VIBRACIONES ACOPLADAS

OBJETIVOS:

Al finalizar el tema el estudiante ha de estar en capacidad de determinar frecuencias (angulares) de los modos normales de vibración de sistemas de materiales acoplados. Para ello debe ser capaz de:

- Definir en sistemas vibratorios acoplados que son los modos normales de vibración.
- Determinar las expresiones generales para de dos o más partículas acopladas.
- Determinar las frecuencias angulares normales para sistemas acoplados de pocas partículas.
- Dibujar en esquema los modos normales de sistemas acoplados de pocas partículas.
- Determinar para un sistema de N partículas iguales cuales son las "N" frecuencias angulares normales del movimiento del sistema.
- Determinar la ecuación de solución que describe el comportamiento de cada una las "N" partículas iguales cuando el sistema vibra en frecuencia normal.

6.1. OSCILADORES ACOPLADOS.

En capítulos anteriores hemos limitado nuestro análisis a sistemas que presentan una sola frecuencia natural (frecuencia de resonancia); sin embargo los sistemas físicos son capaces de resonar en muchas frecuencias distintas, como si se tratara de un piano.

Los sistemas físicos están constituidos por un número muy grande de partículas; **cuando todas estas partículas comparten la misma frecuencia angular estamos ante lo que se conoce como modo normal del movimiento del sistema** y la frecuencia angular compartida por todas las partículas es una de las muchas frecuencias angulares normales de movimiento.

6.1.1. Una masa acoplada a dos resortes iguales fijos.

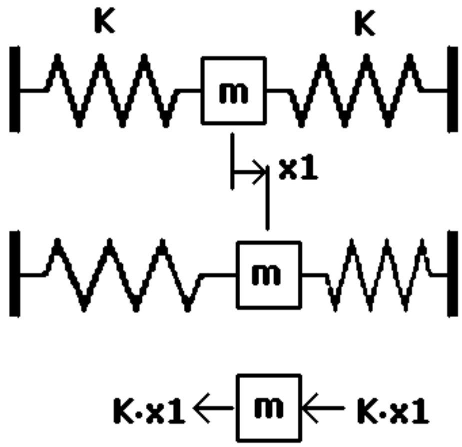

Figura 06-01

Este es un caso de simetría muy interesante; si tenemos una masa (m) unida a dos resortes de constante elástica igual (K); despreciando fuerzas de fricción; por suma de fuerzas en el sentido del movimiento debe ocurrir:

$$\overset{+}{\rightarrow} \sum Fx = m \cdot a_1 \rightarrow$$

$$-K \cdot x_1 - K \cdot x_1 = m \cdot a_1 \rightarrow$$

$$m \cdot \ddot{x}_1 + 2K \cdot x_1 = 0 \rightarrow$$

$$\ddot{x}_1 + \frac{2K}{m} \cdot x_1 = 0 \leftrightarrow \quad \ddot{x}_1 + \omega_1^2 \cdot x_1 = 0 \qquad 6.1$$

Estamos ante la ecuación de un movimiento armónico simple; donde la frecuencia angular natural del movimiento es: $\omega_o^2 = K/m$; pero la partícula vibra en una frecuencia distinta, conocida como **frecuencia angular del primer** (y único para el ejemplo) **modo normal del vibración (w_1).**

La solución de este caso de una sola partícula es:

$$x_1 = A_1 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t + \phi_1) = A_1 \cdot \cos(\sqrt{2} \cdot \omega_o \cdot t + \phi_1) \quad 6.2$$

6.1.2.- Dos masas acopladas moviéndose simétricamente.

El caso más simple de osciladores acoplados se presenta cuando dos masas iguales (m) están unidas entre sí y a puntos fijos por tres resortes de constantes elásticas idénticas; y donde se desprecian las fuerzas de fricción. Inicialmente consideraremos los casos de simetría:

Primeramente supondremos que los cuerpos (m_1 y m_2) se desplazan en la misma dirección y sentido la misma cantidad de desplazamiento **($x_1 = x_2$);** según esto el resorte de acoplamiento no esta efectuando trabajo; porque en ningún momento esta comprimido o estirado; el resultado final de esta combinación es que cada masa se mueve como si no estuvieran acopladas.

