

**Dieses Skript ist urheberrechtlich geschützt. Ich behalte mir alle Rechte vor. Eine Vervielfältigung ist nicht gestattet und strafbar.**



## **Hinweise zum Skript „Einführung in die Betriebswirtschaftslehre“**

Der Aufbau des Skriptes orientiert sich an den Inhalten des Fernuni Skriptes. Die Schwerpunkte wurden auf Inhalte gelegt, die in den Klausuren der letzten Jahre getestet wurden. Der Aufbau ist

- 1) Zusammenfassung
- 2) Beispiele
- 3) Übungsaufgaben

Da es sich um eine Zusammenfassung handelt, kann das Skript natürlich die Fernuni- Unterlagen nicht ersetzen. Ich empfehle dir, die Unterlagen der Fernuni und dieses Skript parallel durchzuarbeiten. Sehr wichtig ist es auch, das Übungsprogramm der Fernuni zu nutzen.

Du benötigst für dieses Skript kaum Vorkenntnisse. Sollte Dir dennoch eine der Grundlagen fehlen, so empfehle ich Dir zunächst den entsprechenden Inhalt (z.B. auf wikipedia) nachzulesen. Solltest du dennoch Verständnisprobleme haben, kannst du mir gerne eine email an [soenke@fernuni-online.de](mailto:soenke@fernuni-online.de) senden. Ich werde deine Fragen ausführlich beantworten.

Und zum Schluss: Bei über 200 Seiten mit Formeln, Graphiken und Aufgaben schleicht sich schnell ein Fehler ein. Dieses Skript wurde mehrfach korrigiert und dennoch enthält es sicher noch Fehler. Findest du einen inhaltlichen Fehler, wäre ich dir für eine kurze email dankbar.

Viel Spaß beim Lesen und viel Erfolg bei der Klausur!

Soenke Semmelhaack

## Inhaltsverzeichnis

<b>1.0 Grundlagen.....</b>	<b>6</b>
Aufgaben zu 1.0 .....	12
Lösungen zu 1.0 .....	12
<b>2.0 Beschaffung.....</b>	<b>14</b>
Aufgaben zu 2.0 .....	28
Lösungen zu 2.0 .....	30
<b>3.0 Produktion .....</b>	<b>32</b>
Aufgaben zu 3.0 .....	41
Lösungen zu 3.0 .....	42
<b>4.0 Kostentheorie der substitutionalen Produktionsfunktion .....</b>	<b>46</b>
Aufgaben zu 4.0 .....	52
Lösungen zu 4.0 .....	52
<b>5.0 Kostentheorie der limitationalen Produktionsfunktion.....</b>	<b>54</b>
Aufgaben zu 5.0 .....	60
Lösungen zu 5.0 .....	61
<b>6.0 Produktionsprogrammplanung .....</b>	<b>62</b>
Aufgaben zu 6.0 .....	67
Lösungen zu 6.0 .....	69
<b>7.0 Optimales Produktionsprogramm bei mehreren Engpässen / Simplex Algorithmus .....</b>	<b>72</b>
Aufgaben zu 7.0 .....	78
Lösungen zu 7.0 .....	79
<b>8.0 Absatz.....</b>	<b>81</b>
Aufgaben zu 8.0 .....	87
Lösungen zu 8.0 .....	88
<b>9.0 Der finanzwirtschaftliche Prozess.....</b>	<b>89</b>
Aufgaben zu 9.0 .....	105
Lösungen zu 9.0 .....	107
<b>10.0 Grundlagen der Investitionstheorie.....</b>	<b>109</b>
Aufgaben zu 10.0 .....	116
Lösungen zu 10.0 .....	117

<b>11.0 Unternehmensbewertung und Finanzierung</b> .....	<b>119</b>
Aufgaben zu 11.0 .....	134
Lösungen zu 11.0 .....	135
<b>12.0 Marketing</b> .....	<b>136</b>
<b>13. Organisation und Personal</b> .....	<b>140</b>
<b>14.0 Internes und externes Rechnungswesen</b> .....	<b>143</b>
Aufgaben zu 14.0 .....	158
Lösungen zu 14.0 .....	162
<b>15.0 Buchhaltung und Jahresabschluss</b> .....	<b>166</b>
Aufgaben zu 15.0 .....	180
Lösungen zu 15.0 .....	182
<b>16.0 Anhang und Lagebericht</b> .....	<b>185</b>
<b>17.0 Mathematischer Anhang</b> .....	<b>189</b>

## 1.0 Grundlagen

Wie schon in der VWL kennengelernt, gilt auch in der BWL das ökonomische Prinzip: Nach dem ökonomischen Prinzip versuchen alle Teilnehmer des Wirtschaftslebens entweder mit den gegebenen Mitteln den höchstmöglichen Nutzen zu erzielen oder einen gegebenen Nutzen mit möglichst geringem Mitteleinsatz zu erzielen.

### Maximierungsprobleme

Ziel der Betriebswirtschaftslehre ist sehr häufig die Maximierung/Minimierung einer Zielgröße.

Maximierungsprobleme können in der Betriebswirtschaftslehre in der folgenden Form auftreten:

- Gewinnmaximierung,
- Nutzenmaximierung,
- Vermögensmaximierung,
- Einkommensmaximierung,
- Umsatzmaximierung,
- Absatzmaximierung,
- Rentabilitätsmaximierung,
- Marktanteilsmaximierung.

Minimierungsprobleme gibt es nur im Bereich der Kostenminimierung.

### Mathematische Bestimmung eines Maximums/Minimums

Zur Bestimmung eines Maximums/Minimums wirst du sehr oft die einfachen Ableitungsregeln nutzen müssen. Diese findest du im Anhang. Das Maximum oder Minimum einer Funktion hat die Eigenschaft, dass die Steigung von steigend auf fallen bzw. von fallend auf steigend wechselt-sie ist in diesem Punkt also gleich Null. Da die erste Ableitung die Steigung einer Funktion wiedergibt, hat im Maximum/Minimum also die erste Ableitung eine Nullstelle. Hat man diese Nullstelle ermittelt, so muss man noch bestimmen ob es sich um ein Maximum oder ein Minimum handelt. Dazu bildet man die zweite Ableitung. Ist diese für den X-Wert der Nullstelle positiv, so handelt es sich um ein Minimum. Ist sie negativ, so handelt es sich um ein Maximum.

**Beispiel Rentabilitätsmaximierung:**

Die Rendite ist das Verhältnis von Gewinn  $G$  zu eingesetztem Kapital  $K$ .

$$R(x) = \frac{G(x)}{K(x)}$$

$x$  steht für die Produktionsmenge oder auch „Ausbringungsmenge“ oder „Output“ genannt.

Der Ausdruck  $\frac{G'(x)}{K'(x)}$  ist das Verhältnis aus Gewinnsteigerung und Kapitaleinsatzsteigerung bei einer geringen Erhöhung der Ausbringungsmenge – der Grenzgewinn des Kapitals. Der Ausdruck  $\frac{G(x)}{K(x)}$

ist der Durchschnittsgewinn des Kapitals. Im Rentabilitätsmaximum sind beide Größen gleichgroß.

Das sieht jetzt relativ kompliziert aus. Es ist daher wichtig, dass du verstehst was hier ausgesagt wird-das gilt übrigens für alle Maximierungsprobleme dieses Skriptes.

Ich möchte das oben Erläuterte an einem kurzen **Beispiel** erklären:

Angenommen ein Unternehmer hat bei einer Produktion von  $x = 100$  einen Kapitaleinsatz von 1.000 und einen Gewinn von 100. Sein Durchschnittsgewinn beträgt also 10%. Er hat die Möglichkeit seine Produktion zu erhöhen. Angenommen er produziert nun 101 Stück und sein Kapitaleinsatz steigt auf 1.010 und sein Gewinn auf 102. Der Grenzgewinn des Kapitals beträgt dann:

$$\frac{2}{10} = 20\%$$

Da sein Durchschnittsgewinn (Rentabilität) 10% ist und die Produktion einer weiteren Einheit eine Rentabilität von 20% hat, sollte er seine Produktion erhöhen und damit auch seine Rentabilität erhöhen. Angenommen er steigert auf 101 und untersucht wieder, was passiert, wenn er die Produktion auf 102 ausdehnt. Seine Durchschnittsrentabilität liegt nun bei  $\frac{102}{1.010} = 10,1\%$ . Angenommen eine Steigerung der Produktion auf 102 würde seinen Gewinn auf 103,8 erhöhen und seinen Kapitaleinsatz auf 1.020 erhöhen. Wie vorher ist die Rentabilität des zusätzlichen Produktes höher als die Durchschnittsrentabilität und er sollte die Produktion erhöhen. Dies geht solange weiter, bis durch eine Produktionserhöhung die Durchschnittsrentabilität nicht mehr erhöht werden kann, weil die Rentabilität eines zusätzlich Produzierten Gutes geringer ist, als die Durchschnittsrentabilität.

Hinter der Formel

$$\frac{G'(x)}{K'(x)} = \frac{G(x)}{K(x)}$$

steht also ein wirklich simples Konzept: Will ich den Durchschnitt einer Menge erhöhen, so muss ich weitere Objekte in die Menge aufnehmen, die einen höheren Wert aufweisen, als der Durchschnittswert.



## Der Begriff des Unternehmens und der Unternehmensgründung

Nach Gutenberg wird ein Unternehmen durch die folgenden Merkmale beschrieben:

Ein System von Produktionsfaktoren, dass

- nach den Prinzipien der Wirtschaftlichkeit und
- des finanziellen Gleichgewichts
- auf der erwerbswirtschaftlichen Tätigkeit und
- der inneren und äußeren Autonomie beruht.

Bei der Unternehmensgründung wird zwischen der formal juristischen Gründung (Unterschrift des Gesellschaftsvertrages, Bereitstellen von Eigenkapital) und dem wirtschaftlichen Entstehen (Kombination von Produktionsfaktoren und Marktaktivität) unterschieden.

## Gesellschaftstypen

### Rechtsformen:

Bei Rechtsformen von Unternehmungen kann zwischen Personengesellschaften und Kapitalgesellschaften unterschieden werden:

- **Personengesellschaften:** Offene Handelsgesellschaft (OHG) und Kommanditgesellschaft (KG).

Bei einer Personengesellschaft schließen sich mehrere Privatpersonen zusammen, um unter dem Dach der Personengesellschaft unternehmerisch tätig zu werden. Dies bedeutet für die Gesellschafter eine enge Bindung untereinander und an die Unternehmung. (Ein Ausstieg aus der Gesellschaft oder ein Verkauf der Anteile ist kurzfristig kaum möglich). Für jeden Gesellschafter werden gesonderte Konten geführt, auf denen die Einlage sowie die Gewinn- und Verlustanteile verbucht werden. Personengesellschaften sind keine juristischen Personen, können aber Träger von Rechten und Pflichten sein.

- **Kapitalgesellschaften:** Eine AG ist eine sogenannte Körperschaft des privaten Rechts und eine eigenständige juristische Person - also auch Träger von Rechten und Pflichten. So muss auch die Gesellschaft selber Steuern entrichten. Diese Unternehmung gehört wiederum den Gesellschaftern. Gesellschafter einer Kapitalgesellschaft sind aber weniger unternehmerisch tätig als die einer Personengesellschaft. Sie sind eher Inhaber eines Wertpapiers (also reine Kapitalgeber) als aktive Gesellschafter.

Für alle Gesellschaftsformen gibt es vom Gesetzgeber **zwingende Regelungen** und Regelungen, die nur gelten, wenn im Gesellschaftsvertrag nichts anderes vereinbart wird (**dispositives Recht**).

Die wichtigsten Gesellschaftsformen sind:

- **Die Offene Handelsgesellschaft(OHG):** Zwei oder mehr natürliche Personen schließen sich zusammen, um gemeinsam eine Unternehmung zu betreiben. Die OHG ist eine Personengesellschaft.

- **Die Kommanditgesellschaft (KG):** Zwei oder mehr natürliche oder juristische Personen schließen sich zusammen, um eine Unternehmung zu betreiben. Das besondere ist, dass eine natürliche oder juristische Person Komplementär ist und die Gesellschaft leitet und persönlich haftet. Die anderen Gesellschafter sind Kommanditisten. Diese haben keine Geschäftsführungsbefugnis und haften nur mit ihrer Einlage. Die KG ist eine Personengesellschaft.

- **Die Gesellschaft mit beschränkter Haftung (GmbH):** Die GmbH ist eine juristische Person und haftet für ihre Verbindlichkeiten nur mit ihrem Gesellschaftsvermögen. Die GmbH ist eine Kapitalgesellschaft.

- **Die Aktiengesellschaft (AG):** Die AG ist eine Kapitalgesellschaft. Das Kapital der AG ist in Aktien aufgeteilt.

Organe der Aktiengesellschaft:

- Der **Vorstand** besteht aus einer oder mehreren Personen und leitet die Geschäfte der AG. Der Vorstand wird von dem Aufsichtsrat bestellt.
- Der **Aufsichtsrat** bestellt, überwacht und setzt den Vorstand ab. Der Aufsichtsrat wird von der Hauptversammlung gewählt.
- Die **Hauptversammlung** besteht aus den Aktionären. Sie entscheidet über die Verwendung des Bilanzgewinns, über Satzungsänderungen und über Kapitalbeschaffung oder Kapitalherabsetzung.

### Haftungsregelungen

Die Haftungsregelungen sind eines der wichtigsten Kriterien bei der Wahl der Rechtsform. Prinzipiell ist die Haftung bei Personengesellschaften stärker als bei Kapitalgesellschaften, unterscheidet sich aber je nach Gesellschaftstyp.

**Einzelkaufmann:** Der Einzelkaufmann haftet persönlich und unbeschränkt mit seinem gesamten Privatvermögen.

**Offene Handelsgesellschaft (OHG):** Bei der OHG haften alle Gesellschafter persönlich und unbegrenzt. Außerdem haften alle Gesellschafter solidarisch bzw. gesamtschuldnerisch- jeder Gesellschafter haftet also persönlich für die gesamten Verbindlichkeiten der Gesellschaft und nicht nur für seinen Anteil. Kann ein Gesellschafter seinen Verbindlichkeiten nicht nachkommen, so haften die anderen Gesellschafter für diesen Anteil mit.

**Kommanditgesellschaft (KG):** Bei der KG haftet der Komplementär persönlich. Seine Rechtsstellung ist diesbezüglich dieselbe wie die eines OHG Gesellschafters.

Die Kommanditisten haften mit ihrer Einlage. Wurde die Einlage nicht erbracht, so haften die Kommanditisten mit ihrem Privatvermögen, aber ebenfalls begrenzt auf ihre Einlage.

**GmbH und AG:** Bei Kapitalgesellschaften ist die Haftung auf das Vermögen der Gesellschaft beschränkt. Sie haftet als eigenständige juristische Person. Die Eigentümer der Gesellschaft haften nicht mit ihrem Privatvermögen. Bei GmbHs kann unter den Gesellschaftern eine Nachschusspflicht vereinbart werden, wodurch die Haftung über das Vermögen der Gesellschaft hinaus auf die Nachschusspflicht erweitert werden würde.

## Aufgaben zu 1.0

### Aufgabe 1.1

Gegeben sei die Gewinnfunktion

$$G(x) = -2x^2 + 20x - 72$$

und die Kapitalbedarfsfunktion:

$$K(x) = x$$

- Ermittle die Rentabilitätsfunktion.
- Ermittle die rentabilitätsmaximale Menge.
- Ermittle die gewinnmaximale Menge.
- Warum sollte ein Unternehmen nicht das Rentabilitätsmaximum anstreben?

## Lösungen zu 1.0

### Lösung zu 1.1

a) Die Rentabilitätsfunktion ist

$$R(x) = \frac{G(x)}{K(x)} = \frac{-2x^2 + 20x - 72}{x}$$

b) Das Rentabilitätsmaximum findet man über die Nullstelle der ersten Ableitung:

$$R'(x) = \frac{G'(x) * K(x) - K'(x) * G(x)}{[K(x)]^2}$$

$$G'(x) = -4x + 20$$

$$K'(x) = 1$$

$$R'(x) = \frac{(-4x + 20) * x - 1 * (-2x^2 + 20x - 72)}{x^2} = 0$$

Der Bruch wird zu Null, wenn der Zähler zu Null wird:

$$-2x^2 + 72 = 0$$

$$x^2 = 36$$

$$x = \pm 6$$

$x = -6$  ist ökonomisch nicht relevant. Für  $x = 6$  wird das Rentabilitätsmaximum erreicht (Auf die Überprüfung des Maximums über die zweite Ableitung kann bei der Rentabilitätsmaximierung verzichtet werden).

c) Die gewinnmaximale Menge ist das Maximum der Gewinnfunktion. Wie immer bildet man die Ableitung und setzt diese zu Null:

$$G'(x) = -4x + 20$$

$$x = 5$$

Die gewinnmaximale Menge ist  $x = 5$ .

d) Wie aus den Aufgabenteilen b und c deutlich geworden ist, muss die rentabilitätsmaximale Menge nicht der gewinnmaximalen Menge entsprechen. Das Ziel des Unternehmens ist aber die Gewinnmaximierung.

Weitere Klausuraufgaben könnten lauten:

- a) Leite die notwendige Bedingung des Rentabilitätsmaximums her.
- b) Leite die notwendige Bedingung des Gewinnmaximums her.
- c) Zeichne in ein Diagramm die Gewinnfunktion, die Kostenfunktion, die Rentabilitätsfunktion, die Grenzkosten und Grenzerträge ein und markiere das Gewinnmaximum und das Rentabilitätsmaximum.

## 2.0 Beschaffung

### Grundbegriffe

- **Beschaffung im engeren Sinne:** Versorgung eines Unternehmens mit Werkstoffen.
- **Beschaffung im weiteren Sinne:** Versorgung eines Unternehmens mit sämtlichen Produktionsfaktoren (Material, Maschinen, Personal etc.).
- **Elementarfaktoren:** Arbeit, Betriebsmittel, Werkstoffe.
- **dispositive Faktoren:** Organisation, Planung, Geschäftsführung.
- **Repetierfaktoren bzw. Verbrauchsfaktoren:** Faktoren, die beim ersten Einsatz verbraucht werden. Verbraucht ist ein Faktor dann, wenn er nicht mehr verwendbar ist (Schmiermittel) oder als Bestandteil eines anderen Faktors weiterbearbeitet wird.
- **Potentialfaktoren bzw. Gebrauchsaktoren:** Faktoren, die bei der Produktion verwendet werden, ohne verbraucht zu werden (Maschinen).

### Formen der Beschaffung

Ein Unternehmen, das bei der Produktion seiner Fertigprodukte Roh- Hilfs- oder Betriebsstoffe verbraucht, muss diese „beschaffen“ und es müssen immer genügend auf Lager sein, damit die Produktion ungehindert laufen kann. Einem Unternehmen stehen dabei folgende Möglichkeiten offen:

- **Vorratsbeschaffung:** Die Materialien werden auf Vorrat gekauft und gelagert, sodass immer genügend für die Produktion vorhanden sind. Es werden hohe Lagerkosten verursacht, dafür wird aber das Risiko eines Produktionsstopps minimiert.
- **Einzelbeschaffung im Bedarfsfall:** Material wird immer dann bestellt, wenn es benötigt wird. So werden die Lagerkosten minimiert, es besteht aber das Risiko, dass das Material nicht vorrätig ist, wenn es benötigt wird. Außerdem wird es zu relativ häufigen Bestellvorgängen kommen, was die Lieferkosten erhöht.
- **Fertigungssynchrone Beschaffung:** Material wird über langfristige Lieferverträge möglichst zeitnah vor der Verwendung angeliefert. Es wird nur ein Lager mit sehr niedrigem Bestand gehalten. Notwendig ist dafür, die Verbrauchsmengen zu prognostizieren. Beispiel: „Just-in-Time-Konzept“.

## Verbrauchsmengenprognose

Verbrauchsmengen können konstant, zyklisch, trendabhängig oder zufällig sein. Die Fernuni bearbeitet nur das Prognoseverfahren bei konstantem Verbrauchsmengenverlauf. Dabei sind die Verbrauchsmengen zwar nicht wirklich konstant, schwanken aber zufällig um einen Mittelwert und kehren langfristig zu diesem zurück. Zur Prognose der Verbrauchsmengen gibt es vier Möglichkeiten:

- **arithmetisches Mittel:** Es wird der Mittelwert der vergangenen Perioden als Prognosewert verwendet.
- **Gleitender Mittelwert:** Es wird der Mittelwert über die Verbrauchsmengen der letzten  $m$  Perioden gebildet.
- **Gewogener gleitender Mittelwert:** Es wird der Mittelwert über die vergangenen Perioden gebildet, aber diese werden verschieden stark gewichtet. Meist werden die Verbrauchsmengen jüngerer Perioden stärker gewichtet als die älterer Perioden.

**Beispiel:** Gegeben seien die Verbrauchsmengen der letzten 5 Perioden:

Periode	1	2	3	4	5
Verbrauch	100	90	95	90	85

Die Perioden sollen wie folgt gewichtet werden:

Periode 5: 0,4

Periode 4: 0,3

Periode 3: 0,2

Periode 2: 0,1

Periode 1: 0

Der gewogene gleitende Mittelwert ist nun:  $85 * 0,4 + 90 * 0,3 + 95 * 0,2 + 90 * 0,1 = 89$

- **Exponentielle Glättung erster Ordnung:** Bei der exponentiellen Glättung wird der Prognosewert der Vorperiode jeweils um eine Fehlerkorrektur verändert. Diese Fehlerkorrektur besteht aus der Differenz der tatsächlichen Verbrauchsmenge und dem Prognosewert der Vorperiode. Diese Differenz wird mit einem Faktor  $a$ , der Werte zwischen 0 und 1 annehmen kann, gewichtet.

Je größer  $a$  gewählt wird, desto stärker werden die Verbrauchsmengen der jüngeren Perioden gewichtet. Bei  $a = 1$  ist der Prognosewert immer gleich der Verbrauchsmenge der Vorperiode. Bei  $a = 0$  entspricht der Prognosewert der ersten Verbrauchsmenge.

**Beispiel:**

Für  $a = 0,4$  ergibt sich:

Periode	1	2	3	4	5
Verbrauch	100	90	95	90	85
Prognosewert		100	96	95,6	93,36
Abweichung		-10	-1	-5,6	-8,36

Im Skript wird zur Berechnung der Verbrauchsmenge der Gozintograph und verschiedene Stücklisten vorgestellt. Dies sind trivial einfache Darstellungen des Verbrauchsmengenbedarfs. Ich werde das nicht weiter erläutern. Da es in dem Buch von Dr. Bitz eine Aufgabe zu dem Thema gibt und auch der Gozintograph schon geprüft wurde, solltest du dir die Methoden aber im Fernuni-Skript einmal kurz anschauen.



## Bestellmengenplanung

Ziel der Bestellmengenplanung ist die Minimierung der Kosten. Kosten fallen in folgender Form an:

**1) Lagerkosten:** Kosten für Lagerung der Materialien.

**2) "eigentliche Beschaffungskosten":** Kosten für die Materialien selber und Kosten, die pro Bestellvorgang, unabhängig von der bestellten Menge, anfallen. Bei häufigen Bestellungen steigen natürlich die eigentlichen Beschaffungskosten. Gleichzeitig kauft man die Materialien tendenziell zu einem Durchschnittspreis ein.

**3) Fehlmengenkosten:** Kosten, die entstehen, wenn das Material nicht verfügbar ist, wenn es gebraucht wird.

Das Modell zur optimalen Bestellmenge hat folgende Annahmen:

- Betrachtet wird nur die Bestellmenge einer Materialart.
- Der Verbrauch erfolgt linear und ist im Zeitablauf konstant hoch.
- Der Bedarf muss zu jeder Zeit gedeckt sein.
- Ankommende Lieferungen werden augenblicklich eingelagert.
- Es gibt keine Lieferfristen.
- Es gibt unbegrenzte Lagerkapazitäten.
- Die Materialpreise sind konstant.
- Bei jeder Bestellung fallen fixe Kosten an, die unabhängig von der Bestellmenge sind.
- Alle Daten sind im Zeitablauf konstant.

Um die optimale Bestellmenge und die entsprechende optimale Bestellhäufigkeit zu berechnen, muss zunächst die Gesamtkostenfunktion aufgestellt werden. Da die Materialpreise über den Zeitablauf konstant sind, spielen sie keine Rolle bei der Bestimmung der optimalen Bestellmenge.

Zur Berechnung der Kosten der Bestellungen werde ich die Notation aus dem Fernuni Skript nutzen.

Die relevanten Gesamtkosten lassen sich in zwei Kostenpositionen untergliedern:

**1) Lagerkosten:** Sie ergeben sich als Produkt der durchschnittlich gelagerten Menge mit der Lagerdauer und dem Lagerkostensatz:

$$K_L(y) = L_d * Cl * T$$

$K_L$  = Lagerkosten

$L_d$  = durchschnittlicher Lagerbestand

$T$  = Länge des Planungszeitraumes

Da das Material kontinuierlich und konstant verbraucht wird, beträgt der durchschnittliche Lagerbestand die Hälfte der Bestellmenge  $y$ :

$$L_d = \frac{y}{2}$$

$y$  = Bestellmenge

**2) Bestellkosten:**

Je niedriger die Bestellmenge, desto öfter muss bestellt werden. Die Anzahl an Bestellungen ist gleich dem Quotienten aus Gesamtbedarf und Bestellmenge.

$$K_B(y) = \frac{R}{y} * Cr$$

$R$  = Gesamtbedarf

$Cr$  = bestellfixe Kosten pro Bestellung

Die Gesamtkostenfunktion lautet damit:

$$K_T(y) = Cl * T * \frac{y}{2} + \frac{R}{y} * Cr$$

Die einzige Variable in dieser Gleichung ist die Bestellmenge  $y$ . Um die Gesamtkosten zu minimieren, muss das Minimum der Gesamtkostenfunktion gefunden werden. Dazu bildet man die erste Ableitung und setzt diese gleich Null.

$$K'_T(y) = \frac{Cl * T}{2} - \frac{R}{y^2} * Cr = 0$$

Aufgelöst nach  $y$  erhält man die Harris-Formel:

$$y^* = \sqrt{\frac{2 * R * Cr}{Cl * T}}$$

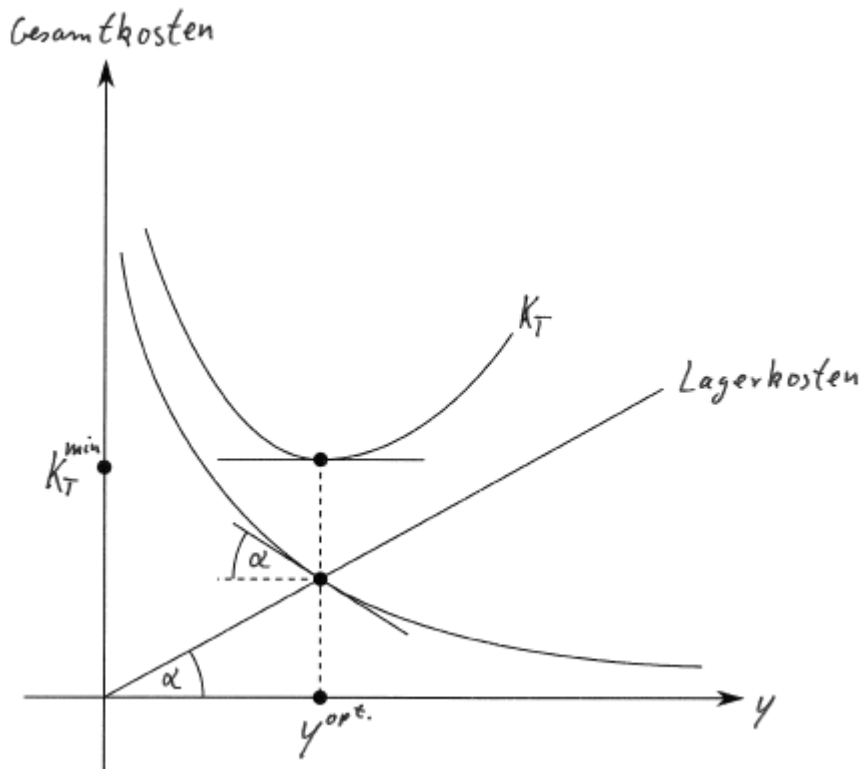
Betrachtet man die Formel etwas genauer, so kann man folgende Aussagen treffen:

- Je höher der Bedarf  $R$ , desto höher die optimale Bestellmenge.
- Je höher die fixen Bestellkosten  $Cr$ , desto höher die optimale Bestellmenge.
- Je höher der Lagerkostensatz  $Cl$ , desto niedriger die optimale Bestellmenge.
- Je höher der betrachtete Zeitraum  $T$ , desto niedriger die optimale Bestellmenge.

Aus der optimalen Bestellmenge folgen zwingend auch die optimale Bestellhäufigkeit und die optimale Zeit zwischen zwei Bestellungen (Lagerzykluszeit).

### Graphische Bestimmung der optimalen Bestellmenge

Die relevanten Gesamtkosten sind die Summe aus Lagerkosten und Bestellkosten. Die Lagerkosten steigen mit der Bestellmenge und die Bestellkosten fallen mit der Bestellmenge. Die optimale Bestellmenge ist genau dann erreicht, wenn die Lagerkosten genauso groß sind wie die Bestellkosten. In diesem Punkt ist der Zuwachs der Lagerkosten genauso groß wie die Verringerung der Bestellkosten. Es herrscht sowohl Gleichheit der Bestell- und Lagerkosten als auch der Grenzbestellkosten und Grenzlagerkosten.



(Die Bestellkosten fallen und die Lagerkosten steigen mit der Bestellmenge. Im Schnittpunkt der beiden Kurven haben beide dieselbe Steigung (durch den Winkel  $\alpha$  markiert). Die Hilfslinie durch den Schnittpunkt ist die Tangente der Bestellkosten.)

## Bestellzeitpunkteverfahren

Sollte der Bedarf nicht, wie bisher angenommen, konstant sein, sondern zufällig schwanken, so stellt sich die Frage, wann die Vorräte wieder aufgefüllt werden sollten. Grundsätzlich wird zwischen den folgenden beiden Steuerungsmöglichkeiten unterschieden:

- **Mengensteuerung:** Es besteht die Möglichkeit, mit jeder Bestellung dieselbe Menge zu bestellen oder bei jeder Bestellung den Vorratsbestand bis zu einem Zielwert aufzufüllen.

- **Zeitsteuerung:** Es besteht die Möglichkeit, immer zu festen Zeitpunkten zu bestellen, oder immer dann zu bestellen, wenn der Lagerbestand eine bestimmte untere Grenze unterschreitet.

Daraus entstehen die folgenden 4 Bestellpolitiken:

**1) (t,y)-Politik:** Es wird immer dieselbe Menge zu festen Bestellzeitpunkten bestellt.

Vorteil: Der Lagerbestand muss nicht überwacht werden.

Nachteil: Es besteht die Gefahr, dass der Lagerbestand zu hoch oder zu niedrig ist.

**2) (t,S)-Politik:** In konstanten zeitlichen Abständen wird der Lagerbestand zu dem Sollbestand  $S$  aufgefüllt.

Vorteil: Der Lagerbestand muss nicht überwacht werden.

Nachteil: Es besteht die Gefahr, dass der Lagerbestand zu niedrig ist.

**3) (s,y)-Politik:** Sobald der Lagerbestand unter eine bestimmte Grenze  $s$  fällt, wird eine bestimmte Bestellmenge  $y_0$  bestellt.

Vorteil: Kein Risiko von zu hohen oder zu niedrigen Lagerbeständen.

**4) (s,S)-Politik:** Sobald der Lagerbestand unter eine bestimmte Grenze  $s$  fällt, wird der Lagerbestand bis zum Sollbestand  $S$  aufgefüllt.

Vorteil: Kein Risiko von zu hohen oder zu niedrigen Lagerbeständen.

### Optimale Losgröße

Als Losgröße bezeichnet man das Produktionsvolumen eines Produktes. Ein Unternehmen, das täglich 1 Produkt verkauft, könnte also eine Losgröße von 1 wählen und jeden Tag 1 Produkt herstellen oder beispielsweise 10 Produkte auf einmal herstellen und lagern. Wie du siehst, ist das Problem genau dasselbe wie das der optimalen Bestellmenge.

An die Stelle des Verbrauchs tritt der Verkauf und an die Stelle der Bestellung tritt die Herstellung. Die Lösung der optimalen Losgröße ist äquivalent zur optimalen Bestellmenge:

$$y^* = \sqrt{\frac{2 * R * Cr}{Cl * T}}$$

Dabei wird angenommen, dass die Herstellung unendlich schnell geht.

Im Folgenden wird nun die unrealistische Annahme der **unendlich schnellen Herstellung aufgegeben**. Dabei unterscheidet man zwischen offener Produktion und geschlossener Produktion.

- **offene Produktion:** Ein fertiges Gut kann nach der Fertigstellung sofort verkauft werden. Es muss also nicht gewartet werden bis die gesamte Losgröße produziert ist, bevor mit dem Verkauf der einzelnen Produkte begonnen werden kann.

- **geschlossene Produktion:** Produkte können erst vermarktet werden, wenn die gesamte Losgröße fertiggestellt ist.

### Modell bei offener Produktion

Es gelten die Annahmen des Grundmodells. Besonders wichtig ist hier die Annahme des gleichbleibenden Lagerabgangs (Verkauf bzw. Verarbeitung). Daher ist es nicht notwendig, einen Sicherheitslagerbestand zu halten. Die Produktion setzt also dann ein, wenn der Lagerbestand auf Null gefallen ist. Es wird weiter angenommen, dass die Produktion zwar Zeit in Anspruch nimmt, aber die Produktionsrate höher ist als die Verkaufsrate

Da während der Produktion schon ein Lagerabgang stattfindet, wird der Lagerbestand nie die Höhe der Losgröße erreichen, sondern nur bis  $L^{max}$  steigen.

Wie im Grundmodell entstehen die folgenden Kosten:

- Lagerkosten:  $K_L = \frac{L^{max}}{2} * T * Cl$

Außerdem gilt:

$$L^{max} = (P - V) * t_p$$

P ist die Produktionsrate und

V die Verkaufsrate.

P-V ist also der Netto-Lagerzuwachs pro Zeiteinheit. Multipliziert mit der Produktionsdauer ergibt dies den maximalen Lagerbestand.

und

$$y = P * t_p$$

y ist die Losgröße.

Um die Lagerkosten in Abhängigkeit der Losgröße darzustellen, werden die oben stehenden Gleichungen wie folgt umgeformt:

$$t_p = \frac{y}{P}$$

Eingesetzt in  $L^{max}$ :

$$L^{max} = (P - V) * \frac{y}{P}$$

Eingesetzt in die Lagerkostengleichung:

$$K_L = \frac{(P - V) * \frac{y}{P}}{2} * T * Cl = \left(1 - \frac{V}{P}\right) * \frac{y}{2} * T * Cl$$

Die fixen Produktionskosten  $K_p$  ergeben sich analog zu den fixen Bestellkosten zu:

$$K_p(y) = \frac{R}{y} * Cr$$

Die Gesamtkosten betragen dann:

$$K_T = \frac{R}{y} * Cr + \left(1 - \frac{V}{P}\right) * \frac{y}{2} * T * Cl$$

Zur Ermittlung der optimalen Losgröße muss diese Funktion nach  $y$  abgeleitet und zu Null gesetzt werden. Die Bedingung für ein Minimum ist ein positiver Wert der zweiten Ableitung an der Nullstelle der ersten Ableitung.

$$K'_T = -\frac{R * Cr}{y^2} + \frac{\left(1 - \frac{V}{P}\right) * T * Cl}{2} = 0$$

Umgeformt nach  $y$  erhält man:

$$y^{opt} = \sqrt{\frac{2R * Cr}{\left(1 - \frac{V}{P}\right) * T * Cl}}$$



### Modell bei geschlossener Produktion

Da der Verkauf erst beginnen kann, wenn die gesamte Losgröße produziert ist, steigt der maximale Lagerbestand auf die Höhe der Losgröße. Da die Produktion aber Zeit  $t_p$  in Anspruch nimmt, kann mit der Produktion nicht gewartet werden, bis der Lagerbestand auf Null ist, sondern die Produktion muss vorher starten.

Mit der Produktion muss dann begonnen werden, wenn der Lagerbestand gerade noch groß genug ist, um den Verkauf der Produktionszeit zu bedienen. Der minimale Lagerbestand beträgt also:

$$L^{min} = V * t_p$$

(Fertiggestellte Produkte können zwar nicht verkauft werden, aber müssen trotzdem gelagert werden.)

Man ersetzt  $t_p$  wieder durch  $\frac{y}{p}$  und erhält die Lagerkosten in Abhängigkeit der Produktionsmenge:

$$K_L = \left(1 + \frac{V}{p}\right) * \frac{y}{2} * T * Cl$$

Dieser Ausdruck entspricht bis auf das Vorzeichen in der Klammer den Lagerkosten der offenen Produktion.

Ich überspringe die Herleitung der optimalen Produktionsmenge und komme direkt zum Ergebnis:

$$y^{opt} = \sqrt{\frac{2R * Cr}{\left(1 + \frac{V}{p}\right) * T * Cl}}$$

Auch hier liegt der einzige Unterschied in dem Vorzeichen des Ausdrucks  $\frac{V}{p}$ .

### Programmablaufplanung

Hat ein Unternehmen mehrere verschiedene Aufträge, die auf denselben Maschinen durchgeführt werden müssen, so muss der Unternehmer entscheiden, welche Aufträge wann an welcher Maschine bearbeitet werden sollen. Bei einigen Aufträgen ist eine klare Reihenfolge für die Bearbeitung an den verschiedenen Maschinen festgelegt-diese Reihenfolge wird auch technologische Reihenfolge genannt.

Beispiel: Es liegen für zwei Maschinen A und B zwei Aufträge vor. Auftrag 1 muss zuerst an Maschine A für 3 Tage bearbeitet werden und danach für 2 Tage auf Maschine B. Auftrag 2 muss 4 Tage auf Maschine B und 2 auf Maschine A bearbeitet werden – die Reihenfolge ist egal. Beide Aufträge sollen in 6 Tagen fertig sein. Es wäre nun nicht sinnvoll, den Auftrag 2 zuerst an Maschine A zu bearbeiten, da so die Auftragsfrist nicht eingehalten werden könnte.

Ziele der Programmablaufplanung können folgende sein:

- Fristen der Fertigstellung einhalten.
- Maximale Kapazitätsauslastung (minimale Leerzeiten)

Zur Lösung solcher Probleme gibt es zwei verschiedene Verfahren:

- **Optimierungsverfahren:** Diese sind kostenaufwendig, weil qualifiziertes Personal und teure Ausrüstung benötigt werden. Außerdem sind sie oft zeitaufwendig (bei vielen Aufträgen auf mehreren Maschinen)
- **Heuristiken:** Werden aus der praktischen Erfahrung der Mitarbeiter entwickelt und liefern keine optimale, aber eine hinreichend gute Lösung. Beispielsweise ist eine beliebte Heuristik die der kürzesten Operationszeit. Demnach wird an jeder Maschine der Auftrag mit der kürzesten Bearbeitungszeit zuerst bearbeitet.

Bei der Fertigung wird zwischen Werkstattfertigung und Fließfertigung unterschieden:

- **Werkstattfertigung:** Bei der Werkstattfertigung werden die zu bearbeitenden Produkte zu den Maschinen gebracht und dort bearbeitet. Welches Produkt wann von welcher Maschine bearbeitet wird ist dabei flexibel zu bestimmen.
- **Fließfertigung:** Klassische Fließbandfertigung. Die Reihenfolge und zeitliche Dauer der einzelnen Arbeitsprozesse sind festgelegt. Im Optimalfall beanspruchen alle Arbeitsprozesse dieselbe Zeit, damit es nicht zu Leerzeiten kommt.

### GANTT Diagramm

Das GANTT Diagramm stellt die Abfolge mehrerer Aufträge auf mehreren Maschinen grafisch dar.

