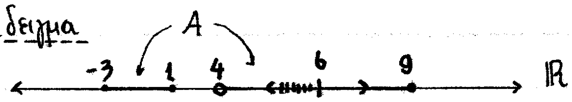
ΟΡΙΟ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

▼ Περιοχή σημείου - σημείο συσσώρευσης

- Περιοχή* σημείου $x_0 \in A \subseteq \mathbb{R}$, $n(x_0)$ ως προς το A λέγεται κάθε σύνολο της μορφής $n(x_0,\varepsilon) = (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \cap A - \{x_0\}$.
-
- Σημείο σωσσώρευσης λέγεται κάθε σημείο $x_0 \in A$ για το οποίο ισχύει.

$$\boxed{x_0 \text{ σημείο συσσώρευσης του } A \Longleftrightarrow \forall \varepsilon>0,\ n(x_0,\varepsilon) \neq \emptyset}$$

παράδειγμα

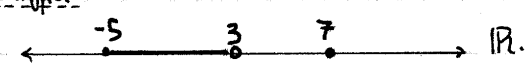


στο σύνολο $A=[-3,1] \cup (4,9]$ το σημείο 6 είναι σημείο συσσώρευσης.

- Τα συνοριακά σημεία a, b σε ένα ανοικτό διάστημα (a,b) είναι σημεία συσσώρευσης του διαστήματος. Φυσικά, αυτό ισχύει και για τα κλειστά διαστήματα.
- Τα σημεία $+\infty$, $-\infty$ στα διαστήματα $(a,+\infty)$, $(-\infty,a)$ αντίστοιχα είναι "κατ' εξοχήν" σημεία συσσώρευσης των αντίστοιχων διαστημάτων.

$$\boxed{x_0 \text{ μεμονωμένο στο } A \Longleftrightarrow \exists\, \varepsilon>0,\ n(x_0,\varepsilon) = \emptyset}$$

παράδειγμα



στο σύνολο $A=[-5,3) \cup \{7\}$ το σημείο $x_0=7$ είναι μεμονωμένο διότι για $\varepsilon=1$, $n(7,1)=[(6,8)\cap A]-\{7\}=\{7\}-\{7\}=\emptyset$.

- x_0 μεμονωμένο $\Longleftrightarrow$ x_0 όχι σ.σ. στο A.
- x_0 όχι μεμονωμένο $\Longleftrightarrow$ x_0 σ.σ. στο A.

$$\boxed{x_0 \text{ εσωτερικό στο } A \Longleftrightarrow \exists\, \varepsilon>0,\ n(x_0,\varepsilon) \subseteq A \wedge n(x_0,\varepsilon) \neq \emptyset}$$

παράδειγμα

στο $A=[-5,3)$ το σημείο $x_0 = 2/3$ είναι εσωτερικό

διοτι για $\varepsilon=1$, $n(\frac{2}{3},1)=[(-\frac{1}{3},\frac{5}{3})\cap[-5,3)]-\{\frac{2}{3}\}=(-\frac{1}{3},\frac{5}{3})-\{\frac{2}{3}\}=(-\frac{1}{3},\frac{2}{3})\cup(\frac{2}{3},\frac{5}{3})$

$$\Longrightarrow \begin{cases} n(\frac{2}{3},1) \subset A \\ n(\frac{2}{3},1) \neq \emptyset \end{cases}$$

Προσοχη: Δεν ισχύει εν' γένει ότι x_0 σ.σ $\Longrightarrow$ x_0 εσωτερικό.

π.χ. στο $(-1,3)$, 3 είναι σ.σ. άλλα όχι εσωτερικό.

Ισχύει όμως $\boxed{x_0 \text{ εσωτερικό στο } A \Longrightarrow x_0 \text{ σημείο συσσώρευσης στο } A}$

(*) • Περιοχή του $+\infty$ ως προς A λέγεται καθε σύνολο $(a,+\infty)\cap A$

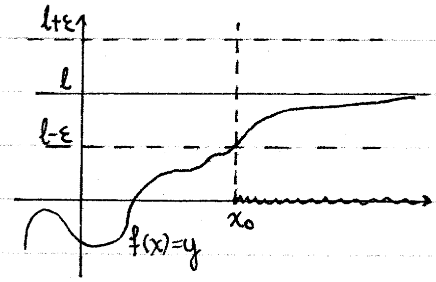
• Περιοχή του $-\infty$ ως προς A λέγεται κάθε σύνολο $(-\infty,b)\cap A$

▼ Όριο συνάρτησης στο άπειρο

- Βασική προϋπόθεση ώστε το όριο στο $+\infty$ $(-\infty)$ να έχει έννοια είναι το Π.Ο. της f να έχει ως σημείο συσσώρευσης το $+\infty$ $(-\infty)$ δηλαδή να περιέχει διάστημα της μορφής $\Delta=(a,+\infty)$ (ή $\Delta=(-\infty,a)$)

- <u>Ορισμοί ορίου στο $+\infty$ κατά Cauchy.</u>

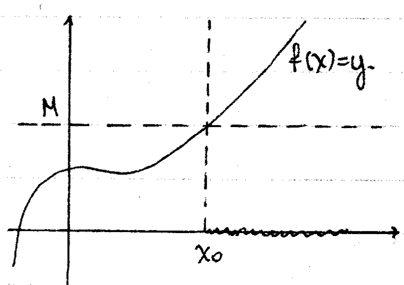
1) $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell^{\in\mathbb{R}} \Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists x_0>0 : \forall \underset{x\in A}{x}>x_0 \,,\ |f(x)-\ell|<\varepsilon}$



- Η ευθεία $y=\ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γρ.π. της συνάρτησης στο $+\infty$.

Θ. $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell \Longrightarrow \ell \text{ μοναδικό}}$

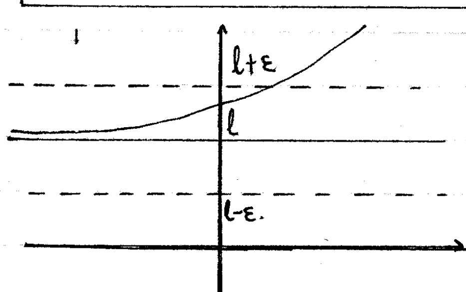
2) $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \Longleftrightarrow \forall M>0, \exists x_0>0 : \forall \underset{x\in A}{x}>x_0 \,, f(x)>M}$



3) $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty \Longleftrightarrow \forall M>0, \exists x_0>0 : \forall \overset{x\in A}{x}>x_0 \,, f(x)<-M}$

- <u>Ορισμοί ορίου στο $-\infty$ κατά Cauchy.</u>

1) $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ell\in\mathbb{R} \Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists x_0>0, \forall \overset{x\in A}{x}<-x_0 \,,\ |f(x)-\ell|<\varepsilon}$



- Η ευθεία $y=\ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$.
- Οι οριζόντιες ασύμπτωτες στα $+\infty$ και $-\infty$ δεν είναι εν' γένει ίδιες. (π.χ. σε συνάρτηση πολλαπλού τύπου.)

Θ. $\boxed{\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\ell \Longrightarrow \ell \text{ μοναδικό}}$

$$2)\ \boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty \Longleftrightarrow \forall M>0, \exists x_0>0 : \forall \overset{x\in A}{x} < -x_0,\ f(x)>M}$$

$$3)\ \boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \Longleftrightarrow \forall M>0, \exists x_0>0 : \forall x\in A, x<-x_0,\ f(x)<-M}$$

Συμβολισμοί: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \in \overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \lim_{+\infty} f = L \Leftrightarrow f(x) \xrightarrow{x\to+\infty} L$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L \in \overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \lim_{-\infty} f = L \Leftrightarrow f(x) \xrightarrow{x\to-\infty} L$$

● <u>Παρατηρήσεις</u>

1) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ell \Longleftrightarrow \lim_{x\to+\infty}[f(x)-\ell]=0$

2) $\lim_{+\infty} f=\ell \Leftrightarrow \lim_{+\infty}(-f)=-\ell$

3) $\lim_{+\infty} f=+\infty \Leftrightarrow \lim(-f)=-\infty$

1) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\ell \Longleftrightarrow \lim_{x\to-\infty}[f(x)-\ell]=0$

2) $\lim_{-\infty} f=\ell \Leftrightarrow \lim_{-\infty}(-f)=-\ell$

3) $\lim_{-\infty} f=+\infty \Leftrightarrow \lim_{-\infty}(-f)=-\infty$.

● $\boxed{\left.\begin{array}{l} f_1 \text{ περιορισμός της } f \\ \lim_{+\infty} f = L \end{array}\right) \Longleftrightarrow \lim_{+\infty} f_1 = L}$

● $\boxed{\left.\begin{array}{l} f_1 \text{ περιορισμός της } f \\ \lim_{-\infty} f = L \end{array}\right) \Longleftrightarrow \lim_{-\infty} f_1 = L}$

↳ Η τελευταία παρατήρηση οδηγεί στο συμπέρασμα, ότι μπορούμε (αν χρειάζεται) να περιοριζόμαστε για την εύρεση του ορίου στο $+\infty$ ή $-\infty$ σε διάστημα $\Delta=(a,+\infty)\subseteq A$ ή $\Delta=(-\infty,a)\subseteq A$.

▼ <u>Παραδείγματα - Θεωρία</u>

1) $\boxed{u \text{ σταθερή συνάρτηση με τιμή } c \Longrightarrow \lim_{x\to\pm\infty} u(x)=c}$

<u>Απόδειξη</u>: $|u(x)-c|=0<\varepsilon,\ \forall \varepsilon>0, \forall x\in\mathbb{R} \Longrightarrow \begin{cases} \lim_{x\to+\infty} u(x)=c \\ \lim_{x\to-\infty} u(x)=c. \end{cases}$

2) $\boxed{\kappa\in\mathbb{Q}^*_+ \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} x^\kappa=+\infty}$

<u>Απόδειξη</u>: $A=\mathbb{R}=(-\infty,+\infty) \Longrightarrow +\infty$ σημείο συσσώρευσης.

Έστω "ένα" $M>0$.

Αρκεί $f(x)>M \Leftrightarrow x^\kappa>M \Leftrightarrow \sqrt[\kappa]{x^\kappa} > \sqrt[\kappa]{M} \Leftrightarrow |x|>\sqrt[\kappa]{M}$ (1)

$A=\mathbb{R} \Longrightarrow$ μπορώ να περιοριστώ στο $\Delta=(0,+\infty)\subset\mathbb{R}$ στο οποίο $x>0 \Longrightarrow |x|=x$.

οπότε $x>\sqrt[\kappa]{M}$. Παίρνω ένα $x_0>0$: $x_0\geqslant\sqrt[\kappa]{M}$ οπότε $\forall x>x_0 \xrightarrow{M} x>\sqrt[\kappa]{M} \overset{(1)}{\Longrightarrow}$

$\overset{(1)}{\Rightarrow} f(x)>M$, άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k=+\infty$.

2) $\boxed{\kappa\in \mathbb{Z}^*_+ \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} x^{2k}=+\infty}$

Απόδειξη : $A=\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$ (ως πολυωνυμική) $\Rightarrow -\infty$ σημείο συσσώρευσης.

Εστω $M>0$.

Αρκεί $f(x)>M \Leftrightarrow x^{2k}>M \Leftrightarrow \sqrt[2k]{x^{2k}}>\sqrt[2k]{M} \Leftrightarrow |x|>\sqrt[2k]{M}$ (1)

$A=\mathbb{R} \Rightarrow$ μπορώ να περιοριστώ στο $\Delta=(0,+\infty)\subset\mathbb{R}$ στο οποίο $x>0 \Rightarrow |x|=x$.

οπότε $x>\sqrt[2k]{M}$. Παίρνω $x_0>0$: $x_0\geq\sqrt[2k]{M}$ οπότε $\forall x>x_0 \Rightarrow x>\sqrt[2k]{M} \overset{(1)}{\Rightarrow} f(x)>M$

άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} x^{2k}=+\infty$.

3) $\boxed{\kappa\in \mathbb{Z}^*_+ \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} x^{2k+1}=-\infty}$

Απόδειξη : $A=\mathbb{R}=(-\infty,+\infty) \Rightarrow -\infty$ σημείο συσσώρευσης.

Εστω $M>0$.

διότι η ρίζα είναι περιττής τάξης

Αρκεί $f(x)<-M \Leftrightarrow x^{2k+1}<-M \Leftrightarrow -x^{2k+1}>M \Leftrightarrow \sqrt[2k+1]{(-x)^{2k+1}}>\sqrt[2k+1]{M} \Leftrightarrow -x>\sqrt[2k+1]{M} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x<-\sqrt[2k+1]{M}$ (1).

Παίρνω $x_0=+\sqrt[2k+1]{M} \Leftrightarrow -x_0=-\sqrt[2k+1]{M}$, οπότε

$\forall x<-x_0 \Rightarrow x<-\sqrt[2k+1]{M} \overset{(1)}{\Rightarrow} f(x)<-M$, άρα $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{2k+1}=-\infty$.

4) $\boxed{\kappa\in\mathbb{N}^* \Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^k}=0}$

Απόδειξη : $A=\mathbb{R}^*=(-\infty,0)\cup(0,+\infty) \Rightarrow +\infty,-\infty$ σημεία συσσώρευσης.

i) Θα δείξω ότι $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^k}=0$.

Εστω $\varepsilon>0$. Αρκεί $|f(x)|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{1}{x^k}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{|x|^k}<\varepsilon \Leftrightarrow |x^k|>\frac{1}{\sqrt[k]{\varepsilon}}$. (1)

$A=\mathbb{R}^* \Rightarrow$ μπορώ να περιοριστώ στο $\Delta=(-\infty,0)\subseteq\mathbb{R}^*$ στο οποίο $|x|=-x$

(1) $\Leftrightarrow -x>\frac{1}{\sqrt[k]{\varepsilon}} \Leftrightarrow x<-\frac{1}{\sqrt[k]{\varepsilon}}$ (2). Παίρνω $x_0=+\frac{1}{\sqrt[k]{\varepsilon}} \Rightarrow -x_0=-\frac{1}{\sqrt[k]{\varepsilon}}$

οποτε $\forall x<-x_0 \Rightarrow x<-\frac{1}{\sqrt[k]{\varepsilon}} \overset{(2)}{\Rightarrow} |f(x)|<\varepsilon$ άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^k}=0$.

ii) Ομοια, θα δείξω ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^k}=0$

Έστω $\varepsilon>0$. Αρκεί $|f(x)|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{1}{x^{\kappa}}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{|x|^{\kappa}}<\varepsilon \Leftrightarrow |x|>\frac{1}{\sqrt[\kappa]{\varepsilon}}$ (1)

$A=\mathbb{R}^{*} \Rightarrow$ μπορώ να περιοριστώ στο $\Delta=(0,+\infty)\subseteq\mathbb{R}^{*}$ στο οποίο $|x|=x$

οπότε, $(1)\Leftrightarrow x>\frac{1}{\sqrt[\kappa]{\varepsilon}}$ (2). Παίρνω $x_0=\frac{1}{\sqrt[\kappa]{\varepsilon}}>0$, οπότε, $\forall x>x_0 \overset{(2)}{\Rightarrow} |f(x)|<\varepsilon$ άρα

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{\kappa}}=0$.

5) $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\log_a x=+\infty}$

<u>Απόδειξη</u>: $A=(0,+\infty)\Rightarrow +\infty$ σημείο συσσώρευσης στο A.

Έστω $M>0$. Αρκεί $f(x)>M \Leftrightarrow \log_a x>M=\log_a 10^{M} \underset{\log\uparrow}{\Longleftrightarrow} x>10^{M}$ (1)

Παίρνω $x_0=10^{M}>0$ οπότε $\forall x>x_0 \overset{(1)}{\Rightarrow} f(x)>M$ άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_a x=+\infty$

● <u>Παραδείγματα-ασκήσεις (με τον ορισμό)</u>

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu 3x}{x}=0$.

<u>Λύση</u>: $A=\mathbb{R}-\{0\}=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)\Rightarrow +\infty$ σημείο συσσώρευσης στο A.

Έστω $\varepsilon>0$. Αρκεί $|f(x)|=\left|\frac{\eta\mu 3x}{x}\right|=\frac{|\eta\mu 3x|}{|x|}\leq\frac{1}{|x|}<\varepsilon \Leftrightarrow |x|>\frac{1}{\varepsilon}$ (1)

$A=\mathbb{R}^{*}\Rightarrow$ μπορώ να περιοριστώ στο $\Delta=(0,+\infty)\subseteq A$ στο οποίο $|x|=x$.

άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu 3x}{x}=0$.

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x-3}{x-5}=2$.

<u>Λύση</u> $A=\mathbb{R}-\{5\}=(-\infty,5)\cup(5,+\infty)\Rightarrow -\infty$ σημείο συσσώρευσης στο A.

Έστω $\varepsilon>0$. Αρκεί $|f(x)-2|=\left|\frac{2x-3}{x-5}-2\right|=\left|\frac{2x-3-2(x-5)}{x-5}\right|=\left|\frac{2x-3-2x+10}{x-5}\right|=$

$=\left|\frac{7}{x-5}\right|=\frac{7}{|x-5|}$ (1).

$A=\mathbb{R}-\{5\}\Rightarrow$ Μπορώ να περιοριστώ στο $\Delta=(5,+\infty)$ στο οποίο $|x-5|=x-5$

οπότε $(1)\Leftrightarrow |f(x)-2|=\frac{7}{x-5}<\varepsilon \underset{x-5>0}{\Leftrightarrow} \varepsilon(x-5)>7\Leftrightarrow \varepsilon x-5\varepsilon>7\Leftrightarrow \varepsilon x>7+5\varepsilon \underset{\varepsilon>0}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow x > \dfrac{7+5\varepsilon}{\varepsilon}$ (2). Παίρνω $x_0 = \dfrac{7+5\varepsilon}{\varepsilon} > 0$ οπότε $\forall x > x_0 \overset{(2)}{\Rightarrow} |f(x)-2| < \varepsilon$

οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x-3}{x-5} = 2$.

▼ Ιδιότητες ορίων στο $\pm\infty$

Θ_1. Αν $f,g \in F_A$, ~~και~~ $\sigma \in \{+\infty,-\infty\}$, και $\lim\limits_{\sigma} f, \lim\limits_{\sigma} g \in \mathbb{R}$ τότε

1) $\lim\limits_{\sigma}(f+g) = \lim\limits_{\sigma} f + \lim\limits_{\sigma} g$ 2) $\lim\limits_{\sigma}(f\cdot g) = \lim\limits_{\sigma} f \cdot \lim\limits_{\sigma} g$

3) $\lim\limits_{\sigma}(\lambda\cdot f) = \lambda\cdot\lim\limits_{\sigma} f$, $\lambda\in\mathbb{R}$

4) $\lim\limits_{\sigma} g \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{\sigma}\dfrac{1}{g} = \dfrac{1}{\lim\limits_{\sigma} g} \wedge \lim\limits_{\sigma}\dfrac{f}{g} = \dfrac{\lim\limits_{\sigma} f}{\lim\limits_{\sigma} g}$

5) $\left.\begin{array}{l}\forall x\in A, f(x)\geq 0\\ \kappa\in\mathbb{N}^*\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to\sigma}\sqrt[\kappa]{f(x)} = \sqrt[\kappa]{\lim\limits_{x\to\sigma} f(x)}$

Θ_2. Αν $f,g\in F_A$ και $\sigma\in\{+\infty,-\infty\}$ και $\lim\limits_{\sigma} f, \lim\limits_{\sigma} g \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$ τότε

1) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\sigma} f = +\infty\\ \lim\limits_{\sigma} g\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{\sigma}(f+g) = +\infty$

2) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\sigma} f = +\infty\\ \lim\limits_{\sigma} g\in(0,+\infty)\cup\{+\infty\}\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{\sigma}(f\cdot g) = +\infty$ 3) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\sigma} f = +\infty\\ \lim\limits_{\sigma} g\in(-\infty,0)\cup\{-\infty\}\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{\sigma}(f\cdot g) = -\infty$

4) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\sigma} f = -\infty\\ \lim\limits_{\sigma} g\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\}\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{\sigma}(f+g) = -\infty$

5) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\sigma} f = -\infty\\ \lim\limits_{\sigma} g\in(0,+\infty)\cup\{+\infty\}\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{\sigma}(f\cdot g) = -\infty$ 6) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\sigma} f = -\infty\\ \lim\limits_{\sigma} g\in(-\infty,0)\cup\{-\infty\}\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{\sigma}(f\cdot g) = +\infty$

Θ_3. Εάν $\sigma\in\{+\infty,-\infty\}$ και $f\in F_A$, $\kappa\in\mathbb{N}^*$ τότε

$$\boxed{\left.\begin{array}{l}\forall x\in A, f(x)\geq 0\\ \lim\limits_{x\to\sigma} f(x) = +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to\sigma}\sqrt[\kappa]{f(x)} = +\infty}$$

Οι αποδείξεις είναι ανάλογες με αυτές στο κεφάλαιο των ακολουθιών.

(... όπου το όριο έχει έννοια και το εξετάζω).

• Εφαρμογές-θεωρία $(\sigma\in\{+\infty,-\infty\})$

1) Όριο πολυωνυμικής συνάρτησης

$$\boxed{P(x)=\underset{\alpha_\nu\neq 0}{\alpha_\nu x^\nu}+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\dots+\alpha_1 x+\alpha_0 \Rightarrow \lim_{x\to\sigma}P(x)=\lim_{x\to\sigma}\alpha_\nu x^\nu}$$

Απόδειξη (εκτός ύλης): $A=\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)\Rightarrow +\infty,-\infty$ σημεία συσσώρευσης.

Αν $\sigma=+\infty$, υπάρχει $\Delta=(0,+\infty)\subseteq A$ στο οποίο περιορίζω την P και μελετώ το όριο.

$\forall x\in\Delta,\ P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\dots+\alpha_1 x+\alpha_0=\alpha_\nu x^\nu\left(1+\frac{\alpha_{\nu-1}}{\alpha_\nu}\frac{1}{x}+\dots+\frac{\alpha_0}{\alpha_\nu}\frac{1}{x^\nu}\right)$ (1)

Άλλα $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\alpha_{\nu-1}}{\alpha_\nu}\frac{1}{x}+\dots+\frac{\alpha_0}{\alpha_\nu}\frac{1}{x^\nu}\right)=1+\frac{\alpha_{\nu-1}}{\alpha_\nu}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}+\dots+\frac{\alpha_0}{\alpha_\nu}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^\nu}=1+0+\dots+0=1\Rightarrow$

$\overset{(1)}{\Longrightarrow}\lim_{x\to+\infty}P(x)=\left(\lim_{x\to+\infty}\alpha_\nu x^\nu\right)\cdot 1=\lim_{x\to+\infty}\alpha_\nu x^\nu$

Όμοια $\lim_{x\to-\infty}P(x)=\lim_{x\to-\infty}(\alpha_\nu x^\nu)$.

2) Όριο ρητής συνάρτησης $\alpha_\nu\neq 0,\ \beta_\mu\neq 0$

$$\boxed{Q(x)=\frac{\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\dots+\alpha_0}{\beta_\mu x^\mu+\beta_{\mu-1}x^{\mu-1}+\dots+\beta_0}\Rightarrow\lim_{x\to\sigma}Q(x)=\lim\frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\mu x^\mu}}$$

Απόδειξη: $A=\mathbb{R}-\{\rho_1,\rho_2,\dots,\rho_\kappa\}=(-\infty,\rho_1)\cup(\rho_1,\rho_2)\cup\dots\cup(\rho_\kappa,+\infty)\Rightarrow\pm\infty$ σημεία συσσώρευσης.

