuencia crítica y la pendiente tiene la misma razón que el pasa bajos sino que es creciente y no decreciente. Luego la pendiente está dada como; 20dB/dec o 6dB/oct.

### 3.4 RESPUESTA EN FRECUENCIA FILTROS PASA ALTOS Y PASA BAJOS RL.



**Figura 3.10** Se tienen dos circuitos conformados por Resistencia y Bobina, pero cambian el lugar donde están en el circuito, en el lado izquierdo se tiene un pasa bajos con salida en el resistor. En el lado derecho se tiene un pasa altos con salida en el inductor.

El comportamiento del circuito RL es bastante similar al RC, lo único que cambia además de usar un elemento reactivo diferente, es que cuando se tenía un circuito RC pasa bajos era aquel en el que la salida estaba en el condensador, en este caso un RL pasa bajos se tiene la salida en el resistor, como se ve en el lado izquierdo de la Figura 3.10. De forma recíproca, el circuito RC pasa altos era en el que la salida estaba sobre el resistor, ahora un circuito RL pasa altos tendrá la salida en el inductor como se ve en la parte derecha de la Figura 3.10.

Este cambio de tipo de filtro al cambiar el elemento reactivo se da porque la reactancia inductiva  $X_L = j\omega L$  a diferencia de la inductancia capacitiva  $X_C = 1/j\omega C$  es proporcional a la frecuencia, mientras que la reactancia capacitiva es inversamente proporcional a la frecuencia.

Las demás características del filtro son similares, las pendientes que se dan en la banda de rechazo son las mismas sino que una es ascendente (pasa altos) y la otra es descendente (pasa bajos), la frecuencia crítica sigue siendo el límite entre la banda de paso y la banda de rechazo, la frecuencia crítica tiene una magnitud de -3dB por lo cual es la misma frecuencia de corte, el denominador de la función de transferencia del pasa altos y el pasa bajos es igual.

El comportamiento en fase de los filtros también es similar, en el pasa altos va de  $90^\circ$  a  $0^\circ$  y en el pasa bajos de  $0^\circ$  a  $-90^\circ$  cuando se incrementa la frecuencia, pero en ambos casos la fase tiende a  $0^\circ$  en la banda de paso, tiene un valor de  $45^\circ$  en la frecuencia crítica y tiende a desplazarse  $90^\circ$  en la banda de rechazo. Con la característica que en el pasa bajos, en la banda de rechazo, la fase de salida se adelanta a la señal de entrada por eso el signo menos. Y en el caso pasa altos, en la banda de rechazo la señal de salida se retrasa de la señal de entrada.

Algo que diferencia bien ambos tipos de circuito RC y RL, es la dependencia de la frecuencia crítica a los elementos del circuito.

La función de transferencia para el pasa bajos RL se plantea a partir del circuito de la izquierda de la Figura 3.10. Donde se hace el divisor de voltaje para el circuito en el dominio de S.

$$v_R(S) = v_o(S) = \frac{v_i(S) \cdot R}{R + LS} \quad (3.26)$$

Se divide el numerador y el denominador por  $1/L$ , y se tiene,

$$G_{LP}(S) = \frac{v_o(S)}{v_i(S)} = \frac{R \left(\frac{1}{L}\right)}{(R + LS) \left(\frac{1}{L}\right)} = \frac{\frac{R}{L}}{S + \frac{R}{L}} \quad (3.27)$$

Se obtiene la función de transferencia en la ecuación (3.27), en función de los elementos del circuito.

$$\omega_0 = \frac{R}{L} \quad (3.28)$$

Se obtiene la frecuencia crítica a partir de los elementos del circuito en la ecuación ( 3.28).

$$G_{LP}(S) = \frac{v_o(S)}{v_i(S)} = \frac{\omega_0}{S + \omega_0} \quad (3.29)$$

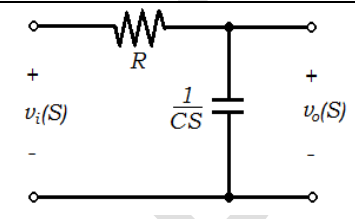
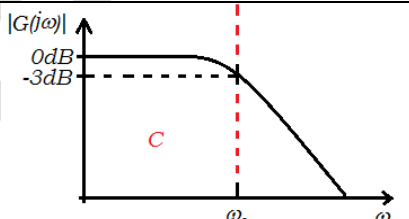
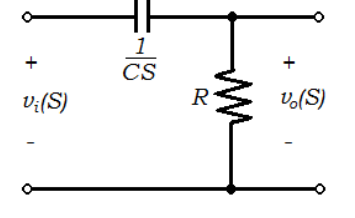
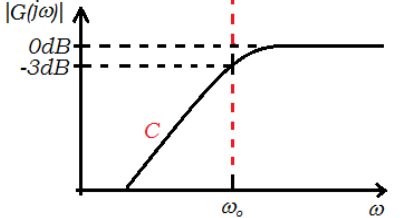
Se obtiene finalmente la función de transferencia de un filtro pasa bajos de primer orden como se muestra en la ecuación ( 3.29).

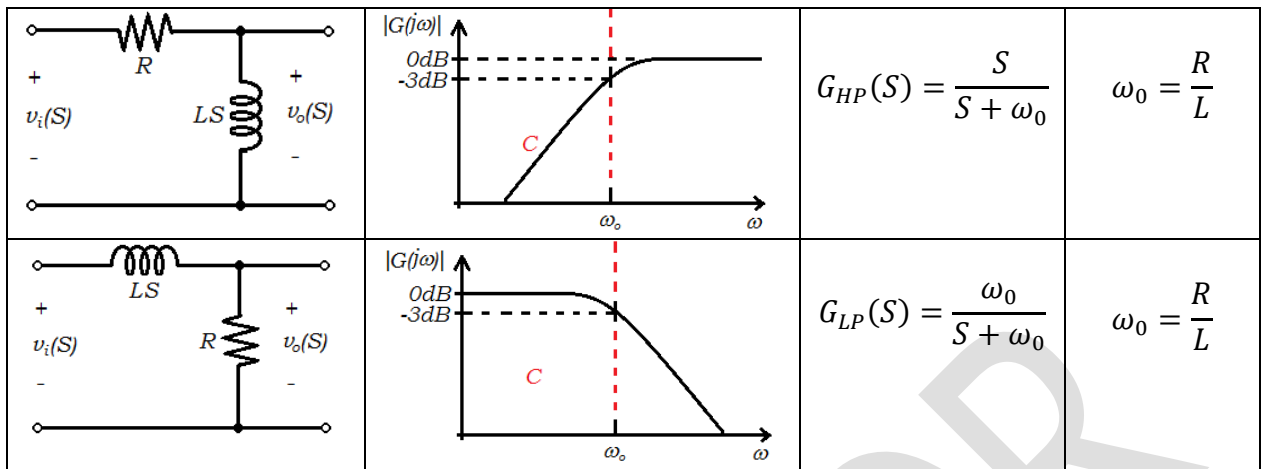
De la misma forma se determina la función de transferencia del circuito RL pasa altos, y su frecuencia crítica, como se observa en la ecuación ( 3.30)

$$G_{HP}(S) = \frac{v_o(S)}{v_i(S)} = \frac{S}{S + \omega_0} = \frac{S}{S + \frac{R}{L}} \quad (3.30)$$

Y la Respuesta en frecuencia de cada filtro pasa bajos y pasa altos es el mismo que se muestra en los filtros RC.

En resumen ahora re presenta una tabla de resumen para filtros de primer orden.

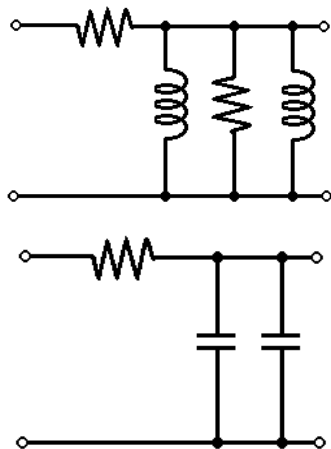
Circuito	Respuesta en frecuencia	Función de transferencia	Frecuencia crítica
		$G_{LP}(S) = \frac{\omega_0}{S + \omega_0}$	$\omega_0 = \frac{1}{RC}$
		$G_{HP}(S) = \frac{S}{S + \omega_0}$	$\omega_0 = \frac{1}{RC}$



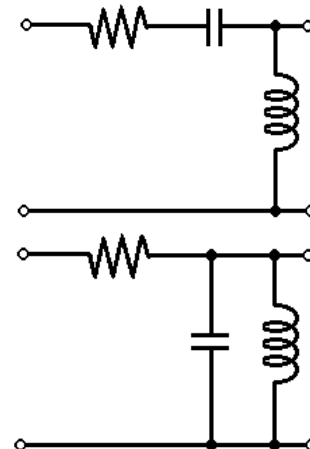
## 4 FILTROS DE SEGUNDO ORDEN

Los sistemas de segundo orden se denominan así por la característica de tener dos elementos almacenadores de energía, y debido a sus dos reactancias que tendrán cierto comportamiento en el dominio de la frecuencia que hace interesante su estudio, además que varios sistemas dinámicos que se encuentran en la vida cotidiana son de segundo orden por ejemplo: la cuerda de una guitarra, un altavoz en baja frecuencia, los filtros de un ecualizador, las cajas acústicas, un resonador acústico, filtros crossover, cualquier sistema masa-resorte, circuitos RLC, micrófonos incluidos los de guitarra eléctrica, los parches de batería, en fin, varios sistemas usados en los sistemas de sonido son de segundo orden.

Sistemas de primer orden



Sistemas de segundo orden



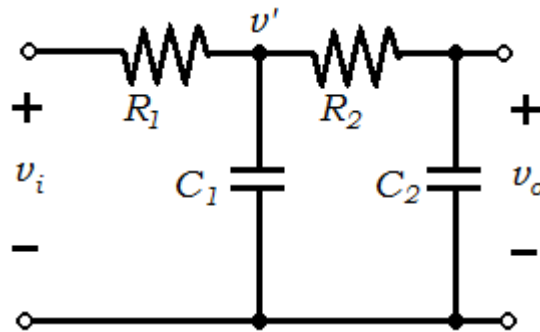


**Figura 4.1** Se comparan circuitos de sistemas de primer y segundo orden con varios elementos reactivos, es importante analizar el circuito y procurar reducir los elementos del mismo tipo siempre que se pueda, para esto se sugiere analizar la conexión de los elementos del circuito.

El estudio de estos sistemas de segundo orden se realiza a partir de circuitos eléctricos, pues gracias a la similitud entre los sistemas dinámicos de segundo orden un circuito mecánico o acústico se puede estudiar a partir de modelar el fenómeno físico como un circuito eléctrico, esto gracias a que los modelos matemáticos que describen la dinámica de cada dominio eléctrico, mecánico y acústico se hace con ecuaciones diferenciales de segundo orden y lo que haría diferente cada dominio serían los coeficientes de la función de transferencia pero la interacción entre los dos elementos reactivos, el resistivo y las fuentes de energía, es similar.

En el circuito eléctrico hay que tener en cuenta que pueden haber circuitos que tengan dos elementos reactivos pero el sistema es de primer orden, luego hay que tener en cuenta la conectividad entre los elementos reactivos para evitar caer en el error de modelar mal el sistema. La forma de saber si el circuito es de primer o segundo orden es simple, lo primero que hay que hacer es mirar si los dos elementos reactivos son diferentes (capacitor e inductor) no importa como estén conectados siempre será un sistema de segundo orden, pero cuando los dos elementos reactivos son iguales (capacitor y capacitor o inductor e inductor) si es importante mirar la conexión, entonces, si los dos elementos reactivos son del mismo tipo y están conectados en serie o paralelo entre ellos mismos se pueden reducir como un solo elemento evaluando matemáticamente la reducción según la conexión y es en estos casos cuando el sistema que tiene dos elementos reactivos es un sistema de primer orden. En la Figura 4.1, se muestra un cuadro comparativo entre circuitos de primer y segundo orden pero todos los casos poseen dos elementos reactivos.

#### **4.1 CIRCUITOS DE SEGUNDO ORDEN CON DOS ETAPAS RC DE PRIMER ORDEN PASA BAJOS.**



**Figura 4.2** Filtro pasa bajos de segundo orden, se tienen dos etapas pasa bajos de primer orden y están conectados en cascada, es decir, la salida de la primera etapa se conecta con la entrada de la segunda etapa como se observa en el circuito.

Este circuito de la Figura 4.2, se puede ver como dos filtros RC de primer orden y están conectados en serie o cascada lo que permite modelar matemáticamente a partir de multiplicar la función de transferencia de cada circuito RC. Se puede ver como una transferencia de  $v_i$  a  $v'$  y otra transferencia de  $v'$  a  $v_o$ .

Entonces tenemos en la ecuación ( 4.1), la multiplicación de las dos funciones correspondientes a cada etapa, donde la primera etapa está representada por  $G_{LP1}(S)$ , y la segunda etapa por  $G_{LP1}'(S)$ :

$$G_{LP1}(S) \cdot G_{LP1}'(S) = G_{LP2}(S) \quad (4.1)$$

Cada función está representada como una relación de salida sobre entrada como se ve en la ecuación ( 4.2),

$$\frac{v'}{v_i} \cdot \frac{v_o}{v'} = \frac{v_o}{v_i} \quad (4.2)$$

Se tiene la primera etapa descrita por la función de transferencia que aparece en la ecuación ( 4.3),

$$G_{LP1}(S) = \frac{v'}{v_i} = \frac{\omega_{01}}{S + \omega_{01}} \quad (4.3)$$

La función pasa bajos de primer orden de la primera etapa, tiene definida su frecuencia crítica como  $\omega_{01}$ , a partir de los elementos de la primera etapa,  $R_1$  y  $C_1$ , como se da en la ecuación ( 4.4),

$$\omega_{01} = \frac{1}{R_1 C_1} \quad (4.4)$$

Ahora se tiene la función de transferencia de la segunda etapa pasa bajos de primer orden, como se ve en la ecuación ( 4.5),

$$G_{LP1}'(S) = \frac{v_o}{v'} = \frac{\omega_{02}}{S + \omega_{02}} \quad (4.5)$$

Para esta segunda etapa se tiene ahora como frecuencia crítica  $\omega_{02}$ , que depende de los elementos,  $R_2$  y  $C_2$ , como se muestra en la ecuación ( 4.6)

$$\omega_{02} = \frac{1}{R_2 C_2} \quad (4.6)$$

Para analizar este circuito tendríamos dos posibles casos uno en el cual la frecuencia crítica de cada filtro es igual y otro caso en el cual la frecuencia crítica de cada filtro es diferente.

Entonces tendríamos dos posibles funciones de transferencia según el caso.

**Caso 1,** cuando las frecuencias críticas son diferentes

Este es un caso en el cual se tendrán dos frecuencias diferentes como se define en la ecuación ( 4.7), el resultado de la respuesta en frecuencia experimenta dos pendientes dependiendo de las frecuencias críticas como se muestra en la Figura 4.3.

$$\omega_{01} \neq \omega_{02} \quad (4.7)$$

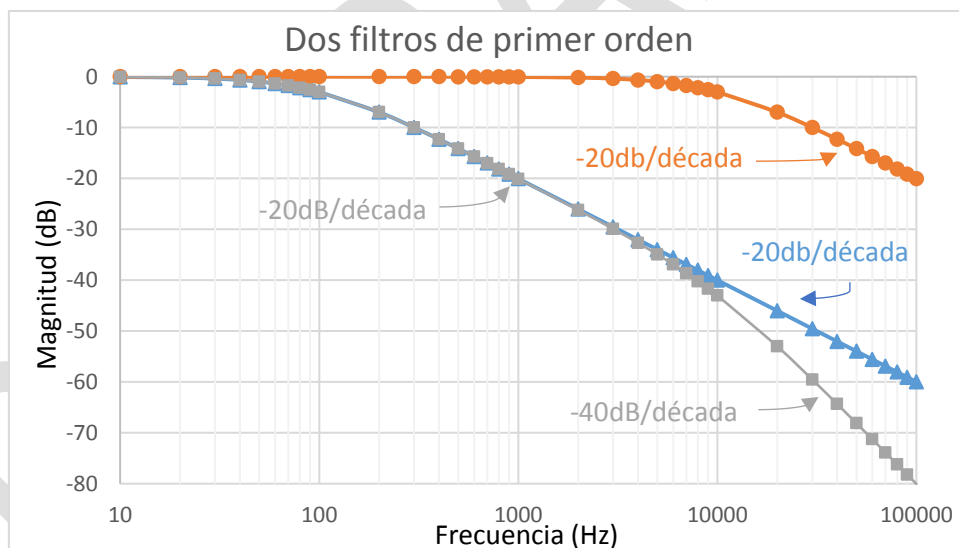
Se multiplican las funciones de transferencia de primer orden manteniendo las frecuencias críticas diferentes, como se da en la ecuación ( 4.8),

$$G_{LP2}(S) = \frac{\omega_{01}}{S + \omega_{01}} \cdot \frac{\omega_{02}}{S + \omega_{02}} \quad (4.8)$$

Se obtiene la función de transferencia de segundo orden, ecuación ( 4.9), en función de las frecuencias críticas de cada etapa de primer orden.

$$G_{LP2}(S) = \frac{\omega_{01}\omega_{02}}{S^2 + (\omega_{01} + \omega_{02})S + \omega_{01}\omega_{02}} \quad (4.9)$$

En la Figura 4.3, se evidencia el efecto de tener dos filtros pasa bajos de primer orden con diferentes frecuencias críticas. Observar como el trazado gris resultado de los dos filtros, tiene la misma magnitud desde los 10Hz hasta antes de los 100Hz donde los filtros no afectan esta zona de frecuencia, luego toma la misma pendiente del primer filtro a partir de la frecuencia crítica de 100 Hz, y como la pendiente del filtro de primer orden es de -20dB/década, hasta que se encuentra con la otra frecuencia crítica de 10kHz, y se presenta un cambio de inclinación con una pendiente más pronunciada, en la frecuencia de 100kHz la magnitud es de -80dB, se da una pendiente de -40dB/década, después de la segunda frecuencia crítica.



**Figura 4.3** Muestra el resultado de dos filtros de primer orden con diferentes frecuencias críticas. La curva naranja con marcas circulares muestra un filtro pasa bajos de primer orden con frecuencia crítica de 10kHz. La curva azul con marcas triangulares muestra un filtro pasa bajos de primer orden con frecuencia crítica de 100Hz. La curva gris con marcas cuadradas, muestra el resultado de conectar en serie los dos filtros de primer orden.

Es un filtro que será de primer orden en una región de frecuencia y de segundo orden en otra región de frecuencia, dichas regiones serán definidas por la frecuencias críticas de cada filtro.



**Caso 2**, cuando las frecuencias críticas son iguales.

Las frecuencias críticas respectivas de cada etapa son,  $\omega_{01}$  y  $\omega_{02}$ , en este caso ambas frecuencias tendrán el mismo valor, por eso se igualan y se usa únicamente  $\omega_0$ , como se expresa en la ecuación ( 4.10),

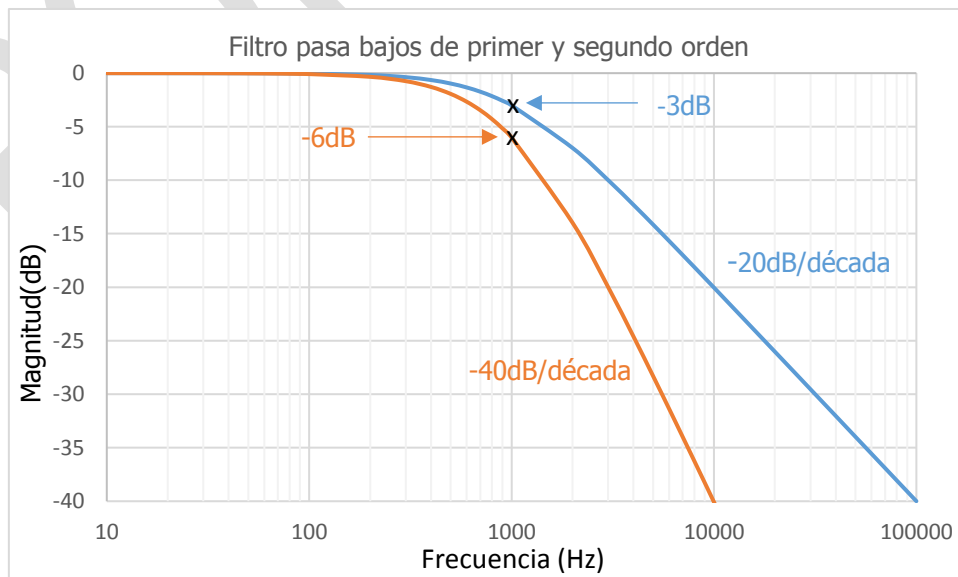
$$\omega_{01} = \omega_{02} = \omega_0 \quad (4.10)$$

Se multiplican las dos funciones de primer orden respectivas de cada etapa, ecuación ( 4.11), y así se obtiene la función de segundo orden que describe el filtro cuando está conformado por dos filtros de primer orden conectados en cascada.

$$G_t(S) = \frac{\omega_0}{S + \omega_0} \cdot \frac{\omega_0}{S + \omega_0} \quad (4.11)$$

Una vez resuelto, se obtiene la ecuación ( 4.12), que muestra la función de transferencia de segundo orden, a partir de dos etapas de primer orden con la misma frecuencia crítica.

$$G_t(S) = \frac{\omega_0^2}{S^2 + 2\omega_0 S + \omega_0^2} \quad (4.12)$$

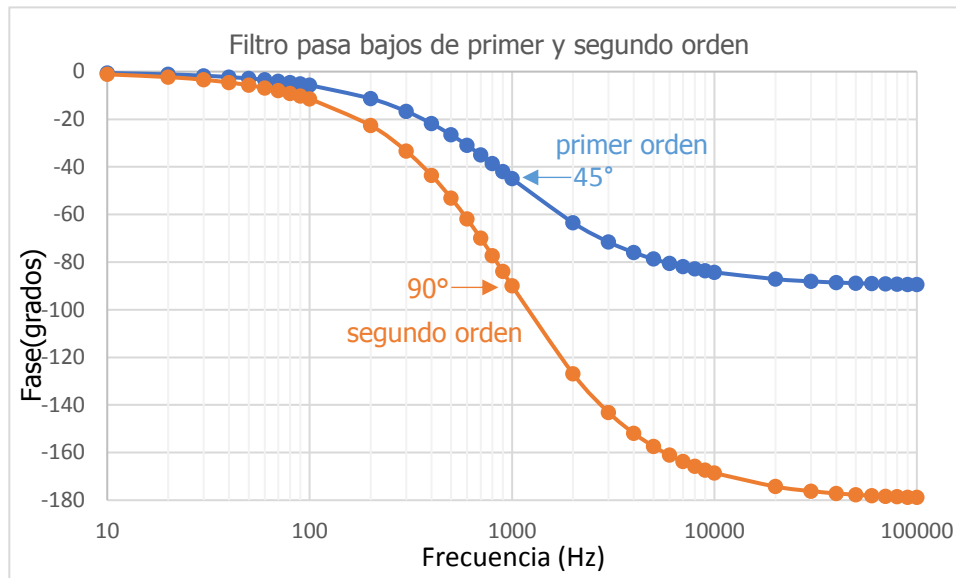


**Figura 4.4** Se muestra la respuesta en frecuencia de dos filtros pasa bajos con frecuencia crítica en 1000Hz; uno de primer orden en color azul, con una pendiente de -20dB cada década y con una magnitud de -3dB en la frecuencia crítica. También se muestra otro filtro de segundo orden a partir de dos etapas de primer orden en color naranja, donde se muestra una pendiente de -40dB por década y una magnitud de -6dB en la frecuencia crítica.

Los dos casos muestran funciones de transferencia de segundo orden y una manera rápida de reconocer un sistema de segundo orden es observar el denominador de la función de transferencia que suele ser una función de segundo grado también llamada función cuadrática.

*Nota: Sin embargo, tanto el caso 1 como el 2, tienen problemas prácticos, pues la función de transferencia como la hemos estudiado no contempla efectos de acoples de impedancias entre las etapas, tampoco contempla impedancia de la fuente y de la carga, y según el tipo de acople si se quiere transferir voltaje o potencia cambiarían los parámetros de diseño lo que hace tedioso su diseño e implementación, por otro lado en los sistemas de potencia como altavoces, no conviene tener resistores aparte de la carga, pues disipan energía en forma térmica y generan pérdidas de potencia que la carga no adquiere, dando como resultado pérdidas de nivel de presión sonora. Por esta razón se sugiere de manera pasiva hacer filtros con capacitores e inductores y así evitar los resistores, o hacer el filtrado de manera activa con amplificadores operacionales en etapas previas a la amplificación de potencia.*

En la Figura 4.4, se muestra una comparación entre la respuesta en frecuencia entre un filtro de primer orden y uno de segundo orden, ambos filtros con la misma frecuencia crítica. El filtro de segundo orden se hace más selectivo respecto al filtro de primer orden, hace un filtrado que afecta la banda de rechazo eliminando más componentes de alta frecuencia, permitiendo mejor selección de frecuencias en la banda de paso. También el cambio de magnitud en la frecuencia crítica hace que la frecuencia de corte sea menor que la frecuencia crítica.



**Figura 4.5** Se muestra la respuesta en frecuencia de dos filtros pasa bajos con frecuencia crítica en 1000Hz, analizando la fase; uno de primer orden en color azul, con una fase que tiende a  $0^\circ$  para la banda de paso y se rota  $90^\circ$  en la banda de rechazo con  $45^\circ$  para la frecuencia crítica. También se muestra otro filtro de segundo orden a partir de dos etapas de primer orden en color naranja, donde se muestra una fase que rota el doble de grados respecto al primer orden, pues tiende a rotar  $180^\circ$  en la banda de rechazo, con  $90^\circ$  para la frecuencia crítica.

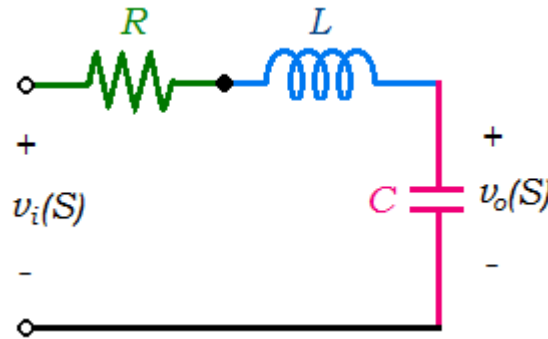
Observar la Figura 4.5, el comportamiento de la fase en función de la frecuencia entre un filtro de primer orden y uno de segundo orden, y así como en función de la frecuencia se afectaban las pendientes y los valores de magnitud en la frecuencia crítica, en la fase también ocurren cambios importantes. La fase pasa de rotar un máximo de  $90^\circ$  para primer orden a  $180^\circ$  en segundo orden. El valor de fase en la frecuencia crítica también se duplica. Por otro lado el comportamiento de la fase en función de la frecuencia no es lineal como se puede observar, todas estas características pueden ser usadas a favor de los sistemas de sonido, en ocasiones provocarán problemas y otros casos soluciones, lo importante es comprender el funcionamiento y el comportamiento en magnitud y fase en función de la frecuencia para dar una buena aplicación de los filtros.

## 4.2 FILTRO PASA BAJOS, PASA ALTOS Y PASA BANDA A PARTIR DE UN CIRCUITO SERIE RLC.

A continuación se analizará el circuito serie RLC, y lo que se pretende es plantear la función de transferencia tomando el voltaje de salida en cada elemento, para este propósito se hará el análisis del circuito tres veces; primero se tomará el capacitor como elemento de salida, luego se observa tomando el inductor como elemento de salida y por último la resistencia será el punto de análisis.

### 4.2.1 Filtro Pasa Bajos

En la Figura 4.6. Se muestra un circuito serie con un resistor, un inductor y un capacitor, conectados en serie donde se analiza el circuito tomando el voltaje de salida sobre el capacitor.

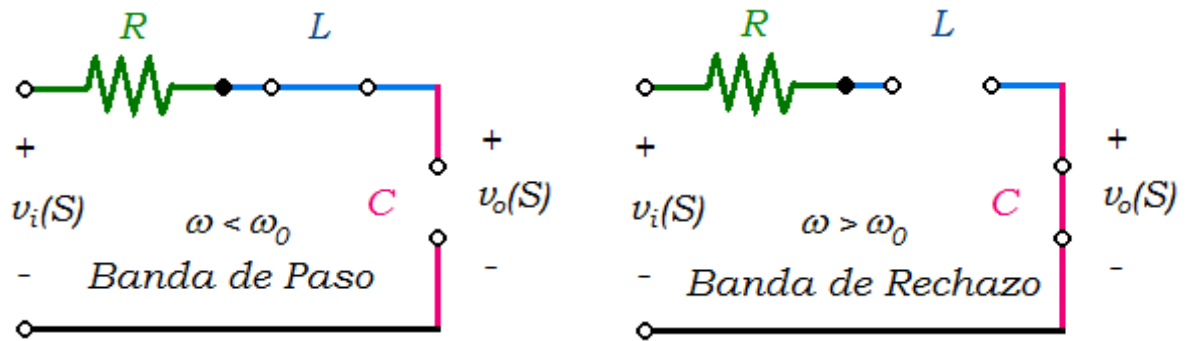


**Figura 4.6** Se tiene un circuito RLC serie, donde se analiza la transferencia tomando como voltaje de salida el que cae en el capacitor, siendo éste el último elemento de la serie.

$$v_o(S) = \frac{v_i(S) \cdot \frac{1}{CS}}{R + LS + \frac{1}{CS}} \quad (4.13)$$

En el lado derecho de la Figura 4.7, se tiene el circuito en alta frecuencia que tendrá efectos contrarios en los elementos reactivos, mientras el inductor adquiere más ohmios de reactancia, el capacitor reduce la cantidad de ohmios de reactancia. Debido a esto el inductor se asemeja a un circuito abierto y el capacitor se comportará como un corto circuito, razón por la cual el voltaje de entrada será retenido por la resistencia y la bobina evitando que sea transferido al condensador, eliminando así, la alta frecuencia en la salida del circuito.

En el lado izquierdo de la Figura 4.7, por el contrario se tiene el circuito en baja frecuencia, situación en la cual, el comportamiento de los elementos reactivos es inverso, luego la bobina será un corto circuito y el condensador será un circuito abierto, donde habrá más carga reactiva permitiendo que la mayor parte del voltaje de entrada al circuito sea transferido a la salida de éste. Por eso se entiende el comportamiento de filtro pasa bajos a este circuito RLC con la salida en el condensador.



**Figura 4.7** En la parte izquierda se tiene el circuito equivalente en baja frecuencia, y en el lado derecho el circuito equivalente en alta frecuencia.

Para determinar la función de transferencia se hace el divisor de voltaje, donde se multiplica el voltaje de entrada a la reactancia del elemento en el cual queremos hallar la caída de voltaje que en este caso se trata del capacitor. Y se divide este producto por la impedancia total del circuito serie, como se observa en la ecuación ( 4.13).

Para dejar el denominador con una función cuadrática organizada de manera que, la variable S de mayor grado a menor grado y la S de mayor grado con coeficiente igual a la unidad. Y el voltaje de entrada pasa a dividir al otro lado de la ecuación.