Es gibt zwei Arten der Darstellung:

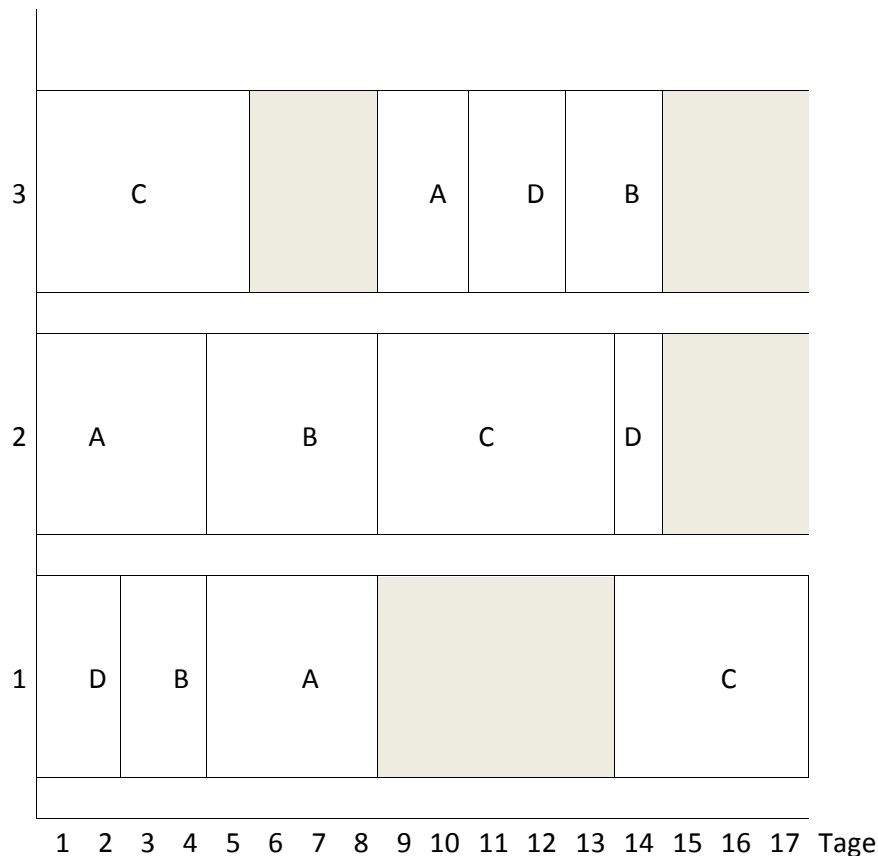
- **Auftragsfolgediagramm:** Bei einem Auftragsfolgediagramm trägt man die Zeit auf der X-Achse, die Aufträge auf der Y-Achse und die Maschinen im Diagramm ein.

Ein Unternehmen hat drei Aufträge vorliegen, die alle 4 Maschinen in verschiedener Reihenfolge und mit verschiedener Bearbeitungsdauer beanspruchen. Die entsprechenden Bearbeitungszeiten sind wie folgt:

	Maschine A	Maschine B	Maschine C	Maschine D	technologische Reihenfolge
Auftrag 1	4	2	4	2	DBAC
Auftrag 2	4	4	5	1	ABCD
Auftrag 3	2	2	5	2	CADB

Stelle ein Auftragsfolgediagramm auf, sodass alle Aufträge innerhalb von 17 Tagen bearbeitet werden können.

Auftrag



- **Maschinenbelegungsdiagramm:** Die Zeit auf der X-Achse, die Maschinen auf der Y-Achse und die Aufträge im Diagramm.

**Aufgaben zu 2.0****Aufgabe 2.0.1**

Gegeben seine folgende Verbrauchsmengen der letzten 5 Perioden:

Periode	1	2	3	4	5
Materialverbrauch	50	45	40	65	55

Prognostiziere den Materialverbrauch der kommenden Periode anhand des

- arithmetischen Mittelwertes.
- gleitenden Mittelwertes der letzten 3 Perioden.
- gewogenen gleitenden Mittelwertes, wobei die folgende Gewichtung verwendet werden soll:

Periode	1	2	3	4	5
Gewichtung	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3

- Verfahrens der exponentiellen Glättung erster Ordnung mit  $\alpha = 0,5$

**Aufgabe 2.0.2**

Ein Einzelhändler, der ausschließlich ein Produkt verkauft, hat einen jährlichen Absatz von 605 Stück. Bei jeder Bestellung fallen fixe Bestellkosten von 50€ an. Der Lagerkostensatz beträgt 5€ pro Stück und Jahr.

- Berechne die optimale Bestellmenge.
- Berechne die optimale Bestellhäufigkeit.
- Berechne die dazugehörigen gesamten Lagerkosten.

**Aufgabe 2.0.3**

Ein Unternehmen produziert und verkauft nur ein Produkt. Es gelten die Annahmen des Modells bei geschlossener Produktion. Gegeben seien die folgenden Daten zur Produktion:

Absatz pro Monat: 200 Stück

Herstellungskosten pro Stück: 20€

Fixe Kosten pro Produktionsvorgang: 10€

Lagerkostensatz pro Stück und Monat: 2€

Produktionsrate: 800 Stück pro Monat

- a) Bestimme die optimale Produktionsmenge.
- b) Bestimme die optimale Anzahl an Produktionsvorgängen pro Monat.
- c) Bestimme den maximalen Lagerbestand.
- d) Ändert sich die Formel für die optimale Bestellmenge, wenn man das Modell der offenen Produktion zugrunde legt? Wie?

**Lösungen zu 2.0****Lösung zu 2.0.1**

a) Prognostizierter Materialverbrauch in Periode 6:

$$\frac{50 + 45 + 40 + 65 + 55}{5} = 51$$

b) Prognostizierter Materialverbrauch in Periode 6:

$$\frac{55 + 65 + 40}{3} = 53,3$$

c) Prognostizierter Materialverbrauch in Periode 6:

$$50 * 0,1 + 45 * 0,15 + 40 * 0,2 + 65 * 0,25 + 55 * 0,3 = 52,5$$

d) Die folgende Tabelle enthält die Prognosewerte der ersten Perioden.

Periode	1	2	3	4	5
Verbrauch	50,00	45,00	40,00	65,00	55,00
Prognosewert		50,00	47,50	43,75	54,38
Abweichung		-5,00	-7,50	21,25	0,63

Für die Periode 6 ergibt sich ein Prognosewert von

$$54,38 + 0,5 * 0,63 = 54,69$$

**Lösung zu 2.0.2**

a) Die optimale Bestellmenge berechnet man nach der Formel:

$$y^* = \sqrt{\frac{2 * R * Cr}{Cl * T}}$$

$$= \sqrt{\frac{2 * 605 * 50}{5 * 1}} = 110$$

b) Bestellhäufigkeit:

$$n = \frac{R}{y}$$

Für die optimale Bestellmenge gilt dann:

$$n^{opt} = \frac{605}{110} = 5,5$$

c) Für die Lagerkosten gilt:

$$K_L(y) = L_d * Cl * T$$

und es gilt:

$$L_d = \frac{y}{2} = 55$$

Somit ergeben sich die Lagerkosten zu

$$K_L(y) = 55 * 5 * 1 = 275$$

### Lösung zu 2.0.3

a) Die optimale Produktionsmenge berechnet man nach der Formel:

$$y^{opt} = \sqrt{\frac{2R * Cr}{\left(1 + \frac{V}{P}\right) * T * Cl}}$$

Da gilt,  $V = \frac{R}{T}$  erhält man folgende Zahlenwerte:

$$y^{opt} = \sqrt{\frac{2 * 200 * 10}{\left(1 + \frac{200}{800}\right) * 2}} = 40$$

b) Bei einem Absatz von 200 Stück sollte

$$\frac{200}{40} = 5$$

mal produziert werden.

c) Der maximale Lagerbestand entspricht bei geschlossener Produktion der Bestellmenge!

d) Ja, das Vorzeichen in der Klammer ändert sich:

$$y^{opt} = \sqrt{\frac{2R * Cr}{\left(1 - \frac{V}{P}\right) * T * Cl}}$$

## 3.0 Produktion

### Grundlagen/Grundbegriffe

- **Produktionsfunktion:** Eine Produktionsfunktion stellt den Zusammenhang zwischen den Inputfaktoren und den Outputfaktoren dar:

**Beispiel:** Zur Produktion eines Tisches (T) benötigt man 1 Platte (P), 4 Beine (B) 20 Schrauben(S) und 1 Arbeitsstunde eines Arbeiters(A). Die Produktionsfunktion lautet nun:

$$T = P + 4B + 20S + A$$

- **Gesamtproduktivität:** Das Verhältnis des gesamten Outputs zum gesamten Input:  $\frac{Output}{Input}$ . Diese ist oft nicht zu ermitteln, da die Inputfaktoren aufgrund der verschiedenen Dimensionen nicht zusammengefasst werden können (Tischbeine + Arbeitsstunden).

- **Faktorproduktivität:** Das Verhältnis des gesamten Outputs zu nur einem Faktor. Dabei werden aber alle anderen Faktoren ausgeblendet. Es ist also nicht so, dass durch die Erhöhung des einen Faktors auch der Output entsprechend erhöht werden kann.

**Beispiel:** Mit einem Tischbein kann  $\frac{1}{4}$  Tisch bauen.

- **Produktionskoeffizient:** Der Kehrwert der Faktorproduktivität. Er gibt an, wie viele Einheiten des betrachteten Faktors zur Produktion einer Outputeinheit benötigt werden.

**Beispiel:** Für einen Tisch benötige ich 4 Tischbeine.



- **Änderungen der Produktivitäten:** Produktivitäten können sich aus zwei Gründen ändern:

- **Änderung des Faktoreinsatzverhältnisses:** Erhöht man den Einsatz eines Faktors, so ändert sich oft die Produktivität beider Faktoren: Die Produktivität des erhöhten Faktors sinkt und die Produktivität des unveränderten Faktors steigt.

**Beispiel:** Ein Bauer bewirtschaftet sein Feld mit den Einsatzfaktoren Arbeit (Angestellte) und Kapital (Traktoren, Mähdrescher usw.). Erhöht er den Einsatz an Arbeit, indem er das Personal eines Mähdreschers erhöht, so arbeitet dieser Mähdrescher besser (produktiver). Die Produktivität aller Angestellten ist aber gesunken, da der Ertrag weniger stark gestiegen ist als sein Arbeitseinsatz.

- **Änderung der Produktionsfunktion:** Durch technischen Fortschritt wird ein Faktor bei gleichbleibendem Einsatz produktiver.

**Beispiel:** Ein neuer, besserer Computer wird auf den Markt gebracht, kostet aber dasselbe wie die alten langsameren Computer.

- **Substitutionale Produktionsfunktion:** Die Faktoren können durch andere teilweise oder ganz Faktoren ersetzt werden. Dies zeigt sich durch eine Verknüpfung der Faktoren durch Multiplikation.

**Beispiel:** Man kann einen Acker per Hand umgraben (nur Arbeitseinsatz) oder mit einem Pflug (Arbeit und Kapitaleinsatz). Die beiden Faktoren sind substitutional.

- **Limitationale Produktionsfunktion:** Die Produktionsfaktoren stehen in einem festen Verhältnis zueinander. Eine Erhöhung eines Faktors erhöht den Output nicht, wenn die anderen Faktoren konstant bleiben.

**Beispiel:** Für einen Tisch benötigt man 4 Beine und eine Platte. Indem man mehr Beine verwendet, aber nicht mehr Platten, kann man nicht mehr Tische produzieren.

- **Skalenertrag:** Der Skalenertrag gibt an, wie sich der Output prozentual ändert, wenn der Input um 1% erhöht wird.

- **Niveauproduktionsfunktion:** Eine Funktion, die angibt, wie sich der Output von einem bestimmten Ausgangsniveau ausgehend ändert, wenn sich der Input (bei gleichbleibendem Faktoreinsatzverhältnis) um das  $\lambda$ -fache ändert. Das Ausgangsniveau wird willkürlich gewählt und für dieses Niveau gilt dann  $\lambda = 1$ .

**Beispiel:** Im Vertrieb werden 2 Verkäufer beschäftigt. Diese haben ein Marketingbudget von 10.000€. Wie ändert sich der Umsatz der Vertriebsabteilung, wenn man 4 Verkäufer und 20.000€, 6 Verkäufer und 30.000€, 8 Verkäufer und 40.000€ usw. einsetzt? Die Ergebnisse bilden die Niveauproduktionsfunktion.

Die Form Niveauproduktionsfunktion ist abhängig von Ihrer Homogenität.

- **Homogenität:** Kann man eine Niveauproduktionsfunktion in der Form

$$M(\lambda) = \lambda^t * \tilde{M}$$

schreiben (wobei  $\tilde{M}$  die Einheitsausbringung bezeichnet), so ist sie homogen vom Grade  $t$ .

**Beispiel:** Zu ermitteln ist der Homogenitätsgrad der Funktion:

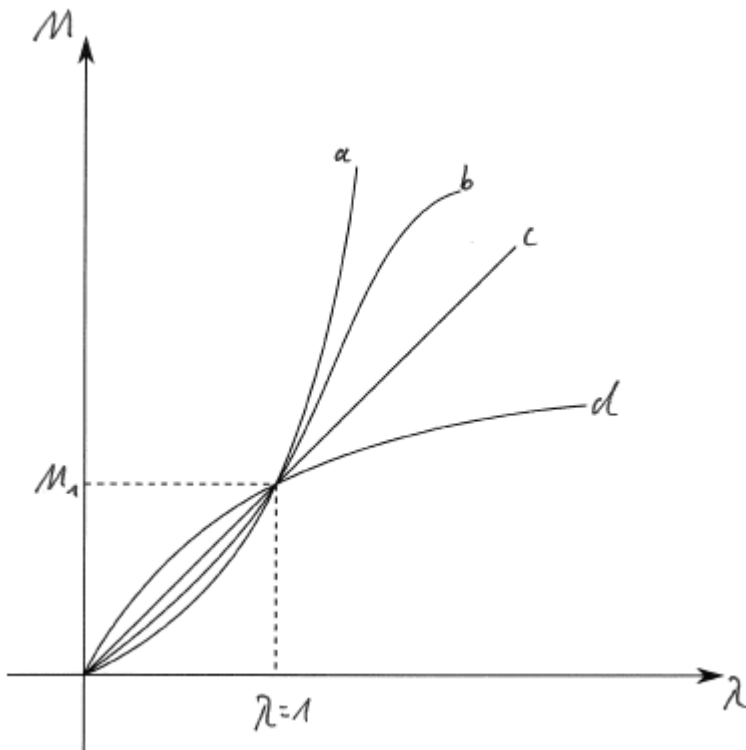
$$M = r_1^{\frac{1}{2}} * r_2^{\frac{1}{4}}$$

Man schreibt zunächst die Produktionsfunktion in Abhängigkeit von  $\lambda$ :

$$\begin{aligned} M(\lambda) &= (\lambda * r_1)^{\frac{1}{2}} * (\lambda * r_2)^{\frac{1}{4}} \\ &= \lambda^{\frac{2}{4} + \frac{1}{4}} * r_1^{\frac{1}{2}} * r_2^{\frac{1}{4}} \\ &= \lambda^{\frac{3}{4}} * M(\lambda) \end{aligned}$$

Die Funktion ist homogen vom Grad  $\frac{3}{4}$ .

Man unterscheidet lineare Homogenität ( $\lambda = 1$ , Faktoreinsatz und Output steigen um denselben Faktor), überlineare Homogenität ( $\lambda > 1$ , Output steigt stärker, je höher der Einsatz der Inputfaktoren) und unterlineare Homogenität ( $\lambda < 1$ , Output steigen schwächer, je höher der Einsatz der Inputfaktoren).



- a) überlinear homogen
- b) nicht homogen
- c) linear homogen
- d) unterlinear homogen

- **Skalenproduktivität:** Die Skalenproduktivität ist die Steigung der Niveauproduktionskurve. Sie gibt an, wie sich die Ausbringungsmenge bei einer kleinen Änderung des Prozessniveaus verändert. Mathematisch stellt sie die erste Ableitung der Niveauproduktionsfunktion dar.

- **Expansionspfad:** Dies ist die Menge aller Minimalkostenkombinationen, die sich ergeben, wenn die Ausbringungsmenge verändert wird und die Preise konstant gehalten werden.

Mathematisch stellt der Expansionspfad für die substitutionale Produktionsfunktion das Faktoreinsatzverhältnis der beiden Produktionsfaktoren  $r_1$  und  $r_2$  dar, also  $r_1$  in Abhängigkeit von  $r_2$  unter der Bedingung des optimalen Faktoreinsatzverhältnisses.

Ein Beispiel dazu findest du später im Skript.

### Die substitutionale Produktionsfunktion

Für die substitutionale Produktionsfunktion (auch Gutenberg Typ A-Produktionsfunktion genannt) gelten folgende Annahmen:

- Es wird nur ein Produkt hergestellt.
- Es gibt nur einen einstufigen Fertigungsprozess.
- Die Einsatzmenge jedes Produktionsfaktors ist veränderbar und beliebig teilbar.
- Es ist möglich, nur einen Produktionsfaktor zu verändern und die übrigen konstant zu halten.
- Das Faktoreinsatzverhältnis ist substitutional.
- Die Qualität der Produktionsfaktoren ist konstant.
- Produktionstechnik, -zeit und- intensität sind über den Zeitablauf konstant.

### Ertragsgesetz der substitutionalen Produktionsfunktion

Für den Ertragszuwachs einer substitutionalen Produktionsfunktion bei Erhöhung der Einsatzmenge nur eines Faktors und konstanter Einsatzmenge aller anderen Faktoren gilt:

Der Ertragszuwachs ist für geringe Einsatzmengen des betrachteten Faktors zunächst positiv mit zunehmender Steigung. Mit zunehmender Einsatzmenge verringert sich die Steigung der Ertragszuwächse und wird schließlich negativ.

Mathematisch lässt sich dies über die erste und zweite Ableitung der Produktionsfunktion nach dem Einsatzfaktor ermittelt. Die erste Ableitung gibt die Steigung der Ertragsfunktion in Abhängigkeit des Faktoreinsatzes an. Diese ist zunächst positiv, steigt, fällt später und geht ins Negative über.

Die zweite Ableitung gibt die Steigung der ersten Ableitung an. Sie ist zunächst positiv und fällt linear.

Die Durchschnittsproduktivität steigt, solange die Grenzproduktivität eines zusätzlichen Faktoreinsatzes größer ist als die Durchschnittsproduktivität des Faktoreinsatzes. Sobald die Grenzproduktivität unter die Durchschnittsproduktivität fällt, fällt auch die Durchschnittsproduktivität. Die ist auch sofort einleuchtend, da die Durchschnittsproduktivität der Durchschnitt aller Grenzproduktivitäten ist.

### Isoquanten

Bei substitutionalen Produktionsfunktionen mit 2 Produktionsfaktoren kann man den Einsatz des einen Faktors verringern und den Einsatz des anderen Faktors erhöhen, ohne dass die Ausbringungsmenge sich ändert. Eine gegebene Ausbringungsmenge kann also mit verschiedenen Faktorkombinationen produziert werden. Grafisch kann dieses Verhältnis in einem Diagramm mit den beiden Produktionsfaktoren  $r_1$  und  $r_2$  dargestellt werden. Die Linie, die alle möglichen Faktorkombinationen für eine gegebene Ausbringungsmenge darstellt, nennt man Isoquante.

Mathematisch erhält man die Isoquantengleichung aus der Produktionsfunktion, indem man die Produktionsfunktion nach  $r_2$  auflöst.

### Beispiel:

Für die Produktionsfunktion

$$M = 2r_1 * \sqrt{r_2}$$

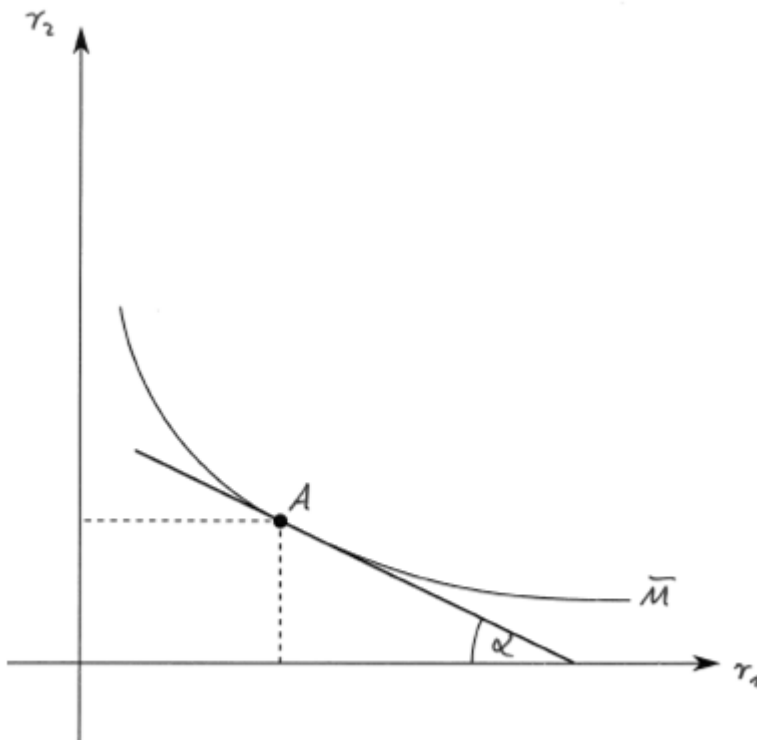
ergibt sich die Isoquantengleichung:

$$r_2 = \left(\frac{M}{2r_1}\right)^2$$

Die Durchschnittsrate der technischen Substitution bezüglich zweier Punkte auf der Isoquante erhält man, indem man die Änderung des einen Faktors durch die Änderung des anderen Faktors teilt.

**Grenzrate der Substitution**

Wie man an der Isoquante sieht, ist das Tauschverhältnis zwischen den beiden Einsatzfaktoren nicht konstant, sondern abhängig von dem jeweiligen Faktoreinsatzverhältnis. Die Grenzrate der Substitution gibt für jeden Punkt der Isoquante an, welche Menge des einen Faktors notwendig ist, um eine sehr kleine Einheit des anderen Faktors zu ersetzen. Grafisch wird dieses Tauschverhältnis für einen bestimmten Punkt auf der Isoquante durch die Tangente durch diesen Punkt dargestellt.



Mathematisch beträgt die Grenzrate der Substitution:

$$GRS_{2,1} = \frac{dr_2}{dr_1} = -\frac{\frac{\partial M}{\partial r_1}}{\frac{\partial M}{\partial r_2}}$$

,wobei  $\frac{\partial M}{\partial r_1}$  die erste Ableitung der Gesamtertragskurve nach dem Faktor  $r_1$  darstellt.

Man kann die Grenzrate der Substitution ermitteln, indem man die Produktionsfunktion nach  $r_2$  umstellt und dann nach  $r_1$  ableitet oder indem man das totale Differential der Produktionsfunktion bildet und nach  $\frac{dr_2}{dr_1}$  umstellt. Beide Herleitungen können sehr gut in der Klausur vorkommen.

### Grenzrate der Substitution - Herleitung Variante 1 (totales Differential):

Gegeben sei eine Produktionsfunktion der Form  $M = f(r_1, r_2)$

Das totale Differential ist dann:

$$dM = \frac{\partial M}{\partial r_1} dr_1 + \frac{\partial M}{\partial r_2} dr_2$$

Da die Grenzrate der Substitution für eine konstante Ausbringungsmenge berechnet wird, gilt  $dM = 0$ .

$$dM = \frac{\partial M}{\partial r_1} dr_1 + \frac{\partial M}{\partial r_2} dr_2 = 0$$

Aufgelöst nach  $\frac{dr_2}{dr_1}$  erhält man:

$$\frac{dr_2}{dr_1} = -\frac{\frac{\partial M}{\partial r_1}}{\frac{\partial M}{\partial r_2}}$$

### Grenzrate der Substitution - Herleitung Variante 2 (Isoquantengleichung):

Die zweite Möglichkeit, die Grenzrate der Substitution herzuleiten besteht darin die Produktionsfunktion nach  $r_2$  umzustellen (Isoquantengleichung) und nach  $r_1$  abzuleiten:

**Beispiel:**

Gegeben sei die substitutionale Produktionsfunktion:

$$M = 2r_1r_2$$

Zur Ermittlung der Grenzrate der Substitution löst man diese Gleichung nach  $r_2$  auf:

$$r_2 = \frac{M}{2r_1}$$

und leitet nach  $r_1$  ab:

$$\frac{dr_2}{dr_1} = -\frac{M}{2r_1^2} = -\frac{2r_1r_2}{2r_1^2} = -\frac{r_2}{r_1}$$

Dies entspricht

$$\frac{dr_2}{dr_1} = -\frac{\frac{\partial M}{\partial r_1}}{\frac{\partial M}{\partial r_2}}$$

denn

$$-\frac{\frac{\partial M}{\partial r_1}}{\frac{\partial M}{\partial r_2}} = -\frac{2r_2}{2r_1} = -\frac{r_2}{r_1}$$

**Kritik an der Gutenberg-Typ A- Produktionsfunktion**

Kritik an der Gutenberg-Typ A- Produktionsfunktion besteht hauptsächlich, weil dessen Annahmen nicht oder nur teilweise in der Praxis zutreffen:

- Produktionen haben meist keinen einstufigen Produktionsprozess. Zum Beispiel bestimmen zwischengeschaltete Maschinen das Verhältnis zwischen Einsatzmenge der Faktoren und der Ausbringungsmenge. Es besteht also kein unmittelbarer Zusammenhang zwischen Faktoreinsatz und Ausbringungsmenge.
- Keine Berücksichtigung der zeitlichen Komponente. In der Praxis spielen aber Produktions- und Lagerzeiten eine wichtige Rolle.
- Es ist oft nicht möglich, einen Faktor zu variieren und alle anderen konstant zu lassen.
- Einsatzfaktoren sind oft nicht substitutional.



## Aufgaben zu 3.0

### Aufgabe 3.0.1

Berechne zu folgenden Produktionsfunktionen die Isoquantengleichung:

a)  $M = 2r_1 + 4r_2$

b)  $M = 2 * \sqrt{r_1 r_2}$

c)  $M = \sqrt{r_1} * r_2$

### Aufgabe 3.0.2

Skizziere eine überlinear homogene, eine unterlinear homogene, eine linear homogene und eine inhomogene Produktionsfunktion in einem Koordinatensystem. Zeichne auch das Niveau  $\lambda$  ein.

### Aufgabe 3.0.3

Gib zu den folgenden Funktionen an, ob sie homogen sind und gib an, ob sie überlinear, unterlinear oder linear homogen sind.

a)  $M = r_1^{\frac{1}{2}} * r_2^2$

b)  $M = 2r_1^{\frac{1}{3}} * r_2^{\frac{1}{2}}$

c)  $M = r_1^2 + r_2$

d)  $M = 2r_1^2 + r_2^2$

### Aufgabe 3.0.4

Leite die Grenzrate der Substitution für die substitutionale Produktionsfunktion

$$M = 2r_1 * r_2^2$$

a) aus dem totalen Differential her.

(Totales Differential siehe Anhang!)

b) her, indem du die entsprechende Isoquante nach  $r_1$  ableitest.

## Lösungen zu 3.0

### Lösung zu 3.0.1

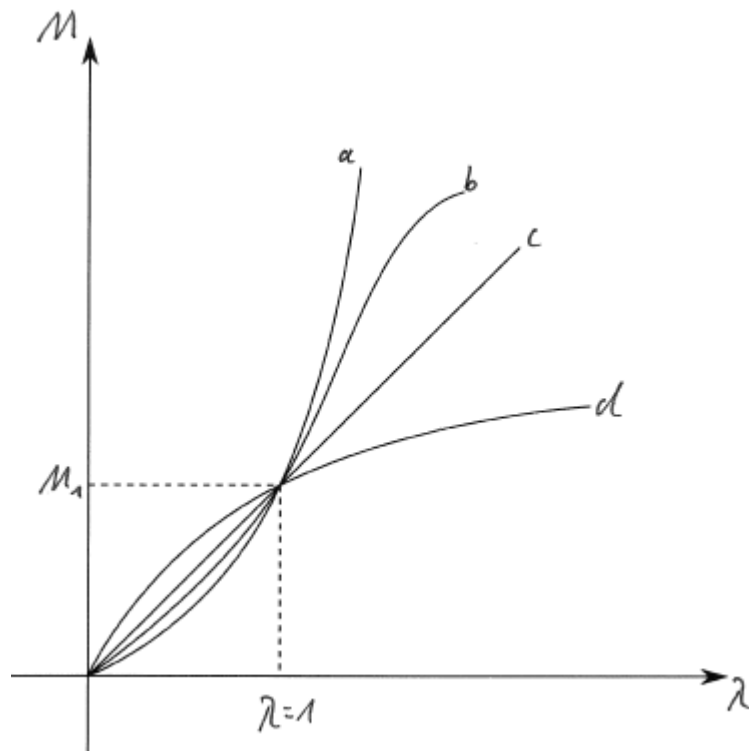
Die Produktionsfunktionen müssen nach  $r_2$  umgestellt werden, um die Isoquantengleichung zu erhalten.

a)  $r_2 = 0,25M - 0,5r_1$

b)  $r_2 = \frac{M^2}{4r_1}$

c)  $r_2 = \frac{M}{\sqrt{r_1}}$

## Lösung zu 3.0.2



- a) überlinear homogen
- b) nicht homogen
- c) linear homogen
- d) unterlinear homogen

**Lösung zu Aufgabe 3.0.3**

Du kannst die Homogenität nach den Formeln des Skriptes berechnen. Bei den eher einfachen Formen der Produktionsfunktionen, die in Klausuren geprüft werden, kannst du die Homogenität aber auch direkt ablesen. Dabei gilt:

- Sind  $r_1$  und  $r_2$  durch Multiplikation verbunden, so sind sie homogen. Der Grad der Homogenität berechnet sich aus der Summe der beiden Exponenten.

- Sind  $r_1$  und  $r_2$  durch Addition oder Subtraktion verbunden, so sind sie homogen, wenn sie denselben Exponenten haben, ansonsten nicht. Die Homogenität entspricht den 2 Exponenten (nicht der Summe dieser).

a) homogen vom Grad 2,5, also überlinear (da größer als 1).

b) homogen vom Grad  $\frac{5}{6}$ , also unterlinear (da kleiner als 1).

c) inhomogen, da verschiedene Exponenten und durch Addition verbunden.

d) homogen vom Grad 2, da 2 der Exponent bei beiden Faktoren ist, also überlinear.

**Lösung zu 3.0.4**

a) Das totale Differential lautet:

$$dM = 2r_2^2 dr_1 + 4r_1 r_2 dr_2$$

Da die Ausbringungsmenge als konstant angenommen wird, gilt:

$$2r_2^2 dr_1 + 4r_1 r_2 dr_2 = 0$$

$$2r_2^2 dr_1 = -4r_1 r_2 dr_2$$

$$\frac{2r_2^2}{-4r_1 r_2} = \frac{dr_2}{dr_1}$$

$$-\frac{r_2}{2r_1} = \frac{dr_2}{dr_1}$$

b) Die Gleichung für die Isoquante lautet:

$$r_2 = \sqrt{\frac{M}{2r_1}}$$

Ableiten nach  $r_1$ :

Kettenregel: äußere Ableitung mal innere Ableitung

$$\frac{dr_2}{dr_1} = \frac{1}{2} \left( \frac{M}{2r_1} \right)^{-\frac{1}{2}} * \left( -\frac{M}{2r_1^2} \right)$$

$M = 2r_1 * r_2^2$  einsetzen und Kürzen.

$$= \frac{1}{2} (r_2^2)^{-\frac{1}{2}} * \left( -\frac{2r_1 * r_2^2}{2r_1^2} \right)$$

$$= \frac{1}{2r_2} * \left( -\frac{2 * r_2^2}{2r_1} \right)$$

$$= -\frac{r_2}{2r_1}$$

Hinweis: Die Kettenregel ist für die Klausur höchstwahrscheinlich nicht relevant.

Weitere mögliche Klausuraufgaben:

a) Leite die Grenzrate der Substitution aus dem totalen Differential her!

## 4.0 Kostentheorie der substitutionalen Produktionsfunktion

### Grundbegriffe

- **Pagatorische Kosten** basieren auf den Anschaffungspreisen.
- **Wertmäßige Kosten** basieren auf dem Wert, den das Produkt dem Unternehmen stiftet.
- **Fixkosten:** Fixkosten fallen unabhängig von der Produktionsmenge an. Dies sind Kosten für Miete, Kapitalkosten usw.
- **Variable Kosten:** Diese Kosten fallen pro produzierter Mengeneinheit an. Dies sind beispielsweise Kosten für Rohstoffbedarf und Arbeitsaufwand.
- **Gesamtkosten:** Fixkosten + variable Kosten.
- **Stückkosten** sind Kosten, die pro Stück anfallen. Die gesamten Stückkosten berechnen sich als  $\frac{\text{Gesamtkosten}}{\text{Menge}}$ .

Die Fixkosten pro Stück fallen natürlich mit steigender Ausbringungsmenge.

- **Grenzkosten:** Dies sind die Kosten die für eine weitere produzierte Einheit anfallen. Mathematisch werden die Grenzkosten durch Ableitung der Gesamtkostenfunktion nach der Ausbringungsmenge dargestellt.

**Beispiel:** Die Gesamtkostenfunktion sei gegeben als:

$$K_T = 4 + x^2$$

Die Grenzkosten pro produzierter Einheit betragen dann:

$$K'_T = 2x$$

- **Die variablen Stückkosten** steigen annahmegemäß zunächst stark an, verlangsamen dann ihre Steigung, um wieder stärker zu steigen. Entsprechend verhält sich die erste Ableitung, die die Grenzkosten darstellt: Sie ist durchgehend positiv und bildet ein Minimum aus an dem Punkt, an dem die variable Kostenkurve ihre geringste Steigung hat.

Die variablen Stückkosten bilden ebenfalls ein Minimum aus. Sie sind anfangs sehr hoch, da einerseits die variablen Kosten sehr hoch sind und andererseits die Fixkosten auf eine sehr kleine Menge verteilt werden. Mit steigender Ausbringungsmenge fallen zunächst die variablen Kosten und auch die Fixkosten fallen immer weniger ins Gewicht.

### Produktionsaufteilungsplanung einer substitutionalen Produktionsfunktion

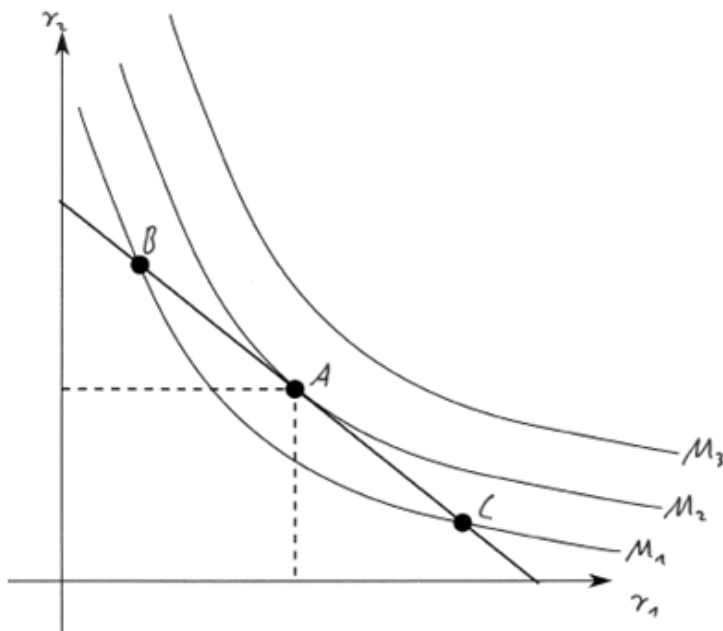
Im Folgenden soll die Frage beantwortet werden, welche Faktorkombination einer substitutionalen Produktionsfunktion mit zwei Inputfaktoren optimal ist. Ein wichtiges Entscheidungskriterium ist dabei die Grenzrate der Substitution, also das Austauschverhältnis der zwei Faktoren, bei dem die Outputmenge unverändert bleibt. Ob es nun sinnvoll ist die Produktionsfaktoren zu diesem Verhältnis zu tauschen, hängt von deren Kosten ab.

#### Kostenminimale Faktorkombination,

Die Isoquante gibt an, wie viele Einheiten des einen Faktors mehr benötigt werden, wenn auf eine Einheit des anderen Faktor verzichtet wird. Nun ist es vorteilhaft, die Faktoreinsätze zu verändern, wenn dadurch die Kosten verringert werden. Das Kostenoptimum ist dann erreicht, wenn das Preisverhältnis der beiden Faktoren ihrem Austauschverhältnis entspricht bzw. die Grenzrate der Substitution dem Preisverhältnis entspricht. Das klingt vielleicht etwas kompliziert, ist aber ganz einfach:

Angenommen Faktor 1 ist doppelt so teuer wie Faktor 2 und bei der aktuellen Faktorkombination kann ich auf einen Faktor 1 verzichten und muss Faktor 2 nur um 1 Einheit erhöhen, so ist dies natürlich kostensenkend. Müsste ich aber Faktor 2 um drei Einheiten erhöhen, so würde dies die Kosten erhöhen. Die Kosten bleiben aber unverändert, wenn ich für eine Einheit von Faktor 1 genau 2 Einheiten von Faktor 2 einsetzen muss.

Grafisch ist dies der Punkt, in dem die Budgetgerade die Isoquante tangiert, nämlich der Punkt in dem die Grenzrate der Substitution dem Preisverhältnis der beiden Produktionsfaktoren entspricht. Dies ist äquivalent zu der Grafik der Indifferenzkurve aus der Haushaltstheorie. (Die Gerade stellt die Budgetgerade dar, und die Isoquante ist die Indifferenzkurve).



### Berechnung der kostenminimalen Faktorkombination

Um die kostenminimale Faktorkombination zu finden, wird die Gesamtkostenfunktion minimiert. Es gibt allerdings eine Nebenbedingung: Es muss eine vorgegebene Produktionsmenge produziert werden. Mathematisch löst man dieses Minimierungsproblem mit dem Lagrangeansatz:

Die zu minimierende Gesamtkostenfunktion lautet:

$$K = q_1 * r_1 + q_2 * r_2$$

wobei  $q$  für den Preis und  $r$  für den Produktionsfaktor steht.

Die Nebenbedingung ist die Produktionsfunktion und lautet:

$$M = f(r_1, r_2)$$

Die Lagrangefunktion lautet nun:

$$L = q_1 * r_1 + q_2 * r_2 + \lambda(M - f(r_1, r_2))$$

Die Lagrangefunktion muss nun nach  $r_1$ ,  $r_2$  und  $\lambda$  abgeleitet werden. Alle drei Ableitungen werden dann gleich Null gesetzt. Man erhält ein Gleichungssystem mit drei Unbekannten und drei Gleichungen. Dieses Gleichungssystem muss nach  $r_1$  bzw.  $r_2$  aufgelöst werden. Das Ergebnis ist das kostenoptimale Faktoreinsatzverhältnis (der Expansionspfad).

#### Definition Expansionspfad:

Zu jeder Ausbringungsmenge gibt es eine Faktorkombination, die die Kosten minimiert. Der Expansionspfad gibt für alle Ausbringungsmengen das kostenminimale Faktoreinsatzverhältnis bei gegebenen Faktorkosten an. Wie man die Gleichung für den Expansionspfad berechnet lernst du in folgendem Beispiel.

#### Beispiel zur kostenminimalen Faktorkombination:

Gegeben sei folgende Produktionsfunktion:

$$M = 3r_1 * r_2^2$$

Die Preise der Produktionsfaktoren betragen:

$$q_1 = 2$$

$$q_2 = 5$$

Es sollen 36 Mengeneinheiten produziert werden.



**Lösung:**

Zunächst formuliert man die zu minimierende Zielfunktion und die Nebenbedingung:

$$K = 2r_1 + 5r_2$$

Nebenbedingung:

$$3r_1 * r_2^2 = 36$$

Daraus kann man die Lagrangefunktion bilden:

$$\min L = 2r_1 + 5r_2 + \lambda(36 - 3r_1 * r_2^2)$$

Die Ableitungen nach  $r_1$ ,  $r_2$  und  $\lambda$  lauten:

$$\frac{dL}{dr_1} = 2 - 3r_2^2\lambda$$

$$\frac{dL}{dr_2} = 5 - 6r_1r_2\lambda$$

$$\frac{dL}{d\lambda} = 36 - 3r_1 * r_2^2$$

Diese Ableitungen werden zu Null gesetzt und nach  $r_1$  und  $r_2$  aufgelöst.

$$2 - 3r_2^2\lambda = 0$$

$$5 - 6r_1r_2\lambda = 0$$

$$36 - 3r_1 * r_2^2 = 0$$

Aus den ersten beiden Gleichungen erhält man das optimale Faktoreinsatzverhältnis, indem man eine der Gleichungen nach  $\lambda$  auflöst und in die andere einsetzt. Dann muss nach  $r_1$  oder  $r_2$  umgestellt werden.

Aus der zweiten Gleichung folgt:

$$\lambda = \frac{5}{6r_1r_2}$$

Eingesetzt in die erste Gleichung:

$$2 - 3r_2^2 \frac{5}{6r_1r_2} = 0$$

$$2 - \frac{5r_2}{2r_1} = 0$$

$$4r_1 = 5r_2$$

$$r_1 = \frac{5}{4}r_2$$

Dies ist das optimale Faktoreinsatzverhältnis, die Funktionsvorschrift für den **Expansionspfad**.