όπου $\rho_1,\rho_2,\dots,\rho_\kappa$ οι ρίζες του παρονομαστή

Αν $\sigma=+\infty$, υπάρχει $\Delta=(0,+\infty)\cap A\subseteq A$ στο οποίο περιορίζω την Q και μελετώ το όριο.

$$\forall x\in\Delta,\ Q(x)=\frac{\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\dots+\alpha_0}{\beta_\mu x^\mu+\beta_{\mu-1}x^{\mu-1}+\dots+\beta_0}=\frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\mu x^\mu}\cdot\frac{1+\frac{\alpha_{\nu-1}}{\alpha_\nu}\frac{1}{x}+\dots+\frac{\alpha_0}{\alpha_\nu}\frac{1}{x^\nu}}{1+\frac{\beta_{\mu-1}}{\beta_\mu}\frac{1}{x}+\dots+\frac{\beta_0}{\beta_\mu}\frac{1}{x^\mu}}\quad(1)$$

Άλλα $\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\alpha_{\nu-1}}{\alpha_\nu}\frac{1}{x}+\dots+\frac{\alpha_0}{\alpha_\nu}\frac{1}{x^\nu}\right)=1\\ \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\beta_{\mu-1}}{\beta_\mu}\cdot\frac{1}{x}+\dots+\frac{\beta_0}{\beta_\mu}\frac{1}{x^\mu}\right)=1\end{array}\right\}\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{\alpha_{\nu-1}}{\alpha_\nu}\frac{1}{x}+\dots+\frac{\alpha_0}{\alpha_\nu}\frac{1}{x^\nu}}{1+\frac{\beta_{\mu-1}}{\beta_\mu}\frac{1}{x}+\dots+\frac{\beta_0}{\beta_\mu}\frac{1}{x^\mu}}=1\overset{(1)}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}Q(x)=\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\mu x^\mu}\right)\cdot 1=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\mu x^\mu}$

Όμοια $\lim_{x\to-\infty}Q(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\mu x^\mu}$

Παραδείγματα

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x^4+x^3-2x+3)=\lim\limits_{x\to+\infty}2x^4=2\lim\limits_{x\to+\infty}x^4=+\infty$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{9x^3-2x+1}{3x^3-2x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{9x^3}{3x^3}=3$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^4-x+3}{x^2+2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^4}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3-5x+1}{x^5+3x^4}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3}{x^5}=2\cdot\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2}=2\cdot 0=0.$

$\updownarrow\!\to$ Στις παραπάνω περιπτώσεις το Π.Ο. έχει πάντα σημεία συσσώρευσης τα $+\infty,-\infty$.

- Μορφή $\dfrac{\ell}{\infty}=0$ ⟶ Κάνω πάντα άρση απροσδιοριστίας και εφαρμόζω ιδιότητες των ορίων.

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x^2\left(1-\frac{9}{x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{1-\frac{9}{x^2}}=0\cdot\dfrac{3}{1-0}=0.$

- Μορφή $\dfrac{\infty}{\ell}=\infty$ ⟶ Όμοια...

6) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3-3}{4}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3\left(2-\frac{3}{x^3}\right)}{4}=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3\cdot\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2-\frac{3}{x^3}}{4}$ (1).

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to-\infty}x^3=-\infty\\ &\lim_{x\to-\infty}\frac{2-\frac{3}{x^3}}{4}=\frac{2-0}{4}=\frac{1}{2}\end{aligned}\right\}\overset{(1)}{\Longrightarrow}\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3-3}{4}=-\infty.$$

7) $f(x)=\sqrt{x^2-2x}\longrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=;$

Πρέπει $x^2-2x\geq0\Leftrightarrow x(x-2)\geq0\Leftrightarrow x\in(-\infty,0]\cup[2,+\infty)$

άρα $A=(-\infty,0)\cup(2,+\infty)\Longrightarrow+\infty$ σημείο συσσώρευσης.

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-2x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty\Longrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-2x}=+\infty$

x		0		2	
x	−	0	+		+
$x-2$	−		−	0	+
	+	0	−	0	+

* 8) $f(x)=\sqrt{x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}\longrightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=;$

Πρέπει $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1\geq0\Leftrightarrow x^3(x^2+x+1)+(x^2+x+1)\geq0\Leftrightarrow(x^3+1)(x^2+x+1)\geq0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(x+1)\underset{+}{(x^2-x+1)}\underset{+}{(x^2+x+1)}\geq0\Leftrightarrow x+1\geq0$ (διότι $\forall x\in\mathbb{R}$, $x^2-x+1>0\ \wedge x^2+x+1>0$) $\Leftrightarrow x\geq-1$.

Άρα $A=[-1,+\infty)\Longrightarrow-\infty$ όχι σημείο συσσώρευσης του $A\Longrightarrow$ δεν υπάρχει $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

▼ Απροσδιόριστες μορφές στο άπειρο

1) Μορφή $\frac{\infty}{\infty}$ Παρουσιάζεται σε συναρτήσεις του τύπου

$$f(x)=\frac{\varphi(x)}{g(x)} \;,\; f(x)=\sqrt[\kappa]{\frac{\varphi(x)}{g(x)}} \;,\; f(x)=\frac{\sqrt[\kappa]{\varphi(x)}}{g(x)} \;,\; f(x)=\frac{\varphi(x)}{\sqrt[\kappa]{g(x)}}$$

όπου $\varphi(x), g(x)$ πολυώνυμα.

Μέθοδος: Βγάζω κοινό παράγοντα από αριθμητή και παρονομαστή την μεγαλύτερη δύναμη του x, απλοποιώ, και μετά εφαρμόζω ιδιότητες ορίων.

- Ειδικά στην 1^{η} περίπτωση που η συνάρτηση είναι ρητή, η απροσδιοριστία αίρεται και με το όριο ρητής συνάρτησης (εφαρμογή).

Παραδείγματα

1) $f(x)=\frac{|x^2-4|}{x+2} \longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=;$

Πρέπει $x+2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -2$ άρα $A=\mathbb{R}-\{-2\}=(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)$

x		-2		2	
x^2-4	$+$	0	$-$	0	$+$

Παίρνω $\Delta=(2,+\infty)\subseteq A$ στο οποίο το όριο έχει έννοια και το εξετάζω.

$\forall x\in\Delta \;,\; |x^2-4|=x^2-4 \Rightarrow f(x)=\frac{x^2-4}{x+2} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-4}{x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty.$

2) $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{4-x^2}} \longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x).$

Πρέπει $\begin{cases} 4-x^2\geq 0 \\ \sqrt{4-x^2}\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 4-x^2>0 \Longleftrightarrow x\in(-2,2)$

x		-2		2	
$4-x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$

άρα $A=(-2,2) \Rightarrow$ Δεν υπάρχει $\Delta=(a,+\infty)\subset A$ (το $+\infty$ δεν είναι σ.σ.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Το όριο δεν έχει έννοια

~~3) $f(x)=\sqrt{16x^2+x+5}$~~

3) $f(x)=\frac{6x^2+x+1}{\sqrt{x^4+3}} \longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x).$

Πρέπει $\begin{cases} x^4+3\geq 0 \\ \sqrt{x^4+3}\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^4+3>0$ ισχύει $\forall x\in\mathbb{R}$ ως άθροισμα τέλειου τετραγώνου και θετικού

Άρα $A=\mathbb{R}=(-\infty,+\infty) \Rightarrow +\infty$ σημείο συσσώρευσης

▶ Παίρνω $\Delta=(0,+\infty)\subset A$ στο οποίο το όριο έχει έννοια και το εξετάζω (για να μπορώ να βγάλω

3) $f(x)=\dfrac{\sqrt{9x^2-2x+5}}{x+4} \longrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=;$

Πρέπει $\begin{cases} 9x^2-2x+5>0 \Rightarrow, \cancel{\Delta=-4} \text{ ισχύει } \forall x\in\mathbb{R} \\ x+4\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x+4\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -4$ Άρα $A=(-\infty,-4)\cup(-4,+\infty) \Rightarrow$

$\Rightarrow -\infty$ σημείο συσσώρευσης στο A.

► Παίρνω $\Delta=(-\infty,0)\subset A$ στο οποίο το όριο έχει έννοια και το εξετάζω (ώστε να βγαίνει το x^2 από το ριζικό)

$\forall x\in\Delta,\ |x|=-x \Rightarrow f(x)=\dfrac{\sqrt{9x^2-2x+5}}{x+4}=\dfrac{\sqrt{x^2\left(9-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}}{x+4}=\dfrac{|x|\sqrt{9-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}}{x\left(1+\frac{4}{x}\right)}=$

$=\dfrac{-x\sqrt{\cdots}}{x(\cdots)}=-\dfrac{\sqrt{9-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}}{1+\frac{4}{x}} \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\dfrac{\sqrt{9-2\cdot 0+5\cdot 0}}{1+4\cdot 0}=-3.$

4) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^3+4}+x-2}{x\sqrt{x}-3\sqrt{x^3+1}} \longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=;$

Πρέπει $\begin{cases} x^3+4\geq 0 \\ x^3+1\geq 0 \\ x\geq 0 \\ x\sqrt{x}-3\sqrt{x^3+1}\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ x\sqrt{x}-3\sqrt{x^3+1}\neq 0 \Leftrightarrow \cancel{x} \end{cases} \overset{*}{\Leftrightarrow} x\in\left[0,\frac{\sqrt[3]{9}}{2}\right)\cup\left(\frac{\sqrt[3]{9}}{2},+\infty\right)$

Αν $x\sqrt{x}-3\sqrt{x^3+1}=0 \Leftrightarrow x\sqrt{x}=3\sqrt{x^3+1} \Leftrightarrow x^3=9(x^3+1) \Leftrightarrow 8x^3+9=0 \Leftrightarrow x^3=\frac{-9}{8} \Leftrightarrow x=\frac{\sqrt[3]{9}}{2}$

Άρα $A=\left[0,\frac{\sqrt[3]{9}}{2}\right)\cup\left(\frac{\sqrt[3]{9}}{2},+\infty\right) \Rightarrow$ Υπάρχει $\Delta=\left(\frac{\sqrt[3]{9}}{2},+\infty\right)\subset A$ στο οποίο το όριο έχει έννοια και το εξετάζω.

$\forall x\in\Delta,\ f(x)=\dfrac{\sqrt{x^3+4}+x-2}{x\sqrt{x}-3\sqrt{x^3+1}}=\dfrac{\sqrt{x^3\left(1+\frac{4}{x^3}\right)}+x-2}{x\sqrt{x}-3\sqrt{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}}=\dfrac{x^{3/2}\sqrt{1+\frac{4}{x^3}}+x-2}{x^{3/2}-3x^{3/2}\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}}=$

$=\dfrac{x^{3/2}\left(\sqrt{1+\frac{4}{x^3}}+\frac{1}{x^{1/2}}-\frac{2}{x^{3/2}}\right)}{x^{3/2}\left(1-3\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}\right)}=\dfrac{\sqrt{1+\frac{4}{x^3}}+\frac{1}{x^{1/2}}-\frac{2}{x^{3/2}}}{1-3\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{\sqrt{1+4\cdot 0}+0-2\cdot 0}{1-3\sqrt{1+0}}=$

$=-\frac{1}{2}$

5) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-2}{x-1}} \longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=;$

Πρέπει $\dfrac{x-2}{x-1}\geq 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,1)\cup[2,+\infty)$

άρα $A=(-\infty,1)\cup[2,+\infty) \Rightarrow \exists\ \Delta=[2,+\infty)\subset A$

στο οποίο το όριο έχει έννοια και το εξετάζω.

x		1		2	
$x-1$	$-$	0	$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$
	$+$	‖	$-$	0	$+$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x}=1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x-2}{x-1}}=1$

→ Σε συνάρτηση της μορφής $f(x)=\sqrt[\kappa]{\varphi(x)}$

Αν το υπόρριζο έχει πεπερασμένο όριο κάνω ιδιότητες.

Αν $\lim\limits_{\sigma} \varphi=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{\sigma} f=+\infty$.

Αν $\lim\limits_{\sigma} \varphi=-\infty \Rightarrow \nexists \lim\limits_{\sigma} f$.

6) $f(x)=\sqrt{16x^2+x+5}-4x \longrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=;$ → **Μορφή $\infty+\infty$**

$16x^2+x+5>0, \forall x\in\mathbb{R}\ (\Delta<0, \alpha>0) \Rightarrow A=\mathbb{R}$ στο οποίο το όριο έχει έννοια και το μελετώ.

$\lim\limits_{x\to-\infty}(16x^2+x+5)=\lim\limits_{x\to-\infty}16x^2=16\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{16x^2+x+5}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(-4x)=-4\lim\limits_{x\to-\infty}x=+\infty$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{16x^2+x+5}-4x\right)=+\infty.$

2) **Μορφή $\infty-\infty$** Παρουσιάζεται σε συναρτήσεις του τύπου:

1) $f(x)=Q_1(x)-Q_2(x)$ όπου $Q_1(x), Q_2(x)$ ρητές συναρτήσεις

2) i) $f(x)=\sqrt{\varphi(x)}-\sqrt{g(x)}$

Μερικές φορές είναι $\infty+\infty$ Παρ. 6, επάνω.

ii) $f(x)=\varphi(x)\pm\sqrt{g(x)}$

iii) $f(x)=\sqrt{\varphi(x)}\pm g(x)$

3) $f(x)=\sqrt[\kappa]{\varphi(x)}-\sqrt[\kappa]{g(x)}$

▼ Μέθοδος

- Στην $1^η$ περίπτωση κάνω πράξεις και φτάνω σε ρητή συνάρτηση.
- Στην $2^η$ περίπτωση πολ/ζω και διαιρώ με την συζυγή παράσταση.
- Στην $3^η$ περίπτωση πολ/ζω και διαιρώ με το αξιοσημείωτο πηλίκο

Παραδείγματα

1) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}-\dfrac{2x^2}{x-1} \longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=;$

Πρέπει $\begin{cases} x^2+1\neq 0 \\ x-1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x-1\neq 0$ άρα $A=\mathbb{R}-\{1\} \Rightarrow \exists\, \Delta=(1,+\infty)$ στο οποίο το όριο έχει έννοια και το μελετώ.

$\forall x\in\Delta,\ f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}-\dfrac{2x^2}{x-1}=\dfrac{x^3(x-1)-2x^2(x^2+1)}{(x^2+1)(x-1)}=\dfrac{x^4-x^3-2x^4-2x^2}{x^3-x^2+x-1}=$

$=\dfrac{-x^4-x^3-2x^2}{x^3-x^2+x-1} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x^4-x^3-2x^2}{x^3-x^2+x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x^4}{x^3}=-\lim\limits_{x\to+\infty}x=-\infty.$

2) $f(x)=\frac{x}{x-2}-\frac{1}{x+2} \longrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=;$

Πρέπει $\begin{cases} x-2\neq 0 \\ x+2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}-\{-2,+2\}$ άρα $A=\mathbb{R}-\{-2,+2\} \Rightarrow \exists\, \Delta=(+2,+\infty)\subset A$ στο οποίο το όριο έχει έννοια και το μελετώ.

α' τρόπος : $\forall x\in\Delta,\ f(x)=\frac{x}{x-2}-\frac{1}{x+2}=\frac{x(x+2)-(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\frac{x^2+2x-x+2}{x^2-4}=\frac{x^2+x+2}{x^2-4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x+2}{x^2-4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1.$

β' τρόπος : Είναι $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x(1+\frac{2}{x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot\lim\frac{1}{1+\frac{2}{x}}=0\cdot 1=0$

$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right)=1-0=1.$

3) $f(x)=\sqrt{9x^2+x+1}-3x \longrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=;$

Είναι $9x^2+x+1>0,\ \forall x\in\mathbb{R}\ (\Delta<0,\ a>0) \Rightarrow A=\mathbb{R} \Rightarrow \exists\,\Delta=(0,+\infty)$ στο οποίο το όριο έχει έννοια και το εξετάζω.

$\forall x\in\Delta,\ |x|=x \Rightarrow f(x)=\sqrt{9x^2+x+1}-3x=\frac{(\sqrt{9x^2+x+1}-3x)(\sqrt{9x^2+x+1}+3x)}{\sqrt{9x^2+x+1}+3x}=\frac{9x^2+x+1-9x^2}{\sqrt{9x^2+x+1}+3x}$

$=\frac{x+1}{\sqrt{9x^2+x+1}+3x}=\frac{x+1}{|x|\sqrt{9+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+3x}=\frac{x+1}{x\sqrt{9+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+3x}=\frac{x(1+\frac{1}{x})}{x\left(\sqrt{9+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+3\right)}=$

$=\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{9+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+3} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{1+0}{\sqrt{9+0+0}+3}=\frac{1}{6}$

* 4) $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}} \longrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=;$

Πρέπει $\left.\begin{cases} x\geq 0 \\ x+\sqrt{x}\geq 0 \\ x-\sqrt{x}\geq 0 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \begin{matrix} x\geq 0 \\ \\ \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ x-\sqrt{x}\geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x}-1)\geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-1\geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}\geq 1 \Leftrightarrow x\geq 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x\geq 1$ Άρα $A=[1,+\infty)$ στο οποίο το όριο έχει έννοια και το εξετάζω.

$\forall x\in A,\ f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=\frac{(x+\sqrt{x})-(x-\sqrt{x})}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}}=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$

$=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x(1+\frac{\sqrt{x}}{x})}+\sqrt{x(1-\frac{\sqrt{x}}{x})}}=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}\right)}=\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{2}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}=1.$

5) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}} \longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=;$ $\longrightarrow$ <u>Μορφή $\dfrac{\infty-\infty}{\infty-\infty}$</u> !!

Πρέπει $\begin{cases} x^2+1\geq 0 \text{ , ίσχυει } \forall x\in\mathbb{R}. \\ x\geq 0 \\ x+1\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\geq 0$ Άρα $A=[0,+\infty) \Longrightarrow \exists\, \Delta=(0,+\infty)\subset A$ στο οποίο το όριο έχει έννοια και το εξετάζω.

<u>Προσοχή</u>: Αν εφαρμόσω την μεθοδολογία του $\frac{\infty}{\infty}$ θα καταλήξω σε απροσδιόριστη μορφή:

$$\forall x\in\Delta,\ f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}=\frac{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1\right)}{\sqrt{x}\left(1-\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)}=\sqrt{x}\cdot\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1}{1-\sqrt{1+\frac{1}{x}}}\longrightarrow\infty\cdot\frac{0}{0}$$
$|x|=x$

Η σωστή μορφή είναι $\frac{\infty-\infty}{\infty-\infty}$ και όχι $\frac{\infty}{\infty}$ γι'αυτό εξετάζω χώρια αριθμητή και παρονομαστή.

<u>Σωστό</u>(;) $\forall x\in\Delta$, $|x|=x \Longrightarrow \sqrt{x^2+1}-x=\dfrac{(x^2+1)-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=\dfrac{1}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x}=$

$$=\frac{1}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x}=\frac{1}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}\Longrightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}=0\cdot\frac{1}{\sqrt{1+0}+1}=0$$

Όμοια $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}-\sqrt{x+1}\right)=\cdots=\cdots=0$ άρα η f καταλήγει σε μορφή $\frac{0}{0}$.

- Σε τέτοιες μορφές πολλαπλασιάζω αριθμητή και παρονομαστή με τις συζυγείς παραστάσεις (ή τα αξιοσημείωτα πηλίκα) οπότε καταλήγω σε μορφή $\frac{\infty}{\infty}$

$$\forall x\in\Delta,\ |x|=x \rightarrow f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}=$$

$$=\frac{\left[(\cancel{x^2}+1)-\cancel{x^2}\right]\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)}{\underbrace{\left[\cancel{x}-(\cancel{x}+1)\right]}_{-1}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}=-\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2+1}+x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=-\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x}=$$

$$=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x}=\frac{\sqrt{x}}{x}\cdot\frac{1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}\quad(1).$$

Αλλά $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}=\dfrac{1+\sqrt{1+0}}{\sqrt{1+0}+1}=1$

$\overset{(1)}{\Longrightarrow}\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0\cdot 1=0.$

6) $f(x)=x^{1/3}\left[(x+1)^{2/3}-(x-1)^{2/3}\right] \longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=;$

Πρέπει $\begin{cases} x+1\geq 0 \\ x-1\geq 0 \\ x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x+1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -1$ $\quad\quad$ $\begin{cases} x+1\geq 0 \\ x-1\geq 0 \\ x\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1\geq 0 \\ x\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow x-1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1$

Άρα $A=[1,+\infty)$ στο οποίο έχει έννοια το όριο και το εξετάζω.

$\forall x\in A,\ f(x)=x^{1/3}\left[(x+1)^{2/3}-(x-1)^{2/3}\right]=x^{1/3}\cdot\dfrac{(x+1)^2-(x-1)^2}{(x+1)^{4/3}+(x+1)^{2/3}(x-1)^{2/3}+(x-1)^{4/3}}=$

$=x^{1/3}\cdot\dfrac{x^2+2x+1-x^2+2x-1}{(x^2+2x+1)^{2/3}+(x^2-1)^{2/3}+(x^2-2x+1)^{2/3}}=\dfrac{x^{1/3}}{(x^2+2x+1)^{2/3}+(x^2-1)^{2/3}+(x^2-2x+1)^{2/3}}=$

$=\dfrac{x^{1/3}}{x^{4/3}\left[\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^{2/3}+\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{2/3}+\left(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^{2/3}\right]}=\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{\cdots\cdots}$ $\quad$ (1).

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\cdots\cdots}=\dfrac{1}{(1+2\cdot 0+0)^{2/3}+(1-0)^{2/3}+(1-2\cdot 0+0)^{2/3}}=\dfrac{1}{3} \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{1}{3}\cdot 0=0.$

▼Παραμετρικά όρια

Παραδείγματα

1) $f(x)=\dfrac{(\mu-1)x^3+4x+1}{\mu x^2+1} \longrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=;$

Πρέπει $\mu x^2+1\neq 0 \Leftrightarrow$
- Αν $\mu=0$, $1\neq 0$ ισχύει $\forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow A=\mathbb{R}$
- Αν $\mu\neq 0$, $\mu x^2\neq -1 \Leftrightarrow x^2\neq -\dfrac{1}{\mu} \Leftrightarrow$
  - Αν $\mu>0 \Rightarrow$ ισχύει $\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow A=\mathbb{R}$
  - Αν $\mu<0 \Rightarrow x\neq\pm\dfrac{1}{\sqrt{-\mu}} \Rightarrow A=\mathbb{R}-\left\{\pm\dfrac{1}{\sqrt{-\mu}}\right\}$.

Άρα $A=\begin{cases}\mathbb{R}, & \text{αν } \mu\geq 0 \\ \mathbb{R}-\left\{\pm\frac{1}{\sqrt{-\mu}}\right\}, & \text{αν } \mu<0\end{cases}$ στο οποίο το όριο έχει έννοια $\forall \mu\in\mathbb{R}$ και το εξετάζω.

i) Αν $\mu-1\neq 0$ και $\mu\neq 0 \Leftrightarrow \mu\in\mathbb{R}-\{0,1\}\Leftrightarrow \mu\in(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$

τότε

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(\mu-1)x^3+4x+1}{\mu x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(\mu-1)x^3}{\mu x^2}=\dfrac{\mu-1}{\mu}\cdot\lim\limits_{x\to-\infty} x$ $\quad$ (1).

μ		0		1	
μ	$-$	0	$+$		$+$
$\mu-1$	$-$		$-$	0	$+$
$\frac{\mu-1}{\mu}$	$+$	‖	$-$	0	$+$

Αν $\left.\begin{array}{l}\mu\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)\Rightarrow\dfrac{\mu-1}{\mu}>0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty\end{array}\right\}\overset{(1)}{\Rightarrow}\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

Αν $\left.\begin{array}{l}\mu\in(0,1)\Rightarrow\dfrac{\mu-1}{\mu}<0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty\end{array}\right\}\overset{(1)}{\Rightarrow}\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

• Αν $\mu=1 \Rightarrow \mu\neq 0$ οπότε $f(x)=\dfrac{4x+1}{x^2+1} \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x}{x^2}=4\cdot\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=4\cdot 0=0.$

• Αν $\mu=0 \Rightarrow \mu\neq 1$ οπότε $f(x)=-x^3+4x+1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^3)=-\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=+\infty.$

ΑΡΑ:
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\begin{cases}-\infty, & \text{αν } \mu\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)\\ +\infty, & \text{αν } \mu\in(0,1)\\ 0, & \text{αν } \mu=1\\ +\infty, & \text{αν } \mu=0\end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x)=\begin{cases}-\infty, & \text{αν } \mu\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)\\ +\infty, & \text{αν } \mu\in[0,1)\\ 0, & \text{αν } \mu=1.\end{cases}$$

* 2) Να βρεθούν τα $a,b\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-ax\right)=b$

<u>Λύση</u>

Θέτω $f(x)=\sqrt{x^2+2}-ax$. Πρέπει $x^2+2\geq 0$ ισχύει $\forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow A=\mathbb{R} \Rightarrow \exists\, \Delta=(0,+\infty)\subset A$ στο οποίο το όριο έχει έννοια και το εξετάζω.