Se multiplica el término resaltado en azul en la ecuación ( 4.13), para cumplir con lo sugerido anteriormente.

$$\frac{v_o(S)}{v_i(S)} = G(S) = \frac{\frac{1}{CS}}{R + LS + \frac{1}{CS}} \cdot \frac{L}{L} \quad (4.14)$$

A partir de la ecuación ( 4.14), una vez multiplicado el término  $S/L$  y organizando los términos del polinomio del denominador como se ha sugerido anteriormente, se llega a la siguiente expresión,

$$G(S) = \frac{\frac{1}{CL}}{S^2 + \frac{R}{L}S + \frac{1}{CL}} \quad (4.15)$$

Luego se compara la ecuación ( 4.15) con la función de transferencia de un filtro pasa bajos de segundo orden (ecuación ( 4.16)) expresada en función de la frecuencia crítica  $\omega_0$  y lo que se denomina Q. Que se denomina factor de calidad, que tiene que ver con el amortiguamiento que hay en el sistema y afecta de manera importante tanto la respuesta en frecuencia como la respuesta temporal del sistema.

$$G(S)_{LP2} = \frac{\omega_o^2}{S^2 + \frac{\omega_o}{Q}S + \omega_o^2} \quad (4.16)$$

Luego de comparar las ecuaciones ( 4.15) y ( 4.16), se obtienen las siguientes relaciones dadas en las ecuaciones ( 4.17), ( 4.18) y ( 4.19), para determinar las características del filtro en función de los elementos eléctricos del circuito como constantes que afectan la función de transferencia y así afectar la frecuencia crítica y el amortiguamiento del filtro.

$$\omega_o^2 = \frac{1}{CL} \quad (4.17)$$

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{CL}} \quad (4.18)$$

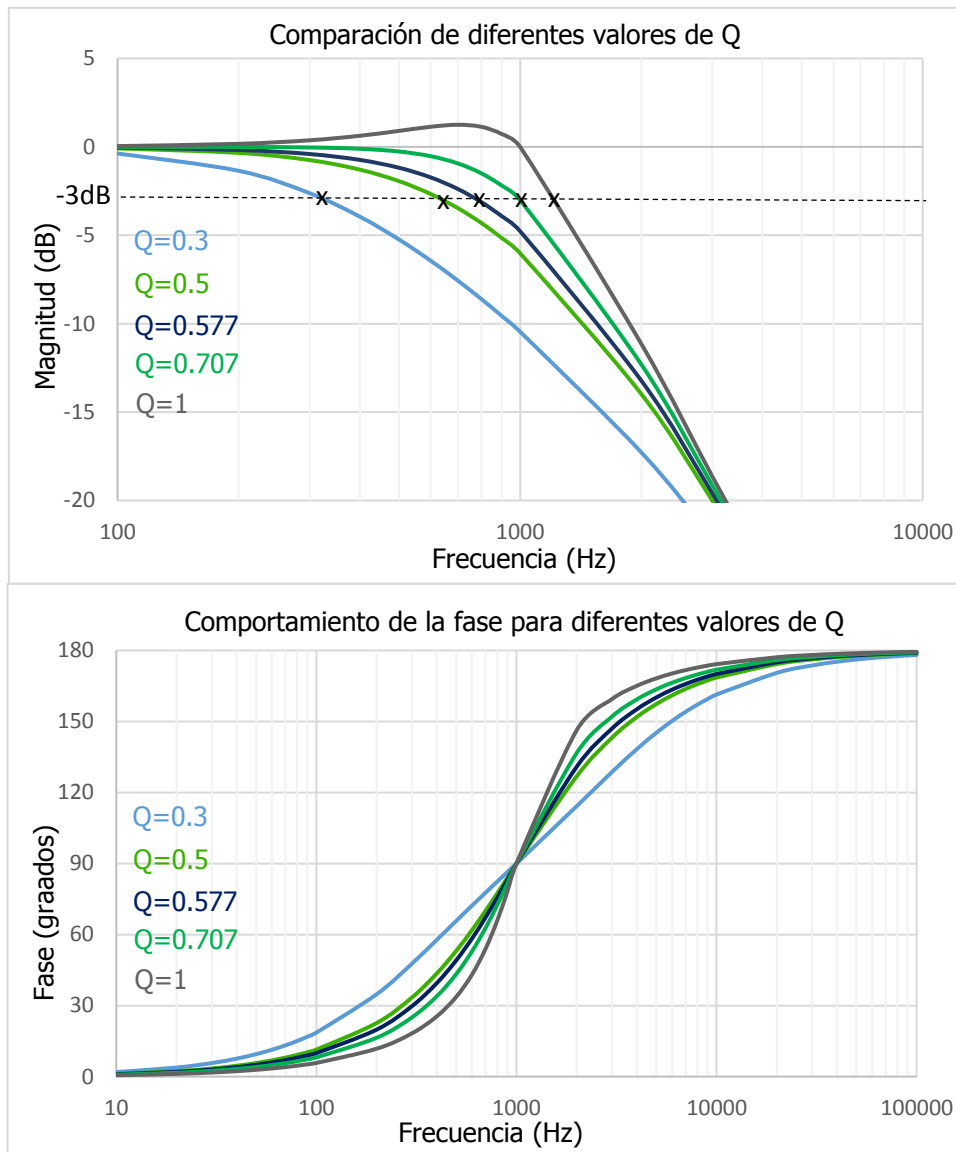
A partir de la ecuación ( 4.17) y ( 4.18), se observa que la frecuencia crítica del sistema  $\omega_o$  depende de los elementos reactivos, **capacitor** y **bobina**, y NO depende de la **resistencia**, Luego esto es un parámetro de diseño de filtros que se debe tener en cuenta, la frecuencia crítica depende de los elementos reactivos.

$$\frac{\omega_o}{Q} = \frac{R}{L} \quad (4.19)$$

Y con la ecuación ( 4.19), se observa que el Q del sistema es dependiente de la **resistencia** de manera inversamente proporcional, luego si se tiene un circuito como el que estamos analizando la frecuencia crítica dependerá de la bobina y el capacitor, y por otro lado el amortiguamiento del sistema dependerá de la resistencia.

#### 4.2.2 Efectos del amortiguamiento (Q) en el filtro pasa bajos de segundo orden RLC.

Frecuencia de corte [ $f_c$ ]. En los sistemas de Audio se definen las frecuencias de corte donde la magnitud decae 3 decibeles con respecto a la banda de paso, ya sea en alta o baja frecuencia. En los filtros de primer orden RC o RL ya sea pasa altos o pasa bajos, la frecuencia crítica  $f_o$  de los filtros coincide con la frecuencia de corte  $f_c$ , como se revisó, ya que existe una atenuación de 3 decibeles en la frecuencia crítica.



**Figura 4.8** Se observa un filtro pasa bajos de segundo orden con una frecuencia crítica  $f_0$  de 1000Hz a partir de un circuito RLC, se muestra el efecto de cambiar el valor de  $Q$  en el mismo filtro variando la resistencia del circuito. En la parte superior se marca el nivel de -3dB donde con la misma frecuencia crítica  $f_0$  pero variando  $Q$ , la frecuencia de corte  $f_c$  se desplaza según el  $Q$ , y en el caso Butterworth  $Q = 0.707$ , coincide la frecuencia crítica con la frecuencia de corte. En la parte inferior se trazan las respectivas curvas de fase para los diferentes valores de  $Q$ .

Ahora en los filtros de segundo orden este patrón cambia dependiendo del  $Q$ , como ya se revisó, la frecuencia crítica  $f_0$  depende de los elementos reactivos capacitor e inductor, y ésta no varía mientras los elementos reactivos tampoco lo hagan.

Cuando varía la resistencia únicamente, así mismo el  $Q$  del filtro varía, de esta forma afecta la zona de transición entre la banda de paso y la banda de rechazo, cerca de la frecuencia crítica que no cambia con las variaciones de la resistencia.

Como se ve en la Figura 4.8 en el cuadro superior, El cambio de Q desplaza la frecuencia de corte  $f_c(-3dB)$  respecto la frecuencia crítica  $f_0$ . Afectando así la respuesta en frecuencia del filtro, donde se tienen varias opciones; se puede optar por un filtro más selectivo, pero con sobretensiones en la banda pasante  $Q = 1$ ; también se tendría un filtro plano en la banda pasante  $Q = 0.707$ , o si se desea un filtro menos selectivo pero con mejor respuesta transitoria y una fase con mejor tendencia lineal  $Q = 0.577$ .

Observar también en la Figura 4.8 en el cuadro inferior, el trazado de la fase en función de la frecuencia, como cambia cuando varía el Q, para la frecuencia crítica  $f_0$  el valor de fase es de  $90^\circ$  que es un valor fijo cuando cambia el valor de Q, lo cual confirma que la frecuencia crítica es la misma y no cambia cuando varía el Q. Se puede observar cómo cambia la transición de fase entre la banda de paso y la banda de rechazo según el Q, donde entre más grande sea su valor menos lineal se comporta la fase en su transición.

Debido a que existen cambios significativos en la respuesta en frecuencia tanto en magnitud como en fase, conforme varía el Q, el estudio de filtros de segundo orden e incluso de órdenes superiores se hace extenso. Por eso para hacer diseño de filtros existen varias propuestas según las aplicaciones, motivo por el cual se explicarán los filtros eléctricos pasivos de segundo orden más utilizados en los ajustes de sistemas de sonido.

Debido a que los cambios de Q varían la frecuencia de corte  $f_c$  en función de la frecuencia crítica  $f_0$ , se establece una ecuación que permite calcular la frecuencia de corte en función de la frecuencia crítica y el Q del filtro. Para esto se toma la función de transferencia, conociendo que una magnitud de -3dB sería un valor de lineal de  $1/\sqrt{2}$ , se iguala la magnitud de la función de transferencia en la frecuencia de corte, de manera que la magnitud sea igual a  $1/\sqrt{2}$ . De la siguiente manera,

A partir de la ecuación ( 4.16), se evalúa la magnitud en  $j2\pi f_c$  y se divide el numerador y el denominador por  $1/(2\pi f_0)^2$ , obteniendo,

$$|G_{LP2}(j2\pi f_c)| = \frac{|1|}{\left| -\left(\frac{f_c}{f_0}\right)^2 + j\frac{1}{Q}\frac{f_c}{f_0} + 1 \right|} \quad (4.20)$$

Ahora se iguala la ecuación ( 4.20) al valor en dB de -3dB, que en su forma lineal, no logarítmica, es de  $1/\sqrt{2}$ , se tiene entonces,

$$|G_{LP2}(j\omega_c)| = \frac{|1|}{\left| -\left(\frac{f_c}{f_0}\right)^2 + j\frac{1}{Q}\frac{f_c}{f_0} + 1 \right|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (4.21)$$



Luego se desarrolla esta ecuación ( 4.21) con el fin de despejar  $f_c$ , en función de  $f_0$  y  $Q$ , y se tiene la ecuación ( 4.22),

$$f_c(-3dB) = f_0 \left[ -\left(\frac{1}{2Q^2} - 1\right) + \sqrt{\left(\frac{1}{2Q^2} - 1\right)^2 + 1} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.22)$$

Para el ejemplo de la Figura 4.8, se tiene un Inductor de 253,3mH, un capacitor de 100nF, para una frecuencia crítica de  $f_0 = 1000Hz$ , a continuación se muestra una tabla que muestra los diferentes valores de  $Q$  se usaron para el ejemplo, con su respectivo valor de resistencia (ecuación ( 4.19)) y la frecuencia de corte (ecuación ( 4.22)), para cada  $Q$  dado.

Filtro	$R$ [ $\Omega$ ]	$Q$	$f_c(-3dB)$ [Hz]
Sobre amortiguado	5305,2	0,300	329,3
Críticamente amortiguado	3183,1	0,500	643,6
Bessel	2756,6	0,577	786,2
Butterwoth	2250,8	0,707	1000,0
Chebyshev	1591,5	1,000	1272,0

### 4.2.3 Tipos de Filtros según su diseño a partir del $Q$

**Filtro Butterworth**, su nombre en honor a la persona que propuso este diseño. Se caracteriza por ser plano en la banda de paso con las mínimas fluctuaciones de magnitud, la frecuencia crítica  $f_0$  en este filtro en especial coincide con la frecuencia de corte  $f_c$  con una magnitud de -3dB respecto la banda pasante.

Por estas características es muy usado debido a que su diseño es sencillo, permite controlar fácilmente la frecuencia de corte del sistema y asegurar una mejor transparencia en la banda de paso. Su valor de  $Q=0.707$ , es fijo para filtros de segundo orden pasa altos y pasa bajos, no posee resonancias definidas por lo que es plano.

**Filtro Bessel**, su nombre en honor a quien propone este diseño, este filtro se caracteriza por tener el comportamiento en fase más lineal posible, sin llegar a ser perfectamente lineal. Su valor de  $Q=0.577$ , es un valor fijo para filtros de segundo orden.

En este filtro la frecuencia crítica  $f_0$  es diferente a la frecuencia de corte  $f_c$ , ésta última suele correrse hacia la banda de paso siendo así menos selectivo, pero con una respuesta transitoria de poco sostenimiento, debido a que es un sistema que está cerca al límite entre lo que sería muy amortiguado o poco amortiguado. Dicho de otra manera, está en un punto medio. No presenta resonancias en la banda de paso.

**Filtro Críticamente amortiguado**, este filtro toma su nombre debido a que el  $Q=0.5$ , corresponde a sistemas de segundo orden que son críticamente amortiguados. Los valores de  $Q$  menores a 0.5 serán sistemas sobre amortiguados y los valores de  $Q$  mayores a 0.5 corresponden a sistemas sub amortiguados, estos últimos son sistemas más resonantes y más selectivos, pero con corrimientos más severos de fase y con transitorios más extensos en tiempo.

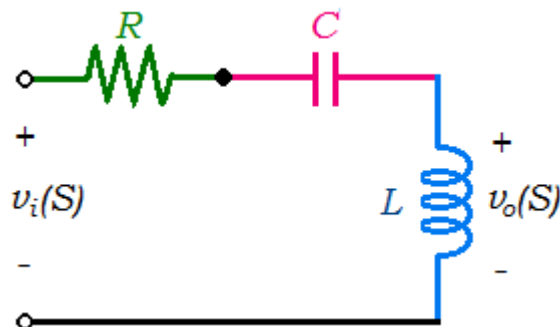
En fin este filtro está en un punto medio entre estar en un sistema sobre amortiguado o subamortiguado, la magnitud en la frecuencia crítica  $f_0$  es de -6dB, lo que va a tener una aplicación importante en filtros separadores de frecuencia para altavoces.

**Filtro sobre amortiguado**, serían filtros con valores de  $Q$  menores a 0.5 que se caracterizan por atenuar la banda de paso y correr la frecuencia de corte hacia la banda de paso, hace que el filtro sea menos selectivo, su virtud será la buena respuesta transitoria.

**Filtro Chebyshev**, su nombre se debe a que los denominadores de la función de transferencia usan funciones desarrolladas por la persona que planteó dichas funciones. Se caracterizan por presentar rizados en la banda de paso y genera pendientes más selectivas, son filtros subamortiguados y presentan resonancias en la banda de paso. Por lo general la frecuencia de corte se desplaza a la banda de rechazo. Los valores de  $Q$  son varios y son mayores al  $Q$  del filtro butterworth, se podría decir que el filtro butterworth en términos de  $Q$  es el límite entre un filtro plano y filtros con rizado en la banda pasante. El comportamiento en fase será el menos lineal.

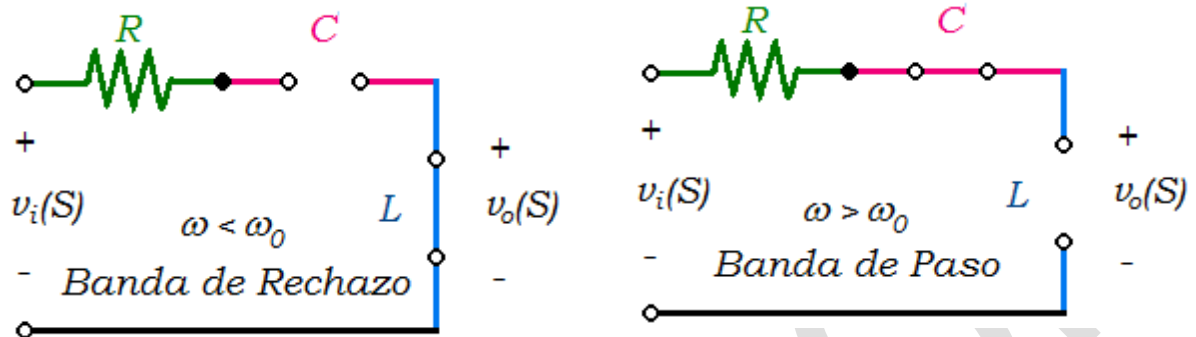
#### 4.2.4 Filtro Pasa Altos

La Figura 4.9, muestra un filtro de segundo orden conformado por un circuito serie con un resistor, un capacitor y un inductor, tomando la salida de voltaje por el inductor.



**Figura 4.9** Se analiza el circuito RLC serie, observando la salida de voltaje en el último elemento que es el inductor.

Al cambiar de posición el capacitor y el inductor respecto la Figura 4.6, el filtro tendrá efectos contrarios en la respuesta en frecuencia respecto al circuito RLC analizado en el apartado 4.2.1. Los efectos de las reactancias en función de la frecuencia son iguales, pero al estar ubicados en las posiciones opuestas muestra el comportamiento contrario en la salida, luego este circuito se comportará como un filtro pasa altos de segundo orden.



**Figura 4.10** La parte izquierda muestra el circuito equivalente para baja frecuencia, y el lado derecho se tiene el circuito equivalente para alta frecuencia.

En la Figura 4.10, se muestra como en baja frecuencia el capacitor aumenta su reactancia con tendencia al circuito abierto, mientras el inductor reduce su reactancia con tendencia al corto circuito de manera que el capacitor retiene el voltaje evitando su transferencia a la salida, dando así rechazo a las frecuencias bajas. De manera recíproca en alta frecuencia el capacitor tiende al corto debido a su baja reactancia, mientras que el inductor tiende al circuito abierto por su elevada reactancia, dando paso al voltaje de entrada siendo transferido a la salida.

Para determinar la función de transferencia se hace un divisor de voltaje, multiplicando el voltaje de entrada a la reactancia del inductor, y dividiendo por la impedancia total del circuito, como aparece en la ecuación ( 4.23)

$$v_o(S) = \frac{v_i(S) \cdot LS}{R + LS + \frac{1}{CS}} \quad (4.23)$$

Luego se pasa el voltaje de entrada a dividir al lado izquierdo de la ecuación ( 4.23) y se multiplica por el factor en azul, como se da en la ecuación ( 4.24)

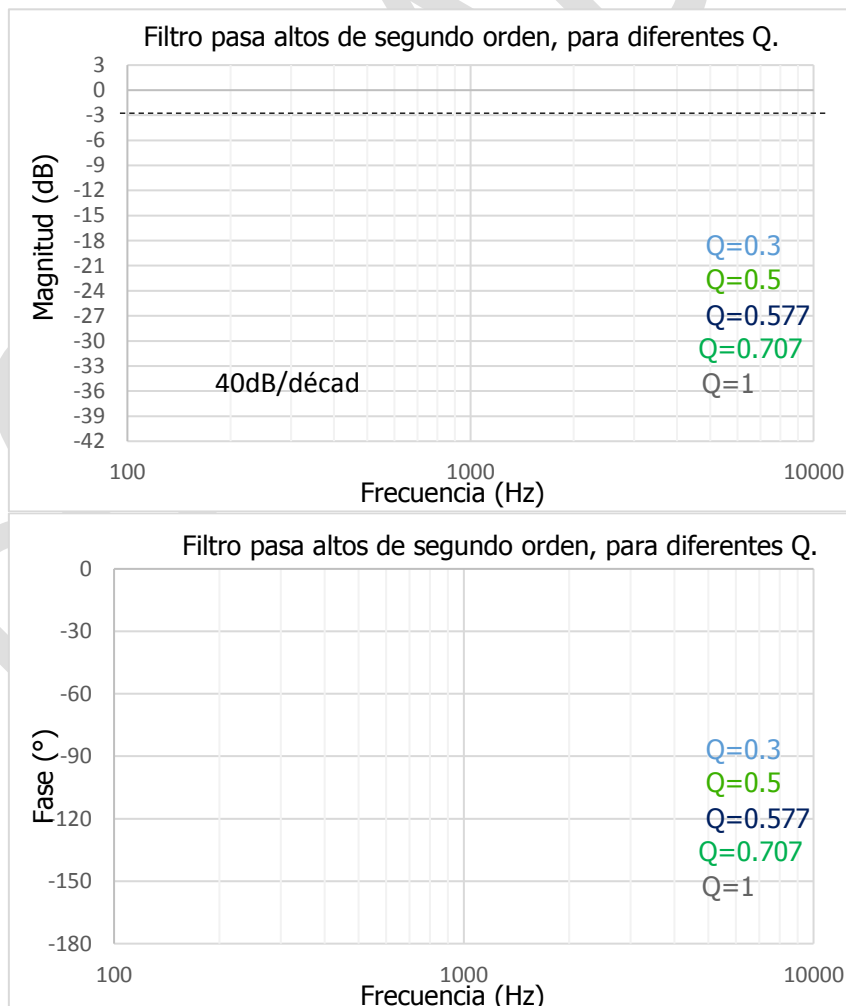
$$\frac{v_o(S)}{v_i(S)} = G(S) = \frac{LS}{R + LS + \frac{1}{CS}} \cdot \frac{S}{L} \quad (4.24)$$

Se opera la expresión anterior y se organiza el denominador de manera que quede organizado con la S de mayor grado con coeficiente uno, como se muestra en la ecuación ( 4.25).

$$G(S) = \frac{S^2}{S^2 + \frac{R}{L}S + \frac{1}{CL}} \quad (4.25)$$

Se compara la función de transferencia de la ecuación ( 4.25) del circuito en términos de los elementos eléctricos, con la función de transferencia típica de un filtro pasa altos de segundo orden en término de la frecuencia crítica  $\omega_0$  y el Q, ecuación ( 4.26)

$$G(S)_{HP2} = \frac{S^2}{S^2 + \frac{\omega_0}{Q}S + \omega_0^2} \quad (4.26)$$



**Figura 4.11** Se muestra la respuesta en frecuencia del filtro pasa altos de segundo orden, donde en la parte superior se muestra la magnitud en decibeles, y en la parte inferior se muestra el ángulo de fase. La frecuencia crítica es de 1000Hz, y se muestran diferentes valores de Q para este filtro.

Se comparan los coeficientes de los denominadores de ambas funciones, ecuaciones ( 4.25) y ( 4.26), y se obtienen las siguientes relaciones,

$$\omega_o^2 = \frac{1}{CL} \quad (4.27)$$

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{CL}} \quad (4.28)$$

Así como en el caso del filtro pasa bajos la frecuencia crítica depende de los elementos reactivos del circuito, como se da en las ecuaciones ( 4.27) y ( 4.28)

$$\frac{\omega_o}{Q} = \frac{R}{L} \quad (4.29)$$

También ocurre que el amortiguamiento del circuito dado por el factor de calidad Q, es dependiente del elemento resistivo del circuito eléctrico. Así como se observa en la ecuación ( 4.29).

Finalmente lo que hace diferente al pasa altos del pasa bajos, es el numerador de la función de transferencia que para el pasa altos es la S al cuadrado. Los efectos del Q en este filtro son los mismos que para el pasa bajos, como se muestra en la Figura 4.11.

Para determinar la frecuencia de corte de estos filtros pasa altos de segundo orden, se debe hacer el mismo procedimiento que se explicó en el caso pasa bajos donde se evalúa la función de transferencia en la frecuencia de corte donde decae 3dB respecto la banda de paso. De esta manera se obtiene la siguiente ecuación ( 4.30),

$$f_c(-3dB) = f_o \left[ \left( \frac{1}{2Q^2} - 1 \right) + \sqrt{\left( \frac{1}{2Q^2} - 1 \right)^2 + 1} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.30)$$

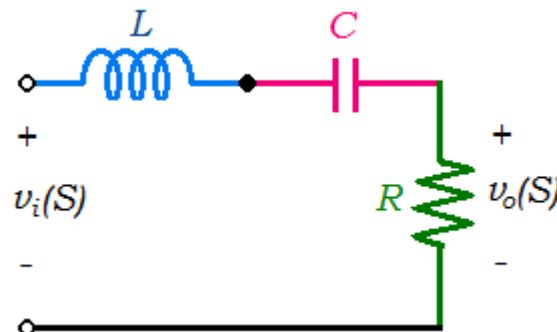
En el ejemplo de esta sección se observa la respuesta en frecuencia en la Figura 4.11. Para este ejemplo se utilizaron los mismos elementos que en el caso pasa bajos, donde se tiene un Inductor de 253,3mH, un capacitor de 100nF, para una frecuencia crítica de  $f_0 = 1000\text{Hz}$ . Pero a diferencia del caso pasa bajos, se tomó la salida por el inductor y tenemos un filtro pasa altos de segundo orden con la misma frecuencia crítica.

A continuación se muestra una tabla de resumen, donde se indica el cambio de la frecuencia de corte  $f_c(-3\text{dB})$  calculado con la ecuación ( 4.30), a partir del Q y el valor del resistor para cada valor de Q calculados con la ecuación ( 4.29). donde se puede ver el mismo resultado de manera gráfica en la Figura 4.11.

Filtro	$R$ [ $\Omega$ ]	$Q$	$f_c(-3\text{dB})$ [Hz]
Sobre amortiguado	5305,2	0,300	3036,4
Críticamente amortiguado	3183,1	0,500	1553,8
Bessel	2756,6	0,577	1272,0
Butterwoth	2250,8	0,707	1000,0
Chebyshev	1591,5	1,000	786,2

#### 4.2.5 Filtro Pasa banda

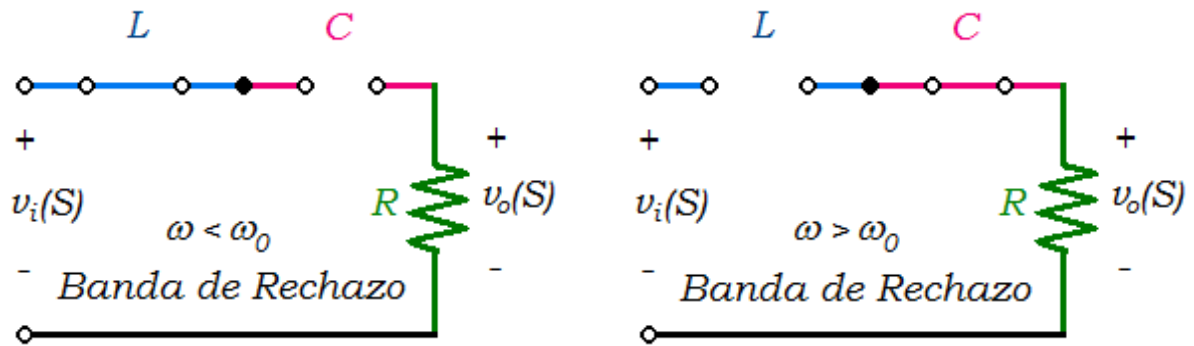
Ya se analizó el circuito serie tomando la salida de voltaje por el capacitor y por el inductor, ahora se analiza el circuito tomando la salida de voltaje por el resistor, donde el comportamiento será diferente a los otros dos casos pasa altos y pasa bajos, en este caso se tendrá una especie de mezcla entre los dos comportamientos.



**Figura 4.12** Muestra el circuito RLC, donde se analiza tomando la resistencia como la salida del circuito.

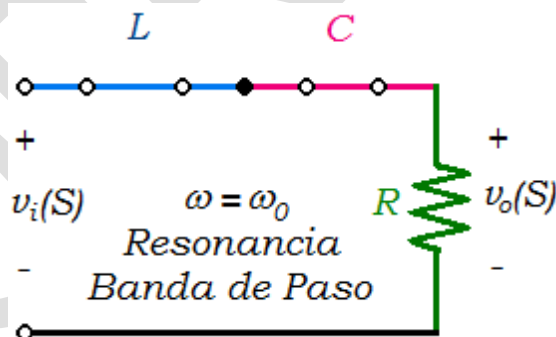
En la Figura 4.13, El circuito en alta frecuencia (derecha, Figura 4.13) la bobina tiene alta reactancia y el capacitor baja reactancia, de esta manera el voltaje de entrada será

retenido por la bobina, impidiendo la transferencia a la salida en el resistor. En baja frecuencia (izquierda, Figura 4.13) las reactancias cambian de forma inversa y el capacitor con su alta reactancia retiene el voltaje de entrada evitando que se transfiera a la salida en el resistor.



**Figura 4.13** En el lado izquierdo se tiene el circuito equivalente de baja frecuencia para el filtro. En el lado derecho se muestra el circuito equivalente para alta frecuencia.

En frecuencias medias (Figura 4.14) es posible que tanto capacitor como inductor tengan baja reactancia de manera que una frecuencia media, puede ser baja para la bobina reduciendo su reactancia y la misma frecuencia media es alta para el capacitor reduciendo también la reactancia, como resultado de la baja reactancia del capacitor y la bobina, permite la transferencia del voltaje de entrada a la salida en el resistor. Por este comportamiento se deduce que se tiene un filtro pasa banda.



**Figura 4.14** Circuito equivalente para la banda de paso donde el inductor y el capacitor no retienen voltaje permitiendo la transferencia a la salida en el resistor.

Para determinar la función de transferencia se hace el respectivo divisor de voltaje, multiplicando el voltaje de entrada  $v_i$  con el resistor, y luego dividiendo por la impedancia total del circuito, como se ve en ( 4.31)

$$v_o(S) = \frac{v_i(S) \cdot R}{R + LS + \frac{1}{CS}} \quad (4.31)$$

Se resuelve para obtener, la función de transferencia con una función cuadrática en el denominador con la S de mayor grado con coeficiente igual a uno. Como se da en la ecuación ( 4.32)

$$G(S) = \frac{\frac{R}{L}S}{S^2 + \frac{R}{L}S + \frac{1}{CL}} \quad (4.32)$$

Se compara con la función de transferencia de un filtro pasa banda de segundo orden, en términos de la frecuencia crítica y el Q. como se da en la ecuación ( 4.33).

$$G(S)_{BP} = \frac{\frac{\omega_o}{Q}S}{S^2 + \frac{\omega_o}{Q}S + \omega_o^2} \quad (4.33)$$

Y como se ha hecho en los dos casos anteriores se comparan las ecuaciones ( 4.32) y ( 4.33), para encontrar relación entre las variables eléctricas del circuito y los parámetros del filtro, frecuencia crítica y Q.

$$\omega_o^2 = \frac{1}{CL} \quad (4.34)$$

Se obtiene la misma frecuencia crítica dependiente de los elementos reactivos ( 4.34) y ( 4.35).

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{CL}} \quad (4.35)$$

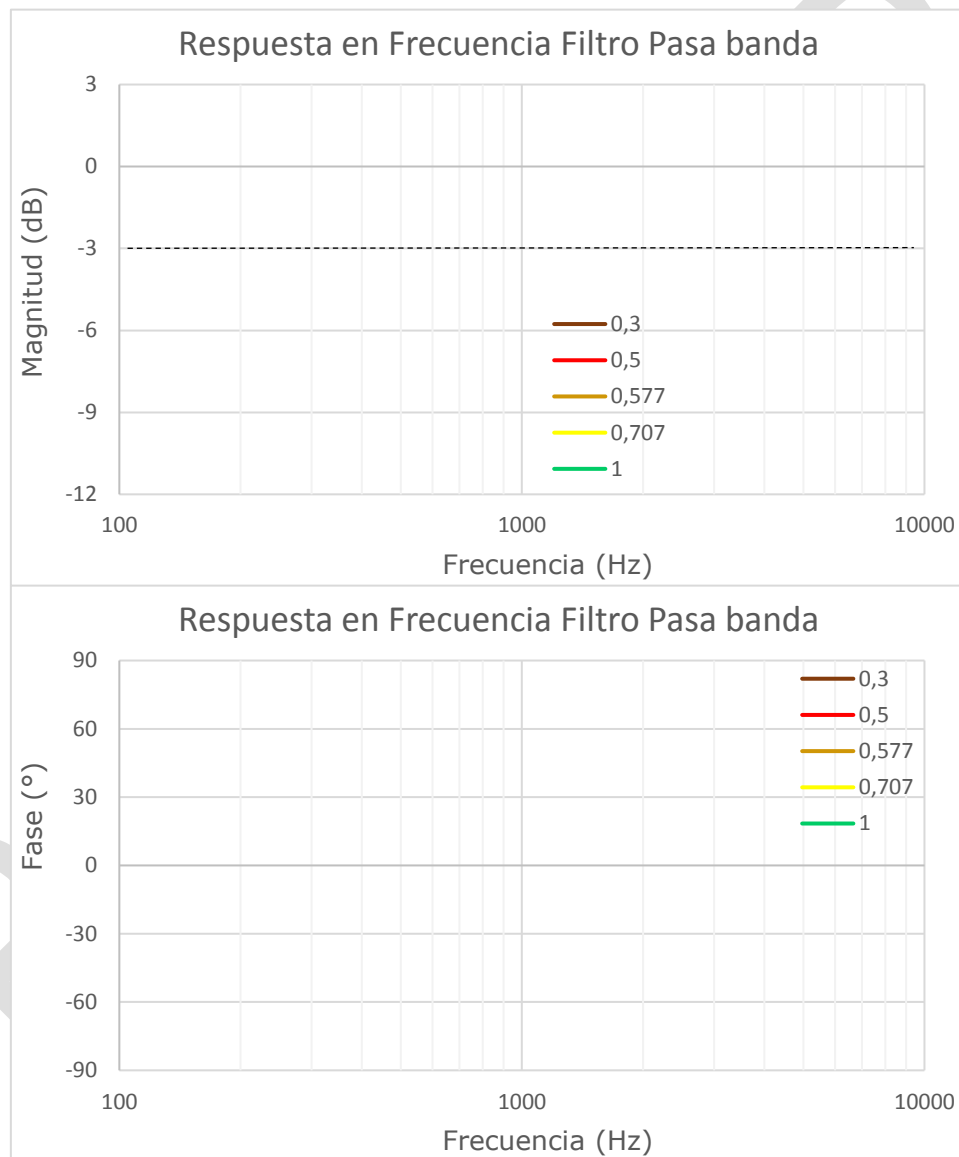
También se mantiene la dependencia de R con Q, como se da en ( 4.36)

$$\frac{\omega_o}{Q} = \frac{R}{L} \quad (4.36)$$



Se observa que en los tres casos; pasa bajos ( 4.15), pasa altos ( 4.25) y pasa banda ( 4.32), la función de transferencia comparte el mismo denominador y cambia el numerador, el numerador es uno de los términos del polinomio del denominador según el circuito y donde se observe la salida, que a su vez cambia el comportamiento del filtro.