Um die konkrete Faktorkombination für die Ausbringungsmenge  $M = 36$  zu erhalten, muss

$$r_1 = \frac{5}{4}r_2$$

in die Produktionsfunktion eingesetzt werden:

$$M = 3r_1 * r_2^2 = 36$$

$$= \frac{15}{4}r_2 * r_2^2$$

$$= \frac{15}{4}r_2^3 = 36$$

$$r_2 = 2,13$$

$$r_1 = 2,66$$

**Tipp:** Lagrange musst du nur nutzen, wenn das verlangt wird. Es ist manchmal einfacher, folgende Eigenschaft des Kostenoptimums zu nutzen:

$$\frac{dr_2}{dr_1} = -\frac{q_1}{q_2}$$

und nach  $r_1$  oder  $r_2$  aufzulösen.

Die Grenzrate der Substitution entspricht im Kostenminimum dem negativen reziproken Faktorpreisverhältnis! Das bedeutet nichts anderes, als dass die Steigung der Budgetgerade im Kostenminimum der Steigung der Isoquante entspricht.

Mathematisch ergibt sich das folgendermaßen:

Man beginnt mit der Lagrangefunktion und berechnet die Ableitungen:

$$\frac{dL}{dr_1} = q_1 - \lambda \frac{dM}{dr_1} = 0$$

$$\frac{dL}{dr_2} = q_2 - \lambda \frac{dM}{dr_2} = 0$$

$$\frac{dL}{d\lambda} = M - f(r_1, r_2) = 0$$

Aus der ersten Gleichung folgt:

$$\lambda = \frac{q_1}{\frac{dM}{dr_1}}$$

Aus der zweiten Gleichung folgt:

$$\lambda = \frac{q_2}{\frac{dM}{dr_2}}$$

Gleichsetzen dieser beiden Gleichungen ergibt:

$$\frac{dr_2}{dr_1} = -\frac{q_1}{q_2}$$

Diese Herleitung kann übrigens –genau wie alle Herleitungen– sehr gut in einer Klausur vorkommen.

## Aufgaben zu 4.0

### Aufgabe 4.0.1

Gegeben sei die folgende substitutionale Produktionsfunktion:

$$M(r_1, r_2) = 2 * \sqrt{r_1 * r_2}$$

Die Preise der beiden Einsatzfaktoren betragen:  $q_1 = 4$  und  $q_2 = 5$ .

- Bestimme die Grenzrate der Substitution.
- Bestimme die kostenminimale Faktorkombination für eine Produktionsmenge von  $M = 80$ .

## Lösungen zu 4.0

### Lösung zu 4.0.1

a) Die Grenzrate der Substitution ist die Steigung der Isoquante. Zunächst muss die Produktionsfunktion in eine Isoquantengleichung umgewandelt werden:

$$r_2 = \frac{M^2}{4r_1}$$

Gesucht ist die erste Ableitung dieser Funktion.

$$\frac{dr_2}{dr_1} = \frac{-M^2}{4} * r_1^{-2}$$

b) Hier kann man auf die Lagrange-Herleitung verzichten und nutzt direkt die Bedingung für das Kostenminimum:

$$\frac{dr_2}{dr_1} = -\frac{q_1}{q_2}$$

$$-(2 * \sqrt{r_1 * r_2})^2 * 4r_1^{-2} = -\frac{4}{5}$$

$$-\frac{4r_1 * r_2}{4r_1^2} = -\frac{4}{5}$$

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{4}{5}$$

$$r_2 = \frac{4}{5}r_1$$

Dies ist der Expansionspfad!

Eingesetzt in die Produktionsfunktion erhält man die kostenminimale Faktorkombination:

$$M(r_1, r_2) = 2 * \sqrt{r_1 * \frac{4}{5}r_1} = 80$$

$$\sqrt{r_1 * \frac{4}{5}r_1} = 40$$

$$r_1 * \frac{4}{5}r_1 = 1.600$$

$$0,8 * r_1^2 = 1.600$$

$$r_1^2 = 2.000$$

$$r_1 = 44,72$$

$$r_2 = 35,78$$

Weitere mögliche Klausuraufgaben:

a) Formuliere die Lagrange Funktion für die Ermittlung der kostenminimalen Faktoreinsatzkombination und leite ab, welche Beziehung zwischen der Grenzrate der Substitution und dem Faktorpreisverhältnis im Kostenminimum gilt.

b) Stelle das Kostenminimum aus a) grafisch dar!

## 5.0 Kostentheorie der limitationalen Produktionsfunktion

Bei limitationalen Produktionsfunktionen wird zwischen der Leontieff Produktionsfunktion und der Gutenberg-Typ B-Produktionsfunktion unterschieden.

Die Leontieff Produktionsfunktion ist dadurch gekennzeichnet, dass das Faktoreinsatzverhältnis konstant ist. Daraus folgt auch, dass die Produktionskoeffizienten konstant sind.

**Beispiel:** Für die Produktion eines Tisches benötigt man 4 Tischbeine. Es sind immer 4 Tischbeine, egal, wie viele Tischler an dem Tisch arbeiten oder wie viele Schrauben man nutzt etc.

Die Leontieff Produktionsfunktion ist eher simpel – Schwerpunkt der folgenden Seiten (und sicher auch der kommenden Klausur) soll die Gutenberg Produktionsfunktion vom Typ B sein.

Die **Gutenberg Typ B Produktionsfunktion** nimmt an, dass in der Produktion Potentialfaktoren (Maschinen) geschaltet sind, die das Verhältnis zwischen Input und Output bestimmen. Diese Maschinen sind kurzfristig konstant. Langfristig können sie aber umgebaut oder aufgerüstet werden. Die technisch konstruktiven Eigenschaften der Maschine bezeichnet Gutenberg als z-Situation.

### Intensität

Als kurzfristig variabel wird dagegen die Intensität betrachtet, mit der die Maschine betrieben wird. Die Intensität gibt an, wie viele Produkte pro Zeiteinheit gefertigt werden oder, allgemeiner ausgedrückt, wie viele technisch-physikalische Arbeitseinheiten in einer bestimmten Einsatzzeit verrichtet werden. Von der Intensität hängt dann unter anderem auch der Faktorverbrauch ab. Beispiel: Ein Auto verbraucht Kraftstoff und Schmiermittel. Bei hoher Geschwindigkeit steigt der Verbrauch pro 100 km. Anders als bei der Produktion eines Tisches, wo man immer 4 Tischbeine benötigt, benötigt man bei dem Auto einmal 5 Liter pro 100 km und einmal 15 Liter.

Mathematisch schreibt man für die Intensität:

$$x = \frac{M}{T}$$

wobei M die Ausbringungsmenge und T die zeitliche Periode bezeichnet.

### Technische Verbrauchsfunktion

Die technische Verbrauchsfunktion gibt die Verbrauchsmenge eines Faktors an, der pro Mengeneinheit der Ausbringungsmenge benötigt wird in Abhängigkeit der Intensität der eingesetzten Maschine.

Allgemein schreibt man:

$$r = v(x)$$

**Beispiel:** Der Verbrauch eines Autos ist abhängig von der Geschwindigkeit, mit der das Auto fährt, und beträgt:

$$r = 0,01x^{1,4}$$

Der Wagen benötigt beispielsweise bei einer Geschwindigkeit von  $x = 50 \text{ km/h}$  2,4 Liter pro 100 km und bei einer Geschwindigkeit von  $x = 100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  benötigt er 6,31 Liter pro 100 km.

### Optimalintensität

Von ökonomischen Interesse ist natürlich die optimale Intensität. Diese liegt im Minimum der „Kostenleistungsfunktion  $k_v(x)$ “. Diese erhält man, indem man alle Faktoren der technischen Verbrauchsfunktion mit ihren jeweiligen Kosten multipliziert.

$$k_v(x) = q_1 v_1(x) + q_2 v_2(x) + \dots + q_n v_n(x)$$

wobei  $q$  den Preis der jeweiligen Verbrauchsfaktoren angibt und  $n$  die Anzahl an insgesamt verwendeten Faktoren.

Zur mathematischen Ermittlung muss die erste Ableitung der Kostenleistungsfunktion zu Null gesetzt werden. Außerdem muss die zweite Ableitung positiv sein (Bedingung für ein Minimum).

**Beispiel:** Gegeben sei die folgende Kostenleistungsfunktion:

$$k_v(x) = 2x^2 - 4x + 20$$

Die erste Ableitung lautet:

$$\frac{dr}{dx} = 4x - 4$$

Diese hat für  $x = 1$  eine Nullstelle. Die zweite Ableitung ist für  $x = 1$  positiv. Daher liegt bei  $x = 1$  ein Minimum vor. Dies ist die optimale Intensität.

### **Zeitliche und intensitätsmäßige Anpassung**

Es sollte versucht werden, immer mit optimaler Intensität zu produzieren. Zeitliche Anpassung bedeutet nur, eine Maschine länger oder kürzer bei optimaler Intensität zu betreiben. Ist es nicht mehr möglich, die gewünschte Ausbringungsmenge durch zeitliche Anpassung zu produzieren, so muss die Intensität angepasst werden.

**Beispiel:** Ein Auto hat die optimale Intensität von 50 km/h. Muss man in 2 Stunden in einem 50km entfernten Ort sein, so sollte man 1 Stunde lang mit 50 km/h fahren. Muss man aber schon in 30 min dort sein, so sollte man 100km/h fahren.

Mit dem Auto nur 1 Stunde zu fahren (statt 2 Stunden mit 25 km/h) nennt man zeitliche Anpassung. Mit 100 km/h zu fahren (also nicht mit optimaler Intensität) nennt man intensitätsmäßige Anpassung.

### **Gesamtkostenfunktion**

Der Verlauf der Gesamtkostenfunktion ist von der Intensität abhängig. Solange es möglich ist die Maschine mit optimaler Intensität zu betreiben, verlaufen die Kosten linear. Muss die Intensität erhöht werden, so steigen sie meist überproportional an.

**Beispiel:** Wir nutzen erneut das Beispiel mit dem Auto, das eine Optimalintensität von 50 km/h hat: Solange man innerhalb von 2 Stunden eine Entfernung von maximal 100km zurücklegen muss, kann man das Auto mit der Optimalintensität betreiben (zeitliche Anpassung). Erst wenn man einen weiter entfernten Ort erreichen muss, steigt mit der Entfernung auch der Verbrauch.



### Berechnung der Gesamtkosten

Angenommen die folgende Kostenleistungsfunktion sei gegeben:

$$k(x) = 2x^2 - 4x + 20$$

Die Nullstelle der ersten Ableitung liegt bei  $x = 1$ .

Die Optimalintensität beträgt also  $x = 1$  pro Tag und es stehen insgesamt 10 Tage zur Verfügung. Die minimalen Stückkosten betragen also 18.

Die Gesamtkostenkurve wird nun in zwei Bereiche unterteilt:

Bereich 1: Ausbringungsmenge 0 bis 10. Da bei optimaler Intensität 1 pro Tag produziert werden können, können maximal 10 Stück in 10 Tagen bei optimaler Intensität produziert werden.

Je nach Ausbringungsmenge  $M$  fallen Kosten in Höhe von

$$K = \begin{cases} 18M & \text{für } 0 \leq M \leq 10 \\ (2x^2 - 4x + 20) * M & \text{für } M > 10 \end{cases}$$

Die Intensität  $x$  ergibt sich für  $M > 10$  zu  $x = \frac{M}{T}$

wobei  $T = 10$  Tage gilt.

### Grenzkostenfunktion

Da die Gesamtkosten für den Bereich der Optimalintensität linear steigen, sind auch die Grenzkosten für diesen Bereich konstant. Erst bei intensitätsmäßiger Anpassung steigen die Grenzkosten an.

#### Beispiel:

Für die Gesamtkostenfunktion aus dem obigen Beispiel ergibt sich eine Grenzkostenfunktion von:

$$K' = \begin{cases} 18 & \text{für } 0 \leq M \leq 10 \\ 2x^2 - 4x + 20 & \text{für } M > 10 \end{cases}$$

### Kostenoptimale Anpassung zweier Aggregate

Verfügt ein Unternehmen über zwei Maschinen, die beide zur Produktion desselben Produktes verwendet werden können, aber über unterschiedliche Kostenfunktionen verfügen, so sollte das Unternehmen immer auf der Maschine produzieren, die die geringsten Kosten verursacht. Das muss nicht bedeuten, dass die gesamte Produktion immer auf einer Maschine ablaufen muss.

Zunächst sollte natürlich auf der günstigeren Maschine mit der niedrigeren optimalen Intensität produziert werden. Steigt nun aber die Ausbringungsmenge so stark, dass die günstigere Maschine intensitätsmäßig angepasst werden muss, so steigen deren Grenzkosten evtl. über die Grenzkosten der zweiten Maschine (bei deren Optimalintensität). Je nach Verlauf der Grenzkostenfunktionen müssen für verschiedene Ausbringungsmengen die Maschinen zeitlich oder intensitätsmäßig angepasst werden.

#### Beispiel:

In einem Unternehmen werden zwei Maschinen zur Produktion desselben Gutes verwendet.

Maschine A hat Grenzkosten von 10 bei optimaler Intensität von  $x = 2$  und Grenzkosten von

$$K' = 0,025M^2$$

oberhalb dieser Intensität. Ihre Maximalintensität beträgt  $x = 6$ .

Maschine B hat Grenzkosten von 14 bei optimaler Intensität von  $x = 4$  und Grenzkosten von

$$K' = 0,005M^2 + 6$$

oberhalb dieser Intensität. Die Maximalintensität der Maschine B beträgt  $x = 5$ .

In einem Zeitraum von 10 Tagen soll produziert werden. Bestimme die Maschineneinsätze für die verschiedenen Intervalle an Ausbringungsmengen.

#### Antwort:

Es muss nun für verschiedene Ausbringungsmengen von  $M$  das Minimum der Grenzkosten ermittelt werden.

Man beginnt mit kleinen Ausbringungsmengen:

Zunächst sollte Maschine A eingesetzt werden, da sie bei optimaler Intensität Grenzkosten von 10 hat. Mit dieser Intensität können in den 10 Tagen maximal 20 Stück produziert werden.

Bei Ausbringungsmengen über 20 Stück steigen die Grenzkosten, sind aber immer noch geringer als die Grenzkosten der Maschine B bei optimaler Intensität (14). Für Ausbringungsmengen über 20 muss also

die Maschine A intensitätsmäßig angepasst werden, bis deren Grenzkosten die Grenzkosten der Maschine B bei Optimalintensität übersteigen. Es ist folgende Gleichung zu lösen:

$$0,025M^2 = 14$$

$$M = 23,66$$

Ab einer Ausbringungsmenge von 23,66 sollte also auf Maschine B produziert werden. Diese kann bei optimaler Intensität weitere  $10 * 4 = 40$  Stück herstellen.

Maschine A produziert nun 23,66 Stück und hat Grenzkosten von 14.

Maschine B produziert 40 Stück und hat Grenzkosten von  $0,005 * 40^2 + 6 = 14$ .

Nun müssen beide Maschinen intensitätsmäßig angepasst werden, bis eine der beiden Maschinen ihr Maximum erreicht. Maschine B erreicht ihr Maximum bei einer Ausbringungsmenge von 50 (auf Maschine B) und Grenzkosten von  $0,005M^2 + 6 = 18,5$ .

Die Maschine A hat bei Grenzkosten von 18,5 die Ausbringungsmenge von

$$0,025M^2 = 18,5$$

$$M = 27,2$$

Ab einer gesamten Ausbringungsmenge von  $M = 77,2$  produziert also nur noch Maschine A bis zu ihrer Maximalintensität von  $x = 6$ , bei der sie eine Ausbringungsmenge von 60 hat. Die maximale Ausbringungsmenge ist dann mit  $M = 110$  erreicht.

### **Kritik an der Gutenberg-Typ B-Produktionsfunktion**

- chemisch biologische Vorgänge haben neben limitationalen Faktorbeziehungen auch substitutionale.
- Es wird nur die Bearbeitungsphase betrachtet. Tatsächlich gibt es bei Maschinen aber auch Anlauf,- Brems-, Stillstands- und Leerlaufphasen.
- Die Faktorverbräuche beziehen sich auf konstante Leistungsgrade. Diese sind aber oft variabel.
- Die Annahme einstufiger Einproduktproduktionen trifft auf die wenigsten Produktionen zu. Verflechtungen der Produktionsstellen, Beschaffungs- und Absatzlager bleiben unbeachtet.

## Aufgaben zu 5.0

### Aufgabe 5.0.1

Ein Unternehmen mit der Gutenberg-Produktionsfunktion  $M = xt$  produziert ein Gut mit folgender Stückkostenfunktion:

$$k(x) = 2x^2 - 10x + 100$$

wobei  $x$  für die Intensität der genutzten Maschine steht und es gilt für  $x$ :  $0 \leq x \leq 10$ .

Es wird eine Periode von  $t = 10$  Tagen betrachtet.

- a) Ermittle die stückkostenoptimale Intensität.
- b) Bestimme die mengenmäßigen Intervalle für intensitätsmäßige Anpassung und zeitliche Anpassung.
- c) Bestimme die Gesamtkostenfunktion und die Grenzkostenfunktion bei intensitätsmäßiger Anpassung in Abhängigkeit der Ausbringungsmenge..

## Lösungen zu 5.0

### Lösung zu 5.0.1

a) Die optimale Intensität wird durch die Nullstelle der ersten Ableitung der Stückkostenfunktion bestimmt:

$$k'(x) = 4x - 10$$

$$4x - 10 = 0$$

$$x = 2,5$$

b) Es ist anzustreben möglichst lange mit optimaler Intensität zu arbeiten. In 10 Tagen können maximal  $10 * 2,5 = 25$  Stück erzeugt werden. Das Intervall für zeitliche Anpassung ist also 0 bis 25.

Für größere Mengen muss die Intensität angepasst werden bis die Maschine bei Maximalkapazität  $x = 10$  volle 10 Tage durchläuft. Das Intervall für intensitätsmäßige Anpassung ist also 25 bis 100.

c) Die Gesamtkosten betragen:

$$k(x) * M = (2x^2 - 10x + 100) * M$$

Da gilt:  $M = x * t$ , kann man für  $x$  den Ausdruck  $M/t$  einsetzen.

$$K(M) = \left( 2 \frac{M^2}{t^2} - 10 \frac{M}{t} + 100 \right) * M$$

$$K(M) = \frac{M^3}{50} - M^2 + 100M$$

Die Grenzkosten sind die erste Ableitung nach M:

$$K'(M) = 3 \frac{M^2}{50} - 2M + 100$$

## 6.0 Produktionsprogrammplanung

### 6.1 Grundlagen

#### Fixkosten und variable Kosten

Grundlegend für die Bearbeitung der meisten folgenden Kapitel ist das Verständnis von Fixkosten und variablen Kosten. Fixkosten sind Kosten, die unabhängig von der Ausbringungsmenge anfallen. Variable Kosten sind Kosten, die in Abhängigkeit von der Ausbringungsmenge anfallen.

**Beispiel:** Als Repetitor muss ich ein Büro mieten, das mich 500€ pro Monat kostet. Jedes Skript kostet mich in der Produktion 5€. Es ist nun egal, wie viele Skripte ich produziere, die Mietkosten betragen fix 500€. Die Produktionskosten sind aber davon abhängig, wie viele Skripte ich produziere. Pro Skript betragen die Kosten 5€. Dies sind variable Kosten.

Berechne ich nun die gesamten Kosten pro Skript, so ist der variable Anteil fest bei 5€ und der fixe Anteil wird weniger, je mehr Skripte ich produziere.

**Beispiel:** Produziere ich nur 10 Skripte pro Monat, so kostet mich jedes Skript  $\frac{500+5*10}{10} = 55€$ .

Produziere ich aber 100 Skripte, so betragen die Gesamtkosten pro Skript  $\frac{500+5*100}{100} = 10€$ .

Die variablen Kosten müssen aber nicht fest sein („proportionale Kosten“). Sie können mit steigender Produktionsmenge steigen („progressive Kosten“) oder fallen („degressive Kosten“).

**Beispiel:** Produziere ich über 1000 Skripte, so lohnt es sich eine teure Druck- und Bindemaschine zu erwerben und selbst zu produzieren, statt dies von einer externen Druckerei machen zu lassen. Die variablen Kosten fallen also mit steigender Produktionsmenge.

Ebenso könnte es sein, dass ich ab einer bestimmten Produktionsmenge Mitarbeiter anstellen muss und somit die variablen Kosten steigen.

In der Praxis sind meistens progressive Kosten vorzufinden.

**Gewinn und Deckungsbeitrag**

Zunächst müssen der Erlös und die Kosten ermittelt werden.

**Erlös:** Man unterscheidet zwischen Gesamterlös und Stückerlös.

Der Gesamterlös ist Preis mal Menge.

$$E = p * x$$

Der Stückerlös ist Gesamterlös geteilt durch Ausbringungsmenge.

$$e = \frac{p * x}{x} = p$$

**Gewinn:** Der Gesamtgewinn ist die Differenz aus Gesamterlös und Gesamtkosten.

$$G = E - K$$

Der stückbezogene Gewinn ist der Gesamtgewinn geteilt durch die Ausbringungsmenge.

$$g = \frac{E - K}{x}$$

**Beispiel:**

In der letzten Periode wurden 100 Güter zu je 55€ verkauft. Die Gesamtkosten betragen 4.200€. Berechne den Gesamtgewinn und den stückbezogenen Gewinn.

**Antwort:** Der Gesamterlös betrug

$$E = p * x = 100 * 55 = 5.500$$

Der Gesamtgewinn betrug:

$$G = E - K = 5.500 - 4.200 = 1300$$

Der stückbezogene Gewinn betrug:

$$g = \frac{1300}{100} = 13$$

**Deckungsbeitrag:** Der Deckungsbeitrag ist die Differenz aus Erlösen und variablen Kosten multipliziert mit der Stückzahl. Alle Erlöse, die über die variablen Kosten hinaus erzielt werden, können zur Deckung der fixen Kosten verwendet werden, daher der Name Deckungsbeitrag.

$$DB = E - K_v$$

Der Deckungsbeitrag ist wichtig bei der Frage, ob bei schlechter Geschäftslage überhaupt weiterproduziert werden soll oder ein Betriebsstopp besser wäre. Macht ein Unternehmen Verluste, rechnet aber damit, in Zukunft wieder Gewinne zu machen, so sollte es trotz der Verluste weiter produzieren, wenn der Deckungsbeitrag positiv ist. Da auch bei einem Produktionsstopp die fixen Kosten anfallen, ist der Verlust geringer, wenn man trotz der Verluste weiter produziert und über den Deckungsbeitrag einen Teil der fixen Kosten decken kann. Die Deckungsspanne ist der Deckungsbeitrag pro Stück.

**Beispiel:** Ein Unternehmen hat Fixkosten in Höhe von 100.000€. p.a. Die variablen Kosten pro Stück liegen bei 50 Euro. Gib an, bis zu welcher Preisgrenze das Unternehmen weiterproduzieren sollte, wenn es damit rechnet, langfristig Gewinne zu machen.

**Antwort:** Solange der Preis über den variablen Kosten liegt, sollte das Unternehmen weiterproduzieren. Fällt der Preis unter 50€, so wäre es besser, die Produktion einzustellen und erst wieder zu produzieren, wenn die Preise über 50€ steigen.

Das macht natürlich nur Sinn, wenn das Unternehmen langfristig wieder Gewinne macht. Der positive Deckungsbeitrag minimiert nur die Verluste. Dauerhaft kann ein Unternehmen so natürlich nicht bestehen.



## 6.2 Optimales Produktionsprogramm ohne Engpass

Das Produktionsprogramm umfasst alle Produkte, die in der entsprechenden Periode produziert werden. Generell sollten alle Produkte produziert werden, die einen positiven Deckungsbeitrag haben.

Sind die Produktionskapazitäten groß genug, um alle Produkte mit positivem Deckungsbeitrag zu produzieren, so spricht man von einem Produktionsprogramm ohne Engpass.

### Produktionsprogramm mit Engpass

Es kann bei der Produktion bestimmte Restriktionen geben. Zum Beispiel verbrauchen alle Produktionen denselben Rohstoff, der aber nur in begrenzter Menge vorhanden ist. Ein anderes Beispiel wäre die begrenzte Produktionsdauer einer Maschine. Reichen die Produktionskapazitäten nicht aus, um alle Produkte mit positivem Deckungsbeitrag zu produzieren, so entsteht ein Engpass.

Jetzt muss berechnet werden für welche Produkte der Deckungsbeitrag maximiert werden kann. Dabei ist nicht mehr der absolute Deckungsbeitrag entscheidend, sondern der Deckungsbeitrag, der pro Einheit der Restriktion erzielt werden kann - der „relative Deckungsbeitrag“.

**Beispiel:** Ein Unternehmen kann 3 Produkte herstellen. Alle drei benötigen Rohstoff A zur Herstellung. Von Rohstoff A sind aber nur 100 Einheiten vorhanden. Materialverbrauch und Deckungsbeiträge sind wie folgt:

	DB pro Stück	Materialverbrauch
Produkt 1	20	10
Produkt 2	18	8
Produkt 3	16	5

Es muss nun errechnet werden, für welche Produktion der Deckungsbeitrag maximiert wird.

Von Produkt 1 können 10 Stück hergestellt werden: Gesamtdeckungsbeitrag: 200

Von Produkt 2 können 12 Stück produziert werden: Gesamtdeckungsbeitrag: 216

Von Produkt 3 können 20 Stück produziert werden: Gesamtdeckungsbeitrag: 320

Das Produkt 3 zu produzieren wäre also das optimale Produktionsprogramm.

Klausuraufgaben zu diesem Thema haben meistens das folgende Format:

Folgende Tabelle gibt an, welche Rohstoffe zur Produktion der beiden Güter A und B benötigt werden, welche Mengen maximal abgesetzt werden können, die Absatz- und Beschaffungspreise und welche Mengen der Rohstoffe zur Verfügung stehen:

Produkt\Rohstoff	R1	R2	Absatzmenge	Absatzpreis
A	5	4	100	12
B	2	6	120	10
verfügbare Menge	600	1.200		
Beschaffungspreis	1	0,5		

- Ermittle zunächst ob es einen Engpass gibt.
- Bei welchem Rohstoff liegt ein Engpass vor?
- Bestimme die engpassbezogenen Deckungsbeiträge.
- Bestimme das optimale Produktionsprogramm.

**Antwort:**

a) Zunächst muss man prüfen ob genug Rohstoffe zur Verfügung stehen, wenn die maximale Absatzmenge produziert wird. Produziert wird ein Gut natürlich nur, wenn es einen positiven Deckungsbeitrag hat.

$$\text{Deckungsbeitrag A: } 12 - (5 * 1 + 4 * 0,5) = 5$$

$$\text{Deckungsbeitrag B: } 10 - (2 * 1 + 6 * 0,5) = 5$$

Beide Güter haben einen positiven Deckungsbeitrag. Will man von beiden die maximale Absatzmenge produzieren, so werden für das Produkt A  $100 * 5 = 500$  R1 und  $100 * 4 = 400$  R2 benötigt. Für Produkt B werden  $120 * 2 = 240$  R1 und  $120 * 6 = 720$  R2 benötigt. Insgesamt werden also 740 R1 und 1.120 R2 benötigt. Es liegt also ein Engpass bei Rohstoff R1 vor (womit auch Frage b) beantwortet ist).

c) Die engpassbezogenen relativen Deckungsbeiträge sind:

$$\text{für Gut A: } 5/5=1$$

$$\text{für Gut B: } 5/2=2,5$$

d) Da das Gut B den höheren relativen Deckungsbeitrag hat, sollten zunächst 120 Einheiten des Gutes B produziert werden. Dabei werden 240 Einheiten des Rohstoffes R1 verbraucht. Die restlichen 360 Einheiten können zur Produktion von 72 Einheiten des Gutes A genutzt werden.

## Aufgaben zu 6.0

### Aufgabe 6.0.1

Eine Bäckerei backt 3 Arten von Broten. Die Brote haben verschiedene Backzeiten, Kosten und Absatzpreise.

	Backzeit	variable Stückkosten	Preis
Brot A	5	1	2
Brot B	7	2	4
Brot C	15	4	8

Pro Periode stehen der Bäckerei 10.000 Minuten zur Verfügung

- Berechne die Deckungsbeiträge der Brote.
- Wie viele Brote von welcher Sorte sollte die Bäckerei backen, um ihren Gewinn zu maximieren?
- Berechne die Preisuntergrenze von Brot B, bei der das Backen von Brot B gerade noch optimal ist (bevor ein anderes Brot gebacken wird).

### Aufgabe 6.0.2

Ein Getränkeproduzent produziert drei Brausesorten mit biologischen Geschmacksverstärkern. Die Geschmacksverstärker sind selten und teuer. Pro Periode stehen nur 10.000ml zur Verfügung. Pro 100ml kostet der Geschmacksverstärker 2€. Der Bedarf, Preis sowie die Kosten (ohne Geschmacksverstärker) der einzelnen Brausen sind in der folgenden Tabelle angegeben:

	Variable Stückkosten pro Liter	Bedarf Geschmacksverstärker in ml	Preis
Brause A	1	100	4
Brause B	1,2	200	6
Brause C	1,5	250	8

Es fallen Fixkosten in Höhe von 300€ an.

- Bestimme das optimale Produktionsprogramm. Wie viel Liter wird von welcher Brause produziert?
- Wie hoch ist der maximale Periodengewinn?
- Berechne die Preisuntergrenzen der drei Brausen.

**Aufgabe 6.0.3**

Ein Unternehmen fertigt Kugelschreiber und Füller an. Beide werden an 2 Maschinen gefertigt. Die folgende Tabelle gibt die Kosten der beiden Maschinen und ihre Kapazität wieder.

	Kosten pro Minute	Kapazität in min
Maschine 1	2	800
Maschine 2	1,5	800

Kosten, Preise, Bearbeitungszeit an Maschine 1 (M1) und Maschine 2 (M2) und maximale Verkaufsmenge sind folgender Tabelle zu entnehmen:

	Variable Materialkosten	Preis	Zeit an M1	Zeit an M2	max. Verkaufsmenge
Kugelschreiber	1	20	4	5	100
Füller	1,5	30	7	8	50

Fixkosten werden vernachlässigt.

- a) Berechne die Deckungsbeiträge.
- b) Gibt es einen Engpass?
- c) Berechne die engpassbezogenen Deckungsbeiträge. Was sollte zuerst produziert werden?

## Lösungen zu 6.0

### Lösung zu 6.0.1

a) Die Deckungsbeiträge sind die Differenz aus Preis und variablen Kosten:

Deckungsbeitrag Brot A: 1€

Deckungsbeitrag Brot B: 2€

Deckungsbeitrag Brot C: 4€

b) Da es eine zeitliche Beschränkung gibt, müssen die relativen Deckungsbeiträge berechnet werden:

rel. Deckungsbeitrag Brot A: 1€ pro 5 Minuten = 0,2€ pro Minute

rel. Deckungsbeitrag Brot B: 2€ pro 7 Minuten = 0,286€ pro Minute

rel. Deckungsbeitrag Brot C: 4€ pro 15 Minuten = 0,267€ pro Minute

Das Brot B sollte gebacken werden! Es können insgesamt  $\frac{10.000}{7} = 1.428,57$  Brote gebacken werden.

c) Sobald die relativen Deckungsbeiträge des Brotes B die relativen Deckungsbeiträge des Brotes C unterschreitet wird Brot C gebacken. Gesucht ist also der Preis für Brot B, bei dem der relative Deckungsbeitrag des Brotes B gerade 0,267€ pro Minute ist. Man stellt die Formel für den relativen Deckungsbeitrag auf und nimmt den Preis als Variable P.

$$\frac{p - 2}{7} = 0,267$$

Daraus folgt:  $p = 3,87$

**Lösung zu 6.0.2**

a) Die Brause mit den höchsten relativen Deckungsbeiträgen sollte produziert werden. Bei den Kosten müssen nun neben den variablen Stückkosten noch die Kosten für den Geschmacksverstärker berücksichtigt werden.

$$\text{Rel. Deckungsbeitrag Brause A: } \frac{4-(1+1*2)}{1} = 1\text{€ pro 100ml}$$

$$\text{Rel. Deckungsbeitrag Brause B: } \frac{6-(1,2+2*2)}{2} = 0,4\text{€ pro 100ml}$$

$$\text{Rel. Deckungsbeitrag Brause C: } \frac{8-(1,5+2,5*2)}{2,5} = 0,6\text{€ pro 100ml}$$

Brause A sollte produziert werden.

b) Es können maximal  $\frac{10.000}{100} = 100$  Liter von Brause A produziert werden. Pro Liter beträgt der Erlös 4€. Dem stehen Fixkosten von 300€ und variable Kosten von 3€ pro Liter gegenüber. Der Gewinn beträgt demnach  $4.00 - 3.00 - 300 = -200\text{€}$ .

c) Die Preisuntergrenzen entsprechen den variablen Kosten (inkl. der variablen Kosten für den Geschmacksverstärker):

$$\text{Preisuntergrenze Brause A: } 1 + 2 * 1 = 3$$

$$\text{Preisuntergrenze Brause B: } 1,2 + 2 * 2 = 5,2$$

$$\text{Preisuntergrenze Brause C: } 1,5 + 2,5 * 2 = 6,5$$

**Lösung zu 6.0.3**

a) Die Deckungsbeiträge sind die Differenz aus Preis und variablen Kosten:

$$\text{Deckungsbeitrag Kugelschreiber: } 20 - 1 - (4 * 2) - (5 * 1,5) = 3,5\text{€}$$

$$\text{Deckungsbeitrag Füller: } 30 - 1,5 - (7 * 2) - (8 * 1,5) = 2,5$$

b) Für die Maximalproduktion von Kugelschreibern wird die Maschine 1 für 400 Minuten benötigt und die Maschine 2 für 500 Minuten. Die Füllerproduktion benötigt 350 Minuten der Maschine 1 und 400 Minuten der Maschine 2. Es gibt also nur bei Maschine 2 einen Engpass, da  $500 + 400 > 800$ .

c) Engpassbezogene Deckungsbeiträge:

$$\text{Kugelschreiber: } \frac{3,5}{5} = 0,7$$

$$\text{Füller: } \frac{2,5}{8} = 0,3125$$

Zuerst sollten so viele Kugelschreiber wie möglich produziert werden.

## 7.0 Optimales Produktionsprogramm bei mehreren Engpässen / Simplex Algorithmus

Dieses Thema ist sehr komplex. Den Simplex Algorithmus ist eigentlich ein Thema aus „Einführung in die Wirtschaftsmathematik und Statistik“ und das optimale Produktionsprogramm ist ein Thema aus „Internes Rechnungswesen und funktionale Steuerung“. In dem Kurs wird übrigens auf die Lösung des Problems mit mehreren Engpässen verzichtet. In diesem Kurs, in dem ja eigentlich die verschiedenen Themen der BWL nur einführend behandelt werden, geht die Fernuni tiefer in die Materie. Zum Glück wird das Thema sehr selten geprüft.

### Bestimmung des optimalen Produktionsprogramms mit mehreren Engpässen

Gibt es mehrere Engpässe, so entsteht ein lineares Optimierungsproblem. Dieses wird mit der Simplexmethode gelöst.

Ein lineares Optimierungsproblem besteht immer aus einer Zielfunktion, die maximiert oder minimiert werden soll und mehreren Nebenbedingungen, die eingehalten werden müssen. Bei der Programmplanung besteht die Zielfunktion aus der Maximierung der Deckungsbeiträge. Die Nebenbedingungen sind die Faktorbeschränkungen oder Absatzhöchstmengen.

Zum Simplex Algorithmus:

Bei der linearen Optimierung wird eine Zielfunktion unter Einhaltung einer oder mehrerer Nebenbedingungen optimiert. Mathematisch wird also eine Funktion  $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  gegeben und zu den  $x_i$  werden Nebenbedingungen aufgestellt. Da es sich um lineare Optimierung handelt, ist  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  eine Funktion erster Ordnung.

**Beispiel** für ein lineares Optimierungsproblem :

Ein Unternehmen bietet zwei verschiedene Produkte mit folgenden Kennzahlen an.

	Produkt 1	Produkt 2
Erlös pro Stück	8	22
Gesamtkosten pro Stück	3	8
Arbeitseinsatz in h	2	4
Kapitaleinsatz in €	4	1

Die Gesamtkapazitäten für Arbeit und Kapital sind folgendermaßen beschränkt:

- Arbeit max. 7.000h
- Kapital max. 6.000€



Ziel der linearen Optimierung ist es nun, den Gewinn zu maximieren und dabei die Faktorbeschränkungen einzuhalten.

Die Zielfunktion ist  $\max z = 5x_1 + 14x_2$

(5 und 14 sind der Gewinn, der pro verkauftem Produkt 1 bzw. Produkt 2 anfällt)

Die Nebenbedingungen sind:

$$2x_1 + 4x_2 \leq 7.000$$

(Beschränkung für den Arbeitseinsatz)

und

$$4x_1 + x_2 \leq 6.000$$

(Beschränkung für den Kapitaleinsatz)

Außerdem wird gefordert, dass der Absatz nicht negativ werden kann:

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

Um die  $\leq$  Bedingungen in  $=$  Bedingungen zu überführen, werden nun sogenannte Schlupfvariablen eingeführt.

Aus

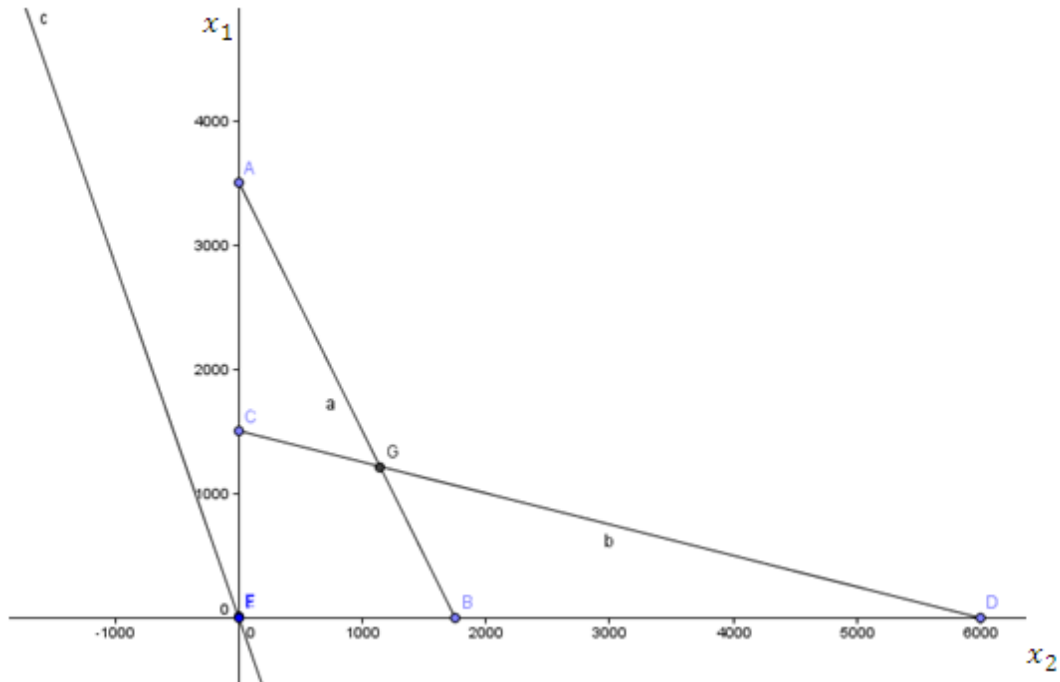
$$ax_1 + bx_2 \geq 0$$

wird so

$$ax_1 + bx_2 + s_1 = 0$$

Grafische Lösung eines linearen Optimierungsproblems (LOP)

Für 2 unabhängige Variablen  $x_1$  und  $x_2$  lassen sich Zielfunktion und Nebenbedingungen einfach zeichnen (Gleichungen nach  $x_1$  umstellen):



Die erste Restriktion ist die Strecke a, die zweite Restriktion ist die Strecke b und die Gerade durch den Nullpunkt ist die Zielfunktion. Diese gilt es soweit wie möglich nach oben/rechts zu verschieben. Der Definitionsbereich wird durch die Punkte 0, B, G, C begrenzt. Es ist zu erkennen, dass die Zielfunktion im Punkt B maximal wird.