Είναι $f(x)=\sqrt{x^2+2}-ax=\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}-ax=|x|\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}-ax=x\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}-ax=$
$=x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}-a\right)$ (1).

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}-a\right)=\sqrt{1+2\cdot 0}-a=1-a. \overset{(1)}{\Rightarrow} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=(1-a)\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}x.$

Επειδή $b\in\mathbb{R} \Rightarrow (1-a)\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}x\in\mathbb{R} \Rightarrow 1-a=0$ $\left(\begin{array}{l}\text{διοτι}\\ \text{αν } 1-a>0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty\neq b\\ \text{αν } 1-a<0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty\neq b\end{array}\right) \Rightarrow a=1$

Για $a=1$, $f(x)=\sqrt{x^2+2}-x=$
$=\dfrac{(x^2+2)-x^2}{\sqrt{x^2+2}+x}=\dfrac{2}{\sqrt{x^2+2}+x}=\dfrac{2}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}+x}=$
$=\dfrac{2}{x\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}+x}=\dfrac{2}{x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}+1\right)} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}+1}=0\cdot\dfrac{2}{\sqrt{1+0}+1}=0 \Rightarrow$
$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow b=0\\ a=1\end{array}\right\} \Rightarrow (a,b)=(1,0).$

3) $f(x)=ax-\sqrt[3]{x^3+4}$, $a\in\mathbb{R} \longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=;$ $\quad A=(0,+\infty)\ldots$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3+4)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+4}=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\sqrt[3]{x^3+4}\right]=-\infty.$ (1)

i) Αν $a<0 \longrightarrow$ μορφή $-\infty-\infty$

$\Downarrow$

$\lim\limits_{x\to+\infty}ax=a\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}x=-\infty \overset{(1)}{\Rightarrow} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\left(ax-\sqrt[3]{x^3+4}\right)=-\infty.$

ii) Αν $a=0 \Rightarrow f(x)=-\sqrt{x^3+4} \overset{(1)}{\Rightarrow} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

iii) Αν $\alpha>0$ (μορφή $\infty-\infty$) $\Longrightarrow$ $f(x)=\alpha x-\sqrt[3]{x^3+4}=\dfrac{\left(\alpha x-\sqrt[3]{x^3+4}\right)\left(\alpha^2x^2+\alpha x\sqrt[3]{x^3+4}+\left(\sqrt[3]{x^3+4}\right)^2\right)}{\alpha^2x^2+\alpha x\sqrt[3]{x^3+4}+\sqrt[3]{(x^3+4)^2}}$

$$=\frac{\alpha^3x^3-(x^3+4)}{\alpha^2x^2+\alpha x\sqrt[3]{x^3+4}+\sqrt[3]{x^6+8x^3+16}}=\frac{(\alpha^3-1)x^3-4}{\alpha^2x^2+\alpha x^2\sqrt[3]{1+\frac{4}{x^3}}+x^2\sqrt[3]{1+\frac{8}{x^3}+\frac{16}{x^6}}}\overset{(2)}{=}$$

$$=\frac{x^3}{x^2}\cdot\frac{(\alpha^3-1)-\frac{4}{x^3}}{\alpha^2+\alpha\sqrt[3]{1+\frac{4}{x^3}}+\sqrt[3]{1+\frac{8}{x^3}+\frac{16}{x^6}}}\quad(1).$$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\alpha^3-1)-\frac{4}{x^3}}{\alpha^2+\alpha\sqrt[3]{1+\frac{4}{x^3}}+\sqrt[3]{1+\frac{8}{x^3}+\frac{16}{x^6}}}=\dfrac{\alpha^3-1-0}{\alpha^2+\alpha\sqrt{1+0}+\sqrt{1+8\cdot0+16\cdot0}}=\dfrac{\alpha^3-1}{\alpha^2+\alpha+1}=\alpha-1$

α		0		1	
$\alpha-1$			$-$	0	$+$

• Αν $0<\alpha<1\Longrightarrow\alpha-1<0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ $\Longrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$.

• Αν $\alpha>1\longrightarrow\alpha-1>0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ $\Longrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

• Αν $\alpha=1\overset{(2)}{\Longrightarrow}f(x)=\dfrac{-4}{x^2+x^2\sqrt[3]{1+\frac{4}{x^3}}+x^2\sqrt[3]{1+\frac{8}{x^3}+\frac{16}{x^6}}}=\dfrac{1}{x^2}\cdot\dfrac{-4}{1+\sqrt[3]{1+\frac{4}{x^3}}+\sqrt[3]{1+\frac{8}{x^3}+\frac{16}{x^6}}}\quad(3).$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-4}{1+\sqrt[3]{1+\frac{4}{x^3}}+\sqrt{1+\frac{8}{x^3}+\frac{16}{x^6}}}=\dfrac{-4}{1+1+1}=-\dfrac{4}{3}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$ $\overset{(3)}{\Longrightarrow}\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0\cdot\left(-\dfrac{4}{3}\right)=0$.

ΑΡΑ:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\begin{cases}-\infty & ,\ \text{αν}\ \alpha\in(-\infty,1)\\ 0 & ,\ \text{αν}\ \alpha=1\\ +\infty & ,\ \text{αν}\ \alpha\in(1,+\infty).\end{cases}$$

▼ Όριο συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$

Έστω $f \in F_A$. Βασική προϋπόθεση για να μελετήσουμε το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ είναι το x_0 να είναι σημείο συσσώρευσης στο A. Αυτό ισχύει όταν υπάρχει $\Delta \subseteq A$ με της μορφής 1) (a,x_0) ή (x_0,b)

2) $(a,x_0)\cup(x_0,b)$

Αν $x_0 \in A$, τα παραπάνω σύνολα γίνονται $(a,x_0]$, $[x_0,b)$, (a,b).

• **Βασική Παρατήρηση**

Περιοχή $\pi(x_0,\delta)$ του A λέγεται το σύνολο $\boxed{\pi(x_0,\delta)=A\cap[(x_0-\delta,x_0+\delta)-\{x_0\}]}$

Είναι $\boxed{x\in\pi(x_0,\delta) \Longleftrightarrow 0<|x-x_0|<\delta \wedge x\in A}$

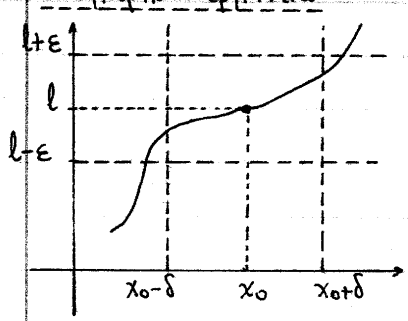
Απόδειξη

$$x\in\pi(x_0,\delta) \Longleftrightarrow x\in A\cap[(x_0-\delta,x_0+\delta)-\{x_0\}] \Longleftrightarrow x\in A \wedge x\neq x_0 \wedge x\in(x_0-\delta,x_0+\delta) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x\in A \wedge x\neq x_0 \wedge x_0-\delta<x<x_0+\delta \Longleftrightarrow x\in A \wedge x\neq x_0 \wedge -\delta<x-x_0<\delta \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow x\in A \wedge x\neq x_0 \wedge |x-x_0|<\delta \Longleftrightarrow x\in A \wedge 0<|x-x_0|<\delta$$

• **Ορισμοί Cauchy**

① $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell \Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\,\delta>0 : \forall x\in A,\ x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)-\{x_0\} \Longrightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon}$

Γεωμετρική ερμηνεία



Τα σημεία της γραφικής παράστασης της f με τετμημένη $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$, εκτός ίσως εκείνου που αντιστοιχεί στο x_0 βρίσκονται στο ορθογώνιο που ορίζεται από την ταινία των ευθειών $y=\ell-\varepsilon$, $y=\ell+\varepsilon$ και την ταινεία των ευθειών $x=x_0-\delta$, $x=x_0+\delta$ και υπάρχει $\delta>0$ πάντα τέτοιο για κάθε $\varepsilon>0$ ώστε να ισχύει αυτό.

Θ. $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell \Longrightarrow \ell \text{ μοναδικό}}$

Παρατηρήσεις

1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-\ell]=0$.

2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}[-f(x)]=-\ell$

• <u>Εφαρμογές-θεωρία</u>

1) Όριο σταθερής συνάρτησης: $\boxed{u(x)=c,\ \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x\to x_0} u(x)=c}$

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $\varepsilon>0$. Αρκεί $|u(x)-c|<\varepsilon \Leftrightarrow |c-c|<\varepsilon \Leftrightarrow 0<\varepsilon$ ισχύει, $\forall \varepsilon>0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} u(x)=c$

2) Όριο ταυτοτικής συνάρτησης $\boxed{i(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x\to x_0} i(x)=x_0}$

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $\varepsilon>0$. ~~Αρκεί $|i(x)-x_0| \Leftrightarrow |x-x_0|$~~
Αρκεί $|i(x)-x_0|<\varepsilon \Leftrightarrow \underbrace{|x-x_0|<\varepsilon}_{\delta}$ (1)(Πρέπει να φτάνω εδω)

Παίρνω $\delta=\varepsilon>0$(η οποιοδήποτε θετικό μικρότερο του ε) οπότε
$\forall x\in\mathbb{R},\ x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)-\{x_0\} \Rightarrow |x-x_0|<\delta \Rightarrow |x-x_0|<\varepsilon \overset{(1)}{\Rightarrow} |i(x)-x_0|<\varepsilon$
άρα $\lim_{x\to x_0} i(x)=x_0$.

<u>παράδειγμα</u>: $f(x)=2x+1$, $\lim_{x\to 2} f(x)=5$. (να δειχθεί)

<u>Λύση</u>

$A=\mathbb{R}$ (ως πολυωνυμική) στο οποίο το όριο έχει έννοια και το εξετάζω.
Έστω $\varepsilon>0$. Αρκεί $|f(x)-5|<\varepsilon \Leftrightarrow |2x+1-5|<\varepsilon \Leftrightarrow |2x-4|<\varepsilon \Leftrightarrow |x-2|<\frac{\varepsilon}{2}$ (1)
Παίρνω $\delta>0$, $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$ οπότε $\forall x\in\mathbb{R}, x\in(2-\delta, 2+\delta) \Rightarrow |x-2|<\delta \Rightarrow |x-2|<\frac{\varepsilon}{2} \overset{(1)}{\Rightarrow}$
$\Rightarrow |f(x)-5|<\varepsilon$, άρα $\lim_{x\to 2} f(x)=5$.

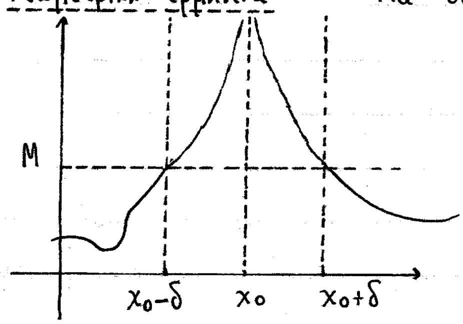
<u>παράδειγμα</u>: $f(x)=|x-3|+x$, δείξτε ότι $\lim_{x\to 3} f(x)=3$

<u>Λύση</u>

$A=\mathbb{R}$ (ώς πολυωνυμική) στο οποίο το όριο έχει έννοια και το εξετάζω.
Έστω $\varepsilon>0$. Αρκεί $|f(x)-3|=\big||x-3|+x-3\big| \leqslant \big||x-3|\big|+|x-3|=|x-3|+|x-3|=2|x-3|<\varepsilon$
$\Leftrightarrow |x-3|<\frac{\varepsilon}{2}$ (1). Παίρνω $\delta=\frac{\varepsilon}{2}>0$ οπότε $\forall x\in\mathbb{R}, x\in(3-\delta, 3+\delta) \Rightarrow |x-3|<\delta \Rightarrow$
$\Rightarrow |x-3|<\frac{\varepsilon}{2} \underset{(1)}{\Rightarrow} |f(x)-3|<\varepsilon$ άρα $\lim_{x\to 3} f(x)=3$.

② $\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall M>0,\ \exists \delta>0 : \forall x\in A,\ x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)-\{x_0\} \Rightarrow f(x)>M}$

Γεωμετρική ερμηνεία

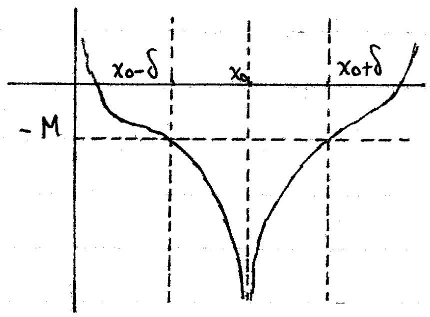


Για οσοδήποτε μεγάλο M, υπάρχει δ τέτοιο ώστε τα σημεία της γραφικής παράστασης της f με τετμημένη $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$, εκτός ίσως του σημείου με τετμημένη x_0, να βρίσκονται "πάνω" από την ευθεία $y=M$

$\cancel{\Theta.\ \lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty \Rightarrow \forall L\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\}}$

③ $\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \forall M>0,\ \exists \delta>0 : \forall x\in A,\ x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)-\{x_0\} \Rightarrow f(x)<-M}$

Γεωμετρική ερμηνεία Όμοια....



- Και στις δύο περιπτώσεις, η ευθεία $x=x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

Θ. $\boxed{\begin{array}{l} \lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty \Rightarrow \forall L\in\overline{\mathbb{R}}-\{-\infty\},\ \lim_{x\to x_0} f(x)\neq L \\ \lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty \Rightarrow \forall L\in\overline{\mathbb{R}}-\{+\infty\},\ \lim_{x\to x_0} f(x)\neq L \end{array}}$

- Βασική παρατήρηση $\boxed{f_1 \text{ περιορισμός της } f \text{ σε περιοχή του } x_0 \Rightarrow \left(\lim_{x_0} f = L \Leftrightarrow \lim_{x_0} f_1 = L\right)}$

Παράδειγμα Αν $f(x)=-\dfrac{1}{(x-4)^2}$ δείξτε ότι $\lim_{x\to 4} f(x)=-\infty$.

Λυση

Π.Ο. $A=\mathbb{R}-\{4\}=(-\infty,4)\cup(4,+\infty)$ στο οποίο το όριο έχει έννοια και το εξετάζω.
Έστω $M>0$. Αρκεί $f(x)<-M \Leftrightarrow -\dfrac{1}{(x-4)^2}<-M \Leftrightarrow \dfrac{1}{(x-4)^2}>M \Leftrightarrow (x-4)^2<\dfrac{1}{M} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |x-4|<\dfrac{1}{\sqrt{M}}$ (1) Παίρνω $\delta=\dfrac{1}{\sqrt{M}}$ οπότε $\forall x\in A,\ x\in(4-\delta, 4+\delta)-\{x_0\} \Rightarrow |x-4|<\delta \Rightarrow$

$\Rightarrow |x-4|<\dfrac{1}{\sqrt{M}} \overset{(1)}{\Rightarrow} f(x)<-M$ άρα $\lim_{x\to 4} f(x)=-\infty$.

▼ Πλευρικά όρια συνάρτησης

ΟΡΙΣΜΟΣ : Έστω $x_0\in\mathbb{R}$ και $f\in F_A$.

- Αν το A περιέχει τουλάχιστον ένα διάστημα της μορφής (x_0, β) και ο περιορισμός

f_1 της f στο (a,x_0) έχει στο x_0 όριο L, θα λέμε ότι <u>η f έχει στο x_0 όριο από δεξιά το L.</u>

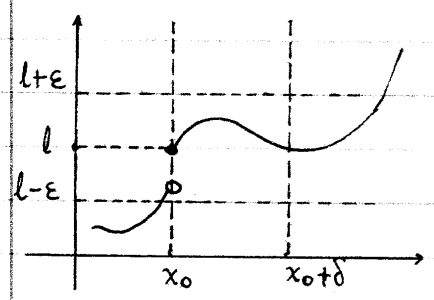
- Αν το A περιέχει τουλάχιστον ένα διάστημα της μορφής (a,x_0) και ο περιορισμός f_2 της f στο (a,x_0) έχει στο x_0 όριο L, θα λέμε ότι <u>η f έχει στο x_0 όριο από αριστερά το L.</u>

Συμβολικά: Έστω $x_0\in\mathbb{R}$ και $f\in F_A$, $L\in\overline{\mathbb{R}}$

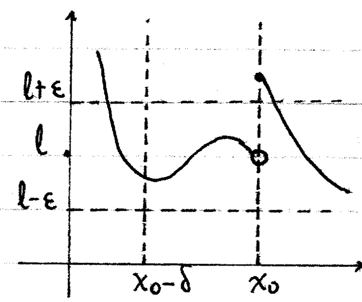
① $\boxed{\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L \Longleftrightarrow \exists\, (x_0,\beta)\subseteq A : (f_1 \text{ περιορισμος της } f \text{ στο } (x_0,\beta) \Longrightarrow \lim_{x\to x_0} f_1(x)=L)}$

② $\boxed{\lim_{x\to x_0^-} f(x)=L \Longleftrightarrow \exists\, (a,x_0)\subseteq A : (f_1 \text{ περιορισμος της } f \text{ στο } (a,x_0) \Longrightarrow \lim_{x\to x_0} f_1(x)=L)}$

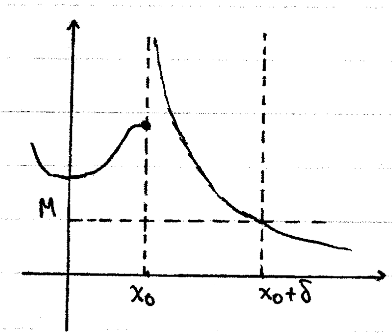
- <u>Γεωμετρική Ερμηνεία</u>



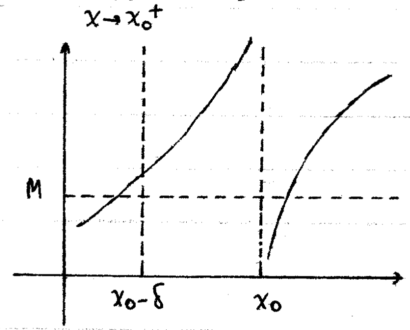
$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\ell$



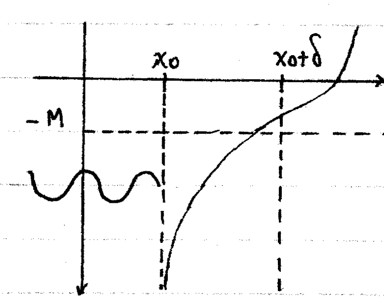
$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\ell$



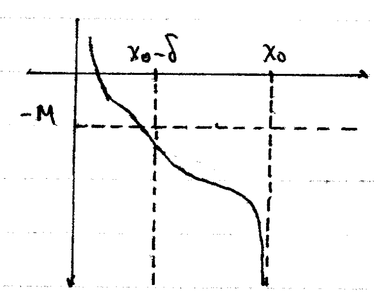
$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=+\infty$



$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=+\infty$



$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty$



$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=-\infty$.

→ Αν η f δεν ορίζεται αριστερά του x_0, δεν υπάρχει λόγος να μιλάμε για "όριο από δεξιά στο x_0" αφού ως έννοια συμπίπτει με το "όριο στο x_0".
Όμοια αν η f δεν ορίζεται δεξιά του x_0.

<u>παράδειγμα</u> $f(x)=\dfrac{x+1}{x}$, δείξτε ότι $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{x+1}{x}\cancel{+\infty}=+\infty$.

Πρέπει $x\neq 0 \Longrightarrow$ Π.Ο $A=\mathbb{R}-\{0\} \Longrightarrow \exists\, \Delta=(0,+\infty)\subset A$ στο οποίο το όριο έχει έννοια και το μελετ
Θα δείξω ότι στο Δ, ο περιορισμός f_1 της f έχει $\lim_{x\to 0} f_1(x)=+\infty$.
Έστω $M>0$.
Αρκεί $f_1(x)>M \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x}>M \overset{x>0}{\Longleftrightarrow} x+1>Mx \Leftrightarrow Mx-x<1 \Leftrightarrow (M-1)x<1 \quad (1)$

Αν $M \leq 1$, ισχύει η (1) διότι $(M-1)x < 0 < 1$.
Αν $M > 1$, $(1) \Rightarrow x < \dfrac{1}{M-1}$ (2)
(Μορφη $|x-0|$)

Παίρνω $\delta = \dfrac{1}{M-1}$ οπότε $\forall x \in A : x \in (0, \delta) \Leftrightarrow x < \delta \Rightarrow x < \dfrac{1}{M-1} \overset{(2)}{\Rightarrow} f_1(x) > M$

(0: x_0)

Αρα $\lim_{x \to 0} f_1(x) = +\infty$
f_1 περιορισμός της f στο $\Delta = (0, +\infty)$ $\Bigg\} \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.

Θ_1.) Εστω $f \in F A$ με $A : \exists (a, x_0) \cup (x_0, b) \subseteq A$.
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \overline{\mathbb{R}} \Longleftrightarrow \begin{cases} \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L \\ \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L \end{cases}$$

<u>Απόδειξη</u> : <u>Ευθύ</u> (εκτός ύλης)
Εστω f_1 ο περιορισμός της f στο (x_0, b) (1)
f_2 ο περιορισμός της f στο (a, x_0). (2)

Είναι $\lim_{x_0} f = L \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x_0} f_1 = L \overset{(1)}{\Rightarrow} \lim_{x_0^+} f = L \\ \wedge \\ \lim_{x_0} f_2 = L \overset{(2)}{\Rightarrow} \lim_{x_0^-} f = L. \end{cases}$

<u>Αντίστροφο</u>
i) Εστω $L \in \mathbb{R}$. Εστω $\epsilon > 0$.
~~$\lim_{x_0} f = L \Rightarrow \forall \epsilon > 0$~~

$\lim_{x_0^+} f = L \Rightarrow \exists \delta_1 > 0 : \forall x \in (x_0, x_0 + \delta_1), |f(x) - L| < \epsilon$ (1)
$\lim_{x_0^-} f = L \Rightarrow \exists \delta_2 > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta_2, x_0), |f(x) - L| < \epsilon$ (2)

▸ Παίρνω $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$
$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\} \Big\} \Rightarrow x \in (x_0, x_0 + \delta_1) \vee x \in (x_0 - \delta_2, x_0) \overset{(1)}{\underset{(2)}{\Rightarrow}} |f(x) - L| < \epsilon$
οπότε $\lim_{x_0} f = L$.

ii) Ομοια αν $L = +\infty$
iii) Ομοια αν $L = -\infty$.

Θ_2) $\boxed{\begin{array}{l}\text{Έστω } f\in F_A \text{ με } A:(a,x_0)\cup(x_0,b)\subseteq A.\\ \lim\limits_{x_0^-} f \neq \lim\limits_{x_0^+} f \Longleftrightarrow \nexists\, L\in\overline{\mathbb{R}} : \lim\limits_{x_0} f = L\end{array}}$

Είναι το αντιθετοαντίστροφο του Θ_1.

▼ Γενικός ορισμός του ορίου

Έστω $\sigma \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$.

- Αν $\sigma\in\mathbb{R}$, ανοιχτό διάστημα Δ_σ λέμε κάθε σύνολο της μορφής $(\sigma-\delta,\sigma+\delta)$
- Αν $\sigma\in\{+\infty,-\infty\}$, ανοιχτό διάστημα Δ_σ λέμε κάθε σύνολο της μορφής $(a,+\infty)$, αν $\sigma=+\infty$ ή $(-\infty,a)$, αν $\sigma=-\infty$.

▼ Περιοχή σημείου $\sigma\in\overline{\mathbb{R}}$ στο A

λέμε κάθε σύνολο της μορφής $\boxed{\pi(\sigma)=(\Delta_\sigma\cap A)-\{\sigma\}}$

Ειδικά εαν $\sigma\in\mathbb{R}$, τότε ορίζουμε ως πλευρικές περιοχές του σ τα σύνολα της μορφής

$$\boxed{\begin{array}{l}\pi(\sigma^+)=\pi(\sigma)\cap(\sigma,+\infty)\\ \pi(\sigma^-)=\pi(\sigma)\cap(-\infty,\sigma)\end{array}}$$

▼ Ορισμός του ορίου.