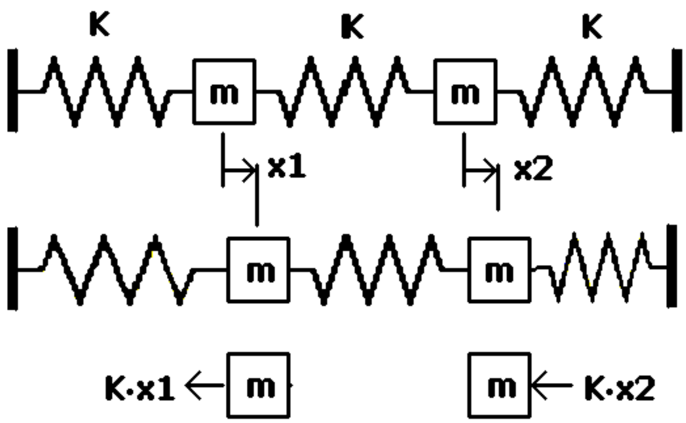

Figura 06-02

Por suma de fuerzas y condiciones iniciales de movimiento de las partículas, debe ocurrir:

$$\overset{+}{\rightarrow} \sum Fx = m \cdot a_1 \rightarrow -K \cdot x_1 = m \cdot a_1 \rightarrow m \cdot \ddot{x}_1 + K \cdot x_1 = 0$$
$$\overset{+}{\rightarrow} \sum Fx = m \cdot a_2 \rightarrow -K \cdot x_2 = m \cdot a_2 \rightarrow m \cdot \ddot{x}_2 + K \cdot x_2 = 0$$

donde

$$\ddot{x}_1 + \frac{K}{m} \cdot x_1 = 0 \leftrightarrow \quad \ddot{x}_1 + \omega_1^2 \cdot x_1 = 0$$
$$\ddot{x}_2 + \frac{K}{m} \cdot x_2 = 0 \leftrightarrow \quad \ddot{x}2 + \omega_1^2 \cdot x_2 = 0 \qquad 6.3$$

Como ambas partículas comparten en esta situación la misma frecuencia angular y describen el mismo movimiento armónico simple, estamos ante **<u>el primer modo de vibración normal del sistema.</u>**

La solución de este caso para ambas partículas es:

$$x_1 = x_2 = A_1 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t + \phi_1) = A_1 \cdot \cos(\omega_o \cdot t + \phi_1) \quad 6.4$$

En segundo caso supondremos que las partículas (m_1 y m_2) se desplazan en la misma dirección, la misma cantidad, pero en sentidos contrarios **<u>($x_1 = -x_2$)</u>** . Los cuerpos forman entre si imágenes especulares (como un espejo) y el resorte que los une presenta una deformación igual al doble de la cantidad que deforma cada masa; según esto debe ocurrir en la suma de fuerzas de cada partícula es:

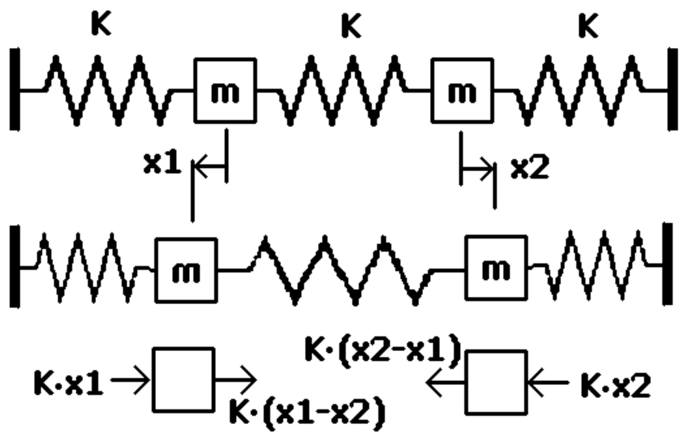

Figura 06-03

Por suma de fuerzas y condiciones iniciales de movimiento de las partículas, debe ocurrir:

$$\overset{+}{\rightarrow} \sum Fx = m \cdot a_1 \rightarrow -K \cdot x_1 - K(x_1 - x_2) = m \cdot a_1 \rightarrow m \cdot \ddot{x}_1 + 3K \cdot x_1 = 0$$
$$\overset{+}{\rightarrow} \sum Fx = m \cdot a_2 \rightarrow -K \cdot x_2 - K(x_2 - x_1) = m \cdot a_2 \rightarrow m \cdot \ddot{x}_2 + 3K \cdot x_2 = 0$$

donde

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \frac{3K}{m} \cdot x_1 = 0 &\leftrightarrow \quad \ddot{x}_1 + \omega_2^2 \cdot x_1 = 0 \\ \ddot{x}_2 + \frac{3K}{m} \cdot x_2 = 0 &\leftrightarrow \quad \ddot{x}2 + \omega_2^2 \cdot x_2 = 0 \end{aligned} \quad 6.5$$