**Achtung:** Bei Minimierungsproblemen muss die Gerade der Zielfunktion Richtung Nullpunkt verschoben werden.

### Lösen eines LOP mit dem Simplex-Algorithmus

Der sogenannte Simplex - Algorithmus löst das LOP in Tabellenform. Wie ein LOP in Tabellenform überführt und gelöst wird, versteht man am besten durch ein **Beispiel**:

Folgendes LOP soll mit dem Simplex Algorithmus gelöst werden:

$$\max x_0 = x_1 + 2x_2$$

Unter den Nebenbedingungen (u.d.N.)

$$-x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_1 \leq 6$$

$$x_2 \leq 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Zunächst muss für jede  $\leq$  Gleichung eine Schlupfvariable eingeführt werden. Wir nennen diese 3 Variablen  $x_3, x_4, x_5$ .

$$-x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1 + x_4 = 6$$

$$x_2 + x_5 = 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Das Simplex Tableau hat nun folgendes Schema:

$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$
1	-1	-2	0	0	0	0
0	-1	1	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0	6
0	0	1	0	0	1	5

**Zur Notation:** Wie du siehst, gibt es in dem Tableau 4 Einheitsvektoren. Die zugehörigen Variablen nennt man Basisvariablen und sagt auch, sie sind „in der Basis“. In der Ausgangslösung ist der Zielfunktionswert Null und die drei Schlupfvariablen sind in der Basis. Die Nichtbasisvariablen  $x_1, x_2$  sind damit minimal, woraus auch der minimale Zielfunktionswert resultiert. Aus dem Tableau kann direkt die Basislösung abgelesen werden. Alle Nichtbasisvariablen sind 0 und die Werte der Basisvariablen können direkt auf der rechten Seite abgelesen werden ( $x_5$  ist 5,  $x_4$  ist 6, der Zielfunktionswert  $x_0$  ist 0 und  $x_3$  ist 1.)

In die erste Zeile (Zielfunktionszeile) wird immer die 1 für  $x_0$  eingetragen und die Koeffizienten aus der Zielfunktion werden mit negativen Werten in die erste Zeile eingetragen. Alle anderen Koeffizienten werden direkt in das Tableau übernommen.

Ist das Ausgangstableau aufgestellt, so kann der Simplex-Algorithmus starten:

- 1. Schritt:** Wähle als Pivotspalte die Spalte mit dem größten negativen Wert in der Zielfunktionszeile. Sind alle Werte positiv, so ist die optimale Lösung gefunden.
- 2. Schritt:** Ermittle die Quotienten aus den Werten der rechten Seite ( $b$ ) und den entsprechenden Elementen der Pivotspalte. Wähle das Element als Pivoelement, für das der Quotient am kleinsten, aber positiv ist.
- 3. Schritt:** Erzeuge an der Stelle des Pivoelementes eine 1 und darüber und darunter Nullen. Hierbei gelten alle Rechenregeln aus dem Gauß'schen Eliminationsverfahren:

- Multipliziert man eine Spalte oder Zeile mit einer Zahl, so ändert sich das Ergebnis nicht.
- Addiert (subtrahiert) man zu (von) einer Zeile (Spalte) das Vielfache einer anderen Zeile (Spalte), so ändert sich das Ergebnis nicht.
- Vertauscht man Zeilen (Spalten), so ändert sich das Ergebnis nicht.

Weiter bei 1)

Weiter mit unserem **Beispiel**:

- 1. Schritt:** Als größtes negatives Element der Zielfunktionszeile identifizieren wir  $-2$ . Die Spalte  $x_2$  wird Pivotspalte.
- 2. Schritt:** Die Quotienten aus der rechten Seite ( $b$ ) und den entsprechenden Elementen der Pivotspalte betragen:  $5/1$ ,  $6/0$ ,  $1/1$ . Das Minimum ist  $1$ . Damit wird die  $1$  in der Spalte  $x_2$  und der zweiten Zeile zum Pivoelement.
- 3. Schritt:** Hier erzeugt man nun die  $1$  an der Position des Pivoelementes (ist bereits  $1$ ) und ansonsten Nullen in der Pivotspalte. Wir erhalten nach einem Simplex Schritt das Tableau:

$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$
1	-3	0	2	0	0	2
0	-1	1	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0	6
0	1	0	-1	0	1	4

Durch den ersten Simplex Schritt ist der Zielfunktionswert von 0 auf 2 angestiegen. Da aber in der Zielfunktionszeile noch ein negativer Wert steht, sind wir nicht fertig und führen einen weiteren Simplex Schritt durch.

**1. Schritt:** Als größtes negatives Element wird -3 identifiziert und  $x_1$  wird zur Pivotspalte.

**2. Schritt:** Die Quotienten aus der rechten Seite (b) und den entsprechenden Elementen der Pivotspalte betragen:  $4/1$ ,  $6/1$ ,  $1/-1$ . Der kleinste positive Quotient ist 4 und daher wird die 1, also das letzte Element der Pivotspalte, zum Pivotelement.

**3. Schritt:** Wir erzeugen die 1 an der Stelle des Pivotelementes (ist bereits 1) und ansonsten Nullen in der Pivotspalte. Wir erhalten nach einem Simplex Schritt das Tableau:

$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$
1	0	0	-1	0	3	14
0	0	1	0	-1	1	5
0	0	0	1	1	-1	2
0	1	0	-1	0	1	4

Da in der Zielfunktionszeile noch immer ein negatives Element steht, führen wir noch einen Simplex Schritt durch und erhalten

$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$
1	0	0	0	1	1	16
0	0	1	0	0	1	5
0	0	0	1	1	-1	2
0	1	0	0	1	0	6

Aus diesem Tableau lassen sich die Lösungen ablesen. Die zum Einheitsvektor gehörenden Variablen sind in der Basis. Die Lösung lautet:  $x_1 = 6$ ,  $x_2 = 5$ ,  $x_3 = 2$ ,  $x_0 = 16$

## Aufgaben zu 7.0

### Aufgabe 7.1

Zur Produktion der Güter  $x_1$  und  $x_2$  werden drei Rohstoffe benötigt. Der Bedarf wird durch folgende Rohstoffbedarfsmatrix angegeben:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Die maximal zur Verfügung stehenden Rohstoffmengen sind:

$$v = \begin{pmatrix} 100 \\ 80 \\ 120 \end{pmatrix}$$

Das Gut  $x_1$  und  $x_2$  werden jeweils zu 1 Euro pro Stück verkauft.

Stelle das Problem grafisch dar.

## Lösungen zu 7.0

### Lösung zu 7.1

Die Zielfunktion ist natürlich, den Gewinn zu maximieren.

$$\max z = 1x_1 + 1x_2$$

Aus der  $\mathbf{R}$  und  $\mathbf{v}$  ergeben sich die Nebenbedingungen:

$$x_1 + 4x_2 \leq 100$$

$$2x_1 + 1x_2 \leq 80$$

$$5x_1 + 2x_2 \leq 120$$

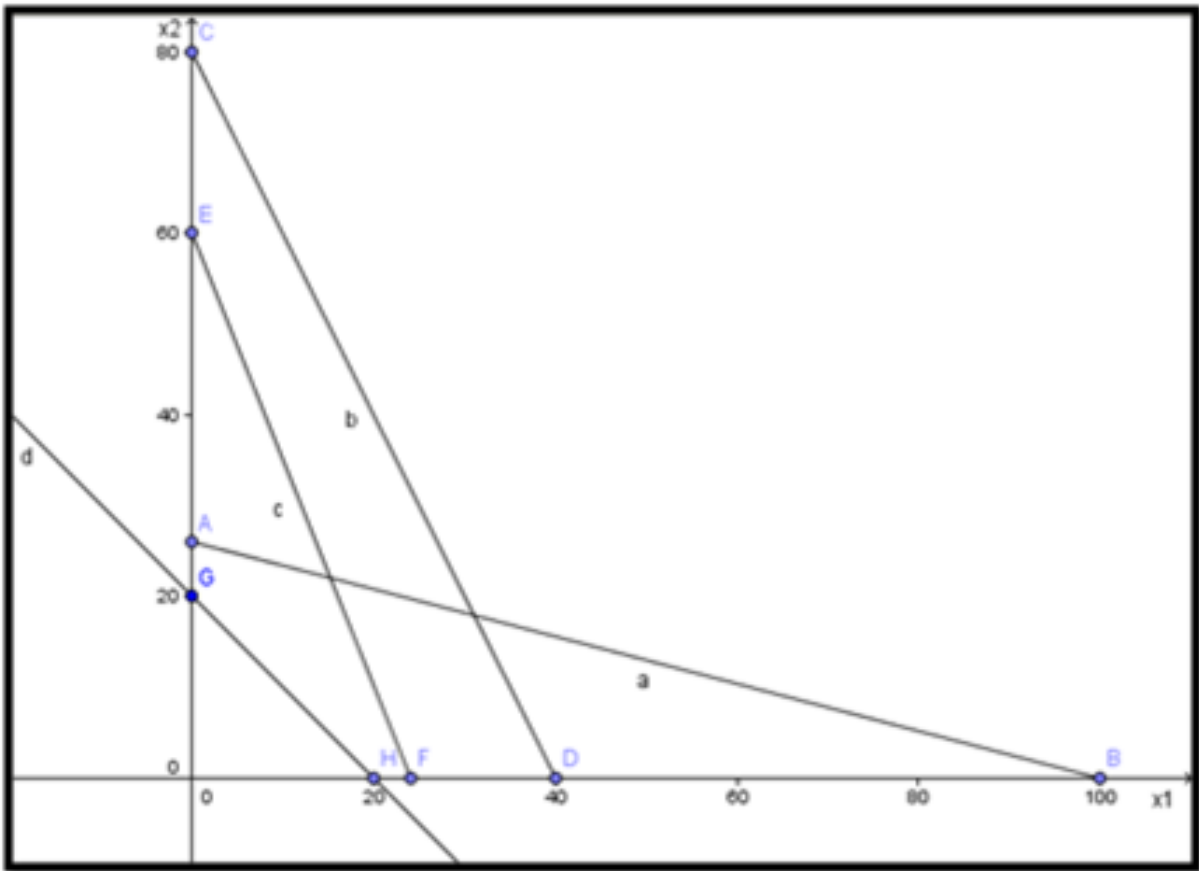
Außerdem müssen  $x_1$  und  $x_2 \geq 0$  sein.

Das Optimum ist im Schnittpunkt der Strecken a und c erfüllt (Grafik siehe nächste Seite).

Die Strecke b ergibt sich beispielsweise aus

$$2x_1 + 1x_2 \leq 80$$

Für  $x_1 = 0$  erhält man  $x_2 = 80$  und für  $x_2 = 0$  erhält man  $x_1 = 40$ . Da es sich um lineare Gleichungen handelt, werden die Punkte mit einer Geraden verbunden. Die Zielfunktion ist die Gerade d und muss nach rechts oben verschoben werden, bis eine der Nebenbedingungen erreicht wird. Alle Nebenbedingungen sind  $\leq$  Bedingungen, daher liegt der zulässige Bereich links unter den Nebenbedingungen.





## 8.0 Absatz

### Grundbegriffe

- **Absatz:** Das Wort Absatz hat in der Wirtschaftswissenschaft mehrere Bedeutungen:

- Verkauf der Güter/Leistungen
- Menge der abgesetzten Güter/Leistungen
- aktive, zielgerichtete Gestaltung der Absatzbeziehungen

- **Markt:** Der Markt ist der Ort, an dem Angebot und Nachfrage zusammenkommen. Je nachdem, in welcher Zahl/Marktmacht sich Anbieter und Nachfrager gegenüberstehen, unterscheidet man folgende Marktformen (diese sind schon aus dem Kurs „Einführung in die VWL bekannt):

Nachfrager\Anbieter	Viele	Wenige	Einer
Viele	Polypol / vollkommene Konkurrenz	Angebotsoligopol	Monopol
Wenige	Nachfrageoligopol	bilaterales Oligopol	beschränktes Angebotsmonopol
Einer	Monopson	beschränktes Nachfragemonopol	bilaterales Monopol

- **vollkommener Markt:** Ein vollkommener Markt hat folgende Eigenschaften:

- Alle Anbieter streben nach Gewinnmaximierung (möglichst viel, möglichst teuer verkaufen) und alle Nachfrager nach Nutzenmaximierung (möglichst viel, möglichst billig kaufen).
- Es herrscht vollkommene Markttransparenz (alle Marktteilnehmer verfügen über alle relevanten Informationen).
- Homogene Güter: genormte Qualität/Gleichheit der Güter.
- Auf keiner Marktseite gibt es sachliche, persönliche, räumliche oder zeitliche Präferenzen.
- Alle Marktteilnehmer reagieren sofort auf Änderungen der Marktbedingungen (z.B. Preisänderungen).

- **monopolistisches Marktverhalten:** Ein Anbieter verhält sich monopolistisch, wenn er davon ausgeht, dass seine verkaufte Menge nur von seiner eigenen Preispolitik und dem Nachfrageverhalten, aber nicht von seiner Konkurrenz beeinflusst wird.

- **konkurrenzgebundene Verhaltensweise:** Im Gegensatz zur monopolistischen Verhaltensweise wird angenommen, dass das Verhalten der Konkurrenz die verkaufte Menge des Anbieters beeinflusst.

- **atomistische Verhaltensweise:** Der Anbieter geht davon aus, dass sein Marktanteil so klein ist, dass er durch Änderung seiner Angebotsmenge den Preis nicht beeinflussen kann.
- **polipolistische Verhaltensweise:** Ein Anbieter hat zwar einen so geringen Marktanteil, dass Preisänderungen in einem bestimmten Preisbereich keine Absatzänderungen bewirken. Sobald der Anbieter aber Preise oberhalb (unterhalb) dieses Bereiches setzt, fällt (steigt) seine Absatzmenge.
- **oligopolistische Verhaltensweise:** Jeder Anbieter hat einen großen Marktanteil und weiß, dass jede Preisänderung Reaktionen der Nachfrager und Reaktionen der Konkurrenz bewirken. So würde die Preissenkung eines Anbieters zur Folge haben, dass mehr Nachfrager sein Produkt kaufen und seine Konkurrenz ebenfalls die Preise senken würde (wodurch die Nachfrager wieder vermehrt deren Produkte nachfragen würden).

### Preispolitik im Monopol

Im Monopol hat ein Anbieter keine Konkurrenz und auf der Nachfrageseite herrscht vollkommene Konkurrenz (viele kleine Nachfrager).

Es wird eine lineare Preis-Absatzfunktion angenommen. Mit jeder Preisänderung des Monopolisten fällt oder steigt die Absatzmenge um denselben Faktor.

Mathematisch schreibt man:

$$p = a - bx$$

p ist der Preis und x die Absatzmenge.

Wählt der Monopolist einen Preis, bei dem die Nachfrage auf Null sinkt, so nennt man dies den Prohibitivpreis. Wählt er einen Preis, bei dem er die gesamte mögliche Nachfrage befriedigt, so nennt man dies die Sättigungsmenge.

### Gewinnmaximale Absatzmenge des Monopolisten

Da der Monopolist den Preis bestimmen kann, wird er den Preis wählen, der seinen Gewinn maximiert. Den gewinnmaximalen Preis findet man über die gewinnmaximale Menge und diese durch Ableitung der Gewinnfunktion nach der Absatzmenge. Bedingungen für ein Maximum sind wie immer eine Nullstelle in der ersten Ableitung und ein negativer Wert der zweiten Ableitung an dieser Stelle.

Gewinnfunktion:

$$G(x) = U(x) - K(x) = p * x - k_v x - K_f$$

wobei

U für den Umsatz,

K für die Kosten,

$k_v$  für die variablen Kosten und

$K_f$  für die Fixkosten steht.

Setzt man nun

$$p = a - bx$$

ein, so erhält man:

$$G(x) = ax - bx^2 - k_v x - K_f$$

Die Ableitung dieser Funktion nach x ist:

$$G'(x) = -2bx + a - k_v$$

und die zweite Ableitung beträgt:

$$G''(x) = -2b$$

Die Gewinnfunktion hat also ein Maximum bei

$$x^* = \frac{a - k_v}{2b}$$

Den gewinnmaximalen Preis erhält man durch Einsetzen der gewinnmaximalen Menge in die Preis - Absatzfunktion:

$$p^* = a - \frac{a - k_v}{2} = \frac{a + k_v}{2}$$

Außerdem solltest du wissen: Im Gewinnmaximum ist der Grenzerlös genau so groß wie die Grenzkosten. Der Monopolist wird den Absatz solange steigern, wie der Erlös jeder zusätzlich verkauften Einheit höher ist als deren Kosten.

Die gewinnmaximale Menge nennt man auch Cournot-Menge. Den gewinnmaximalen Preis Cournot-Preis.

### Preiselastizität der Nachfrage

Die Preiselastizität der Nachfrage gibt an, wie sich die Nachfrage verändert, wenn der Preis um 1% verändert wird.

Mathematisch ist dies:

$$\eta_{x,p} = \frac{\frac{dx}{x}}{\frac{dp}{p}} = \frac{dx}{dp} * \frac{p}{x}$$

**Beispiel:** Berechne die Preiselastizität der Nachfrage für folgende Preis-Absatz-Funktion:

$$p(x) = 10 - 2x$$

**Antwort:**

Zunächst muss die Funktion nach x aufgelöst werden:

$$x = -0,5p + 5$$

Diese leitet man nach p ab:

$$\frac{dx}{dp} = -0,5$$

Daraus folgt für die Preiselastizität:

$$\eta_{x,p} = \frac{dx}{dp} * \frac{p}{x} = -0,5 \frac{p}{x}$$

Für x kann man nun noch

$$x = -0,5p + 5$$

einsetzen und erhält:

$$\eta_{x,p} = \frac{p}{p - 10}$$

Allgemein gilt auch für eine lineare Preis-Absatz-Funktion  $p(x) = a - bx$ :

$$\eta_{x,p} = \frac{p}{p - a}$$

### Beziehung zwischen der Preiselastizität der Nachfrage und dem Grenzumsatz

Man kann die Preiselastizität der Nachfrage wie folgt umformen:

$$\eta_{x,p} = \frac{\frac{dx}{x}}{\frac{dp}{p}} = \frac{dx}{dp} * \frac{p}{x}$$

$dx * p$  entspricht gerade der Umsatzänderung aufgrund einer geringen Mengenänderung.

$dp * x$  entspricht gerade der Umsatzänderung aufgrund einer geringen Preisänderung.

Die Preiselastizität der Nachfrage stellt also das Verhältnis zwischen den beiden Umsatzänderungen dar, die sich bei einer Preisänderung ergeben.

**Beispiel:** Durch die Preissenkung steigt einerseits die abgesetzte Menge und damit der Gesamtumsatz. Andererseits wird die gesamte abgesetzte Menge zu niedrigeren Preisen verkauft, was die Umsätze verringert.

Daraus lässt sich nun folgende Schlussfolgerung ziehen:

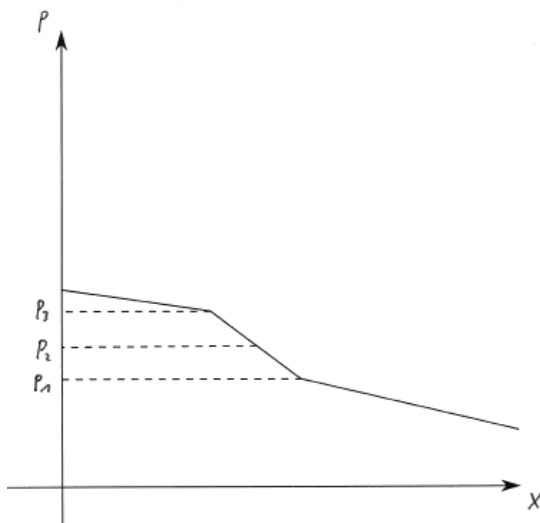
- Ist die Nachfrage sehr preiselastisch, so ist der Mengeneffekt größer als der Preiseffekt und der Preis sollte gesenkt werden. Die Preiselastizität der Nachfrage ist hier  $< -1$ .
- Ist die Nachfrage aber sehr preisunelastisch, so überwiegt der Preiseffekt den Mengeneffekt und der Preis sollte erhöht werden. Die Preiselastizität der Nachfrage ist hier  $> -1$ .
- Sind Preiseffekt und Mengeneffekt gleich, so kann der Umsatz nicht mehr durch Preisänderungen gesteigert werden. Im Umsatzmaximum sind also Preis- und Mengeneffekt gleich groß. Die Preiselastizität der Nachfrage ist  $-1$ .

### Preispolitik bei polypolistischer Konkurrenz

Eine polypolistische Konkurrenzsituation tritt zum Beispiel auf, wenn es für die Anbieter möglich ist, ihre Kunden an sich zu binden. Sie reagieren also bei kleinen Preisänderungen nicht oder nur sehr wenig. Erst wenn die Preisdifferenz zu den Konkurrenzanbietern zu groß wird, werden sie die Produkte der Konkurrenz nachfragen.

**Beispiel:** Ein Rentner ist sein Leben lang mit einem VW gefahren und es bedeutet für ihn Zusatzaufwand, sich an ein anderes Auto zu gewöhnen. Auch wenn VW im Vergleich zur Konkurrenz teurer wird, wird der Mann weiterhin VW Autos kaufen. Erst wenn der Preisunterschied zur Konkurrenz zu groß wird, wird er die Mühe auf sich nehmen und sich an ein anderes Auto gewöhnen.

Die Preis - Absatz Funktion bei polypolistischer Konkurrenz hat folgendes Aussehen:



### Gewinnmaximierung bei polypolistischer Konkurrenz

Es kann im Fall polypolistischer Konkurrenz dazu kommen, dass die Bedingung für ein Gewinnmaximum (Grenzerlös = Grenzkosten) an mehr als einer Stelle erfüllt ist.

In diesem Fall muss man für jeden Punkt, an dem diese Bedingung erfüllt ist, den Gewinn errechnen.

Tendenziell ist es für den Anbieter in polypolistischen Situationen vorteilhaft, einen Preis zu realisieren, der am oberen Ende des preisunelastischen Teils der Preis-Absatz Funktion liegt. So nutzt er die Vorteile, die ein monopolistischer Anbieter hat, aus.

## Aufgaben zu 8.0

### Aufgabe 8.1

Gegeben sei ein Monopol mit folgender Preis-Absatz-Funktion:

$$p(x) = 100 - 0,5x$$

Die Kostenfunktion sei:

$$K(x) = 50 + 2x$$

- a) Berechne die Gewinnfunktion in Abhängigkeit von  $x$ .
- b) Berechne die gewinnmaximale Menge.
- c) Berechne die Preiselastizität der Nachfrage im Gewinnmaximum.

## Lösungen zu 8.0

### Lösung zu 8.1

a) Der Gewinn ergibt sich als Differenz aus Erlös (Umsatz) und Kosten. Der Erlös berechnet sich als Preis \* Menge.

$$G(x) = (100 - 0,5x)x - (50 + 2x) = -0,5x^2 + 98x - 50$$

b) Das Maximum dieser Funktion ergibt sich aus der Nullstelle der ersten Ableitung:

$$G'(x) = -x + 98 = 0$$

$$x = 98$$

Um sicherzugehen, dass dies auch ein Maximum ist (und kein Minimum), setzt man 98 in die zweite Ableitung ein:

$$G''(x) = -1$$

Die zweite Ableitung ist negativ. Daher handelt es sich um ein Maximum.

c) Die Preiselastizität der Nachfrage ist definiert als:

$$\eta_{x,p} = \frac{p}{p - a}$$

Bei einer gewinnmaximalen Menge von 98 ergibt sich ein Preis von:

$$p(x) = 100 - 0,5 * 98 = 51$$

Die Preiselastizität der Nachfrage beträgt für diesen Preis:

$$\eta_{x,p} \frac{51}{51 - 100} = -1,04$$

Weitere Klausuraufgaben könnten lauten:

- Leite die Formel für den gewinnmaximalen Preis eines Monopolisten allgemein her.
- Leite die Preiselastizität der Nachfrage allgemein her.
- Erläutere die Beziehung zwischen der Preiselastizität der Nachfrage und dem Grenzümsatz
- Wie hoch ist die Preiselastizität der Nachfrage im Umsatzmaximum?



## 9.0 Der finanzwirtschaftliche Prozess

### Finanzmathematische Grundlagen

#### Einführung

Die Finanzmathematik dieses Kurses beschränkt sich auf die Zinsrechnung und die Rentenrechnung. Bei der Zinsrechnung wird berechnet, was Kapital zu einem anderen (früheren oder späteren) Zeitpunkt wert ist, wenn am Markt ein bestimmter Zins herrscht.

Dabei wird unterschieden ob

- der Wert des Kapitals zu einem späteren Zeitpunkt ermittelt werden soll (Ich habe 100 Euro und lege sie 1 Jahr lang zu 5% an). Man sagt das Kapital wird „aufgezinst“.
- der Wert des Kapitals zu einem früheren Zeitpunkt ermittelt werden soll (Ich möchte in einem Jahr 100 Euro haben und möchte wissen, wie viel Geld ich heute zu 5% anlegen muss). Dies nennt man „abzinsen“.

Als „Rente“ werden regelmäßige Zahlungen gleicher Höhe bezeichnet. Bei der Rentenrechnung geht es darum, diese zu bewerten.

**Beispiel:** Ich habe in der Lotterie gewonnen und werde für die kommenden 5 Jahre monatlich 1.000€ bekommen. Ich möchte diese Zahlungen jetzt an dich verkaufen. Die Rentenrechnung beschäftigt sich mit der Bewertung dieser Zahlung.

## Der Zeitwert des Geldes

Man kann eigentlich die gesamte Finanzmathematik dieses Kurses auf einer Seite erklären - wenn du verstehst, warum eine Zahlung zu verschiedenen Zeitpunkten verschieden viel wert ist, kannst du dir alle Rechnungen davon ableiten.

Der Wert einer Zahlung oder eines Geldbetrages schwankt in den meisten Fällen mit der Zeit. Wenn ich 100 Euro vergrabe und sie nach 10 Jahren wieder raushole, dann wird ihr Wert wahrscheinlich gefallen sein. Das liegt ganz einfach daran, dass die Preise tendenziell mit der Zeit steigen (Inflation).

Darüberhinaus gibt es aber noch einen Effekt der Entwertung. Indem ich mein Geld vergraben habe, sind mir Erträge entgangen. Ich hätte dieses Geld für mich arbeiten lassen können und einen Zins erzielen können.

In der Finanzmathematik ist für den Wert des Geldes nicht die Kaufkraft entscheidend, sondern die Ertragskraft bzw. der Zins. Besteht für mich die Möglichkeit, 100€ ein Jahr lang zu 10% anzulegen, dann sind 100€ heute genauso viel wert wie 110€ in einem Jahr. Wichtig dabei ist, dass der erzielbare Zins sicher ist. Wäre der Zins von 10% in einem Jahr mit einem Risiko verbunden, so würde ich evtl. die sicheren 100€ heute höher bewerten als die unsicheren 110€ in einem Jahr. Zur Bewertung unsicherer Zahlungsreihen kommen wir später. Jetzt ist erst einmal wichtig: Bei der Bewertung einer Zahlung benutzen wir immer den risikolosen Zinssatz. Dieser wird auch Kalkulationszins genannt.

Der Zeitwert des Geldes, also der Wert des Geldes in Abhängigkeit von der Zeit, ist natürlich stark von der Höhe des Kalkulationszinses abhängig. Bei einem Zins von 0% würde sich der Wert des Geldes beispielsweise nicht ändern. Bei einem Zinssatz von 100% pro Jahr halbiert sich der Wert des Geldes in einem Jahr.

Wichtig für den Bereich der Investition und Finanzierung ist es nun, Zahlungen, die an 2 oder mehr verschiedenen Zeitpunkten getätigt werden, vergleichbar zu machen.

### Beispiel:

Was ist mehr wert: 100€ heute oder 110€ in einem Jahr?

Um Zahlungen vergleichbar zu machen, muss man sie auf dieselbe zeitliche Ebene bringen. Dies geschieht durch Aufzinsen und Abzinsen. Möchte ich eine Zahlung von 100€ heute mit einer Zahlung von 110€ in einem Jahr vergleichen (Zinssatz 5%), so kann ich entweder...

- die 100€ aufzinsen:  $100 * 1,05 = 105€$

- oder die 110€ abzinsen:  $\frac{110}{1,05} = 104,76€$

100€ haben also in einem Jahr einen Wert von 105 €. 110€ in einem Jahr haben heute einen Wert von 104,76€. Ändert sich der Zinssatz, so ändern sich auch diese Werte.

## Zinsrechnung

Der einfachste und eigentlich triviale Fall der Finanzmathematik ist die Zinsrechnung. Die Fragestellung hier ist: Wie verändert sich der Wert meines Kapitals mit der Zeit, wenn ich es verzinslich anlege?

Bei diesen Aufgaben werden immer drei Größen gegeben:

- Ein Geldbetrag  $c$ .
- Ein Zinssatz  $r$ .
- Ein Zeitraum  $t$ .

Lege ich Kapital in Höhe von  $c = 100\text{€}$  für  $t = 2$  Perioden zu  $r = 10\%$  an, so berechnet man den Kapitalbetrag in 2 Jahren folgendermaßen:

Kapital nach einem Jahr:

$$100 + 0,1 * 100 = 110$$

Der Betrag von 110€ wird nun erneut für ein Jahr angelegt:

$$110 + 0,1 * 110 = 121$$

Die erste Rechnung lässt sich auch schreiben als:

$$1,1 * 100 = 110$$

Genauso kann die zweite Rechnung geschrieben werden:

$$1,1 * 110 = 121$$

Möchte ich die Rechnung nicht in 2 Schritten machen, so kann ich diese vereinfachen zu:

$$1,1 * (1,1 * 100) = 100 * 1,1^2$$

Allgemein kann man nun schreiben:  $c_t = c_0 * (1 + r)^t$

Die Zinsen aus der Wiederanlage der Zinsen einer Periode in späteren Perioden nennt man übrigens Zinseszins.

**Beispiel:**

Ein Investor legt 1.000 € für 4 Jahre zu 5% p.a. an. Berechne das Vermögen des Investors nach 3 Jahren. Wie hoch ist der Zins des letzten Jahres?

**Antwort:**

Das Vermögen in drei Jahren beträgt:

$$c_3 = c_0 * (1 + r)^3 = 1.000 * 1,05^3 = 1.157,63€$$

5% Zinsen fallen nun an auf die 1.000€ und die bereits angefallenen Zinsen von 157,63€:

$$1.157,63 * 5\% = 57,88€$$

**Achtung:** Sollte der Zins nicht über alle Perioden gleich sein, so musst du für jede Periode einzeln die Zinsen berechnen.

**Beispiel:** Ein Investor legt 1.000€ ein Jahr zu 5% und eines zu 10% an. Berechne das Vermögen nach 2 Jahren.

$$1.000 * 1,05 * 1,1 = 1.155€$$

**Abzinsung**

Ein wenig anspruchsvoller ist die Abzinsung. Hier geht es um die Fragestellung: Was ist eine Zahlung von 100€ in 3 Jahren heute wert, wenn der Zins 10% beträgt? Anders könnte man formulieren: Wie viel Geld muss ich bei einem Zins von 10% heute anlegen, um in 3 Jahren 100€ zu besitzen?

Mathematisch schreibt man das als:

$$c_0 * (1 + r)^t = c_t$$

Umgeformt nach  $c_0$ :

$$c_0 = \frac{c_t}{(1 + r)^t}$$

Für das Beispiel ergibt sich:

$$\frac{100}{1,1^3} = 75,13$$

Man muss also heute 75,13€ anlegen, um in 3 Jahren 100€ zu besitzen. Mach zur Übung die Probe und zins die 75,13€ über drei Jahre zu 10% auf.

Den Faktor  $\frac{1}{(1+r)^t}$  nennt man **Abzinsungsfaktor**.

### Finanzmathematische Tabellen zur Zinsrechnung

Wie du gesehen hast, ist die Berechnung der Auf- und Abzinsungsfaktoren relativ einfach. In der Klausur kannst du die Faktoren auch an einer Tabelle ablesen. Die Zinsfaktoren sind nur von der Laufzeit und dem Zinssatz abhängig. Aus der Tabelle kannst du dann den entsprechenden Wert entnehmen.

Tabelle Aufzinsungsfaktoren:

Kalkulationszinssatz													
Jahre	3%	3,5%	4%	4,5%	5%	5,5%	6%	6,5%	7%	7,5%	8%	8,5%	9%
1	1,0300	1,0350	1,0400	1,0450	1,0500	1,0550	1,0600	1,0650	1,0700	1,0750	1,0800	1,0850	1,0900
2	1,0609	1,0712	1,0816	1,0920	1,1025	1,1130	1,1236	1,1342	1,1449	1,1556	1,1664	1,1772	1,1881
3	1,0927	1,1087	1,1249	1,1412	1,1576	1,1742	1,1910	1,2079	1,2250	1,2423	1,2597	1,2773	1,2950
4	1,1255	1,1475	1,1699	1,1925	1,2155	1,2388	1,2625	1,2865	1,3108	1,3355	1,3605	1,3859	1,4116
5	1,1593	1,1877	1,2167	1,2462	1,2763	1,3070	1,3382	1,3701	1,4026	1,4356	1,4693	1,5037	1,5386
6	1,1941	1,2293	1,2653	1,3023	1,3401	1,3788	1,4185	1,4591	1,5007	1,5433	1,5869	1,6315	1,6771
7	1,2299	1,2723	1,3159	1,3609	1,4071	1,4547	1,5036	1,5540	1,6058	1,6590	1,7138	1,7701	1,8280
8	1,2668	1,3168	1,3686	1,4221	1,4775	1,5347	1,5938	1,6550	1,7182	1,7835	1,8509	1,9206	1,9926
9	1,3048	1,3629	1,4233	1,4861	1,5513	1,6191	1,6895	1,7626	1,8385	1,9172	1,9990	2,0839	2,1719
10	1,3439	1,4106	1,4802	1,5530	1,6289	1,7081	1,7908	1,8771	1,9672	2,0610	2,1589	2,2610	2,3674
11	1,3842	1,4600	1,5395	1,6229	1,7103	1,8021	1,8983	1,9992	2,1049	2,2156	2,3316	2,4532	2,5804
12	1,4258	1,5111	1,6010	1,6959	1,7959	1,9012	2,0122	2,1291	2,2522	2,3818	2,5182	2,6617	2,8127
13	1,4685	1,5640	1,6651	1,7722	1,8856	2,0058	2,1329	2,2675	2,4098	2,5604	2,7196	2,8879	3,0658
14	1,5126	1,6187	1,7317	1,8519	1,9799	2,1161	2,2609	2,4149	2,5785	2,7524	2,9372	3,1334	3,3417
15	1,5580	1,6753	1,8009	1,9353	2,0789	2,2325	2,3966	2,5718	2,7590	2,9589	3,1722	3,3997	3,6425
20	1,8061	1,9898	2,1911	2,4117	2,6533	2,9178	3,2071	3,5236	3,8697	4,2479	4,6610	5,1120	5,6044

Lege ich 100€ für 5 Jahre zu 7,5% an, so beträgt mein Vermögen nach 5 Jahren also

$$100 \cdot 1,4356 = 143,56€$$

Tabelle Abzinsungsfaktoren:

Kalkulationszinssatz													
Jahre	3%	3,5%	4%	4,5%	5%	5,5%	6%	6,5%	7%	7,5%	8%	8,5%	9%
1	0,9709	0,9662	0,9615	0,9569	0,9524	0,9479	0,9434	0,9390	0,9346	0,9302	0,9259	0,9217	0,9174
2	0,9426	0,9335	0,9246	0,9157	0,9070	0,8985	0,8900	0,8817	0,8734	0,8653	0,8573	0,8495	0,8417
3	0,9151	0,9019	0,8890	0,8763	0,8638	0,8516	0,8396	0,8278	0,8163	0,8050	0,7938	0,7829	0,7722
4	0,8885	0,8714	0,8548	0,8386	0,8227	0,8072	0,7921	0,7773	0,7629	0,7488	0,7350	0,7216	0,7084
5	0,8626	0,8420	0,8219	0,8025	0,7835	0,7651	0,7473	0,7299	0,7130	0,6966	0,6806	0,6650	0,6499
6	0,8375	0,8135	0,7903	0,7679	0,7462	0,7252	0,7050	0,6853	0,6663	0,6480	0,6302	0,6129	0,5963
7	0,8131	0,7860	0,7599	0,7348	0,7107	0,6874	0,6651	0,6435	0,6227	0,6028	0,5835	0,5649	0,5470
8	0,7894	0,7594	0,7307	0,7032	0,6768	0,6516	0,6274	0,6042	0,5820	0,5607	0,5403	0,5207	0,5019
9	0,7664	0,7337	0,7026	0,6729	0,6446	0,6176	0,5919	0,5674	0,5439	0,5216	0,5002	0,4799	0,4604
10	0,7441	0,7089	0,6756	0,6439	0,6139	0,5854	0,5584	0,5327	0,5083	0,4852	0,4632	0,4423	0,4224
11	0,7224	0,6849	0,6496	0,6162	0,5847	0,5549	0,5268	0,5002	0,4751	0,4513	0,4289	0,4076	0,3875
12	0,7014	0,6618	0,6246	0,5897	0,5568	0,5260	0,4970	0,4697	0,4440	0,4199	0,3971	0,3757	0,3555
13	0,6810	0,6394	0,6006	0,5643	0,5303	0,4986	0,4688	0,4410	0,4150	0,3906	0,3677	0,3463	0,3262
14	0,6611	0,6178	0,5775	0,5400	0,5051	0,4726	0,4423	0,4141	0,3878	0,3633	0,3405	0,3191	0,2992
15	0,6419	0,5969	0,5553	0,5167	0,4810	0,4479	0,4173	0,3888	0,3624	0,3380	0,3152	0,2941	0,2745
16	0,6232	0,5767	0,5339	0,4945	0,4581	0,4246	0,3936	0,3651	0,3387	0,3144	0,2919	0,2711	0,2519
17	0,6050	0,5572	0,5134	0,4732	0,4363	0,4024	0,3714	0,3428	0,3166	0,2925	0,2703	0,2499	0,2311
18	0,5874	0,5384	0,4936	0,4528	0,4155	0,3815	0,3503	0,3219	0,2959	0,2720	0,2502	0,2303	0,2120
19	0,5703	0,5202	0,4746	0,4333	0,3957	0,3616	0,3305	0,3022	0,2765	0,2531	0,2317	0,2122	0,1945
20	0,5537	0,5026	0,4564	0,4146	0,3769	0,3427	0,3118	0,2838	0,2584	0,2354	0,2145	0,1956	0,1784
21	0,5375	0,4856	0,4388	0,3968	0,3589	0,3249	0,2942	0,2665	0,2415	0,2190	0,1987	0,1803	0,1637
22	0,5219	0,4692	0,4220	0,3797	0,3418	0,3079	0,2775	0,2502	0,2257	0,2037	0,1839	0,1662	0,1502
23	0,5067	0,4533	0,4057	0,3634	0,3256	0,2919	0,2618	0,2349	0,2109	0,1895	0,1703	0,1531	0,1378
24	0,4919	0,4380	0,3901	0,3477	0,3101	0,2767	0,2470	0,2206	0,1971	0,1763	0,1577	0,1412	0,1264
25	0,4776	0,4231	0,3751	0,3327	0,2953	0,2622	0,2330	0,2071	0,1842	0,1640	0,1460	0,1301	0,1160
26	0,4637	0,4088	0,3607	0,3184	0,2812	0,2486	0,2198	0,1945	0,1722	0,1525	0,1352	0,1199	0,1064
27	0,4502	0,3950	0,3468	0,3047	0,2678	0,2356	0,2074	0,1826	0,1609	0,1419	0,1252	0,1105	0,0976
28	0,4371	0,3817	0,3335	0,2916	0,2551	0,2233	0,1956	0,1715	0,1504	0,1320	0,1159	0,1019	0,0895
29	0,4243	0,3687	0,3207	0,2790	0,2429	0,2117	0,1846	0,1610	0,1406	0,1228	0,1073	0,0939	0,0822
30	0,4120	0,3563	0,3083	0,2670	0,2314	0,2006	0,1741	0,1512	0,1314	0,1142	0,0994	0,0865	0,0754
35	0,3554	0,3000	0,2534	0,2143	0,1813	0,1535	0,1301	0,1103	0,0937	0,0796	0,0676	0,0575	0,0490
40	0,3066	0,2526	0,2083	0,1719	0,1420	0,1175	0,0972	0,0805	0,0668	0,0554	0,0460	0,0383	0,0318

Eine Zahlung von 100 € in 5 Jahren bei einem Zinssatz von 7,5% hätte heute also einen Wert von

$$100 \cdot 0,6966 = 69,66 \text{ €}$$

## Rentenrechnung

Bei der Rentenrechnung geht es darum, eine regelmäßige Zahlung gleich hoher Beträge zum Zeitpunkt  $t = 0$  zu bewerten.

Dies kann einerseits geschehen, indem man alle einzelnen Zahlungen mit den entsprechenden Abzinsungsfaktoren multipliziert und das Ergebnis addiert. Diese Methode hast du im letzten Kapitel kennengelernt. Besonders für lange Zeitreihen ist dies aber sehr arbeitsintensiv. Durch die Nutzung von Rentenbarwertfaktoren kann man die Berechnung allerdings in einem Schritt machen.