Απαραίτητη προυπόθεση για να μελετηθεί το $\lim\limits_{\sigma} f$, όπου $f\in F_A$, είναι το σ να είναι σημείο συσσώρευσης στο A:

$$\boxed{\sigma \text{ σημείο συσσώρευσης} \Longleftrightarrow \forall\, \pi(\sigma),\ \pi(\sigma)\neq\emptyset}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ ΕΑΔΕ $\boxed{\begin{array}{l}\text{Έστω } f\in F_A \text{ και } \sigma \text{ σημείο συσσώρευσης του } A,\ L\in\overline{\mathbb{R}}\\ \lim\limits_{\sigma} f = L \Longleftrightarrow \forall\,\Delta_L,\ \exists\,\pi(\sigma) : f(\pi(\sigma))\subseteq\Delta_L\end{array}}$

ή πιο αναλυτικά

$$\lim_{\sigma} f = L \Longleftrightarrow \forall\,\Delta_L,\ \exists\,\Delta_\sigma : \forall x\in\Delta_\sigma\cap A-\{\sigma\},\ f(x)\in\Delta_L$$

- Στα πλευρικά όρια ισχύει ανάλογος ορισμός. Βλέπουμε λοιπόν την ομαομορφία αυτών των ορισμών.

▼ <u>Γενικές ιδιότητες ορίου.</u> σε σημείο συσσώρευσης $\sigma \in \overline{\mathbb{R}}$ του Π.Ο. A της f.

- "σε μια $\pi(\sigma)$, ισχύει $p(x)$" $\Longleftrightarrow \exists\, \Delta_\sigma : \forall\, x \in A_1 = (\Delta_\sigma \cap A) - \{\sigma\} : p(x)$ αληθής.
- Ένα όριο $\lim\limits_{\sigma} f$, μπορώ να το περιορίσω σε κάθε $\pi(\sigma)$.

<u>Κριτήρια σύγκλισης προς το 0</u>

Θ1) $\boxed{\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\sigma} f = 0 \\ g \text{ φραγμένη σε μία } \pi(\sigma)\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{\sigma}(fg) = 0}$

Θ2) $\boxed{\left.\begin{array}{l}|g(x)| \leqslant |f(x)| \text{ σε μια } \pi(\sigma) \\ \lim\limits_{\sigma} f = 0\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{\sigma} g = 0}$

<u>Κριτήριο μη σύγκλισης</u> στο $\mathbb{R}$.

Θ3) $\boxed{(\exists\, \varepsilon > 0 : \forall \Delta_\sigma, \exists\, x_1, x_2 \in \overset{\pi(\sigma)}{\cancel{A_1}} : |f(x_1) - f(x_2)| \geqslant \varepsilon) \Longrightarrow \lim\limits_{\sigma} f \notin \mathbb{R}.}$

<u>Ιδιότητα του φραγμένου</u>

Θ4) $\boxed{\lim\limits_{\sigma} f = \ell \in \mathbb{R} \Longrightarrow f \text{ φραγμένη σε μία } \pi(\sigma)}$

<u>Όριο απολύτου της συνάρτησης</u>

Θ5) $\boxed{\begin{array}{l}\lim\limits_{\sigma} f = \ell \in \mathbb{R} \Longrightarrow \lim\limits_{x \to \sigma} |f(x)| = |\lim\limits_{x \to \sigma} f(x)|. \\ \lim\limits_{\sigma} f \in \{+\infty, -\infty\} \Longrightarrow \lim\limits_{x \to \sigma} |f(x)| = +\infty\end{array}}$

<u>Πρόσημο συνάρτησης και πρόσημο ορίου</u>

Θ6) $\boxed{\lim\limits_{\sigma} f = L \neq 0 \Longrightarrow f(x), \lim\limits_{\sigma} f \text{ ομόσημα σε μία } \pi(\overset{\sigma}{\cancel{x_0}}).}$

● <u>Παρατηρήσεις</u>

i) $\boxed{\left.\begin{array}{l}f(x) \geqslant 0 \text{ σε ένα } \Delta_\sigma \\ \lim\limits_{\sigma} f \in \overline{\mathbb{R}}\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{\sigma} f \geqslant 0}$

ii) $\boxed{\left.\begin{array}{l} f(x)<0 \text{ σε ένα } \Delta_\sigma \\ \lim_\sigma f \in \overline{\mathbb{R}} \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_\sigma f \leq 0}$

iii) $\boxed{\lim_\sigma f = \ell \in \mathbb{R}^* \Longrightarrow \frac{1}{f} \text{ φραγμένη σε μία } n(\approx\sigma)}$

▼ <u>Όρια και πράξεις</u> $(\sigma \in \overline{\mathbb{R}})$

Θ_1) Έστω $f, g \in F_A$ με $\lim_\sigma f, \lim_\sigma g \in \mathbb{R}$. Τότε

i) $\lim_\sigma (f+g) = \lim_\sigma f + \lim_\sigma g$ ii) $\lim_\sigma (fg) = (\lim_\sigma f) \cdot (\lim_\sigma g)$.

iii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lim_\sigma (\lambda f) = \lambda \cdot \lim_\sigma f$ iv) $\lim_\sigma g \neq 0 \rightarrow \lim_\sigma \frac{1}{g} = \frac{1}{\lim_\sigma g}$, $\lim_\sigma \frac{f}{g} = \frac{\lim_\sigma f}{\lim_\sigma g}$

v) $\left.\begin{array}{l} \forall x \in A, f(x) \geq 0 \\ \text{και } \kappa \in \mathbb{N}^* \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_\sigma \sqrt[\kappa]{f} = \sqrt[\kappa]{\lim_\sigma f}$ (Πρέπει $\lim_\sigma f > 0$).

~~Θ_2 Έστω ότι $\lim_\sigma f = +\infty$~~ • $\lim_\sigma f^\kappa = (\lim_\sigma f)^\kappa$.

Θ_2) I. $\boxed{\left.\begin{array}{l} \lim_\sigma f = +\infty \\ g \text{ φραγμένη κάτω σε μία } n(\sigma) \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_\sigma (f+g) = +\infty}$

II. $\boxed{\left.\begin{array}{l} \lim_\sigma f = +\infty \\ g \text{ φραγμένη κάτω από θετικό σε μία } n(\sigma) \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_\sigma (fg) = +\infty}$

III. $\boxed{\left.\begin{array}{l} \lim_\sigma f = +\infty \\ g \text{ φραγμένη άνω από αρνητικό σε μία } n(\sigma) \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_\sigma (fg) = -\infty}$

(ανάλογη διατύπωση ισχύει όταν $\lim_\sigma f = -\infty$).

• Το Θ_2 ισχύει ειδικότερα, αν $\lim_\sigma g = L$, και συγκεκριμένα:

το I όταν $L \neq -\infty$

το II όταν $L > 0 \vee L = +\infty$

το III όταν $L < 0 \vee L = -\infty$

Θ_3) $\boxed{\left.\begin{array}{l} \forall x \in A, f(x) \geq 0 \\ \lim_{x \to \sigma} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x \to \sigma} \sqrt[\kappa]{f(x)} = +\infty, \kappa \in \mathbb{N}^*}$

<u>Εφαρμογή</u> : $\boxed{P(x) \text{ πολυώνυμο} \Longrightarrow \forall x_0 \in \mathbb{R}: \lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0).}$

- Όμοια στα πλευρικά όρια...

▼ <u>Παραδείγματα</u>

1) $f(x) = x^2 + x + 12 \longrightarrow \lim_{x\to 3^+} f(x)$;

$A = \mathbb{R}$ (ως πολυωνυμική) $\Longrightarrow \exists\, \Delta = (3,14) \subset A$ στο οποίο το όριο έχει έννοια και το εξετάζω.

$\lim_{x\to 3^+} (x^2+x+12) = 3^2 + 3 + 12 = 24.$

2) $f(x) = \sqrt{x^2 - x} \longrightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x)$;

Πρέπει $x^2 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty) \Leftrightarrow A = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty) \Longrightarrow$

x		0		1	
$x^2 - x$	+	0	−	0	+

$\Longrightarrow \exists\, \Delta = (-\infty, 0)$ στο οποίο το όριο έχει έννοια και το εξετάζω.

$\lim_{x\to 0^-} \sqrt{x^2 - x} = \sqrt{\lim_{x\to 0^-}(x^2 - x)} = \sqrt{0^2 - 0} = 0.$

3) $f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \longrightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x)$;

Πρέπει $\begin{cases} 1-x \neq 0 \\ 1-x^3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq 1 \Leftrightarrow A = \mathbb{R} - \{1\} \Longrightarrow \exists\, \Delta = (0,1) \subset A$ στο οποίο το όριο έχει έννοια και το εξετάζω.

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1-x} - \lim_{x\to 0^+} \frac{3}{1-x^3} =$

$= \frac{1}{\lim_{x\to 0^+}(1-x)} - \frac{3}{\lim_{x\to 0^+}(1-x^3)} \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{1-0} - \frac{3}{1-0} = -2.$

Μόνο όταν φτάσω σε όριο πολυωνύμου αντικαθιστώ.

4) $f(x) = |x-1| + 3 \longrightarrow \lim_{x\to 1^+} f(x).$

$A = \mathbb{R} \Longrightarrow \exists\, \Delta = (1, +\infty)$ στο οποίο $|x-1| = x-1$ όπου το όριο έχει έννοια και το μελετώ.

x		1	
$x-1$	−	0	+

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (|x-1| + 3) = \lim_{x\to 1^+} (x - 1 + 3) = \lim_{x\to 1^+} (x+2) = 1 + 2 = 3.$

5) $f(x)=\sqrt{4x^2+2x+10}-2x.$ $\longrightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x).$

Πρέπει $4x^2+2x+10\geq 0$, ισχύει $\forall x\in\mathbb{R}$ διότι $\Delta<0 \Rightarrow A=\mathbb{R}$ στο οποίο το όριο έχει έννοια και το εξετάζω.

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt{4x^2+2x+10}-2x\right)=\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{4x^2+2x+10}-\lim\limits_{x\to 1}2x=$

$=\sqrt{\lim\limits_{x\to 1}(4x^2+2x+10)}-\lim\limits_{x\to 1}2x=\sqrt{4\cdot 1^2+2\cdot 1+10}-2\cdot 1=4-2=2.$

▼ <u>Μορφή $\frac{\kappa}{0}=\infty$</u>. Η λύση στηρίζεται στα θεωρήματα

Θ_1) $\boxed{\left.\begin{array}{l}\text{Αν } \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0\\ \text{και } f(x)>0 \text{ σε μια } n(x_0)\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=+\infty}$ $\left(\frac{1}{0^+}=+\infty\right)$

Θ_2) $\boxed{\left.\begin{array}{l}\text{Αν } \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0\\ \text{και } f(x)<0 \text{ σε μια } n(x_0)\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=-\infty.}$ $\left(\frac{1}{0^-}=-\infty\right)$

<u>παραδείγματα.</u>

1) $f(x)=\frac{x-1}{x}$ $\longrightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$;

Πρέπει $x\neq 0 \Leftrightarrow A=\mathbb{R}-\{0\}\Rightarrow \exists\ \Delta=(0,+\infty)\subset A$ στο οποίο το όριο έχει έννοια και το εξετάζω

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x-1}{x}=\left[\frac{-1}{0^+}\right]=\lim\limits_{x\to 0^+}(x-1)\cdot\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=-1\cdot\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=-\infty$ διότι

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+} x=0\\ \text{και } x>0, \forall x\in(0,+\infty)\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty.$

2) $f(x)=\frac{3}{x}$ $\longrightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)$;

$A=\mathbb{R}^*$ στο οποίο το όριο έχει έννοια και το εξετάζω.

▶ Βρίσκω τα πλευρικά όρια.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{3}{x}=3\cdot\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$, διότι $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} x=0\\ x<0, \forall x\in(-\infty,0)=\Delta\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{3}{x}=3\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$, διότι $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+} x=0\\ x>0, \forall x\in(0,+\infty)=\Delta\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty.$

οπότε $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 0} f(x).$

3) $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2} \longrightarrow \lim\limits_{x\to -1} f(x)$;

Πρεπει $(x+1)^2\neq 0 \Leftrightarrow x+1\neq 0 \Leftrightarrow A=\mathbb{R}-\{-1\}$ ~~στο οποίο~~ $\cancel{\Rightarrow \exists \Delta=(-2,-1)\cup(-1,-2)}=(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$
στο οποίο το οριο έχει έννοια και το εξετάζω

▸ Δεν χρειάζεται να πάρω πλευρικά όρια.

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to -1}(x+1)^2=\left(\lim_{x\to -1}(x+1)\right)^2=0^2=0\\ &(x+1)^2>0,\ \forall x\in A\end{aligned}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{1}{(x+1)^2}=+\infty .$$

▼ Μορφή $\frac{0}{0}$

Εχουμε σε συναρτήσεις του τύπου $f(x)=\dfrac{P_1(x)}{P_2(x)}$, όταν το x_0 είναι ρίζα αριθμητή και παρονομαστή. Τότε κάνω άρση αοριστίας, δηλ. παραγοντοποιώ τα P_1, P_2 και έχω.

$$f(x)=\frac{P_1(x)}{P_2(x)}=\frac{(x-x_0)\Pi_1(x)}{(x-x_0)\Pi_2(x)}=\frac{\Pi_1(x)}{\Pi_2(x)}$$ και βρίσκω το όριο της νέας συνάρτησης.

1) $f(x)=\dfrac{x^3+2x-3}{x-1} \longrightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x)$;

$A=\mathbb{R}-\{1\}=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ στο οποίο το όριο έχει έννοια και το εξετάζω.

$\left(f(1)=\frac{0}{0}\right)$

1	0	2	−3	1
	1	1	3	
1	1	3	0	

, οπότε $x^3+2x-3=(x-1)(x^2+x+3)$

$\forall x\in A$, Είναι $f(x)=\dfrac{x^3+2x-3}{x-1}=\dfrac{(x-1)(x^2+x+3)}{x-1}=x^2+x+3 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x^2+x+3)=1^2+1+3=5.$

2) $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{|x|-1} \longrightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x)$;

Πρέπει $|x|\neq 1 \Leftrightarrow x\neq \pm 1 \Leftrightarrow A=\mathbb{R}-\{+1,-1\}.\Rightarrow$

x		−1		0		1	
$\lvert x\rvert$	−	‖	−	0	+	‖	+

$\Rightarrow \exists \Delta=\left(\frac{1}{2},1\right)\cup\left(1,\frac{3}{2}\right)\subset A$ στο οποίο $|x|=x$, όπου το όριο έχει έννοια και το εξετάζω.

~~$\forall x\in\Delta, f(x)=\frac{x^2-2x+1}{|x|-1}=$~~

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-2x+1}{|x|-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x-1)=1-1=0.$$

→ Πλευρικά όρια παίρνω μόνο όταν το όριο τείνει στην ρίζα του απολύτου. Τότε κάνω πρώτα την συνάρτηση πολλαπλού τύπου.

Πλευρικά όρια βρίσκω επίσης και σε συναρτήσεις πολλαπλού τύπου.

3) $f(x)=\dfrac{x^2+2|x|}{x^2-2|x|} \longrightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Πρέπει $x^2-2|x|\neq 0 \Leftrightarrow |x|^2-2|x|\neq 0 \Leftrightarrow |x|(|x|-2)\neq 0 \Leftrightarrow |x|\neq 0 \wedge |x|\neq 2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x\neq 0 \wedge x\neq 2 \wedge x\neq -2 \Leftrightarrow A=\mathbb{R}-\{0,2,-2\}$

• <u>Παρατήρηση</u>: Το 0 είναι ρίζα του απολύτου $|x|$.

Είναι $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+2x}{x^2-2x}, & x>0\\[2mm] \dfrac{x^2-2x}{x^2+2x}, & x<0\end{cases}$

x	0
x	$-\ \ 0\ \ +$

Βρίσκω πλευρικά όρια.

$\exists\ \Delta=(0,1)$ στο οποίο έχει έννοια και εξετάζω το

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+2x}{x^2-2x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x(x+2)}{x(x-2)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x+2}{x-2}=\frac{\lim\limits_{x\to 0^+}(x+2)}{\lim\limits_{x\to 0^+}(x-2)}=\frac{0+2}{0-2}=-1 \quad (1)$$

$\exists\ \Delta=(-1,0)$ στο οποίο έχει έννοια και εξετάζω το

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2-2x}{x^2+2x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x(x-2)}{x(x+2)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x-2}{x+2}=\frac{\lim\limits_{x\to 0^-}(x-2)}{\lim\limits_{x\to 0^-}(x+2)}=\frac{0-2}{0+2}=-1 \quad (2)$$

οπότε $(1),(2)\Longrightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)=-1$.

▼ <u>Σε συναρτήσεις πολλαπλού τύπου</u>

Εαν με κατάλληλο ~~αερι~~ διάστημα μπορώ να περιορίσω την συνάρτηση έτσι ώστε να γίνει απλού τύπου και αν το όριο έχει έννοια σε αυτό το διάστημα τότε εξετάζω το όριο σε αυτό το διάστημα. Εαν αυτό είναι αδύνατο, τότε παίρνω πλευρικά όρια.

<u>παραδείγματα</u>

1) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-9}{x-5}, & x\in(-\infty,1]\\[2mm] \sqrt{x^2+x+2}, & x\in(1,+\infty)\end{cases} \longrightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x)$

$A=(-\infty,1]\cup(1,+\infty)=\mathbb{R}$ στο οποίο το όριο έχει έννοια.

Βρίσκω πλευρικά όρια

$\exists\ \Delta=(-\infty,1]$ στο οποίο έχει έννοια και εξετάζω το

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{x-9}{x-5}=\frac{\lim\limits_{x\to 1^-}(x-9)}{\lim\limits_{x\to 1^-}(x-5)}=\frac{1-9}{1-5}=2 \quad (1)$$

$\exists\, \Delta=(1,+\infty)$ στο οποίο έχει έννοια και εξετάζω το

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\sqrt{x^2+x+2} = \sqrt{\lim_{x\to 1^+}(x^2+x+2)} = \sqrt{1^2+1+2} = 2 \quad (2)$$

οπότε $(1),(2) \Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = 2$.

2) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-5x+6}{x-3} & , x\neq 3 \\ 5 & , x=3 \end{cases} \longrightarrow \lim_{x\to 3} f(x)$

$A=\mathbb{R} \Rightarrow \exists\, \Delta=(-\infty,3)\cup(3,+\infty)$ στο οποίο το όριο έχει έννοια και η f γίνεται

$$f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x-3} \Rightarrow \lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-2)(x-3)}{x-3} = \lim_{x\to 3}(x-2) = 3-2 = 1.$$

(είναι $\lim_{x\to 3} f(x) \neq f(3)$)

▼ <u>Όταν ο αριθμητής ή ο παρονομαστής έχει διαφορά ριζικών και το lim είναι της μορφής $\frac{0}{0}$</u>

πολλαπλασιάζω αριθμητή και παρονομαστή με συζυγή παράσταση (ή αξιοσημείωτο πηλίκο) οπότε, ύστερα από τις πράξεις, γίνεται άρση της απροσδιοριστίας $\frac{0}{0}$.

<u>παραδείγματα</u>

1) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} \longrightarrow \lim_{x\to 5} f(x) \quad \left[\frac{0}{0}\right]$

Πρέπει $\begin{cases} x-1\geq 0 \\ x-5\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow A=(1,5)\cup(5,+\infty)$. στο οποίο το lim έχει έννοια και το εξετάζω.

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} = \frac{(\sqrt{x-1}-2)(\sqrt{x-1}+2)}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)} = \frac{(x-1)-4}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)} = \frac{x-5}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x-1}+2} \Rightarrow \lim_{x\to 5} f(x) = \lim_{x\to 5}\frac{1}{\sqrt{x-1}+2} = \dots = \frac{1}{\sqrt{5-1}+2} = \frac{1}{4}$$

2) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4} \longrightarrow \lim_{x\to 5} f(x)$

Πρέπει $\begin{cases} x^2+1 \geq 0 \\ x^2+16\geq 0 \end{cases}$, ισχύουν ως άθροισμα τετραγώνου με θετικό, ~~άρα $A=\mathbb{R}$~~

και $\sqrt{x^2+16}-4\neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+16}\neq 4 \Leftrightarrow x^2+16\neq 16 \Leftrightarrow x^2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 0$

άρα $A=\mathbb{R}-\{0\}=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ στο οποίο το όριο έχει έννοια και το εξετάζω.

Είναι $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4} = \dfrac{(\sqrt{x^2+1}-1)(\sqrt{x^2+1}+1)(\sqrt{x^2+16}+4)}{(\sqrt{x^2+16}-4)(\sqrt{x^2+16}+4)(\sqrt{x^2+1}+1)} =$

$$= \frac{[(x^2+1)-1](\sqrt{x^2+16}+4)}{[(x^2+16)-16](\sqrt{x^2+1}+1)} = \frac{x^2(\sqrt{x^2+16}+4)}{x^2(\sqrt{x^2+1}+1)} = \frac{\sqrt{x^2+16}+4}{\sqrt{x^2+1}+1} \Longrightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+16}+4}{\sqrt{x^2+1}+1} =$$

$$= \dots = \dots = \frac{\sqrt{0+16}+4}{\sqrt{0+1}+1} = 4$$

▼ Ασκήσεις που λύνονται με τα κριτήρια σύγκλισης στο 0.

παράδειγμα

1) $f(x) = \dfrac{2x\,\text{συν}x}{x^2-9} \longrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

α' τρόπος

Πρέπει $x^2-9 \neq 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+3) \neq 0 \Leftrightarrow A = \mathbb{R} - \{-3, 3\} \longrightarrow \exists\, \Delta = (-\infty, -3)$ στο οποίο το όριο έχει έννοια και το εξετάζω.

x		-3		0		3	
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
x^2-9	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
	$-$		$+$	0	$-$		$+$

$$\forall x \in \Delta,\ |f(x)| = \left|\frac{2x\,\text{συν}x}{x^2-9}\right| = \frac{|2x\,\text{συν}x|}{|x^2-9|} = \frac{2|x|\cdot|\text{συν}x|}{|x^2-9|} = -\frac{2x\,|\text{συν}x|}{x^2-9} \leq \frac{-2x}{x^2-9} = g(x) \quad (1).$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2x}{x^2-9} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2x}{x^2} = -2\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \\ (1) \Rightarrow \forall x\in\Delta, |f(x)| \leq g(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.$$

β' τρόπος: ... $\exists\, \Delta = (-\infty, -3)$...

Η $\varphi(x) = \dfrac{2x}{x^2-9}$ έχει $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x}{x^2-9} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x}{x^2} = 2\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

και η $g(x) = \text{συν}x$ φραγμένη (διότι $-1 \leq \text{συν}x \leq 1, \forall x \in \Delta$)

οπότε η $f = \varphi \cdot g$ έχει $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

▼ Όρια και διάταξη

$\Theta_1)$

Εαν $f(x) \leq g(x)$ σε μια $n(\sigma)$ και
•1 $\lim\limits_{\sigma} f, \lim\limits_{\sigma} g \in \mathbb{R} \Longrightarrow \lim\limits_{\sigma} f \leq \lim\limits_{\sigma} g$
•2 $\lim\limits_{\sigma} f = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{\sigma} g = +\infty$.
•3 $\lim\limits_{\sigma} g = -\infty \Longrightarrow \lim\limits_{\sigma} f = -\infty$

Θ_2) <u>Θεώρημα ισοσυγκλινουσών συναρτήσεων</u>

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f(x)\leq t(x)\leq g(x) \text{ σε μία } n(\sigma) \\ \lim\limits_{\sigma} f=\lim\limits_{\sigma} g=\ell\in\mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{\sigma} t=\ell.}$$

<u>Παραδείγματα</u>

1) $f(x)=2x+\eta\mu x \longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x).$

$A=\mathbb{R}$ στο οποίο το όριο έχει έννοια και το εξετάζω.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Η } \varphi(x)=2x \text{ έχει } \lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=2\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty \\ \text{Η } g(x)=\eta\mu x \text{ είναι κάτω φραγμένη από το } -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}(2x+\eta\mu x)=+\infty.$$

<u>β' τρόπος</u>

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=2x+\eta\mu x\geq 2x-1,\ \forall x\in\mathbb{R} \\ \lim\limits_{x\to+\infty}(2x-1)=\lim\limits_{x\to+\infty}2x=2\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.$$

2) $f(x)=\dfrac{x^2(2-\eta\mu x)}{x+1} \longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x).$

Πρέπει $x+1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -1 \Leftrightarrow A=\mathbb{R}-\{-1\}=(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty) \Rightarrow \exists\, \Delta=(-1,+\infty)$ στο οποίο το όριο έχει έννοια και το εξετάζω.