Las partículas comparten en esta situación también la misma frecuencia angular, estamos ante **el segundo modo de vibración normal del sistema.**

La solución de este caso para ambas partículas es:

$$x_1 = -x_2 = A_2 \cdot \cos(\omega_2 \cdot t + \phi_2) = A_2 \cdot \cos(\sqrt{3} \cdot \omega_o \cdot t + \phi_2) \quad 6.6$$

En este segundo caso de simetría, el resorte de acoplo incrementa para ambos cuerpos la fuerza restauradora; y por lo tanto la frecuencia de vibración del sistema.

6.1.3.- Dos masas acopladas, movimiento no simétrico.

En el ejemplo de dos masas iguales, sin amortiguación y unidas por resortes de iguales constantes elásticas, los casos de simetría son fáciles de resolver; no ocurre así con casos más generales; si el primer cuerpo se desplaza una cantidad x_1, mientras que el segundo una x_2 (ambas consideradas para el análisis en el mismo sentido).

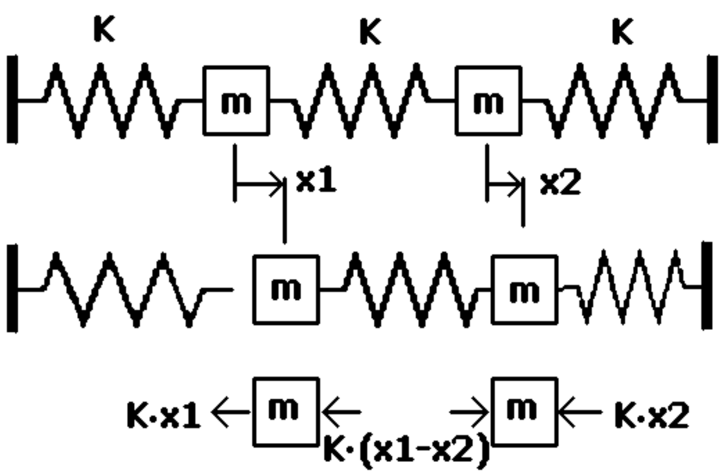

Figura 06-04

Por suma de fuerzas sobre cada partícula tenemos:

$$\overset{+}{\rightarrow} \sum Fx = m \cdot a_1 \rightarrow -K \cdot x_1 - K(x_1 - x_2) = m \cdot a_1 \rightarrow$$

$$y$$

$$\overset{+}{\rightarrow} \sum Fx = m \cdot a_2 \rightarrow -K \cdot x_2 + K(x_1 - x_2) = m \cdot a_2 \rightarrow$$

Como las masas y las constantes elásticas son iguales, entonces la frecuencia angular natural es: $w_o^2 = K/m$; acomodando resulta las siguientes ecuaciones diferenciales.

$$\begin{aligned} m \cdot \ddot{x}_1 + 2K \cdot x_1 - K \cdot x_2 &= 0 \quad [1] \\ m \cdot \ddot{x}_2 + 2K \cdot x_2 - K \cdot x_1 &= 0 \quad [2] \end{aligned} \qquad 6.7$$

La primera ecuación describe el comportamiento de la masa m_1, mientras que la segunda el correspondiente a la masa m_2; ambas ecuaciones no pueden resolver independientemente, sino de forma simultánea; ello constituye un **<u>sistema de ecuaciones diferenciales.</u>**

Este sistema de ecuaciones diferenciales, en particular, no es difícil de resolver; si sumamos y restamos ambas ecuaciones resultan las siguientes:

$$\begin{aligned} m \cdot [\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2] + K \cdot [x_1 + x_2] &= 0 \quad [1+2] \\ m \cdot [\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2] + 3K \cdot [x_1 - x_2] &= 0 \quad [1-2] \end{aligned}$$