Auf die Herleitung möchte ich verzichten, da diese auf keinen Fall klausurrelevant sein wird.

## Rentenbarwertfaktor

Der Rentenbarwertfaktor ist der Faktor, mit dem ich die Zahlung einer einzelnen Periode multiplizieren muss, um den Wert der gesamten Zahlungsreihe zum Zeitpunkt  $t=0$  (den Barwert) zu bekommen. Der Rentenbarwertfaktor ist abhängig von der Periodenanzahl und dem Periodenzins.

Man schreibt für den Rentenbarwertfaktor auch RBF.

Mathematisch gilt:

$$RBF(T, r) = \frac{1 - (1 + r)^{-T}}{r}$$

wobei T für die Anzahl an Perioden steht.

**Beispiel:** Ein Investor erhält über die kommenden 10 Jahre zum Ende jeden Jahres eine Zahlung von 10.000€. Der Zins ist über die gesamte Laufzeit fest bei 10% p.a. Er möchte den Wert dieser Zahlungen zum jetzigen Zeitpunkt ermitteln.

Antwort: Zur Berechnung benötigt man den Rentenbarwertfaktor für 10 Jahre und 10%:

$$RBF(10 \text{ Jahre}, 10\%) = \frac{1 - (1 + 0,1)^{-10}}{0,1} = \frac{1 - 0,3855}{0,1} = 6,14$$

Auch zu Rentenbarwertfaktoren gibt es Tabellen. Da die Berechnung der RBFs etwas aufwendiger ist, solltest du die Tabellen regelmäßig nutzen.



Tabelle Rentenbarwertfaktoren:

Kalkulationszinssatz													
Jahre	3%	3,5%	4%	4,5%	5%	5,5%	6%	6,5%	7%	7,5%	8%	8,5%	9%
1	0,9709	0,9662	0,9615	0,9569	0,9524	0,9479	0,9434	0,9390	0,9346	0,9302	0,9259	0,9217	0,9174
2	1,9135	1,8997	1,8861	1,8727	1,8594	1,8463	1,8334	1,8206	1,8080	1,7956	1,7833	1,7711	1,7591
3	2,8286	2,8016	2,7751	2,7490	2,7232	2,6979	2,6730	2,6485	2,6243	2,6005	2,5771	2,5540	2,5313
4	3,7171	3,6731	3,6299	3,5875	3,5460	3,5052	3,4651	3,4258	3,3872	3,3493	3,3121	3,2756	3,2397
5	4,5797	4,5151	4,4518	4,3900	4,3295	4,2703	4,2124	4,1557	4,1002	4,0459	3,9927	3,9406	3,8897
6	5,4172	5,3286	5,2421	5,1579	5,0757	4,9955	4,9173	4,8410	4,7665	4,6938	4,6229	4,5536	4,4859
7	6,2303	6,1145	6,0021	5,8927	5,7864	5,6830	5,5824	5,4845	5,3893	5,2966	5,2064	5,1185	5,0330
8	7,0197	6,8740	6,7327	6,5959	6,4632	6,3346	6,2098	6,0888	5,9713	5,8573	5,7466	5,6392	5,5348
9	7,7861	7,6077	7,4353	7,2688	7,1078	6,9522	6,8017	6,6561	6,5152	6,3789	6,2469	6,1191	5,9952
10	8,5302	8,3166	8,1109	7,9127	7,7217	7,5376	7,3601	7,1888	7,0236	6,8641	6,7101	6,5613	6,4177
11	9,2528	9,0016	8,7605	8,5289	8,3064	8,0925	7,8869	7,6890	7,4987	7,3154	7,1390	6,9690	6,8052
12	9,9540	9,6633	9,3851	9,1186	8,8633	8,6185	8,3838	8,1587	7,9427	7,7353	7,5361	7,3447	7,1607
13	10,6350	10,3027	9,9856	9,6829	9,3936	9,1171	8,8527	8,5997	8,3577	8,1258	7,9038	7,6910	7,4869
14	11,2961	10,9205	10,5631	10,2228	9,8986	9,5896	9,2950	9,0138	8,7455	8,4892	8,2442	8,0101	7,7862
15	11,9379	11,5174	11,1184	10,7395	10,3797	10,0376	9,7122	9,4027	9,1079	8,8271	8,5595	8,3042	8,0607
16	12,5611	12,0941	11,6523	11,2340	10,8378	10,4622	10,1059	9,7678	9,4466	9,1415	8,8514	8,5753	8,3126
17	13,1661	12,6513	12,1657	11,7072	11,2741	10,8646	10,4773	10,1106	9,7632	9,4340	9,1216	8,8252	8,5436
18	13,7535	13,1897	12,6593	12,1600	11,6896	11,2461	10,8276	10,4325	10,0591	9,7060	9,3719	9,0555	8,7556
19	14,3238	13,7098	13,1339	12,5933	12,0853	11,6077	11,1581	10,7347	10,3356	9,9591	9,6036	9,2677	8,9501
20	14,8775	14,2124	13,5903	13,0079	12,4622	11,9504	11,4699	11,0185	10,5940	10,1945	9,8181	9,4633	9,1285
21	15,4150	14,6980	14,0292	13,4047	12,8212	12,2752	11,7641	11,2850	10,8355	10,4135	10,0168	9,6436	9,2922
22	15,9369	15,1671	14,4511	13,7844	13,1630	12,5832	12,0416	11,5352	11,0612	10,6172	10,2007	9,8098	9,4424
23	16,4436	15,6204	14,8568	14,1478	13,4886	12,8750	12,3034	11,7701	11,2722	10,8067	10,3711	9,9629	9,5802
24	16,9355	16,0584	15,2470	14,4955	13,7986	13,1517	12,5504	11,9907	11,4693	10,9830	10,5288	10,1041	9,7066
25	17,4131	16,4815	15,6221	14,8282	14,0939	13,4139	12,7834	12,1979	11,6536	11,1469	10,6748	10,2342	9,8226
26	17,8768	16,8904	15,9828	15,1466	14,3752	13,6625	13,0032	12,3924	11,8258	11,2995	10,8100	10,3541	9,9290
27	18,3270	17,2854	16,3296	15,4513	14,6430	13,8981	13,2105	12,5750	11,9867	11,4414	10,9352	10,4646	10,0266
28	18,7641	17,6670	16,6631	15,7429	14,8981	14,1214	13,4062	12,7465	12,1371	11,5734	11,0511	10,5665	10,1161
29	19,1885	18,0358	16,9837	16,0219	15,1411	14,3331	13,5907	12,9075	12,2777	11,6962	11,1584	10,6603	10,1983
30	19,6004	18,3920	17,2920	16,2889	15,3725	14,5337	13,7648	13,0587	12,4090	11,8104	11,2578	10,7488	10,2737
35	21,4872	20,0007	18,6646	17,4610	16,3742	15,3906	14,4982	13,6870	12,9477	12,2725	11,6546	11,0878	10,5668
40	23,1148	21,3551	19,7928	18,4016	17,1591	16,0461	15,0463	14,1455	13,3317	12,5944	11,9246	11,3145	10,7574
45	24,5187	22,4955	20,7200	19,1563	17,7741	16,5477	15,4558	14,4802	13,6055	12,8186	12,1084	11,4653	10,8812
50	25,7298	23,4556	21,4822	19,7620	18,2559	16,9315	15,7619	14,7245	13,8007	12,9748	12,2335	11,5656	10,9617
55	26,7744	24,2641	22,1086	20,2480	18,6335	17,2252	15,9905	14,9028	13,9399	13,0836	12,3186	11,6323	11,0140
60	27,6756	24,9447	22,6235	20,6380	18,9293	17,4499	16,1614	15,0330	14,0392	13,1594	12,3766	11,6766	11,0480
65	28,4529	25,5178	23,0467	20,9510	19,1611	17,6218	16,2891	15,1280	14,1099	13,2122	12,4160	11,7061	11,0701
70	29,1234	26,0004	23,3945	21,2021	19,3427	17,7533	16,3845	15,1973	14,1604	13,2489	12,4428	11,7258	11,0844

Eine Rente von 1.000€ pro Jahr über 10 Jahre bei einem Zins von 5% hat also zum Zeitpunkt t=0 einen Wert von:

$$1.000 * 7,7217 = 7.721,7\text{€}$$



### Rentenbarwert bei wechselndem Periodenzins

Ist der Zinssatz nicht über die Laufzeit konstant, so musst du alle Zahlungen einzeln abzinsen, wie du es im letzten Kapitel gelernt hast.

**Beispiel:** Ein Investor bezieht für die kommenden drei Jahre eine Rente in Höhe von 1.000€ p.a. Der Zinssatz beträgt 10% im ersten Jahr, 5% im zweiten Jahr und 2% im dritten Jahr. Was ist diese Rente heute wert?

**Antwort:** Die Zahlung des dritten Jahres muss für 1 Jahr zu 2%, für 1 Jahr zu 10% und für 1 Jahr zu 5% abgezinst werden. Die Zahlung des zweiten Jahres muss für ein Jahr zu 10% und für 1 Jahr zu 5% abgezinst werden. Die Zahlung des 1. Jahres muss für ein Jahr zu 10% abgezinst werden. Die Summe der abgezinsten Zahlungen ergibt den Barwert der Rente.

Rentenbarwert:

$$\frac{1.000}{1,02 * 1,1 * 1,05} + \frac{1.000}{1,1 * 1,05} + \frac{1.000}{1,1} = 848,82 + 865,8 + 909,09 = 2623,71\text{€}$$

### Kombination aus Abzinsung und Rentenbarwertfaktor

Es ist möglich, dass eine Kombination aus Rentenbarwertrechnung und Auf- oder Abzinsung in der Klausur vorkommt. Beginnt beispielsweise eine Rente erst in 2 Jahren und läuft für 8 Jahre, so darfst du nicht den Rentenbarwert mit einer Laufzeit von 10 Jahren berechnen - in den ersten 2 Jahren kommen ja keine Zahlungen. Du berechnest stattdessen den Barwert über 8 Jahre. Dies ist der Wert der Rente in 2 Jahren. Um den heutigen Wert der Rente zu erhalten, muss der Rentenbarwert noch 2 Perioden abgezinst werden.

**Beispiel:**

Ein Investor bezieht eine jährliche Rente für die kommenden 10 Jahre von 10.000€ p.a. Leider fallen die Zahlungen der ersten 4 Jahre aus. Berechne den Wert der Rente zum heutigen Zeitpunkt. Der Kalkulationszinssatz betrage durchgehend 10%.

**Antwort:**

Zunächst ermittelt man den Rentenbarwert zum Zeitpunkt  $t = 4$ :

$$10.000 * RBF(6 \text{ Jahre}, 10\%) = 10.000 * 4,3553 = 43.553\text{€}$$

Dieser Betrag muss nun noch um 4 Jahre zu 10% abgezinst werden.

$$\frac{43.553}{1,1^4} = 29.747,29\text{€}$$

**Rentenbarwert der ewigen Rente**

Sollte eine Rente ewig gezahlt werden, so kann man dies nicht mehr per Hand ausrechnen. Der Wert wächst aber auch nicht ins Unendliche, da die späten Zahlungen immer stärker abgezinst werden und daher den Barwert immer weniger erhöhen. Der Rentenbarwertfaktor der ewigen Rente lässt sich durch folgende Formel relativ leicht ermitteln:

$$RBF(\infty, r) = \frac{1}{r}$$

(r=Zinssatz)

**Beispiel:**

Ein Investor erhält von nun an eine ewige Rente in Höhe von 1.000 p.a. ausbezahlt. Der Zins ist durchgehend 10%.

Der Wert dieser Rente beträgt:  $\frac{1.000}{0,1} = 10.000\text{€}$ .

Eine ewige Rente ist gleichzusetzen mit einer Investition in ein Wertpapier, das man nie wieder verkauft. Ein Wertpapier, das mit 10% verzinst und jährlich 1.000€ auszahlt hat einen Preis von 10.000€.

## Annuitätenrechnung

Die Annuitätenrechnung ist die Umkehrform der Rentenbarwertrechnung. Während bei der Rentenbarwertrechnung der Wert einer Rente berechnet werden soll, wird bei der Annuitätenrechnung davon ausgegangen, dass der Kapitalwert gegeben ist und als Rente über eine bestimmte Anzahl an Perioden ausgeschüttet werden soll.

**Beispiel:** Ein Investor verfügt über ein Vermögen von 10.000€ und möchte über die kommenden 10 Jahre jährlich einen gleichhohen Betrag entnehmen. Welchen Maximalbetrag kann er entnehmen, wenn der Zinssatz durchgehend 5% beträgt.

**Antwort:** Man stellt zunächst die Formel für den Rentenbarwert auf:

$$10.000 = e * RBF(10 \text{ Jahre}, 5\%)$$

wobei e für die Rentenzahlung bzw Annuität steht.

Aufgelöst nach e ergibt sich:

$$e = \frac{10.000}{7,7217} = 1.295,05\text{€}$$

Du kannst hier zur Übung die Probe machen und den Kapitalwert der Rente von 1.295,05 berechnen.

Den Faktor  $\frac{1}{RBF}$  nennt man Annuitätenfaktor und schreibt kurz:  $ANF(T, r)$ .

Auch für die Annuitäten gibt es eine Tabelle, die aus den Kehrwerten der Rentenbarwertfaktoren besteht.

### Interner Zinsfuß

Immer, wenn man versucht Zahlungen aus verschiedenen Perioden vergleichbar zu machen, dann benötigt man den risikolosen Zins. Dieser gibt an, wie sich der Wert einer Zahlung verändert, wenn man ihn zeitlich nach vorne oder nach hinten verschiebt. Bei sicheren Zahlungen wird dafür immer der risikolose Zinssatz verwendet. Wenn der Kapitalwert positiv ist, dann ist die interne Verzinsung höher als der risikolose Zins. Ist der Kapitalwert negativ, so ist die interne Verzinsung des Projektes kleiner als der risikolose Zins. Der interne Zinssatz eines Projektes ist also genau der Zinssatz, für den der Kapitalwert eines Projektes gerade Null wird.

Man berechnet den internen Zinssatz (auch „interner Zinsfuß“ genannt), indem man die Formel für den Kapitalwert zu Null setzt und nach  $r$  auflöst. Für Zahlungsreihen mit mehr als drei Jahren kann das sehr aufwendig werden.

$$K(r^*) = e_0 + \frac{e_1}{(1+r^*)^1} + \frac{e_2}{(1+r^*)^2} + \dots + \frac{e_n}{(1+r^*)^n} = 0$$

Bei der Berechnung können folgende Spezialfälle unterschieden werden:

1) Auf eine Anfangsauszahlung folgen beliebig viele Perioden ohne Zahlungen und am Ende der Laufzeit eine einzige Rückzahlung. Der interne Zinsfuß berechnet sich dann nach:

$$r^* = \sqrt[T]{\frac{e_T}{-e_0}} - 1$$

#### Beispiel:

Gegeben sei folgende Zahlungsreihe:

Jahr	0	1	2	3	4	5
Zahlung in €	-100	0	0	0	0	140

Folgende Gleichung muß nach  $r$  umgestellt werden:

$$100 * (1 + r^*)^5 = 140$$

$$(1 + r^*)^5 = \frac{140}{100}$$

Aufgelöst nach  $r^*$  erhält man:

$$r^* = \sqrt[5]{\frac{140}{100}} - 1$$

2) Auf eine Anfangsauszahlung folgen in allen Perioden gleichhohe Rückzahlungen und am Ende eine Schlusszahlung in Höhe der Anfangsauszahlung plus eine Periodenzahlung. Der interne Zinsfuß entspricht dann der Rendite einer Periodenzahlung.

**Beispiel:** Eine Anleihe, die zu 100 emittiert wird, jährlich 5% auszahlt und zum Ende der Laufzeit zu 100 zurückzahlt (plus die 5% für die letzte Periode), hat den internen Zinsfuß von 5%. Der interne Zinsfuß gibt an wie das gebundene Kapital verzinst wird. Da jedes Jahr 5% zurückfließen und am Ende der volle Betrag zurückbezahlt wird, ist der interne Zinsfuß 5%.

3) Es gibt nur 2 Perioden. Dann kann man die Formel für den Kapitalwert einfach mit Hilfe der p-q-Formel lösen:

$$K(r^*) = e_0 + \frac{e_1}{(1+r^*)^1} + \frac{e_2}{(1+r^*)^2} = 0$$

Aufgelöst nach  $r^*$ :

$$r_{1,2}^* = \frac{-e_1}{2e_0} \pm \sqrt{\left(\frac{e_1}{2e_0}\right)^2 - \frac{e_2}{e_0}} - 1$$

**Beispiel:** Der interne Zinsfuß der Zahlungsreihe

Jahr	0	1	2
Zahlung in €	-100	20	100

beträgt:

$$\frac{-20}{-200} \pm \sqrt{\left(\frac{20}{-200}\right)^2 - \frac{100}{-100}} - 1 = 10\% \pm 0,5\%$$

Das Ergebnis sind 2 Zinsfüße, aber nur 10,5% ist der korrekte Zinsfuß für den der Kapitalwert Null wird.

(zum Problem mehrerer interner Zinsfüße später).

4) Einer Anfangsauszahlung folgen ausschließlich gleichhohe Rückzahlungen.

Für diesen Fall ergibt sich  $r^*$  gemäß der Formel:

$$\frac{1 - (1 + r^*)^{-t}}{r^*} = \frac{-e_0}{e} = RBF(T, r^*)$$

**Beispiel:**

Der interne Zinsfuß der Zahlungsreihe

Jahr	0	1	2	3	4	5
Zahlung in €	-100	30	30	30	30	30

berechnet sich wie folgt:

Da  $r^*$  nur schwer aus der Formel errechnet werden kann, nutzt man die Tabelle, um näherungsweise den Zinssatz zu finden, für den der Rentenbarwertfaktor dem Wert  $\frac{-e_0}{e}$  entspricht.

Für das Beispiel erhalten wir  $\frac{-e_0}{e} = 3,33$

Der Rentenbarwertfaktor von 3,33 für eine Laufzeit von 5 Jahren hat einen Zinssatz von ca. 15%.

5) Einer Anfangszahlung folgen unendlich viele gleichhohe Rückzahlungen. Dann ist der interne Zinsfuß  $r^* = \frac{e}{e_0}$ .

**Beispiel:**

Folgen auf eine einmalige Investition von 100 Euro unendlich lange jährliche Rückzahlungen von 10%, dann ist der interne Zinsfuß 10%.

### Approximation des internen Zinsfußes

Man kann den internen Zinsfuß auch durch Näherungsverfahren ermitteln. Dabei setzt man zunächst Schätzwerte für den internen Zinsfuß ein und berechnet den Kapitalwert. Ist dieser positiv, erhöht man den Zinsfuß, ist er negativ, verringert man ihn. So nähert man sich langsam dem Kapitalwert von Null an. Dies kann man gut in Excel machen, für die Klausur wäre eine solche Aufgabenstellung aber unpraktikabel, da der Rechenaufwand sehr groß sein kann.

### Mehrere Zinsfüße

Bei der Ermittlung des internen Zinsfußes werden die Nullstellen der Kapitalwertfunktion in Abhängigkeit vom Zinssatz ermittelt. Für jede Periode der Zahlungsreihe steigt die Ordnung der Funktion um 1 (Der höchste Exponent von  $r$  ist gleich der Anzahl an Perioden). Damit steigt auch die maximale Anzahl möglicher Nullstellen – und somit auch die Anzahl verschiedener Zinsfüße. Für jeden Zinsfuß, den du rechnerisch ermittelst, musst du testen, ob er Sinn macht.

Folgende Eigenschaft von Zahlungsreihen bezüglich interner Zinsfüße musst du dir merken:

Die Anzahl interner Zinsfüße kann die Anzahl an Vorzeichenwechseln einer Zahlungsreihe nicht übersteigen. Die Anzahl interner Zinsfüße kann nur um eine gerade Zahl geringer sein als die Anzahl der Vorzeichenwechsel in der Zahlungsreihe.

### Beispiel:

Die folgende Zahlungsreihe hat 3 Vorzeichenwechsel:

Jahr	0	1	2	3	4	5
Zahlung in €	-100	30	-30	30	30	100

Sie kann also entweder 3 oder eine Nullstelle und damit 1 oder drei verschiedene interne Zinsfüße haben.

### Interner Zinsfuß als Vorteilhaftigkeitskriterium

Der interne Zinsfuß eignet sich in vielen Fällen nicht als Vorteilhaftigkeitskriterium. Es gibt viele Projekte, bei denen der höhere interne Zinsfuß nicht zum höheren Endvermögen führt.

Der interne Zinsfuß gibt an, bei welchem Zinssatz der Kapitalwert eines Projektes Null wird. Man kann ihn also als maximale Fremdkapitalkosten ansehen, die das Projekt gerade verkraften kann. Nun fallen Fremdkapitalkosten aber dann besonders stark ins Gewicht, wenn Zahlungen sehr spät kommen (da diese über viele Perioden abgezinst werden müssen). Vergleicht man 2 Projekte, von denen eines sehr früh hohe Rückflüsse hat und eines, das sehr spät hohe Rückflüsse hat, so wird der Kapitalwert des Projektes mit späten Rückflüssen deutlich stärker auf Änderungen des risikolosen Zinses reagieren, als das Projekt mit frühen Rückflüssen (Dies ist das Konzept der Duration, die du evtl. im Laufe deines Studiums kennenlernen wirst).

#### Beispiel:

Gegeben sind 2 Projektzahlungsreihen:

Jahr	0	1	2	3	4	5
Zahlung in €	-100	0	0	0	0	150

Jahr	0	1	2	3	4	5
Zahlung in €	-100	60	20	10	5	40

Der interne Zinsfuß des ersten Projektes ist ca. 8,5%, der des zweiten ist ca. 13.2%. Das zweite Projekt ist dennoch nicht unbedingt vorteilhaft. Bei einem risikolosen Zins von 0% wäre das Endvermögen des ersten Projektes 50 und das des zweiten nur 35.

**Merke dir also:** Ein hoher interner Zinsfuß genügt alleine nicht, um eine klare Aussage über die Vorteilhaftigkeit eines Projektes zu treffen.



## Aufgaben zu 9.0

### Aufgabe 9.1

Ein Investor legt sein Kapital von 10.000€ für 7 Jahre zu 4% p.a. an. Berechne das Vermögen nach 5 Jahren.

### Aufgabe 9.2

Ein Student möchte sich kommendes Semester ein Lehrvideo von fernuni-online.de zum Preis von 40€ bestellen. Der Zinssatz pro Semester beträgt 2%. Wie viel Geld muss er jetzt anlegen, um den Kaufpreis bezahlen zu können?

### Aufgabe 9.3

Du hast die Möglichkeit, 100€ für 2 Jahre zu 10% p.a. anzulegen. Ich biete dir an, dir für 2 Jahre 20,5% zu zahlen. Solltest du annehmen? Begründe.

### Aufgabe 9.4

Du möchtest dir einen Sportwagen kaufen und dir werden folgende Finanzierungen angeboten:

- a) 100.000 sofort.
- b) 50.000 sofort und 60.000 in 2 Jahren.
- c) 40.000 in einem Jahr, 40.000 in 3 Jahren und 40.000 in 5 Jahren.

Der Zinssatz beträgt durchgehend 8%. Für welche Zahlungsform entscheidest du dich?

**Aufgabe 9.5**

Gegeben seien zwei Anleihen mit folgenden Merkmalen:

	Kurs	Laufzeit	Nominalzins	Rückzahlungsbetrag
Anleihe 1	100	5 Jahre	6%	102
Anleihe 2	100	4 Jahre	6%	106

Der Marktzins betrage 8%. Welche Anleihe ist die bessere?

**Aufgabe 9.6**

Du möchtest 10.000€ für 10 Jahre anlegen und hast 3 Angebote vorliegen:

- a) 10% p.a.
- b) Nach 10 Jahren 26.000 Rückzahlung.
- c) 5 Jahre lang 8% Zinsen und dann 5 Jahre lang 12% Zinsen.

**Aufgabe 9.7**

Bei welchem Zins werden in 3 Jahren aus 10.000€ ungefähr 11.576€?

## Lösungen zu 9.0

### Lösung zu 9.1

Es ist natürlich egal, für wie lange er das Geld anlegt. Nach 5 Jahren wurde das Kapital 5 mal zu 4% verzinst:

$$10.000 * 1,04^5 = 12.166,53\text{€}$$

### Lösung zu 9.2

Der Kaufpreis muss um eine Periode abgezinst werden.

$$\frac{40}{1,02} = 39,21\text{€}$$

### Lösung zu 9.3

Nein. Die Verzinsung von 10%p.a. ergibt ein Endvermögen von 121€. Eine Verzinsung von 20,5% über 2 Jahre ergibt nur ein Endvermögen von 120,5€. Man muss den Zinseszinsseffekt berücksichtigen.

### Lösung zu 9.4

Es müssen die Kapitalwerte berechnet werden:

a) 100.000€

$$\text{b) } 50.000 + \frac{60.000}{1,08^2} = 101.440,33\text{€}$$

$$\text{c) } \frac{40.000}{1,08} + \frac{40.000}{1,08^3} + \frac{40.000}{1,08^5} = 96.013,65\text{€}$$

Alternative c) ist die günstigste!

**Lösung zu 9.5**

Es müssen die Kapitalwerte für folgende Zahlungsreihen gebildet werden:

Jahr	0	1	2	3	4	5
Anleihe 1	-100	6	6	6	6	108
Anleihe 2	-100	6	6	6	112	

Daraus ergibt sich für die Anleihe 1 ein Kapitalwert von -6,62 und für Anleihe 2 ein Kapitalwert von -2,21.

Die Anleihe 2 ist die bessere.

**Lösung zu 9.6**

Hier kannst du die Kapitalwerte oder die Endwerte berechnen. Ich berechne die Vermögensendwerte:

a)  $10.000 * 1,1^{10} = 25.937,42\text{€}$

b) 26.000€

c)  $10.000 * 1,08^5 * 1,12^5 = 10.000 * 1,469 * 1,762 = 25.894,58\text{€}$

Alternative b) ist optimal.

**Lösung zu 9.7**

Hier muss die Formel

$$r^* = \sqrt[r]{\frac{e_T}{-e_0}} - 1$$

gelöst werden. Man kann aber auch einfach raten bzw. ausprobieren, da der Lehrstuhl höchstwahrscheinlich keinen krummen Zinssatz wählen wird. Die Antwort ist 5% p.a.

## 10.0 Grundlagen der Investitionstheorie

Für Berechnungen im Rahmen der Investitionstheorie wird oft die Annahme des vollkommenen Kapitalmarktes getroffen. Die wichtigsten Eigenschaften des vollkommenen Kapitalmarktes sind:

- Es kann Kapital in beliebiger Höhe angelegt und aufgenommen werden.
- Es existieren keine Transaktionskosten.

Die Investitionstheorie beschäftigt sich mit der Investition von Kapital in Investitionsobjekte. Bei den Investitionsobjekten soll uns nur der Zahlungsstrom interessieren. Typischerweise wird am Anfang eine einzelne Investition getätigt, dann fallen über die Laufzeit des Projektes kleinere Rückzahlungen an und zum Ende wird das Projekt liquidiert und es gibt eine größere Schlusszahlung (Normalinvestition).

### Beispiel:

Ich investiere in Ackerland und bewirtschafte es 5 Jahre lang. Ich erwerbe das Land zu 100.000€, aus dem Verkauf des Getreides erhalte ich jährliche Rückzahlungen zwischen 10.000€ und 15.000€ und verkaufe das Land nach 5 Jahren wieder zu 120.000€.

Der Zahlungsstrom für ein solches Projekt würde so aussehen:

0	1	2	3	4	5
-100.000	10.000	12.000	14.000	10.000	135.000

Natürlich kann es passieren, dass auch während der Laufzeit Investitionen notwendig werden. Muss ich mir in Jahr 3 einen neuen Traktor für 20.000€ kaufen, so würde sich der Zahlungsstrom entsprechend verändern.

### Endwertmethode

Können keine klaren Dominanzbeziehungen ( z.B.: Von 2 Projekten hat eines in jeder Periode höhere Auszahlungen) festgestellt werden, so können Investitionsprojekte nach der Endwertmethode verglichen werden. Da die Vorteilhaftigkeit eines Projektes nicht nur von der Höhe der Rückflüsse, sondern auch vom Zeitpunkt der Rückflüsse abhängig ist, können Zahlungsströme in verschiedenen Perioden nicht direkt miteinander verglichen werden.

**Beispiel:** Ich biete Dir an, Dir heute 100 Euro zu schenken oder aber in einem Jahr 110 Euro. Wofür entscheidest du dich? Um die Frage zu beantworten, musst du den risikolosen Zins für ein Jahr kennen. Angenommen der beträgt 5%, dann würden die 100, die ich dir heute gebe, in 1 Jahr 105€ betragen. Du solltest also in 1 Jahr 110€ bevorzugen. Beträgt der risikolose Zins aber 30%, so würden aus den 100€, die ich dir heute gebe, in 1 Jahr 130€ werden. Du solltest die 100€ heute also nehmen.

Wie man an dem kleinen Beispiel schon sieht, müssen die Zahlungen aufgezinst werden, um miteinander verglichen zu werden.

Allgemein schreibt man:

$$e_0 * (1 + r)^n = EW$$

Zu Notation:

EW = Endwert

$e_0$  = Zahlung zum Zeitpunkt t=0

r = risikoloser Zinssatz

n = Anzahl an Perioden

$(1 + r)$  = Aufzinsungsfaktor, der später auch mit q bezeichnet wird.

Bei den Zahlungsströmen der Projekte müssen nun mehrere Zahlungen auf die letzte Periode aufgezinst werden, um den Endwert zu erhalten.

**Beispiel:**

Gegeben ist folgende Zahlungsreihe:

Jahr	0	1	2	3	4	5
Zahlung in €	-100	5	7	6	9	106

Der risikolose Zins beträgt durchgehend 10%.

Die Berechnung des Endwertes erfolgt folgendermaßen:

Die Anfangszahlung von -100 muss über 5 Jahre aufgezinnt werden:

$$-100 * 1,1^5 = -161,51$$

Die Zahlung der Periode 1 muss 4 Jahre aufgezinnt werden:

$$5 * 1,1^4 = 7,32$$

Die Zahlung aus Periode 2 muss 3 Jahre aufgezinnt werden usw. Am Ende erhält man für die Summe aller zum Jahr 5 bewerteten Zahlungen.

Jahr	0	1	2	3	4	5
Zahlung in €	-100	5	7	6	9	106
Zinssatz	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
Aufzinsungsfaktor	1,61051	1,4641	1,331	1,21	1,1	1
Zu $t = 5$ bewertet	-161,051	7,3205	9,317	7,26	9,9	106

Der Endwert der Zahlungsreihe, also der Wert aller Zahlungen, bewertet zum Zeitpunkt  $t = 5$ , ist die Summe der letzten Zeile. Diese ist -21,25.

**Interpretation:** Der Endwert ist negativ. Das bedeutet, dass es vorteilhaft gewesen wäre, das Kapital zu 10% anzulegen, anstatt es in das Projekt zu investieren. Die 100€ Anfangsinvestition werden jedes Jahr zu 10% verzinst. Diese 10% muss das Projekt mindestens erwirtschaften, um vorteilhaft zu sein.

Ein Projekt ist also vorteilhaft, wenn der Endwert positiv ist und unvorteilhaft, wenn der Endwert negativ ist. Beim Vergleich mehrerer Projekte gilt: Je höher der Endwert, desto vorteilhafter das Projekt.

**Achtung:** Du darfst dabei wieder nur Endwerte vergleichen, die im selben Jahr liegen! Hat also ein Projekt eine Laufzeit von 5 Jahren und eines eine Laufzeit von 6 Jahren, so muss das Projekt mit dem höheren Endwert nicht vorteilhafter sein.

Zur Berechnung von Endwerten kannst du in der Klausur folgende Spezialfälle antreffen:

1) Einzahlungen in verschiedener Höhe: Hier musst du alle Einzahlungen einzeln aufzinsen.

2) Alle Einzahlungen  $e$  in der gleichen Höhe: Du kannst natürlich einzeln aufzinsen, der Endwert lässt sich aber auch direkt über folgende Formel berechnen:

$$EW = e_0 * (1 + r)^T + \frac{e * ((1 + r)^T - 1)}{r}$$

**Beispiel:** Gegeben sei folgende Zahlungsreihe

Jahr	0	1 bis 10
Zahlung in €	-100	20

Der risikolose Zins beträgt durchgehend 10%.

Nun berechnet man den Endwert wie folgt:

$$EW = -100 * (1 + 0,1)^{10} + \frac{20 * ((1 + 0,1)^{10} - 1)}{0,1} = -259,37 + 318,75 = 59,37$$

3) Berechnung des Endwertes aus dem Kapitalwert (siehe nächstes Kapitel):

$$EW = K * (1 + r)^T$$

$K$  steht hier für den Kapitalwert, also den Wert des Geldes zum Zeitpunkt  $t = 0$ .



## Kapitalwertmethode

Die Kapitalwertmethode ist der Endwertmethode sehr ähnlich. Es werden lediglich die Zahlungen nicht zum Projektende, sondern zum Projektanfang bewertet. Anstatt die einzelnen Zahlungen aufzuzinsen, muss man nun die einzelnen Zahlungen auf  $t = 0$  abzinsen. Ich erläutere das kurz an unserem Beispiel:

Du hast die Wahl, ob ich dir heute 100€ schenken soll oder in einem Jahr 120€. Der Zinssatz beträgt 10%. Nach der Kapitalwertmethode ermittelst du nun den Wert, den die 120 Euro heute haben. Wie viel Euro müsstest du heute zu 10% anlegen, damit sie in einem Jahr 120€ wert sind? Die Antwort ist:

$$\frac{120}{1,1} = 109,09\text{€}$$

Die Berechnung des Kapitalwertes einer Projektzahlungsreihe erfolgt dann ähnlich wie die Berechnung des Endwertes, nur dass man abzinsen muss, statt aufzuzinsen.

$$K = e_0 + \frac{e_1}{(1+r)^1} + \frac{e_2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{e_n}{(1+r)^n}$$

### Beispiel:

Gegeben sei folgende Zahlungsreihe:

Jahr	0	1	2	3	4	5
Zahlung in €	-100	5	7	6	9	106

Der risikolose Zinssatz sei durchgehend 10%.

Der Kapitalwert errechnet sich durch die Abzinsung der einzelnen Zahlungen auf  $t = 0$ .

Die Anfangsauszahlung von -100 fällt schon auf den Zeitpunkt  $t=0$ .

Die Zahlung aus Jahr 1 muss zu 10% für ein Jahr abgezinst werden:

$$\frac{5}{1,1} = 4,54$$

Die Zahlung aus Jahr 2 muss zu 10% für 2 Jahre abgezinst werden:

$$\frac{7}{1,1^2} = 5,78$$

Jahr	0	1	2	3	4	5
Zahlung in €	-100	5	7	6	9	106
Zinssatz	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
Abzinsungsfaktor	1	1,1	1,21	1,331	1,46	1,61
Zu $t = 0$ bewertet	-100	4,54	5,78	4,51	6,15	65,82

Als Summe der abgezinsten Zahlungen ergibt sich der Kapitalwert mit -13,2.

Da wir dieselben Zahlen verwendet haben wie auch im Beispiel für den Endwert, müsste der Endwert aus dem Kapitalwert errechenbar sein, wenn man den Kapitalwert für 5 Jahre zu 10% aufzinst.

$$-13,2 * (1 + 0,1)^5 = -21,25$$

Zur Berechnung von Kapitalwerten kannst du in der Klausur folgende Spezialfälle antreffen:

1) Die Zahlungen sind über den Zeitablauf unterschiedlich hoch: Dann musst du jede Zahlung einzeln abzinsen.

2) Kapitalwert bei gleichbleibenden Einzahlungen, aber begrenzter Laufzeit:

Dies kannst du nach der vereinfachten Formel

$$K = e_0 + e * \frac{1 - (1 + r)^{-T}}{r}$$

berechnen.

Der Ausdruck  $\frac{1 - (1 + r)^{-T}}{r}$  wird auch **Rentenbarwertfaktor** genannt und man schreibt dafür  $RBF(T, r)$ .

### Die äquivalente Annuität

Bei der sogenannten Annuitätenmethode wird der Kapitalwert einer Zahlungsreihe in äquivalente jährliche Zahlungen umgerechnet. (Dabei darf natürlich nicht der Kapitalwert durch die Anzahl an Perioden geteilt werden.)

Die äquivalente Annuität berechnet sich nach der Formel:

$$e^* = \frac{K}{RBF(T, r)}$$

Man schreibt auch für den Annuitätenfaktor:

$$ANF = \frac{1}{RBF(T, r)}$$

Es gilt dann:

$$e^* = ANF * K$$

**Beispiel:** Gegeben sei folgende Zahlungsreihe:

Jahr	0	1	2	3	4	5
Zahlung in €	-100	5	7	6	9	106

Der Kapitalwert ist aus obigem Beispiel mit -13,2 bekannt.

Die äquivalente Annuität beträgt dann

$$e^* = \frac{-13,2}{RBF(T, r)} = \frac{-13,2}{3,79} = -3,48$$

**Interpretation:** Die äquivalente Annuität ist der Betrag, der vom Investor jedes Jahr entnommen werden könnte, ohne dass das Projekt unvorteilhaft wird. Ist die äquivalente Annuität negativ, so repräsentiert sie den Betrag, den der Investor jedes Jahr einzahlen müsste, damit das Projekt nicht unvorteilhaft wird.

Da die äquivalente Annuität direkt vom Kapitalwert abgeleitet wird, ist sie genauso wie dieser zur Beurteilung von Investitionsprojekten geeignet und wird immer zur selben Beurteilung kommen.

## Aufgaben zu 10.0

### Aufgabe 10.1

Gegeben sei folgende Zahlungsreihe, die die sicheren Rückzahlungen eines Projektes darstellt:

Jahr	0	1	2	3	4	5
Zahlung		10	20	10	15	90

Am vollkommenen Kapitalmarkt herrsche ein Zins von 10%.

Wie viel sollte ein Investor in Jahr 0 für dieses Projekt maximal investieren?

### Aufgabe 10.2

Gegeben sei folgende Zahlungsreihe:

Jahr	0	1	2	3	4	5
Projekt A	-200	18	21	22	17	220

Der Kalkulationszinssatz sei über alle Perioden 10%.

Berechne

- den Kapitalwert
- den Endwert
- die äquivalente Annuität
- Interpretiere die äquivalente Annuität ökonomisch.

## Lösungen zu 10.0

### Lösung zu 10.1

Ein Investor sollte maximal so viel investieren, dass der Kapitalwert der gesamten Zahlungsreihe gerade Null wird. Dieser Betrag entspricht dem Kapitalwert der Zahlungsreihe.

Zur Ermittlung müssen die Einzahlungen der einzelnen Jahre auf  $t = 0$  abgezinst werden:

Jahr	0	1	2	3	4	5
Zahlung		10	20	10	15	90
Aufzinsungsfaktor	1	1,1	1,21	1,331	1,4641	1,61051
abgezinste Zahlung	0	9,09	16,53	7,51	10,25	55,88

Der Kapitalwert ist die Summe der letzten Zeile: 99,26.

Der Investor sollte maximal 99,26 in das Projekt investieren.

### Lösung zu 10.2

a) Zur Berechnung des Kapitalwertes muss für jedes Jahr der Aufzinsungsfaktor berechnet werden. Dieser ergibt sich für das Jahr  $t$  zu

$$(1 + r)^t$$

Um eine Zahlung von  $t$  auf  $t = 0$  abzuzinsen, muss die Zahlung durch den Aufzinsungsfaktor geteilt werden.

Jahr	0	1	2	3	4	5
Projekt A	-200	18	21	22	17	220
Aufzinsungsfaktor	1,00	1,10	1,21	1,33	1,46	1,61
abgezinste Zahlung	-200,00	16,36	17,36	16,53	11,61	136,60

Der Kapitalwert ist nun die Summe der abgezinnten Zahlungen.

$$K = -1,54$$

b) Für den Endwert müssen wieder Aufzinsungsfaktoren berechnet werden, dieses Mal aber für die Zeit zwischen  $t$  und dem Laufzeitende, da die Zahlungen bis zum Laufzeitende aufgezinst werden müssen. Die Zahlungen werden dann zum Laufzeitende aufgezinst indem sie mit dem Aufzinsungsfaktor multipliziert werden.