Η $\varphi(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$ έχει $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ (1)

$\forall x\in\Delta,\ \eta\mu x\leq 1 \Rightarrow -\eta\mu x\geq -1 \Rightarrow 2-\eta\mu x\geq 1 \Rightarrow$ Η $g(x)=2-\eta\mu x$ είναι κάτω φραγμένη από θετικό τον 1 στο Δ (2).

$(1),(2) \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\big(\varphi(x)g(x)\big)=+\infty.$

▼ <u>Όρια συναρτήσεων που ο τύπος τους περιέχει $[x]$.</u>

Για να υπολογίσω το όριο μίας τέτοιας συνάρτησης στο $\sigma\in\overline{\mathbb{R}}$, χρησιμοποιώ την ανισότητα $[x]\leq x<[x]+1$ ή την $x-1\leq[x]\leq x$ σε συνδυασμό με το θ. ισοσυγκλινουσών συναρτήσεων. Επίσης, χρήσιμα είναι και τα θεωρήματα των ακολουθιών.

<u>παράδειγμα.</u>

1) $f(x)=\sqrt[[x]]{x} \longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ αν $x\in[1,+\infty)$.

Στο $A=[1,+\infty)$ το όριο έχει έννοια και το εξετάζω.

$x\in[1,+\infty) \Rightarrow \cancel{x\geq 1}\ x\geq 1 \Rightarrow x-1\geq 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix}[x]\geq x-1\geq 0\\ [x]\in\mathbb{Z}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \underline{[x]\in\mathbb{N}}$

Θέτω $[x]=v$ κι έχω $[x]\leq x \leq [x]+1 \Rightarrow v\leq x< v+1 \Rightarrow \sqrt[[x_0]]{v} \leq \sqrt[[x_0]]{x} < \sqrt[[x]]{v+1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{\sqrt[v]{v}}_{a_v} \leq \sqrt[[x]]{x} \leq \underbrace{\sqrt[v]{v+1}}_{b_v}$ (1) , $\forall x\in[1,+\infty)$.

Είναι $\lim a_v = \lim \sqrt[v]{v} = 1$ (2)

και $b_v = \sqrt[v]{v+1} = \sqrt[v]{v(1+\frac{1}{v})} = \sqrt[v]{v}\cdot\sqrt[v]{1+\frac{1}{v}}$ (3).

$\left.\begin{matrix}\left.\begin{matrix}\lim(1+\frac{1}{v}) = 1+\lim\frac{1}{v} = 1+0 = 1>0\\ 1+\frac{1}{v}>0,\ \forall v\in\mathbb{N}^*\end{matrix}\right\}\Rightarrow \lim\sqrt[v]{1+\frac{1}{v}} = 1\\ \lim\sqrt[v]{v} = 1\end{matrix}\right\}\Rightarrow \lim b_v = 1.$ (4).

οπότε (1), (2), (4) $\xRightarrow{ΘΙΣ} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[[x]]{x} = 1$.

2) $f(x) = x\cdot\left[\frac{1}{x}\right] \longrightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

(α) Πρέπει $x\neq 0 \Leftrightarrow A=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ στο οποίο το όριο έχει έννοια και το εξετάζω

$\forall x\in\mathbb{R}^* \Rightarrow \frac{1}{x}\in\mathbb{R}^* \Rightarrow \frac{1}{x}-1<\left[\frac{1}{x}\right]\leq\frac{1}{x} \Rightarrow ;\ x(\frac{1}{x}-1)\leq x\left[\frac{1}{x}\right]\leq\frac{1}{x}\cdot x$; λάθος.)

• Γι'αυτό θα δουλέψω με πλευρικά όρια:

α) Πρέπει $x\neq 0 \Leftrightarrow A=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ στο οποίο το όριο έχει έννοια.

Παίρνω πλευρικά όρια

$\exists\,\Delta_1=(-\infty,0)$ στο οποίο έχει έννοια και εξετάζω το $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$.

$\left.\begin{matrix}\forall x\in\Delta_1,\ \frac{1}{x}-1<\left[\frac{1}{x}\right]\leq\frac{1}{x}\\ x<0\end{matrix}\right\}\Rightarrow x\left(\frac{1}{x}-1\right) > x\left[\frac{1}{x}\right] \geq x\cdot\frac{1}{x} \Rightarrow 1-x>f(x)\geq 1.$ (1).

Είναι και $\lim\limits_{x\to 0^-}(1-x) = 1-0 = 1. \underset{ΘΙΣ}{\overset{(1)}{\Longrightarrow}} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 1.$

$\exists\,\Delta_2=(0,+\infty)$ στο οποίο έχει έννοια και εξετάζω το $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

$\forall x\in\Delta_2,\ \frac{1}{x}-1<\left[\frac{1}{x}\right]\leq\frac{1}{x} \Rightarrow x\left(\frac{1}{x}-1\right)<x\left[\frac{1}{x}\right]\leq x\cdot\frac{1}{x} \Rightarrow 1-x<f(x)\leq 1$ (2)

Είναι και $\left.\begin{matrix}\lim\limits_{x\to 0^+}(1-x) = 1-0 = 1 \underset{ΘΙΣ}{\overset{(1)}{\Longrightarrow}} \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1.\\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 1\end{matrix}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1.$

β) $A=(-\infty,0)\cup(0,+\infty) \Rightarrow \exists\,\Delta=(2,+\infty)$ στο οποίο το όριο έχει έννοια και το εξετάζω.

$\forall x\in\Delta \Rightarrow x>2 \Rightarrow 0<\frac{1}{x}<\frac{1}{2}<1 \Rightarrow 0<\frac{1}{x}<1 \Rightarrow \left[\frac{1}{x}\right]=0 \Rightarrow f(x) = x\left[\frac{1}{x}\right] = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

▼ <u>Συναρτήσεις που δεν συγκλίνουν</u> $\longleftrightarrow$ Έχουν όριο στο $+\infty$ ή $-\infty$ ή
δεν έχουν όριο στο $\overline{\mathbb{R}}$ ή
το όριο δεν έχει έννοια.

<u>Μέθοδος</u>: 1) Αν θέλω να δείξω ότι η f δεν έχει πεπερασμένο όριο (στο $\mathbb{R}$), χρησιμοποιώ το κριτήριο μη σύγκλισης.

2) Αν θέλω να δείξω ότι δεν έχει όριο το $+\infty$ ή το $-\infty$, δείχνω ότι η f είναι φραγμένη σε όλο το πεδίο ορισμού της.
Ειδικά για να δείξω ότι δεν έχει όριο το $+\infty$, αρκεί να δείξω ότι είναι φραγμένη άνω και για το $-\infty$, ότι είναι φραγμένη κάτω.

3) Για να δείξω ότι δεν υπάρχει το $\lim\limits_{\sigma} f$ δείχνω ότι
i) $\lim\limits_{\sigma^+} f \neq \lim\limits_{\sigma^-} f$ εαν το σ πεπερασμένο
ii) τα 1) και 2) εαν δεν μπορώ να δείξω το i)
iii) Ειδικά, ότι το όριο δεν έχει έννοια στο Π.Ο. του.

• <u>Κριτήριο μη σύγκλισης</u>

$$\boxed{\left(\exists \varepsilon>0 : \forall \Delta_\sigma, \exists x_1, x_2 \in \Delta_\sigma^{\Pi(\sigma)} : |f(x_1)-f(x_2)| \geq \varepsilon\right) \Longrightarrow \lim_{\sigma} f \notin \mathbb{R}}$$

<u>παραδείγματα</u>

1) $f(x) = \eta\mu\frac{1}{x} \longrightarrow$ δείξτε ότι $\nexists \lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

• Η άσκηση δεν λύνεται με πλευρικά όρια διότι καταλήγει στις απροσδιόριστες μορφές $\eta\mu(+\infty)$ και $\eta\mu(-\infty)$. Γι'αυτό θα δείξω τα 1) και 2).
Πρέπει $x\neq 0 \Leftrightarrow A=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ στο οποίο το όριο έχει έννοια και το εξετάζω.
$\forall x\in A,\ -1\leq \eta\mu\frac{1}{x} \leq 1 \Rightarrow -1\leq f(x) \leq 1 \Rightarrow$ Η f φραγμένη στο $A \Rightarrow$
$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) \notin \{-\infty, +\infty\}$.
Θα δείξω ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \notin \mathbb{R}$.
~~Έστω $\Delta_0 = \left(-\frac{1}{b\pi}, \frac{1}{a\pi}\right)$, $\kappa\in\mathbb{R}$.~~

Έστω $\Delta_0 = (-a, +a)$, $a\in\mathbb{R}_+^*$ ~~$\exists b\in\mathbb{R}: a=\frac{1}{b\pi}$, το $b=\frac{1}{a\pi}$ άρα $\Delta_0=\left(-\frac{1}{b\pi}, +\frac{1}{b\pi}\right)$~~

Έστω $x_1 = \frac{1}{2\kappa\pi}$, $x_2 = \frac{1}{2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}}$. Θα βρω ένα $\kappa\in\mathbb{N}$ έτσι ώστε $x_1, x_2 \in \Delta_0$.

$x_1 \in \Delta_0 \Leftrightarrow -a < \frac{1}{2\kappa\pi} < a \Leftrightarrow \left|\frac{1}{2\kappa\pi}\right| < a \Leftrightarrow |2\kappa\pi| > \frac{1}{a} \Leftrightarrow |\kappa| > \frac{1}{2\pi a} \Leftrightarrow \kappa > \frac{1}{2\pi a}$
άρα $\exists \kappa\in\mathbb{N}$, π.χ. ο $\kappa = \left[\frac{1}{2\pi a}\right]+1 : \kappa > \frac{1}{2\pi a} \Rightarrow x_1 \in \Delta_0$

Είναι και $\left.\begin{matrix} 0<x_2<x_1 \\ x_1 \in \Delta_0 \Rightarrow -a<x_1<a \end{matrix}\right\} \Rightarrow -a<x_2<a \Rightarrow x_2 \in (-a,a)$.

Άρα $\exists\, x_1 = \dfrac{1}{2k\pi}$, $x_2 = \dfrac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}} \in \Delta_0$ $(k \in \mathbb{N}^*)$ έτσι ώστε

$|f(x_1)-f(x_2)| = \left|f\left(\frac{1}{2k\pi}\right) - f\left(\frac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}}\right)\right| = \left|\eta\mu 2k\pi - \eta\mu\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right| = |0-1| = 1 \geq 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, \varepsilon>0 : \forall \Delta_0, \exists\, x_1,x_2 \in \Delta_0 : |f(x_1)-f(x_2)| \geq \varepsilon$ (π.χ. το $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$) $\Rightarrow$

$\left.\begin{matrix} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) \notin \mathbb{R}. \\ \lim\limits_{x\to 0} f(x) \notin \{+\infty,-\infty\} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

2) $f(x) = 2 + \sigma\upsilon\nu x \longrightarrow$ δείξτε ότι $\nexists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

$A = \mathbb{R}$ στο οποίο το όριο έχει έννοια και το εξετάζω.

$\forall x \in A$, $-1 \leq \sigma\upsilon\nu x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 2+\sigma\upsilon\nu x \leq 3 \Rightarrow 1 \leq f(x) \leq 3 \Rightarrow$ Η f φραγμένη στο $A \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \notin \{+\infty,-\infty\}$. Θα δείξω ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \notin \mathbb{R}$.

Έστω $\Delta_{+\infty} = (a,+\infty)$, $a \in \mathbb{R}$.

Παίρνω $x_1 = 2k\pi$, $x_2 = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$. Θα βρω ένα $k \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $x_1, x_2 \in \Delta_{+\infty}$.

Αν $a \leq 0$ τότε $x_1, x_2 \in \Delta_{+\infty}$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$

Αν $a>0$ τότε $x_1 \in \Delta_{+\infty} \Leftrightarrow 2k\pi > a \Leftrightarrow k > \dfrac{a}{2\pi}$ άρα

$\exists\, k \in \mathbb{N}^*$, π.χ. ο $k = \left[\dfrac{a}{2\pi}\right] + 1 : k > \dfrac{a}{2\pi} \Rightarrow x_1 \in \Delta_{+\infty}$.

Είναι και $\left.\begin{matrix} x_2 = 2k\pi + \frac{\pi}{2} > 2k\pi = x_1 \\ x_1 \in \Delta_{+\infty} \Rightarrow x_1 > a \end{matrix}\right\} \Rightarrow x_2 > a \Rightarrow x_2 \in \Delta_{+\infty}$

Άρα $\exists\, x_1 = 2k\pi$, $x_2 = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \in \Delta_{+\infty}$ $(k \in \mathbb{N}^*)$ έτσι ώστε

$|f(x_1)-f(x_2)| = \left|f(2k\pi) - f\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right| = \left|\cancel{2} + \underbrace{\sigma\upsilon\nu 2k\pi}_{1} - \cancel{2} - \underbrace{\sigma\upsilon\nu\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)}_{0}\right| = 1 \geq 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0$ (π.χ. ο $\varepsilon = 1$) $: \forall \Delta_\sigma, \exists\, x_1,x_2 \in \Delta_\sigma : |f(x_1)-f(x_2)| \geq \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \notin \mathbb{R}$.

Είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \notin \{+\infty,-\infty\}$

$\Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3) $f(x) = \sqrt{x - [x]} \longrightarrow$ δείξτε ότι $\nexists \lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

Πρέπει $x - [x] \geq 0 \Leftrightarrow [x] \leq x$, ισχύει $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow A = \mathbb{R}$ στο οποίο το όριο έχει έννοια.

Βρίσκω πλευρικά όρια.

$\exists\, \Delta_1 = (0,1) \subset A$ στο οποίο το $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$ έχει έννοια και το εξετάζω.

$\forall x \in \Delta_1$, $0<x<1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow f(x) = \sqrt{x-0} = \sqrt{x} \Rightarrow \lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-}\sqrt{x} = \sqrt{\lim\limits_{x\to1^-} x} = \sqrt{1} = 1$

$\exists\, \Delta_2=(1,2)\subset A$ στο οποίο το $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ έχει έννοια και το εξετάζω.

$\forall x\in\Delta_2,\ 1<x<2 \Rightarrow [x]=1 \Rightarrow f(x)=\sqrt{x-1} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt{x-1} = \sqrt{\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)} = \sqrt{1-1}=0$

άρα $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=1\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=0\end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 1} f(x).$

- Αν ο περιορισμός της f, f_1 στο $\Delta_1 \subseteq A$, και f_2 στο $\Delta_2 \subseteq A$ έχουν $\lim\limits_{\sigma} f_1 \neq \lim\limits_{\sigma} f_2$ τότε $\nexists \lim\limits_{\sigma} f$ διότι όλοι οι περιορισμοί f_i της f σε περιοχή του σ έχουν κοινό όριο στο σ με την f. Για περιορισμό όταν ~~δουλεύω~~ $\sigma=+\infty$, μπορώ να πάρω και μια ακολουθία. Μάλιστα, αυτή ακριβώς η μέθοδος έχει εφαρμοστεί στις ακολουθίες. (έννοια της υπακολουθίας)

<u>παράδειγμα</u>

$f(x)=3-x\eta\mu x \longrightarrow \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=;$

Έστω $\Delta_1=\{2\pi\nu : \nu\in\mathbb{N}^*\}$ στο οποίο το όριο έχει έννοια και το εξετάζω.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(3-x\eta\mu x) = \lim(3-2\pi\nu\cdot \underbrace{\eta\mu 2\pi\nu}_{0}) = \lim 3 = 3$

Έστω $\Delta_2=\{2\pi\nu+\frac{\pi}{2} : \nu\in\mathbb{N}^*\}$ στο οποίο το όριο έχει έννοια και το εξετάζω.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(3-x\eta\mu x) = \lim\left(3-(2\pi\nu+\frac{\pi}{2})\underbrace{\eta\mu(2\pi\nu+\frac{\pi}{2})}_{1}\right) = \lim\left(3-2\pi\nu-\frac{\pi}{2}\right) =$

$= \lim(-2\pi\nu) = -2\pi\lim\nu = -\infty$

Άρα $\nexists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x).$

▼ ΤΡΙΓΟΝΟΜΕΤΡΙΚΑ ΟΡΙΑ

Ισχύει από την άλγεβρα $\boxed{|\eta\mu x| < |x|, \forall x \in \mathbb{R}^*}$, $\boxed{|x| < |\varepsilon\varphi x|, \forall x \in \mathbb{R}^* - \{\kappa\pi + \frac{\pi}{2} : \kappa\in$

Θ1) $\boxed{\lim_{x\to x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0 , \forall x_0 \in \mathbb{R}}$

Απόδειξη Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$.

$A = \mathbb{R} \Rightarrow \exists\, \Delta = (-\infty, x_0) \cup (x_0, +\infty)$ στο οποίο το όριο έχει έννοια και το εξετάζω.

$\forall x \in \Delta, |\eta\mu x - \eta\mu x_0| = \left|2\,\eta\mu \frac{x-x_0}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{x+x_0}{2}\right| = 2\left|\eta\mu \frac{x-x_0}{2}\right| \cdot \left|\sigma\upsilon\nu \frac{x+x_0}{2}\right| \leqslant 2\left|\eta\mu \frac{x-x_0}{2}\right|$

$< 2\frac{|x-x_0|}{2} = |x-x_0|$

$\lim_{x\to x_0}(x-x_0) = x_0 - x_0 = 0$

$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} (\eta\mu x - \eta\mu x_0) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0.$

Θ2) $\boxed{\lim_{x\to x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0 , \forall x_0 \in \mathbb{R}}$

Απόδειξη

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. $A = \mathbb{R} \Rightarrow \exists\, \Delta = (-\infty, x_0) \cup (x_0, +\infty) \subseteq A$ στο οποίο το όριο έχει έννοια και το εξετάζω.

$\forall x \in \Delta,\ |\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu x_0| = \left|-2\eta\mu \frac{x+x_0}{2}\, \eta\mu \frac{x-x_0}{2}\right| = 2\left|\eta\mu \frac{x+x_0}{2}\right| \cdot \left|\eta\mu \frac{x-x_0}{2}\right| \leqslant$

$\leqslant 2 \cdot \left|\eta\mu \frac{x-x_0}{2}\right| < 2 \cdot \frac{|x-x_0|}{2} = |x-x_0|$

$\lim_{x\to x_0} (x-x_0) = x_0 - x_0 = 0$

$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} (\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu x_0) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0.$

Θ3) $\boxed{\lim_{x\to x_0} \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi x_0 , \forall x \in \mathbb{R} - \{\kappa\pi + \frac{\pi}{2}\}.}$

Απόδειξη

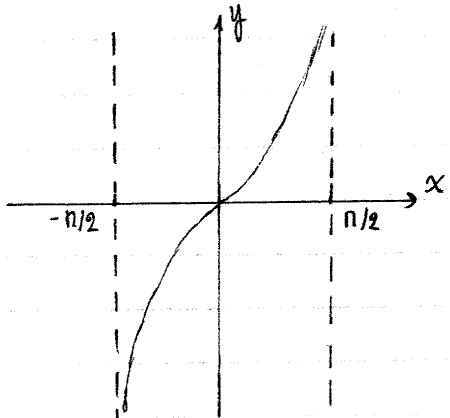
Έστω $x_0 \in \mathbb{R} - \{\kappa\pi + \frac{\pi}{2}\} = \bigcup_{\kappa\in\mathbb{Z}} (\kappa\pi - \frac{\pi}{2}, \kappa\pi + \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \exists\, \kappa \in \mathbb{Z}$: Στο $\Delta = (\kappa\pi - \frac{\pi}{2}, \kappa\pi + \frac{\pi}{2}) \subseteq A$ το όριο να έχει έννοια όπου το εξετάζου,

$$\lim_{x\to x_0} \varepsilon\varphi x = \lim_{x\to x_0} \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{\lim_{x\to x_0} \eta\mu x}{\lim_{x\to x_0} \sigma\upsilon\nu x} = \frac{\eta\mu x_0}{\sigma\upsilon\nu x_0} = \varepsilon\varphi x_0.$$

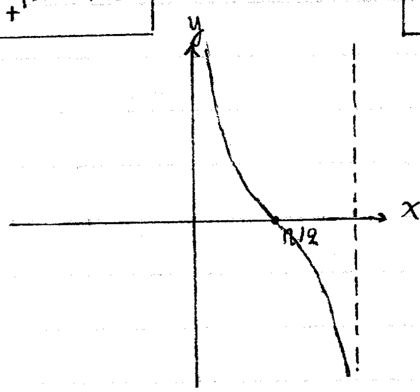
Θ4) $\boxed{\lim_{x\to x_0} \sigma\varphi x = \sigma\varphi x_0 , \forall x \in \mathbb{R} - \{\kappa\pi\}.}$

Απόδειξη όμοια.

• $\boxed{\lim_{x\to(k\pi+\frac{\pi}{2})^+} \varepsilon\varphi x = -\infty}$ • $\boxed{\lim_{x\to(k\pi+\frac{\pi}{2})^-} \varepsilon\varphi x = +\infty}$. $: k\in\mathbb{Z}$



• $\boxed{\lim_{x\to k\pi^+} \sigma\varphi x = +\infty}$ • $\boxed{\lim_{x\to k\pi^-} \sigma\varphi x = -\infty}$



• Εφαρμογές - Θεωρία

1) $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1}$

Απόδειξη: $A=\mathbb{R}-\{0\} \Longrightarrow \exists\, \Delta=\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)-\{0\}$ στο οποίο το όριο έχει έννοια και το εξετάζω.