En este caso pasa banda, la frecuencia crítica  $\omega_o$ , es la frecuencia central de la banda del filtro que una vez más depende de los elementos reactivos, y en este caso también es común referirse a la frecuencia crítica en los filtros pasa banda como frecuencia de resonancia pues es un valor de frecuencia donde la magnitud es máxima.



**Figura 4.15** Muestra un filtro pasa banda con frecuencia crítica o de resonancia 1000Hz, para diferentes valores de Q, donde se observa el efecto del Q en el ancho de banda del filtro pasa banda.

El sistema está en resonancia, porque en esta frecuencia los elemento reactivos tienen el mismo valor de reactancia pero, como en el plano complejo la reactancia capacitiva se

representa con un número imaginario negativo y la inductancia con un imaginario positivo, se anulan las reactivas y así lo único que se opone a la corriente será el resistor, en este valor de frecuencia la impedancia del circuito sería igual a la resistencia Figura 4.14.

En este filtro pasa banda se define un parámetro del filtro que relaciona el Q con la frecuencia de resonancia que se denomina Ancho de Banda y se delimita donde la magnitud es 3dB menor que la banda pasante o mejor 3dB menor que la magnitud en la frecuencia de resonancia.

Para delimitar este ancho de banda se establecen dos frecuencias una superior  $\omega_s$  y otra inferior  $\omega_l$  a la frecuencia de resonancia  $\omega_o$ , que serán donde decae 3dB la magnitud, y así mismo serán las frecuencias de corte del filtro pues es donde decae 3dB respecto la banda de paso y la frecuencia de resonancia  $\omega_o$ . Como se observa en la Figura 4.15.

Para determinar el ancho de banda se resta la frecuencia inferior a la superior y se obtiene la distancia entre éstas con la ecuación ( 4.37)

$$AB = f_s - f_l \quad (4.37)$$

La relación entre Q, Ancho de banda y frecuencia crítica o de resonancia está en la ecuación ( 4.38)

$$Q = \frac{f_0}{f_s - f_l} = \frac{f_0}{AB} \quad (4.38)$$

El valor de Q controla el ancho de banda del filtro, entonces el amortiguamiento del circuito dado por la resistencia eléctrica, controla el ancho de banda del circuito, haciendo un filtro pasa banda con la misma frecuencia de resonancia dependiente de los elementos reactivos del circuito, pueda cambiar la banda pasante por medio del elemento resistivo.

Para calcular las frecuencias de corte se realiza el mismo procedimiento ya expuesto en el caso pasa bajos, donde para este caso, se evalúa la función de transferencia en las frecuencias de corte donde la magnitud decae 3dB respecto la frecuencia de resonancia. Se pueden calcular dichas frecuencias con las siguientes ecuaciones ( 4.39) y ( 4.40),

$$f_l(-3dB) = f_0 \left[ \left( \frac{1}{2Q^2} + 1 \right) - \sqrt{\left( \frac{1}{2Q^2} + 1 \right)^2 - 1} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.39)$$

$$f_s(-3dB) = f_0 \left[ \left( \frac{1}{2Q^2} + 1 \right) + \sqrt{\left( \frac{1}{2Q^2} + 1 \right)^2 - 1} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.40)$$

Como se muestra en la Figura 4.15, a manera de ejemplo, se utilizan los mismos elementos que en los ejemplos anteriores, pero pues en este caso pasa banda, recordar que la salida es tomada por la resistencia, donde se tiene un Inductor de 253,3mH, un capacitor de 100nF, para una frecuencia crítica de  $f_0 = 1000Hz$ .

A continuación se muestra una tabla de resumen de este ejemplo donde se muestra para cada valor de Q, las frecuencias de corte, tanto la superior como la inferior, y el ancho de banda respectivo.

Filtro	Q	$f_l(Hz)$	$f_s(Hz)$	AB(Hz)
Sobre amortiguado	0,300	277,0	3610,3	3333,3
Críticamente amortiguado	0,500	414,2	2414,2	2000,0
Bessel	0,577	456,9	2188,9	1732,1
Butterwoth	0,707	517,6	1931,9	1414,2
Chebyshev	1,000	618,0	1618,0	1000,0

## 5 FILTROS SEPARADORES DE FRECUENCIA PARA ALTAVOCES (CROSSOVER)

---

Se denominan filtros crossover, a los filtros separadores de frecuencia para sistemas con más de un altavoz, donde éstos van a reproducir diferentes bandas de frecuencia. En otras palabras, cuando se quiere tener un sistema de sonido de alta fidelidad (respuesta en frecuencia amplia) es común que un sólo altavoz no pueda reproducir todas las frecuencias audibles a igual amplitud, es por esto que se suele completar todo el espectro sonoro con más de un altavoz.

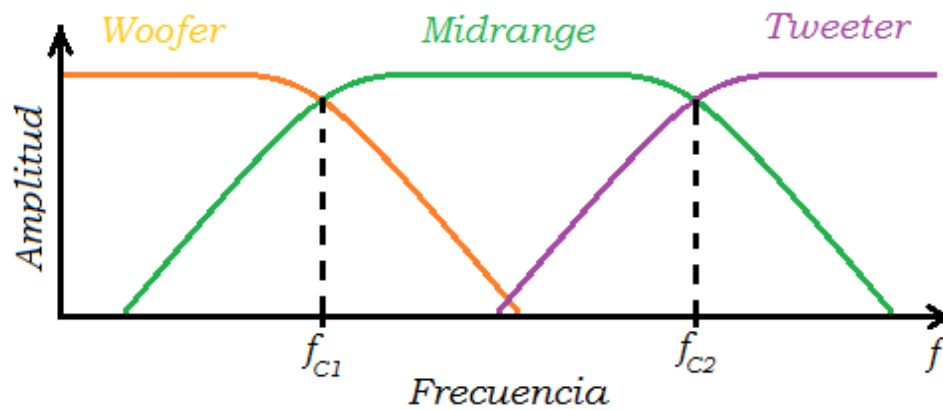
Como se requiere más de un altavoz, se debe separar el espacio de frecuencia en dos o tres altavoces, y para este tipo de sistema se encuentran altavoces fabricados para diferentes zonas de frecuencia. Los altavoces para baja frecuencia tienen diafragmas grandes y son llamados Woofer, para la alta frecuencia los altavoces son de diafragma pequeño y en ocasiones tiene acoplada una bocina y son llamados Tweeter, en algunos casos se requiere incorporar otro altavoz que trabaja en media frecuencia llamado midrange.

A continuación, se presenta de manera práctica a través de un ejercicio, el diseño de unos filtros separadores de frecuencia para un sistema de tres altavoces, también denominado sistema de tres vías.

### 5.1 EJERCICIO

Se requiere hacer un filtro crossover para un sistema de tres vías, para un equipo de sonido a nivel doméstico de calidad estándar. Sin embargo, se quiere entregar un buen producto que tenga sus filtros selectores de frecuencia de alta, baja y media frecuencia usando los filtros de primer orden vistos en el capítulo 3, además de los atenuadores necesarios para que el sistema sea lo más plano posible.

Algunas especificaciones técnicas de altavoces para un sistema de sonido de alta fidelidad de tres vías.			
	Woofer	Midrange	Tweeter
Sensibilidad (s)	94dBspl/1W	97dBspl/1W	100dBspl/1W
R. Frecuencia	20Hz – 700Hz	180Hz – 10000Hz	1000Hz – 20000Hz
Impedancia	8Ω	8Ω	8Ω



**Figura 5.1** Muestra la separación de frecuencia que se hace en el sistema de manera que cada altavoz maneje su propia zona de frecuencia y evitar que queden zonas de frecuencia muertas donde disminuya la presión sonora en el espectro o zonas de frecuencia donde se solapan las bandas aledañas y aumente la presión sonora alterando la respuesta en frecuencia de todo el sistema.

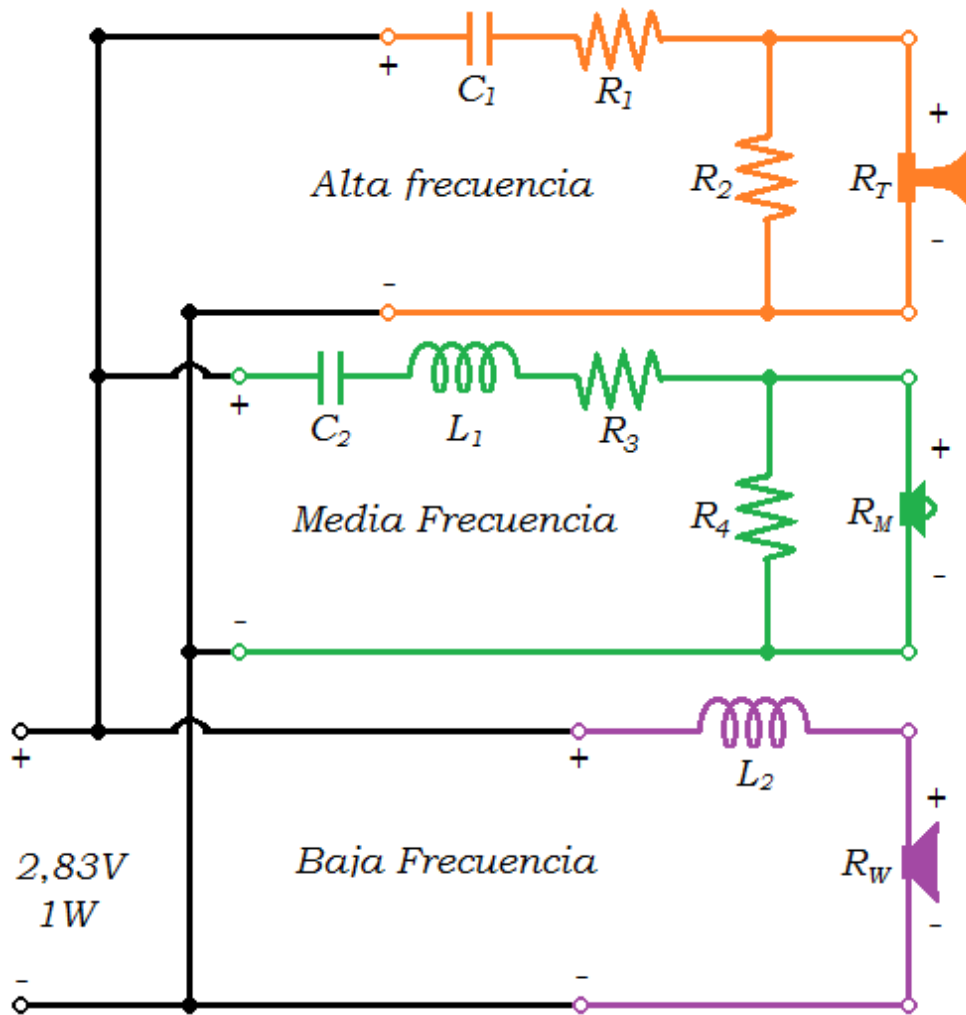
Para dar solución a este problema se usarán los filtros de primer orden que se revisaron en el capítulo 3, y hacer una separación de frecuencia como se muestran en la Figura 5.1.

Primero se calcularán los atenuadores para cada vía que lo requiera, con el fin de entregar una respuesta en frecuencia uniforme en los diferentes espacios de frecuencia.

Luego se definen las frecuencias de cruce entre bandas, que para este caso utilizando filtros de primer orden, dichas frecuencias de cruce coinciden con las frecuencias críticas de los filtros a implementar, así es más fácil comenzar a resolver el problema.

Primero se revisa la sensibilidad de cada vía, que nos indica la cantidad de presión sonora que emite cada altavoz según la potencia eléctrica que se le entrega a cada altavoz, este parámetro nos permite tener un control de amplitud en el sistema de manera que todos los altavoces tengan la misma cantidad de presión sonora y por eso es que se toma como referencia el altavoz de menor sensibilidad, pues la idea es atenuar la vía o las vías que tengan mayor sensibilidad, para que todas las vías reproduzcan el mismo nivel de presión sonora de una forma pasiva.

*Nota: Esto es posible debido a que la presión acústica es análoga al voltaje eléctrico, luego si de manera lineal hay un cambio y se duplica el voltaje así mismo se duplica la presión acústica, luego si hay una atenuación de 3 decibeles de voltaje así mismo habrá una atenuación de 3 decibeles en presión sonora.*



**Figura 5.2** El circuito muestra, los tres diferentes altavoces con su respectivo filtro separador de frecuencia para que funcione como se propone en la Figura 5.1, y para este caso el altavoz de alta y media frecuencia tienen además un atenuador de manera que la sensibilidad de cada altavoz sea la misma.

### 5.1.1 Sensibilidad de los altavoces

Para la sensibilidad de los altavoces, se describe con un fraccionario con dos variables; en el denominador se tiene la variable de entrada al altavoz que sería un voltaje o potencia eléctrica, y en el numerador se tiene la variable de salida que sería la presión acústica, como se muestra a continuación en la ecuación ( 5.1),

$$s = \frac{dB_{spl}}{1W} \quad (5.1)$$

Donde se denomina la sensibilidad como  $s$  minúscula para evitar confundir con la  $S$  mayúscula de LaPlace. La mayoría de fabricantes entregan este dato como se muestra en dBspl y en vatios de potencia eléctrica, en ocasiones se da en voltios. Por lo general se da en potencia porque como estándar se mide la sensibilidad a partir de un vatio eléctrico. Lo que se debe tener en cuenta es que el voltaje cambia según la impedancia del altavoz.

Para determinar el voltaje a partir de la impedancia y respetar el estándar de un vatio eléctrico se calcula de la siguiente manera, tomando  $8\Omega$  como valor de impedancia del altavoz de baja frecuencia. A partir de la relación entre potencia, voltaje e impedancia.

$$P = \frac{V^2}{R}$$

$$V = \sqrt{P \cdot R}$$

$$V = \sqrt{1W \cdot 8\Omega} = 2,83V$$

Luego se puede expresar la sensibilidad como se muestra en la ecuación ( 5.2), donde se especifica que el voltaje esta dado para una impedancia de  $8\Omega$ , y una potencia eléctrica de 1W.

$$s = \left[ \frac{dB_{spl}}{2,83V} \right]_{@8\Omega} \quad (5.2)$$

La presión acústica  $p$ , se mide por lo general en pascales  $[Pa]$ , y se suele expresar el nivel de presión acústica en  $[dB_{SPL}]$ , donde SPL son las siglas en lengua inglesa (Sound Pressure Level = Nivel de Presión Sonora) que indican el nivel de presión a partir de un valor de presión de referencia de  $p_{ref} = 20\mu Pa$ , para calcular el nivel de presión sonora se tiene la ecuación ( 5.3)

$$dB_{SPL} = 20 \log_{10} \left( \frac{p}{p_{ref}} \right) ; p_{ref} = 20\mu Pa \quad (5.3)$$

Para establecer una relación lineal, se convierten los vatios a voltios y el nivel de presión sonora expresada en dBspl se pasa a pascales. De esta manera se hace una relación lineal entre los voltios y los pascales, resuelto en la ecuación ( 5.4)

$$s = \frac{dB_{spl}}{1W} = \left[ \frac{20\mu Pa \cdot 10^{dB_{spl}/20}}{2,83V} \right]_{2,83V@8\Omega} \quad (5.4)$$

Para el altavoz de baja frecuencia, ahora la sensibilidad en pascales sobre voltios se da en la ecuación ( 5.5):

$$s_W = \frac{p_S}{v_S} = \frac{20\mu Pa \cdot 10^{94/20}}{2,83V} = \frac{1Pa}{2,83V} \quad (5.5)$$

Donde

$s_W$ : La sensibilidad del Woofer en pascales sobre voltios con referencia de 1W de potencia eléctrica.

$p_S$ : La presión en pascales del woofer a una potencia eléctrica de 1W.

$v_S$ : El voltaje en el altavoz para cumplir con 1W eléctrico de potencia trabajando sobre la carga del altavoz.

Para obtener cuantos pascales produce el altavoz  $p_W$  a partir del voltaje de entrada en el altavoz  $v_W$  y la sensibilidad de éste, será dado por la ecuación ( 5.6):

$$p_W = \frac{p_S \cdot v_W}{v_S} \quad (5.6)$$

### 5.1.2 Diseño de los atenuadores

Si tomamos como referencia el altavoz de menor sensibilidad, el woofer, el cual tiene una sensibilidad de 94dBspl/1W, y se propone hacer que los otros altavoces tengan la misma sensibilidad, para esto se diseñan atenuadores con resistores como se analizó en el capítulo 2.

Para el altavoz de rango medio, se requiere un atenuador que se calcula restando la sensibilidad del altavoz de baja frecuencia, que es la referencia, a la sensibilidad del altavoz de rango medio. Teniendo,

$$97\text{dBspl}/1\text{W} - 94\text{dBspl}/1\text{W} = 3\text{dB}$$



La diferencia entre los dos altavoces es de 3dB, lo que quiere decir que se requiere atenuar 3dB al altavoz de rango medio para que tenga la misma sensibilidad que el altavoz de baja frecuencia. En otras palabras el atenuador funciona como un ajuste de sensibilidad.

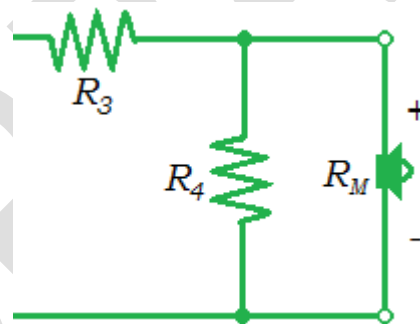
Por otro lado el atenuador para el altavoz de alta frecuencia, se calcula de la misma manera, restando la sensibilidad de referencia a la sensibilidad del Tweeter.

$$100\text{dBspl}/1\text{W} - 94\text{dBspl}/1\text{W}=6\text{dB}$$

La diferencia entre estos altavoces es de 6dB, que será la cantidad de atenuación que se debe aplicar a la vía de alta frecuencia, para que de igual forma que con el midrange se modifique la sensibilidad y sea igual para todos los altavoces.

De esta manera se requiere un atenuador de 3dB para el rango medio y otro atenuador de 6dB para la zona de alta frecuencia. Ahora haciendo uso de las ecuaciones ( 2.17) y ( 2.18) del capítulo 2, es muy fácil diseñar las redes de atenuación para cada altavoz el midrange y el tweeter.

#### 5.1.2.1 Atenuador para el altavoz de media frecuencia.



**Figura 5.3** Se muestra la sección del circuito, que se encarga de hacer la atenuación al altavoz de media frecuencia (Midrange).

Teniendo, la atenuación  $L(\text{dB}) = -3\text{dB}$  y  $R_M = 8\Omega$  que es la impedancia del Midrange, se aplica la ecuación ( 2.17), y se tiene,

$$R_4 = \frac{R_M \cdot 10^{L(\text{dB})/20}}{1 - 10^{L(\text{dB})/20}} = \frac{8 \cdot 10^{-3/20}}{1 - 10^{-3/20}} = 19,39\Omega$$

Luego que se conoce la resistencia  $R_4$ , se procede a aplicar la ecuación ( 2.18), donde primero se desarrolla el paralelo,

$$(R_4 \parallel R_M) = \left( \frac{19.39 \cdot 8}{19.39 + 8} \right) = 5,66\Omega$$

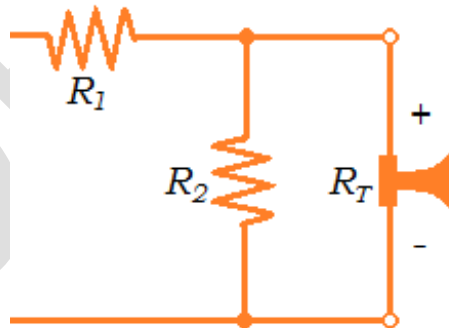
Ahora se obtiene el valor de la resistencia  $R_3$ ,

$$R_3 = R_M - (R_4 \parallel R_M) = 8 - 5,66 = 2,33\Omega$$

Con  $R_3 = 2,33\Omega$  y  $R_4 = 19,39\Omega$  tenemos el atenuador de 3dB para el Midrange,

*Nota: recordar que para el circuito, esta red de altavoz con atenuador que se muestra en la Figura 5.3, tiene una impedancia igual a la del altavoz luego para los cálculos de filtros, se tiene la certeza que toda la red de resistores tiene el mismo valor de impedancia del altavoz.*

#### 5.1.2.2 Atenuador para el altavoz de alta frecuencia



**Figura 5.4** Se muestra la sección del circuito, que se encarga de hacer la atenuación al altavoz de alta frecuencia (Tweeter).

Ahora, con la atenuación requerida  $L(\text{dB}) = -6\text{dB}$  y la impedancia del altavoz de alta frecuencia  $R_T = 8\Omega$ , se aplica de nuevo la ecuación ( 2.17).

$$R_2 = \frac{R_T \cdot 10^{L(\text{dB})/20}}{1 - 10^{L(\text{dB})/20}} = \frac{8 \cdot 10^{-6/20}}{1 - 10^{-6/20}} = 8,03\Omega$$

Una vez conocido el valor del resistor  $R_2$ , se calcula el resistor  $R_1$  con la ecuación ( 2.18).

$$(R_2 \parallel R_T) = \left( \frac{8 \cdot 8}{8 + 8} \right) = 4\Omega$$

$$R_1 = R_T - (R_2 \parallel R_T) = 8 - 4 = 4\Omega$$

Con  $R_1 = 4\Omega$  y  $R_2 = 8\Omega$  se tiene el atenuador de 6dB para el altavoz de alta frecuencia como se muestra en la Figura 5.4.

### 5.1.3 Frecuencias de cruce

A continuación se procede a diseñar los filtros para cada vía, pero toca primero definir las frecuencias de cruce (crossover), la condición para determinar estas frecuencias es que estén en la banda útil de cada altavoz, es decir, que la frecuencia de cruce uno  $f_{c1}$ , este dentro de la respuesta en frecuencia de los altavoces de baja y media frecuencia. Así mismo la frecuencia de cruce dos  $f_{c2}$  debe estar en un valor de frecuencia dentro de la respuesta en frecuencia de los altavoces de media y alta frecuencia.

Es necesario conocer la respuesta en frecuencia de cada altavoz, para poder determinar las frecuencias de cruce, se puede hacer uso de las especificaciones técnicas, pero se recomienda medir la respuesta en frecuencia de los altavoces para tener la certeza de su rango de trabajo.

El propósito de la red de filtros es limitar eléctricamente la respuesta en frecuencia de cada vía con el propósito de establecer un rango de trabajo específico para cada altavoz y tener el control del altavoz que delimita su zona de frecuencia, de manera que donde deja de funcionar bien un altavoz empieza a funcionar el otro altavoz en términos de frecuencia.

Este control de frecuencia por altavoz es lo que le permite a todo el sistema con sus tres vías, tener una respuesta en frecuencia amplia que abarque todo el espectro audible y además procurar que la presión acústica tenga un comportamiento constante en todo el espectro, así como se muestra en la Figura 5.1

Por otro lado se pretende evitar que se solapen las bandas de los altavoces pues esto haría que en la zona donde coinciden las bandas habría aumento de energía en alterando la respuesta en frecuencia de todo el sistema de manera no controlada.

$$f_{c1} = 200\text{Hz}$$

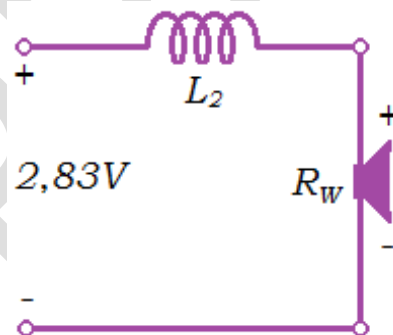
Para que el Woofer trabaje bien hasta 200Hz con un ancho de banda de 20Hz a 200Hz que corresponde a una década y el Midrange empiece a trabajar en 200Hz. Es por lo cual se denomina frecuencia de cruce porque será el punto en común entre los filtros.

$$f_{c2} = 2000\text{Hz}$$

El Midrange trabaja desde los 200Hz hasta los 2000Hz y así maneja un ancho de banda de una década y el Tweeter trabaje desde los 2000Hz y así, también este a cargo de una década del espectro sonoro con un ancho de banda de 2000Hz a los 20000Hz.

De esta manera se pretende hacer que el sistema completo, que con las tres vías funcionando, tenga un ancho de banda completo para aplicaciones de sonido de alta fidelidad, donde se procura que la presión acústica sea constante para todas las frecuencias audibles entre 20Hz y 20KHz.

#### 5.1.4 Diseño del filtro pasa bajos para el altavoz de baja frecuencia



**Figura 5.5** Filtro para el altavoz de baja frecuencia, pasa bajos de primer orden RL.

Este filtro pasa bajos RL fue revisado en la sección 3.4, donde para relacionar la frecuencia crítica de 200Hz (la misma frecuencia de cruce), con los componentes eléctricos del circuito se toma la ecuación ( 3.28),

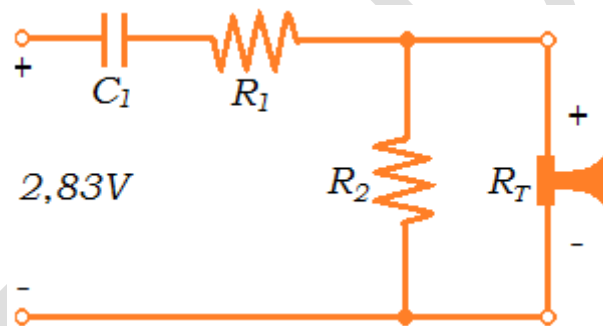
$$\omega_0 = 2\pi f_{c1} = \frac{R_W}{L_2}$$

$$L_2 = \frac{R_W}{2\pi f_{c1}} = \frac{8}{2\pi 200} = 6,36mH$$

Se hace el circuito RL, tener presente que el altavoz es tomado como la resistencia, y se usa el valor de impedancia del altavoz en reemplazo de la resistencia, se evita incorporar resistores en la red, para evitar pérdidas de potencia.

### 5.1.5 Diseño del filtro pasa altos para el altavoz de alta frecuencia

Para el altavoz de alta frecuencia, se debe hacer un filtro pasa altos que para este caso es muy sencillo incorporando un capacitor. Se debe tener en cuenta que la red de resistores tiene una resistencia equivalente igual a la impedancia del altavoz, como se describió en la sección anterior de diseño de atenuador, en esta situación es fácil hacer el diseño pues se totaliza la resistencia con un valor de  $8\Omega$ .



**Figura 5.6** Se muestra el circuito pasa altos RC, con su respectiva red de atenuación.

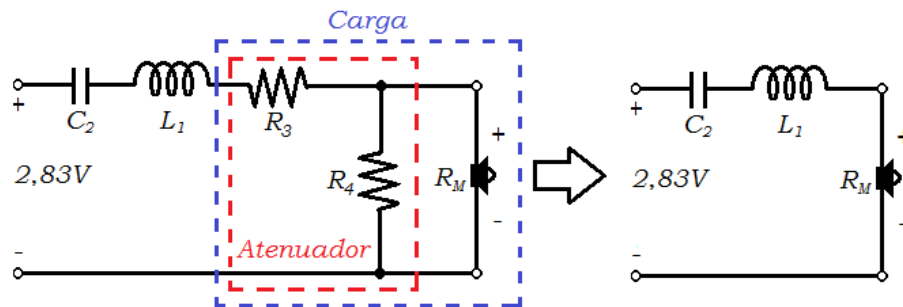
Se toma como base el circuito RC que se revisó en la sección 3.3, para terminar el diseño de este filtro sólo falta calcular el capacitor con base en la frecuencia de cruce  $f_{c2}$ , usando la ecuación ( 3.21), se tiene que,

$$\omega_0 = 2\pi f_{c2} = \frac{1}{R_T C_1}$$

$$C_1 = \frac{1}{2\pi f_{c2} R_T} = \frac{1}{2\pi 2000 \cdot 8} = 9,95\mu F$$

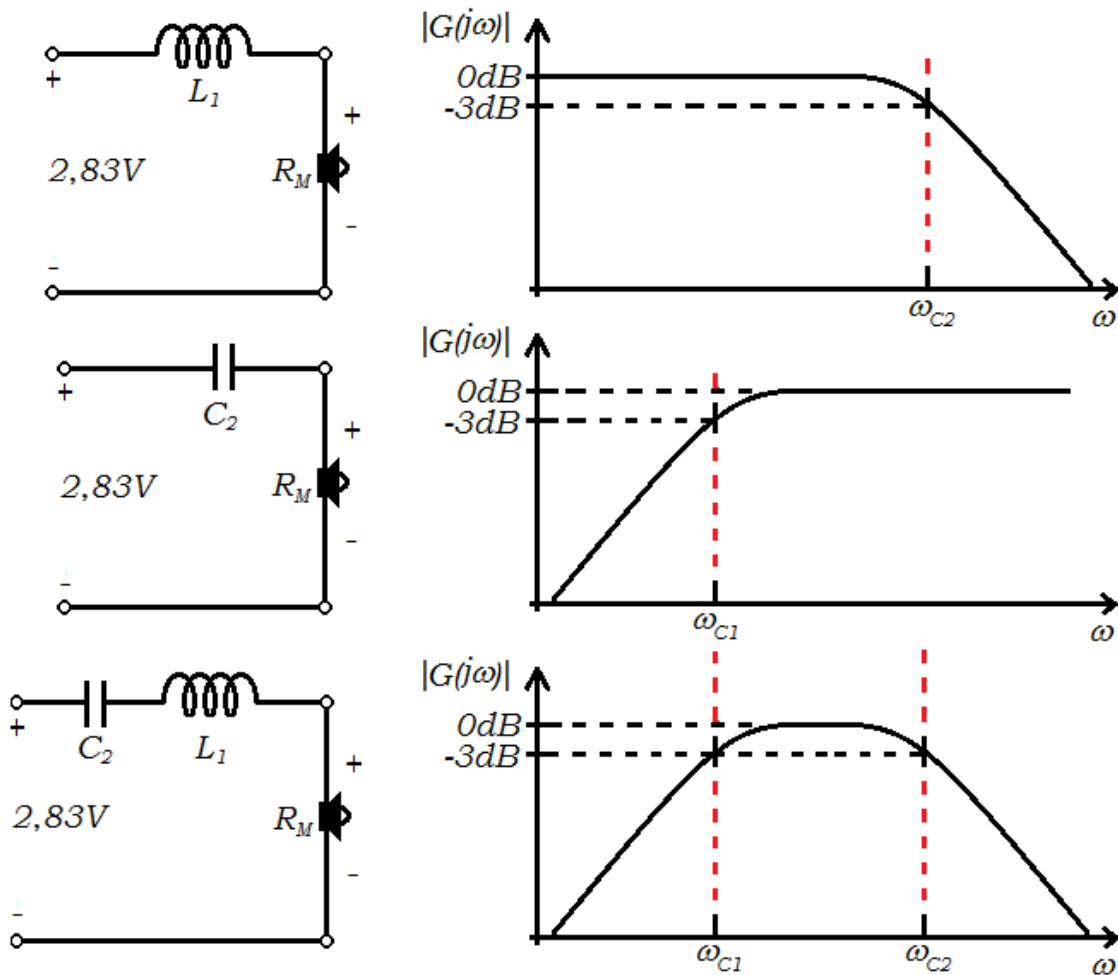
Después de despejar  $C_1$ , y reemplazar las demás variables, se tiene el valor de capacitancia que cumple con el diseño propuesto.

### 5.1.6 Diseño del filtro pasa banda para el altavoz de rango medio.



**Figura 5.7** Muestra el circuito para el filtro pasa banda, donde se muestra como toda la red de resistores equivale al mismo altavoz.

Para el filtro pasa banda se tendrá en cuenta que el atenuador está conformado por los Resistores  $R_3$  y  $R_4$ , toda la carga será vista como la red del atenuador con el altavoz pues como ya se ha mencionado anteriormente en el planteamiento del diseño del atenuador tiene implícito el hecho de que toda la red equivale al valor del altavoz, es por eso que como se indica en la Figura 5.7, el diseño del filtro se puede hacer asumiendo que no existen  $R_3$  y  $R_4$ .