Jahr	0	1	2	3	4	5
Projekt A	-200	18	21	22	17	220
Aufzinsungsfaktor	1,61	1,46	1,33	1,21	1,10	1,00
aufgezinste Zahlung	-322,10	26,35	27,95	26,62	18,70	220,00

Der Endwert ergibt sich aus der Summe der aufgezinnten Zahlungen.

$$E = -2,48$$

Der Endwert lässt sich alternativ auch berechnen, indem man den Kapitalwert bis zum Laufzeitende aufzinst.

$$E = -1,54 * 1,1^5 = -2,48$$

c) Die äquivalente Annuität berechnet sich nach der Formel:

$$e^* = \frac{K}{RBF(T, r)}$$

Der Kapitalwert ist mit -1,54 aus a) bekannt. Den Rentenbarwertfaktor für 5 Jahre und einen Zinssatz von 10% kannst du aus der Tabelle ablesen.

$$RBF(5 \text{ Jahre}, 10\%) = 3,791$$

Für  $e^*$  ergibt sich:

$$e^* = \frac{-1,54}{3,791} = -0,41$$

d) Die äquivalente Annuität gibt an, welchen Betrag man im Vergleich zur Unterlassensalternative jährlich entnehmen kann bzw. einzahlen muss, um genauso gut gestellt zu sein wie bei der Unterlassensalternative.

## 11.0 Unternehmensbewertung und Finanzierung

Den Wert eines Unternehmens zu ermitteln ist selbstverständlich wichtig, wenn dieses ganz oder teilweise verkauft werden soll. Aktiengesellschaften, deren Aktien börsennotiert sind, werden täglich gehandelt und entsprechend hoch ist auch die Frequenz der Bewertungen dieser Aktien.

### 11.1 Funktionale Unternehmensbewertung

Die Funktionale Unternehmensbewertung unterscheidet drei hauptsächliche Unternehmenswerte:

- **Entscheidungswert:** Dies ist die Grenze bzw. der kritische Wert, zu dem der Käufer/Verkäufer gerade noch bereit ist über den Kauf/Verkauf zu verhandeln.
- **Schiedswert oder Arbitriumwert:** Der Wert, der von einem unabhängigen Dritten ermittelt wird. Bei diesem Wert sieht der unabhängige Gutachter die Interessen der Konfliktparteien als ausgeglichen an.
- **Argumentationswert:** In einer Verhandlung versucht natürlich jede Seite, den für sie bestmöglichen Preis zu erzielen. Daher werden im Verhandlungsprozess Argumentationswerte vorgeschlagen, die deutlich von den Entscheidungswerten abweichen können.

### Konfliktsituationen der Unternehmensbewertung

Der Lehrstuhl unterscheidet zwischen den folgenden Typen von „Konfliktsituationen“ (Eine Konfliktsituation ist die Verhandlung über den Kauf/Verkauf eines Unternehmens / Unternehmensanteils):

- Ankauf / Verkauf: Ein Unternehmen oder Unternehmensanteil wird verkauft.
- Fusion / Aufspaltung: Mehrere Unternehmen oder Unternehmensteile werden verschmolzen und bilden eine neue Einheit. Es ist auch möglich, dass Unternehmen oder Unternehmensteile aufgespalten werden.
- dominiert / nicht dominiert: Bei einer dominierten Konfliktsituation besitzt eine Partei genug Macht, um die Eigentumsverhältnisse ohne Zustimmung der anderen Partei zu ändern.
- jungiert / nicht jungiert: Bei einer jungierten Situation befindet sich mindestens eine Partei in mindestens einer weiteren „Konfliktsituation“, deren Entwicklung Einfluss auf die Entscheidungen der Partei hat.

### Problemfelder der Unternehmensbewertung

Bei der Bewertung eines Unternehmens bestehen 4 grundlegende Problemfelder:

- **Wirkungsdefekte:** Es kann nicht genau bestimmt werden, wie sich die geplante Geschäftsstrategie/Geschäftspolitik oder das zukünftige Marktumfeld auf den Wert des Unternehmens auswirken wird.
- **Bewertungsdefekte:** Es ist nicht möglich, wertbestimmende Größen wie Zinssätze, Rohstoffpreise, Absatzmengen usw. sicher zu prognostizieren. Auch Größen, die von eigenen Entscheidungen abhängen, wie beispielsweise die Dividendenpolitik, sind kaum zu prognostizieren.
- **Zielsetzungsdefekt:** Mehrere Eigentümer können verschiedene Ziele haben, die nicht alle gleichzeitig verfolgt werden können (Kostensenkung und Produktinnovation). Außerdem kann das optimale Verhalten in einer unsicheren Situation nie genau bestimmt werden.
- **Lösungsdefekt:** Selbst wenn alle Daten und Zusammenhänge bekannt wären, würde eine Lösung des Planungs- und Bewertungsproblems so hohe wirtschaftliche Kosten verursachen, dass sie ihren Nutzen evtl. übersteigt.

Aufgrund der hohen Komplexität von Unternehmensbewertungen muss die Bewertung vereinfacht werden. Ein sehr simples Modell ist die Berechnung des Ertragswertes eines Unternehmens. Dies ist der Kapitalwert des Zahlungsstroms, der aus dem Unternehmen an seine Eigentümer in Zukunft zu erwarten ist.

### Unterschiedliche Wertvorstellungen bei Käufer und Verkäufer

Der Ertragswert eines Unternehmens kann für Käufer und Verkäufer verschieden hoch sein. Dies liegt daran, dass evtl. verschiedene Annahmen bezüglich der Geschäftsentwicklung und des Marktumfeldes getroffen werden und Käufer und Verkäufer sich in verschiedenen wirtschaftlichen Situationen befinden (verschiedene Steuersätze, Synergiepotential). Liegt der Preis des Käufers unter dem des Verkäufers, so kommt kein Handel zustande. Liegt er über dem des Verkäufers, so muss über den Preis verhandelt werden.



Bei der Ertragswertmethode stellt die Fernuni 2 Modelle vor:

1) Ewige Rente in konstanter Höhe. Der Kapitalwert berechnet sich nach der bekannten Formel:

$$K = \frac{g}{i}$$

wobei  $g$  für die jährlichen Zahlungen steht und  $i$  für den jährlichen Zinssatz.

2) Eine leichte Abänderung des Modells beinhaltet die Annahme, dass die Rückflüsse nicht in alle Ewigkeit gleichhoch bleiben, sondern konstant wachsen.

$$K = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{g(1+w)^{t-1}}{(1+i)^t} = \frac{g}{i-w}$$

wobei  $w$  für die Wachstumsrate der Ausschüttungen steht.

## 11.2 Finanzierung

**Definition Finanzierung:** Der Rückgriff auf Liquiditätsreserven oder die Erzielung neuer Einzahlungen, um bestehende oder zukünftige Zahlungsverpflichtungen zu erfüllen oder die Liquiditätsreserve für folgende Perioden zu erhöhen.

Ziele des Finanzierungsbereichs sind:

- hohe Rentabilität
- Liquidität
- Sicherheit

### - Rentabilität:

Die Rentabilität bezeichnet das Verhältnis aus Überschuss und Kapitaleinsatz einer Periode. Man unterscheidet zwischen:

- Eigenkapitalrentabilität: Verhältnis zwischen Überschuss und Eigenkapital.
- Gesamtkapitalrentabilität: Verhältnis zwischen Überschuss und Gesamtkapital (Eigen- und Fremdkapital).
- Betriebskapitalrentabilität: Verhältnis zwischen Betriebsgewinn und betriebsnotwendigem Kapital.

### - Liquidität:

Mit Liquidität werden zwei verschiedene Dinge bezeichnet:

- Die Fähigkeit von Wirtschaftssubjekten ihren Zahlungsverpflichtungen nachzukommen.
- Die Eigenschaft von Wirtschaftsgüter, schnell verkauft werden zu können oder gar selber als Zahlungsmittel genutzt zu werden.

### - Sicherheit:

Neben der Betrachtung von Rentabilität und Liquidität ist das Risiko der zu finanzierenden Unternehmung von großer Bedeutung. So ist eine hohe Rentabilität meist auch mit hohem Risiko verbunden. Generell kann man sagen, dass hohe Renditen tendenziell mit hohem Risiko einhergehen. Die Wirtschaftssubjekte erhalten auf diesem Wege eine Vergütung für die Übernahme von Risiken.

Jede Finanzierung wird nach Herkunft des Kapitals (Innen- oder Außenfinanzierung) und nach Rechtsstellung der Kapitalgeber (Eigen- oder Fremdfinanzierung) unterschieden.

Das folgende Schema zeigt die verschiedenen Arten der Finanzierung

Finanzierungsarten		Nach Herkunft	
		Außenfinanzierung	Innenfinanzierung
Nach Rechtsstellung	Eigenfinanzierung	Einlagenfinanzierung	Selbstfinanzierung
			Finanzierung aus Abschreibungen
	Fremdfinanzierung	Kreditfinanzierung	Finanzierung aus Vermögensumschichtung
			Finanzierung aus Rückstellungen

Eigenfinanzierung und Fremdfinanzierung lassen sich anhand folgender Merkmale unterscheiden:

Merkmale	Eigenkapital	Fremdkapital
Haftung	Höhe der Einlage	Keine Haftung
Gewinnanteil	Erfolgsbeteiligung	Keine Erfolgsbeteiligung
Vermögensanspruch	Beteiligung am Liquidationsgewinn	Höhe der Forderungen
Zeitliche Verfügbarkeit	unbegrenzt	begrenzt
Finanzierungskapazität	begrenzt	unbegrenzt

**Eigen- und Fremdfinanzierung**

**Eigenfinanzierung:** Aus der Eigenfinanzierung geht ein Besitzanspruch auf das Unternehmen und dessen Ausschüttungen hervor. Das Eigenkapital der Gesellschaft ist die Saldogröße aus Vermögensgegenständen und Schulden. Speziell nennt die Fernuni folgende Merkmale:

- Erfolgsabhängige Beteiligung.
- Erfolgsabhängiger Rückzahlungsbetrag bei Liquidation der Gesellschaft.
- Volle Geschäftsführungskompetenz.
- Keine Insolvenzanprüche. Haftung mit der Einlage oder dem gesamten Privatvermögen.
- unbegrenzte zeitliche Verfügbarkeit

**Fremdfinanzierung:**

Bei der Fremdfinanzierung wird der Gesellschaft Kapital von außenstehenden Dritten –meist in Form von Krediten- geliehen. Es entsteht kein Eigentumsanspruch. Es gibt folgende Merkmale:

- Erfolgsunabhängige feste Verzinsung.
- Erfolgsunabhängiger fester Betrag.
- Keine Geschäftsführungsrechte.
- Insolvenzanprüche.
- zeitlich begrenzte Verfügbarkeit (muss irgendwann zurückgezahlt werden).

## Innen- und Außenfinanzierung

**1) Innenfinanzierung:** Innenfinanzierung sind liquide Mittel, die der Unternehmung durch den Umsatz- und Leistungsprozess zufließen. Der Schwerpunkt dieses Kapitels liegt aber bei der Außenfinanzierung.

## 2) Außenfinanzierung

### Einlagen- und Beteiligungsfinanzierung

Dies ist die Finanzierung einer Unternehmung mit Eigenkapital. Je nach Unternehmensform gehen verschiedene Rechte und Pflichten mit dem Eigenkapital einher:

- **Einzelkaufmann:** Da der Einzelkaufmann per Definition alleiniger Inhaber der Unternehmung ist, kann er keine weiteren Gesellschafter aufnehmen. Die einzige Möglichkeit der Eigenkapitalfinanzierung über Dritte ist die Aufnahme eines stillen Gesellschafters, der im Außenverhältnis nicht in Erscheinung tritt.

**Beispiel:** Ich mache mich als Repetitor selbstständig und ein Freund beteiligt sich mit 10.000€. Dafür erhält er 10% der jährlichen Einnahmen. Dies erfolgt nur über einen Vertrag zwischen uns. Er tritt nach außen hin nicht in Erscheinung und ist offiziell nicht an der Unternehmung beteiligt.

Alternativ kann der Einzelkaufmann seine Unternehmung natürlich über sein Privatvermögen finanzieren.

- **GmbH:** Eine GmbH kann durch Ausgabe neuer GmbH-Anteile unbegrenzt neue Gesellschafter aufnehmen und sich so mit Eigenkapital versorgen. GmbH-Anteile werden allerdings nicht liquide gehandelt und es bedarf beim Kauf eines GmbH-Anteils einer notariellen Beurkundung.

- **Aktiengesellschaft:** Die Aktiengesellschaft kann sich durch Emission von Aktien mit Eigenkapital versorgen. Aktien werden-besonders wenn das Unternehmen börsennotiert ist- liquide gehandelt. Die AG hat damit die besten Möglichkeiten der Eigenkapitalfinanzierung. Bei Kapitalerhöhungen unterscheidet man folgende Möglichkeiten:

### Kapitalerhöhung durch Ausgabe junger Aktien

Bei einer Kapitalerhöhung werden von der Aktiengesellschaft neue, sogenannte junge, Aktien verkauft. Die jungen Aktien müssen vom Nennwert her mit den alten Aktien übereinstimmen. Ausserdem muss einer Kapitalerhöhung von 75% des bei der Beschlussfassung vertretenen Grundkapitals zugestimmt werden.

Es wird zwischen den folgenden Arten von Kapitalerhöhungen unterschieden:

- Nominelle Kapitalerhöhung
- Ordentliche Kapitalerhöhung
- Genehmigte Kapitalerhöhung

- Bedingte Kapitalerhöhung

### **Ordentliche Kapitalerhöhung**

Bei der Ordentlichen Kapitalerhöhung werden junge Aktien ausgegeben und der Gesellschaft fließt frisches Kapital zu. Die Aktien werden also tatsächlich verkauft. Dabei darf der Verkaufspreis nicht unter dem Nennwert der Aktien liegen.

Allen Inhabern alter Aktien steht bei einer ordentlichen Kapitalerhöhung ein Bezugsrecht zu- also das Recht, eine bestimmte Anzahl junger Aktien zu kaufen. Damit wird gewährleistet, dass die Altaktionäre ihren Stimmrechtsanteil beibehalten können und dass ihnen keine wirtschaftlichen Nachteile entstehen. Da die jungen Aktien meist unter dem aktuellen Kursniveau emittiert werden, würde sich ansonsten ein wirtschaftlicher Nachteil für die Altaktionäre ergeben.

### **Genehmigte Kapitalerhöhung**

Bei einer ordentlichen Kapitalerhöhung muss die Hauptversammlung mit 75% für die Kapitalerhöhung stimmen. Dieser Prozess kann Zeit dauern, die das Unternehmen evtl. nicht hat. Außerdem ist der Ausgang ungewiss. Möchte die Hauptversammlung dem Vorstand mehr Flexibilität gewähren, so kann sie ihn für höchstens 5 Jahre ermächtigen, eine Kapitalerhöhung bis zu einem bestimmten Betrag ohne Zustimmung der Hauptversammlung durchzuführen. Für diese Ermächtigung bedarf es natürlich auch 75% der Stimmen. Ansonsten gibt es keine Abweichungen zur ordentlichen Kapitalerhöhung.

### **Bedingte Kapitalerhöhung**

Bei der bedingten Kapitalerhöhung können unter bestimmten Umständen in der Zukunft Kapitalerhöhungen durchgeführt werden. Dazu gehören:

- Umtausch von Wandelschuldverschreibungen in Aktien,
- Belegschaftsaktien (Erwerb von jungen Aktien durch Bezugsrechte von Mitarbeitern),
- Umtausch von Aktien bei Unternehmenszusammenschlüssen.

Eine Bedingte Kapitalerhöhung muss auch von 75% des anwesenden stimmberechtigten Kapitals der Hauptversammlung genehmigt werden und darf 50% des Grundkapitals nicht überschreiten.

### Nominelle Kapitalerhöhung/ Kapitalerhöhung aus Gesellschaftsmitteln

Bei der nominellen Kapitalerhöhung wird nur das gezeichnete Kapital erhöht-der Gesellschaft fließt kein neues Kapital zu! Bei der nominellen Kapitalerhöhung werden Kapitalrücklagen und Gewinnrücklagen mit Verlustvorträgen saldiert und der (positive) Saldo in das gezeichnete Kapital gebucht. Im Zuge der Kapitalerhöhung werden entweder

- die Nennwerte der bestehenden Aktien erhöht (in Deutschland unzulässig) oder
- die Anzahl an Aktien erhöht (Gratisaktien).

#### Beispiel:

Passiva vor Kapitalerhöhung:	
Gezeichnetes Kapital	8.000.000
Kapitalrücklage	4.000.000
Gewinnrücklage	1.000.000
Verlustvortrag	-3.000.000
Summe	10.000.000

Zunächst werden Gewinnrücklage, Kapitalrücklage und Verlustvortrag saldiert und das gezeichnete Kapital wird um die Differenz erhöht.

Passiva nach Kapitalerhöhung:	
Gezeichnetes Kapital	10.000.000
Kapitalrücklage	0
Gewinnrücklage	0
Verlustvortrag	0
Summe	10.000.000

Natürlich müssen dabei nicht die gesamten Rücklagen aufgelöst werden. Es muss aber immer der Verlustvortrag eliminiert werden, bevor das gezeichnete Kapital erhöht werden darf.

Eine nominelle Kapitalerhöhung ist nicht nur eine Bereinigung der Bilanz. Eine wirtschaftliche Folge ist, dass das haftende Eigenkapital, das nicht für Ausschüttungen verwendet werden darf, erhöht wurde. Dies erhöht die Bonität der Gesellschaft gegenüber Kreditgebern.

## Kreditfinanzierung

Die wichtigste Voraussetzung für eine Kreditfinanzierung ist die Kreditwürdigkeit des Kapitalnehmers. Diese bestimmt nicht, ob die potentiellen Kapitalgeber bereit sind einen Kredit zu gewähren, sondern auch zu welchen Kosten. Je höher das Risiko des Kreditausfalls, desto höher wird der Zinssatz ausfallen, da die Kreditgeber eine Prämie für das übernommene Risiko benötigen.

Neben der Zahlungsfähigkeit des Kreditnehmers kann dieser seine Kreditwürdigkeit verbessern, indem er zusätzliche Kreditsicherheiten stellt. Es wird zwischen akzessorischen Sicherheiten und fiduziarischen Kreditsicherheiten unterschieden:

**Akzessorische Kreditsicherheiten:** Bestand, Umfang und Dauer der Sicherheit ist vom Bestand, Umfang und Dauer der zu besichernden Forderung abhängig. Sobald die Forderung beglichen ist, erlöscht auch die Besicherung.

**Beispiel:** Hypothek, Bürgschaft, Verpfändung.

- **Fiduziarische Kreditsicherheit:** Dies ist eine Kreditsicherheit, die nicht an eine Forderung gebunden ist. Der Sicherungsinhaber ist Inhaber der besicherten Sache, ist aber verpflichtet, dem Sicherungsgeber den Gebrauch der besicherten Sache zu gewähren.

### Kreditsicherheiten im Detail:

- **Bürgschaft (akzessorisch):** Der Bürge verpflichtet sich im Insolvenzfall die Schuld des Kreditnehmers zu begleichen. Bei der selbstschuldnerischen Bürgschaft kann direkt in das Vermögen des Bürgern zwangsvollstreckt werden-ansonsten steht ihm eine Einrede zur Vorausklage zu. Dabei steht ihm das Recht zu, die Zahlung bis zur erfolglosen Zwangsvollstreckung des Schuldners zu verzögern.

- **Garantie (fiduziarisch):** Der Garantiegeber garantiert einen gewissen Erfolg einer Investition und trägt das Risiko des Misserfolges.

**Beispiel:** Ich verwalte dein Vermögen für 1 Jahr und garantiere dir eine Mindestrendite von 5%.

- **Wechselsicherung:** Der Kreditnehmer hinterlegt beim Kreditgeber einen Wechsel (Zahlungsversprechen mit Wertpapiercharakter) in Höhe des Kredites. Bei Zahlungsverzug wird so das Eintreiben der Forderung erleichtert.

- **Verpfändung:** Bei der Verpfändung übergibt der Kreditnehmer dem Kreditgeber eine bewegliche Sache. Der Kreditnehmer bleibt aber Eigentümer der Sache.



- **Sicherungsübereignung:** Bei der Sicherungsübereignung bleibt der Kreditnehmer Besitzer der übereigneten Sache (kann sie also weiterhin wirtschaftlich nutzen), überträgt aber die Inhaberschaft auf den Kreditgeber.
- **Sicherungsabtretung:** Wie Sicherungsübereignung, nur dass anstatt beweglicher Sachen Rechte (z.B. Forderungen ) übereignet werden.
- **Grundpfandrecht:** Da unbewegliche Sachen (Grundstücke und Gebäude) nicht übergeben werden können, erfolgt die Eintragung im Grundbuch. Dies ist eine sehr praktikable Nutzung des Pfandrechtes, da die unbeweglichen Dinge weiter genutzt werden können.

#### Langfristige Formen der Kreditfinanzierung:

- **Anleihen:** Werden von Staaten, dem öffentlichen Sektor oder emissionsfähigen Unternehmen(Industrieobligationen) herausgegeben.
- **Wandelanleihen:** Dies sind Anleihen, die dem Inhaber das Recht einräumen, innerhalb einer festen Frist die Anleihen zu einem festgelegten Kurs in Aktien des Unternehmens zu tauschen.
- **Optionsschuldverschreibungen:** Anleihen, die neben dem Nominalzins auch das Recht gewähren, an einem bestimmten Stichtag Aktien zu einem festgelegten Kurs zu kaufen. Die Anleihen werden nicht getauscht, sondern bleiben bestehen!
- **Gewinnschuldverschreibungen:** Der feste Zins der Anleihe wird durch eine Gewinnbeteiligung ergänzt oder ersetzt. Basis für die Gewinnbeteiligung ist die ausgeschüttete Dividende. Die Gewinnbeteiligung kann nach oben begrenzt sein. Es ist auch möglich, die Inhaber der Gewinnschuldverschreibungen erst ab einer gewissen Dividendenhöhe zu beteiligen.
- **Anleihen mit variabler Verzinsung:** Anleihen, deren Zins an eine externe Größe gekoppelt ist (Euribor oder Anzahl der Tore der Fußball Nationalmannschaft bei der WM).
- **Nullkuponanleihen:** Anleihen, die keinen festen Zins zahlen. Die Rendite entsteht nur durch die Differenz aus Ausgabekurs und Rücknahmekurs (Agio).

Berechnung der effektiven Verzinsung einer Nullkuponanleihe:

$$C_T = (1 + r)^T * C_0$$

wobei

$C_T$  für den Rücknahmekurs,

$C_0$  für den Ausgabekurs,

$r$ , für den effektiven Zinssatz steht.

- **Schuldscheindarlehen:** Ein Kredit, der direkt von Kapitalsammelstellen (z.B. Versicherungen) vergeben wird.

- **Langfristige Bankkredite:** Wie der Name sagt! Diese Kredite werden oft durch Annuitätentilgung getilgt.

#### Kurzfristige Formen der Kreditfinanzierung

- **Kontokorrentkredit:** Überziehungsmöglichkeit eines Girokontos zur Überbrückung kurzfristiger Liquiditätsengpässe.

- **Wechseldiskontkredit:** Die Bank kauft einen Wechsel an und stellt eine entsprechende Summe zur Verfügung. Gilt dennoch als Kreditgeschäft, weil die Bank den Wechsel streng genommen gar nicht kauft. Der Kreditnehmer haftet nämlich für den Wechsel auch nach dem Verkauf.

- **Lombardkredit:** Kurzfristiger Kredit, der gegen Verpfändung von Kreditsicherheiten wie Aktien oder Anleihen gewährt wird. Auch Pfandleihe gehört zu den Lombardkrediten.

- **Akzeptkredit:** Die Bank akzeptiert einen Wechsel ihres Kunden einem Dritten gegenüber als Zahlungsmittel. Beispiel: Die fernuni-online AG stellt der Guugel AG einen Wechsel über die Zahlung von 10.000€ aus. Guugel kann diesen Wechsel nun bei der Bank der fernuni-online AG für 10.000€ einreichen.

- **Avalkredit:** Eine Bürgschaft oder Garantie einer Bank einem Dritten gegenüber.

- **Lieferantenkredit:** Räumt ein Verkäufer dem Käufer ein Zahlungsziel ein, so besteht in dieser Zeit ein Lieferantenkredit zwischen Käufer und Verkäufer. Wird dieser nicht in Anspruch genommen und sofort gezahlt, so wird oft ein Abschlag (Skonto) gewährt. Für die Skontozahlung wird üblicherweise eine kurze Zeitspanne von wenigen Tagen gewährt.

Der jährliche Zinssatz, der mit der Gewährung des Skontos einhergeht, berechnet sich nach folgender Formel:

$$i_T = \left( 1 + \frac{\text{Skontosatz}}{\text{Kreditbetrag in \% des Rechnungsbetrages}} \right)^{\frac{\text{Jahreszinstage}}{\text{Zahlungsziel-Skontofrist}}} - 1$$

**Beispiel:** Ein Lieferant hat für seine Kunden folgende Konditionen festgelegt:

Zahlungsziel: 60 Tage

Skontofrist: 10 Tage

Skonto: 5%

Der Skontozinssatz ist nun:

$$i_T = \left(1 + \frac{5\%}{100\% - 5\%}\right)^{\frac{365}{60-10}} - 1 = 45,42\%$$

- **Kundenanzahlung:** Bei der Kundenanzahlung wird bezahlt, bevor eine Leistung erbracht wurde. Dadurch entsteht ein Kredit.

#### **Kreditsubstitute:**

Factoring: Beim Factoring wird regelmäßig eine offene Forderung vor Fälligkeit verkauft. Beim echten Factoring geht damit auch das Kreditausfallrisiko auf den Käufer über (Delkrederefunktion). Beim unechten Factoring trägt der Verkäufer weiterhin das Kreditausfallrisiko und damit ist das unechte ein Kreditsubstitut-das echte Factoring nicht.

#### **Leasing**

Beim Leasing bekommt der Leasingnehmer den geleasteten Gegenstand übereignet, ohne dass er Eigenkapital oder Fremdkapital aufbringen muss. Es werden lediglich jährliche Zahlungen fällig. Da der Leasingvertrag aber im Ergebnis einem langfristigen Kredit mit Realbesicherung gleich kommt, entsprechen auch die Kosten des Leasings ungefähr denen der Fremdfinanzierung.

Die Vorteile des Leasings sind:

- Steuervorteile
- Bilanziell wird weniger Fremdkapital ausgewiesen als bei einer Fremdfinanzierung.
- Leasinggeber sind im Insolvenzfall besser gestellt als Kreditgeber.

Man unterscheidet das **Operate Leasing** und das **Finanzierungs-Leasing**.

- **Operate Leasing:** Vertrag ist von beiden Seiten kurzfristig kündbar. Daher trägt der Leasinggeber das Investitions- und Amortisationsrisiko. Der Leasinggegenstand wird von dem Leasinggeber bilanziert und abgeschrieben.

- **Finanzierungs-Leasing:** Der Vertrag ist unkündbar und läuft meistens über 60-80% der erwarteten Nutzungsdauer. Während dieser Zeit wird der geleaste Gegenstand in der Regel voll amortisiert, ähnelt daher also viel mehr einem Kauf des Gegenstandes. Das Investitions- und Amortisationsrisiko liegt daher beim Leasingnehmer. Wer den Gegenstand bilanziert und abschreibt, hängt von der konkreten Vertragsgestaltung ab.

Nach Ablauf eines Vollamortisationsvertrages kann der Leasingnehmer das Objekt

- zurückgeben,
- zu einem festgelegten Preis kaufen,
- zu einer niedrigeren Miete mieten.

Wurde der Gegenstand nicht voll amortisiert, so

- kann der Leasinggeber den Gegenstand zu einem festgelegten Preis an den Leasingnehmer verkaufen oder anderweitig verwerten und den Erlös behalten.
- kann der Leasinggeber den Gegenstand verkaufen und der Leasingnehmer wird nach zuvor festgelegten Bedingungen an dem Ergebnis (Gewinn oder Verlust) beteiligt.
- kann der Leasinggeber im Falle eines kündbaren Vertrages den Vertrag kündigen. Dabei wird eine Abschlusszahlung in Höhe der bis dahin noch nicht gedeckten Gesamtkosten fällig.

## Contracting

Contracting bezeichnet ein Kreditsubstitut, das fast ausschließlich in der Energie- und Wärmeversorgung zum Einsatz kommt. Dabei wird an einem Objekt die Energieeffizienz durch Modernisierungen verbessert und die Kosten der Modernisierung werden aus zukünftigen Einsparungen finanziert.

**Innenfinanzierung:** Zur Innenfinanzierung gehören Erträge, die durch Umsatzerlöse erwirtschaftet werden. Man unterscheidet offene und stille Selbstfinanzierung:

- **offene Selbstfinanzierung:** Basis für den Gewinn ist die Bilanz. Diese kann von der Geschäftsführung durch bilanzielle Maßnahmen manipuliert werden.

- **stille Selbstfinanzierung:** Basis ist nicht der ausgewiesene, sondern der tatsächlich erwirtschaftete Gewinn.

Eine weitere Form der Selbstfinanzierung ist die temporäre Selbstfinanzierung. In dem Zeitraum zwischen Gewinnentstehung und Gewinnausschüttung steht der Gewinn dem Unternehmen noch zur Verfügung und kann im Rahmen der Selbstfinanzierung genutzt werden.

## Finanzierung aus Abschreibungen und Rückstellungen

Eine weitere Form der Innenfinanzierung ist es, den ausgewiesenen Gewinn des Unternehmens zu verringern und somit die Steuerpflicht zu verringern. Dies kann man beispielsweise durch Abschreibungen tun: Höhere Abschreibungen führen nicht zu Mittelabflüssen, aber der Periodengewinn fällt. Höhere Abschreibungen in aktuellen Perioden haben aber geringere Abschreibungen in späteren Perioden zur Folge. Der Effekt ist also nur temporär.

Genauso verhält es sich bei Rückstellungen. Diese vermindern den aktuellen Gewinn, erhöhen aber den Gewinn späterer Perioden, wenn sie aufgelöst werden.

Der Finanzierungseffekt aus Abschreibungen wird „Kapitalfreisetzungseffekt“ oder auch „Kapazitätserweiterungseffekt“ genannt. Dabei findet eine Umschichtung aus dem Anlagevermögen in das Umlaufvermögen statt. Das Anlagevermögen wird um die Abschreibungen verringert und die liquiden Mittel des Umsatzvermögens erhöhen sich um die Steuereinsparungen.

### Finanzierung aus Vermögensumschichtung

Durch Rationalisierungsmaßnahmen und Veräußerung von Vermögensgegenständen (z.B. „sale and lease back“) können liquide Mittel beschafft werden. So könnte ein Unternehmen seine Büroräume verkaufen und direkt zurückmieten.

## Aufgaben zu 11.0

### Aufgabe 11.1

Gib an, in welcher Form und Höhe sich folgende Geschäftsvorfälle auf die Innen- bzw. auf die Außenfinanzierung auswirken:

- a) Produkte wurden in Höhe von 50.000€ auf Ziel verkauft.
- b) Ein Kredit über 10.000€ wird bei der Bank aufgenommen.
- c) Ein Gesellschafter entnimmt 5.000€ aus der Gesellschaft.
- d) Löhne in Höhe von 10.000€ werden ausgezahlt.
- e) 100. 000 Aktien werden zu einem Nennwert von 1€ ausgegeben. Der Verkaufspreis beträgt 2€.

### Aufgabe 11.2

Gib an, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind:

- a) Bei einer ordentlichen Kapitalerhöhung steht den Altaktionären ein Bezugsrecht auf die jungen Aktien zu. Damit wird sichergestellt, dass keine ungewollten neuen Aktionäre die Aktien erwerben.
- b) Bei einer ordentlichen Kapitalerhöhung wird das Agio in die Kapitalrücklage eingestellt.
- c) Bei der nominellen Kapitalerhöhung fließt der Gesellschaft frisches Kapital zu.
- d) Der Kurs der Altaktien fällt in der Regel nach Ankündigung einer Kapitalerhöhung, bei der der Kurs der jungen Aktien unterhalb des Kurses der Altaktien liegt, und steigt nach Durchführung der Kapitalerhöhung.
- e) Bei einer ordentlichen Kapitalerhöhung werden die Rücklagen teilweise aufgelöst.
- d) Der Bilanzkurs steigt bei einer nominellen Kapitalerhöhung immer.

## Lösungen zu 11.0

### Lösung zu 11.1

- a) Keine Auswirkung, da auf Ziel.
- b) Außenfinanzierung +10.000€.
- c) Außenfinanzierung -5.000€.
- d) Innenfinanzierung -10.000€.
- e) Außenfinanzierung +200.000€.

### Lösung zu 11.2

- a) Falsch. Bezugsrechte müssen nicht ausgeübt werden und Dritte können die Bezugsrechte erwerben und junge Aktien kaufen. Bezugsrechte dienen den Altaktionären als Kompensationseffekt und als Möglichkeit, ihren Stimmrechtsanteil beizubehalten.
- b) Richtig.
- c) Falsch. Es findet nur eine Umbuchung im Eigenkapital statt.
- d) Falsch. Es gibt keinen Grund, warum der Kurs nach Durchführung der Kapitalerhöhung steigen sollte (jedenfalls nicht im Fernuni Skript).
- e) Falsch. Dies wäre bei einer nominellen Kapitalerhöhung der Fall.
- f) Falsch. Er fällt oder bleibt gleich, da das Eigenkapital unverändert bleibt, aber neue Aktien ausgegeben werden (in den meisten Fällen) oder der Nennwert der alten Aktien erhöht wird.

## 12.0 Marketing

### Produkt-, Distributions- und Kommunikationspolitik

Diese Kapitel kann auf Begriffsdefinitionen beschränkt werden.

#### Grundbegriffe

- **Produktpolitik:** Durch Produktinnovation, Produktvariation und Produktelimination sollen die Bedürfnisse der Kunden befriedigt werden und es wird das Ziel verfolgt, sich positiv von der Konkurrenz abzuheben.
- **Produktinnovation:** Einführung neuer Produkte durch technischen Fortschritt oder komplett neuer Produkteigenschaften.
- **Produktvariation:** Änderung des bestehenden Produktes. Man unterscheidet Änderungen der:
  - physikalischen und technischen Eigenschaften
  - ästhetischen Eigenschaften (Farbe, Form)
  - symbolischen Eigenschaften, wie den Markennamen
  - Zusatzleistungen (Service, Garantie)
- **Produktdifferenzierung:** Gleichzeitiges Angebot mehrerer Varianten eines Produktes um so die verschiedenen Präferenzen der Kunden optimal zu erfüllen.
- **Produktdiversifikation:** Erhöhung der Vielfalt an Produkten, um nicht nur von dem Erfolg eines Produktes abhängig zu sein. Man unterscheidet:
  - horizontale Diversifikation: Herstellung von Produkten, die auf der selben Wertschöpfungsstufe stehen (Beispiel: Ein Bäcker backt statt Brot auch Kuchen (gleiche Wertschöpfungsstufe), anstatt anzufangen, das Mehl selber zu mahlen (vorgelagerte Wertschöpfungsstufe)).
  - vertikale Diversifikation: Ausweitung der Produktion auf vor- oder nachgelagerte Wertschöpfungsstufen (Beispiel: Ein Autobauer kauft Auto-Zulieferer auf).
  - Produktelimination: Produkt wird nicht mehr produziert, weil es zu alt, technisch überholt ist oder nicht mehr zum Unternehmen passt.
- **Distributionspolitik:** Beschäftigt sich mit der Frage, wie das Produkt von der Herstellung zum Kunden kommt.



- **Vertriebssystem:** Es gibt den:

- werkseigenen Vertrieb: Vertriebsstätten gehören rechtlich und wirtschaftlich zum Unternehmen.
- werksgebundenen Vertrieb: Vertriebsstätten gehören wirtschaftlich zum Unternehmen, dieses gründet aber rechtlich unabhängige Tochterunternehmen (Vertriebs GmbHs) für den Vertrieb.
- werksungebundenen Vertrieb: Vertrieb erfolgt über rechtlich und wirtschaftlich unabhängige Gesellschaften.

- **Absatzformen:** Produkte können über:

- Geschäftsführung (bei großen Verkaufsmengen),
- Reisende oder
- Fabrikläden (eigene Verkaufsniederlassungen)

vertrieben werden. Außerdem gibt es noch betriebsfremde Absatzorgane: Handelsvertreter, Kommissionare und Makler. Handelsvertreter sind wirtschaftlich und juristisch unabhängig, agieren aber im Namen und auf Rechnung des Auftraggebers. Kommissionare handeln im eigenen Namen, aber auf Rechnung des Auftraggebers. Makler handeln im eigenen Namen und auf eigene Rechnung.

- **Absatzweg/Absatzkanal:** Es gibt 4 verschiedene Absatzwege:

- Großhandel,
- Außendienst,
- Einzelhandel,
- unmittelbarer Direktabsatz.

- **Werbung:** Bei der Werbeplanung treten drei grundsätzliche Probleme auf:

- Festlegung der Werbeziele und Zielgruppen,
- Bestimmung der Höhe des Werbeetats,
- Festlegung der Werbeobjekte, Werbemittel und Werbeträger.

Man unterscheidet die folgenden 4 Stufen der Werbewirkung:

1. Aufmerksamkeit
2. Interesse
3. Wunsch/Verlangen

#### 4. Aktion (Kauf)

- **Werbeetat:** Die Höhe des Werbeetats wird beeinflusst von:

- dem Umsatz oder Gewinn,
- dem Werbeetat der Konkurrenz,
- der Höhe der verfügbaren finanziellen Mittel,
- einem bestimmten Werbeziel.

- **Verkaufsförderung:** Kurzfristige Aktionen wie z.B.:

- Sonderangebote, Gutscheine, Treueaktionen.

- **Öffentlichkeitsarbeit:** Steigerung des Ansehens des Unternehmens in der Öffentlichkeit. Beispiel: soziales oder ökologisches Engagement, Sponsoring. Negativbeispiel: Schlechte Arbeitsbedingungen oder schlechte Bezahlung .

### Wettbewerbsstrategien

Es wird zwischen 5 verschiedenen Wettbewerbsstrategien unterschieden:

#### 1) Porters Konzept generischer Wettbewerbsstrategien

Porter unterscheidet zwei grundlegende Strategien: Die des Qualitätsvorteils (Differenzierungsstrategie) und die der Kostenführerschaft. Beide können entweder branchenweit oder aber in einem Nischenmarkt umgesetzt werden. Man muss also entweder besser sein als der Rest oder billiger!

#### 2) Produkt-Markt-Mix nach Ansoff

Der Markt und die Produkte werden nach „neu“ und „gegenwärtig“ klassifiziert. Je nach Produkt und Markt ergibt sich die entsprechende Wettbewerbsstrategie:

- Neue Produkte auf gegenwärtigen Märkten: Produktentwicklung
- Neue Produkte auf neuen Märkten: Diversifikation.
- gegenwärtige Produkte auf neuen Märkten: Markterschließung.
- gegenwärtige Produkte auf gegenwärtigen Märkten: Marktdurchdringung.

**3) Produktlebenszykluskonzept:** Es wird angenommen, dass jedes Produkt nur eine begrenzte Lebenszeit vom Markteintritt zum Marktaustritt hat. Der Lebenszyklus eines Produktes kann grob in 4 Phasen unterteilt werden:

- Markteinführung
- Wachstum,
- Sättigung
- Absterben

Je nach Phase sollte die passende Wettbewerbsstrategie gewählt werden (Hohe Marketingmaßnahmen in den frühen Phasen, Kostenersparnis in den späten etc.).

#### **4) Das Erfahrungskurvenkonzept**

Grundlage des Erfahrungskurvenkonzeptes ist eine erwartete Kostensenkung von 20-30% bei einer Verdopplung der Produktionsmenge. Daher sollten Unternehmen sich auf wachsende Märkte und einen wachsenden Marktanteil konzentrieren.

#### **5) Marktwachstums-Marktanteil-Portfolio**

Je nachdem, welchen Marktanteil das Produkt hat und wie hoch das Marktwachstum ist wird eine entsprechende Strategie empfohlen:

- hoher Marktanteil bei niedrigem Marktwachstum: Überschüsse abschöpfen und in die Entwicklung neuer Produkte investieren.
- hoher Marktanteil bei hohem Marktwachstum: Marktanteil verteidigen und ausbauen.
- niedriger Marktanteil bei niedrigem Marktwachstum: Überschüsse abschöpfen. Bei Verlusten Desinvestition. Auf keinen Fall Kapital investieren!
- niedriger Marktanteil bei hohem Marktwachstum: Investieren, um Marktanteil zu erhöhen.

## 13. Organisation und Personal

In diesem Kapitel gibt es einige Begrifflichkeiten auswendig zu lernen. Es wurde bisher selten geprüft und ich werde das wichtigste kurz zusammenfassen:

Es wird zwischen Aufbauorganisation und Ablauforganisation unterschieden. Wikipedia schreibt dazu: Ablauforganisation bezeichnet in der Organisationstheorie das Beschreiben von dynamischen Arbeitsprozessen unter Berücksichtigung von Strukturen für Raum, Zeit, Sachmitteln und Personen, wogegen sich die Aufbauorganisation hauptsächlich mit dem statischen Strukturieren einer Unternehmung in organisatorische Einheiten – Stellen und Abteilungen – beschäftigt.