$\forall x\in\Delta,\ |\eta\mu x|<|x|<|\varepsilon\varphi x| \Longrightarrow 1<\frac{|x|}{|\eta\mu x|}<\frac{|\varepsilon\varphi x|}{|\eta\mu x|} \Longrightarrow 1<\left|\frac{x}{\cancel{\sigma\upsilon\nu}\,\eta\mu\, x}\right|<\left|\frac{\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}}{\eta\mu x}\right| \Longrightarrow$

$\Longrightarrow 1<\left|\frac{x}{\cancel{\sigma\upsilon\nu}\,\eta\mu\, x}\right|<\left|\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\right| \Longrightarrow |\sigma\upsilon\nu x|<\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right|<1 \quad (1)$

$\forall x\in\Delta$, $x, \eta\mu x$ ομόσημοι Λ $\sigma\upsilon\nu x>0 \Longrightarrow$ η (1) γίνεται $\sigma\upsilon\nu x<\frac{\eta\mu x}{x}<1,\ \forall x\in\Delta$ (2)

$\lim_{x\to 0}\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu 0 = 1 \xrightarrow[\text{ΘΙΣ}]{(2)} \lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=1$

2) $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\varepsilon\varphi x}{x}=1}$

Απόδειξη

$A = \mathbb{R}^* - \{k\pi + \frac{\pi}{2}\} \Rightarrow \exists\, \Delta = (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$ στο οποίο το όριο έχει έννοια και το εξετάζω.

$$\forall x \in \Delta,\ \frac{\varepsilon\varphi x}{x} = \frac{\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}}{x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\,\frac{\eta\mu x}{x}$$

Αλλα $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\sigma\upsilon\nu x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu 0} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x} = 1$ $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\frac{\varepsilon\varphi x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x} = 1\cdot 1 = 1$

▼ Οριο σύνθεσης συναρτήσεων

Θ. $\boxed{\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\sigma} g = \sigma_1 \wedge \lim\limits_{\sigma_1} f = L \\ \text{Σε μια } \eta(\sigma) \text{ ορίζεται η } f\circ g \wedge g(x) \neq \sigma_1\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{\sigma} f\circ g = L}$

Σε μι

Αλλαγή μεταβλητής

1) $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h) = L. \quad ,\forall x_0 \in \Delta}$

2) $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 1} f(x_0 h) = L \quad ,\forall x_0 \in \Delta^*}$

▼ Μεθοδος – ασκήσεις στα τριγωνομετρικά όρια

1) Εαν δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, κάτω ιδιότητες και χρησιμοποιώ τους τύπους

παράδειγμα: $f(x) = \frac{1-\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \longrightarrow \lim\limits_{x\to\pi/3} f(x)$;

Πρέπει $\sigma\upsilon\nu x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow A = \mathbb{R} - \{k\pi + \frac{\pi}{2}\} \Rightarrow \exists\, \Delta = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ στο οποίο το όριο έχει έννοια και το εξετάζω.

$$\lim_{x\to\pi/3} f(x) = \lim_{x\to\pi/3}\left(\frac{1-\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu}\right) = \frac{\lim\limits_{x\to\pi/3}(1-\eta\mu x)}{\lim\limits_{x\to\pi/3}\sigma\upsilon\nu x} = \frac{1-\lim\limits_{x\to\pi/3}\eta\mu x}{\lim\limits_{x\to\pi/3}\sigma\upsilon\nu x} = \frac{1-\eta\mu\frac{\pi}{3}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}} =$$

$$= \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{2-\sqrt{3}}{1} = 2-\sqrt{3}.$$

2) Μορφή $\frac{0}{0}$: Κάνω παραγοντοποίηση (τριγωνομετρική) και ανάγω την συνάρτηση στις μορφές

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x} = 1$ 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\varepsilon\varphi x}{x} = 1$ ● $\boxed{\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\eta\mu x}{x} = 0}$

Παραδείγματα

1) Δείξτε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu\alpha x}{\eta\mu\beta x}=\dfrac{\alpha}{\beta}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^*$ $\left[\dfrac{0}{0}\right]$

Π.Ο. Πρέπει $\eta\mu\beta x\neq 0 \Leftrightarrow \beta x\neq \kappa\pi \Leftrightarrow x\neq \dfrac{\kappa\pi}{\beta} \Leftrightarrow A=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{\kappa\pi}{\beta}\right\} \Rightarrow \exists\, \Delta=\left(-\dfrac{\pi}{\beta},0\right)\cup\left(0,\dfrac{\pi}{\beta}\right)\subset A$ στο οποίο το όριο έχει έννοια και το εξετάζω.

$$\cancel{\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu\alpha x}{\eta\mu\beta x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\eta\mu\alpha x}{x}}{\frac{\eta\mu\sigma\upsilon\nu\beta x}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha\cdot\frac{\eta\mu\alpha x}{\alpha x}}{\beta\cdot\ \sigma\upsilon\nu\beta}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu\alpha x}{\eta\mu\beta x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\eta\mu\alpha x}{x}}{\frac{\eta\mu\beta x}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha\cdot\frac{\eta\mu\alpha x}{\alpha x}}{\beta\cdot\frac{\eta\mu\beta x}{\beta x}}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\eta\mu\alpha x}{\alpha x}}{\frac{\eta\mu\beta x}{\beta x}}=$$

$$=\cancel{\lim_{x\to 0}\ \frac{\alpha}{\beta}\lim_{x\to 0}}\quad \frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu\alpha x}{\alpha x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu\beta x}{\beta x}}\qquad (1)$$

Έστω $g(x)=\overset{\kappa}{\alpha}x=y$ και $h(y)=\dfrac{\eta\mu y}{y} \Rightarrow \dfrac{\eta\mu\alpha x}{\alpha x}=h(g(x))$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\lim\limits_{x\to 0}(\alpha x)=0\ \ (g(x)\neq 0,\ \gamma\iota\alpha\ x\neq 0)\\ \lim\limits_{y\to 0}h(y)=1\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu\kappa x}{\kappa x}=1\ ,\forall \kappa\in\mathbb{R}^* \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu\alpha x}{\alpha x}=1\\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu\beta x}{\beta x}=1\end{array}\right.$$

οπότε $(1)\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu\alpha x}{\eta\mu\beta x}=\dfrac{\alpha}{\beta}\cdot\dfrac{1}{1}=\dfrac{\alpha}{\beta}$.

2) $f(x)=\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x^2} \longrightarrow \lim\limits_{x\to 0}f(x)$; $\left[\dfrac{0}{0}\right]$

Π.Ο. Πρέπει $x^2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 0 \Leftrightarrow A=\mathbb{R}^*$ στο οποίο το όριο έχει έννοια και το εξετάζω.

$$\forall x\in A,\ f(x)=\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x^2}=\frac{2\eta\mu^2\frac{x}{2}}{x^2}=2\left(\frac{\eta\mu\frac{x}{2}}{x}\right)^2=2\cdot\left(\frac{1}{2}\,\frac{\eta\mu\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\qquad (1)$$

Έστω $g(x)=\dfrac{x}{2}=y$ και $h(y)=\dfrac{\eta\mu x}{x} \Rightarrow \dfrac{\eta\mu\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=h(g(x))$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}x=0\\ \qquad g(x)\neq 0\ ,\gamma\iota\alpha\ x=0\\ \qquad \lim\limits_{y\to 0}h(y)=1\end{array}\right)\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=1 \overset{(1)}{\Longrightarrow}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\left[2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\eta\mu\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\right]=2\left(\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 1\right)^2=\frac{1}{2}$$

3) $f(x)=\dfrac{\text{συν}x-\text{συν}\frac{\pi}{4}}{\text{ημ}x-\text{ημ}\frac{\pi}{4}} \longrightarrow \lim\limits_{x\to\pi/4} f(x)=;$

Π.Ο. Πρέπει $\text{ημ}x-\text{ημ}\frac{\pi}{4}\neq 0 \Leftrightarrow \text{ημ}x\neq\text{ημ}\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x\neq 2\kappa\pi+\frac{\pi}{4} \wedge x\neq(2\kappa+1)\pi-\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A=\mathbb{R}-\{2\kappa\pi+\frac{\pi}{4}, (2\kappa+1)\pi-\frac{\pi}{4}\} \Rightarrow \exists\, \Delta=(\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{4})\cup(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3})\subseteq A$ στο οποίο το όριο έχει έννοια και το εξετάζω

$\forall x\in A,\ f(x)=\dfrac{\text{συν}x-\text{συν}\frac{\pi}{4}}{\text{ημ}x-\text{ημ}\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\cancel{2}\,\text{ημ}\frac{x+\frac{\pi}{4}}{2}\cdot\text{ημ}\frac{\frac{\pi}{4}-x}{2}}{\cancel{2}\,\text{ημ}\frac{x-\frac{\pi}{4}}{2}\,\text{συν}\frac{x+\frac{\pi}{4}}{2}}=-\dfrac{\text{ημ}\frac{x+\frac{\pi}{4}}{2}}{\text{συν}\frac{x+\frac{\pi}{4}}{2}}=-\text{εφ}\left(\dfrac{x+\frac{\pi}{4}}{2}\right)\Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to\pi/4} f(x)=\lim\limits_{x\to\pi/4}-\text{εφ}\left(\dfrac{x+\frac{\pi}{4}}{2}\right)\underset{1}{=}-\text{εφ}\left(\dfrac{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}}{2}\right)=-\text{εφ}\frac{\pi}{4}=-1.$

1 Θ συνθ. συναρτήσεων.

4) $f(x)=\dfrac{\text{συν}x-\text{ημ}x}{x-\frac{\pi}{4}} \longrightarrow \lim\limits_{x\to\pi/4} f(x)=;$

Π.Ο. Πρέπει $x-\frac{\pi}{4}\neq 0\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow A=\mathbb{R}-\{\frac{\pi}{4}\}$ στο οποίο το όριο έχει έννοια και το εξετάζ

$\forall x\in A,\ f(x)=\dfrac{\text{συν}x-\text{ημ}x}{x-\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\text{συν}x-\text{συν}(\frac{\pi}{2}-x)}{x-\frac{\pi}{4}}=\dfrac{2\,\text{ημ}\frac{\cancel{x}+(\frac{\pi}{2}\cancel{-x})}{2}\cdot\text{ημ}\frac{(\frac{\pi}{2}-x)-x}{2}}{x-\frac{\pi}{4}}=$

$=2\text{ημ}\frac{\pi}{4}\,\dfrac{\text{ημ}(\frac{\pi}{4}-x)}{x-\frac{\pi}{4}}=\cancel{2\text{ημ}x}-2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\text{ημ}(x-\frac{\pi}{4})}{x-\frac{\pi}{4}}=-\sqrt{2}\cdot\dfrac{\text{ημ}(x-\frac{\pi}{4})}{x-\frac{\pi}{4}}\Rightarrow$

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to\pi/4} f(x)=\lim\limits_{x\to\pi/4}\left(-\sqrt{2}\cdot\dfrac{\text{ημ}(x-\frac{\pi}{4})}{x-\frac{\pi}{4}}\right)=-\sqrt{2}\cdot\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\text{ημ}(x-\frac{\pi}{4})}{x-\frac{\pi}{4}}\underset{1}{=}-\sqrt{2}\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\text{ημ}(\frac{\pi}{4}+x-\frac{\pi}{4})}{(\frac{\pi}{4}+x)-\frac{\pi}{4}}=$

1 Αλλαγή μεταβλητής

$=-\sqrt{2}\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\text{ημ}x}{x}=-\sqrt{2}\cdot1=-\sqrt{2}.$

5) $f(x)=\dfrac{1+\text{ημ}x-\text{συν}x}{1-\text{ημ}x-\text{συν}x}\longrightarrow\lim\limits_{x\to0}f(x)=;\quad\left[\frac{0}{0}\right].$

Π.Ο. Πρέπει $1-\text{ημ}x-\text{συν}x\neq0\Leftrightarrow(1-\text{συν}x)-\text{ημ}x\neq0\Leftrightarrow2\text{ημ}^2\frac{x}{2}-2\text{ημ}\frac{x}{2}\text{συν}\frac{x}{2}\neq0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\cancel{2}\text{ημ}\frac{x}{2}\left(\text{ημ}\frac{x}{2}-\text{συν}\frac{x}{2}\right)\neq0\Leftrightarrow\begin{cases}\text{ημ}\frac{x}{2}\neq0\\ \text{ημ}\frac{x}{2}-\text{συν}\frac{x}{2}\neq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x}{2}\neq2\kappa\pi\\ \text{ημ}\frac{x}{2}\neq\text{συν}\frac{x}{2}\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq4\kappa\pi\\ \text{ημ}\frac{x}{2}\neq\text{ημ}(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2})\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq4\kappa\pi\\ \frac{x}{2}\neq2\kappa\pi+(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2})\ \wedge\ \cancel{\frac{x}{2}}\neq(2\kappa+1)\pi-(\frac{\pi}{2}-\cancel{\frac{x}{2}})\end{cases}\Leftrightarrow$

ταυτότητα

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq4\kappa\pi\\ x\neq2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}\end{cases}\Leftrightarrow A=\mathbb{R}-\{4\kappa\pi,2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}\}\Rightarrow\exists\,\Delta=(-\frac{\pi}{8},0)\cup(0,\frac{\pi}{8})\subseteq A$ στο οποίο το όριο

έχει έννοια και το μελετώ.

$\forall x\in\Delta,\ f(x)=\dfrac{1+\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x}{1-\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x}=\dfrac{(1-\sigma\upsilon\nu x)+\eta\mu x}{(1-\sigma\upsilon\nu x)-\eta\mu x}=\dfrac{2\eta\mu^2\frac{x}{2}+2\eta\mu\frac{x}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}}{2\eta\mu^2\frac{x}{2}-2\eta\mu\frac{x}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}}=$

$=\dfrac{2\eta\mu\frac{x}{2}\left(\eta\mu\frac{x}{2}+\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}\right)}{2\eta\mu\frac{x}{2}\left(\eta\mu\frac{x}{2}-\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}\right)}=\dfrac{\eta\mu\frac{x}{2}+\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}}{\eta\mu\frac{x}{2}-\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}}\Longrightarrow \lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\eta\mu\frac{x}{2}+\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}}{\eta\mu\frac{x}{2}-\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}}=$

$=\dfrac{\lim\limits_{x\to0}\left(\eta\mu\frac{x}{2}+\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}\right)}{\lim\limits_{x\to0}\left(\eta\mu\frac{x}{2}-\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}\right)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to0}\eta\mu\frac{x}{2}+\lim\limits_{x\to0}\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}}{\lim\limits_{x\to0}\eta\mu\frac{x}{2}-\lim\limits_{x\to0}\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}}=\dfrac{\eta\mu0+\sigma\upsilon\nu0}{\eta\mu0-\sigma\upsilon\nu0}=\dfrac{0+1}{0-1}=-1$

* 6) $f(x)=x\cdot\eta\mu\frac{1}{x}\longrightarrow\lim\limits_{x\to0}f(x)=;$ $\left(\bullet\ \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x}=0\right)$

Π.Ο. Πρέπει $x\neq0\Leftrightarrow A=\mathbb{R}^*$ στο οποίο το όριο έχει έννοια και το εξετάζω.

$\forall x\in A,\ f(x)=x\cdot\eta\mu\frac{1}{x}=\dfrac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$ (1)

Έστω $g(x)=\frac{1}{x}=y$, $h(y)=\dfrac{\eta\mu y}{y}\overset{(1)}{\Longrightarrow}f(x)=h(g(x))=(h\circ g)(x)$.

● Επειδή η g δεν έχει όριο στο 0, παίρνω πλευρικά όρια.

Στο $\Delta_1=(-1,0)$, $\lim\limits_{x\to0^-}g(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x}\left(=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\right)=-\infty$, διότι $\lim\limits_{x\to0^-}x=0$
και $x<0,\ \forall x\in\Delta_1$

και $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x}=0$ οπότε $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(h\circ g)(x)=0$.

Στο $\Delta_2=(0,1)$, $\lim\limits_{x\to0^-}g(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x}\left(=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\right)=+\infty$, διότι $\lim\limits_{x\to0^+}x=0$
και $x<0,\ \forall x\in\Delta_2$

και $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x}=0$ οπότε $\left(\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(h\circ g)(x)=0,\ \lim\limits_{x\to0^-}f(x)=0\right)\Longrightarrow$

$\Longrightarrow\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$. (β' τρόπος: μηδενική επί φραγμένη).

▼ Συνέχεια συνάρτησης

Ορισμός: Μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ, λέγεται συνεχής στο $x_0\in\Delta$, όταν υπάρχει το όριο της f στο x_0 και είναι $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

Συμβολικά

$$\boxed{f \text{ συνεχής στο } x_0\in\Delta\Longleftrightarrow\begin{cases}x_0\in A,\ f(x_0)\in\mathbb{R}\\ \exists\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\in\mathbb{R}\\ \lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\end{cases}}$$

Αν, δεν υπάρχει το $f(x_0)$
ή δεν υπάρχει το $\lim_{x \to x_0} f(x)$
ή υπάρχουν και τα δυο, αλλά $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ $\Big\} \Rightarrow f$ ασυνεχής στο x_0.

ΟΡΙΣΜΟΣ: $\boxed{f \text{ συνεχής στο } \Delta \Leftrightarrow \forall x_0 \in \Delta,\ f \text{ συνεχής στο } x_0}$

▼ Πλευρική συνέχεια

Εστω f μία συνάρτηση ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και $x_0 \in \Delta$. Τότε αν:

- $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow f$ συνεχής απο αριστερά στο x_0
- $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow f$ συνεχή από δεξιά στο x_0

ΑΡΑ
$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f \text{ συνεχής απο αριστερά στο } x_0 \\ f \text{ συνεχής απο δεξιά στο } x_0 \end{array}\right) \Leftrightarrow f \text{ συνεχής στο } x_0.}$$

- $\boxed{f \text{ συνεχής στο } A \Rightarrow |f| \text{ συνεχής στο } A}$

▼ Συνέχεια βασικών συναρτήσεων

I) $P \in F_{\mathbb{R}}$ πολυωνυμική $\Rightarrow P$ συνεχής στο $\mathbb{R}$.
II) $Q \in F_{\mathbb{R}}$ ρητή $\Rightarrow Q$ συνεχής στο $A \leftarrow$ Π.Ο της Q.
III) ημ συνεχής στο $\mathbb{R}$
συν συνεχής στο $\mathbb{R}$
εφ συνεχής στο $\mathbb{R} - \{k\pi + \frac{\pi}{2}\}$.
σφ συνεχής στο $\mathbb{R} - \{k\pi\}$.

▼ Συνέχεια και πράξεις

Θ. Εστω ότι οι συναρτήσεις f, g ορίζονται σε ένα διάστημα Δ.
Αν οι f, g είναι συνεχής στο $x_0 \in \Delta$ και είναι $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε:

- Οι συναρτήσεις $f+g$, $f \cdot g$, λf είναι συνεχείς στο x_0
- Αν είναι και $g(x_0) \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{g}, \frac{f}{g}$ συνεχείς στο $x_0 \in \mathbb{R}$.
- Αν είναι και $\forall x \in \Delta, f(x) \geq 0 \Rightarrow \sqrt[k]{f}$ $(k \in \mathbb{N}^*)$ συνεχ ής στο x_0.

Μεθοδοι-ασκήσεις

(1)η περίπτωση : Συνέχεια σε συνοριακό σημείο $x_0 \in A$. → Δηλ. σε σημείο όπου αλλάζει ο τύπος της συνάρτησης.

Παραδείγματα.

1) $f(x)=\begin{cases} \eta\mu x+\dfrac{\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu 2x}}{\eta\mu x} & ,x\neq 0 \\ \sqrt{2} & ,x=0 \end{cases}$ ⟶ συνέχεια; στο $x_0=0$.

Πρέπει $\eta\mu x\neq 0 \Leftrightarrow A=(\mathbb{R}-\{k\pi\})\cup\{0\}=\mathbb{R}-\{k\pi : k\in\mathbb{Z}^*\}. \Rightarrow x_0\in A$, $f(x_0)=\sqrt{2}\in\mathbb{R}$

$\forall x\in A : x\neq 0$, $f(x)=\eta\mu x+\dfrac{\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu 2x}}{\eta\mu x}=\eta\mu x+\dfrac{\sqrt{2\eta\mu^2 x}}{\eta\mu x}=\eta\mu x+\dfrac{|\eta\mu x|\sqrt{2}}{\eta\mu x}$

Βρίσκω πλευρικά όρια.

Στο $\Delta_1=\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\subseteq A \Rightarrow |\eta\mu x|=-\eta\mu x \Rightarrow \forall x\in\Delta_1$, $f(x)=\eta\mu x+\dfrac{-\eta\mu x\sqrt{2}}{\eta\mu x}=$

$=\eta\mu x-\sqrt{2} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(\eta\mu x-\sqrt{2})=\lim\limits_{x\to 0^-}\eta\mu x-\sqrt{2}=\eta\mu 0-\sqrt{2}=0-\sqrt{2}=-\sqrt{2}$.

Στο $\Delta_2=\left(0,+\frac{\pi}{2}\right)\subseteq A \Rightarrow |\eta\mu x|=\eta\mu x \Rightarrow \forall x\in\Delta_2$, $f(x)=\eta\mu x+\dfrac{(\eta\mu x)\sqrt{2}}{\eta\mu x}=$

$=\eta\mu x+\sqrt{2} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(\eta\mu x+\sqrt{2})=\lim\limits_{x\to 0^+}\eta\mu x+\sqrt{2}=\eta\mu 0+\sqrt{2}=0+\sqrt{2}=\sqrt{2}$

Αρα $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 0} f(x) \Rightarrow f$ ασυνεχής στο $x_0=0$.

~~2) $f(x)=x+\dfrac{\sqrt{x^2}}{|x|}$, $x\neq 0$~~

2) $f(x)=\begin{cases} x+\dfrac{\sqrt{x^2}}{|x|} & ,x\neq 0 \\ 1 & ,x=0 \end{cases}$ ⟶ συνέχεια στο $x_0=0$;

Π.Ο $A=\mathbb{R}. \Rightarrow x_0\in A$. $f(x_0)=1$.

$\forall x\in A, x\neq 0 : f(x)=x+\dfrac{\sqrt{x^2}}{|x|}=x+\dfrac{|x|}{|x|}=x+1 \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(x+1)=0+1=1 \\ f(0)=1\end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ συνεχής στο $x_0=0$.

3) Να βρεθεί ο $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f: f(x)=\begin{cases} \lambda\cdot\eta\mu x\ \sigma\upsilon\nu x & ,x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right] \\ \varepsilon\varphi x+2\lambda\varepsilon\varphi x & ,x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$ να είναι συνεχής στο σημείο $x_0=\frac{\pi}{4}$

$A=\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\cup\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)=\left[0,\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow x_0=\frac{\pi}{4}\in A$.

$f(\frac{\pi}{4}) = \lambda \cdot \eta\mu\frac{\pi}{4} + \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} = \lambda\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\lambda+1) \in \mathbb{R}$.

Θα μελετήσω το $\lim\limits_{x\to\pi/4} f(x)$. Παίρνω πλευρικά όρια.

Στο $\Delta_1 = [0, \frac{\pi}{4}]$, $f(x) = \lambda\cdot\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x \Longrightarrow \lim\limits_{x\to(\pi/4)^-} f(x) = \lim\limits_{x\to(\pi/4)^-}(\lambda\cdot\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) =$

$= \lim\limits_{x\to(\pi/4)^-}(\lambda\cdot\eta\mu x) + \lim\limits_{x\to(\pi/4)^-}\sigma\upsilon\nu x = \lambda\cdot\lim\limits_{x\to(\pi/4)^-}\eta\mu x + \lim\limits_{x\to(\pi/4)^-}\sigma\upsilon\nu x = \lambda\,\eta\mu\frac{\pi}{4} + \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} = \dots = \frac{\sqrt{2}}{2}(\lambda+1)$.

Στο $\Delta_2 = [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$, $f(x) = \varepsilon\varphi x + 2\lambda\varepsilon\varphi x = (1+2\lambda)\varepsilon\varphi x \Longrightarrow \lim\limits_{x\to(\pi/4)^+} f(x) = \lim\limits_{x\to(\pi/4)^+}[(1+2\lambda)\varepsilon\varphi x] =$

$= (1+2\lambda)\lim\limits_{x\to(\pi/4)^+}\varepsilon\varphi x = (1+2\lambda)\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} = (1+2\lambda)\cdot 1 = 1+2\lambda$.

f συνεχής $\Longrightarrow \exists \lim\limits_{x\to\pi/4} f(x) \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to(\pi/4)^-} f(x) = \lim\limits_{x\to(\pi/4)^+} f(x) \Longleftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(\lambda+1) = 1+2\lambda \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}(\lambda+1) = 2(1+2\lambda) \Leftrightarrow \sqrt{2}\lambda + \sqrt{2} = 2+4\lambda \Leftrightarrow (4-\sqrt{2})\lambda = \sqrt{2}-2 \Leftrightarrow \lambda = \frac{\sqrt{2}-2}{4-\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2}-2)(4+\sqrt{2})}{(4-\sqrt{2})(4+\sqrt{2})}$

$= \frac{4\sqrt{2}+2-8-2\sqrt{2}}{16-2} = \frac{2\sqrt{2}-6}{14} = \frac{\sqrt{2}-3}{7}$

Για $\lambda = \frac{\sqrt{2}-3}{7} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to(\pi/4)} f(x) = \lim\limits_{x\to(\pi/4)^+} f(x) = 1+2\lambda = 1+2\cdot\frac{\sqrt{2}-3}{7} = \frac{7+2\sqrt{2}-6}{7} = \frac{2\sqrt{2}+1}{7}$

$f(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\lambda+1) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}-3}{7}+1\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}-3+7}{7}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{\sqrt{2}+4}{7} = \frac{2+4\sqrt{2}}{14} =$

$= \frac{2\sqrt{2}+1}{7} = \lim\limits_{x\to\pi/4} f(x) \Longrightarrow f$ συνεχής στο $\pi/4$ για $\lambda = \frac{\sqrt{2}-3}{7}$. Για κάθε άλλο λ

δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to\pi/4} f(x)$ οπότε η f είναι ασυνεχής στο $\pi/4$.

4) $f(x) = \begin{cases} x^2\cdot\eta\mu\frac{1}{x} & , x\neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases} \longrightarrow$ συνέχεια στο $x_0 = 0$;

Π.Ο. $A = \mathbb{R} \Longrightarrow 0 \in A$. Είναι και $f(0) = 0 \in \mathbb{R}$.

Στο διάστημα $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, $f(x) = x^2\cdot\eta\mu\frac{1}{x} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\cdot\eta\mu\frac{1}{x}\right) = 0$, διότι

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0 \\ \varphi(x) = \eta\mu\frac{1}{x} \text{ φραγμένη από τα } \pm 1\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\cdot\eta\mu\frac{1}{x}\right) = 0$.