**Figura 5.8** Se observa el análisis del circuito RLC pasa banda, donde se muestran los circuitos equivalentes para alta y baja frecuencia, donde para alta frecuencia el circuito equivale a un circuito RL y para la baja frecuencia el circuito equivalente queda como un circuito RC. Se debe tener en cuenta que se trata de un solo circuito RLC pasa banda, que para efectos de análisis se analizó como dos circuitos de primer orden.

Para este caso donde se quiere hacer el grupo de filtros separadores de frecuencia aplicando filtros de primer orden con pendiente de 6dB/oct, se puede plantear el filtro pasa banda RLC como la mezcla de dos filtros de primer orden uno RC y otro RL donde en este caso la R de ambos filtros será el mismo altavoz.

De esta manera en alta frecuencia cerca de  $f_{C2}$ , el capacitor se comporta como un corto circuito y se puede analizar el circuito RLC como un circuito RL, donde la frecuencia de corte depende de la Bobina  $L_1$  y de la impedancia del altavoz, como se observa en la Figura 5.8. De forma similar en baja frecuencia cerca de  $f_{C1}$ , el inductor se comporta como un corto circuito y el circuito RLC se puede analizar como un circuito RC, con frecuencia crítica dependiente de la capacitancia  $C_2$  y la impedancia del altavoz.

Para este ejercicio se soluciona el pasa-banda viéndolo como dos filtros de primer orden, teniendo en cuenta que es un filtro de banda ancha y se puede diseñar de esta manera, para filtros de banda angosta donde las frecuencias críticas son cercanas y las bandas se

solapan, no se recomienda hacer el análisis de esta forma, sino como un sólo circuito RLC. Sin embargo, para los filtros separadores de frecuencia los anchos de banda suelen ser amplios.

A partir de la ecuación ( 3.21), se calcula el capacitor  $C_2$  para definir el corte inferior del filtro con la frecuencia de cruce  $f_{c1}$

$$C_2 = \frac{1}{2\pi f_{c1} R_M} = \frac{1}{2\pi 200 \cdot 8} = 99,5\mu F$$

Tomando como base la ecuación ( 3.28), se calcula el inductor  $L_1$  para definir el corte superior del filtro con la frecuencia de cruce  $f_{c2}$

$$L_1 = \frac{R_M}{2\pi f_{c2}} = \frac{8}{2\pi 2000} = 636,6\mu H$$

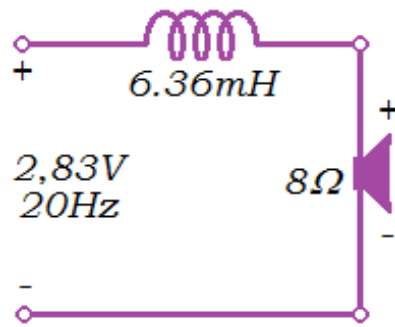
### **5.1.7 Análisis de cada altavoz para una frecuencia de operación de 20Hz.**

Para verificar el funcionamiento del sistema de filtros en cada altavoz, a continuación, se hace un análisis de cada filtro para una frecuencia determinada, y así comprobar el diseño propuesto a través de calcular el nivel de presión sonora en cada altavoz, cuando en la entrada de todo el sistema se tiene una señal de forma seno con un voltaje de 2.83 voltios a una frecuencia de 20Hz.

Se pretende analizar que ocurre con cada altavoz, en conjunto con su red de filtro y atenuación y así comprobar el efecto de los filtros separadores de frecuencia. En las siguientes secciones se explicará a través del desarrollo matemático para cada vía el resultado acústico.

#### *5.1.7.1 Woofer*





**Figura 5.9** Se muestra el circuito para baja frecuencia, con los valores de los componentes eléctricos calculados para cumplir con el diseño propuesto.

Se calcula la impedancia total del circuito  $Z_{TW}$ , tomando la inductancia  $L_2 = 6,36mH$ , la impedancia del woofer  $R_W = 8\Omega$ , y la frecuencia de operación del circuito  $f = 20Hz$ .

$$Z_{TW} = R_W + j\omega L_2 = 8 + j(2\pi 20)(6,36mH) = 8 + j0,7999$$

Pasando de forma rectangular a polar, con la ecuación ( 5.7),

$$Z = a + jb = \sqrt{a^2 + b^2} \angle \tan^{-1} \left( \frac{b}{a} \right) \quad (5.7)$$

Reemplazando en la ecuación ( 5.7), se obtiene la impedancia en su forma polar.

$$\sqrt{8^2 + 0,8^2} = 8,04\Omega \quad \tan^{-1} \left( \frac{0,7999}{8} \right) = 5,7^\circ$$

$$Z_{TW} = 8,039\Omega \angle 5,7^\circ$$

Una vez obtenida la impedancia de forma polar se determina la corriente  $i_W$  en el circuito para luego determinar el voltaje en el altavoz  $v_W$  y la potencia en el woofer  $P_W$ , para esto se usa la ley de Ohm, ecuación ( 5.8), con el voltaje de entrada de 2.83V y la impedancia total del circuito  $Z_{TW}$ .

$$v = iR = iZ \quad (5.8)$$

$$i_W = \frac{2,83V}{Z_{TW}} = \frac{2,83}{8,04\angle 5,7^\circ} = 352mA\angle -5,7^\circ$$

Ahora para determinar el voltaje en el altavoz se usa la ley de ohm,

$$v_W = i_W \cdot R_W = 352mA\angle -5,7^\circ \cdot 8\Omega = 2,816V\angle -5,7^\circ$$

Para calcular la potencia eléctrica, se usa la ley de Watt eléctrica con la ecuación ( 5.9)

$$P = iv = i^2R = v^2/R \quad (5.9)$$

$$P_W = i_W^2 \cdot R_W = 352mA^2 \cdot 8\Omega = 0,99W$$

Ahora calculamos la presión sonora que emite el altavoz a esta frecuencia de operación, con la ecuación ( 5.6),

$$p_W = \frac{p_s \cdot v_W}{v_s} = \frac{1Pa \cdot 2,816}{2,83} = 0,995Pa$$

Y se determina el nivel de presión sonora con base en la ecuación ( 5.3)

$$dB_{spl} = 20\text{Log}_{10} \left( \frac{0,995Pa}{20\mu Pa} \right) = 93,94dB_{spl}$$

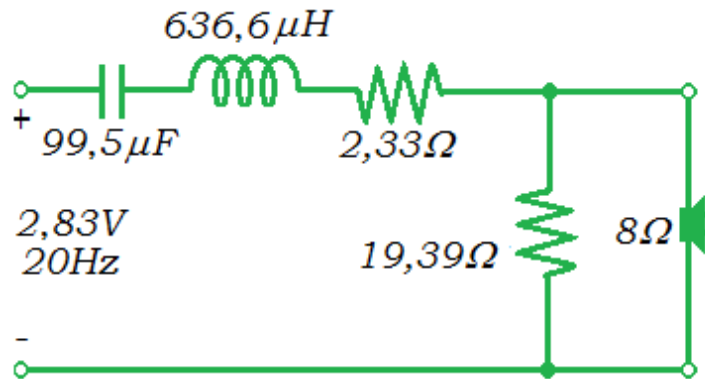
El Woofer emite 93,94dBspl de nivel de presión sonora a 1W de potencia eléctrica, cuando está trabajando en una frecuencia de 20Hz.

#### 5.1.7.2 Midrange

Ahora para el altavoz de frecuencia media, se hace el mismo procedimiento que se hizo para el altavoz de baja frecuencia. Pero en este caso el cálculo es más extenso debido a que toca tener en cuenta todo el circuito como aparece en la Figura 5.10, donde los

elementos reactivos son encargados del filtro y los resistores establecen la atenuación requerida para este altavoz.

Para empezar a calcular la impedancia total del circuito, se tiene en cuenta que el conjunto de resistores con el altavoz equivale a la impedancia del altavoz  $R_M = 8\Omega$ , y con la frecuencia de trabajo de  $f = 20\text{Hz}$ .



**Figura 5.10** Se tiene el circuito para el altavoz de frecuencia media, con sus respectivos valores de componentes que cumplen con el diseño propuesto.

Se procede a calcular la impedancia,

$$Z_{TM} = R_M + j\omega L_1 - j \frac{1}{\omega C_2}$$

Se reemplazan los valores de los componentes y la frecuencia,

$$Z_{TM} = 8 + j(2\pi 20)(636,6\mu H) - j \frac{1}{(2\pi 20)(99,5\mu F)}$$

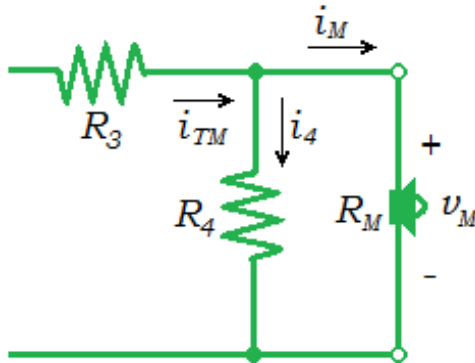
$$Z_{TM} = 8 + j0,07999 - j79,98 = 8 + j0,08 - j80 = 8 - j79,92$$

Ya con el valor aproximado de impedancia expresado en su forma rectangular, se procede a expresar la impedancia en su forma polar como ya se explicó, con la ecuación ( 5.7),

$$Z_{TM} = 80,32\Omega \angle - 84,28^\circ$$

Ya conocida la impedancia se calcula el voltaje, la corriente, y la potencia en el altavoz, para poder calcular la presión acústica y el nivel de presión sonora  $dB_{spl}$ . Se comienza por determinar la corriente total del circuito  $i_{TM}$ ,

$$i_{TM} = \frac{2,83V}{Z_{TM}} = \frac{2,83}{80,32 \angle -84,28^\circ} = 35,23mA \angle 84,28^\circ$$



**Figura 5.11** Se muestra parte del circuito que divide la corriente total en dos ramas, una para la resistencia  $R_4$ , y otra rama para el altavoz que es donde se concentra el cálculo.

Ahora se tiene la corriente total del circuito  $i_{TM}$ , y como se ve en la Figura 5.11, se divide la corriente, usando un divisor de corriente se puede estimar la corriente en el altavoz  $i_M$ , se multiplica la corriente total por el otro elemento diferente al altavoz que está en paralelo que sería  $R_4$  y a este producto lo dividimos por la suma de  $R_4$  y  $R_M$ , como se muestra en la ecuación ( 5.10),

$$i_M = \frac{i_{TM} \cdot R_4}{R_4 + R_M} = \frac{35,23mA \angle 84,28^\circ \cdot 19,4}{8 + 19,4} = 24,94mA \angle 84,28^\circ \quad (5.10)$$

Ahora se calcula el voltaje y la potencia,

$$v_M = i_M \cdot R_M = 24,94mA \angle 84,28^\circ \cdot 8\Omega = 199,52mV \angle 84,28^\circ$$

$$P_M = i_M^2 \cdot R_M = 24,94mA^2 \cdot 8\Omega = 4,97mW$$

Ahora se hacen los cálculos de nivel de presión sonora a partir de la sensibilidad del altavoz, como se hizo en el altavoz de baja frecuencia, con base en la ecuación ( 5.4) y ( 5.6) respectivamente se tiene que,

$$s_M = \frac{20\mu Pa \cdot 10^{97/20}}{2,83V} = \frac{p_S}{v_S} = \frac{1,41Pa}{2,83V}$$

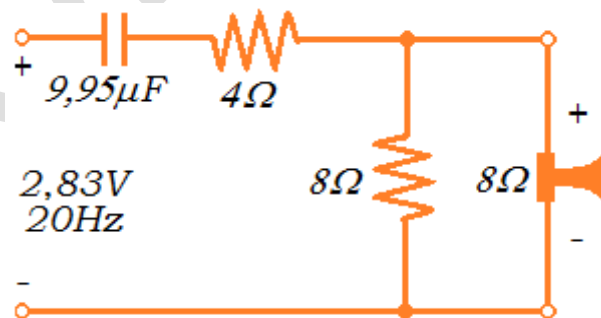
$$p_M = \frac{p_S \cdot v_M}{v_S} = \frac{1,41Pa \cdot 199,52mV}{2,83} = 99,4mPa$$

Y finalmente se obtiene el nivel de presión sonora tomando la ecuación ( 5.3),

$$dB_{spl} = 20Log_{10} \left( \frac{99,4mPa}{20\mu Pa} \right) = 73,93dB_{spl}$$

El altavoz de rango medio reproduce los 20Hz, con un nivel de aproximadamente 74dBspl, 20dB menos que el altavoz de baja frecuencia, lo que quiere decir que funciona bien el sistema, pues una frecuencia baja como 20Hz, debe ser bien reproducida por el woofer, y debe ser eliminada por las otras vías. La presión acústica para la vía media es 100 veces menor que para la vía de baja frecuencia en los 20Hz.

### 5.1.7.3 Tweeter



**Figura 5.12** Se tiene el circuito para el tweeter, con su respectiva red de atenuación conformada por los resistores, y su filtro que depende del capacitor y la resistencia equivalente.

Ahora se analiza la vía de alta frecuencia a partir del circuito de la Figura 5.12, donde se calcula primero la impedancia total del circuito,

$$Z_{TT} = R_T - j \frac{1}{\omega C_1} = 8 - j \frac{1}{(2\pi 20) 9,95 \mu F}$$

$$Z_{TT} = 8 - j799,77$$

$$Z_{TT} = 799,81 \Omega \angle -89,42^\circ$$

Una vez obtenida la impedancia total del circuito  $Z_{TT}$ , se procede a calcular la corriente total del circuito  $i_{TT}$ ,

$$i_{TT} = \frac{2,83V}{Z_{TT}} = \frac{2,83}{799,81 \Omega \angle -89,42^\circ} = 3,53 mA \angle 89,42^\circ$$

Se hace el divisor de corriente para determinar la corriente que hay en el altavoz,

$$i_T = \frac{i_{Total} \cdot R_2}{R_2 + R_T} = \frac{3,53 mA \cdot 8}{8 + 8} = 1,76 mA$$

Luego se calcula el voltaje y la potencia,

$$v_T = i_T \cdot R_T = 1,76 mA \cdot 8 \Omega = 14,15 mV$$

$$P_T = i_T^2 \cdot R_T = 1,76 mA^2 \cdot 8 \Omega = 0,025 mW$$

Por último, se calcula la presión acústica y el nivel de presión sonora,

$$S_T = \frac{20 \mu Pa \cdot 10^{100/20}}{2,83V} = \frac{p_S}{v_S} = \frac{2 Pa}{2,83V}$$

$$p_T = \frac{p_S \cdot v_T}{v_S} = \frac{2Pa \cdot 14,15mV}{2,83} = 0,01Pa$$

$$dB_{spl} = 20Log_{10} \left( \frac{0,01Pa}{20\mu Pa} \right) = 53,97dB_{spl}$$

En resumen, para esta frecuencia de operación 20Hz cada vía responde diferente, según la frecuencia, para observar este cambio según la vía y la frecuencia, a continuación, se muestra un cuadro de resumen para comparar los datos de cada altavoz.

@20Hz	Woofers	Midrange	Tweeter
<i>Impedancia</i>	8,039Ω∠5,7°	80,32Ω∠-84,28°	799,81Ω∠-89,42°
<i>Corriente</i>	352mA	24,94mA	1,76mA
<i>voltaje</i>	2,816V	199,52mV	14,15mV
<i>Potencia</i>	0,99W	4,97mW	0,025mW
<i>presión</i>	0,995Pa	99,4mPa	0,01Pa
<i>dBspl</i>	93,94dB <sub>spl</sub>	73,93dB <sub>spl</sub>	53,97dB <sub>spl</sub>

Como se observa en el cuadro de resumen, en esta frecuencia de operación 20Hz, se tiene un comportamiento esperado, donde en la baja frecuencia la impedancia es prácticamente la del altavoz, lo que permite entregar toda la potencia de 1W en el altavoz, y así reproducir la baja frecuencia logrando respetar la sensibilidad del altavoz, de manera que el espacio de frecuencia donde trabaja el altavoz de baja frecuencia sea uniforme con la misma sensibilidad.

En el rango de frecuencia media, se observa cómo se incrementa la impedancia debido a los elementos reactivos lo que hace que la potencia en el altavoz de media frecuencia sea menor que en baja frecuencia, además esto hace que el nivel de presión sonora disminuya cumpliendo el propósito de evitar que las bajas frecuencias de la entrada sean reproducidas por la vía de media frecuencia, el filtro se encarga de rechazar las bajas frecuencias.

En la vía de alta frecuencia se ve un incremento de impedancia de casi 100 veces, respecto la vía de baja frecuencia, lo que evidencia el rechazo de este filtro de alta frecuencia a las frecuencias bajas en la señal de entrada, lo que hace que el tweeter trabaje selectivamente en alta frecuencia.

Por otro lado se protege el transductor, debido a que los altavoces de alta frecuencia son de pequeñas dimensiones y están contruidos para tener pequeñas excursiones del diafragma pues son hechos para la alta frecuencia, para reproducir baja frecuencia se requiere una amplia excursión del diafragma, luego se debe proteger el altavoz de alta frecuencia y evitar que reciba señales eléctricas de baja frecuencia que obliguen al diafragma a tener amplias excursiones que conllevan a la ruptura del transductor. Por

este motivo siempre se debe filtrar los altavoces de alta frecuencia, es común encontrar que los transductores de este tipo, suelen venderse con un capacitor incorporado con el propósito de protegerlo, pero para efectos de diseño se debe tener en cuenta pues puede alterar el diseño de un filtro y que éste no funcione como se esperaba.

## **5.2 FILTROS SEPARADORES DE FRECUENCIA DE SEGUNDO ORDEN.**

En los filtros separadores de frecuencia aplicados a sistemas de reproducción de sonido de varias vías, se deben implementar de manera que usen la mínima cantidad de resistores, por ese motivo el filtro de segundo orden se debe hacer con dos elementos reactivos de diferente tipo, así es posible usar un solo resistor, que en este caso se usa la impedancia del altavoz como el elemento resistor del circuito.

*Nota: Los filtros de segundo orden que se explican en la sección 4.1, no son una buena solución para este caso, como se sustenta detalladamente en dicha sección.*

La red que se estudia a continuación estará dada para un sistema de dos vías, donde se asume que la sensibilidad de los dos altavoces woofer y tweeter es igual, es decir no hay atenuadores, también la impedancia de cada altavoz es igual. En este caso, observar que cada vía tiene un filtro de segundo orden con dos elementos reactivos de diferente tipo, donde el altavoz es la carga del filtro.

Se usan filtros de segundo orden, cuando se quiere hacer los filtros más selectivos pues al aumentar el orden del filtro sus pendientes en la banda de rechazo se hacen más pronunciadas de manera que se produce mayor atenuación en la banda de rechazo, de esta forma los filtros separadores de frecuencias hacen mejor su trabajo debido a que las pendientes de segundo orden son de 12dB cada octava mientras que las pendientes de primer orden son de 6dB cada octava. Por otro lado, aparecen algunas condiciones de fase en la radiación acústica como consecuencia de los filtros eléctricos que afectan cada vía, dichas condiciones serán comentadas más adelante.

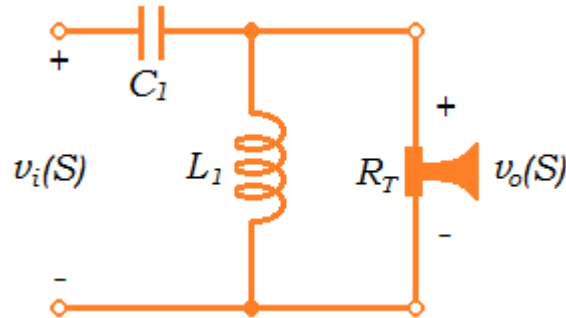
### **5.2.1 Filtro pasa altos pasivo de segundo orden.**

Tomando como base el circuito RLC de la sección 4.2.4, muestra cómo hacer filtros pasivos, pasa altos, pasa bajos y pasa banda, según donde se observe la salida. Y se explicó que para hacer un filtro pasa altos, se debe ubicar el inductor en la salida del circuito, en un circuito RLC en serie.

Para implementar el filtro pasa altos pasivo de segundo orden, para un altavoz donde se procura transferir la mayor cantidad de potencia al altavoz, se sugiere partir de un filtro pasa altos de primer orden RC, ver Figura 3.7, para aumentar el orden se ubica un inductor en paralelo con la carga, pues se tiene en cuenta que si se ubica el inductor en serie hará un rechazo en frecuencia altas y se tendría un filtro pasa banda, ahora al ubicar



el inductor en paralelo el rechazo lo hará en baja frecuencia y no en alta frecuencia, permitiendo que se aumente el orden del filtro y manteniendo el comportamiento pasa altos, a continuación se propone como hacer un diseño de este filtro a partir de la frecuencia de cruce requerida, la impedancia del altavoz y el factor de amortiguamiento, que tendrá un efecto muy importante en este tipo de filtros separadores de frecuencia para altavoces no coincidentes.



**Figura 5.13** Filtro pasa altos pasivo de segundo orden.

Como se ha hecho anteriormente con todos los circuitos, se plantea la función de transferencia a partir del circuito de la Figura 5.13. Se tiene que,

$$G(S) = \frac{(L_1 S \parallel R_T)}{\frac{1}{C_1 S} + (L_1 S \parallel R_T)}$$

Resolviendo el paralelo se tiene,

$$(L_1 S \parallel R_T) = \frac{L_1 S \cdot R_T}{L_1 S + R_T}$$

Después de remplazar el paralelo en la función se tiene,

$$G(S) = \frac{\frac{L_1 S \cdot R_T}{L_1 S + R_T}}{\frac{1}{C_1 S} + \frac{L_1 S \cdot R_T}{L_1 S + R_T}}$$

Para facilitar la solución se acomoda la función de manera que en el numerador y en denominador, quede un fraccionario con el mismo denominador,

$$G(S) = \frac{\frac{L_1 S \cdot R_T}{L_1 S + R_T}}{\frac{(1/C_1 S)(L_1 S \cdot R_T) + L_1 S \cdot R_T}{L_1 S + R_T}}$$

Se resuelve la ecuación anterior, de manera que se describa como una función de transferencia, con el denominador con un polinomio que tiene su variable de mayor grado con coeficiente igual a la unidad.

$$G(S) = \frac{L_1 S \cdot R_T}{(1/C_1 S)(L_1 S \cdot R_T) + L_1 S \cdot R_T} \cdot \frac{S/L_1 R_T}{S/L_1 R_T}$$

Ahora se tiene la función de transferencia en la ecuación ( 5.11), que confirma el comportamiento pasa altos que tiene el filtro descrito.

$$G(S) = \frac{S^2}{S^2 + \frac{1}{C_1 R_T} S + \frac{1}{L_1 C_1}} \quad (5.11)$$

Teniendo como referencia la ecuación ( 4.26), donde se muestra una función de transferencia para un filtro pasa altos de segundo orden, se tienen las siguientes relaciones entre los parámetros del filtro y los elementos eléctricos que éste tiene.

$$\omega_0^2 = \frac{1}{L_1 C_1} \quad (5.12)$$

La frecuencia crítica como ya se había explicado antes depende de los elementos reactivos del circuito.

$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{1}{C_1 R_T} \quad (5.13)$$

El factor de calidad  $Q$  depende de la resistencia que en este caso se trata del altavoz, que como se venido trabajando, se toma el valor de impedancia nominal y se analizará el circuito donde la carga es el altavoz.

En estos filtros es muy importante el valor de  $Q$  para que exista un control sobre la zona de frecuencia de cruce, pues es en esta zona donde se separan las frecuencias de los dos altavoces y para que exista un buen acople entre los dos, se debe tener el control del  $Q$ , pues como ya se revisó en la sección 4.2.2, el valor de  $Q$  afecta el comportamiento del filtro cerca de la frecuencia crítica.

Para efectos prácticos de este filtro la Impedancia de carga, el altavoz, no se puede cambiar, luego el factor de calidad  $Q$  y la frecuencia crítica  $\omega_0$ , dependerá de los valores de capacitor e inductor, luego el diseño se propone a partir de la impedancia del altavoz  $R_T$ , la frecuencia crítica  $\omega_0$  y el factor de calidad  $Q$ . y con base en estos parámetros se determina el valor de capacitor e inductor.

A partir de las dos relaciones presentadas en las ecuaciones ( 5.12) y ( 5.13), se tiene la siguiente expresión que permite calcular el valor de inductancia y capacitancia, a partir de la frecuencia de cruce  $f_c$ , el factor de calidad  $Q$  y la impedancia del altavoz  $R_T$ .

$$L_1 = \frac{R_T}{2\pi f_c Q} \quad (5.14)$$

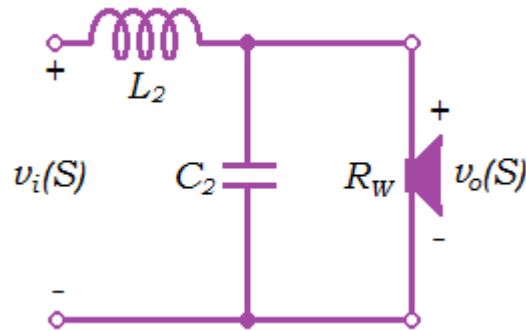
$$C_1 = \frac{Q}{2\pi f_c R_T} \quad (5.15)$$

Con estas ecuaciones ( 5.14) y ( 5.15), es sencillo encontrar los valores de los elementos eléctricos para cumplir con un determinado diseño de filtros separadores de frecuencia.

### 5.2.2 Filtro pasa bajos pasivo de segundo orden.

En este filtro que se muestra en la Figura 5.14, el denominador de la función de transferencia es igual al caso pasa altos, cambia el numerador, pero la dependencia de la frecuencia crítica a partir de los elementos reactivos no cambia de pasa altos a pasa bajos, luego la forma de calcular el capacitor y la bobina, es igual para los dos filtros, así mismo pasa con el  $Q$ .

Como se evidencia en la Figura 5.13 y Figura 5.14, lo que hace diferente a los circuitos es la posición del capacitor y el inductor.



**Figura 5.14** Se muestra el circuito pasa bajos pasivo de segundo orden.

La función de transferencia para este filtro es,

$$G(S) = \frac{\frac{1}{L_2 C_2}}{S^2 + \frac{1}{C_2 R_w} S + \frac{1}{L_2 C_2}} \quad (5.16)$$

En comparación con la ecuación ( 5.11), que describe el comportamiento pasa altos, Figura 5.13, la función de transferencia en ( 5.16), describe el comportamiento pasa bajos, Figura 5.14.

Para calcular los componentes del circuito se tienen las siguientes ecuaciones,

$$L_2 = \frac{R_w}{2\pi f_c Q} \quad (5.17)$$

$$C_2 = \frac{Q}{2\pi f_c R_w} \quad (5.18)$$

### 5.2.3 Efectos del Q en el cruce de frecuencias de cada filtro.

En estos filtros de segundo orden el cambio de Q, hace que la magnitud en la frecuencia crítica sea diferente como ya se analizó anteriormente en capítulo 4,

## 6 IMPEDANCIA MECÁNICA DE RADIACIÓN

---

### 6.1 IMPEDANCIA ACÚSTICA ESPECÍFICA

Se trata de la oposición que presenta el medio de propagación (aire) cuando existe una radiación de energía acústica.

La Impedancia acústica depende de la presión acústica y la velocidad de partícula, a continuación, se estudia la impedancia para una propagación de onda plana y para onda esférica, con el objeto de comparar los dos casos y establecer condiciones de frecuencia.

Haciendo la analogía con la ley de Ohm eléctrica, ecuación ( 6.1), donde la impedancia eléctrica es la cantidad de voltaje entre la corriente; la impedancia acústica es la cantidad de presión acústica entre la velocidad de partícula, ecuación ( 6.2). Donde la impedancia es la oposición que hay en la variable que representa la energía cinética, la corriente eléctrica y la velocidad de partícula, como un efecto. A partir de la variable que representa la energía potencial, como causa, el voltaje y la presión acústica. Luego la Impedancia es la relación entre la causa y el efecto, ecuación ( 6.3).

$$\text{impedancia eléctrica } [\Omega] = \frac{\text{voltaje } [v]}{\text{corriente } [i]} \quad (6.1)$$

$$\text{impedancia acústica } [\Omega] = \frac{\text{presión acústica } [p]}{\text{velocidad de partícula } [u]} \quad (6.2)$$

$$\text{oposición } [\Omega] = \frac{\text{causa } [\text{energía potencial}]}{\text{efecto } [\text{energía cinética}]} \quad (6.3)$$

#### 6.1.1 Presión Acústica

La presión acústica consiste en las pequeñas variaciones de presión atmosférica que son resultado de perturbaciones mecánicas, estas variaciones se propagan en el aire y son percibidas por nuestros oídos, en un rango de frecuencia de 20Hz, a 20KHz.

Para el estudio de este comportamiento del sonido, se modela el fenómeno con ondas longitudinales, y dicha variación de presión que se propaga en el aire es descrito por la ecuación de onda, ecuación ( 6.4),

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \frac{\delta^2 p}{\delta t^2} = 0 \quad (6.4)$$

Esta ecuación de onda genérica para las tres dimensiones, muestra la dependencia espacial y temporal que tiene la variación de presión y tiene como constante la velocidad de propagación del sonido  $c$ , que corresponde a 340m/s a temperatura ambiente promedio.

La ecuación de onda tiene diferentes soluciones según el caso, para los siguientes casos que se estudiaran se tomará la solución exponencial compleja, que permite una descripción armónica oscilante con frecuencias definidas en el espectro audible para el estudio en los sistemas de sonido.

#### 6.1.1.1 Presión Onda Plana

La solución armónica de la ecuación de onda unidimensional que se presenta en la ecuación ( 6.5), sólo toma el término que corresponde a la propagación de la onda es decir el avance de ésta desde el origen  $x = 0$ , hacia los valores de  $x$  positivos.

$$p(x, t) = p_0 e^{j(\omega t - kx)} \quad (6.5)$$

Donde,

$p_0$ , es la presión inicial, que produce la fuente en su origen, dada en pascales [Pa] o newton por unidad de área [ $N/m^2$ ], también es denominada la amplitud compleja, que depende de la geometría de la fuente, la densidad del medio y la amplitud de velocidad mecánica de la fuente.

$\omega$ , es la frecuencia angular dada en radianes por segundo [ $rad/seg$ ], que contiene la frecuencia de operación del sistema, siendo  $\omega = 2\pi f$ , donde  $f$  es la frecuencia dada en Hertz que son la cantidad de ciclos que se repiten en unidad de tiempo, el segundo.

$t$ , será el tiempo, pues se tiene una función de presión dependiente del tiempo. Luego el instante  $t$ , tendrá un valor de presión entre cero y  $p_0$ .

$k$ , es el vector número de onda, de forma similar a la frecuencia, pero en términos de distancia, indica, la cantidad de ciclos que se caben en una unidad de longitud, y se toma como base  $2\pi$ , que corresponde a 6,28 metros. Entonces si  $k = 1$ , quiere decir que la longitud de onda corresponde a una longitud de 6,28 metros. Ahora si  $k = 2$ , quiere decir que hay dos longitudes de onda en una distancia de 6,28 metros.

$x$ , es la distancia desde la fuente (el origen), hasta el punto de análisis. También indica que nivel de presión sonora en el espacio  $x$  y el instante de tiempo  $t$ .

Para esta forma de propagación de onda plana, se tiene en cuenta que es una onda que NO es divergente, y que se propaga en una única dirección  $x$ , también se tiene en cuenta que se generan ondas planas en situaciones específicas, como en el interior de un tubo y que no es común que la propagación libre, sin tubos, ni recintos, sea de forma plana, pues siempre hay un grado de atenuación con respecto a la distancia de propagación, pues se entiende a partir de la ecuación ( 6.5), que esta onda NO presenta atenuación con la distancia, es decir, se mantiene la presión acústica inicial  $p_0$  a lo largo de la propagación.

#### 6.1.1.2 Presión Onda Esférica

La solución de la ecuación de onda, en una geometría esférica u omnidireccional, para oscilaciones armónicas, está dada en la siguiente ecuación ( 6.6),

$$p(x, r) = \frac{p_0}{r} e^{j(\omega t - kr)} \quad (6.6)$$

En este caso se tiene las mismas variables que en caso de la onda plana, con la diferencia que la variable espacial no se define como  $x$ , sino como  $r$ . Este cambio es debido a que la propagación esférica se da en todas las direcciones y se determina la distancia  $r$ , como el radio con origen en el centro de la esfera, luego no importa en qué dirección se analiza el resultado es el mismo.

Otra diferencia es que la presión inicial  $p_0$ , está dividida por la distancia de análisis, lo que indica que la propagación sufre una atenuación a medida que se aleja de la fuente, fenómeno conocido como la ley del inverso cuadrado, que simplemente consiste en que cada vez que se duplica la distancia se tiene una pérdida de presión a la mitad, que corresponde a -6dB de magnitud cada vez que se duplica la distancia.