Por cambio de variables, sea $p = x_1 + x_2$ y $q = x_1 - x_2$ resultan dos movimientos armónico simple cuyas soluciones son:

$$m \cdot [\ddot{p}] + K \cdot [p] = 0 \ \rightarrow$$

$$p = A_1 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t + \phi_1) = A_1 \cdot \cos(\omega_o \cdot t + \phi_1)$$

$$m \cdot [\ddot{q}] + 3K \cdot [q] = 0 \ \rightarrow$$

$$q = A_2 \cdot \cos(\omega_2 \cdot t + \phi_2) = A_2 \cdot \cos\left(\sqrt{3} \cdot \omega_o \cdot t + \phi_2\right)$$

Dado que $x_1 = ½(q+p)$ y $x_2 = ½(q-p)$; entonces la solución para cada partícula es:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}\left[A_1 \cdot \cos(\omega_o \cdot t + \phi_1) + A_2 \cdot \cos\left(\sqrt{3} \cdot \omega_o \cdot t + \phi_2\right)\right] \\ x_2 &= \frac{1}{2}\left[A_1 \cdot \cos(\omega_o \cdot t + \phi_1) - A_2 \cdot \cos\left(\sqrt{3} \cdot \omega_o \cdot t + \phi_2\right)\right] \end{aligned} \qquad 6.8$$

Del resultado 6.8 se puede concluir que en un movimiento acoplado (sin amortiguación) la solución que describe el comportamiento de cada partícula es la superposición de movimientos vibratorios de diferente frecuencia. Esto es que cada partícula presenta una vibración pulsante.

Si "A_1" es nula, estamos ante el caso del segundo modo normal de vibración, y si por el contrario "A_2" es nula nos encontramos con el primer modo de vibración; luego las frecuencias angulares de las vibraciones superpuestas corresponden a las frecuencias normales de vibración del sistema.

6.3.- N - OSCILADORES SEMEJANTES ACOPLADOS.

Cualquier cuerpo macroscópico real, como un trozo de material sólido, contiene muchas partículas y no solamente dos o tres partículas; por este motivo tenemos que considerar el estudio de un sistema formado por un número arbitrario de osciladores semejantes acoplados juntos.

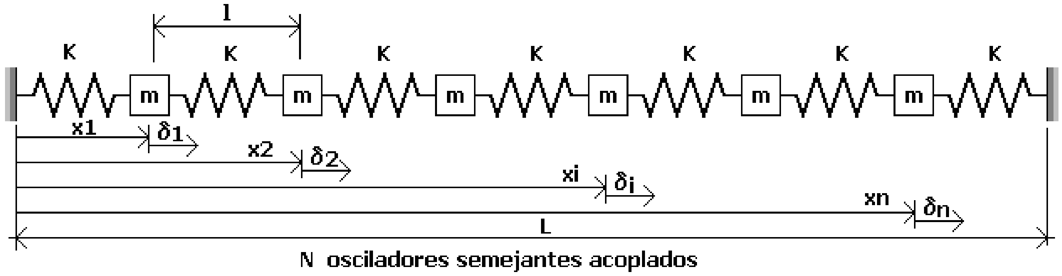

Figura 06-05

El término semejante es importante, dado que se asume que en la red cristalina las fuerzas y los átomos son iguales. Consideramos la existencia de N masas iguales unidas a N+1 resortes iguales en forma lineal; podemos para el análisis incluir dos masas más, la primera ubicada en el origen (correspondiéndole el número cero) y la segunda al final de todas (correspondiéndole el número N+1); estas dos masas anexadas se caracterizan por permanecer en su posición de equilibrio (fijas).

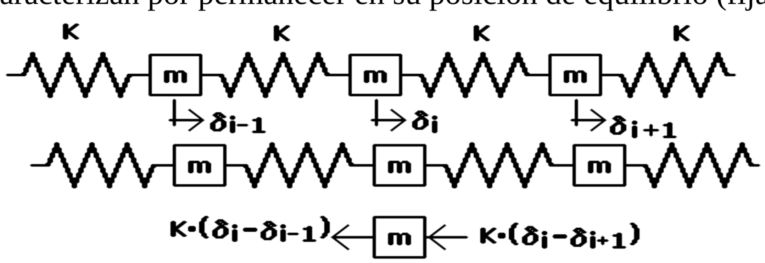

Figura 06-06

Si todas las masas son iguales ($m_1 = m_2 = ... = m_N$) y las constantes elásticas entre los resortes también; entonces, para una partícula "i" del sistema que se desplaza de su posición (xi) una distancia (di); tenemos que aplicando suma de fuerzas sobre la partícula “i” es:

$$\overset{+}{\rightarrow} \sum Fx = m \cdot a_1 \rightarrow -K \cdot [\delta_i - \delta_{i-1}] - K \cdot [\delta_i - \delta_{i+1}] = m \cdot \ddot{\delta}_i \quad 6.9$$

$$\ddot{\delta}_i + 2 \cdot \omega_o^2 \cdot \delta_i - \omega_o^2 \cdot [\delta_{i-1} + \delta_{i+1}] = 0$$

$$i = 1, 2, 3, ..., N \quad 6.10$$

$$\omega_o^2 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

Tenemos entonces un sistema de "N" ecuaciones diferenciales correspondiente a las "N" partículas del sistema; una por cada valor de "i"; más dos partículas que representan condiciones de frontera y permanecen en reposo, m_0 y m_{N+1}; cuyo desplazamiento es nulo: $d_0 = 0$ y $d_{N+1} = 0$.

6.3.1.- Solución normal para los N - osciladores acoplados.

En sistema de partículas acopladas que vibra en modo normal, debe ocurrir que todas las partículas tienen un movimiento armónico simple con la misma frecuencia angular; llamada frecuencia normal del modo vibratorio de modo vibratorio “n”.

$$\delta_i = A_{i,n} \cdot \cos(\omega_n \cdot t + \phi_n) \quad 6.11$$

$$i = 1, 2, 3, ..., N$$

Siendo "Ai,n" la amplitud del movimiento de la partícula "i" en la frecuencia angular normal "wn". Recordando los caso más básicos, cuando N = 1, solo existía un movimiento normal, cuya frecuencia es $\sqrt{2} \cdot \omega_o$; y cuando N = 2, existían dos modos normales de movimiento, cuyas frecuencias son ω_o y $\sqrt{3} \cdot \omega_o$. Podemos suponer que cuando existen N osciladores acoplados, deberían existir N modos normales.

Lo anterior es valido solo si se trabaja en un eje, cuando se trabaja en el espacio de dos o tres dimensiones es de suponer que existan 2N y 3N modos normales respectivamente. El número real de modos normales depende no solo del número de partículas, sino de los grados del libertad y simetrías del sistema y suele ser muchas veces menor que N, 2N o 3N.

6.3.2.- Modos normales para N osciladores acoplados.

En el caso de un número muy grande de ecuaciones diferenciales resulta sumamente largo y laborioso determinar las "N" frecuencias normales del movimiento; sin embargo podemos recurrir a una solución más cómoda; si estamos ante una vibración normal, tenemos que i esta dada por la expresión 6.11, luego derivando resulta que la aceleración de cada partícula en un modo normal es:

$$\delta_i = A_{i,n} \cdot \cos(\omega_n \cdot t + \phi_n) \rightarrow \ddot{\delta}_i = -A_{i,n} \cdot \omega_n^2 \cdot \cos(\omega_n \cdot t + \phi_n)$$

Como todas las partículas deben presentar un movimiento armónico simple similar (o al menos las dos más cercanas a la partícula "i") entonces sustituyendo en la expresión 6.10 tenemos:

$$\cos(\omega_n \cdot t + \phi_n) \cdot [[2 \cdot \omega_o^2 - \omega_n^2] \cdot [A_i] - \omega_o^2 \cdot [A_{i-1} + A_{i+1}]] = 0$$

Dado que la función coseno para todo tiempo no es nula, entonces la condición para que la partículas vibren en forma normal es:

$$[2 \cdot \omega_o^2 - \omega_n^2] \cdot [A_i] - \omega_o^2 \cdot [A_{i-1} + A_{i+1}] = 0$$

Acomodando términos tenemos:

$$\frac{[2 \cdot \omega_o^2 - \omega_n^2]}{\omega_o^2} = \frac{[A_{i-1} + A_{i+1}]}{A_i} \quad 6.12$$