Είναι και $f(0) = 0 \Longrightarrow f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) \Longrightarrow f$ συνεχής στο 0

* εαν η $f\circ g$ ορίζεται σε μια $\pi(x_0)$

(2η) **περίπτωση**: Συνέχεια στο πεδίο ορισμού A της f

Εστω $A=[\alpha,\beta)\cup(\beta,\gamma)\cup[\gamma,\delta)\cup\{\varepsilon\}$ όπου ε ένα απομονωμένο σημείο του A.

- Εξετάζω την συνέχεια

i) Στα ανοικτά διαστήματα <u>και</u> στα άκρα κλειστών διαστημάτων

π.χ. στα $[\alpha,\beta)$, (β,γ), (γ,δ)

Σε αυτά, η συνάρτηση βγαίνει πάντοτε συνεχής σύμφωνα με τα θεωρήματα των πράξεων στην συνέχεια και τις βασικές συνεχείς συναρτήσεις.

ii) Στα συνοριακά σημεία του πεδίου ορισμού

π.χ. στο γ, όχι όμως στα α,β.

<u>Εξετάζω</u> την συνέχεια με τον ορισμό. (1η περίπτωση)

iii) Στα μεμονωμένα σημεία

π.χ. στο ε.

<u>δεν</u> εξετάζω την συνέχεια άλλα η συνάρτηση θεωρείται συνεχής σε αυτά.

▼ <u>Συνέχεια σύνθεσης συναρτήσεων.</u>

$$\text{Θ.}\quad \boxed{\text{Αν } \left.\begin{array}{l} g \text{ συνεχής στο } x_0 \\ f \text{ συνεχής στο } g(x_0)\end{array}\right\} \overset{*}{\Longrightarrow} f\circ g \text{ συνεχής στο } x_0.}$$

▼ <u>Συνέχεια εκθετικής-λογαριθμικής συνάρτησης.</u>

1) Η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$, $\alpha>0$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

2) Η συνάρτηση $f(x)=\log_\alpha x$, $\alpha>0$, $\alpha\neq 1$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^*_+$

Δηλαδή

- $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} \alpha^x=\alpha^{x_0},\ \forall \alpha>0, \forall x_0\in\mathbb{R}}$

- $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} \log_\alpha x=\log_\alpha x_0,\ \forall \alpha>0, \alpha\neq 1, \forall x_0\in\mathbb{R}^*_+}$

* 3) Η συνάρτηση $f(x)=x^\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}_+$.

<u>Παραδείγματα</u>

1) $f(x)=|x+3|-|5-x| \longrightarrow$ συνέχεια;

x		-3		5	
$x+3$	$-$	0	$+$		$+$
$5-x$	$+$		$+$	0	$-$

$\forall x \in (-\infty,-3]$, $|x+3| = -(x+3)$, $|5-x| = 5-x \Rightarrow f(x) = -(x+3) - (5-x) = \cancel{-2x+2}\ -8$

$\forall x \in [-3,5]$, $|x+3| = x+3$, $|5-x| = 5-x \Rightarrow f(x) = (x+3)-(5-x) = 2x-2$

$\forall x \in [5,+\infty)$, $|x+3| = x+3$, $|5-x| = x-5 \Rightarrow f(x) = (x+3)-(x-5) = +8$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} -8 & , x \in (-\infty,-3] \\ 2x-2 & , x \in [-3,5] \\ +8 & , x \in [5,+\infty) \end{cases} \qquad A = \mathbb{R}.$$

Στο $(-\infty,-3)$: $f(x) = -8$ συνεχής ως σταθερή συνάρτηση.

Στο $(-3,5)$: $f(x) = 2x-2$ συνεχής ως πολυωνυμική.

Στο $[5,+\infty)$: $f(x) = +8$ συνεχής ως σταθερή συνάρτηση.

Συνοριακά σημεία τα $-3, 5$.

Στο $x_0 = -3$, $f(x_0) = f(-3) = -8$. Εξετάζω το $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$. Παίρνω πλευρικά όρια

Στο $\Delta_1 = (-\infty,-3] \subseteq A$, $f(x) = -8 \Rightarrow \lim\limits_{x\to -3^-} f(x) = -8$

Στο $\Delta_2 = [-3,4) \subseteq A$, $f(x) = 2x-2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} (2x-2) = 2(3)-2 = -8$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to -3} f(x) = -8 = f(-3) \Rightarrow f$ συνεχής στο -3

Στο $x_0 = 5$, $f(5) = 8$. Εξετάζω το $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$. Παίρνω πλευρικά όρια.

Στο $\Delta_3 = (4,5] \subseteq A$, $f(x) = 2x-2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 5^-} (2x-2) = 2\cdot 5 - 2 = 8$

Στο $\Delta_4 = [5,6) \subseteq A$, $f(x) = +8 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = 8$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 5} f(x) = 8 = f(5) \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ συνεχής στο 5.

Αρα f συνεχής σε όλο το A.

2) $f(x) = \begin{cases} e^{x-1} & , x \in (-\infty,1] \\ 1+\ln x & , x \in (1,+\infty) \end{cases} \rightarrow$ συνέχεια;

Π.Ο. $A = (-\infty,1] \cup (1,+\infty) = \mathbb{R}$.

Στο $(-\infty,1)$: $f(x) = e^{x-1}$ ~~συνεχής~~ $\Rightarrow f = \varphi \circ g$ όπου $\varphi(x) = e^x$, $g(x) = x-1$

~~φ συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως εκθετική $\Rightarrow \varphi$ συνεχής στο $(-\infty,1)$~~

φ συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως εκθετική

g συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική $\Big\} \Rightarrow f = \varphi \circ g$ συνεχής στο $(-\infty,1)$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων

~~Στο $(1,+\infty)$: $f(x) = 1+\ln x \Rightarrow f$ συνεχής ω $\Rightarrow f = u+g$~~ όπου $u=$

Στο $(1,+\infty)$: $f(x) = 1+\ln x \Rightarrow f$ συνεχής στο $\mathbb{R}_+^*$ ως άθροισμα λογαριθμικής με σταθερή $\Rightarrow$

$\Rightarrow f$ συνεχής στο $(1,+\infty)$.

Συνοριακά σημεία τα $+1$.

Στο $x_0 = 1$, $f(1) = e^{1-1} = e^0 = 1$. Εξετάζω το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$. Παίρνω πλευρικά όρια.

Στο $\Delta_1=(-\infty,1)$, $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-} e^{x-1}=e^{1-1}=e^0=1$.

Στο $\Delta_2=(1,+\infty)$, $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(1+\ln x)=1+\lim\limits_{x\to1^+}\ln x=1+\ln 1=1+0=1$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to1} f(x)=0=f(1) \Rightarrow f$ συνεχής στο 1.

Άρα f συνεχής στο $\mathbb{R}$.

3) $f(x)=\begin{cases}\frac{\eta\mu x}{|x|}, & x\neq 0\\ \varepsilon\varphi(\eta\mu 5x), & x=0\end{cases} = \begin{cases}\frac{\eta\mu x}{-x}, & x<0\\ \varepsilon\varphi(\eta\mu 5x), & x=0\\ \frac{\eta\mu x}{x}, & x>0\end{cases}$

Π.Ο $A=\mathbb{R}$.

$\forall x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, $f(x)=-\frac{\eta\mu x}{x}$

3) $f(x)=\sigma\upsilon\nu(\eta\mu 5x)$ ⟶ συνέχεια

Π.Ο $A=\mathbb{R}$.

$f=g_1\circ(g_2\circ g_3)$ όπου $g_1(x)=\sigma\upsilon\nu x$, $g_2(x)=\eta\mu x$, $g_3(x)=5x$.

g_2 συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως τριγωνομετρική, g_3 συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμικής $\Rightarrow$ $g_2\circ g_3$ συνεχης στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων; g_1 συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως τριγωνομετρική $\Rightarrow$

$\Rightarrow f=g_1\circ(g_2\circ g_3)$ συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση συνεχών.

4) $f(x)=\ln\left(5+\eta\mu\sqrt{1-x^2}\right)$

Π.Ο. Πρέπει $\begin{cases}1-x^2\geq 0\\ 5+\eta\mu\sqrt{1-x^2}>0, \text{ ισχύει } \forall x\in\mathbb{R}\end{cases} \Leftrightarrow x^2\leq 1 \Leftrightarrow |x|\leq 1 \Leftrightarrow x\in(-1,1)$

$\Leftrightarrow A=(-1,1)$.

$f=g_1\circ\left(g_2+g_3\circ\sqrt{g_4}\right)$ όπου $g_1(x)=\ln x$, $g_2(x)=5$, $g_3(x)=\eta\mu x$, $g_4(x)=1-x^2$.

g_4 συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική $\Rightarrow$ g_4 συνεχής στο $(-1,1)$; $\forall x\in(-1,1)$, $g(x)=1-x^2\geq 0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{g_4}$ συνεχής στο $(-1,1)$ ως ρίζα συνεχους συνάρτησης; g_3 συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως τριγωνομετρική συνάρτηση $\Rightarrow$ $g_3\circ\sqrt{g_4}$ συνεχής στο $(-1,1)$ ως συνθεση συνεχών συναρτήσεων; g_2 συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως σταθερη $\Rightarrow$ $g_2+g_3\circ\sqrt{g_4}$ συνεχης στο

$(-1,1)$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων
g_1 συνεχής στο $\mathbb{R}^*$
$\forall x \in (-1,1)$, $(g_2+g_3 \circ \sqrt{g_4})(x) = 5+\eta\mu\sqrt{1-x^2} > 0$
$\Rightarrow f = g_1 \circ (g_2 + g_3 \circ \sqrt{g_4})$ συνεχής στο $(-1,1)$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων που ορίζο στο $(-1,1)$

• 5) Να βρεθούν τα a, b ώστε η f: με

$$f(x)=\begin{cases} 1+2\eta\mu x, & x\in(-\infty,-\pi) \\ a\,\sigma\upsilon\nu x, & x\in[-\pi,0) \\ b-4\sigma\upsilon\nu^2 x, & x\in[0,+\infty) \end{cases}$$

να είναι συνεχής σε όλο το Π.Ο. της.

<u>Λύση</u>: $A=(-\infty,-\pi)\cup[-\pi,0)\cup[0,+\infty)=\mathbb{R}$.

Στο $(-\infty,-\pi)$, $f=g_1+2g_2$ όπου $g_1(x)=1$, $g_2(x)=\eta\mu x$.
g_2 συνεχής ως τριγωνομετρική $\Rightarrow 2g_2$ συνεχής ως γινόμενο συνεχούς με αριθμό
g_1 συνεχής ως σταθερή
$\Rightarrow f=g_1+2g_2$ συνεχής ως άθροισμα συνεχών.

Στο $(-\pi,0)$, $f(x)=a\,\sigma\upsilon\nu x$ συνεχής ως γινόμενο αριθμού με συνεχή συνάρτηση. (τριγωνομετρική)

Στο $(0,+\infty)$, $f=g_1-4g_2^2$ όπου $g_1(x)=b$, $g_2(x)=\sigma\upsilon\nu x$
g_2 συνεχής ως τριγωνομετρική $\Rightarrow g_2^2$ συνεχής ως γινόμενο συνεχών $\Rightarrow -4g_2^2$ συνεχής ως γινόμενο συνεχούς με αριθμό
g_1 συνεχής ως σταθερή
$\Rightarrow f=g_1-4g_2^2$ συνεχής ως άθροισμα συνεχών.

Συνοριακά σημεία τα $-\pi, 0$. στα οποία
$f(-\pi)=a\,\sigma\upsilon\nu(-\pi)=a\,\sigma\upsilon\nu\pi=-a$
$f(0)=b-4\sigma\upsilon\nu^2 0=b-4$

f συνεχής στο $A \Leftrightarrow f$ συνεχής στα $-\pi, 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to-\pi^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-\pi^+} f(x) = -a \\ \lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} f(x) = b-4 \end{cases}$

$\exists \Delta=(-\infty,-\pi)\subseteq A$ στο οποίο έχει έννοια και εξετάζω το
$\lim\limits_{x\to-\pi^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-\pi^-}(1+2\eta\mu x) = 1+2\lim\limits_{x\to-\pi^-}\eta\mu x = 1+2\eta\mu(-\pi) = 1-2\eta\mu\pi = 1$

$\exists \Delta=(-\pi,0)\subseteq A$ στο οποίο έχει έννοια και εξετάζω το
$\lim\limits_{x\to-\pi^+} f(x) = \lim\limits_{x\to-\pi^+}(a\,\sigma\upsilon\nu x) = a\lim\limits_{x\to-\pi^+}\sigma\upsilon\nu x = a\,\sigma\upsilon\nu(-\pi) = a\,\sigma\upsilon\nu\pi = -a$.

$\exists \Delta=(-\pi,0)\subseteq A$ στο οποίο έχει έννοια και εξετάζω το
$\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-}(a\,\sigma\upsilon\nu x) = a\lim\limits_{x\to0^-}\sigma\upsilon\nu x = a\,\sigma\upsilon\nu 0 = a$.

$\exists\, A=(0,1)$ στο οποίο έχει έννοια και εξετάζω το
$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(b-4\,συν^2x) = b-4\lim\limits_{x\to 0^+} συν^2x = b-4(\lim\limits_{x\to 0^+} συνx)^2 = b-4\,συν^2 0 =$

$= b-4\cdot 1 = b-4.$

άρα $(\Sigma) \Leftrightarrow \begin{cases} 1=-a=-a \\ a=b-4=b-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b-4=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=3 \end{cases} \Leftrightarrow (a,b)=(-1,3).$

▼ Ασύμπτωτες της γρ. παράστασης συνάρτησης.

1) Οριζόντια ασύμπτωτη του διαγράμματος C της f λέμε την ευθεία (ε) με την ιδιότητα:

$$\boxed{(\varepsilon): y=\ell \text{ οριζόντια ασύμπτωτος} \Longleftrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=\ell\in\mathbb{R} \vee \lim_{x\to-\infty} f(x)=\ell\in\mathbb{R}.}$$

- Αναζητούνται μόνο σε συναρτήσεις που ορίζονται σε μία $\Pi(+\infty)$ ή $\Pi(-\infty)$
- Αν η συνάρτηση ορίζεται με διαφορετικό τύπο στο $+\infty$ απ' ότι στο $-\infty$, τότε θα βρώ και το $\lim\limits_{x\to+\infty} f$ και το $\lim\limits_{-\infty} f$, διότι μπορεί να έχω 2 οριζ. ασύμπτωτες.

2) Κατακόρυφη ασύμπτωτη

$$\boxed{(\varepsilon): x=x_0 \underset{\text{της } f}{\text{κατακόρυφη}} \text{ ασύμπτωτη} \Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x)\in\{+\infty,-\infty\} \vee \lim_{x\to x_0^+} f(x)\in\{+\infty,-\infty\}}$$

- Αναζητούνται στα σημεία ασυνέχειας δηλαδή στα (και στα σσ. του A που
  1) $x_0 \notin A$ και x_0 σσ. του A. δεν ανήκουν στο A).
  2) Συνοριακά σημεία.

3) Πλάγια ασύμπτωτη

$$\boxed{(\varepsilon): y=\lambda x+b \text{ πλάγια ασύμπτωτη της } f \Longleftrightarrow \lim_{x\to+\infty}[f(x)-(\lambda x+b)]=0 \vee \lim_{x\to-\infty}[f(x)-(\lambda x+b)]=0}$$

- Αναζητούνται (όπως και οι οριζόντιες) μόνο σε συναρτήσεις που ορίζονται στο $+\infty$ ή στο $-\infty$.
- Αν $\lambda=0$ και $b\in\mathbb{R}$, τότε η $y=\lambda x+b \Leftrightarrow y=b$, δηλ. έχω οριζόντια ασύμπτωτη.
- Η ευρεση τους στηρίζεται στο θεώρημα:

Θ) $$\boxed{\begin{matrix}(\varepsilon): y=\lambda x+b \\ \text{πλάγια ασύμπτωτη}\end{matrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lambda \wedge \lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-\lambda x]=b \\ \vee \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lambda \wedge \lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-\lambda x]=b. \end{cases}}$$

• <u>Εφαρμογή</u>: Ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της ΡΗΤΗΣ συνάρτησης Q με $Q(x)=\frac{P_1(x)}{P_2(x)}=\frac{a_\kappa x^\kappa+a_{\kappa-1}x^{\kappa-1}+\dots+a_1x+a_0}{b_\lambda x^\lambda+b_{\lambda-1}x^{\lambda-1}+\dots+b_1x+b_0}$, $a_\kappa b_\lambda\neq 0$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

i) Αν $\kappa<\lambda \Rightarrow (\varepsilon): y=0$ οριζόντια ασύμπτωτη της C_f.

ii) Αν $\kappa=\lambda \Rightarrow (\varepsilon): y=\frac{a_\kappa}{b_\lambda}$ οριζόντια ασύμπτωτη της C_f.

iii) Αν $\kappa=\lambda+1 \Rightarrow (\varepsilon): y=\frac{a_\kappa}{b_\lambda}x+g$ πλάγια ασύμπτωτη της C_f, όπου $g=\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ \text{ή } x\to-\infty}}\left(Q(x)-\frac{a_\kappa}{b_\lambda}x\right)$

iv) Αν $\kappa=\lambda+1 \Rightarrow \nexists$ πλαγια ή οριζοντια ασύμπτωτη διότι $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{Q(x)}{x}=\infty$.

• ⟶ Αν η Q δεν ορίζεται στο $x_0\in\mathbb{R}$, δηλαδή ο x_0 είναι ρίζα του $P_2(x)$ βαθμού πολλαπλότητας μ., τότε:

a) Αν x_0 όχι ρίζα $P_1(x)$ $\vee$ x_0 ρίζα $P_1(x)$ με β.πολ.$<\mu$ $\Bigr\} \Rightarrow (\varepsilon): x=x_0$ κατακόρυφη ασύμπτωτη της C.

b) Αν x_0 ρίζα $P_1(x)$ με β.πολ$\geq\mu \Rightarrow (\varepsilon): x=x_0$ δεν είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη

• f πολυωνυμική ~~στο~~ $A \Rightarrow \nexists$ οριζόντιες ή κατακόρυφες ασύμπτωτες.
• f συνεχής στο $\mathbb{R} \Rightarrow f$ δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες
• f συνεχής στο $A \Rightarrow f$ δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτο $(\varepsilon): x=x_0$ με $x_0\in A$.

• <u>Παρατήρηση</u>: ΕΑΝ η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη <u>και</u> στο $+\infty$ <u>και</u> στο $-\infty$, τότε οι πλάγιες ασύμπτωτες θα συμπίπτουν με τις οριζόντιες και δεν τις μελετω. Εαν όμως έχει οριζοντια ασύμπτωτή μόνο, π.χ. στο $+\infty$, τότε μπορεί να έχει πλάγια στο $-\infty$. Γι' αυτό όταν εξετάζω τις οριζόντιες ασύμπτωτες, "καλό είναι" να παίρνω <u>και τα δύο</u> όρια.

<u>Εξήγηση</u>

Εστω $(\varepsilon_1): y=l_1$ οριζοντια ασύμπτωτη στο $+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l_1$ (1)

$(\varepsilon_2): y=l_2$ οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=l_2$ (2)

οπότε αν $(\varepsilon): y=\lambda x+b$ πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$, τότε

$$\lambda=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot\lim_{x\to+\infty}f(x)=0\cdot l_1=0 \Rightarrow b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\cancelto{0}{\lambda}x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=l_1$$

οπότε $(\varepsilon): y=l_1 \Rightarrow \varepsilon\equiv\varepsilon_1$.

Ομοια, αν $(\varepsilon'): y=\lambda x+b$ πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty \Rightarrow \varepsilon'\equiv\varepsilon_2$

Παραδείγματα

1) Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της $f(x)=x^3-x^2+1$.

Π.Ο. $A=\mathbb{R}$.

• Οριζόντιες ασύμπτωτες.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3-x^2+1)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3-x^2+1)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$ $\Rightarrow \nexists$ οριζόντιες ασύμπτωτες.

• Κατακόρυφες ασύμπτωτες

f συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική $\Rightarrow \forall x_0\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\notin\{+\infty,-\infty\}\Rightarrow$
$\Rightarrow$ Η f δεν έχει κατακόρυφες ασυμπτωτες.

• Πλάγιες ασύμπτωτες (● Ειδικά εδω δουλεύω με τον ορισμό)

~~$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}$~~ Εστω $(\varepsilon): y=\lambda x+b$ πλαγια ασύμπτωτος.

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(\lambda x+b)]=\lim\limits_{x\to+\infty}[x^3-x^2+1-\lambda x-b]=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3-x^2-\lambda x+(1-b))=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$, $\forall\lambda,b\in\mathbb{R}$

και $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(\lambda x+b)]=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3-x^2-\lambda x+(1-b))=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$, $\forall\lambda,b\in\mathbb{R}$.

άρα η f δεν έχει ασύμπτωτες. πλάγιες.

2) $f(x)=\dfrac{(x+2)^3}{8x^2(x-2)}$

Π.Ο. $A=\mathbb{R}-\{0,2\}$.

• Οριζόντιες ασύμπτωτες

$\exists\,\Delta=(0,+\infty)\subseteq A$ στο οποίο το $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ έχει έννοια και το εξετάζω.

$\forall x\in\Delta$, $f(x)=\dfrac{(x+2)^3}{8x^2(x-2)}=\dfrac{x^3+6x^2+12x+8}{8x^3-16x^2}\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+6x^2+12x+8}{8x^3-16x^2}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{8x^3}=\dfrac{1}{8}\Rightarrow(\varepsilon): y=\dfrac{1}{8}$ οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Η ίδια η (ε) είναι ασύμπτωτη και στο $-\infty$.

• Κατακόρυφες ασύμπτωτες

f συνεχής στο A ως ρητή $\Rightarrow\forall x_0\in A$, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\neq\pm\infty\Rightarrow\forall x_0\in A$, $(\varepsilon): x=x_0$
δεν είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Το $0^{\notin A}$ είναι σημείο συσσώρευσης του A, άρα εξετάζω αν η $(\varepsilon): x=0$

$\exists\, \Delta = (-1,1)-\{0\}$

είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη

~~$\exists\,\Delta=(-\infty,0)\subseteq A$~~ στο οποίο έχει έννοια και εξετάζω το

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{(x+2)^3}{8x^2(x-2)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{(x+2)^3}{8(x-2)} \cdot \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2} \quad (1)$$

Είναι $\displaystyle \lim_{x\to 0^-} \frac{(x+2)^3}{8(x-2)} = \frac{\lim_{x\to 0^-} (x+2)^3}{\lim_{x\to 0^-} 8(x-2)} = \frac{(0+2)^3}{8(0-2)} = \frac{8}{-8\cdot 2} = -\frac{1}{2}$

$x^2>0,\ \forall x\in\Delta$, $\lim_{x\to 0^-} x^2 = 0$ $\Rightarrow \displaystyle \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^2} = +\infty$

$\overset{(1)}{\Rightarrow} \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $(\varepsilon): x=0$ κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f στο 0 από αριστερά και από δεξιά.

~~Ομοια $\lim_{x\to 0^+} f(x) =$~~

Το $2\notin A$ είναι σημείο συσσώρευσης του A, άρα εξετάζω την $(\varepsilon): x=2$.

$\exists\, \Delta = (1,2) \subseteq A$ στο οποίο έχει έννοια και εξετάζω το

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{(x+2)^3}{8x^2(x-2)} = \lim_{x\to 2^-} \frac{(x+2)^3}{8x^2} \cdot \lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x-2} \quad (2)$$

Είναι $\displaystyle \lim_{x\to 2^-} \frac{(x+2)^3}{8x^2} = \frac{(2+2)^3}{8\cdot 2^2} = \frac{2^6}{2^5} = 2$

$x-2<0,\ \forall x\in\Delta$, $\lim_{x\to 2^-}(x-2) = 2-2 = 0$ $\Rightarrow \displaystyle \lim_{x\to 2^-}\frac{1}{x-2} = -\infty$

$\overset{(2)}{\Rightarrow} \lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty \Rightarrow (\varepsilon): x=2$ κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f στο 0 από αριστερά.