Esta atenuación ocurre debido a que el frente de onda de forma esférica es divergente y por su forma, a medida que se propaga la onda la esfera es más grande y la energía se distribuye en una superficie cada vez más grande, haciendo que la magnitud en un punto de la esfera sea cada vez menor.

## 6.1.2 Velocidad de partícula

La velocidad de partícula  $u$  se determina a partir de la ecuación de estado de Euler, que relaciona la velocidad de partícula  $u$  y la presión  $p$ , ésta ecuación permite estimar la velocidad a partir de la presión que ya está definida en el apartado anterior, según la forma de propagación, plana y/o esférica.

Entonces se tiene que la ecuación de Euler, ecuación ( 6.7), muestra la dicha relación entre velocidad y presión que tiene como constante la densidad estática del aire  $\rho_0$ .

$$\frac{\delta p}{\delta x} = -\rho_0 \frac{\delta u(x, t)}{\delta t} \quad (6.7)$$

Se debe despejar la velocidad de la ecuación, y para este propósito se usa una función de velocidad de forma armónica exponencial compleja, dada de la siguiente manera como se muestra en la ecuación ( 6.8),

$$u(x, t) = u_0 e^{j(\omega t - kx)} = u(x) e^{j\omega t} \quad (6.8)$$

Luego de reemplazar la velocidad  $u(x, t)$  dada en la ecuación ( 6.8) en la ecuación ( 6.7). Se deriva la velocidad respecto al tiempo y de despeja para obtener la siguiente ecuación ( 6.9), que sería la ecuación de estado estacionario de Euler.

$$u(x, t) = \frac{-1}{j\omega\rho_0} \frac{\delta p}{\delta x} \quad (6.9)$$

Con la ecuación de Euler se determina la velocidad de partícula, a partir de la presión acústica, a continuación, se muestra la velocidad para onda plana y para onda esférica, para determinar estas expresiones se reemplaza en la ecuación ( 6.9), la presión según el tipo de onda, luego se deriva para obtener la velocidad.

### 6.1.2.1 Velocidad para onda plana

La ecuación ( 6.9), con la presión dada en la ecuación ( 6.5), queda de la siguiente manera como se observa en la ecuación ( 6.10),



$$u(x, t) = \frac{-1}{j\omega\rho_0} \frac{\delta}{\delta x} [p_0 e^{j(\omega t - kx)}] \quad (6.10)$$

Después de derivar y organizar la expresión se tiene la ecuación ( 6.11), que representa la velocidad de partícula para una onda plana.

$$u(x, t) = \frac{1}{\rho_0 c} [p_0 e^{j(\omega t - kx)}] \quad (6.11)$$

### 6.1.2.2 Velocidad para onda esférica

Para la velocidad en una onda plana se hace el mismo procedimiento ya explicado, y se tiene la siguiente ecuación ( 6.12),

$$u(r, t) = \frac{-1}{j\omega\rho_0} \frac{\delta}{\delta r} \left[ \frac{p_0}{r} e^{j(\omega t - kr)} \right] \quad (6.12)$$

Después de derivar y organizar la expresión se tiene la ecuación ( 6.13),

$$u(r, t) = \frac{1}{\rho_0 c} \left[ \frac{p_0}{r} e^{j(\omega t - kr)} \right] \left( \frac{1 + jkr}{jkr} \right) \quad (6.13)$$

### 6.1.3 Impedancia Específica de una onda plana

Teniendo como base la relación dada en la ecuación ( 6.2), la impedancia específica para una onda plana será determinada a partir de la presión, ecuación ( 6.5), y la velocidad de partícula, ecuación ( 6.11), para las condiciones de onda plana. Teniendo así,

$$Z_s = \frac{p(x, t)}{u(x, t)} = \frac{p_0 e^{j(\omega t - kx)}}{\frac{1}{\rho_0 c} [p_0 e^{j(\omega t - kx)}]} = \rho_0 c \quad (6.14)$$

La ecuación ( 6.14), que indica que la impedancia es constante, pues depende de dos constantes; la densidad estática del aire  $\rho_0$  y de la velocidad de propagación de ondas acústicas  $c$ .

#### 6.1.4 Impedancia Específica de una onda esférica

A partir de la ecuación ( 6.2), se tiene la forma de determinar la impedancia específica, reemplazando la presión de la ecuación ( 6.6), y la velocidad de la ecuación ( 6.13). Teniendo la siguiente expresión,

$$Z_s = \frac{p(r, t)}{u(r, t)} = \frac{\frac{p_0}{r} e^{j(\omega t - kr)}}{\frac{1}{\rho_0 c} \left[ \frac{p_0}{r} e^{j(\omega t - kr)} \right] \left( \frac{1 + jkr}{jkr} \right)} = \rho_0 c \left( \frac{jkr}{1 + jkr} \right) \quad (6.15)$$

En la ecuación ( 6.15), se tiene la impedancia específica para una onda esférica, donde en este caso se tiene una dependencia con la frecuencia  $k$  y con la distancia de análisis respecto a la posición de la fuente  $r$ .

#### 6.1.5 Comparación entre la impedancia de la onda plana y la esférica

A continuación, se analiza el término que hace diferente la impedancia de una onda plana, ecuación ( 6.14), y la impedancia de una onda esférica, ecuación ( 6.15). El análisis se basa en observar la expresión matemática, ecuación ( 6.16), en alta frecuencia y en baja frecuencia, y así, observar el comportamiento de la impedancia en función de la frecuencia, dado como el producto  $kr$ .

$$\left( \frac{jkr}{1 + jkr} \right) \quad (6.16)$$

##### 6.1.5.1 Alta frecuencia

El análisis en alta frecuencia (HF), se hace el producto  $kr$ , mucho mayor que la unidad haciendo incrementos de frecuencia. Teniendo así,

$$\frac{Z_s(HF)}{\rho_0 c} = \left( \frac{jkr}{1 + jkr} \right)_{kr \gg 1} \approx 1 \quad (6.17)$$

$$Z_s(HF) \approx \rho_0 c \quad (6.18)$$

Si también se incrementa la distancia de análisis el resultado sigue con la misma tendencia. Como se ve en las ecuaciones ( 6.18) y ( 6.17).

Esto permite de alguna manera deducir que el comportamiento en alta frecuencia ya sea en distancias cortas o largas, es similar y la impedancia de la onda esférica tiende a ser igual que la impedancia de las ondas planas, lo que indica que el medio hace que la alta frecuencia tenga un comportamiento más directivo, menos divergente, de alguna manera el frente de onda pierde curvatura en alta frecuencia y en la distancia.

### 6.1.5.2 Baja frecuencia

Para el análisis en baja frecuencia (LF), se pone la condición que el producto  $kr$  es mucho menor que la unidad, teniendo  $kr \ll 1$ , la magnitud de la ecuación ( 6.16), tiende a ser más pequeña cada vez que disminuye la frecuencia. Como se observa en la ecuación ( 6.19),

$$\frac{Z_s(LF)}{\rho_0 c} = \left( \frac{jkr}{1 + jkr} \right)_{kr \ll 1} \approx 0 \quad (6.19)$$

$$Z_s(LF) < \rho_0 c \quad (6.20)$$

Esta disminución de la impedancia en baja frecuencia hace que la velocidad de partícula aumente. Si se observa en función de la distancia  $r$ , existe un aumento de impedancia a medida que se aleja de la fuente, aún en baja frecuencia, lo que quiere decir que en determinada distancia la impedancia de la onda esférica tiende a ser igual que la impedancia de la onda plana.

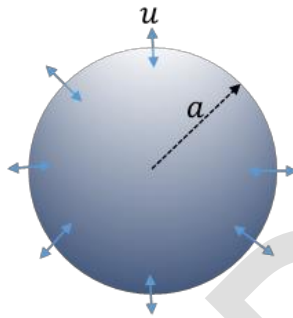
Se deduce de este comportamiento que incluso en baja frecuencia, la impedancia puede aumentar con la distancia, lo que indica que en baja frecuencia existe curvatura en el frente de onda en distancias cortas, pero la curvatura tiende a comportarse como una onda plana en largas distancias. Eso describe el modelo matemático de la impedancia específica para este tipo de ondas.

## 6.2 IMPEDANCIA MECÁNICA DE RADIACIÓN FUENTE ESFÉRICA

La impedancia mecánica de radiación de una fuente esférica, trata de como el medio se opone a la radiación de energía acústica que se origina en un elemento esférico que

experimenta un movimiento armónico mecánico, donde la superficie de este elemento oscila y entra en contacto con el aire.

La impedancia mecánica de radiación, describe como se transforma la energía mecánica en energía acústica, además indica cómo se manifiesta la energía, que puede ser disipada en el medio en forma de energía acústica o puede ser almacenada de forma reactiva donde la inercia es dada a través de una masa acústica.



**Figura 6.1** Una esfera radiante con radio  $a$ , y su superficie oscilante a una velocidad  $u$ , que es uniforme en toda la superficie de la esfera.

Para determinar la impedancia mecánica de radiación, se plantea a partir de la impedancia específica para onda esférica y la superficie radiante para un elemento de geometría esférica donde la superficie está dada en la ecuación ( 6.21),

$$S_e = 4\pi a^2 \quad (6.21)$$

La impedancia mecánica de radiación  $Z_{MR}$ , es el producto de la impedancia específica  $Z_s$  para ondas esféricas que se presentó en la ecuación ( 6.15) teniendo en cuenta que la distancia de análisis es el radio de la esfera por lo cual se define la distancia  $a$ , en vez de  $r$ ; y la superficie de una esfera  $S_e$  que se muestra en ( 6.21), teniendo así,

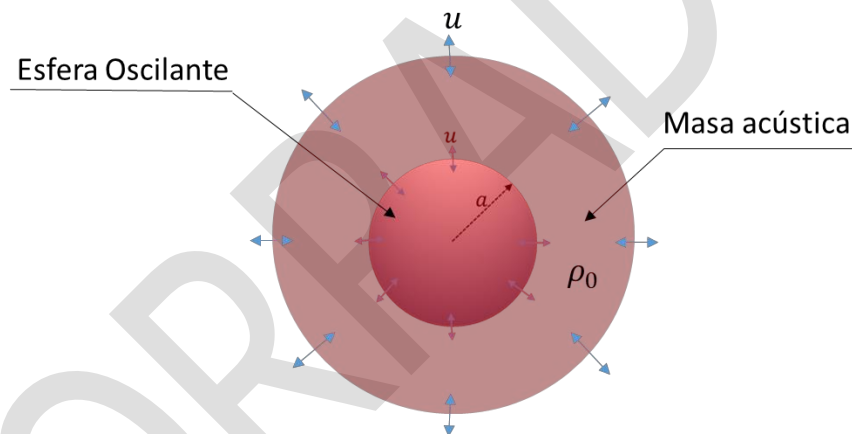
$$Z_{MR} = S_e \cdot Z_s = 4\pi a^2 \cdot \rho_0 c \left( \frac{jka}{1 + jka} \right) \quad (6.22)$$

Se desarrolla la ecuación ( 6.22), que presenta números imaginarios, de manera que quede representado como un número complejo con su parte real e imaginaria bien definidas. Para este propósito, se toma el término dentro del paréntesis y se multiplica por el conjugado complejo del denominador y así queda definido el número complejo a nivel de numerador y no de denominador. Obteniendo así la siguiente expresión,

$$Z_{MR} = \rho_0 c 4\pi a^2 \left( \frac{(ka)^2}{1 + (ka)^2} \right) + j\rho_0 c 4\pi a^2 \left( \frac{ka}{1 + (ka)^2} \right) \quad (6.23)$$

Ya teniendo la ecuación ( 6.23), se establece una parte real y una imaginaria, la parte real se interpreta como una resistencia mecánica de radiación  $R_{MR}$ , pues en términos de impedancia la parte resistiva siempre hace referencia a la parte real del número complejo debido a su comportamiento de disipar energía. Sin embargo, es interesante que, en este caso particular de impedancia mecánica de radiación, la parte real depende de la frecuencia.

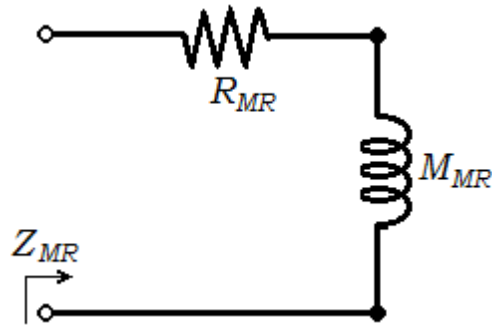
La parte imaginaria sería una reactancia mecánica de radiación  $X_{MR}$ , que indica un hay almacenamiento de energía y en la expresión matemática imaginaria se tiene implícito un producto entre la frecuencia compleja  $j\omega$ , la densidad del medio  $\rho_0$ , y un volumen de aire; esto indica que la parte imaginaria en la impedancia mecánica de radiación representa una masa acústica que varía con la frecuencia.



**Figura 6.2** Muestra cómo sería la masa acústica que se genera sobre la superficie de la esfera radiante, se denota que la masa acústica es un volumen de aire que se mueve con la misma velocidad que la superficie de la esfera.

$$Z_{MR} = R_{MR} + X_{MR} = R_{MR} + j\omega M_{MR} \quad (6.24)$$

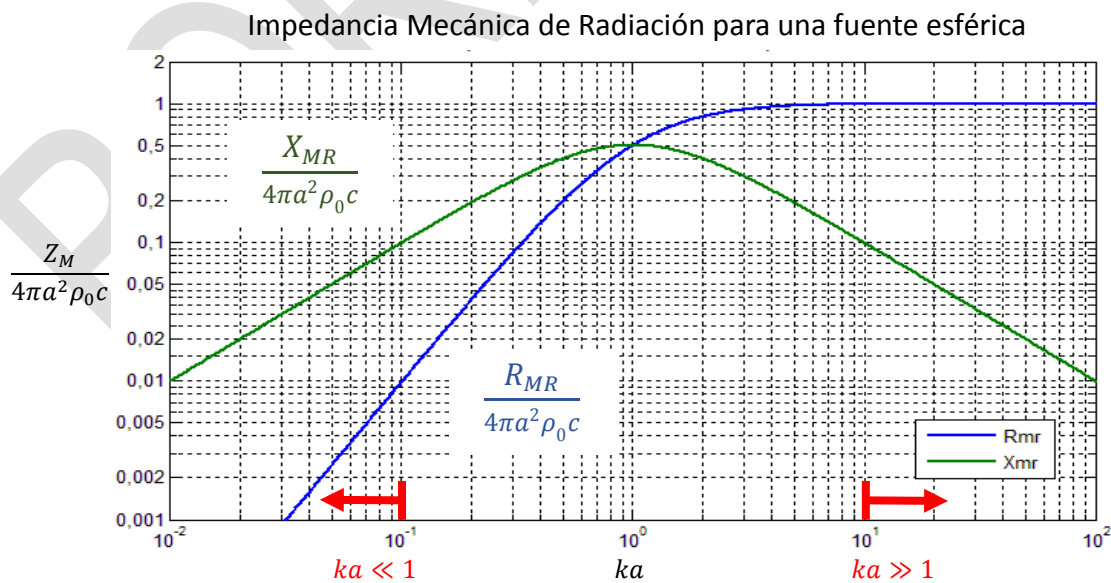
La Impedancia Mecánica de Radiación  $Z_{MR}$ , representada con la expresión de la ecuación ( 6.24), se puede modelar con un circuito equivalente, donde a partir de la expresión matemática se puede establecer un circuito con dos elementos conectados en serie, donde la Resistencia Mecánica de Radiación  $R_{MR}$ , se representa en el circuito con una Resistencia Eléctrica. La parte reactiva que corresponde a una masa acústica con una componente imaginaria positiva, se representa a través de un inductor. Así como se muestra en la Figura 6.3.



**Figura 6.3** La Impedancia Mecánica de Radiación, que se representa con un circuito serie equivalente, es un circuito electro mecánico que describe un sistema mecánico a través de un circuito eléctrico.

Resumiendo, la Impedancia Mecánica de Radiación  $Z_{MR}$  se representa con un número complejo donde la parte real es la Resistencia Mecánica de Radiación  $R_{MR}$ , que indica la disipación de energía que hay en el medio, es decir, cuanta energía mecánica se transforma en energía acústica radiada. La parte imaginaria es la Reactancia Mecánica de Radiación  $X_{MR}$ , que representa que hay energía almacenada a través de la inercia que hay en la Masa Mecánica de Radiación  $M_{MR}$ .

Esta  $M_{MR}$  se trata de un volumen de aire que está añadido en toda la superficie del elemento mecánico oscilante, ver Figura 6.2. Este volumen de aire que oscila al mismo ritmo de la superficie, que no experimenta compresiones, y cada pequeño elemento de aire dentro del volumen se mueve con la misma fase, permite decir que se trata de una masa acústica.



**Figura 6.4** Se muestra el comportamiento de la impedancia mecánica de radiación, separando la parte real en el trazado azul y la reactancia mecánica de Radiación en el trazo

verde. También se pone como referencia en rojo puntos que ayudan a comprender las aproximaciones en alta y baja frecuencia.

En la Figura 6.4, se muestra de manera gráfica, el comportamiento de la resistencia mecánica de radiación y la reactancia mecánica de radiación, en función del producto  $ka$ , donde se está evaluando la magnitud normalizada en función de la frecuencia a través de  $k$ , y del radio de la esfera  $a$ .

El comportamiento de la impedancia separando su parte real e imaginaria, Figura 6.4; es diferente en la zona de baja frecuencia, respecto a la zona de alta frecuencia, donde para la gráfica normalizada; se hace un punto de referencia donde  $ka$  es igual a la unidad, en toda la mitad del eje  $x$ . Observar que en este valor de  $ka$ , la resistencia es iguala a la reactancia.

Para comprender mejor de la situación, se separa el análisis en baja frecuencia y en alta frecuencia.

### 6.2.1 Aproximación en baja frecuencia

Para hacer una aproximación en baja frecuencia (LF), se hace el producto  $ka$  mucho menor que la unidad, donde se pone como punto de referencia para baja frecuencia según la Figura 6.4, donde es menor o igual que 0,1, para la condición,  $ka \leq 0.1$ .

A partir de la ecuación ( 6.23), se evalúa la función para valores muy pequeños de  $ka$ , y se analiza cual es la tendencia o comportamiento en baja frecuencia, sólo para la parte real. Teniendo así, en la ecuación ( 6.25),

$$R_{MR} = 4\pi a^2 \rho_0 c \left( \frac{(ka)^2}{1 + (ka)^2} \right) \quad (6.25)$$

Si  $ka \ll 1$ , se tiene que, la aproximación para baja frecuencia en la parte real queda de la siguiente manera, ecuación ( 6.26)

$$R_{MR}(LF) \cong 4\pi a^2 \rho_0 c (ka)^2 \quad (6.26)$$

Ahora bien, bajo el mismo procedimiento, pero analizando la parte reactiva, se tiene la ecuación ( 6.27),

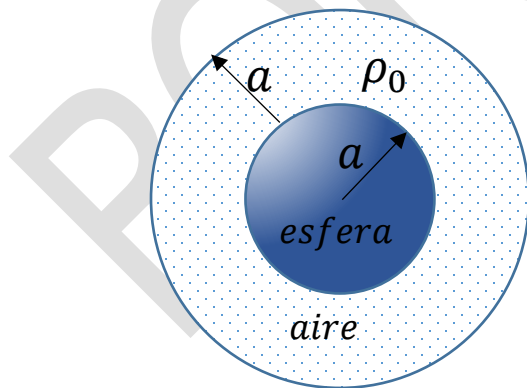
$$X_{MR} = j\rho_0 c 4\pi a^2 \left( \frac{ka}{1 + (ka)^2} \right) \quad (6.27)$$

Ahora bajo la misma condición de  $ka \ll 1$ , se tiene la reactancia mecánica de radiación  $X_{MR}$ , para las oscilaciones de baja frecuencia, como se ve en la ecuación (6.28), donde en baja frecuencia la  $X_{MR}$  es descrita, como el almacenamiento de energía a través de la inercia que genera la masa mecánica de radiación, como se muestra en la ecuación (6.29)

$$X_{MR}(LF) \cong j\omega\rho_0 4\pi a^3 \cong j\omega M_{MR} \quad (6.28)$$

Como se ve en la Figura 6.5, se tiene una representación de la Masa Mecánica de Radiación en baja frecuencia  $M_{MR}(LF)$ , caso en el cual la Impedancia tiende a ser más reactiva que resistiva. Y donde se muestra como esta tendencia reactiva se entiende como una masa acústica añadida a la superficie de la esfera; se tiene la superficie de la esfera multiplicada por el radio de la esfera, y así se tiene un volumen, para determinar la masa de aire que encierra dicho volumen se multiplica por la densidad del aire  $\rho_0$ .

$$M_{MR}(LF) = \rho_0 4\pi a^3 = \rho_0 \cdot 4\pi a^2 \cdot a \quad (6.29)$$



*Superficie esfera*

$$S_e = 4\pi a^2$$

*Masa Mecánica de Radiación*

$$M_{MR}(LF) = \rho_0 \cdot S_e \cdot a$$

**Figura 6.5** Muestra la masa mecánica de radiación, dada por el comportamiento de la esfera oscilante en la zona de baja frecuencia.

Tomando como referencia la Figura 6.4, se muestra de manera gráfica el comportamiento en baja frecuencia de la  $Z_{MR}$ , donde se observa que tiende a ser más reactiva que resistiva



en frecuencias inferiores a  $ka=1$ , donde se puede concluir de manera práctica que la radiación de baja frecuencia es deficiente, debido a que se experimenta un elevado almacenamiento de energía a través de la inercia en la Masa Mecánica de Radiación. Por otro lado, se ve en la ecuación ( 6.26) que para incrementar la Radiación en baja frecuencia la única opción es incrementar el tamaño de la esfera. Esto explica porque en situaciones prácticas las fuentes de pequeñas dimensiones no reproducen bien la baja frecuencia como, por ejemplo; los equipos portátiles o móviles como computadores, teléfonos celulares, tabletas, reproductores de música entre otros. Es por esta razón, que cuando se desea reproducir baja frecuencia, los sistemas de sonido usan fuentes de dimensiones más grandes respecto a las fuentes de alta frecuencia. Por ejemplo: en un sistema *teatro en casa*, los altavoces de alta frecuencia son pequeños y producen un buen nivel de presión sonora, mientras que la dimensión de la fuente de baja frecuencia es varias veces mayor que las fuentes de alta frecuencia.

### 6.2.2 Aproximación para alta frecuencia

Para esta aproximación de alta frecuencia HF, se hace un procedimiento similar al que se hace en la aproximación de baja frecuencia, pero en este caso se estudia la ecuación ( 6.23), con un valor de  $ka$  mucho mayor a la unidad,  $ka \gg 1$ . Para determinar un punto de referencia se analiza en valores de  $ka$  iguales o mayores a 10, cumpliendo la condición  $ka \geq 10$ .

Así mismo, se hace primero el análisis para la parte real a partir de la ecuación ( 6.25), donde se aplica la condición dada para alta frecuencia. Con  $ka \geq 10$ . Con esta condición la parte de la expresión que está dentro del paréntesis tiende a la unidad. Debido a que el denominador tiene el producto  $ka$  sumado con 1, y si  $ka$  es varias veces mayor que la unidad el denominador y el numerador son casi iguales, lo que hace que el fraccionario tiende a la unidad, teniendo así la ecuación ( 6.30), que muestra la tendencia de la parte resistiva en alta frecuencia.

$$R_{MR}(HF) \cong 4\pi a^2 \rho_0 c \quad (6.30)$$

En esta  $R_{MR}(HF)$ , se observa que la Resistencia Mecánica de Radiación para alta frecuencia **no depende de la frecuencia**, la resistencia se vuelve constante a medida que aumenta la frecuencia, y como se había comentado anteriormente la impedancia mecánica de radiación tiene a comportarse como la impedancia de una onda plana, donde es constante con la frecuencia, revisar la sección 6.1.5.

Para analizar la reactancia en alta frecuencia, se toma como base la ecuación ( 6.27), y se aplica la condición para alta frecuencia,  $ka \geq 10$ . Obteniendo de esta manera la ecuación ( 6.31).

$$X_{MR}(HF) \cong j4\pi a^2 \rho_0 c \left( \frac{1}{ka} \right) \quad (6.31)$$

En esta aproximación para alta frecuencia, se concluye que la tendencia de la impedancia es a ser prioritariamente resistiva en esta zona de frecuencia, pues como se ve en la ecuación ( 6.30), la  $R_{MR}$ , es constante y mayor que la  $X_{MR}$ , como se observa en la ecuación ( 6.31). Por el siguiente comportamiento, en alta frecuencia por lo general se tiene una buena radiación sonora, pues la resistencia es constante, mientras que la reactancia tiene a ser menor, lo que indica que la energía es disipada al medio en mayor cantidad, y la masa mecánica de radiación tiende a desaparecer, situación que favorece la reproducción de alta frecuencia.

Por este motivo es común observar de manera práctica que existen sistemas de sonido que reproducen la zona de alta frecuencia con fuentes de pequeñas dimensiones, y es normal encontrar situaciones en las que un altavoz pequeño produce un nivel de presión sonora alto, respecto a la zona de baja frecuencia. Por ejemplo, en un computador portátil, se escucha muy bien la alta frecuencia y con los mismos altavoces cuando se quiere reproducir baja frecuencia se tienen problemas de radiación.

### 6.3 IMPEDANCIA MECÁNICA DE RADIACIÓN PISTÓN PLANO

Para complementar el estudio de la Impedancia Mecánica de Radiación, se estudia también dicho comportamiento en un elemento radiador con geometría de disco, más comúnmente llamado *pistón plano*. Esto porque en el caso práctico, los altavoces como elementos radiadores de energía acústica, por lo general son cónicos y en un amplio espacio de frecuencia el cono es rígido y funciona como una sola pieza, es decir que cada pequeño elemento que conforma el pistón se mueve con la misma velocidad y con la misma fase, bajo esta condición se comportaría como si fuera un pistón plano. En otras zonas de frecuencia existen otros comportamientos como, por ejemplo: los modos propios de vibración de la superficie del cono, la longitud de onda a reproducir en relación con las dimensiones del altavoz, efectos no lineales en la suspensión y el alineamiento magnético, entre otros casos a estudiar en los altavoces, que va más allá de los propósitos de este texto.

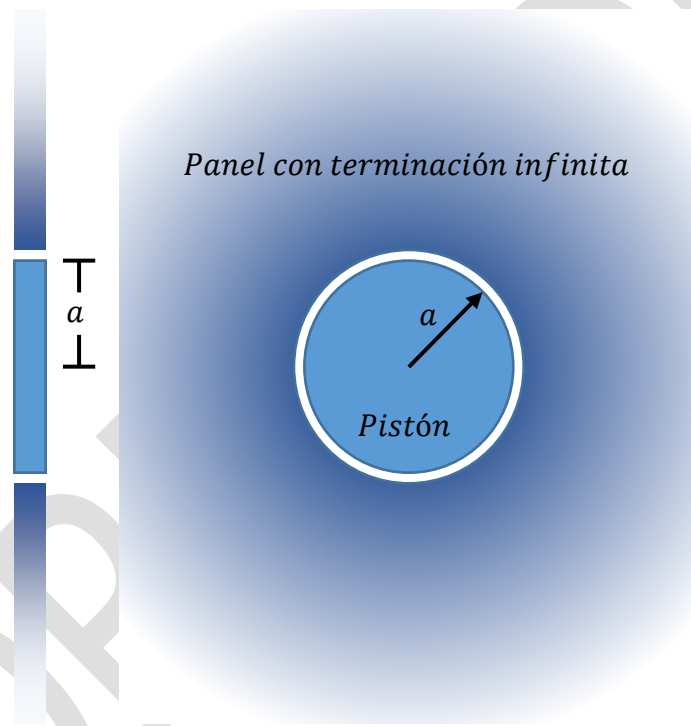
Para el análisis de esta  $Z_{MR}$ , dada para pistón plano se toma como referencia la solución que se da en cuatro textos diferentes<sup>1</sup>, dado que en los cuatro textos tomados como referencia se tiene la solución y el desarrollo para llegar a la expresión matemática de la  $Z_{MR}$ . Básicamente se hace el mismo procedimiento que en el caso de la esfera, pero en el caso del pistón plano, el desarrollo matemático es extenso y algo complejo, para no extenderse en un campo de soluciones de ecuaciones diferenciales y enfocarse en el tema del diseño de sistemas de sonido, esta sección se explicará a partir de la solución y se

<sup>1</sup> (Harry, 1960) P.97; (Lawrence, 2000) P.185; (Leo, 1996) P.118; (Ortega & Romero, 2003) P.97

analiza el significado de la expresión matemática a través de la gráfica de Impedancia Mecánica de Radiación de un pistón plano.

También es pertinente tener en cuenta que el análisis en la radiación del pistón plano tiene diferentes condiciones; a) pistón plano al aire libre, b) pistón plano montado en un panel infinito, c) pistón plano al final de un tubo.

Para la principal aplicación que serán los sistemas de sonido de baja frecuencia, que en general se trata de cajas acústicas, la condición más apropiada es la del pistón plano en un panel infinito, ver Figura 6.6, pues al estar en una caja se separa la radiación que hay en ambas caras del pistón y esto permite modelar el sistema como si el pistón estuviera montado en un panel infinito, por esta razón a continuación se analiza este caso.



**Figura 6.6** Se muestra como es un pistón plano de radio  $a$  montado o suspendido en un panel de terminación infinita. Esto para que la radiación de un lado del pistón no interfiera con la radiación del lado opuesto. Es como cuando se tiene un altavoz en una caja acústica cerrada, donde se elimina la interferencia que se presentan en la radiación de ambos lados del altavoz.

Recordar que para determinar la Impedancia Mecánica de Radiación  $Z_{MR}$ , se debe conocer la superficie del elemento radiante  $S_p$ , y la impedancia específica para determinada geometría  $Z_s$ , en este caso se trata de un disco de radio  $a$ .

Teniendo así la superficie del pistón en la ecuación ( 6.32), que depende del radio, pues el otro valor es constante.

$$S_p = \pi a^2 \quad (6.32)$$

También se debe conocer la impedancia específica para un pistón plano montado en un panel infinito, que como ya se comentó se toma la solución dada para este caso en los textos base, donde en la ecuación ( 6.33), que se muestra de forma general.

$$Z_s = \rho_0 c [R_1(2ka) + jX_1(2ka)] \quad (6.33)$$

Como se observa en la ecuación ( 6.33), existe una función para la parte resistiva o real y otra función para la parte reactiva o imaginaria.

La parte real se evalúa a partir la siguiente expresión, ecuación ( 6.34), donde aparece la función  $J_1$ , que se trata de la función de Bessel de primer orden. Que consiste en una serie, razón por la cual, el cálculo de la parte real es más fácil calcularla con ayuda computacional.

$$R_1(x) = 1 - \frac{2J_1(x)}{x} = \frac{x^2}{2 \cdot 4} - \frac{x^4}{2 \cdot 4^2 \cdot 6} + \frac{x^6}{2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8} - \dots \quad (6.34)$$

Para la parte imaginaria se tiene otra función denominada  $H_1$ , ecuación ( 6.35), que se trata de la función de Struve, que también se trata de una serie, que de igual forma es conveniente resolverlo con ayuda de software.