### Zur Aufbauorganisation:

Gliederung in und Koordination von Teileinheiten eines Unternehmens. Die Aufgliederung kann nach folgenden Kriterien erfolgen:

-In der Verrichtungsanalyse wird nach Beschaffung, Produktion, Rechnungswesen, usw. aufgegliedert.

-In der Objektanalyse wird nach den Tätigkeiten bei der Produkterstellung aufgegliedert.

-In der Ranganalyse wird hierarchisch der Reihe nach aufgegliedert. Vorgelagerte Produktionsprozesse zuerst. Z.B. Produzieren, Montieren, Lackieren.

-In der Phasenanalyse wird nach Planung, Herstellung und Qualitätskontrolle aufgegliedert.

-In der Zweckbeziehungsanalyse wird zwischen dem Herstellungsprozess (Primäraufgaben) und Verwaltung/Marketing usw. (Sekundäraufgaben) unterschieden.

### Leitungssysteme in der Aufbauorganisation

Leitungssysteme regeln die Weisungsbefugnis innerhalb eines Unternehmens. Man unterscheidet:

-Einliniensysteme: Jede Stelle erhält Anweisungen von einer direkt vorgesetzten Stelle.

-Mehrliniensysteme: Jede Stelle erhält Anweisungen von mehreren vorgesetzten Stellen.

-Stabliniensystem: Jede Stelle erhält Anweisungen von einem Abteilungsleiter bzw. einer Zwischeninstanz.

-Matrixorganisation: Eine Matrixorganisation ist ein mögliches Strukturprinzip in der Organisation eines Betriebes, nach dem Zuständigkeit und Verantwortlichkeit aufgebaut werden können. Dabei wird die Leitungsfunktion auf zwei voneinander unabhängige, gleichberechtigte

Dimensionen (z. B. Verrichtung und Produkte) verteilt. Die Mitarbeiter stehen in zugleich zwei gleichrangigen Weisungsbeziehungen, z. B. sind sie den Leitern der verrichtungsbezogenen Abteilungen Beschaffung, Produktion und Absatz und gleichzeitig den objektbezogenen Produktmanagern unterstellt. Eine Matrixorganisation ist damit eine Form der Mehrlinienorganisation (ja, das hab ich aus einem Lexikon).

### **Zur Ablauforganisation**

In der Ablauforganisation werden die Arbeitsprozesse organisiert. Also wer macht was wo und wie lange.

Man unterscheidet 5 Koordinationsformen:

- 1) Persönliche Weisung: Hierarchisch von oben nach unten.
- 2) Standardisierung: Zum Beispiel bei der Fließbandarbeit.
- 3) Budgets: Zur Budgetgrenzen und Zielvorgaben wird der Handlungsspielraum einer Abteilung eingeschränkt, sie behält aber sehr viel Entscheidungsspielraum.
- 4) Verrechnungspreise: Die Produktionsfaktoren erhalten innerbetriebliche Verrechnungspreise. Nutzt eine Abteilung einen Produktionsfaktor, so muss sie dafür bezahlen.
- 5) Selbstabstimmung: Innerhalb der Gruppe einigt man sich auf Regeln und Pläne zur Erreichung der Ziele.

## Personalwirtschaft

Hier werden wirklich teils triviale Dinge besprochen. Ich versuche mich wieder so kurz wie möglich zu fassen. Begriffe wie Personalbedarfsplan, Personalbeschaffung usw. sollten klar sein. Ich möchte hier kurz auf die Verfahren zur Entlohnung eingehen:

-Rangfolgeverfahren: Es wird nach dem Schwierigkeitsgrad der Tätigkeit entlohnt.

-Rangreihenverfahren: Tätigkeiten werden nach Anforderungen sortiert und erhalten eine Gewichtung. Z.B. Maurerarbeit: Körperlich 7, Fachwissen 3 und Architekt: Körperlich 2 Fachwissen 10.

Stufenwertzahlverfahren: Tätigkeiten werden nach Anforderungen sortiert und es werden den Tätigkeiten Bewertungsstufen zugeordnet. Beispiel: Es gibt die Stufen 1 bis 6. Maurerarbeit: Körperlich 5, Fachwissen 2 und Architekt: Körperlich 1 Fachwissen 6.

## 14.0 Internes und externes Rechnungswesen

Diese Bereiche wurden bisher kaum geprüft. Dennoch ist der Stoff prüfungsrelevant und du solltest ihn beherrschen.

### Grundbegriffe

Bei der Berechnung ökonomischer Größen wird grundlegend zwischen Bestandsgrößen und Stromgrößen unterschieden. Bestandsgrößen sind- wie der Name schon sagt- Bestände an Gütern oder Geldmittel zu bestimmten Stichtagen. Stromgrößen sind die Veränderungen der Bestandsgrößen.

Monetäre Bestands- und Stromgrößen lassen sich wie folgt unterteilen:

#### Bestandsgrößen:

- Zahlungsmittel: Bargeld, Bankguthaben, Kontokorrentverbindlichkeiten
- Geldvermögen: Forderungen und Verbindlichkeiten
- Sachvermögen

#### Stromgrößen:

**Einzahlung/Auszahlung:** Zahlungsvorgänge liegen vor, wenn die Summe aller Zahlungsmittelkonten sich verändert, also Bargeld, Sichtguthaben, Besitzzchecks, Besitzwechsel, Sichtverbindlichkeiten. Umbuchungen innerhalb dieser Konten gehören also nicht dazu.

**Einnahme/Ausgabe:** Einnahmen oder Ausgaben liegen vor wenn die Summe aller Zahlungsmittelkonten zuzüglich der Konten für Forderungen bzw. Verbindlichkeiten sich verändert (Umbuchungen innerhalb dieser Konten führen also nicht zu Einnahmen/Ausgaben).

**Beispiel 1:** Kauf eines Firmenwagens, Bezahlung in bar.->Auszahlung und Ausgabe, da Zahlungsmittelkonto betroffen.

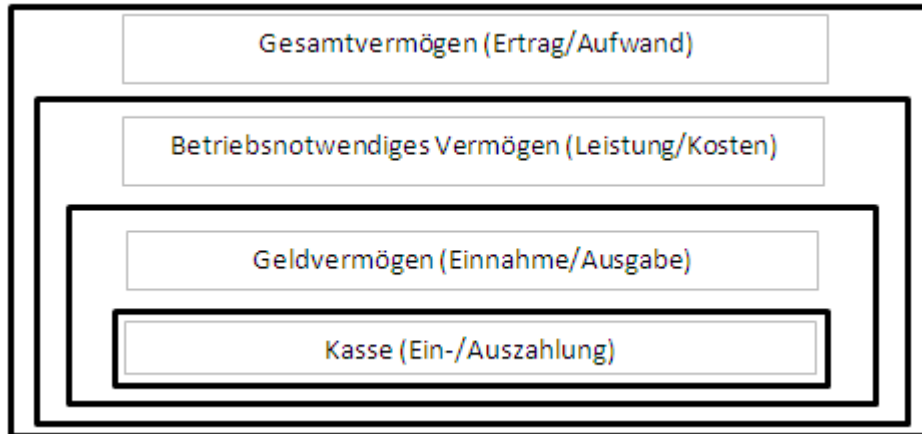
**Beispiel 2:** Kauf eines Firmenwagens auf Ziel.->Ausgabe, Auszahlung später. Verbindlichkeiten sind betroffen, daher Ausgabe, Zahlungsmittelkonten sind nicht betroffen, daher keine Auszahlung.

**Ertrag/Aufwand:** Eine Einzahlung (Auszahlung) ist erfolgsneutral, wenn die Gegenbuchung komplett auf einem Bestandskonto gemacht wird. Wird ein Teil der Gegenbuchung auf einem Erfolgskonto gebucht, verändert sich also das Reinvermögen (Privatentnahmen /-einlagen ausgenommen), so handelt es sich um Ertrag (Aufwand).

Ertrag ist der Wertzuwachs des Gesamtvermögens einer Unternehmung.

Aufwand ist der Werteverzehr des Gesamtvermögens einer Unternehmung.

**Leistung/Kosten:** Kosten sind der Verbrauch an Produktionsfaktoren der regulären Betriebstätigkeit einer Periode. Leistungen sind entsprechend die Schaffung von neuen Gütern der regulären Betriebstätigkeit einer Periode.



Einzahlungen müssen nicht immer Ertrag bedeuten und Auszahlungen nicht immer Aufwand.

Eine Einzahlung, also Erhöhung der Zahlungsmittel, kann auch durch eine Kreditaufnahme, die Bezahlung einer offenen Forderung oder den Verkauf von Betriebseigentum entstehen. Dies sind aber alles keine erfolgswirksamen Geschäftsvorfälle.

Genauso muss eine Auszahlung nicht aufwandswirksam sein. Die Rückzahlung eines Kredites, die Begleichung einer offenen Verbindlichkeit oder der Kauf neuen Betriebseigentum sind Beispiele für aufwandsunwirksame Auszahlungen.

Andersherum muss auch nicht jeder Ertrag zu einer Einzahlung führen. Beispiele sind die Erhöhung von Forderungen oder Verringerung von Verbindlichkeiten ohne Zahlung.

Auch Aufwendungen können ohne Auszahlungen entstehen. Entstehung eines Schadensersatzanspruches, Abschreibungen oder die Erhöhung von Verbindlichkeiten/Verringerung von Forderungen ohne Zahlung sind einige Beispiele.



### 14.1 Einzel- und Gemeinkosten

Einzelkosten, sind Kosten, die einem bestimmten Bezugsobjekt (Gut, Produktionsprozess, Kostenstelle, usw.) zugeordnet werden können. Je nach Bezugsobjekt lassen sich folgende Einzelkosten unterscheiden:

- **Kostenträgereinzelkosten:** Können einem Produkt konkret zugerechnet werden.
- **Kostenstelleneinzelkosten:** Können einer Kostenstelle konkret zugerechnet werden.
- **Materialeinzelkosten:** Können einem Material (Rohstoff, Fremdbauteil) konkret zugerechnet werden.
- **Fertigungseinzelkosten:** Fertigungslöhne und Akkordlöhne.
- **Sondereinzelkosten des Vertriebs:** Verkaufsprovisionen und Einzelverpackungen.
- **Sondereinzelkosten der Fertigung:** Fallen nicht für ein einzelnes Stück, sondern für den gesamten Auftrag an und werden daher meist als Gemeinkosten behandelt.

**Gemeinkosten** sind Kosten, die gerade nicht einem bestimmten Bezugsobjekt (Gut, Produktionsprozess, Kostenstelle, usw.) zugeordnet werden können. Sie müssen über bestimmte Verteilungsschlüssel auf alle den verschiedenen Kostenstellen und -trägern zugeordnet werden. Beispiel: Kosten für die Geschäftsführung.

Außerdem gehören zu den Gemeinkosten noch die unechten Gemeinkosten. Dies sind Kosten, die so gering sind, dass sich der Aufwand nicht lohnt, sie den einzelnen Kostenstellen zuzuordnen und sie stattdessen aus Wirtschaftlichkeitsgründen als Gemeinkosten behandelt werden. Beispiel: 4 verschiedene Abteilungen nutzen denselben Drucker. Die Druckkosten werden dann als Gemeinkosten nach einem bestimmten Kostenschlüssel (z.B. nach Anzahl der Mitarbeiter) auf die Kostenstellen verteilt.

**Achtung:** Fixkosten sind immer Gemeinkosten, Gemeinkosten aber nicht immer Fixkosten(z.B. sind die unechten Gemeinkosten keine Fixkosten)! Einzelkosten sind dagegen immer variable Kosten.

- **Istkosten** sind die Kosten, die effektiv in der vergangenen Periode angefallen sind.
- **Plankosten** sind die Kosten, die für die Zukunft vorgesehen sind und werden auf Grundlage der geplanten Produktionsmenge errechnet.
- **Durchschnittskosten** sind Kosten, die sich ergeben, wenn man den Durchschnitt der Istkosten mehrerer vergangener Perioden errechnet.
- **Grenzkosten:** Die Kosten, die die Produktion eines weiteren Gutes verursachen würde.

- **Sondereinzelkosten** sind einem Produkt zurechenbar, aber nicht dem einzelnen, sondern nur der gesamten Menge an gefertigten Produkten. Beispiel: Spezialmaschine, die nur für die Fertigung einer Produktart genutzt werden kann.
- **unechte Gemeinkosten:** Einzelkosten, die so gering sind, dass sie wie Gemeinkosten behandelt werden. Beispiel: Verbrauch an Nägeln.
- **Vollkostenrechnung:** Es werden sämtliche Kosten berücksichtigt.
- **Teilkostenrechnung:** Es werden nur bestimmte Kosten berücksichtigt.
- **Pagatorische Kosten** basieren auf den Anschaffungspreisen.
- **Wertmäßige Kosten** basieren auf dem Wert, den das Produkt dem Unternehmen stiftet.

### Istkostenrechnung

Bei der Istkostenrechnung werden die tatsächlich angefallenen Kosten berechnet. Bei der Produktion wird generell zwischen folgenden Kosten unterschieden:

- Materialkosten,
- Personalkosten,
- Dienstleistungskosten (extern bezogene Dienstleistung),
- Abschreibungen.

Da die ersten drei Punkte selbsterklärend sind, werden wir nun die Abschreibungen genauer bearbeiten.

## Exkurs Abschreibungen

Abschreibungen sind Kosten, die durch die Wertminderung eines Vermögensgegenstandes entstehen. Die Anschaffung einer Maschine verursacht also keine Kosten, weil die Maschine ja zunächst den Wert des Kaufpreises hat. Erst die Wertminderung verursacht Kosten.

Es wird aber nicht jede Periode der Wert eines Vermögenstandes genau ermittelt. Vermögensgegenstände werden planmäßig abgeschrieben. Erst wenn sich grobe Abweichungen des Buchwertes vom tatsächlichen Wert ergeben, kommt es zu einer Sonderabschreibung.

Bei den planmäßigen Abschreibung wird die Nutzungsdauer des Gegenstandes ermittelt und eine Abschreibungsmethode gewählt. Die wichtigsten Abschreibungsmethoden(besonders für die Klausur) sind die lineare Abschreibung und die degressive Abschreibung.

Abschreibungsmethoden

- **lineare Abschreibung:** Bei der linearen Abschreibung wird über die Nutzungsdauer des Vermögensgegenstandes jedes Jahr der gleiche Betrag abgeschrieben. Dabei muss am Ende der Nutzungsdauer der Restbuchwert nicht zwingend Null sein.

**Beispiel:** Ein Unternehmen kauft ein Auto für 10.000€ Die Nutzungsdauer beträgt 10 Jahre und der Restbuchwert wird auf 2.000€ geschätzt. Es soll linear abgeschrieben werden.

Eine Abschreibungssumme von 8.000€ wird auf 10 Jahre verteilt. Daraus ergibt sich ein jährlicher Abschreibungssatz von 800€.

- **degressive Abschreibung:** Da in der Praxis Vermögensgegenstände ihren Wert nicht gleichmäßig verlieren, sondern neue Gegenstände stärker an Wert verlieren als alte, nutzt man oft die degressive Abschreibungsmethode. Dabei beginnen die jährlichen Abschreibungen relativ hoch und fallen über die Nutzungsdauer der Vermögensgegenstandes. Man unterscheidet die arithmetisch-degressive und die geometrisch degressive Abschreibung:

- **arithmetisch-degressive Abschreibung:** Die Abschreibungen nehmen jedes Jahr um einen konstanten Betrag ab. Ist die Differenz der Abschreibungen zwischen zwei Jahren genauso groß wie der Abschreibungsbetrag der letzten Periode, so nennt man dies digitale Abschreibung.

**Beispiel:** Ein Unternehmen kauft ein Auto für 10.000€ Die Nutzungsdauer beträgt 10 Jahre und der Restbuchwert wird auf 2.000€ geschätzt. Es soll digital abgeschrieben werden.

Es müssen 8.000€ auf 10 Jahre verteilt werden. Um die Höhe der Differenz zwischen zwei Jahren zu ermitteln, muss der Abschreibungsbetrag durch  $(10+9+8+7+6+5+4+3+2+1)$  geteilt werden.

$$\frac{8.000}{(10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1)} = 145,45\text{€}$$

Im ersten Jahr werden also  $10 * 145,45\text{€}$  abgeschrieben, im zweiten  $9 * 145,45\text{€}$  usw.

- **geometrisch-degressive Abschreibung:** Die Abschreibungen verringern sich jährlich um denselben Prozentsatz. Es wird dabei jedes Jahr ein bestimmter Prozentsatz des Vorjahresbuchwertes abgeschrieben.

**Beispiel:** Ein Unternehmen kauft ein Auto für 10.000€ Die Nutzungsdauer beträgt 10 Jahre. Es soll geometrisch-degressiv über 10 Jahre mit einem Abschreibungssatz von 20% abgeschrieben werden.

Im ersten Jahr werden  $10.000 * 20\% = 2.000\text{€}$  abgeschrieben. Restbuchwert 8.000€.

Im zweiten Jahr werden  $8.000 * 20\% = 1.600\text{€}$  abgeschrieben. Restbuchwert 6.400€

Im dritten Jahr werden  $6.400 * 20\% = 1.280$  abgeschrieben usw.

Wie du siehst, wird der Restbuchwert auf diese Weise nie auf Null sinken. Es ist daher gestattet, von dieser Methode zur linearen Abschreibung zu wechseln.

Ein weiterer Kostenpunkt sind **Kapitalkosten/Opportunitätskosten**. Man unterscheidet einmal die Zinskosten für das Fremdkapital und die Opportunitätskosten für das Eigenkapital. Bei Eigenkapital müssen ja keine Kosten gezahlt werden, dennoch fallen Kosten an. Das Kapital, das von Kapitalgebern im Unternehmen eingesetzt wird, hätte am Kapitalmarkt risikolos angelegt werden können. Dadurch entgeht den Eigenkapitalgebern ein Zins. Diese entgangenen Einnahmen (Opportunitätskosten) sind kalkulatorische Zinsen. Ihnen steht kein Geldstrom gegenüber, doch da der Unternehmer auf die Einnahmen verzichtet, entstehen die Kosten.

### Betriebsabrechnungsbogen (BAB)

Der BAB ist eine Tabelle, die die je nach Kostenarten angefallenen Einzelkosten und Gemeinkosten auf die Kostenstellen verteilt.

Der BAB kann dazu genutzt werden, den Gemeinkostenzuschlag zu berechnen. Dazu werden die Gemeinkosten durch die Einzelkosten geteilt.

**Beispiel:** Es sind Gemeinkosten von 3.000€ auf die Kostenstelle „Schlosserei“ umgelegt worden und es sind in der Schlosserei 5.000€ Einzelkosten angefallen. Der Gemeinkostenzuschlagssatz betrug also 60%.

### Zuschlagskalkulation

Bei der Zuschlagskalkulation werden die Gemeinkosten auf die einzelnen Kostenstellen verteilt. Dabei wird jeder Kostenstelle ein bestimmter Prozentsatz zugeordnet. Dieser Prozentsatz wird auf die Einzelkosten der Produktion aufgeschlagen.

#### Beispiel:

Einzelkosten der Fertigung sind 100€ und der prozentuale Zuschlag für Fertigungsgemeinkosten ist 40%. Dann wird auf die Einzelkosten der Fertigung noch  $40\% \cdot 100$  aufgeschlagen. Die Fertigungskosten betragen dann 140€.

Für die Zuschlagskalkulation gibt es das folgende Schema:

Materialkosten = Fertigungsmaterial + Materialgemeinkosten (Basis sind Kosten für Fertigungsmaterial)

Fertigungskosten: Fertigungslöhne + Fertigungsgemeinkosten (Basis sind die Fertigungslöhne) +  
Sondereinzelkosten der Fertigung

Herstellkosten = Materialkosten + Fertigungskosten

Selbstkosten = Herstellkosten + Verwaltungs- und Vertriebsgemeinkosten (Basis sind die Herstellkosten) +  
Sondereinzelkosten Vertrieb

#### Beispiel:

Bei der Produktion eines Gutes fallen die folgenden Kosten an:

Fertigungsmaterial: 3.000€

Fertigungslöhne: 2.000€

Sondereinzelkosten der Fertigung: 200€

Sondereinzelkosten Vertrieb: 300€

Zuschlagssätze für die Gemeinkosten betragen:

Material: 20%

Fertigung: 50%

Verwaltung und Vertrieb: 30%

Berechne die Materialkosten, die Fertigungskosten, die Herstellkosten und die Selbstkosten.

**Antwort:**

Fertigungsmaterial: 3.000€

Aufschlag Materialgemeinkosten =  $3.000 * 0,2 = 600$

Materialkosten =  $3.000 + 600 = 3.600€$

Fertigungslöhne = 2.000€

Aufschlag Fertigungsgemeinkosten =  $2.000 * 50\% = 1.000€$

Sondereinzelkosten der Fertigung = 200€

Fertigungskosten =  $2.000 + 1.000 + 200 = 3.200€$

Herstellkosten =  $3.600 + 3.200 = 6.800€$

Verwaltungs- und Vertriebsgemeinkosten =  $6.800 * 30\% = 2.040€$

Sondereinzelkosten Vertrieb = 300€

Selbstkosten =  $6.800 + 2.040 + 300 = 9.140€$

Sind alle Zuschlagssätze gleich hoch, so nennt man das „summarische Zuschlagskalkulation“. Sind die Zuschlagssätze verschieden hoch, so nennt man das „differenzierte Zuschlagskalkulation“.

### Äquivalenzziffernrechnung

Bei der Äquivalenzziffernrechnung werden den einzelnen Produktarten Ziffern zugeordnet, die angeben in welchem Verhältnis die Kosten des Produktes zu den Kosten eines Basisproduktes stehen.

Beispiel: Ein Unternehmen produziert 3 verschiedene Güter. Eines ist das Basisprodukt mit der Äquivalenzziffer 1. Von den beiden anderen hat eines doppelt so hohe Kosten wie das Basisprodukt und das andere halb so hohe Kosten. Das mit doppelt so hohen Kosten bekommt dann die Äquivalenzziffer 2 und das Produkt mit den halb so hohen Kosten bekommt die Äquivalenzziffer 0,5.

### Rechnungen mit Äquivalenzziffern

Mit Hilfe der Äquivalenzziffern können die Kosten eines Produktes berechnet werden.

Zunächst bildet man sogenannte Recheneinheiten, indem man die Anzahl an Gütern mit ihren jeweiligen Äquivalenzziffern multipliziert. Das Ergebnis gibt an, wie viele Basiseinheiten mit den entstandenen Kosten hätten produziert werden können. Nun teilt man die Gesamtkosten durch die Summe der Recheneinheiten und erhält die Kosten pro Recheneinheit (die Kosten des Basisgutes). Die Kosten der verschiedenen Produkte ergeben sich durch Multiplikation der Kosten pro Recheneinheit mit der Äquivalenzziffer des entsprechenden Produktes.

(Diese Rechnungen musst du dir nicht unbedingt merken. Die Aufgaben zu Äquivalenzziffern kannst du auch mit etwas Nachdenken lösen, ohne die Rechnungen zu kennen.)

**Beispiel:** Ein Unternehmen fertigt drei Produkte mit den folgenden Äquivalenzziffern:

	Menge	Äquivalenzziffer
Produkt A	100	1
Produkt B	120	1,5
Produkt C	40	2

Die Gesamtkosten betragen 5.000€.

Berechne die Stückkosten der Produkte!

**Antwort:** Angenommen, wir haben die Rechnungen zu Äquivalenzziffern vergessen und müssen die Aufgabe nun nur mit unserem Gehirnschmalz lösen:

Aus der Tabelle entnehmen wir, dass Produkt B 50% höhere Kosten verursacht wie Produkt A. 100 Stück vom Produkt B kosten also soviel wie 150 Stück vom Produkt A. Statt 120 Stück vom Produkt B zu produzieren, hätte man auch 180 Stück vom Produkt A produzieren können. Ebenso hätte man statt 40 Stück vom Produkt C auch 80 Stück vom Produkt A produzieren können. Eine Produktion von 100

Produkt A und 180 Produkt A und 80 Produkt A hätte also 5000€ gekostet. Die Produktion eines Stückes vom Produkt A kostet also 13,89€. Produkt B kostet also 20,83€ und Produkt C 27,78€.

Äquivalenzziffernrechnung kann auch mehrstufig sein. Man muss dann nur die Rechnung mehrmals ausführen und die Stückkosten der verschiedenen Stufen am Ende summieren. Mehr dazu in den Aufgaben.

### **Divisionskalkulation:**

Stellt ein Unternehmen nur ein Produkt her, so kann zur Kostenrechnung die Divisionskalkulation genutzt werden. Dabei werden die Gesamtkosten einfach gleichmäßig auf die in der Periode erstellten Produkte verteilt. Man unterscheidet die einstufige Divisionskalkulation und die mehrstufige Divisionskalkulation:

#### **- einstufige Divisionskalkulation:**

Bei der einstufigen Divisionskalkulation wird davon ausgegangen, dass es keine Lagerbestandsänderungen gibt. Die Stückkosten berechnen sich dann als Gesamtkosten geteilt durch Anzahl der erstellten Güter.

#### **- mehrstufige Divisionskalkulation:**

Gibt es Bestandsänderungen, so muss die mehrstufige Divisionskalkulation verwendet werden. Für jede Fertigungsstufe, die ein Gut bei der Produktion durchläuft, wird eine Divisionskalkulation durchgeführt.

### **Vollkosten/Teilkosten**

Bei der Vollkostenrechnung werden alle Kosten auf die Kostenträger verrechnet. Im Gegensatz dazu wird bei der Teilkostenrechnung nur der Teil der Kosten auf die Kostenträger verrechnet, der der Kostenstelle klar zurechenbar ist - also die Einzelkosten. Auf die Zurechnung der Fixkosten wird verzichtet. Die Vollkostenrechnung wird oft kritisiert, da

- die fixen Kosten unabhängig davon anfallen, ob ein Produkt überhaupt und, wenn ja, in welcher Stückzahl produziert wird.
- die Zurechnung der Gemeinkosten auf die Produkte oft willkürlich ist und somit zu falschen Stückkosten führen kann.
- eine falsche Preispolitik aus der Vollkostenrechnung resultieren kann: Sinkt die Nachfrage nach einem Produkt, so steigen die Kosten, da der Fixkostenanteil steigt. Eine kostenorientierte Preispolitik würde nun zu steigenden Preisen führen, obwohl evtl. gerade niedrigere Preise zu einem Nachfrageschub führen würden.
- Lagerbestände werden mit den Gesamtkosten bewertet.



Beim Teilkostenverfahren werden dagegen keine Fixkosten beachtet. Lagerbestände werden zu variablen Kosten bewertet. Kritik an der Teilkostenrechnung ist, dass ein Unternehmen langfristig alle Kosten decken muss, um zu überleben.

Generell ist die Teilkostenrechnung eher geeignet, um kurzfristige Entscheidungen zu treffen und die Vollkostenrechnung eher geeignet, um langfristige Entscheidungen zu treffen.

Bei der Erfolgsrechnung unterscheiden sich die beiden Kostenrechnungen, wenn es zu Lagerbestandsänderungen kommt. Da die Lagerbestände nach der Vollkostenrechnung höher bewertet werden, fällt nach dieser Rechnung auch der Periodengewinn höher aus, wenn es Lagerbestandserhöhungen gab. Bei Lagerbestandsminderungen fällt der Periodenerfolg entsprechend niedriger aus.

### **Plankostenrechnung**

Die Plankostenrechnung ist ein zukunftsbezogenes Verfahren zur Kosten- und Leistungsrechnung. Sie dient zum Vergleich von geplanten Kosten (Plankosten) und tatsächlich eingetretenen Kosten (Istkosten).

#### **Begriffsdefinitionen:**

- **Plankosten:** die geplanten Kosten der folgenden Periode
- **Planbeschäftigung:** Die geplante Beschäftigung bzw. Ausbringungsmenge der folgenden Periode.
- **Istbeschäftigung:** Tatsächlich realisierte Beschäftigung bzw. Ausbringungsmenge.
- **Istkosten:** Die tatsächlich verursachten Kosten.
- **Plankostenverrechnungssatz:** Die geplanten Kosten pro geplanter Beschäftigung – die geplanten Stückkosten also.
- **Verrechnete Plankosten:** Plankostenverrechnungssatz \* Istbeschäftigung. Dies sind die Kosten, die angefallen sein müßten, wenn die Stückkosten so hoch waren wie geplant.

**Leerkosten:** Dies sind Fixkosten, die nicht genutzt werden. Das Gegenstück dazu sind Nutzkosten, also Fixkosten, die auch genutzt werden. Ein Unternehmen, das für eine Lagerhalle Fixkosten von 10.000€ pro Monat hat, aber nur die Hälfte der Lagerhalle nutzt, hat also 5.000€ Leerkosten und 5.000€ Nutzkosten.

Man unterscheidet starre und flexible Plankostenrechnung.

### **Starre Plankostenrechnung:**

Bei der starren Plankostenrechnung werden nur die gesamten Kosten betrachtet. Es erfolgt keine Unterteilung in fixe und variablen Kosten. Zu Periodenbeginn werden die Planbeschäftigung und die Plankosten bestimmt. Daraus ergibt sich der Plankostenverrechnungssatz.

Zur Kostenkontrolle wird später die Istbeschäftigung mit dem Plankostenverrechnungssatz multipliziert. Daraus ergeben sich die verrechneten Plankosten. Damit werden die Istkosten verglichen.

Kritik an der starren Plankostenrechnung: Da nicht zwischen fixen und variablen Kosten unterschieden wird, kommt es sehr wahrscheinlich zu Abweichungen der Stückkosten, wenn die Istbeschäftigung von der Planbeschäftigung abweicht. Dies ist auch der Fall, wenn die fixen und die variablen Kosten genauso realisiert werden wie geplant. Durch den sich ändernden Anteil an Fixkosten bei Änderung der Beschäftigung kommt es zu Abweichungen der Istkosten von den verrechneten Plankosten. Die starre Plankostenrechnung ist also nur aussagekräftig, wenn die geplante Ausbringungsmenge auch realisiert wird.

**Beispiel:** Für eine Kostenstelle seien folgende Größen gegeben:

Planbeschäftigung: 500 Stunden

Plankosten: 20.000€

Istbeschäftigung: 400 Stunden

Istkosten: 17.000€

Berechne die Kosten-Abweichung.

**Antwort:** Der Plankostenverrechnungssatz (die Kosten pro Stunde) sind mit 40€ geplant. Es wurden 400 Stunden realisiert. Die Kosten dafür sollten also bei 16.000€ liegen. Tatsächlich lagen sie bei 17.000€. Die Abweichung beträgt 1.000€.

### Flexible Plankostenrechnung

Bei der flexiblen Plankostenrechnung wird zwischen fixen und variablen Kosten unterschieden. Die Istkosten werden nun mit den Kosten verglichen, die bei geplanten Fixkosten und geplanten variablen Kosten angefallen wären und darüber hinaus mit den Kosten der starren Plankostenrechnung.

#### Beispiel:

Planbeschäftigung: 500 Stunden

Plankosten: 20.000€

Fixkosten 5.000€

Istbeschäftigung: 400 Stunden

Istkosten: 17.000€

Berechne die Kosten-Abweichung.

#### Antwort:

Zunächst berechnet man die variablen Plankosten:  $\frac{15.000}{500} = 30\text{€}$

Bei 400 Arbeitsstunden müßten also Kosten von  $5.000 + 400 * 30 = 17.000\text{€}$  entstehen. Dies entspricht genau den Istkosten. Die Abweichung ist 0.

Die Abweichung von den Kosten der starren Plankostenrechnung ist wie oben errechnet 1.000€. Die Abweichung liegt also nur in dem höheren Fixkostenanteil begründet und nicht in höherem Verbrauch. Die höheren Fixkostenanteile von 1.000€ sind die Leerkosten.

Im Skript wirst du mit unzähligen Begriffen bombardiert. Diese solltest du kennen, um die Klausurfragen richtig zu verstehen, lass dich aber nicht davon verwirren. Plankostenrechnung ist sehr einfach.

#### Beispiel:

Planbeschäftigung: 500 Stunden

Plankosten: 20.000€

Fixkosten 5.000€

Istbeschäftigung: 400 Stunden

Istkosten: 17.000€

Berechne die Kosten-Abweichung.

**Antwort:**

Die variablen Kosten betragen 30€ pro Stunde

Variable Plankosten betragen also 12.000€.

Die Variablen Istkosten betragen  $17.000 - 5.000 = 12.000$ €.

Es gibt also keine Abweichungen!

**Verfahrensvergleich**

Sollen 2 Verfahren mit unterschiedlichen Fixkosten und variablen Kosten unterschieden werden, so kann man für den Fall, dass das Verfahren mit den höheren Fixkosten niedrigere variable Kosten hat, berechnet werden, ab welcher Ausbringungsmenge welches Verfahren kostengünstiger ist.

Das Verfahren mit den höheren Fixkosten hat natürlich für kleine Ausbringungsmengen die höheren Kosten. Mit steigender Ausbringungsmenge fallen die Fixkosten immer weniger ins Gewicht. Um die Ausbringungsmenge zu berechnen, ab der das Verfahren mit den niedrigeren variablen und höheren fixen Kosten vorteilhaft wird, müssen die beiden Kostenfunktionen gleichgesetzt und nach der Ausbringungsmenge aufgelöst werden.

**Beispiel:**

Zwei Verfahren A und B haben folgende Kostenfunktionen:

$$K_A = 100 + 3x$$

$$K_B = 50 + 5x$$

Zu ermitteln ist die Ausbringungsmenge, ab der das Verfahren A kostengünstiger produziert.

**Antwort:** Zu lösen ist folgende Gleichung:

$$100 + 3x = 50 + 5x$$

Daraus folgt:

$$x = 25$$

Bei einer Ausbringungsmenge von 25 Stück haben beide Verfahren die selben Gesamtkosten. Ab einer höheren Ausbringungsmenge hat das Verfahren B höhere Kosten als das Verfahren A.

### Gewinnschwellenanalyse

Der Break-even-Point („kritische Menge“) ist die Absatzmenge, bei der ein Unternehmen bei gegebenem Preis und gegebenen Kosten einen Gewinn von 0 macht (also weder Gewinn noch Verlust). Der Erlös entspricht also genau den Kosten.

Mathematisch gilt für den Break-even-Point (BEP):

$$BEP * p = K_f + BEP * k_v$$

$$BEP(p - k_v) = K_f$$

$$BEP = \frac{K_f}{p - k_v}$$

Für den Break-even-Point gilt außerdem, dass der Deckungsbeitrag genau groß genug ist, um die Fixkosten zu decken.

## Aufgaben zu 14.0

### Aufgabe 14.1

Gib für die folgenden Sachverhalte an, ob es sich um Kosten oder um Aufwand handelt:

Sachverhalt	Kosten	Aufwand	keines von beidem
Kauf von Material			
Steuernachzahlung			
Versicherungsprämie			
Spende			
Auszahlung Verkaufsprovision			
Dividendenauszahlung			
Lohnzahlung			
Bilanzielle Abschreibung			

### Aufgabe 14.2

Ein Unternehmen produziert ein Endprodukt mit Fixkosten von 50.000€ und variablen Kosten von 5€ pro Stück. Die aktuelle Produktion beträgt 50.000 Stück und es bestehen keine freien Produktionskapazitäten. Das Produkt wird für 7€ verkauft.

a) Aufgrund einer Wirtschaftskrise fällt der Absatz. Berechne, wie weit der Absatz fallen darf, bevor das Unternehmen Verlust macht.

b) Um den Absatz konstant bei 50.000 Stück zu halten, muss das Unternehmen die Preise senken. Wie weit wird es die Preise wahrscheinlich senken können, bevor es die Produktion einstellt? Gehe davon aus, dass die Wirtschaftskrise nicht langfristiger Natur ist und der Absatz in der kommenden Periode wieder steigen wird.

**Aufgabe 14.3**

Ein Unternehmen produziert in der aktuellen Periode 1.000 Endprodukte und verkauft diese zu 200€ pro Stück. Die Fixkosten sind 80.000€ und die variablen Kosten pro Stück betragen 60€. Maximal könnten 1.200 Stück produziert werden. Eine Preissenkung auf 180 € würde den Absatz auf 1.200 Stück steigern.

- a) Berechne den Gewinn bei aktueller Absatzmenge.
- b) Berechne den gewinnmaximalen Preis.
- c) Es kommt zu einem Ausschuss von 10%. Gleichzeitig steigen die variablen Stückkosten. Angenommen, der Preis ist fest bei 200€ (und der Absatz bei 1.000 Stück), wie hoch dürfen die variablen Stückkosten maximal steigen, damit kein Verlust anfällt?

**Aufgabe 14.4**

Ein Unternehmen plant die Produktion eines neuen Produktes und Sie sollen die anfallenden Kosten kalkulieren. Folgende Daten sind bekannt:

- Die Kosten fallen proportional zur Stückzahl an.
- Es sollen 2.000 Stück produziert werden.
- Die Materialeinzelkosten betragen 5€.
- Die Materialgemeinkosten liegen bei einem Zuschlagssatz von 20%.
- Fertigungslöhne: 25.000€
- Die Fertigungsgemeinkosten liegen bei einem Zuschlagssatz von 25%.
- Für die Verwaltung fallen Gemeinkosten von 10% an.
- Für den Vertrieb fallen Gemeinkosten von 20% an.

- a) Berechne die Materialkosten, die Fertigungskosten, die Herstellkosten und die Selbstkosten des Produktes.

**Aufgabe 14.5**

Ein Unternehmen stellt 3 Produkte her, deren Kosten in proportionaler Beziehung zueinander stehen.

Die Kosten werden nach 2 Kostenstellen- Produktion und Vertrieb aufgeschlüsselt. Die Produktionskosten lagen bei 100.000€ und die Vertriebskosten bei 20.000€. Die Mengen und entsprechenden Gesamtkosten der drei Produkte sind in folgender Tabelle dargestellt.

	Menge	Gesamtkosten Produktion	Gesamtkosten Vertrieb
Produkt A	1.000	50.000	10.000
Produkt B	1.500	40.000	12.000
Produkt C	500	20.000	5.000

Berechne die entsprechenden Äquivalenzziffern.

**Aufgabe 14.6**

Gegeben seien folgende Werte zur Plankostenrechnung:

Ist-Beschäftigung: 500 Stück

Plankosten: 10.000€

Istkosten: 12.000€

Plan-Beschäftigung: 400 Stück

Fixkosten: 4.000€

- a) Berechne die verrechneten Plankosten bei Ist-Beschäftigung nach dem System der starren Plankostenrechnung.
- b) Berechne die Sollkosten bei Ist-Beschäftigung nach dem System der flexiblen Plankostenrechnung.



**Aufgabe 14.7**

Ein Unternehmen hat eine Maschine für 100.000€ angeschafft. Die Maschine soll linear bis auf Null abgeschrieben werden. Die Nutzungsdauer beträgt 8 Jahre.

- a) Wie hoch ist der Buchwert der Maschine nach 3 Jahren?
- b) Es soll geometrisch degressiv zu 20% abgeschrieben werden. Wie hoch ist der Buchwert in Jahr 2?
- c) Es soll arithmetisch-degressiv bis auf Null abgeschrieben werden. Berechne die Differenz der Abschreibungen zwischen den Jahren.

**Lösungen zu 14.0****Lösung zu 14.1**

Sachverhalt	Kosten	Aufwand	keines von beidem
Kauf von Material			x
Steuernachzahlung		x	
Versicherungsprämie	x	x	
Spende		x	
Auszahlung Verkaufsprovision	x	x	
Dividendenauszahlung			x
Lohnzahlung	x	x	
Bilanzielle Abschreibung		x	

**Lösung zu 14.2**

a) Gefragt ist nach den Break-even-Point. Man stellt die Gleichung für den Gewinn auf und setzt sie zu Null:

$$7x - 50.000 - 5x = 0$$

$$x = 25.000$$

Der Absatz kann bis 25.000 Stück fallen, bevor das Unternehmen Verlust macht.

b) Das Unternehmen wird die Preise bis zu den variablen Kosten von 5€ senken, da die Fixkosten unabhängig von der Produktion anfallen.

**Lösung zu 14.3**

a) Der Erlös beträgt 200.000€. Die Kosten betragen  $80.000 + 1.000 * 60 = 60.000$ €.  $200.000 - 140.000$  ergibt einen Gewinn von 60.000€.

b) Man berechnet zunächst den Gewinn für den Fall der Preissenkung: Der Erlös beträgt nun:  $1.200 * 180 = 216.000$ . Die Kosten betragen:  $80.000 + 1.200 * 60 = 152.000$ . Der Gewinn beträgt also 64.000€. Der gewinnmaximale Preis beträgt 180€.

c) Man stellt zunächst die Gleichung für den Gewinn auf:

$$80.000 + 1.000x - 180.000 = 0$$

(Der Erlös fällt durch den Ausschuss um 10%, die Kosten bleiben gleich)

Das ergibt variable Kosten von 100€.