$\exists\, \Delta = (2,3) \subseteq A$ στο οποίο έχει έννοια και εξετάζω το

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{(x+2)^3}{8x^2(x-2)} = \lim_{x\to 2^+} \frac{(x+2)^3}{8x^2} \cdot \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} \quad (3)$$

Είναι $\displaystyle \lim_{x\to 2^+} \frac{(x+2)^3}{8x^2} = \frac{(2+2)^3}{8\cdot 2^2} = 2$

$x-2>0,\ \forall x\in\Delta$, $\lim_{x\to 2^+}(x-2) = 0$ $\Rightarrow \displaystyle \lim_{x\to 2^+}\frac{1}{x-2} = +\infty$

$\Rightarrow \lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty \Rightarrow (\varepsilon): x=2$ κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f στο 2 από δεξιά (και αριστερά)

• <u>Πλάγιες ασύμπτωτες</u>: Συμπίπτουν με τις ~~κατω~~ οριζόντιες

3) $f(x)=\sqrt{x^2+2x+5}$

Π.Ο. Πρέπει $x^2+2x+5\geq 0$, ισχύει $\forall x\in\mathbb{R}$ (διότι $a=1$, $\Delta=-16<0$) $\Rightarrow A=\mathbb{R}$.

• Οριζόντιες ασύμπτωτες

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+2x+5)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty\\ x^2+2x+5\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2x+5}=+\infty\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Η C_f δεν έχει οριζόντιες ασύμπτωτες.

• Κατακόρυφες ασύμπτωτες

$$\left.\begin{array}{l}g(x)=x^2+2x+5 \text{ συνεχής στο } \mathbb{R} \text{ ως πολυωνυμική}\\ g(x)=x^2+2x+5\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\end{array}\right\}\Rightarrow f(x)=\sqrt{x^2+2x+5} \text{ συνεχής στο } \mathbb{R} \text{ ως ρίζα}$$

συνεχούς συνάρτησης $\Rightarrow \forall x_0\in\mathbb{R},\ \lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim f(x_0)\neq\pm\infty\Rightarrow$ Η C_f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

• Πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ έστω η $(\varepsilon): y=\lambda x+\beta$.

$\exists\ \Delta=(0,+\infty)$ στο οποίο έχει έννοια το $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ και το $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-\lambda x]$ και τα εξετάζω.

$$\forall x\in\Delta,\ |x|=x\Rightarrow \frac{f(x)}{x}=\frac{\sqrt{x^2+2x+5}}{x}=\frac{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}}{x}=\frac{x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}}{x}=$$

$$=\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}\Rightarrow \lambda=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}=\sqrt{\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}=1$$

$$\text{άρα } \forall x\in\Delta,\ f(x)-\lambda x=\sqrt{x^2+2x+5}-x=\frac{(\sqrt{x^2+2x+5}-x)(\sqrt{x^2+2x+5}+x)}{\sqrt{x^2+2x+5}+x}=$$

$$=\frac{(x^2+2x+5)-x^2}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}+x}=\frac{2x+5}{x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}+x}=\frac{x\left(2+\frac{5}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}+1\right)}=\frac{2+\frac{5}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}+1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-\lambda x]=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{5}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}+1}=\frac{2+0}{\sqrt{1+0+0}+1}=1$$

οπότε $(\varepsilon): y=x+1$ πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

• Πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$: Έστω η $(\varepsilon): y=\lambda x+\beta$.

$\exists\ \Delta=(-\infty,0)$ στο οποίο έχει έννοια το $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ και το $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-\lambda x]$ και τα εξετάζω.

$$\forall x\in\Delta,\ |x|=-x\Rightarrow\frac{f(x)}{x}=\frac{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}}{x}=\frac{-x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}}{x}=$$

$$=-\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}\Rightarrow\lambda=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}\right)=-\sqrt{1+0+0}=-1$$

$$\text{άρα } \forall x\in\Delta,\ f(x)-\lambda x=\sqrt{x^2+2x+5}+x=[\infty\overset{!!}{-}\infty]=\frac{(\sqrt{x^2+2x+5}+x)(\sqrt{x^2+2x+5}-x)}{\sqrt{x^2+2x+5}-x}$$

$$= \frac{(x^2+2x+5)-x^2}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}-x} = \frac{2x+5}{-x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}-x} = \frac{x\left(2+\frac{5}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}+1\right)} = -\frac{2+\frac{5}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}+1} \Longrightarrow$$

$$\rightarrow b = \lim_{x\to-\infty}[f(x)-\lambda x] = \lim_{x\to-\infty}\frac{-\left(2+\frac{5}{x}\right)}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}+1} = \frac{-(2+0)}{\sqrt{1+0+0}+1} = -1$$

οπότε $(\varepsilon): y=-x-1$ πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.
Άρα η C_f έχει δύο πλάγιες ασύμπτωτες τις
$(\varepsilon): y=x+1$, $(\varepsilon'): y=-x-1$.

4) $f(x) = 6-\frac{|x+3|}{x}$

Π.Ο. $A=\mathbb{R}-\{0\}$.

x		-3		0	
$x+3$	$-$	0	$+$	$\|$	$+$

άρα $f(x)=\begin{cases} 6+\frac{x+3}{x}, & x\in(-\infty,-3) \\ 6-\frac{x-3}{x}, & x\in(-3,0)\cup(0,+\infty)\end{cases}$

• Οριζόντιες ασύμπτωτες

$\exists\, \Delta=(-\infty,-3)$ στο οποίο έχει έννοια και εξετάζω το
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(6+\frac{x+3}{x}\right) = 6+\lim_{x\to-\infty}\frac{x+3}{x} = 6+\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x} = 6+1=7 \rightarrow (\varepsilon): y=7$ οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

$\exists\, \Delta=(0,+\infty)$ στο οποίο έχει έννοια και εξετάζω το
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(6-\frac{x+3}{x}\right) = 6-\lim_{x\to+\infty}\frac{x+3}{x} = 6-\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x} = 6-1=5 \Longrightarrow (\varepsilon): y=5$ οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

• Κατακόρυφες ασύμπτωτες

Στο $(-\infty,-3)$, $f(x)=6+\frac{x+3}{x} = \frac{6x+x+3}{x} = \frac{7x+3}{x}$ συνεχής ως ρητή $\Longrightarrow$
$\Longrightarrow \forall x_0\in(-\infty,-3)$, $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)\neq\pm\infty \Longrightarrow \forall x_0\in(-\infty,-3)$, $x=x_0$ όχι κάθετη ασύμπτωτη.

Στο $(-3,0)\cup(0,+\infty)$, $f(x)=6-\frac{x+3}{x} = \frac{6x-x-3}{x} = \frac{5x-3}{x}$ συνεχής ως ρητή $\Longrightarrow$
$\Longrightarrow \forall x_0\in(-3,0)\cup(0,+\infty)$, $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)\neq\pm\infty \Longrightarrow \forall x_0\in(-3,0)\cup(0,+\infty)$, $x=x_0$ όχι κάθετη ασύμπτωτη.

Συνοριακό σημείο το -3 το οποίο εξετάζω.

$\exists\, \Delta=(-\infty,-3)\subseteq A$ στο οποίο το όριο έχει έννοια και το εξετάζω
$\lim_{x\to-3^-} f(x) = \lim_{x\to-3^-}\left(6+\frac{x+3}{x}\right) = 6+\frac{-3+3}{-3} = 6\neq\pm\infty \Longrightarrow (\varepsilon): x=-3$ όχι κατακόρυφος ασύμπτωτος από αριστερά

~~το $0\notin A$ είναι σημείο συσσώρευσης του A και το εξετάζω.~~

$\exists\ \Delta=(-3,0)$ στο οποίο το όριο έχει έννοια και το εξετάζω

$\lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -3^+}\left(6 - \frac{x+3}{x}\right) = 6 - \frac{-3+3}{-3} = 6 \neq \pm\infty \Rightarrow$ Η (ε): $x=-3$ όχι κατακόρυφος ασύμπτωτος από δεξιά (και αριστερά).

Το $0 \notin A$ είναι σημείο συσσώρευσης του A άρα το εξετάζω.

$\exists\ \Delta=(-3,0)\subseteq A$ στο οποίο το όριο έχει έννοια και το εξετάζω:

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}\left(6 + \frac{x+3}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{7x+3}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-}(7x+3)\cdot\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}$ (1).

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-}(7x+3)=3$,
$\left.\begin{array}{l} x<0,\ \forall x\in(-3,0) \\ \lim\limits_{x\to 0^-} x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x} = -\infty$
$\overset{(1)}{\Rightarrow} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty \Rightarrow$ Η (ε): $x=0$ είναι κάθετη ασύμπτωτος από αριστερά.

$\exists\ \Delta=(0,+\infty)\subseteq A$ στο οποίο το όριο έχει έννοια και το εξετάζω:

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(6 - \frac{x+3}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{5x-3}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0^+}(5x-3)\cdot\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}$ (2)

Είναι $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0 \\ x>0,\ \forall x\in\Delta \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+}(5x-3) = -3 \end{array}\right\} \overset{(1)}{\Rightarrow} \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Η (ε): $x=0$ είναι κάθετη ασύμπτωτος από δεξιά

• <u>Πλάγιες ασύμπτωτες</u>: Συμπίπτουν με τις οριζόντιες (ε_1): $y=5$
(ε_2): $y=7$.

5) $f(x)=\sqrt{x^2-25}$

Π.Ο. Πρέπει $x^2-25>0 \Leftrightarrow A=(-\infty,-5)\cup(5,+\infty)$.

x		-5		5	
x^2-25	$+$	0	$-$	0	$+$

• <u>Οριζόντιες ασύμπτωτες</u>

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-25) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \\ \forall x\in(5,+\infty),\ x^2-25>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-25} = +\infty \Rightarrow \nexists$ οριζόντιες ασύμπτωτες στο $+\infty$ και $-\infty$.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-25) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty \\ \forall x\in(-\infty,5),\ x^2-25>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-25} = +\infty \Rightarrow \nexists$ οριζόντιες ασύμπτωτες στο $-\infty$.

Άρα η C_f δεν έχει οριζόντιες ασύμπτωτες.

• Κατακόρυφες ασύμπτω

• Έστω $f\in F_A$.

$\lim_{\sigma} f = L \Rightarrow \forall (a_\nu): a_\nu\in A, a_\nu\neq\sigma\ (\forall \nu>k\in\mathbb{N}^*) \wedge \lim a_\nu=\sigma : \lim f(a_\nu)=L$

• Έστω $f\in F_A$

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x)=L \Leftrightarrow \left(\forall(a_\nu): \begin{matrix} a_\nu\in A-\{x_0\}\\ \lim a_\nu = x_0\end{matrix} \Rightarrow \lim f(a_\nu)=L\right)}$$

(Βλέπε βιβλίο Ακολουθίες)

• Αν $\sigma=+\infty$ και $a_\nu=\nu$, το πόρισμα δίνει

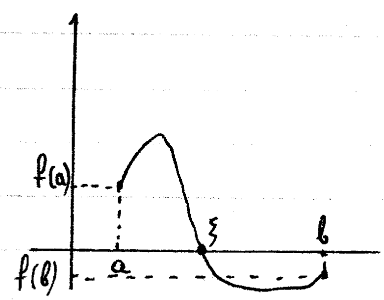
$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=L \Rightarrow \lim f(\nu)=L}$$

<u>Παράδειγμα</u>: Η συνάρτηση $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$ δεν έχει όριο στο $+\infty$

▼ <u>Συνέχεια σε κλειστό διάστημα</u>

<u>ΒΑΣΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ (Bolzano-Weierstrass)</u>

$$\boxed{\left.\begin{matrix} f \text{ συνεχής στο } [a,b] \\ f(a)\cdot f(b)<0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \exists\, \xi\in(a,b): f(\xi)=0}$$



• Ειδικά αν $\left.\begin{matrix} f \text{ συνεχής στο } [a,b] \\ f(a)\cdot f(b)<0 \\ f \text{ γνησίως μονότονη στο } [a,b]\end{matrix}\right\} \Rightarrow \exists$ ΜΜΛ. $x_0\in(a,b): f(x_0)=0$.

<u>Παραδείγματα</u>

1) Δείξτε ότι η εξίσωση $\eta\mu(\sigma\upsilon\nu 3x)=0$ έχει λύση στο $(0,\pi)$.

<u>Λύση</u>: Θέτω $f(x)=\eta\mu(\sigma\upsilon\nu 3x)$.

Π.Ο. $A=\mathbb{R}$.

Είναι $f=g_1\circ(g_2\circ g_3)$ όπου $g_1(x)=\eta\mu x$, $g_2(x)=\sigma\upsilon\nu x$, $g_3(x)=3x$

$\left.\begin{matrix} g_2 \text{ συνεχής στο } \mathbb{R} \text{ ως τριγωνομετρική} \\ g_3 \text{ συνεχής στο } \mathbb{R} \text{ ως πολυωνυμική}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} g_2\circ g_3 \text{ συνεχής ως σύνθεση συνεχών} \\ g_1 \text{ συνεχής ως τριγονομετρική}\end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow f=g_1\circ(g_2\circ g_3)$ συνεχής ως σύνθεση συνεχών

$\left.\begin{matrix} f(0)=\eta\mu(\sigma\upsilon\nu 0)=\eta\mu 1 \\ f(\pi)=\eta\mu(\sigma\upsilon\nu \pi)=\eta\mu(-1)=-\eta\mu 1\end{matrix}\right\} \Rightarrow f(0)\cdot f(\pi)=-\eta\mu^2 1<0 \Big\} \xrightarrow[W]{B} \exists\, x_0\in(0,\pi): f(x)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Η $\eta\mu(\sigma\upsilon\nu 3x)=0$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο $(0,\pi)$.

2) Δείξτε ότι η εξίσωση $εφx - ημ^2x = συν^2x - x$
έχει μία μόνο λύση στο διάστημα $(0,1)$.

Είναι $εφx - ημ^2x = συν^2x - x \Leftrightarrow εφx + x - ημ^2x - συν^2x = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow εφx + x - 1 = 0$ (4) Θέτω $f(x) = εφx + x - 1$ με $\cancel{A=(0,1)}$. $A=[0,1]$

$f = g_1 + g_2$ όπου $g_1(x) = εφx$, $g_2(x) = x - 1$.

$\left.\begin{array}{l} g_1 \text{ συνεχής στο } [0,1] \text{ ως τριγωνομετρική} \\ g_2 \text{ συνεχής στο } [0,1] \text{ ως πολυωνυμική} \end{array}\right\} \Rightarrow f = g_1 + g_2$ συνεχής ως άθροισμα συνεχών. (1)

$\left.\begin{array}{l} f(0) = εφ0 + 0 - 1 = -1 \\ f(1) = εφ1 + 1 - 1 = εφ1 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0)\cdot f(1) = -εφ1 < 0.$ (2).
(διότι $0 < 1 < \frac{\pi}{2} \Rightarrow εφ1 > 0 \Rightarrow -εφ1 < 0$)

$\left.\begin{array}{l} \text{Στο } (0,1) \subset (0, \frac{\pi}{2}) \text{ η } g_1(x) = εφx \nearrow \\ \text{και η } g_2(x) = x - 1 \nearrow \text{ (διότι } a = 1 > 0) \end{array}\right\} \Rightarrow f = g_1 + g_2 \nearrow$ (3).

οπότε (1),(2),(3) $\xRightarrow[W]{B} \exists\, x_0 \in (0,1): f(x) = εφx + x - 1 = 0 \xRightarrow{(4)} \exists\, x_0 \in (0,1): εφx - ημ^2x = συν^2x - x.$

3) Δίνεται η συνάρτηση $f: f(x) = \begin{cases} x^2 + 3, & x \in [-3,0) \\ -x^2 - 3, & x \in [0,3] \end{cases}$

Να εξεταστεί αν υπάρχει
$x_0 \in (-3,3)$ ώστε $f(x_0) = 0$

Π.Ο $A = [-3,0) \cup [0,3]$

Είναι $\forall x \in [-3,0)$, $x^2 \geq 0$ (ως τέλειο τετράγωνο) $\Rightarrow x^2 + 3 \geq 3 > 0 \Rightarrow f(x) > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x) \neq 0$. και επίσης
$\forall x \in [0,3]$, $-x^2 \leq 0 \Rightarrow -x^2 - 3 \leq -3 < 0 \Rightarrow f(x) < 0 \Rightarrow f(x) \neq 0$.

Άρα $\forall x \in A$, $f(x) \neq 0 \Rightarrow \nexists\, x_0 \in A: f(x_0) = 0$.

<u>Εφαρμογή 1</u>: $\boxed{\forall a \in \mathbb{R}_+, \cancel{\exists} \forall \nu \in \mathbb{N}^*, \exists\, x \in \mathbb{R}: x^\nu = a}$ (ύπαρξη νιοστής ρίζας).

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $\nu \in \mathbb{N}^*$ και $a > 0$, $a \in \mathbb{R}$.
Θέτω $f(x) = x^\nu - a$.

$\left.\begin{array}{l} f(0) = -a < 0 \\ f(a+1) = (a+1)^\nu - a \geq a + 1 - a = 1 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(0)\cdot f(a+1) < 0 \\ f \text{ συνεχής στο } [0, a+1] \\ \text{(ως πολυωνυμική)} \end{array}\right\} \xRightarrow[W]{B}$

$\Rightarrow \exists\, x_0 \in (0, a+1): f(x_0) = 0 \Rightarrow \exists\, x_0 \in \mathbb{R}: x_0^\nu - a = 0 \Rightarrow \exists\, x_0 \in \mathbb{R}: x_0^\nu = a$.

<u>Εφαρμογή 2</u>: $\boxed{\left.\begin{array}{l} P(x) \text{ πολυώνυμο} \\ β_P = 2k+1, \ k \in \mathbb{N} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, x_0 \in \mathbb{R}: P(x_0) = 0.}$

Απόδειξη :

Έστω $P(x) = a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ με $a_v \neq 0$, $v = 2k+1$. όπου $k \in \mathbb{N}$.

• Αν $a_v > 0$,

$$\lim_{x \to +\infty} P(x) = \lim_{x \to +\infty} (a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \cdots + a_1 x + a_0) = \lim_{x \to +\infty} a_v x^v = a_v \lim_{x \to +\infty} x^{2k+1} = +\infty \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow \exists x_1 \in \mathbb{R} : P(x_1) > 0.$ (1)

$$\lim_{x \to -\infty} P(x) = \lim_{x \to -\infty} (a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \cdots + a_1 x + a_0) = \lim_{x \to -\infty} a_v x^v = a_v \lim_{x \to -\infty} x^{2k+1} = -\infty \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow \exists x_2 \in \mathbb{R} : P(x_2) < 0$ (2). Έστω ~~a = max{~~ $a = \min\{x_1, x_2\}$, $b = \max\{x_1, x_2\}$.

P συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική $\Longrightarrow$ P συνεχής στο $[a,b]$
$(1),(2) \Longrightarrow P(a) \cdot P(b) < 0$ $\overset{B-W}{\Longrightarrow}$

$\Longrightarrow \exists\, x_0 \in (a,b) : P(x_0) = 0 \Longrightarrow \exists x_0 \in \mathbb{R} : P(x_0) = 0.$

• Αν $a_v < 0$, τότε για το $(-P)(x) = -a_v x^v - a_{v-1} x^{v-1} - \cdots - a_1 x - a_0$

$\exists\, x_0 \in \mathbb{R} : (-P)(x_0) = 0 \Longrightarrow -P(x_0) = 0 \Longrightarrow P(x_0) = 0.$

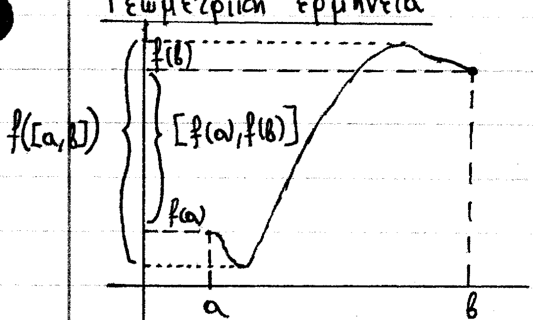
Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών : Έστω ότι η συνάρτηση f:

- είναι συνεχής στο διάστημα $[a,b]$ με
- $f(a) \neq f(b)$. Τότε η f παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ των $f(a), f(b)$.

Συμβολικά:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f \text{ συνεχής στο } [a,b] \\ f(a) \neq f(b) \end{array}\right\} \Longrightarrow [f(a), f(b)] \subseteq f([a,b])}$$

Γεωμετρική ερμηνεία



• Διαστήματα Δ λέγονται όλα τα σύνολα της μορφής
$(-\infty, a), (-\infty, a], (a, +\infty), [a, +\infty), (a,b), [a,b), (a,b], [a,b], (-\infty, +\infty)$.

$$\boxed{\Delta \text{ διάστημα} \Longleftrightarrow \forall n_1, n_2 \in \Delta,\ [n_1, n_2] \subseteq \Delta}$$

• $$\boxed{\left.\begin{array}{l} f \text{ μη σταθερή} \wedge f \text{ συνεχής στο } \Delta \\ \Delta \text{ διάστημα} \end{array}\right\} \Longrightarrow f(\Delta) \text{ διάστημα.}}$$

▼ Συνέχεια αντίστροφης συνάρτησης

Θ.
$$\left.\begin{array}{l} f \text{ συνεχής στο } \Delta \\ f \text{ γνησίως μονότονη στο } \Delta \\ \Delta \text{ διάστημα} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f:\Delta\to f(\Delta) \text{ "1-1" και "επί"} \\ \wedge \\ f^{-1} \text{ συνεχής στο } f(\Delta). \end{array}\right.$$

Για την f^{-1} επίσης ισχύει ότι είναι γνησίως μονότονη στο $f(\Delta)$ και μάλιστα με το ίδιο είδος μονοτονίας.

▼ Πεδίο τιμών συνεχούς συνάρτησης.

Θ1.
$$\boxed{f \text{ συνεχής στο } [a,b] \Rightarrow \exists\, \xi_1,\xi_2 \in [a,b] : \forall x\in[a,b],\ f(\xi_1)\leq f(x)\leq f(\xi_2)}$$

- Στο $[a,b]$ η f παρουσιάζει μέγιστο $M=f(\xi_2)$ και ελάχιστο $\mu=f(\xi_1)$.
- Αν $\mu\neq M$ τότε από το θ. ενδιάμεσων τιμών

$$f([a,b])=[f(\xi_1),f(\xi_2)] \quad \text{άρα,}$$

Πόρισμα
$$\left.\begin{array}{l} f \text{ συνεχής στο } \Delta \\ \Delta \text{ κλειστό διάστημα} \end{array}\right\} \Rightarrow f(\Delta) \text{ κλειστό διάστημα}$$

Θ2.
$$\left.\begin{array}{l} f:(a,b)\to\mathbb{R} \text{ συνεχής} \\ f \text{ γνησίως μονότονη} \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_a f,\ \lim_b f\in\overline{\mathbb{R}} \wedge f(A)=(\lim_a f,\ \lim_b f) : a,b\in\overline{\mathbb{R}}$$

▼ Ιδιότητες εκθετικής και λογαριθμικής συνάρτησης

1) $\boxed{f_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R} : f_a(x)=a^x \text{ συνεχής στο } \mathbb{R}}$

- $\lim\limits_{x\to x_0} a^x=a^{x_0}$
- $\lim\limits_{x\to 0} a^x=1$, $\lim\limits_{x\to 0} e^x=1$.

2) $\boxed{(x_\nu) \text{ συγκλίνουσα} \Rightarrow \forall a>0,\ \lim a^{x_\nu}=a^{\lim x_\nu}}$

3) $\boxed{\forall a\in\mathbb{R} : \lim\left(1+\frac{a}{\nu}\right)^\nu=e^a}$ • $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

4) $\boxed{\forall x\in\mathbb{R} : e^x\geq 1+x}$

Εφαρμογές - Θεωρία

① i) $a>1 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty \wedge \lim_{x\to-\infty} a^x = 0$

ii) $0<a<1 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} a^x = 0 \wedge \lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$

② $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1}$

5) $\boxed{\log_a \text{ συνεχής στο } \mathbb{R}_+^* \text{ , } \forall a\in\mathbb{R}_+^* - \{1\}}$

- $\lim_{x\to x_0} \log_a x = \log_a x_0$
- $\forall x\in\mathbb{R}_+^*: \ln x \leq x-1$

Εφαρμογές - Θεωρία

① i) $\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$ ii) $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

② $\boxed{\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1}$

③ $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^a-1}{x} = a \text{ , } \forall a\in\mathbb{R}^*, \forall x\in(-1,0)\cup(0,+\infty)}$