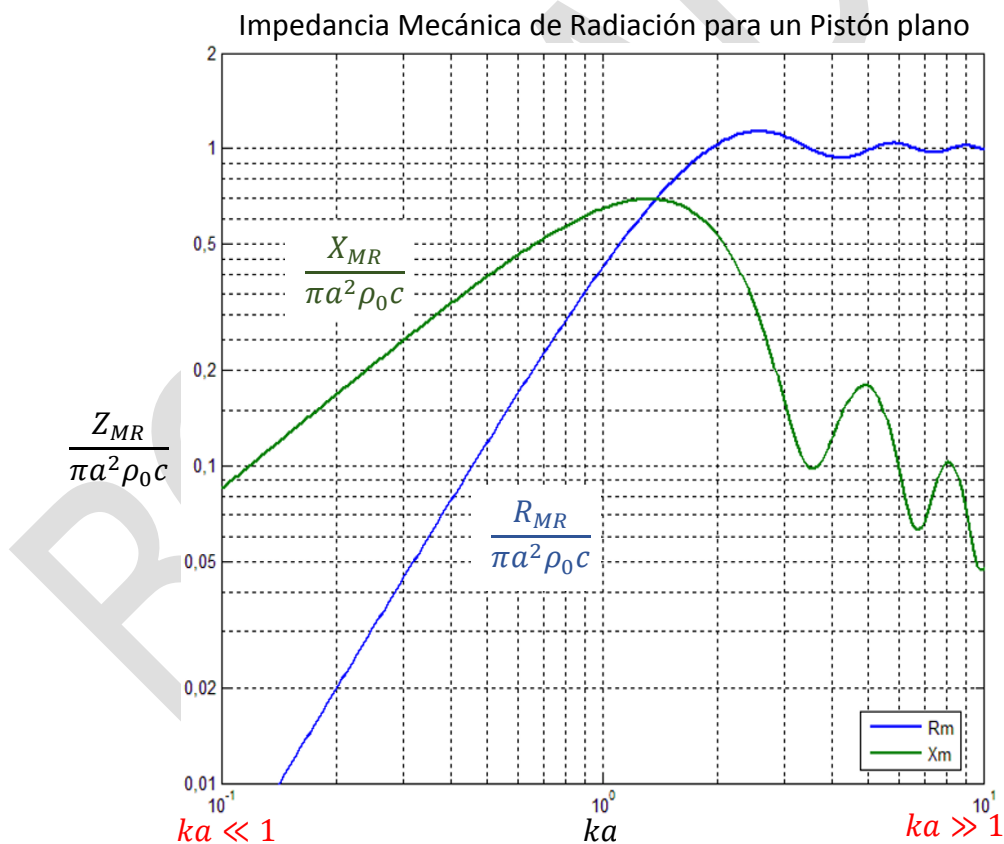
$$X_1(x) = \frac{2H_1(x)}{x} = \frac{4}{\pi} \left( \frac{x}{3} - \frac{x^3}{3 \cdot 5^2} + \frac{x^5}{3 \cdot 5^2 \cdot 7} - \dots \right) \quad (6.35)$$

Ahora resolviendo las ecuaciones ( 6.34) y ( 6.35), según ( 6.33), se tiene finalmente la expresión, ecuación ( 6.36), para la  $Z_{MR}$  de un pistón plano montado en un panel infinito.

$$Z_{MR} = Z_s S_p = \pi a^2 \rho_0 c \left[ 1 - \frac{J_1(2ka)}{ka} \right] + j\pi a^2 \rho_0 c \left[ \frac{H_1(2ka)}{ka} \right] \quad (6.36)$$

Para comprender mejor la forma es que se comporta la  $Z_{MR}$  en función de la frecuencia  $k$  y la dimensión del elemento radiador  $a$ , a continuación, se muestra en la Figura 6.7, la representación gráfica de  $Z_{MR}$  separando la resistencia de la reactancia, para observar que el comportamiento es similar al estudiado en la sección anterior con el radiador esférico. Pero en este caso se observan algunas diferencias:

- En el caso esférico el punto de cruce de los dos trazados coincidía en  $ka$  igual a la unidad, para el caso pistón se observa que este cruce está por encima de la unidad.
- La campana en el trazo de la reactancia para el caso esférico era simétrica para el espacio logarítmico, en el caso actual se ve como la campana que forma la reactancia ya no es simétrica
- Se observa un rizado en la zona de alta frecuencia tanto para la parte real como para la parte imaginaria, debido al efecto de las funciones de Bessel y Struve, Este efecto es dado porque el elemento radiador de geometría plana tiende a experimentar interferencia en alta frecuencia, mientras que en la geometría esférica por el hecho de disipar energía en todas las direcciones de manera uniforme se reduce la tendencia a experimentar interferencia.
- También ocurre que a medida que la frecuencia aumenta, la longitud de onda disminuye y cuando ésta es menor que la dimensión del elemento radiador también se experimentan interferencias.



**Figura 6.7** La gráfica muestra el comportamiento de la  $Z_{MR}$ , para un pistón plano de radio  $a$  montado en un panel infinito. Se observa un rizado tanto en la  $R_{MR}$  como en la  $X_{MR}$ , debido a las funciones que componen el modelo matemático. Pero en general la tendencia es bastante similar al caso del radiador esférico.

### 6.3.1 Aproximación en baja frecuencia<sup>2</sup>

Como ya se ha analizado en varias ocasiones, se analiza en la zona de baja frecuencia, con valores de  $ka$  menores a la unidad o pistón con radio  $a$  de dimensiones pequeñas. Así evaluando la serie de Bessel para valores de  $ka$  pequeños se tiene la ecuación ( 6.37).

$$\left. \frac{J_1(2ka)}{ka} \right|_{ka \ll 1} \cong 1 + \frac{(ka)^2}{2} \quad (6.37)$$

Después de reemplazar la ecuación ( 6.37) en la ecuación ( 6.36), se tiene la siguiente aproximación para la resistencia mecánica de radiación en baja frecuencia.

$$R_{MR}(LF) \cong \pi a^2 \rho_0 c \frac{(ka)^2}{2} \quad (6.38)$$

Como se observa en la ecuación ( 6.38), valores por debajo de la unidad que sean elevados a un exponente positivo se vuelven más pequeños, luego a medida que disminuye la frecuencia o el tamaño de la fuente, disminuye rápidamente la Resistencia mecánica de radiación, efecto que es claramente descrito en la Figura 6.7.

En cuanto a la reactancia mecánica de radiación, se hace la misma aproximación con valores de  $ka$  menores a la unidad, evaluando la función de Struve, se tiene la ecuación ( 6.39).

$$\left. \frac{H_1(2ka)}{ka} \right|_{ka \ll 1} \cong \frac{8ka}{3\pi} \quad (6.39)$$

Y ahora reemplazando la ecuación ( 6.39) en la ecuación ( 6.36), se tiene la siguiente aproximación de la reactancia mecánica de radiación en baja frecuencia.

$$X_{MR}(LF) \cong j\pi a^2 \rho_0 c \frac{8ka}{3\pi} \quad (6.40)$$

A partir de la ecuación ( 6.40), se puede predecir que cuando disminuye el  $k$  y/o  $a$  con valores inferiores a la unidad, la reactancia disminuye en mayor proporción. Luego tanto

---

<sup>2</sup> Esta sección toma como referente al autor. (Ortega & Romero, 2003) P.71

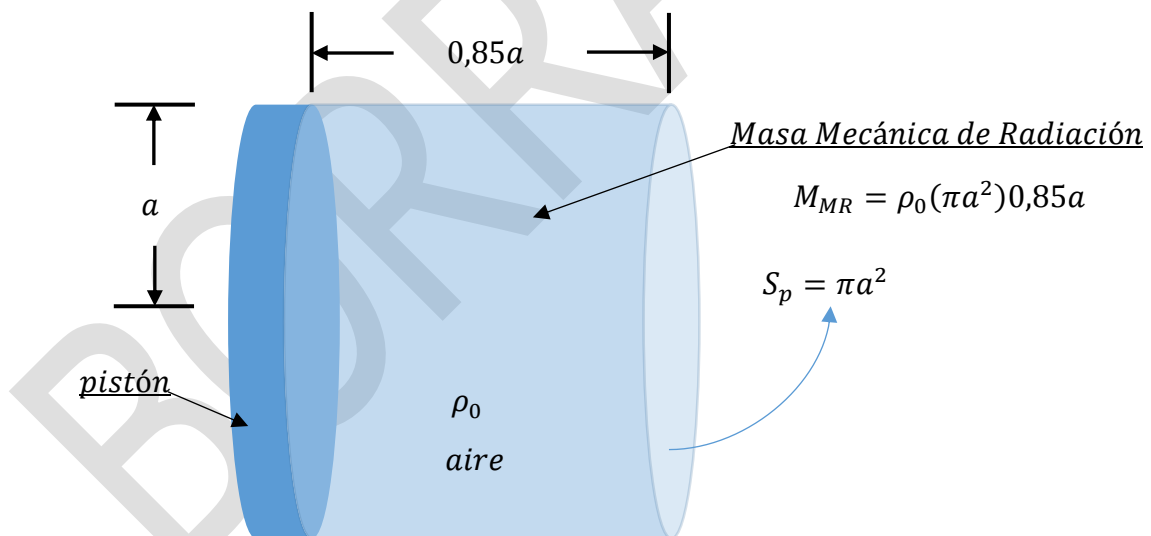
la resistencia  $R_{MR}$  como la reactancia  $X_{MR}$ , disminuyen rápidamente a medida que la frecuencia cada vez es menor o cuando se reduce el tamaño del elemento radiador.

Cabe resaltar que la resistencia  $R_{MR}$  disminuye más rápidamente respecto a la reactancia, a partir de las ecuaciones, se observa que en la  $R_{MR}$  el radio  $a$  está elevado a la cuarta potencia y  $k$  está elevado al cuadrado; mientras que en la reactancia  $X_{MR}$  el radio  $a$  está elevado al cubo y  $k$  esta elevado a la unidad. Por estos exponentes es que la resistencia decae más rápido que la reactancia en la zona de baja frecuencia.

También ocurre que en baja frecuencia la impedancia  $Z_{MR}(LF)$  es predominantemente reactiva  $X_{MR}(LF) > R_{MR}(LF)$ , que es un problema, pues al ser la reactancia cada vez más grande, se entiende que existe cada vez más energía almacenada en la masa mecánica de radiación en forma de inercia, y así mismo cada vez se disipa menos energía en el medio al ser la resistencia mucho menor que la reactancia.

Reorganizando la ecuación ( 6.40), se obtiene la masa mecánica de radiación  $M_{MR}$

$$X_{MR}(LF) = j\omega \left( \pi a^2 \rho_0 \frac{8a}{3\pi} \right) \quad (6.41)$$



**Figura 6.8** Se ilustra un pistón plano de radio  $a$ , con una superficie igual a  $\pi a^2$ , y se forma el volumen de un cilindro con dicha superficie y la altura se calcula a partir de la aproximación de la  $M_{MR}(LF)$  con un valor de 0.85 veces el radio, esta masa está conformada por aire, con lo cual se tiene la masa mecánica de radiación como se describe en la ecuación ( 6.42)

Ahora se organiza la expresión para la masa mecánica de radiación  $M_{MR}$ , de manera que se explique cómo se genera esta masa, como se ve en la ecuación ( 6.42) y en la Figura 6.8.

$$M_{MR}(LF) = \rho_0(\pi a^2)0.85a \quad (6.42)$$

Prácticamente ocurre que en la zona de baja frecuencia los radiadores como altavoces generan una masa mecánica de aire añadida a la superficie del elemento oscilante, esta masa también puede ser vista como una masa acústica, pues se trata de un volumen determinado de aire que actúa como una sola masa donde cada pequeño elemento que conforma todo este volumen se mueve a la misma velocidad y con la misma fase, es un volumen de aire que no actúa elásticamente pues determinado espacio es considerado una masa mecánica y almacena energía en forma de inercia, por eso este volumen es considerado un espacio reactivo.

Otro aspecto importante en la masa mecánica de radiación, es que será una masa de aire añadida a la masa mecánica del diafragma del altavoz, lo que hace que la masa tota del sistema masa resorte aumente. También se debe tener en cuenta que la masa mecánica de radiación se genera en ambas caras del diafragma.

La masa mecánica de radiación, es un concepto muy importante que se tendrá en cuenta en el siguiente capítulo, pues es un elemento que hace parte del sistema mecánico del altavoz, es prácticamente la carga mecánica en baja frecuencia, es el punto crítico donde se transfiere la energía mecánica en acústica.

### 6.3.2 Aproximación en alta frecuencia

Ahora se toman valores grandes de  $ka$ , mayores a la unidad se tiene la siguiente tendencia en cada caso:

En la resistencia mecánica de radiación, la función de Bessel  $J_1$ , cuando su argumento es grande tiende a cero.<sup>3</sup> Por lo cual la  $R_{MR}(HF)$ , en alta frecuencia tiende a la siguiente expresión, ecuación ( 6.43),

$$R_{MR}(HF) = \pi a^2 \rho_0 c \quad (6.43)$$

---

<sup>3</sup> Revisar bibliografía de referencia. (Lawrence, 2000)P.187; (Ortega & Romero, 2003)P.71



De manera similar con el caso esférico, la resistencia en alta frecuencia tiende a ser constante. En este caso se observa, ver Figura 6.7, un leve rizado que desvanece poco a poco a medida que aumenta la frecuencia, debido a la tendencia asintótica de la función de Bessel.

Para la reactancia mecánica de radiación  $X_{MR}(HF)$ , la tendencia en valores altos para el argumento de la función de Struve, es de  $2/\pi$ . Por lo cual se tiene la siguiente expresión para la  $X_{MR}(HF)$ , ecuación (6.44),

$$X_{MR}(HF) = \pi a^2 \rho_0 c \frac{2}{\pi k a} \quad (6.44)$$

Se observa que la reactancia se ve atenuada a medida que aumenta la frecuencia que indica un comportamiento similar al caso de la esfera, pero en la Figura 6.7, se observa un rizado más pronunciado respecto a la resistencia  $R_{MR}(HF)$ , debido a la tendencia de la función de Struve.

Es importante resaltar que en alta frecuencia se da que  $R_{MR}(HF) > X_{MR}(HF)$ , y esto es algo bueno para la radiación de alta frecuencia, pues el comportamiento de la impedancia hace que se dé mayor disipación de energía en el medio y se reduce el efecto de masa mecánica de radiación. Es por eso que altavoces de pequeño tamaño producen buena cantidad de nivel de presión sonora en alta frecuencia.

En conclusión, en estos tipos de elementos radiadores de energía acústica, se tienen dificultades en la reproducción de baja frecuencia debido a que la transformación de energía es prioritariamente reactiva, motivo por el cual se estudian técnicas para mejorar la radiación de baja frecuencia como las cajas acústicas. Por otro lado, en alta frecuencia se tiene la ventaja que la transformación de energía descrita por la impedancia, es más resistiva, lo que permite mayor cantidad de energía disipada en el medio haciendo el sistema más eficiente en esta zona de frecuencia, sin embargo, en la alta frecuencia se tendrán otros problemas como la interferencia, que se resuelve con sistemas de radiación indirecta, como: correctores de fase, bocinas y guías de ondas, entre otras soluciones.

## **7 ALTAVOZ ELECTRODINÁMICO**

---

El desarrollo de este capítulo muestra la descripción del altavoz como transductor electroacústico, primero se describen sus partes de manera cualitativa, luego se hará una explicación más rigurosa a partir de modelos matemáticos que permiten describir el sistema altavoz, para hacer predicciones de respuesta en frecuencia, sensibilidad, eficiencia, impedancia eléctrica; como características técnicas. Además se pretende

explicar conceptualmente los parámetros Thiele-Small y como se miden, con el fin de caracterizar el altavoz y además conocer los parámetros que permiten hacer el diseño e implementación de sistemas de sonido de baja frecuencia que serían las cajas acústicas.

## **7.1 DESCRIPCIÓN**

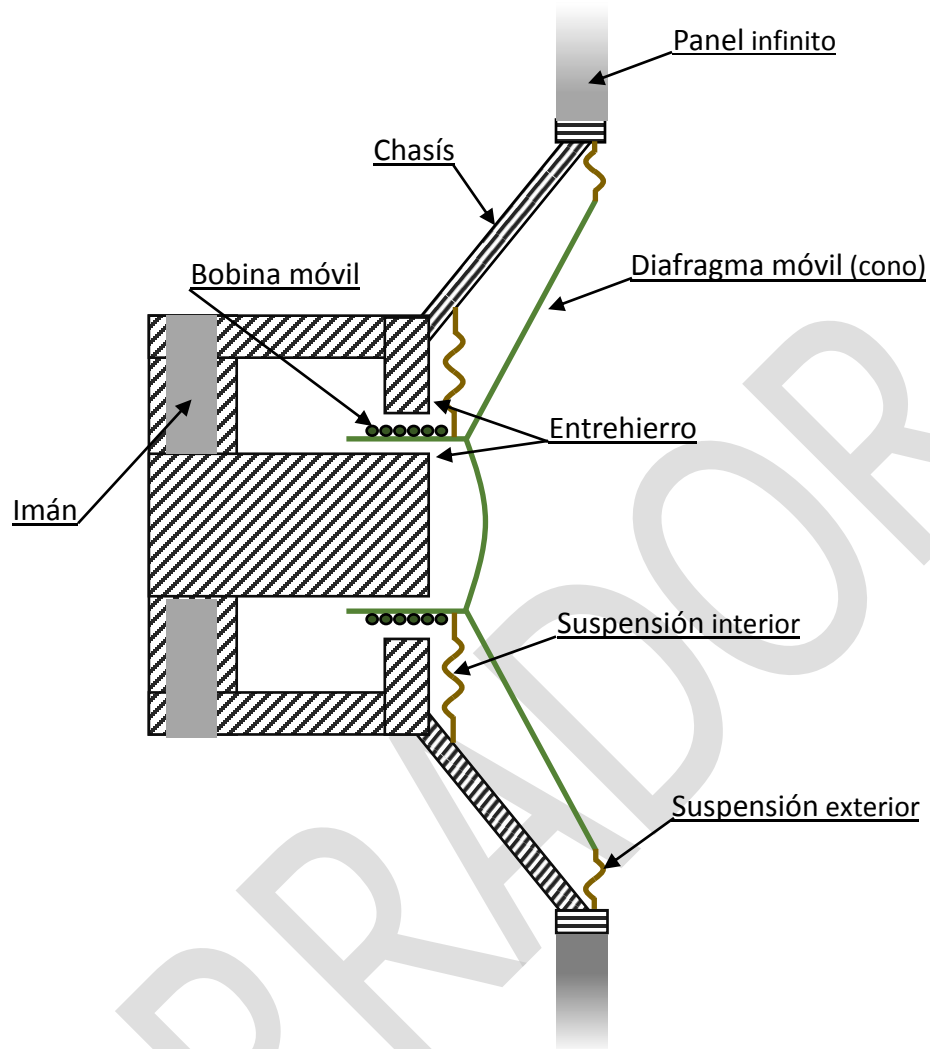
El altavoz electrodinámico consiste en un sistema que recibe la energía eléctrica, la transforma en energía mecánica por medio de una bobina móvil, que recibe las corrientes eléctricas y las induce en campos magnéticos variables conforme a las variaciones de corriente. Esta bobina mueve un elemento radiador que sería el diafragma que a través de su superficie transforma la energía mecánica en energía acústica. En toda esta cadena de transferencia de energía, se debe tener en cuenta cada una de sus partes para entender el comportamiento del transductor y como intervienen cada uno de sus elementos en el resultado final del altavoz, de esta manera se conoce el funcionamiento y las características técnicas que tiene este tipo de transductores para luego, hacer diseño de sistemas de sonido conforme con las virtudes de cada altavoz y los requerimientos del sistema final.

A continuación, se hace una breve explicación cualitativa de las partes del altavoz, para más adelante hacer la explicación analítica a partir de los modelos matemáticos y poder hacer predicciones del altavoz y conocer parámetros de diseño para cajas acústica.

### **7.1.1 Suspensión**

En este capítulo se presenta la descripción de un altavoz electrodinámico de bobina móvil, que consiste en un diafragma que está sujeto a un sistema de suspensión para que a partir de su posición de reposo el diafragma se desplace controladamente hacia adelante y hacia atrás, en una dirección axial al eje del altavoz y no experimente movimientos en otras direcciones.

Por otro lado, la suspensión también cumple la función de ubicar la bobina en el entrehierro de manera que la bobina quede centrada en un flujo magnético constante que origina el imán, se debe cumplir, que la bobina quede centrada en el entrehierro para que el desplazamiento hacia adelante o hacia atrás sea igual (simétrico), se debe evitar que la bobina experimente un rozamiento mecánico con el entrehierro. Todos estos ajustes mecánicos son dados por la suspensión del sistema altavoz.



**Figura 7.1** Se tiene la imagen que representa un altavoz electrodinámico de bobina móvil, se muestra un corte del transductor con sus principales partes que serán estudiadas a lo largo de este capítulo.

Como se ilustra en la Figura 7.1, La suspensión del altavoz está dada en dos partes; por un lado, se tiene una suspensión interna que por lo general no se ve a simple vista, sobre todo si el altavoz se encuentra en una caja acústica o algún sistema acústico, esta suspensión es comúnmente llamada araña, por lo general de color naranja y construida en tela, esta parte de la suspensión es muy importante porque es quién alinea la bobina en el entrehierro. Por otro lado, está la suspensión externa que consiste en un anillo elástico, que está sujeto en el borde exterior del diafragma y a su vez se sostiene en el chasis, esta suspensión por lo general siempre es visible, puede ser construida en papel, tela, caucho, cartón.

Para que el sistema de suspensión funcione adecuadamente se requiere las dos suspensiones que permiten sobre todo que el movimiento del altavoz sea en una única dirección, de esta manera se procura aprovechar al máximo la energía mecánica.

Para efectos de análisis del sistema altavoz cuando se hace referencia a la suspensión se entiende que el efecto de las dos suspensiones es uno solo pues es un sistema acoplado donde las dos suspensiones actúan como una sola, es decir, no se analiza cada una por aparte, sino que se estudia el sistema como si tuviera una sola suspensión.

### **7.1.2 Masa móvil**

Otro elemento que se observa en la Figura 7.1, es la masa móvil que está conformada por el diafragma, que es la superficie oscilante o elemento radiador que tendrá como función convertir la energía mecánica en energía eléctrica, si se aplica fuerza a una superficie a través de la misma superficie se tiene presión.

El diafragma por lo general es de geometría cónica por lo cual es también llamado *cono*, esta superficie debe oscilar para producir ondas sonoras controladas, por eso es que este diafragma se debe mover en una única dirección perpendicular a la superficie. El diafragma o cono, se recomienda que sea un material rígido con bastante superficie, pero liviano. Estas características se justifican más adelante en el capítulo, pues tiene que ver con la eficiencia del sistema altavoz. Por lo general es complicado encontrar un material ideal, pues si se requiere un material rígido de amplia superficie será pesado, luego el reto de los diseñadores de altavoces es llegar a un equilibrio entre estos parámetros.

Se tiene en cuenta que este diafragma está acoplado a la bobina, pues ésta es la que a través de corrientes eléctricas genera campos magnéticos variantes en el tiempo que en interacción con el campo constante del imán produce movimiento rectilíneo. Como la bobina está acoplada al diafragma aumenta la masa móvil total. Por eso cuando se refiere a la masa del diafragma se debe tener en cuenta que esta masa contempla todo el elemento móvil; diafragma más bobina.

Ahora se tiene descrito los elementos mecánicos móviles, y se tiene un sistema masa resorte oscilante, donde la masa está dada por el diafragma y la bobina, y la parte elástica está dada en ambas suspensiones. Dentro de este sistema hace falta la parte resistiva que desde una perspectiva mecánica aparece dicha resistencia en la suspensión pues se trata de un resorte no ideal, y estas suspensiones poseen cierta resistencia mecánica que disipa la energía mecánica en forma de calor. Esta resistencia mecánica es descrita más adelante en este capítulo y cuáles serán sus efectos en el sistema altavoz.

### **7.1.3 Sistema magnético**

El sistema magnético, consiste en un imán que genera un campo magnético constante en el tiempo, para ayudar a controlar el campo del imán, éste está dentro de un material ferromagnético que ayude a establecer una concentración de flujo magnético en el lugar

donde va ir suspendida la bobina, pues bien es ésta la que requiere interactuar con el flujo magnético que se genera en el entrehierro.

Cuando en la bobina circula una corriente, se genera un campo magnético, este campo depende la cantidad de corriente y la dirección de ésta. Luego si la corriente va en una dirección la bobina forma un polo norte y sur que, al interactuar con el campo del entrehierro, se genera un desplazamiento mecánico en un sentido específico, entre más corriente más desplazamiento, pero a medida que la bobina se sale del entrehierro pierde interacción magnética y se debilita la fuerza magnética, es un efecto no lineal del altavoz que no se estudia en este libro. Ahora bien, si la corriente en la misma bobina cambia de dirección, así mismo el desplazamiento mecánico de ésta también cambia el sentido, pero sobre la misma dirección. Esto hace que el movimiento mecánico del diafragma sea análogo al movimiento eléctrico y por consiguiente la señal acústica es análoga a la señal eléctrica y mecánica.

#### **7.1.4 Variables Electroacústicas del altavoz**

En esta sección se muestran las diferentes variables que componen el altavoz, donde se tienen variables de tres dominios diferentes de la física; el dominio eléctrico (subíndice E), mecánico (subíndice M) y acústico (subíndice A). Pues en la cadena de transformación de energía para este tipo de transductor, la señal de entrada es de tipo eléctrica y por consiguiente los primeros elementos que se presentan son eléctricos, luego se hace la primera transducción llevando la señal eléctrica a un dominio mecánico a través del electromagnetismo. Donde la corriente eléctrica por medio de la bobina induce un campo magnético que en la interacción con el imán produce movimiento llevando la variable eléctrica a una variable mecánica. La mecánica de la bobina que esta acoplada a un elemento radiador que a través de la superficie transforma la energía mecánica en energía acústica. A continuación, se presentan las variables más importantes y una pequeña explicación de cada una, las unidades de medida que se dan están dadas para el sistema mks, y todas las ecuaciones por ende están dadas para el mismo sistema.

##### *7.1.4.1 Variables eléctricas*

*e* Voltaje, se da en RMS. [*v*] [voltios]

El voltaje será la caída de potencial eléctrico que hay entre los conectores del altavoz. Debe ser de forma ac, por lo cual es dado en voltios rms. No se recomienda usar voltajes dc, puede ocasionar daños en la bobina y afecta el desplazamiento del altavoz que afecta sobre todo la reproducción de baja frecuencia.

*i* corriente, la corriente es alterna ac. [*A*][amperios]

Cuando circula una corriente alterna a través de la bobina, cae un voltaje en ésta en función de la impedancia eléctrica que posee. La corriente a través de la bobina es quien

estimula la inducción magnética, es decir, que se generen campos magnéticos variables en el tiempo en función de la señal eléctrica. La fuerza mecánica es dependiente de la cantidad de corriente que hay en la bobina, por ende, entre más corriente más fuerza.

$L_E$  inductancia eléctrica de la bobina. [H][Henrios]

La bobina según su número de vueltas, determina la cantidad de inductancia que ésta posee, este valor determina la reactancia que presenta el inductor en presencia de frecuencia, este valor no debe ser muy grande pues la reactancia inductiva es proporcional a la frecuencia y uno de los límites en alta frecuencia es esta inductancia, como ya se analizó en capítulos anteriores y como se reafirma más adelante en la respuesta en frecuencia del altavoz.

$R_E$  Resistencia eléctrica de la bobina. [ $\Omega$ ][Ohmios]

La bobina está construida a partir de un cable conductor, que tiene cierta longitud, calibre, resistividad y temperatura, que serán parámetros que establecen la cantidad de resistencia que tiene la bobina. El calibre determina la cantidad de corriente que puede fluir por el conductor y a su vez determina que tan resistivo es, entre mayor sea el calibre menos resistencia y más corriente. La longitud entre más grande genera mayor oposición a la corriente, es decir aumenta la resistencia. La temperatura a medida que aumenta, hace la resistencia más grande, el simple hecho de hacer circular corriente provoca incremento en la temperatura, si la señal es dc aumenta más rápidamente la temperatura, si la señal es ac y se trata de un tono puro también provoca que se eleve la temperatura rápidamente, pero señales ac como música con un amplio factor de cresta o amplio headroom no provocan un elevado calentamiento debido a la dinámica de la señal, pero música con excesiva compresión que reduce el factor de cresta de la señal se comporta semejante a un tono puro con poca dinámica y eleva la temperatura. No es bueno que se incremente la temperatura pues, como se incrementa la resistencia esto hace que el sistema consuma potencia eléctrica en temperatura afectando la sensibilidad del transductor y reduce la cantidad de presión sonora que entrega al medio.

Esta medida de resistencia eléctrica se hace en términos dc, es decir, en ausencia de frecuencia, razón por la cual, en diferentes especificaciones técnicas o textos que hablan sobre altavoces llaman a esta variable, resistencia dc, o resistencia dc de la bobina.

$Z_E$  Impedancia eléctrica del altavoz. [ $\Omega$ ][Ohmios]

Como se trata de una bobina, elemento reactivo, se establece la impedancia eléctrica a partir de la parte real que sería la resistencia eléctrica de la bobina, y la parte imaginaria que depende de la reactancia de la bobina.

$B$  Densidad de flujo magnético.  $\left[\frac{Wb}{m^2}\right] \left[\frac{Weber}{metro\ cuadrado}\right]$  o  $[T][Teslas]$

La densidad de flujo magnético depende del imán que hay en el altavoz, en el entrehierro donde va ubicada la bobina, se establece un flujo magnético que sería las líneas de campo magnético que fluyen de un polo a otro en el imán. La geometría dada para esta parte del altavoz tiene como propósito concentrar este flujo magnético en el lugar donde va ir suspendida la bobina, este parámetro es importante porque la eficiencia y la sensibilidad del altavoz dependen de esta variable, la transformación electro-mecánica del sistema está en función de la cantidad de flujo magnético.

$l$  Longitud de la bobina que cruza el flujo magnético.  $[m][metros]$

Este parámetro indica la longitud de la bobina que está en el espacio del flujo magnético, es decir, que no se trata de la longitud total del conductor que compone la bobina, se trata únicamente de la longitud que está inmersa en el flujo magnético.

#### 7.1.4.2 Variables Mecánicas

$F$  Fuerza mecánica.  $[N][Newtons]$

La fuerza es definida como el producto de la masa por la aceleración, es una variable análoga al voltaje en analogía de impedancia, en el altavoz la fuerza mecánica es dada como resultado de la transducción electro-mecánica, donde a partir de la cantidad de corriente que hay en la bobina se produce una fuerza mecánica que también depende del flujo magnético. Este fenómeno se basa en la ley de Lenz, que establece que cuando un elemento conductor que está en un flujo magnético y hay una corriente eléctrica en el conductor, se produce una fuerza mecánica que puede desplazar al conductor. Esta relación dada por la ley de Lenz es,  $F = i \cdot Bl$ , que indica que la fuerza mecánica depende de la corriente, la densidad de flujo magnético y la longitud de la bobina que cruza dicho flujo magnético.

$u$  velocidad mecánica.  $[m/s] [metros/segundos]$

La velocidad se origina a partir de la fuerza mecánica, e indica el desplazamiento en función del tiempo.

$u_D$  Velocidad del diafragma.  $[m/s] [metros/segundos]$

La misma velocidad mecánica pero el subíndice D, indica que se trata de la velocidad mecánica del diafragma que posee el altavoz. Como se trata de un sistema oscilante la

velocidad es nula cuando el diafragma llega a sus límites de desplazamiento y será máxima cuando en presencia de oscilación el diafragma pasa por la posición de origen o reposo. Así mismo, en los límites de desplazamiento donde la velocidad es nula, la aceleración es máxima y cuando pasa por el lugar de reposo con velocidad máxima, la aceleración es mínima. Como lo describe el movimiento armónico simple.

$Z_M$  Impedancia mecánica.  $[N \cdot s/m]$   $[\Omega_{MEC}]$   $[Ohmios\ mecánicos]$

La impedancia mecánica describe la oposición al movimiento que hay en un sistema mecánico. Es la relación entre la fuerza y la velocidad, de manera análoga como ocurre con la ley de Ohm.  $Z_M = F/u \Rightarrow Z_E = e/i$

$C_{MS}$  Compliancia mecánica de la suspensión del altavoz.  $[m/N]$

La compliancia mecánica es el recíproco de la constante de elasticidad de los resortes. La compliancia indica que tan blando o rígido es un elemento elástico, para este parámetro un valor elevado indica que la suspensión es blanda como pasa con los altavoces grandes de para baja frecuencia, mientras que un valor más pequeño, indica que la suspensión es algo más rígida como pasa con los altavoces pequeños para alta frecuencia que no requieren una amplia excursión del diafragma.

$R_{MS}$  Resistencia mecánica de la suspensión del altavoz.  $[\frac{N \cdot s}{m}]$   $[\Omega_{MEC}]$

El elemento elástico no es ideal, pues si lo fuera no disiparía energía, sólo la almacenaría. Los sistemas elásticos como resortes en los altavoces tienen como propósito suspender el diafragma y la bobina, también de restaurar los elementos móviles a su posición de reposo u origen, después de una excitación. En la práctica estos elementos elásticos poseen cierta resistencia, pues en la dinámica del sistema existen pérdidas mecánicas que controlan la movilidad del sistema, si no hubiera resistencia mecánica la oscilación sería infinita. Si se golpea levemente el diafragma de un altavoz, éste oscila poco en comparación con la cuerda de una guitarra que también es un sistema masa resorte; esto debido a la resistencia mecánica que existe en el elemento elástico, por consiguiente, se puede concluir que la resistencia mecánica de un altavoz es mucho más grande que la de una cuerda de guitarra. La cantidad de resistencia mecánica define si el sistema es subamortiguado o sobreamortiguado.

$r_{MS}$  Receptividad, el inverso de la resistencia mecánica  $[\frac{m}{N \cdot s}]$   $[\frac{kg}{s}]$   $[mohm]$   $[1/\Omega_{MEC}]$

Esta variable es el inverso de la resistencia mecánica, que indica la facilidad con la que un sistema adquiere movilidad, pues la resistencia indica la dificultad que se da en la



movilidad. Se trata de la misma variable, pero en su forma inversa, se utiliza cuando se requieren hacer modelos de movilidad mecánica, pues sería un equivalente a la conductividad eléctrica. En lengua inglesa a este parámetro se le conoce como *responsiveness*, que en español quiere decir receptividad.