**Lösung zu 14.4**

Man berechnet die Kosten nach dem bekannten Schema:

Materialeinzelkosten:  $2.000 * 5 = 10.000\text{€}$

+Materialgemeinkosten:  $10.000 * 20\% = 2.000\text{€}$

=Materialkosten:  $12.000\text{€}$

Fertigungseinzelkosten:  $25.000\text{€}$ .

+Fertigungsgemeinkosten:  $25.000 * 25\% = 6.125\text{€}$ .

=Fertigungskosten:  $31.125\text{€}$

Materialkosten:  $12.000$

+Fertigungskosten:  $31.125\text{€}$

=Herstellkosten:  $43.125\text{€}$

Herstellkosten:  $43.125\text{€}$

+ Verwaltungsgemeinkosten:  $43.125 * 20\% = 8.625\text{€}$

+Vertriebsgemeinkosten:  $43.125 * 20\% = 8.625\text{€}$

=Selbstkosten:  $43.125 + 8.625 + 8.625 = 60.375$

**Lösung zu 14.5**

Zunächst wählst du willkürlich ein Produkt als Basisprodukt. Das kann für jede Kostenstelle ein anderes sein.

Ich wähle für die Produktion das Produkt A.

Die Herstellkosten pro Stück betragen:

	Herstellkosten
Produkt A	50
Produkt B	26,67
Produkt C	40

Die entsprechenden Äquivalenzziffern ergeben sich aus der Relation der Herstellkosten zueinander:

	Herstellkosten	Äquivalenzziffer
Produkt A	50	1
Produkt B	26,67	0,53
Produkt C	40	0,8

Die 0,53 ergibt sich beispielsweise aus der Division von 26,67 durch 50.

Für den Vertrieb wähle ich als Basisprodukt das Produkt C.

Die Vertriebskosten pro Stück betragen und die entsprechenden Äquivalenzziffern betragen:

	Vertriebskosten	Äquivalenzziffer
Produkt A	10	1
Produkt B	8,00	0,80
Produkt C	10	1

**Lösung zu 14.6**

a) Plankosten von 10.000€ stehen einer Plan-Beschäftigung von 400 Stück gegenüber. Die verrechneten Plankosten bei einer Ist-Beschäftigung von 500 Stück betragen also

$$\frac{10.000 * 500}{400} = 12.500\text{€}$$

b) Die variablen Plankosten betragen 15€ (siehe b). Die Fixkosten betragen 4.000€. Damit betragen die Sollkosten bei einer Beschäftigung von 500:

$$4.000 + 7.500 = 11.500\text{€}$$

**Lösung 14.7**

a) Der Abschreibungssatz beträgt 12.500€. Nach drei Jahren beträgt der Buchwert der Maschine also noch

$$100.000 - 3 * 12.500 = 62.500\text{€}$$

b) Es wird 2 mal um 20% abgeschrieben. Basis ist immer der aktuelle Buchwert.

$$100.000 * 0,8 * 0,8 = 64.000\text{€}$$

c) Der Differenzbetrag berechnet sich nach

$$\frac{100.000}{8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1} = 2.778\text{€}$$

## 15.0 Buchhaltung und Jahresabschluss

### 15.1 Inventur, Inventar, Reinvermögen und Bilanz

Bei der **Inventur** wird der gesamte Bestand an Vermögensgegenständen und Schulden zu einem bestimmten Stichtag ermittelt und nach Menge und Wert aufgelistet. Das Ergebnis nennt man **Inventar**. Das Inventar wird in 3 Kategorien gegliedert:

- 1) **Vermögenswerte**
- 2) **Schulden**
- 3) **Reinvermögen** (Vermögenswerte – Schulden)

Vermögenswerte werden wieder untergliedert in:

- 1) Anlagevermögen (Vermögenswerte, die längerfristig eingesetzt werden(>1Jahr))
- 2) Umlaufvermögen (Vermögenswerte, die nur vorübergehend eingesetzt werden)

Die **Bilanz** geht aus dem Inventar hervor indem man:

- Einander ähnliche Inventarpositionen zusammenfasst.
- Die Mengenangaben weglässt.
- Die Positionen in *Kontoform* (siehe unten) auf 2 Seiten gegenübergestellt.
- Das Eigenkapital ausweist (Vermögen-Schulden).

Die Kontoform einer Bilanz hat folgendes Schema:

Aktiva	Passiva
Anlagevermögen	Eigenkapital
Umlaufvermögen	Fremdkapital

Auf der Aktivseite werden die Positionen aufgelistet, für die die Mittel der Unternehmung verwendet wurden (**Mittelverwendung**) und auf der Passivseite die Positionen, durch die der Unternehmung Mittel zugeflossen sind (**Mittelherkunft**). Die Fernuni listet alle Positionen der Aktiv- und Passivseite auf und diese wurden auch schon in Klausuren abgefragt. Anstatt die unzähligen Positionen auswendig zu lernen, solltest du dir ganz einfach merken: Vermögensgegenstände sind Aktiva. Eigenkapital, Rückstellungen, Rechnungsabgrenzungsposten und Verbindlichkeiten sind Passiva. Rückstellungen sind beispielsweise Passiva, da aus ihnen eine zukünftige Verbindlichkeit hervorgeht.

Eine Übersicht über die Bilanzpositionen findest du auf den kommenden 2 Seiten. Diese sind in ähnlicher Form auch im HGB §266 aufgelistet.

Aktivseite (Mittelverwendung)	Passivseite (Mittelherkunft)
<p><b>A. Anlagevermögen</b></p> <p>I. Immaterielle Vermögensgegenstände</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Selbst geschaffene gewerbliche Schutzrechte und ähnliche Rechte und Werte;</li> <li>2. Entgeltlich erworbene Konzessionen, gewerbliche Schutzrechte und ähnliche Rechte und Werte sowie Lizenzen an solchen Rechten und Werten;</li> <li>3. Geschäfts- oder Firmenwert (GoFW);</li> <li>4. geleistete Anzahlungen;</li> </ol> <p>II. Sachanlagen</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Grundstücke, grundstücksgleiche Rechte und Bauten einschließlich der Bauten auf fremden Grundstücken;</li> <li>2. technische Anlagen und Maschinen;</li> <li>3. andere Anlagen, Betriebs- und Geschäftsausstattung;</li> <li>4. geleistete Anzahlungen und Anlagen im Bau;</li> </ol> <p>III. Finanzanlagen:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Anteile an verbundenen Unternehmen;</li> <li>2. Ausleihungen an verbundene Unternehmen;</li> <li>3. Beteiligungen</li> <li>4. Ausleihungen an Unternehmen, mit denen ein Beteiligungsverhältnis besteht;</li> <li>5. Wertpapiere des Anlagevermögens;</li> <li>6. sonstige Ausleihungen.</li> </ol> <p><b>B. Umlaufvermögen</b></p>	<p><b>A. Eigenkapital</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>I. Gezeichnetes Kapital</li> <li>II. Kapitalrücklage</li> <li>III. Gewinnrücklagen <ol style="list-style-type: none"> <li>1. gesetzliche Rücklagen;</li> <li>2. Rücklage für Anteile an einem herrschenden oder mehrheitlich beteiligten Unternehmen;</li> <li>3. satzungsmäßige Rücklagen;</li> <li>4. andere Gewinnrücklagen;</li> </ol> </li> <li>IV. Gewinnvortrag/Verlustvortrag;</li> <li>V. Jahresüberschuss/Jahresfehlbetrag,</li> <li>VI. (ggf.) Nicht durch Eigenkapital gedeckter Fehlbetrag</li> </ol> <p><b>B. Rückstellungen</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Rückstellungen für Pensionen und ähnliche Verpflichtungen</li> <li>2. Steuerrückstellungen</li> <li>3. sonstige Rückstellungen</li> </ol> <p><b>Verbindlichkeiten</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>0. Anleihen, davon konvertibel;</li> <li>1. Verbindlichkeiten gegenüber Kreditinstituten;</li> <li>2. erhaltene Anzahlungen auf Bestellungen;</li> </ol>



<p>I. Vorräte/Vorratsvermögen</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Rohstoffe, Hilfsstoffe und Betriebsstoffe;</li> <li>2. unfertige Erzeugnisse, unfertige Leistungen;</li> <li>3. fertige Erzeugnisse und Waren;</li> <li>4. geleistete Anzahlungen.</li> </ol> <p>II. Forderungen und sonstige Vermögensgegenstände</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Forderungen aus Lieferungen und Leistungen (LuL), (F.a.L.L.), (FLL);</li> <li>2. Forderungen gegen verbundene Unternehmen;</li> <li>3. Forderungen gegen Unternehmen, mit denen ein Beteiligungsverhältnis besteht;</li> <li>4. sonstige Vermögensgegenstände.</li> </ol> <p>III. Wertpapiere</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Anteile an verbundenen Unternehmen;</li> <li>2. sonstige Wertpapiere;</li> </ol> <p>IV. Kassenbestand, Bundesbankguthaben, Guthaben bei Kreditinstituten und Schecks</p> <p><b>C. Rechnungsabgrenzungsposten</b></p> <p>D. Aktive latente Steuern</p> <p>E. Aktiver Unterschiedsbetrag aus der Vermögensverrechnung</p> <p>F. (ggf.) Nicht durch Eigenkapital gedeckter Fehlbetrag</p> <hr/> <p><b>(Bilanzsumme)</b></p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>3. Verbindlichkeiten aus Lieferungen und Leistungen (LuL), (V.a.L.L.), (VLL);</li> <li>4. Verbindlichkeiten aus der Annahme gezogener Wechsel und der Ausstellung eigener Wechsel;</li> <li>5. Verbindlichkeiten gegenüber verbundenen Unternehmen;</li> <li>6. Verbindlichkeiten gegenüber Unternehmen, mit denen ein Beteiligungsverhältnis besteht;</li> <li>7. sonstige Verbindlichkeiten, davon aus Steuern, davon im Rahmen der sozialen Sicherheit.</li> </ol> <p><b>Rechnungsabgrenzungsposten</b></p> <p>Passive latente Steuern</p> <hr/> <p><b>(Bilanzsumme)</b></p>
---	--

## 15.2 Das System der doppelten Buchhaltung

Klausuraufgaben zur Buchhaltung waren bisher sehr selten. Dennoch möchte ich Dir an dieser Stelle eine kurze Einführung geben (spätestens im Modul Externes Rechnungswesen wirst du genau diesen Stoff brauchen).

Jede Position der Bilanz lässt sich ebenfalls in Kontenform darstellen. Konten der Sollseite nennt man Aktivkonten, Konten der Habenseite nennt man Passivkonten. Veränderungen auf den Konten werden folgendermaßen erfasst:

Ein Zugang auf einem Aktivkonto wird auf dessen Sollseite erfasst, ein Abgang auf dessen Habenseite.

Ein Zugang auf einem Passivkonto wird auf der Habenseite erfasst, ein Abgang auf der Sollseite.

Da bei jeder Buchung Mittel von einem bestimmten Konto auf ein anderes gebucht werden, sind immer 2 Konten betroffen. Man spricht daher von der doppelten Buchhaltung oder Doppik. Durch die unterschiedliche Behandlung von Aktiv- und Passivkonten gibt es keine Buchungen von einer Sollseite auf eine Sollseite, oder von einer Habenseite auf eine Habenseite.

Buchhalterisch schreibt man eine Buchung so:

„Konto, auf dem die Sollbuchung erfolgt“ an „Konto, auf dem die Habenbuchung erfolgt“ „Höhe des Betrages“.

Betrachte dazu folgende **Beispiele**:

1) Geschäftsvorfall: Es werden 20.000 Euro von der Bank abgehoben.

Buchhalterische Erfassung: Die Bilanzpositionen Bank und Kasse sind beides Positionen der Sollseite der Bilanz, also Aktivkonten. Ein Abgang von 20.000 Euro wird also auf der Habenseite des Kontos Bank verbucht und ein Zugang von 20.000 wird auf der Sollseite des Kontos Kasse verbucht.

Man schreibt auch:

Kasse an Bank	20.000,-- €
---------------	-------------

2) Geschäftsvorfall: Ein Kredit von 20.000 Euro wird auf das Bankkonto ausgezahlt.

Buchhalterische Erfassung: Die Bilanzposition „Verbindlichkeiten gegenüber Kreditinstituten“ ist eine Position der Habenseite, also ein Passivkonto. Ein Zugang wird also auf dessen Habenseite verbucht. Auf dem Bankkonto wird der Zugang auf dem Sollkonto verbucht.

Bank an Verbindlichkeiten gegenüber Kreditinstituten	20.000,--€
--	------------

*Achtung: Du denkst jetzt wahrscheinlich: "Moment, das Geld fließt doch vom Bankkonto an die Kasse bzw. vom Kreditinstitut an das Bankkonto. Warum dann „Kasse an Bank“ und nicht andersherum. "Du hast recht, das erscheint jedem Nicht-Buchhalter unsinnig. Versuche also deine Vernunft zu unterdrücken und merke dir: "SOLL AN HABEN".*

Es gibt 4 Grundformen an Buchungen, auf die du treffen kannst:

- 1) **Aktivtausch:** Zugang auf einem Aktivkonto und Abgang auf einem Aktivkonto. (z.B. Barentnahme vom Bankkonto)
- 2) **Passivtausch:** Zugang auf einem Passivkonto und Abgang auf einem Passivkonto. (z.B. Tilgung eines Kredites durch einen neuen Kredit)
- 3) **Aktiv-/Passiv Mehrung:** Zunahme eines Passivkontos und Zunahme eines Aktivkontos. (z.B. neue Kreditaufnahme)
- 4) **Aktiv-/Passiv Minderung:** Abnahme eines Passivkontos und Abnahme eines Aktivkontos. (z.B. Ausschüttung an Gesellschafter)

Da also entweder auf einer Seite getauscht oder beide Seiten um denselben Betrag erhöht oder verringert werden, gilt immer:

$$\text{Aktiva} = \text{Passiva}$$

Die Konten der Vermögensgegenstände und der Verbindlichkeiten bezeichnet man als Bestandskonten. Die Konten des Eigenkapitals als Aufwands- bzw. Ertragskonten (zusammen: Erfolgskonten). Änderungen auf Bestandskonten sind ergebnisneutral.

Jedes Konto wird am Ende der Periode saldiert. Das bedeutet, dass die Differenz aus Soll- und Habenseite so in das Konto eingetragen wird, dass es ausgeglichen ist. Die Sollseite und die Habenseite sind also gleich hoch.

#### Beispiel:

Das Konto „Kasse“ wurde zu Beginn des Geschäftsjahres mit 10.000€ aus dem letzten Geschäftsjahr übernommen. Es fanden Einzahlungen i.H.v. 5.000 und Auszahlungen i.H.v. 7.000 € statt. Ohne zu saldieren ist das Konto nicht ausgeglichen:

Soll	Kasse		Haben
Anfangsbestand	10.000	Auszahlung	7.000
Einzahlung	5.000		
Summe	15.000	Summe	7.000

Wird das Konto saldiert, so beträgt der Saldo 8.000€ (15.000-7.000) und muss auf der Habenseite eingetragen werden, damit das Konto ausgeglichen ist (Summe Soll= Summe Haben)

Soll		Kasse		Haben	
Anfangsbestand	10.000	Auszahlung		7.000	
Einzahlung	5.000	Saldo		8.000	
Summe	15.000	Summe		15.000	

Der Saldo gibt also den Endbestand auf dem Konto zum Periodenende an.

### 15.3 Durchführung erfolgsrelevanter Buchungen und Abschluss der Erfolgskonten über die GuV.

Fällt bei einer Buchung ein Ertrag an oder entsteht Aufwand, so ist immer das Eigenkapital betroffen.

Beispiele für Erträge oder Aufwendungen sind:

- Zinsen
- Löhne
- Mietkosten
- Erlöse aus dem Verkauf von Waren
- Abschreibungen

Für Buchungen auf Erfolgskonten gilt:

Das Eigenkapitalkonto ist ein Passivkonto. Erhöhungen werden also auf der Habenseite erfasst, Minderungen auf der Sollseite. Daher muss für die Erfolgskonten gelten:

- Da eine Erhöhung des Ertrages das Eigenkapital erhöht, muss diese auf der Habenseite gebucht werden. Eine Verminderung entsprechend auf der Sollseite.
- Da eine Erhöhung des Aufwandes das Eigenkapital verringert, muss diese auf der Sollseite gebucht werden. Eine Verminderung entsprechend auf der Habenseite.

#### **Beispiel:**

Die Miete für den letzten Monat i.H.v. 10.000€ wird per Banküberweisung gezahlt.

Sonstige Grundkosten(470) an Bank(113) 10.000€

Die Erfolgskonten werden zum Bilanzstichtag in der Gewinn und Verlustrechnung (GuV) zusammengefasst. Dazu werden folgende Buchungen durchgeführt:

- Alle Ertragskonten an GuV-Konto
- GuV Konto an alle Aufwandskonten

Der Saldo der Erfolgskonten entspricht also dem Gewinn bzw. Verlust der Periode.

Verschaffe dir nun einen Überblick über die verschiedenen Erfolgskonten:

Ertragskonten:

- Beteiligungsertrag

- Mietertrag
- Provisionsertrag
- Zinsertrag

(Ertrag aus dem Warenverkehr wird gesondert im folgenden Kapitel bearbeitet)

Aufwandskonten:

- Personalaufwand (Lohn-, Gehalts- und Sozialaufwand)
- Steueraufwand (Vermögens-, Grund-, Gewerbe- und sonstige Steuern)
- Sonstige Abgaben und Gebühren
- Mietaufwand
- Provisionsaufwand
- Versicherungsaufwand
- Werbeaufwand
- Zinsaufwand

Der Abschluss der Erfolgskonten erfolgt über die GuV. Dabei werden die Salden aller Erfolgskonten in die GuV gebucht. Der Saldo der GuV ist somit der Gewinn oder Verlust der Periode.

**Beispiel:** Es fallen Zinserträge i.H.v. 1.000€ an und es werden Mieten i.H.v. 500€ gezahlt.

Man bucht:

Bank(113) an Zinserträge(245) 1.000€

Sonstige Grundkosten(470) an Kasse(113) 500€

Um den Abschluss über die GuV zu machen stellen wir die Buchungen in kontenform dar:

Soll	245 Zinserträge	Haben
	113	1.000

Soll	470 Sonstige Grundkosten	Haben
113	500	

Soll	113 Bank	Haben
245	1.000	470
		500

Bei Abschluss der Erfolgskonten werden nun die Salden gebildet und an die GuV gebucht:

Zinserträge (245) an GuV (989) 1.000€

GuV (989) an sonstige Grundkosten( 470) 500€

Die Bank ist kein Erfolgskonto und hat somit keinen Einfluss auf die GuV.

Die GuV sieht in Kontoform nun so aus:

Soll	989 GuV	Haben
470	500	245
		1.000

Die GuV wird später über die Bilanz abgeschlossen durch die Buchung

GuV (989) an Eigenkapital (075) 500€

Da das Eigenkapital als ein Passivkonto durch Zugänge auf der Habenseite erhöht wird, wächst das Eigenkapital um 500€.

Nach Abschluss hat die GuV folgendes Aussehen:

Soll	989 GuV		Haben
470	500	245	1.000
075	500		
	1.000		1.000

#### 15.4 Bestandteile des handelsrechtlichen Jahresabschlusses

Der Jahresabschluss besteht aus:

- Bilanz,
- Gewinn- und Verlustrechnung (GuV) und
- Anhang.

Die GuV hast du schon im letzten Kapitel kennengelernt und der Anhang wird am Ende dieses Skriptes kurz zusammengefasst.

Den Aufbau einer Bilanz hast du auch schon im letzten Kapitel kennengelernt. Für die Klausur solltest du die einzelnen Bilanzpositionen kennen.



## 15.4 Eigenkapitalpositionen der Bilanz

Folgende Bilanzpositionen solltest du für die Klausur kennen:

- **Das gezeichnete Kapital:** Dies entspricht der Aktienanzahl/GmbH-Anteilen multipliziert mit deren Nennwerten.
- **Die Kapitalrücklage:** Diese entsteht, wenn Aktien über ihrem Nennwert emittiert werden, neue Gesellschafter also mehr Kapital in die Gesellschaft einbringen, als im gezeichneten Kapital erfasst ist.
- **Die Gewinnrücklage:** Diese entsteht durch Kapital, das dem Unternehmen durch selbst erwirtschaftete Vermögenszuwächse zufließt. "Rücklage" ist ein rein buchungstechnischer Ausdruck - es bedeutet nicht, dass Kapital zurückgelegt wird und in Krisenzeiten als Reserve dienen könnte.
- **Der Verlustvortrag:** Hier werden angefallene Verluste verbucht.
- **Den Jahresüberschuss /-fehlbetrag:** Das Ergebnis der aktuellen Periode.
- **Den Bilanzgewinn:** Der Bilanzgewinn entspricht dem Jahresüberschuss /-fehlbetrag zuzüglich der Bildung bzw. Auflösung von Rücklagen sowie der Bildung bzw. Auflösung von Gewinn- oder Verlustvorträgen.
- **Rohergebnis:** §276 HGB: Kleine und mittelgroße Kapitalgesellschaften (§ 267 Abs. 1, 2) dürfen die Posten § 275 Abs. 2 Nr. 1 bis 5 oder Abs. 3 Nr. 1 bis 3 und 6 zu einem Posten unter der Bezeichnung "Rohergebnis" zusammenfassen.

§ 275 Abs. 2 Nr. 1 bis 5:

1. Umsatzerlöse
2. Erhöhung oder Verminderung des Bestands an fertigen und unfertigen Erzeugnissen
3. andere aktivierte Eigenleistungen
4. sonstige betriebliche Erträge
5. Materialaufwand:
  - a) Aufwendungen für Roh-, Hilfs- und Betriebsstoffe und für bezogene Waren
  - b) Aufwendungen für bezogene Leistungen

### Ergebnisverwendung

Die Fernuni unterscheidet beim Ausweis des Jahresergebnisses zwischen dem Jahresergebnis vor, nach teilweiser und nach vollständiger Ergebnisverwendung.

Dazu musst du zunächst verstehen, wer über die Ergebnisverwendung entscheidet und wie das Ergebnis verwendet werden kann. Das Ergebnis vor Ergebnisverwendung ist zunächst der Jahresüberschuss. Dieser kann in Form von Rücklagen in der Gesellschaft bleiben oder an die Gesellschaft ausgeschüttet werden.

Die Ergebnisverwendung geschieht in zwei Instanzen: Zunächst entscheidet der Vorstand über die Höhe der Rücklagenbildung. Er darf aber maximal 50% des Jahresüberschusses in die Rücklage einstellen. Der Jahresüberschuss abzüglich der gebildeten Rücklagen entspricht dem Bilanzgewinn. Über die Verwendung des Bilanzgewinns entscheidet in der zweiten Instanz die Hauptversammlung. Sie kann wieder Rücklagen bilden oder den Gewinn an die Gesellschafter ausschütten.

- Ausweis des Jahresergebnisses vor Ergebnisverwendung: Hier wird einfach nur der Jahresüberschuss ausgewiesen.
- Ausweis des Jahresergebnisses nach teilweiser Ergebnisverwendung: Dies ist die Bilanz, nachdem der Vorstand über den Jahresüberschuss entschieden hat. Es werden statt des Jahresüberschusses die (evtl. erhöhten) Rücklagen und der Bilanzgewinn ausgewiesen.
- Ausweis des Jahresergebnisses nach vollständiger Ergebnisverwendung: Dies ist die Bilanz, nachdem die Hauptversammlung über die Verwendung des Bilanzgewinns entschieden hat. Weder der Jahresüberschuss, noch der Bilanzgewinn tauchen noch in der Bilanz auf, sondern nur die (evtl. erhöhten) Rücklagen. Die Ausschüttungen tauchen nicht in der Bilanz auf.

### 15.5 Erfolgsermittlung

Bei der Berechnung des Bilanzgewinns wird zwischen dem

- **Gesamtkostenverfahren:** Es werden die Kosten der Leistungserstellung der gesamten Periode zur Ermittlung des Periodenerfolges genutzt.
- **Umsatzkostenverfahren:** Es werden die Kosten der tatsächlich verkauften Produkte (Umsatzkosten) zur Ermittlung des Periodenerfolges genutzt.

Das Schema für die Berechnung des Bilanzgewinns nach beiden Methoden findest du im §275 Abs. II HGB. Du brauchst eigentlich nur noch einzusetzen. Erträge/Aktivierungen sind natürlich hinzuzuaddieren, Aufwendungen/Passivierungen/Abschreibungen abzuziehen und „Ergebnisse“ sind Zwischenergebnisse.

Die Berechnung nach dem Gesamtkostenverfahren hat beispielsweise folgendes Berechnungsschema:

1. Umsatzerlöse
2. +/- Erhöhung oder Verminderung des Bestandes an fertigen und unfertigen Erzeugnissen
3. +andere aktivierte Eigenleistungen
4. +sonstige betriebliche Erträge
5. -Materialaufwand
6. -Personalaufwand
7. -Abschreibungen
8. -sonstige betriebliche Aufwendungen
9. +Erträge aus Beteiligungen
10. +Erträge aus anderen Wertpapieren und Ausleihungen des Finanzanlagevermögens
11. +sonstige Zinsen und ähnliche Erträge
12. -Abschreibungen auf Finanzanlagen und auf Wertpapiere des Umlaufvermögens
13. -Zinsen und ähnliche Aufwendungen
14. =Ergebnis der gewöhnlichen Geschäftstätigkeit
15. +außerordentliche Erträge
16. -außerordentliche Aufwendungen
- 15+16=17. außerordentliches Ergebnis
18. -Einkommens- und Ertragssteuern
19. -sonstige Steuern
20. =Jahresüberschuss/-fehlbetrag

## Aufgaben zu 15.0

### Aufgabe 15.1

Erstelle die Gewinn- und Verlustrechnung für die folgenden Positionen nach dem Gesamtkostenverfahren.

1. Erträge aus Beteiligungen	500€
2. Abschreibungen auf Sachanlagen	1.000€
3. Löhne und Gehälter	600€
4. Umsatzerlöse	15.000€
5. Verlustvortrag aus Vorjahr	50€
6. Zu zahlende Fremdkapitalzinsen	50€
7. Verbindlichkeiten L+L	400€
8. Außerordentliche Aufwendungen	150€
9. Zinseinnahmen aus verbundenen Unternehmen	100€
10. Soziale Abgaben	250€
11. Erhöhung des Bestandes an Fertigen Erzeugnissen	400€
12. Bestand an fertigen und unfertigen Erzeugnissen	1.000€
13. Aufwendungen für Roh-, Hilfs- und Betriebsstoffe	700€
14. Aufwendungen für bezogene Leistungen	200€
15. Andere aktivierte Eigenleistungen	50€
16. Steueraufwand	800€
17. Sonstige betriebliche Erträge	100€
18. Geleistete Anzahlungen auf Sachanlagen	50€

Berechne

- das Rohergebnis
- das Ergebnis der gewöhnlichen Geschäftstätigkeit
- den Jahresüberschuss
- den Bilanzgewinn

**Aufgabe 15.2**

Gib zu folgenden Geschäftsvorfällen den entsprechenden Buchungssatz an und gib weiter an ob es sich um einen Aktivtausch (AA), Passivtausch (PP) oder Aktiv-Passiv-Tausch Mehrung/Minderung (AP) handelt.

- 1) Kauf von Rohstoffen für 1.000€ auf Ziel.
- 2) Bezahlung einer Rechnung i.H.v. 5.000€ per Banküberweisung.
- 3) Kauf eines Druckers für 500€ in bar.
- 4) Aufnahme eines langfristigen Bankdarlehens i.H.v. 50.000€.
- 5) Ein Einzelhändler bezahlt eine Rechnung i.H.v. 2.000€ in bar.

**Aufgabe 15.3**

Gib die Buchungssätze für die folgenden Geschäftsvorfälle an (die Konten kannst du erst einmal intuitiv selber benennen):

- a) Erwerb eines Geschäftswagens für 30.000€. Bezahlung sofort durch Banküberweisung.
- b) Verkauf der Büroausstattung für 2.000€ in bar.
- c) Eine Forderung von 2.500€ wird in bar beglichen.
- d) Ein Kredit i.H.v. 50.000 Euro wird vom Bankkonto aus beglichen.
- e) Begleichung der Mietkosten i.H.v. 500€ durch Überweisung.
- f) Erfolgsneutraler Verkauf von Wertpapieren im Wert von 10.000€. Der Erlös wird auf das Bankkonto gebucht
- g) Begleichung einer offenen Rechnung i.H.v. 1.000€ durch Barüberweisung.

## Lösungen zu 15.0

### Lösung zu 15.1

Du musst nun die Positionen dem Schema aus dem HGB zuordnen. Der Rest macht der Taschenrechner.

1) Umsatzerlöse	15.000€
2) + Erhöhung des Bestandes an fertigen Erzeugnissen	400€
3) +Andere aktivierte Eigenleistungen	50€
4) +Sonstige betriebliche Erträge	100€
5) - Aufwendungen für Roh-, Hilfs- und Betriebsstoffe	700€
6) –Aufwendungen für bezogene Leistungen	200€
<b>7) =Rohergebnis</b>	<b>14.650€</b>
8) – Löhne und Gehälter	600€
9) –Soziale Abgaben	250€
10) – Abschreibungen auf Sachanlagen	1.000€
11) + Erträge aus Beteiligungen	500€
12) +Zinszahlungen aus verbundenen Unternehmen	100€
13) -Zu zahlende Fremdkapitalzinsen	50€
<b>14) =Ergebnis der gewöhnlichen Geschäftstätigkeit</b>	<b>13.350</b>
15) –Außerordentliche Aufwendungen	150€
16) –Steueraufwand	800€
<b>17) =Jahresüberschuss</b>	<b>12.400</b>
18) –Verlustvortrag aus dem Vorjahr	50
<b>19) =Bilanzgewinn</b>	<b>12.350</b>

**Lösung zu 15.2**

1) Material (300) an Verbindlichkeiten LL (160) AP Mehrung	1.000
2) Verbindlichkeiten LL (160) an Bank (113) AP Minderung	5.000
3) Betriebsausstattung(30) an Kasse (100) AA	500
4) Bank (113) an langfristiges Fremdkapital gegenüber Kreditinstituten AP Mehrung	50.000
5) Kasse (100) an Forderungen LL (140) AA	2.000

**Lösung zu 15.3**

a) Fahrzeuge an Bank	30.000€
b) Kasse an Büroausstattung	2.000€
c) Kasse an Forderungen	2.500€
d) Darlehen an Bank	50.000€
e) Mietkosten an Bank	500€
f) Bank an Wertpapiere	10.000€
g) Verbindlk. L+L an Bank	1.000€



## 16.0 Anhang und Lagebericht

### Anhang

Der Anhang eines Jahresabschlusses erfüllt die folgenden Funktionen:

#### 1) Interpretation

Im Anhang werden Bilanz und GuV erläutert. Es müssen die verwendeten Bewertungsmethoden und Abschreibungsmethoden genannt werden. Außerdem müssen Vergleichsdaten aus dem vorhergehenden Jahresabschluss angegeben werden.

#### 2) Korrektur:

Es müssen zusätzliche Angaben gemacht werden, um Fehlinterpretationen zu vermeiden. Auch korrekte Zahlen können ein falsches Bild von der Lage der Gesellschaft machen. Dieses Bild muss korrigiert werden.

#### 3) Entlastung:

Wurden Angaben aufgrund von Wahlrechten nicht in die Bilanz oder GuV aufgenommen, so müssen diese Angaben im Anhang gemacht werden.

#### 4) Ergänzung:

Angaben, die nicht in der Bilanz oder GuV angegeben sind, aber zu den sonstigen Pflichtangaben gemäß §285 HGB gehören. Damit soll gewährleistet sein, dass Bilanz und GuV ein zutreffendes Bild der Gesellschaft widerspiegeln.

## Lagebericht

Der Lagebericht ist kein Bestandteil des Jahresabschlusses. Er besteht aus folgenden Berichten:

**1) Wirtschaftsbericht:** Es wird der Geschäftsverlauf des zurückliegenden Geschäftsjahres und die Lage der Gesellschaft dargestellt. In der Regel wird über folgende Bereiche berichtet:

- wirtschaftliche und gesellschaftliche Rahmenbedingungen
- Bericht über den Investitions- und Finanzierungsprozess
- Personal
- sonstige wichtige Ereignisse

**2) Risikobericht:** Ein Überblick über die aktuellen und zu erwartenden Risiken der Gesellschaft.

**3) Nachtragsbericht:** Der Jahresabschluss beinhaltet nur die Informationen bis zum Bilanzstichtag. Im Nachtragsbericht wird über wichtige Veränderungen und Ereignisse nach dem Bilanzstichtag berichtet.

**4) Prognosebericht:** Ein Ausblick zur zukünftigen Entwicklung der Gesellschaft.

**5) Forschungs- und Entwicklungsbericht:** Betreibt ein Unternehmen Forschungsarbeiten, so muss sehr konkret über die Forschungsaktivitäten berichtet werden. Dazu gehört der Kapitalaufwand und der Personalaufwand. Interne Informationen/Betriebsgeheimnisse sind von der Berichtspflicht natürlich ausgenommen.

**6) Bericht über die Zweigniederlassungen:** Es müssen die Zweigniederlassungen genannt werden.

Sowohl beim Lagebericht als auch beim Anhang darf das Unternehmen zusätzliche Angaben machen, solange diese die tatsächliche Lage der Gesellschaft nicht verfälschen.

## Bilanzanalyse

Hier geht es um die Berechnung von Kennzahlen. Jetzt heißt es: Auswendig lernen!

Zunächst einige Abkürzungen:

LM = Liquide Mittel = Kasse + Schecks + Wertpapiere + Bankguthaben

KFK = Kurzfristiges Fremdkapital = Verbindlichkeiten mit einer Restlaufzeit < 1 Jahr (Rückstellungen, Anzahlungen von Kunden, Kredite, vorgesehene Ausschüttungen des aktuellen Jahres)

MUV = Monetäres Umlaufvermögen = Liquide Mittel + Forderungen

UV = Umlaufvermögen = MUV + Vorräte

MFK = Mittelfristiges Fremdkapital = Verbindlichkeiten mit einer Restlaufzeit zwischen 1 und 5 Jahren.

LFK = Verbindlichkeiten mit einer Restlaufzeit über 5 Jahren + Pensionsrückstellungen.

FK = Fremdkapital = KFK + MFK + LFK

Betriebsbedingtes Vermögen = Anlagevermögen – Finanzanlagen + Umlaufvermögen – sonstige Vermögensgegenstände – Wertpapiere des Umlaufvermögens

AV = Anlagevermögen

GV = Gesamtvermögen

EK = Eigenkapital

FK = Fremdkapital

**Kennzahlen**

- Goldene Bilanzregel:  $EK + KFK \geq AV$

- Liquidität 1. Grades:  $L_1 = \frac{LM}{KFK}$

- Liquidität 2. Grades:  $L_2 = \frac{MUV}{KFK}$

- Liquidität 3. Grades:  $L_3 = \frac{UV}{KFK}$

- Eigenkapitalquote:  $EQ = \frac{EK}{GK}$

- Fremdkapitalquote:  $FQ = \frac{FK}{GK}$

- Verschuldungsgrad:  $V = \frac{FK}{EK}$

- Gesamtrentabilität  $GR = \frac{\text{Ergebnis vor Zinsen}}{\text{Gesamtvermögen}}$

- Eigenkapitalrentabilität:  $EKR = \frac{\text{Ergebnis}}{EK}$

- Return on Investment  $ROI = \frac{\text{ordentliches Betriebsergebnis}}{\text{betriebsbedingtes Vermögen}}$

- Umsatzrentabilität  $UR = \frac{\text{Ergebnis}}{\text{Umsatz}}$

## 17.0 Mathematischer Anhang

### 17.1 Die Ableitung einer Funktion

Schwerpunkt dieses Kapitels ist die Ermittlung der Steigung einer Funktion-der sogenannten Ableitung ( $f'(x)$ ). Lineare Funktionen haben eine konstante Steigung, bei nicht-linearen Funktionen ändert sich die Steigung mit verschiedenen x-Werten.

Differenzierbarkeit: Die Steigung in einem Punkt kann nur ermittelt werden, wenn die Funktion in diesem Punkt differenzierbar ist. Differenzierbar ist eine Funktion an der Stelle  $x_0$ , wenn der Grenzwert

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$\Delta x$  steht für eine beliebig kleine Änderung in  $x$ .

Dieser Grenzwert existiert zu Beispiel nicht an den Rändern des Definitionsbereiches, da  $f(x_0 + \Delta x)$  außerhalb des Definitionsbereiches liegen würde.

Ist eine Funktion differenzierbar, so kann die Ableitung ermittelt werden.

Zur Ermittlung der Ableitung aus der Funktion gibt es folgende **Ableitungsregeln**:

**1) Konstantenregel:** Eine Konstante ist eine zur x-Achse parallele Gerade und hat daher die Steigung Null.

Man schreibt:

$$f(x) = a$$

$$f'(x) = 0$$

**2) Potenzregel:**

$$f(x) = x^n$$

$$f'(x) = n * x^{n-1}$$

Die Ableitung hat also immer eine um 1 geringere Potenz als ihre Stammfunktion.

**3) Summen- und Differenzenregel:**

$$f(x) = g(x) + h(x)$$

$$f'(x) = g'(x) + h'(x)$$

**Beispiel:**

$$f(x) = x + 2$$

Die Funktionen  $g(x)$  und  $h(x)$  sind folgende:

$$g(x) = x$$

$$h(x) = 2$$

Die Ableitungen sind:

$$g'(x) = 1$$

$$h'(x) = 0$$

Daraus folgt:

$$f'(x) = 1$$

Dies ist wirklich simpel. Bei Summen und Differenzen werden die Terme einzeln abgeleitet.

**4) Produktregel:**

$$f(x) = g(x) * h(x)$$

$$f'(x) = g'(x) * h(x) + g(x) * h'(x)$$

**Beispiel:**

$$f(x) = x * \sin x$$

Hier ist  $g(x) = x$  und  $h(x) = \sin x$ .

Man bildet zunächst die einzelnen Ableitungen:

$$g'(x) = 1$$

$h'(x) = \cos x$  (Die Ableitung von  $\sin x$  ist  $\cos x$ . Diese speziellen Ableitungen findest du weiter unten)

$$f'(x) = 1 * \sin x + x * \cos x$$

**5) Quotientenregel:**

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

$$f'(x) = \frac{g'(x) * h(x) - g(x) * h'(x)}{(h(x))^2}$$

**Beispiel:**

$$f(x) = \frac{x}{\sin x}$$

Hier ist wieder  $g(x) = x$  und  $h(x) = \sin x$ .

$$g'(x) = 1$$

$$h'(x) = \cos x$$

$$f'(x) = \frac{1 * \sin x - x * \cos x}{\sin^2 x}$$

Da die Ableitung einer Funktion wieder eine Funktion ist, kann man auch von der Ableitung wieder die Ableitung bilden (man schreibt  $f''(x)$  für die 2te Ableitung,  $f'''(x)$  für die 3te usw.). Die sogenannte zweite Ableitung misst die Steigung der ersten Ableitung und damit die Krümmung der Originalfunktion. Ist die zweite Ableitung positiv, so bedeutet das, dass die Steigung der Funktion ansteigend ist.

Dies ist gut an einem Beispiel zu erkennen.

Die Funktion  $f(x) = x^2$  hat die Ableitungen:

$$f'(x) = 2x$$

$$f''(x) = 2$$

$f(x) = x^2$  ist eine Parabel die für  $x < 0$  eine negative Steigung hat und für  $x > 0$  eine positive. Daher ist die erste Ableitung für  $x < 0$  negativ und für  $x > 0$  positiv. Die Steigung von  $f(x)$  nimmt über alle  $x$  zu, die Steigung der ersten Ableitung ist daher durchgehend positiv und  $f(x)$  weist eine positive Krümmung auf (sie ist konvex).

## 17.2 Totales Differential

Bei der Bildung des totalen Differentials muss die Funktion zunächst nach allen unabhängigen Variablen einzeln abgeleitet werden. Das totale Differential ist die Summe der einzelnen Ableitungen jeweils mit den entsprechenden  $dx_i$  multipliziert.

Beispiel:  $y = 3x + 4z^2$

Zur Bestimmung des totalen Differentials bildet man zunächst beide Ableitungen:

$$\frac{dy}{dx} = 3$$

$$\frac{dy}{dz} = 8z$$

Das totale Differential ist dann:

$$dy = 3 * dx + 8z * dz$$