Existen dos condiciones de frontera, $A_{0,n} = A_{N+1,n} = 0$; por lo tanto podemos sugerir una solución periódica, esto es sea:

$$A_{i,n} = C_n \cdot sen(i \cdot \theta)$$

Donde si i = 0, se cumple la identidad; y cuando i = N+1, debe cumplirse $(N+1) \cdot \theta = n\pi$; por lo tanto la amplitud del movimiento de cada partícula es en el modo “n” igual a:

$$A_{i,n} = C_n \cdot sen\left[i \cdot \frac{n\pi}{N+1}\right] \quad 6.13$$

Donde "i" es cada una de las N partículas del sistema y "n" es el modo normal de vibración del sistema. Pero cuanto vale la frecuencia normal del movimiento; en base a la definición de Ai, podemos determinar:

$$A_{i-1,.n} = C_n \cdot sen((i-1)\cdot\theta) = C_n \cdot [sen(i\cdot\theta)\cdot\cos(\theta) - \cos(i\cdot\theta)\cdot sen(\theta)]$$

$$A_{i+1,n} = C_n \cdot sen((i+1)\cdot\theta) = C_n \cdot [sen(i\cdot\theta)\cdot\cos(\theta) + \cos(i\cdot\theta)\cdot sen(\theta)]$$

Reemplazando en 6.12 nos queda:

$$\frac{[2\cdot\omega_o^2 - \omega_n^2]}{\omega_o^2} = \frac{[A_{i-1,n} + A_{i+1,n}]}{A_{i,n}} = 2\cdot\cos(\theta) \quad 6.14$$

Despejando la frecuencia normal tenemos:

$$\omega_n^2 = 2\cdot\omega_o^2\cdot[1-\cos(\theta)] = 2\cdot\omega_o^2\cdot[2\cdot sen^2(\tfrac{\theta}{2})]$$

Tenemos sustituyendo y sacando raíz:

$$\omega_n = 2\cdot sen\left[\frac{n\cdot\pi}{2\cdot(N+1)}\right] \quad 6.15$$

6.3.3.- Desplazamiento de una partícula ubicada en x_i.

Las partículas del sistema en su posición de equilibrio están separadas una distancia constante "l"; luego la posición de una partícula "i" respecto a la posición de la partícula "0" es:

$$x_i = i\cdot l \quad 6.16$$

Por otro lado la distancia total "L" del sistema de partículas acopladas es igual al número de separaciones entre las masas (o el número de resortes) multiplicada por la longitud "l".

$$L = (N+1)\cdot l \quad 6.17$$

Como la amplitud de desplazamiento de la partícula "i" viene dado por la expresión 6.13; si de la misma reemplazamos la cantidad N+1 a partir de relaciones anteriores, tenemos que la expresión 6.11 que describe el comportamiento de la partícula "i" es en definitiva la suma de su vibración en modos normales, esto es:

$$\delta_i = \sum_{n=1}^{N} C_n \cdot sen\left[\frac{x_i \cdot n \cdot \pi}{L}\right] \cdot \cos(\omega_n \cdot t + \phi_n) \quad 6.18$$

La expresión resultante es una combinación de dos variables, una la posición de equilibrio de la partícula (x_i) y la otra el tiempo (t); cada variable independiente una de la otra.

REFERENCIAS

1.- **FISICA. Volumen I. Mecánica**.
Marcelo Alonso y Edward J. Finn.
Addison - Wesley Iberoamericana. U.S.A. 1986.

2.- **VIBRACIONES Y ONDAS. Curso de Física del M.I.T.**
A.P. French.
Editorial Reverte, S. A. España. 1982.

3.- **MECANICA VECTORIAL PARA INGENIEROS. Dinámica.**
Ferdinand P. Beer y E. Russell Johnston.
Libros McGrall-Hill. México 1979.

4.- **MECANICA VECTORIAL PARA INGENIEROS. Volumen II. Dinámica**.
Harry R. Nara.
Editorial Limusa. México 1979.

5.- **MATEMATICAS AVANZADAS PARA INGENERIA. Volumen 1**.
Erwin Kreyszig.
Editorial Limusa. México 1981.

6.- **CALCULUS. Volumen 1.**
Tom M. Apostol.
Editorial Reverte, S.A. Segunda Edición. 1982.

7.- **FISICA GENERAL. Volumen I.**
Douglas C., Ginacoli.
Prentice - Hall hispanoamericana, S.A. México 1988.

8.- **FISICA tomo I.**
Paul A. Tipler.
Editorial Reverte, S.A. Colombia 1990.

9.- **FÍSICA PARA LAS CIENCIAS DE LA VIDA Y DE LA SALUD.**
Simon G. G. MacDonald. Y Desmond M. Burns.
Fondo Educativo Interamericano, S.A. 1978.