$M_{MS}$  Masa mecánica, diafragma más bobina móvil. [kg]

La masa mecánica contempla la cantidad de materia que tiene un elemento mecánico, en el caso del altavoz la masa mecánica móvil, contempla el diafragma como elemento radiador y la bobina que está acoplada a éste. La masa almacena energía en forma de inercia, y tiene un comportamiento similar a las bobinas con la frecuencia, donde se opone a la alta frecuencia, pues mover una masa rápidamente (alta frecuencia) es más difícil que moverla lentamente (baja frecuencia), sobre todo si la masa aumenta.

#### 7.1.4.3 Variables Acústicas

$p$  Presión acústica [Pa]  $\left[\frac{N}{m^2}\right]$  [Pascuales]

La presión acústica, son pequeñas variaciones en la presión atmosférica estática. Aplicado al transductor, la transformación mecánico-acústica, se da a través de los elementos mecánicos radiadores que al aplicarles una fuerza mecánica sobre la superficie convierte dicha fuerza en presión acústica.

$U$  Velocidad volumétrica  $\left[\frac{m^3}{t}\right]$  [ $u \cdot m^2$ ]

Cosiste en un volumen de aire que se mueve a partir del estímulo del elemento radiador, donde nuevamente a través de la superficie del diafragma  $S_D$ , que adquiere una velocidad mecánica  $u$ , mueve cierta cantidad de volumen de aire. Al mismo ritmo de oscilación que la velocidad  $u$ .

## 7.2 CIRCUITO EQUIVALENTE

En esta sección se explica el desarrollo analítico del altavoz electrodinámico de bobina móvil, donde se llega a la función de transferencia del sistema en el dominio de la frecuencia, este análisis está basado en el análisis de filtros análogos.

Para llegar a esta función de transferencia que permite describir el sistema y determinar parámetros como la respuesta en frecuencia, sensibilidad, comportamiento en fase, la impedancia eléctrica, respuesta transitoria, parámetros Thiele-Small, entre otras características. Se propone hacer un circuito electroacústico que contempla

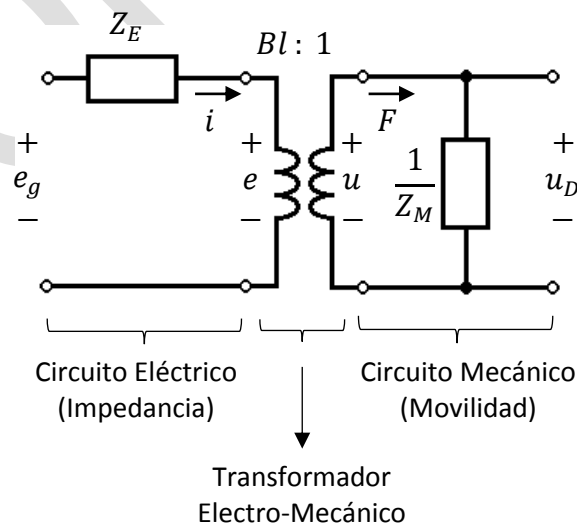
principalmente la parte eléctrica y mecánica del altavoz, por medio de técnicas de circuitos eléctricos y analogías electroacústicas resolver el circuito de la manera más sencilla y básica posible, por lo anterior, se trabaja todo el circuito en su representación electro-mecánica obteniendo así la función de transferencia de la velocidad mecánica en el diafragma  $u_D(S)$ , para luego incorporar las variables acústicas y determinar la función de transferencia de presión acústica  $p(S)$ , donde dicha función ya permite hacer una aproximación partir de la teoría de filtros análogos.

Esta sección está basada en diferentes autores, tanto en libros como en artículos publicados en AES (Audio Engineering Society)<sup>4</sup>.

### 7.2.1 Transductor anti recíproco

Dentro de los transductores electro-mecánicos, se tienen dos modelos; los recíprocos y los anti recíprocos. Los transductores recíprocos por lo general aplican a tecnologías como; cristales, cerámicos y electroestáticos. Estos transductores poseen un modelo donde la red eléctrica y la red mecánica son de tipo impedancia, por lo cual, el voltaje es análogo a la fuerza y la corriente es análoga a la velocidad.

Los traductores anti recíprocos aplican a tecnologías como magnetostrictivos, bobina móvil, todo transductor de armadura móvil. Estos transductores tienen un modelo donde la parte eléctrica está en analogía de impedancia, mientras que la parte mecánica está en analogía de movilidad, por lo cual, en este caso el voltaje es análogo a la velocidad y la corriente será análoga a la fuerza.



<sup>4</sup> (Harry, 1960)P.124; (Lawrence, 2000)P.393; (Leo, 1996)P.183; (Ortega & Romero, 2003)P.149; (Richard H, 1972)

**Figura 7.2** Se tiene un circuito que representa la transformación eléctrico mecánica que tienen los transductores electrodinámicos como emisor, cuando la entrada es una variable eléctrica y la salida posee una variable mecánica.

Para el desarrollo de este capítulo se hace el análisis de un altavoz electrodinámico de bobina móvil, el cual está modelado como un transductor anti recíproco, como se ve en la Figura 7.2, ya con las variables pertinentes para este caso. Como se observa en la primera parte del circuito se tiene la parte eléctrica del altavoz, con sus variables; voltaje, corriente e impedancia eléctrica. La sección media corresponde al circuito magnético que sería el transductor electro-mecánico; contempla el flujo magnético que produce el imán  $B$  en interacción con la bobina  $l$ , este circuito magnético es modelado como un transformador que convierte las variables eléctricas en mecánicas, donde el factor de transformación es definido con el producto  $Bl$ , que cumple con la ley de Lenz que se resume en las ecuaciones ( 7.1) y ( 7.2), donde la fuerza mecánica  $F$  resulta del producto de la corriente eléctrica  $i$  y el factor de transformación  $Bl$ . Y en su versión anti recíproca puede haber un voltaje eléctrico resultado del producto de la velocidad mecánica y el factor de transformación  $Bl$ . Para completar el circuito de la Figura 7.2, en la etapa final se tiene el circuito mecánico con sus variables; fuerza mecánica  $F$ , la velocidad mecánica del diafragma  $u_D$  y la movilidad mecánica como el recíproco de la impedancia mecánica  $Z_M$ .

$$F = i \cdot Bl \quad (7.1)$$

$$e = u \cdot Bl \quad (7.2)$$

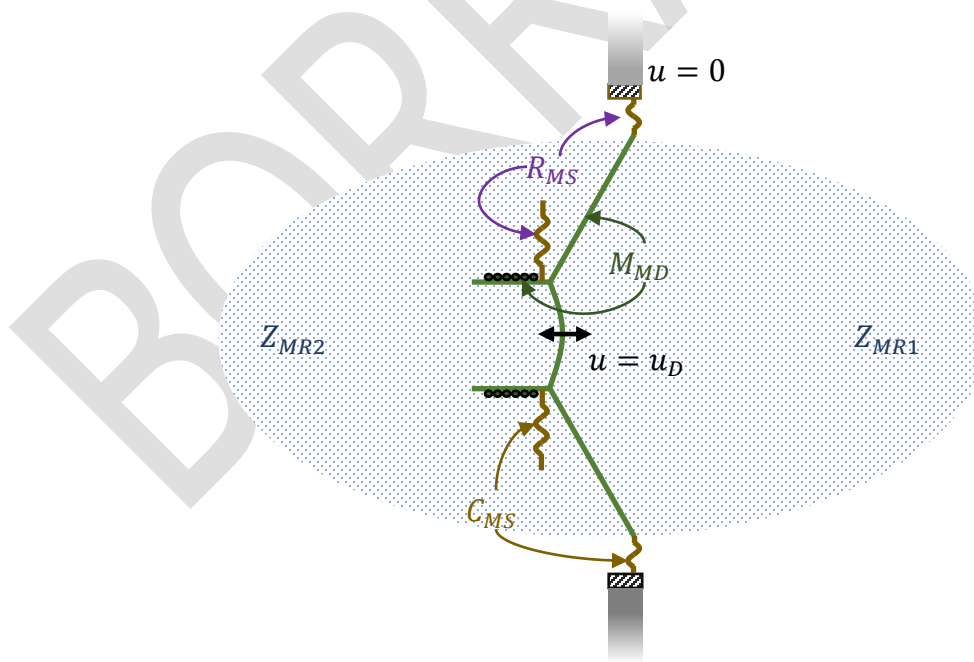
Ahora que se tiene un modelo de transductor, se define detalladamente la impedancia eléctrica y la movilidad mecánica, a partir de las partes del altavoz separando los elementos eléctricos y mecánicos. De esta manera se plantea el circuito para el altavoz electrodinámico de bobina móvil.

### 7.2.2 Circuito mecánico

Comenzaremos con la parte mecánica, para este fin, se toma como base las partes mecánicas que se ilustran en la Figura 7.3, donde se tiene un altavoz al cual se le ha retirado el imán y el chasis de manera que se puedan ver mejor las partes móviles que tiene el transductor.

Los elementos mecánicos que se tienen en cuenta son todos aquellos que experimentan movimiento cuando el altavoz esté en funcionamiento, por eso se pone como referencia en el punto donde se sujeta la suspensión externa, una tierra mecánica donde la velocidad es nula. Sobre la referencia de no movimiento, tierra mecánica, se hace el análisis mecánico para detectar las partes móviles.

Se tienen como elementos móviles; *La Masa Mecánica del diafragma más la bobina móvil*  $M_{MD}$ , recordar que este elemento será la masa móvil total, por lo cual se debe tener en cuenta que el diafragma y la bobina están acoplados y conforman una sola masa. La suspensión del altavoz, está dada en dos partes que, en la movilidad del sistema, ambas suspensiones funcionan como una sola suspensión, este elemento determina la *Compliancia Mecánica de la suspensión*  $C_{MS}$ , como este elemento no funciona como un resorte ideal, posee una *Resistencia Mecánica de la suspensión*  $R_{MS}$ , que disipa energía en forma térmica, pero también controla la movilidad del sistema. El último elemento que se tiene en cuenta para el sistema mecánico es la *Impedancia Mecánica de radiación*  $Z_{MR}$ , esta impedancia completa el diagrama mecánico pues sería la carga mecánica del sistema, debido a que contempla las características geométricas del elemento radiador, es el punto donde la movilidad mecánica sobre la superficie genera energía acústica. Como el altavoz se supone está montado sobre un panel con terminación infinita, como se ilustra en la Figura 7.3, se debe tener en cuenta la radiación en ambos lados del diafragma, recordemos que en baja frecuencia se genera una masa mecánica de radiación añadida a la superficie del diafragma, lo que hace que se incremente la masa móvil en esta determinada zona de frecuencia.



**Figura 7.3** Se ilustra el altavoz sin el chasis y sin el imán, haciendo énfasis en los elementos mecánicos móviles.

En la Figura 7.4, se muestra como se plantea el diagrama mecánico a partir de las partes móviles que éste tiene. Se considera que cuando el altavoz está funcionando todos los elementos mecánicos se mueven con la misma velocidad y fase, respecto a la tierra mecánica, punto de movimiento nulo. Es por eso que hacer un diagrama mecánico de movilidad para este caso es sencillo, se ubican los elementos con sus símbolos mecánicos, en paralelo, donde el nodo inferior corresponde al punto de referencia de no movimiento y el nodo superior corresponde a la velocidad mecánica del diafragma, que obliga a que todos los elementos se muevan al mismo ritmo. La conexión en paralelo similar a un circuito eléctrico hace referencia a que la variable de caída de potencial que en este caso es la velocidad mecánica es igual en todos los elementos.

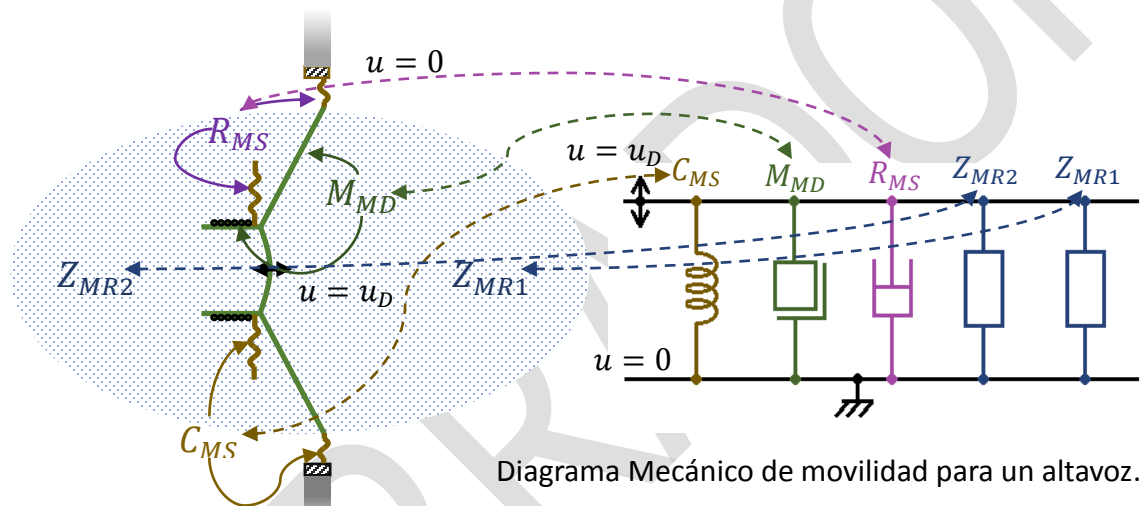


Diagrama Mecánico de movilidad para un altavoz.

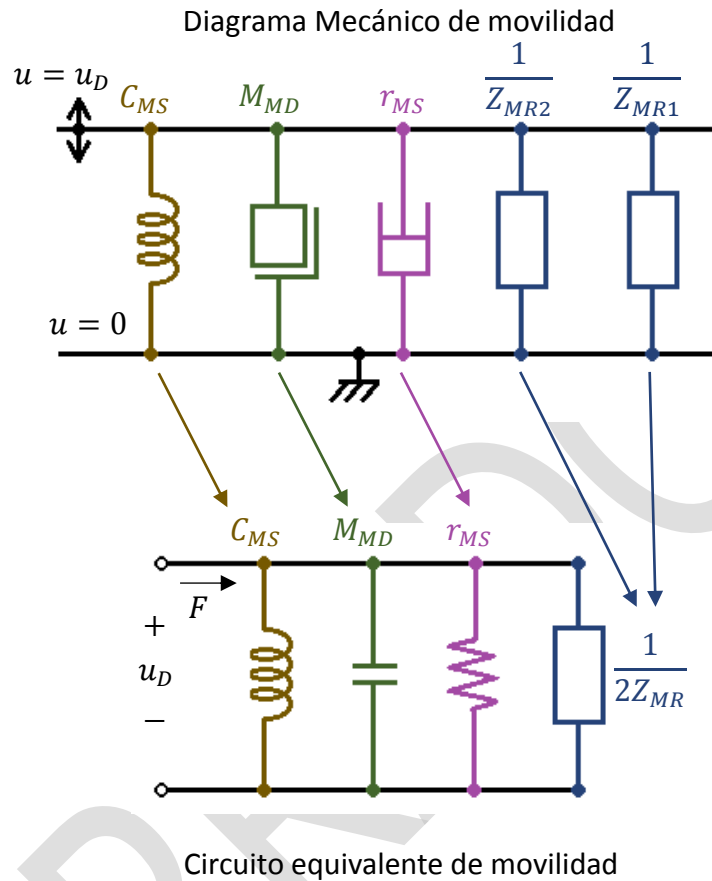
**Figura 7.4** Se ilustra en la parte izquierda las partes del altavoz, y se relacionan con el circuito mecánico en la parte derecha.

Para dicho circuito de la Figura 7.4, la compliancia se representa con un resorte, la masa mecánica móvil con un símbolo de masa, la resistencia con un amortiguador y las impedancias mecánicas de radiación con la caja que se usa para representar impedancias.

Ahora se plantea un circuito mecánico de movilidad con base en el diagrama mecánico, como se muestra en la Figura 7.5, para determinar el circuito se debe tener en cuenta que es una *analogía de movilidad*<sup>5</sup>, para determinar el tipo de elemento que se usa en el circuito. Para este caso la *Compliancia Mecánica de la suspensión*  $C_{MS}$  se modela con un inductor, *La Masa Mecánica del diafragma más la bobina móvil*  $M_{MD}$ , se representa con un capacitor, la *Responsividad Mecánica de la suspensión*  $r_{MS}$ , se debe representar como una responsividad que es el inverso de la resistencia mecánica, pues el circuito es de movilidad y no de impedancia, para terminar el circuito se tiene el último elemento que consiste en la suma de las dos *Impedancias Mecánicas de radiación*  $Z_{MR}$ , observar que

<sup>5</sup> Revisar la bibliografía que explica analogías electroacústicas y circuitos equivalentes, (Leo, 1996)P.47; (Harry, 1960)P.71; (Ortega & Romero, 2003)P.15

estas impedancias también están en su forma inversa, por la misma razón de tener un circuito de movilidad más no de impedancia.



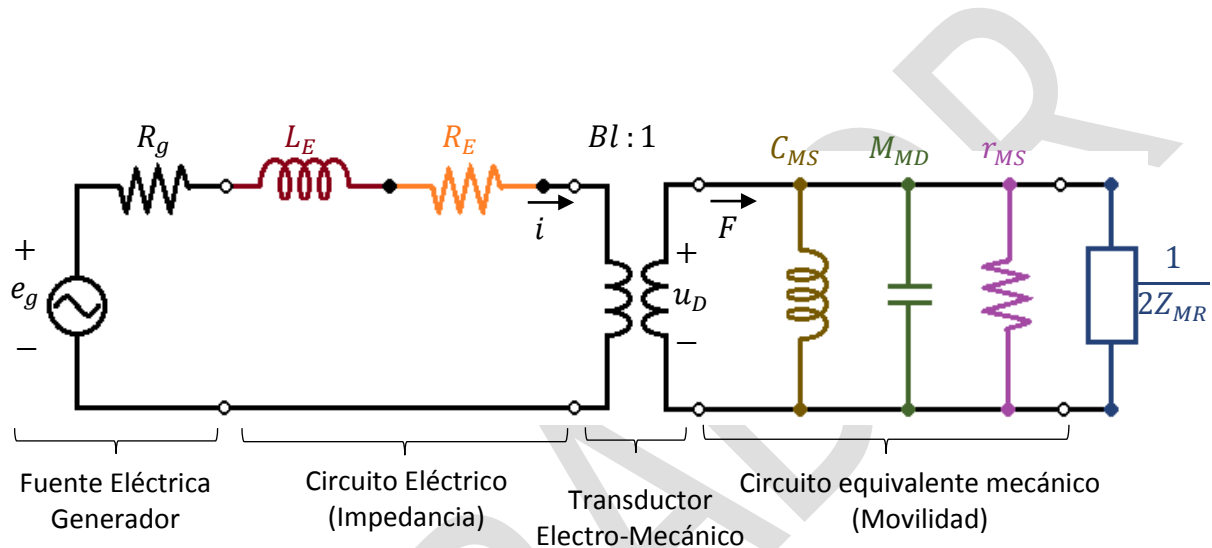
**Figura 7.5** Se muestra como a partir del diagrama mecánico se plantea el circuito mecánico equivalente en analogía de movilidad.

Para culminar el circuito equivalente, se ubican las variables fuerza y velocidad, como se planteó en un principio la velocidad es igual en todos los elementos, es por eso, que la velocidad del diafragma  $u_D$  es común en todos los elementos y se ubica como una caída de potencial en una conexión en paralelo. Por otro lado, la fuerza sería equivalente a una corriente que se distribuye en los elementos. Estas equivalencias se dan para cumplir con el circuito equivalente en su forma de movilidad mecánica.

### 7.2.3 Circuito mecánico eléctrico de movilidad

Ya definida la parte mecánica del circuito, ahora se debe completar con la parte eléctrica, como se muestra en la Figura 7.6, esta parte es muy sencilla, pues se da en analogía de

impedancia que permite hacer el circuito en serie teniendo en cuenta los elementos eléctricos que son sólo dos para el altavoz; se tiene la **Inductancia Eléctrica de la bobina  $L_E$** , que como toda bobina tiene su propia **Resistencia Eléctrica  $R_E$** , ahora bien, se debe tener en cuenta la fuente de la señal eléctrica que en casos prácticos se trata de un amplificador de potencia, que en este caso se resume el generador de señal en un circuito equivalente thevenin del amplificador con la fuente de voltaje  $e_g$ , y la resistencia de salida del generador que se define como  $R_g$ .



**Figura 7.6** Circuito equivalente completo del altavoz, donde la parte eléctrica está en analogía de impedancia mientras que la parte mecánica está en analogía de movilidad.

Para resolver el circuito y simplificarlo de la manera más sencilla posible se debe eliminar el transformador, éste se puede eliminar de varias formas, se recomienda operar el factor de transformación  $Bl$  a uno de los circuitos ya sea el eléctrico o el mecánico. Si se opera en el lado eléctrico, las variables eléctricas se convierten en variables mecánico-eléctricas, afectadas por el transformador, y por el otro lado, si se opera el factor  $Bl$  en el circuito mecánico, las variables mecánicas se convierten en variables electro-mecánicas.

Dependiendo del tipo de análisis que se requiera se opera en un circuito o en el otro; para determinar la función de transferencia de todo el sistema es más sencillo operar el lado eléctrico porque se debe tener en cuenta la fuente, y para determinar la impedancia eléctrica de todo el sistema se recomienda operar en el lado mecánico, además porque para la impedancia no se tiene en cuenta la fuente. Ambos análisis se harán, para esta sección donde se desea conocer la función de transferencia del altavoz, se elimina operando en el circuito eléctrico.

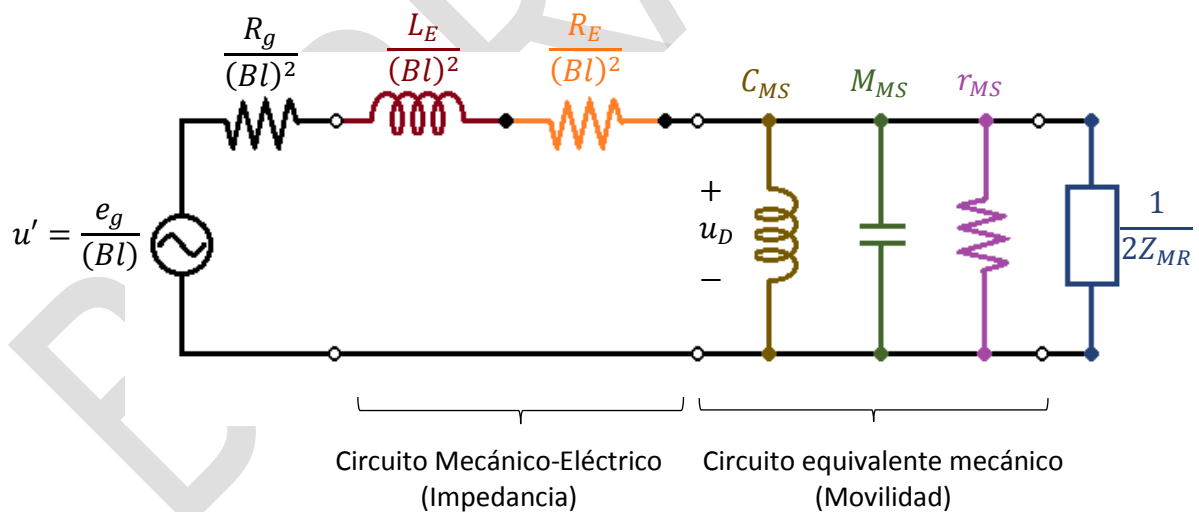
$$R_g \Rightarrow \frac{R_g}{(Bl)^2} \quad (7.3)$$

$$R_E \Rightarrow \frac{R_E}{(Bl)^2} \quad (7.4)$$

$$L_E \Rightarrow \frac{L_E}{(Bl)^2} \quad (7.5)$$

$$e_g \Rightarrow \frac{e_g}{Bl} = u' \quad (7.6)$$

Con base en las técnicas de solución de circuitos equivalentes y analogías electroacústicas se elimina el transformador de la siguiente manera, el factor  $Bl$ , se eleva al cuadrado y se divide en los resistores e inductores, si hay capacitores se multiplica, y en la fuente se divide sin elevar al cuadrado. Así como se muestra en las ecuaciones ( 7.3) a la ( 7.6) y en la Figura 7.7. Esto se puede revisar en la bibliografía recomendada<sup>6</sup>.



**Figura 7.7** Como resulta el circuito después de eliminar el transformador, en la parte eléctrica del circuito.

Para empezar a simplificar el circuito se toman las resistencias de la parte eléctrica y se reducen en una sola resistencia, ya que están en conexión en serie, simplemente se

<sup>6</sup> (Robert L, 2004)P.942; (Ortega & Romero, 2003)P.40; (Leo, 1996)P.79



suman la  $R_E$  y la  $R_g$  estableciendo una nueva variable que es  $R_{ET}$  llamada resistencia eléctrica total, como se da en la ecuación ( 7.7).

$$R_{ET} = R_E + R_g \quad (7.7)$$

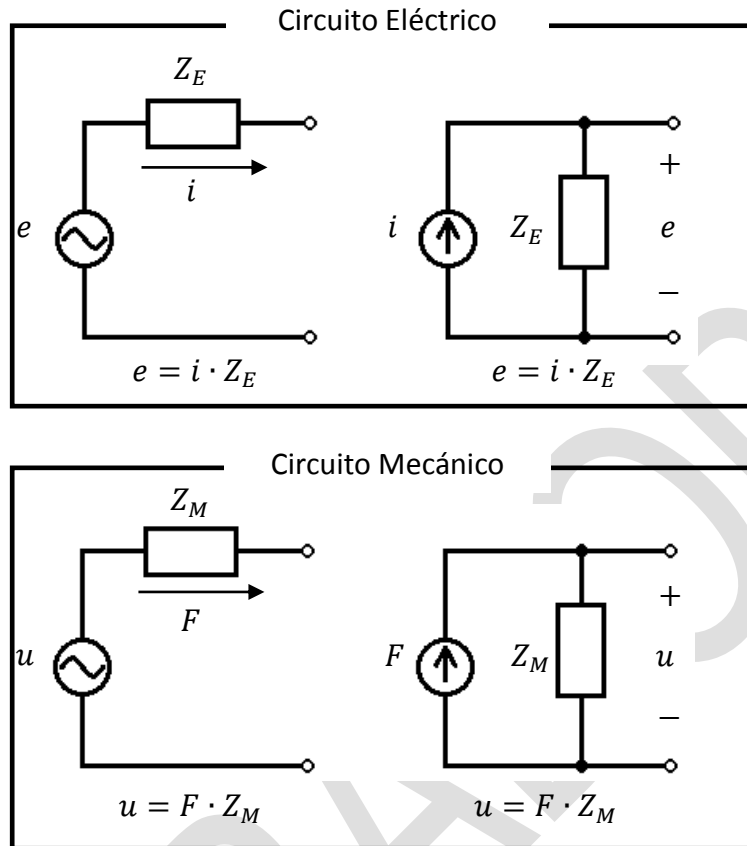
Como las resistencias son afectadas por el factor de transformación  $B_l$ , igual se suman en serie, como se muestra en la ecuación ( 7.8)

$$\frac{R_{ET}}{(B_l)^2} = \frac{R_E + R_g}{(B_l)^2} \quad (7.8)$$

Ahora, para seguir simplificando el circuito, se tiene una parte en serie (impedancia) y otra parte el paralelo (movilidad), para ayudar a resolver el circuito de una manera sencilla, es posible aplicar la teoría de circuitos que permite hacer la transformación de fuentes<sup>7</sup>, donde se tiene una fuente de tensión en serie con una impedancia, se puede transformar en una fuente de corriente con la misma impedancia en paralelo, siempre y cuando se cumpla la ley de Ohm, como se ilustra en la Figura 7.8.

---

<sup>7</sup> Revisar, (Robert L, 2004) P.257



**Figura 7.8** Se muestra la transformación de fuentes desde la teoría de circuitos eléctricos como se ve en la parte superior de la figura. Ahora aplicando dicha transformación en un circuito mecánico como se muestra en la parte inferior de la figura.

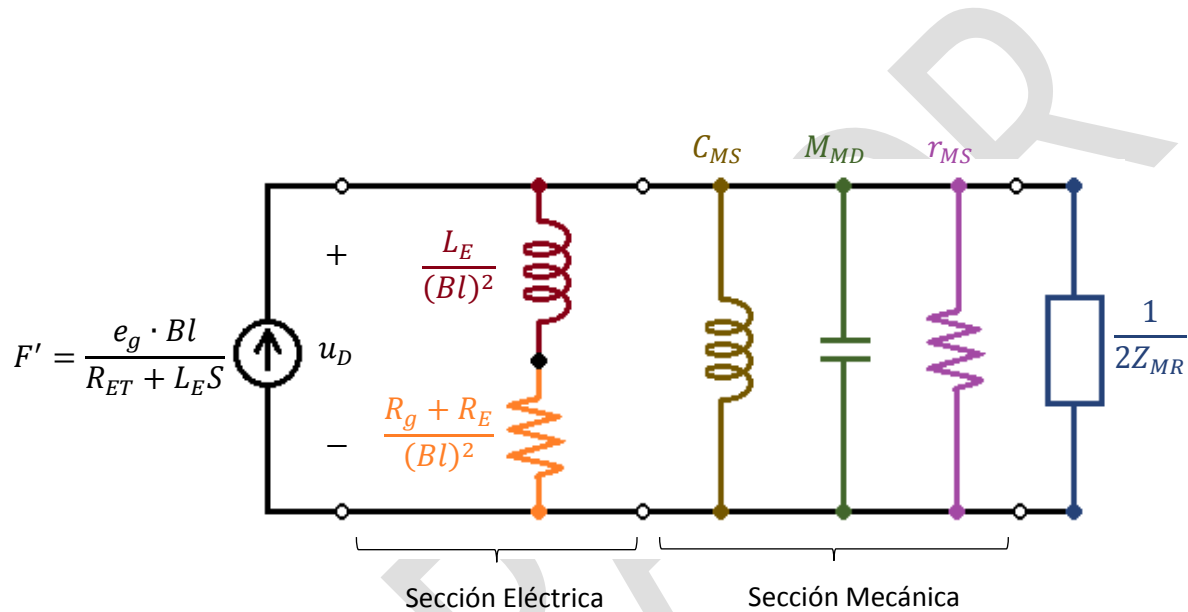
Para hacer la transformación sólo se toman los elementos de origen eléctrico que son los que están conectados en serie, y se determina la impedancia mecánico-eléctrica  $Z_{ME}'$ , como la suma de los tres elementos de origen eléctrico. Así como se evidencia en la ecuación ( 7.9)

$$Z_{ME}' = \frac{R_E}{(Bl)^2} + \frac{R_g}{(Bl)^2} + \frac{L_E S}{(Bl)^2} = \frac{R_{ET} + L_E S}{(Bl)^2} \quad (7.9)$$

Ahora se transforma la fuente, se tenía una fuente de tensión  $u'$  como se definió en la ecuación ( 7.6), y pasa a ser una fuente de flujo  $F'$  como lo indica la ecuación ( 7.10). Esta ecuación se toma según el análisis que se ilustra en la Figura 7.8

$$F' = \frac{u'}{Z_{ME}'} = \frac{\frac{e_g}{Bl}}{\frac{R_{ET} + L_E S}{(Bl)^2}} = \frac{e_g \cdot Bl}{R_{ET} + L_E S} = i \cdot Bl \quad (7.10)$$

Después de hacer la transformación de fuente, el circuito queda como aparece en la Figura 7.9, donde se tiene una fuente de corriente  $F'$ , y todos los elementos quedan en paralelo compartiendo la velocidad del diafragma  $u_D$  como caída de tensión.



**Figura 7.9** Circuito equivalente mecánico eléctrico en analogía de movilidad.

## 7.2.4 Circuito mecánico-eléctrico de Impedancia

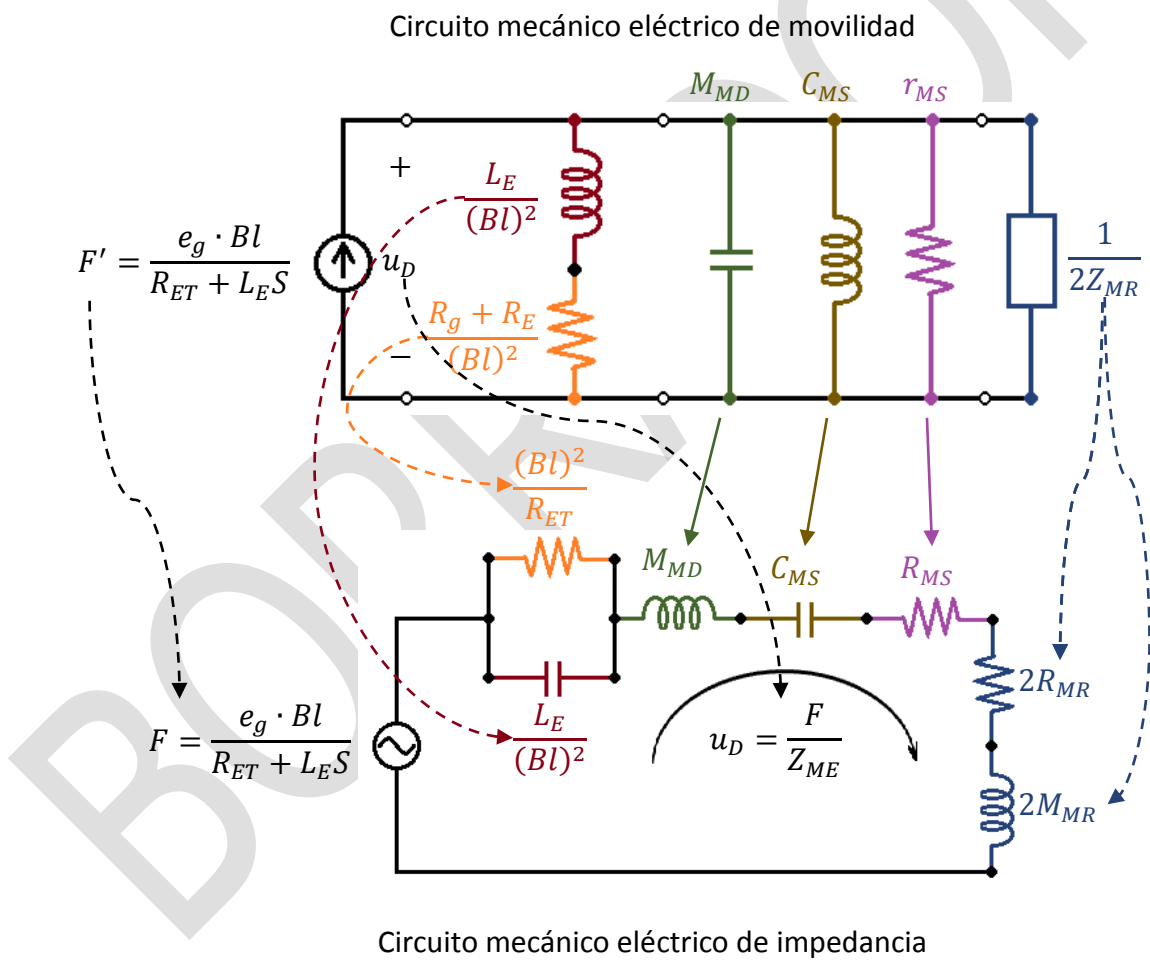
En esta sección se procede a hacer un cambio de analogía de movilidad a impedancia, de esta manera el circuito queda en su mayoría conectado en serie permitiendo hacer simplificaciones más sencillas, recordar que este cambio de analogía tiene sus reglas.

- La fuente cambia de flujo a tensión la variable que representa la fuente se mantiene igual  $F$
- todo lo que esté en paralelo pasa a serie y de forma inversa lo que está en serie quedará en paralelo.
- La responsividad se convierte en una resistencia mecánica, la ecuación se debe invertir.
- Los capacitores pasan a ser inductores, los inductores se transforman en capacitores, la variable en estos elementos no cambia.

- La caída de tensión  $u_D$  que es igual en todos los elementos en paralelo, para a ser un flujo que será igual en todos los elementos en serie.

Tomar como base la Figura 7.10, donde se muestra de manera ilustrada el cambio de analogía, como cada variable con su elemento respectivo pasa de un circuito de movilidad a un circuito de impedancia.

Como se observa la fuente de corriente  $F'$  pasa a ser una fuente de tensión  $F$  con la misma ecuación ( 7.10).



**Figura 7.10** Cambio de analogía, se muestra de forma esquemática el cambio del circuito mecánico eléctrico equivalente del altavoz de movilidad a Impedancia.

Luego se tienen los elementos de origen eléctrico en una rama de dos elementos en serie, donde ésta serie está en paralelo con la fuente de corriente y los demás elementos del circuito, siguiendo el cambio de analogía estos elementos en serie quedan en paralelo y

el paralelo, se conecta en serie con la fuente de tensión como se muestra en la Figura 7.10. En la rama en serie, se tiene que la resistencia eléctrica total  $R_{ET}$  sobre el factor  $(Bl)^2$  resaltado en color naranja, por el cambio de analogía se invierte la ecuación y se llama a esta relación **Resistencia Mecánico Eléctrica**  $R_{ME}$ , como aparece en la ecuación (7.11). Con el otro elemento en serie, que se trata de la inductancia eléctrica de la bobina  $L_E$  sobre el factor  $(Bl)^2$ , en el cambio de analogía se mantiene igual la relación, pues cambia la conexión y el elemento, pero no la relación, quedando así lo que se denomina en la analogía de impedancia la **Capacitancia Mecánico Eléctrica**  $C_{ME}$ , como se muestra en la ecuación (7.12).

*Nota: No olvidar que la capacitancia mecánico eléctrica resulta en el circuito equivalente de tipo impedancia en forma de capacitor, pero no olvidar que este capacitor en realidad está representando la inductancia eléctrica de la bobina.*

$$\frac{R_{ET}}{(Bl)^2} \Rightarrow \frac{(Bl)^2}{R_{ET}} = R_{ME} \quad (7.11)$$

$$\frac{L_E}{(Bl)^2} = C_{ME} \quad (7.12)$$

La **Masa mecánica del diafragma**  $M_{MD}$  en el circuito de movilidad corresponde a un capacitor que está conectado en paralelo con la fuente de corriente  $F'$ , en el cambio de analogía, la variable se sigue llamando igual y sigue siendo  $M_{MD}$ , pero cambia la conexión a estar en serie y el elemento cambia a inductor. Ver Figura 7.10.

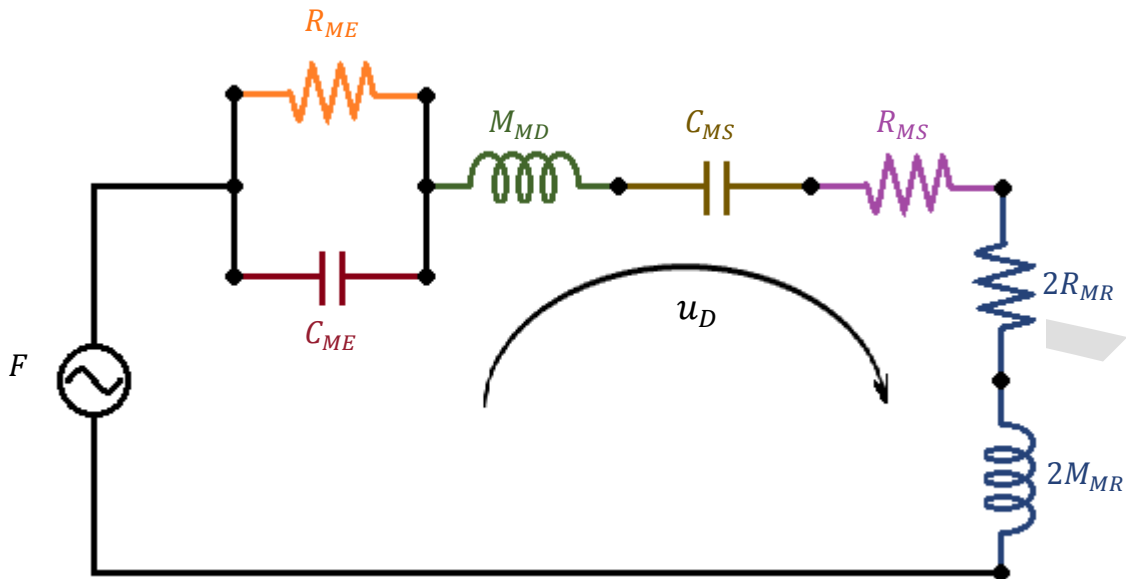
La **Compliance mecánica de la suspensión**  $C_{MS}$  que está representada con una bobina en paralelo, debido al cambio de analogía, pasa a ser un capacitor conectado en serie, como se ve en la Figura 7.10, la variable no cambia de nombre.

En la Figura 7.10 se muestra como en el circuito de movilidad la **responsividad mecánica de la suspensión**  $r_{MS}$ , pasa a ser una **Resistencia mecánica de la suspensión**  $R_{MS}$  y la conexión también cambia de paralelo a serie por el cambio de analogía.

Ahora se tiene la **Impedancia mecánica de radiación**  $Z_{MR}$ , que originalmente aparece conectada en paralelo con la fuente y los demás elementos y está dada como el inverso de la impedancia debido a que está en un circuito de movilidad. Cuando se pasa al circuito de impedancia como se muestra en la Figura 7.10, la impedancia mecánica de radiación queda como un circuito en serie con dos elementos, revisar la Figura 6.3; la **Resistencia mecánica de radiación**  $R_{MR}$  y la **Masa mecánica de radiación**  $R_{MR}$ , que quedan duplicados por estar el altavoz en panel infinito.

Por último, la velocidad del diafragma  $u_D$  que representa una caída de tensión en el circuito de movilidad y es común para todos los elementos, ahora en el cambio de analogía

pasa a representar una corriente que fluye por todos los elementos que están en serie y será también común en éstos.



**Figura 7.11** Circuito equivalente mecánico eléctrico de impedancia

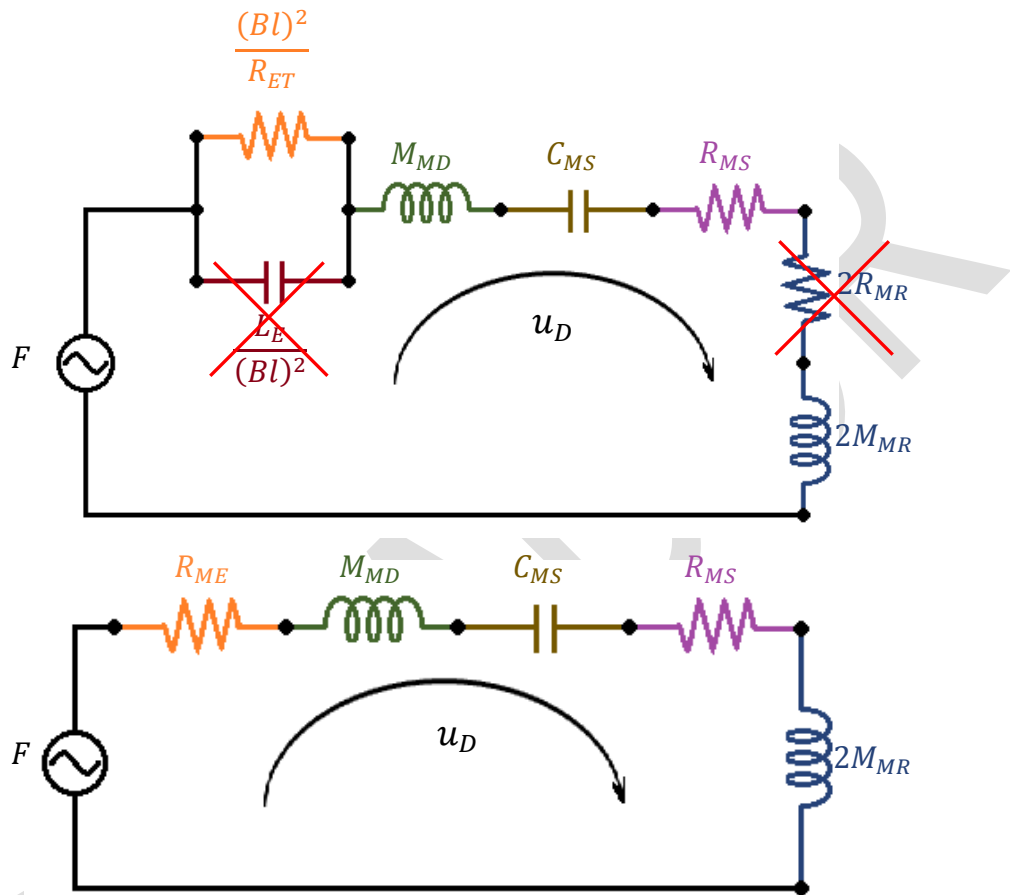
Finalmente en la Figura 7.11, se tiene el circuito equivalente mecánico eléctrico, que representa de una forma sencilla todas las partes mecánicas y eléctricas del altavoz, a partir de este circuito se harán análisis en alta y baja frecuencia para determinar la función de transferencia y los cortes de frecuencia que tiene el altavoz, también es útil para determinar los parámetros Thiele-Small del altavoz y diferentes características que ayudan comprender el desempeño de los altavoces a partir de sus variables electroacústicas.

### 7.2.5 Aproximación en baja frecuencia

El circuito equivalente de la Figura 7.11, muestra varios elementos que tendrán diferente comportamiento en los extremos de frecuencia, para hacer un análisis más sencillo se separa el análisis en baja y alta frecuencia y así simplificar el circuito eliminando elementos que en alguna zona de frecuencia no tienen efectos relevantes frente a otros elementos que si tiene un fuerte impacto en dicha zona de frecuencia. Se debe tener en cuenta que tenemos un circuito con diferentes elementos reactivos que en función de la frecuencia cambiarán su comportamiento, en otras palabras, el altavoz es un sistema que tiene implícitos filtros electroacústicos que limitan la zona de trabajo, por eso a través del análisis de filtros es que se propone estimar la respuesta en frecuencia de este sistema.

En esta sección se hace el análisis de baja frecuencia denotado con LF de las siglas en inglés (Low Frequency), por eso las variables tendrán esta referencia con el propósito de

diferenciar este análisis con el de alta frecuencia (HF) o con los análisis de todo el espacio de frecuencia (S).



**Figura 7.12** Muestra el circuito equivalente que en su aproximación de baja frecuencia, donde se resaltan los elementos que se eliminan para simplificar el análisis.

En este análisis se tienen en cuenta las siguientes condiciones:

- La excursión de los diafragmas en LF es amplia lo que hace que la  $M_{MD}$ , la  $C_{MS}$ , y la  $R_{MS}$ , experimenten un fuerte movimiento, por lo cual son elementos mecánicos que se tienen que tener en cuenta en LF.
- La impedancia mecánica de radiación  $Z_{MR}$  tiene su respectiva aproximación en baja frecuencia explicada en la sección 6.2.1 y en la sección 6.3.1, donde en LF la  $M_{MR}$  tiende a generar una reactancia que es mucho mayor que la  $R_{MR}$ , por esta aproximación se elimina la  $R_{MR}$  del circuito como se muestra en la Figura 7.12.
- En la parte de origen eléctrico, la resistencia eléctrica no presenta efectos dependientes de la frecuencia, luego se debe tener en cuenta. Y por el lado de la  $C_{ME}$ , como se muestra en el circuito de impedancia, en LF los capacitores generan una reactancia grande que tiende a ser un circuito abierto, y como está en paralelo

con la  $R_{ME}$ , el paralelo siempre tiende al elemento con menor cantidad de Ohmios, que este caso sería la  $R_{ME}$ , por lo cual se elimina el capacitor  $C_{ME}$ .

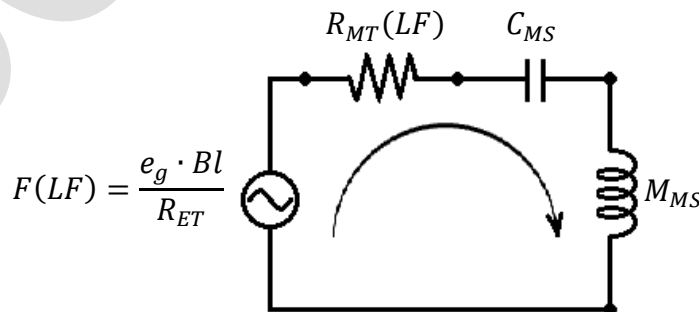
- Por último, es esta aproximación se revisa la fuente de fuerza, que en su ecuación ( 7.10) tiene como denominador la suma de  $R_{ET}$  con la reactancia inductiva  $L_E S$ , esta reactancia en baja frecuencia es pequeña por lo que tiende a corto circuito y como es más pequeña que  $R_{ET}$ , se elimina de la ecuación. En general el efecto de la bobina se desprecia en baja frecuencia. La fuerza queda como se da en la ecuación ( 7.13).

$$F(LF) = \frac{e_g \cdot Bl}{R_{ET}} \quad (7.13)$$

En la Figura 7.12, se muestra como queda el circuito en la aproximación de baja frecuencia, ahora simplificar el circuito es muy sencillo, pues se tienen dos resistores en serie y dos inductores en serie, que en ambos casos se puede reducir a un elemento equivalente, para este efecto se muestra en la ecuación ( 7.14), la Masa mecánica del altavoz  $M_{MS}$  como la suma de la masa mecánica del diafragma  $M_{MD}$  y dos veces la masa mecánica de radiación  $M_{MR}$ . También se tiene la Resistencia mecánica total  $R_{MT}$ , ecuación ( 7.15), como la suma de la Resistencia mecánico eléctrica  $R_{ME}$  y la resistencia mecánica de la suspensión  $R_{MS}$ .

$$M_{MS} = M_{MD} + 2M_{MR} \quad (7.14)$$

$$R_{MT}(LF) = R_{ME} + R_{MS} \quad (7.15)$$



**Figura 7.13** Circuito equivalente mecánico eléctrico de impedancia en baja frecuencia.



Ahora se plantea la función de transferencia para este circuito donde se obtiene el comportamiento de la velocidad del diafragma en función de la frecuencia, donde la variable de entrada sería el voltaje del generador y la salida es la velocidad del diafragma.

Para determinar la función de transferencia de velocidad, simplemente consiste en aplicar una ley de ohm mecánica como se puede observar en la ecuación ( 7.17), donde se requiere conocer la fuerza, y la impedancia de todo el circuito. Para este fin, se tiene la fuerza en la ecuación ( 7.13), y la impedancia mecánico eléctrica que consiste en la suma de los elementos del circuito en función de la frecuencia como se da en la ecuación ( 7.16)

$$Z_{ME}(LF) = R_{MT}(LF) + M_{MS}S + \frac{1}{C_{MS}S} \quad (7.16)$$

$$u_D(LF) = \frac{F(LF)}{Z_{ME}(LF)} = \frac{\frac{e_g \cdot Bl}{R_{ET}} \cdot \frac{S}{M_{MS}}}{R_{MT}(LF) + M_{MS}S + \frac{1}{C_{MS}S} \cdot \frac{S}{M_{MS}}} \quad (7.17)$$

Una vez se resuelve la ecuación ( 7.17), nótese que se multiplica el numerador y el denominador por  $S/M_{MS}$ , con el fin de organizar la función de transferencia organizando el polinomio del denominador de manera que la S de mayor grado tenga coeficiente igual a la unidad, como en la ecuación ( 7.18).

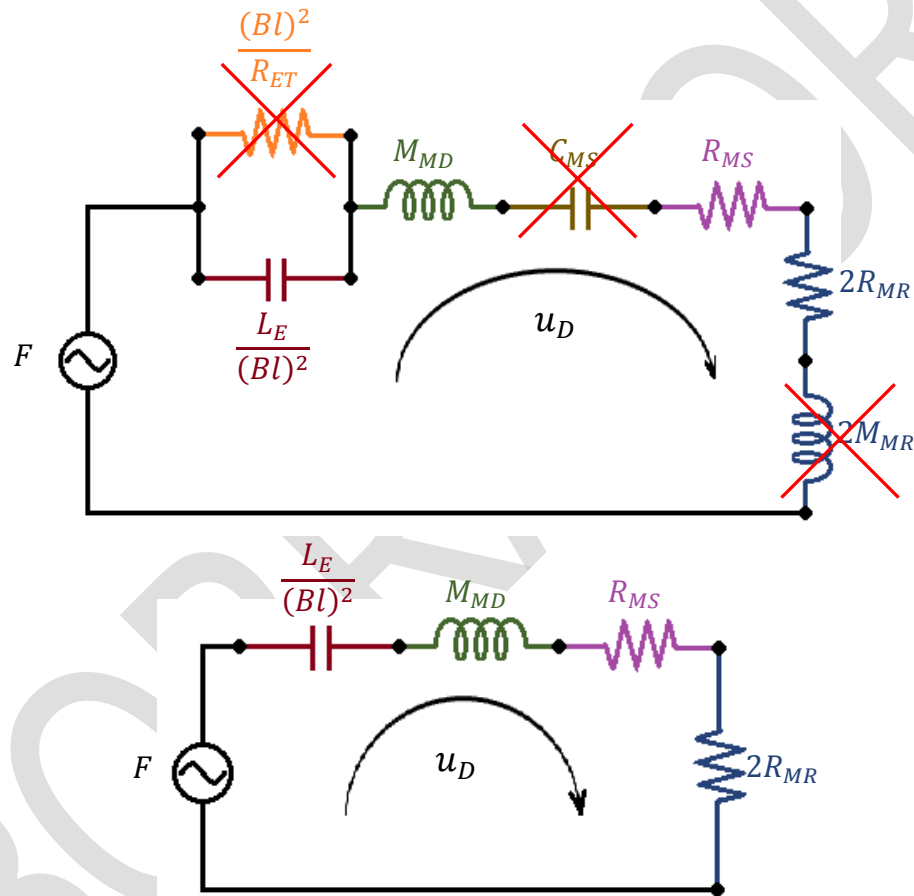
$$u_D(LF) = \frac{\frac{e_g \cdot Bl}{R_{ET}M_{MS}} \cdot S}{\frac{R_{MT}}{M_{MS}}S + S^2 + \frac{1}{C_{MS}M_{MS}}} \quad (7.18)$$

Para finalizar se tiene la función de transferencia de velocidad del diafragma ( 7.19), donde se tiene un comportamiento de filtro pasa banda de segundo orden. Más adelante se utiliza esta función para diferentes análisis.

$$u_D(S) = \frac{e_g \cdot Bl}{R_{ET}M_{MS}} \cdot \frac{S}{S^2 + \frac{R_{MT}}{M_{MS}}S + \frac{1}{C_{MS}M_{MS}}} \quad (7.19)$$

## 7.2.6 Aproximación en alta frecuencia

Ahora se hace una aproximación en alta frecuencia HF (High Frequency), de manera similar que en la sección anterior se hace un análisis del comportamiento del circuito y los elementos reactivos pero esta vez en la zona de frecuencias altas.



**Figura 7.14** Se muestra la reducción del circuito equivalente mecánico del altavoz, en la zona de alta frecuencia.

Para esta simplificación se tienen en cuenta las siguientes condiciones:

- En la zona de HF, la excursión del cono es mínima, tanto así que el diafragma de un altavoz puede ser sujetado con la mano y seguirá reproduciendo sonido de alta frecuencia. Como la excursión es mínima la suspensión sostiene el diafragma, pero

no experimenta movimiento como ocurre en LF. Por esta razón se elimina la  $C_{MS}$  del circuito como se muestra en la Figura 7.14.

- En alta frecuencia la reactancia capacitiva que se da en  $C_{ME}$  tiende a ser un corto circuito con pocos ohmios respecto a la  $R_{ME}$ , como estos elementos están en paralelo, la tendencia del paralelo se da al elemento con menor cantidad de ohmios que en este caso será  $C_{ME}$ , por lo cual, se elimina  $R_{ME}$ , como se ilustra en la Figura 7.14.
- En la impedancia mecánica de radiación  $Z_{MR}$ , como se revisó la sección 6.2.2 y 6.3.2, en alta frecuencia, tiende a ser más resistiva que reactiva, por esta razón, se elimina la Masa mecánica de radiación  $M_{MR}$ . Como se muestra en la Figura 7.14.
- Igual que en el caso de baja frecuencia, como se modifica un elemento de origen eléctrico se debe modificar la fuente de fuerza, pero esta vez se eliminó la resistencia y no la bobina, así la ecuación de fuerza queda sin el término  $R_{ET}$ , y a partir de la aproximación en HF, la ecuación de fuerza queda como en ( 7.20).

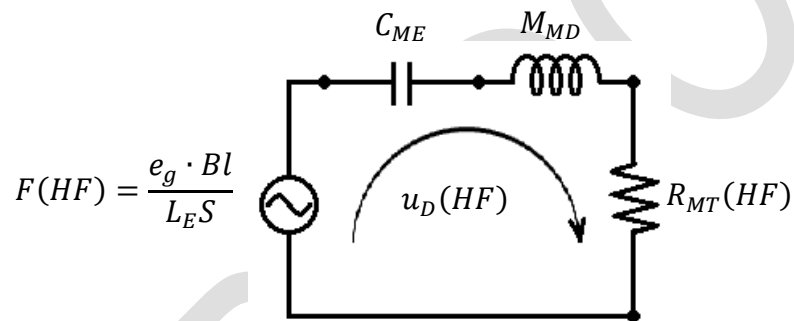
$$F(HF) = \frac{e_g \cdot Bl}{L_E S} \quad (7.20)$$

Como se muestra en la Figura 7.14, se logra simplificar el circuito de manera que quedan pocos elementos y en serie lo que permite una reducción sencilla. Se toman las dos resistencias; la resistencia mecánica de la suspensión  $R_{MS}$  y la resistencia mecánica de radiación  $R_{MR}$ , se suman gracias a su conexión en serie, quedando una resistencia mecánica total para alta frecuencia,  $R_{MT}(HF)$  como se da en la ecuación ( 7.21).

$$R_{MT}(HF) = R_{MS} + 2R_{MR} \quad (7.21)$$

Finalmente se tiene el circuito lo más reducido posible, con un circuito serie de tres elementos como se muestra en la Figura 7.15. Su respectiva impedancia mecánico eléctrica  $Z_{ME}(HF)$  se muestra en la ecuación ( 7.22).

$$Z_{ME}(HF) = R_{MT}(HF) + M_{MD}S + \frac{1}{C_{ME}S} \quad (7.22)$$



$$F(HF) = \frac{e_g \cdot Bl}{L_E S}$$

**Figura 7.15** El circuito equivalente del altavoz, en alta frecuencia con todas las simplificaciones posibles.

Ahora se procede a simplificar la función de transferencia de velocidad mecánica del diafragma  $u_D(HF)$  en alta frecuencia. Como se muestra en la ecuación ( 7.23)

$$u_D(HF) = \frac{F(HF)}{Z_{ME}(HF)} = \frac{\frac{e_g \cdot Bl}{L_E S}}{R_{MT}(LF) + M_{MD}S + \frac{1}{C_{ME}S}} \cdot \frac{S}{\frac{S}{M_{MD}}} \quad (7.23)$$

$$u_D(HF) = \frac{\frac{e_g \cdot Bl}{L_E M_{MD}}}{\frac{R_{MT}}{M_{MD}} S + S^2 + \frac{1}{C_{ME} M_{MD}}} \quad (7.24)$$

$$u_D(S) = \frac{e_g \cdot Bl}{L_E M_{MD}} \cdot \frac{1}{S^2 + \frac{R_{MT}}{M_{MD}} S + \frac{1}{C_{ME} M_{MD}}} \quad (7.25)$$

Finalmente se tiene la ecuación ( 7.25), con la función de transferencia del altavoz para alta frecuencia, donde se tiene una frecuencia de resonancia electromecánica que depende de un elemento eléctrico que es la bobina  $C_{ME}$  y un elemento mecánico que es la masa mecánica del diafragma  $M_{MD}$ . Ambos elementos reactivos poseen alta reactancia en alta frecuencia, por eso son transductores que su límite superior de trabajo depende de la masa mecánica del sistema y de la inductancia eléctrica de la bobina.

## 8 LISTA DE VARIABLES

---

$C$	Capacitancia eléctrica de un Capacitor medido en Faradios [ $F$ ]
$dB$	Los decibeles adimensionales, representan una ganancia si el valor es positivo o una atenuación si su valor es negativo.
$dB_{spl}$	Decibeles de nivel de presión sonora, son indicadores de presión acústica dada en Pascales en una escala de decibeles. [ $dB_{spl}$ ] Referencia: [20uPa]
$G_{LP1}$	Función de transferencia, filtro pasa bajos de primer orden.
$G_{HP1}$	Función de transferencia, filtro pasa altos de primer orden.
$G_{BP}$	Función de transferencia, filtro pasa banda, a partir de dos filtros de primer orden o dos elementos reactivos. Pendientes de 20dB/década.
$G_{LP2}$	Función de transferencia, filtro pasa bajos de segundo orden.
$G_{HP2}$	Función de transferencia, filtro pasa bajos de segundo orden.
$G_{BP2}$	Función de transferencia, filtro pasa banda, a partir de dos filtros de segundo orden o cuatro elementos reactivos. Pendientes de 40dB/década.
$i$	Corriente dada en amperios de forma ac, indica el valor rms de la señal [ $A$ ]
$L$	Inductancia eléctrica de un inductor medida en Henrios [ $H$ ]
$P$	Potencia eléctrica medida en vatios [ $W$ ]
$p$	Presión acústica dada en pascales [ $Pa$ ] [ $N/m^2$ ]
$f$	Frecuencia, cantidad de ciclos en unidad de tiempo, segundos. [ $Hz$ ] [ $\frac{1}{s}$ ]

$F$	Fuerza, producto de la masa y la aceleración, dado en Newton. [ $N$ ]
$Q$	Factor de calidad de los filtros de segundo orden, indica el grado de amortiguamiento del sistema o de otra manera las pérdidas dadas por motivos resistivos. Su valor es adimensional.
$\rho_0$	Densidad del aire, dada como la cantidad de masa de aire en un volumen. [ $Kg/m^3$ ]
$v$	Voltaje de forma ac en voltios, indica el valor rms de la señal [ $V$ ]
$v_i$	Voltaje ac de entrada en un circuito, indica el valor rms de la señal [ $V$ ]
$v_o$	Voltaje ac de salida en un circuito, indica el valor rms de la señal [ $V$ ]
$V$	Voltaje de forma dc dado en voltios [ $V$ ]
$R_W$	Impedancia nominal de un altavoz de baja frecuencia (Woofer), lo que se conoce como valor comercial de impedancia que por lo general está impreso en el altavoz [ $\Omega$ ]
$R_M$	Impedancia nominal de un altavoz de media frecuencia (Midrange), lo que se conoce como valor comercial de impedancia. [ $\Omega$ ]
$R_T$	Impedancia nominal de un altavoz de alta frecuencia (Tweeter), lo que se conoce como valor comercial de impedancia. [ $\Omega$ ]
$R$	Resistencia eléctrica en un Resistor medido en Ohmios [ $\Omega$ ]
$R_E$	Resistencia eléctrica de la bobina de un altavoz electrodinámico, es la resistencia en ausencia de frecuencia también llamada resistencia DC de la bobina, es medida con el Ohmímetro de un multímetro con el altavoz al aire libre sin que tenga conectado nada más que el instrumento de medición. [ $\Omega$ ]
$R_{eq}$	Resistencia equivalente de un circuito eléctrico. [ $\Omega$ ]
$R_L$	Resistencia de carga de un circuito eléctrico. [ $\Omega$ ]
$S$	La ese de Laplace, representa la frecuencia compleja [ $S$ ] = [ $j\omega$ ]
$\omega$	Omega, Frecuencia angular [ $rad/seg$ ]
$\omega_0$	Omega sub cero, Frecuencia crítica de un filtro eléctrico. [ $rad/seg$ ]
$\omega_0$	Omega sub cero, Frecuencia de resonancia en el caso de un filtro pasa banda. [ $rad/seg$ ]
$\omega_c$	Omega sub c, Frecuencia de corte donde hay una atenuación de 3dB respecto a la banda de paso. [ $rad/seg$ ]
$\omega_l$	Omega sub I, Frecuencia de corte inferior a la frecuencia de resonancia, donde hay una atenuación de 3dB respecto a la banda de paso. [ $rad/seg$ ]

- $\omega_S$  Omega sub S, Frecuencia de corte superior a la frecuencia de resonancia, donde hay una atenuación de 3dB respecto a la banda de paso. [rad/seg]
- $Z_{MR}$  Impedancia Mecánica de Radiación
- $R_{MR}$  Resistencia Mecánica de Radiación
- $X_{MR}$  Reactancia Mecánica de Radiación
- $M_{MR}$  Masa Mecánica de Radiación
- $M_{MD}$  Masa Mecánica del diafragma de un altavoz, contempla la masa de la bobina
- $M_{MS}$  Masa Mecánica total del altavoz,
- $S_e$  Superficie de una esfera.
- $S_p$  Superficie de un pistón plano.