

Interferência de ondas de luz

En el capítulo anterior se estudiaron los rayos de luz que pasan a través de una lente o se reflejan desde un espejo para formar imágenes. Con este análisis concluye el estudio sobre la *óptica geométrica*. En este capítulo y el siguiente, se revisará parte de la *óptica de ondas* u *óptica física*, que comprende, la interferencia, difracción y polarización de la luz; estos fenómenos no se explican en forma adecuada con la óptica de rayos empleada en los capítulos anteriores. Aquí aprenderemos como al tratar la luz como ondas y no como rayos, se logra una descripción satisfactoria de estos fenómenos.

En este capítulo veremos los fenómenos de *interferencia* que ocurren cuando se combinan dos ondas. Los colores observados en las películas de aceite y las burbujas de jabón son el resultado de la interferencia entre la luz reflejada en las superficies anterior y posterior de una capa delgada de aceite o una disolución jabonosa.

Condiciones para la interferencia

Al igual que las ondas mecánicas, las ondas de luz también se interfieren entre ellas. Fundamentalmente, toda interferencia asociada con ondas de luz aparece cuando se combinan los campos electromagnéticos que constituyen las ondas individuales.

Si dos focos se colocan uno al lado del otro, no se observan efectos de interferencia porque las ondas de luz de cada uno se emiten independientemente de la otra. Las emisiones de los dos focos no mantienen una correspondencia de fase constante entre ellos con el tiempo. Las ondas de luz de una fuente ordinaria, como es un foco, se somete a cambios de fase aleatorios en intervalos menores a un nanosegundo. Por lo tanto, las condiciones para interferencia constructiva, interferencia destructiva, o algún estado intermedio, se mantienen sólo durante estos intervalos de tiempo. Puesto que el ojo humano no puede seguir cambios tan rápidos, no se observan efectos de interferencia. Se dice que estas fuentes de luz son incoherentes.

Para observar interferencia en ondas de dos fuentes, debe cumplir las siguientes condiciones:

1. Las fuentes deben ser **coherentes**, es decir, **deben mantener una fase constante entre ellas**.
2. Las fuentes deben ser **monocromáticas**, es decir, de una sola longitud de onda.

Por ejemplo, las ondas de sonido de una sola frecuencia emitidas por dos altavoces colocados uno al lado del otro y activados por un solo amplificador pueden interferir entre si porque los dos altavoces son coherentes, es decir, responden al amplificador de la misma forma en el mismo tiempo.

Interferencia y fuentes coherentes

El término **interferencia** se refiere a cualquier situación en la que dos o más ondas se traslapan en el espacio. Cuando esto ocurre, la onda total en cualquier punto y en cualquier instante está gobernada por el **principio de superposición**, el cual es el más importante de toda la óptica física, por lo que el lector debe asegurarse de que lo comprende bien. El principio de superposición establece lo siguiente:

Quando dos o más ondas se traslapan, el desplazamiento resultante en cualquier punto y en cualquier instante se encuentra sumando los desplazamientos instantáneos que producirían en el punto las ondas individuales si cada una se presentara sola.

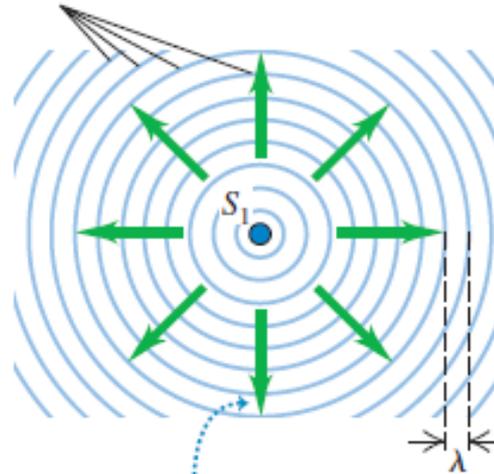
Interferencia en dos o tres dimensiones

En esta sección veremos lo que pasa cuando se combinan ondas que se propagan en dos o tres dimensiones desde un par de fuentes generadoras de ondas idénticas.

Los efectos de la interferencia se ven con más facilidad cuando se combinan ondas *sinusoidales* con una sola frecuencia f y longitud de onda λ . La figura 35.1 muestra una “instantánea” o imagen “congelada” de una fuente *única* S_1 de ondas sinusoidales y algunos de los frentes de onda producidos por ella. La figura sólo ilustra los frentes de onda que corresponden a las *crestas*, por lo que la separación entre frentes de onda sucesivos es de una longitud de onda. El material que rodea a S_1 es uniforme, de manera que la rapidez de la onda es la misma en todas direcciones y no hay refracción (y, por lo tanto, los frentes de onda no presentan ningún “doblez”). Si las ondas son bidimensionales, como las que se presentan en la superficie de un líquido, los círculos de la figura 35.1 representan frentes de onda circulares; si las ondas se propagan en tres dimensiones, los círculos representan frentes de onda esféricos que se propagan desde S_1 .

35.1 Una “instantánea” de ondas sinusoidales con frecuencia f y longitud de onda λ que se propagan en todas direcciones desde una fuente S_1 .

Frentes de onda: crestas de la onda (frecuencia f) separadas por una longitud de onda λ



Los frentes de onda se desplazan hacia fuera desde la fuente S_1 con rapidez de onda $v = f\lambda$.

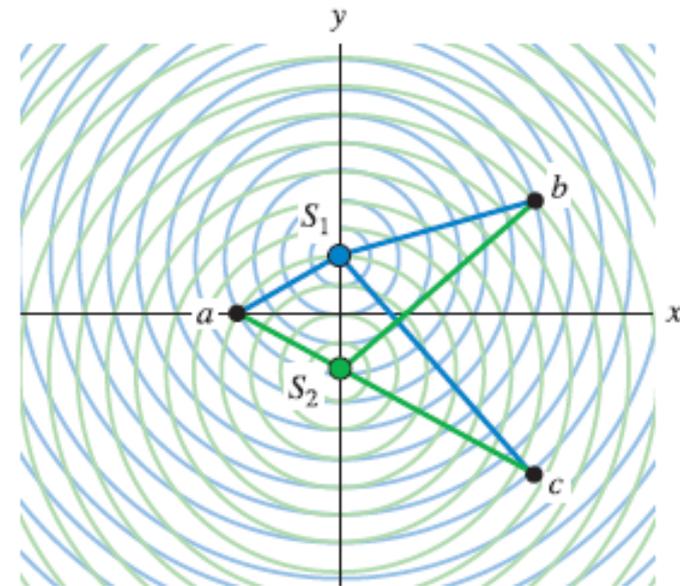
En óptica, las ondas sinusoidales son características de la luz monocromática (un solo color). Si bien es muy fácil generar ondas acuáticas o sonoras de una sola frecuencia, las fuentes comunes de luz no emiten luz monocromática (de una sola frecuencia). Por ejemplo, las bombillas incandescentes y las flamas emiten una distribución continua de longitudes de onda. Sin embargo, hay varias maneras de producir aproximadamente luz monocromática. Por ejemplo, algunos filtros bloquean todas las longitudes de onda, salvo un intervalo muy angosto. La fuente que más se acerca a ser monocromática de todas las que se dispone actualmente es el láser. Un ejemplo es el láser de neón, que emite luz roja a 623.8 nm con un intervalo de longitud de onda del orden de + o - 0.000001 nm, o alrededor de una parte en 10^9 . Cuando estudiemos los efectos de la interferencia y la difracción en este capítulo y el siguiente, supondremos que trabajamos con ondas monocromáticas (a menos que se especifique otra cosa).

Interferencia constructiva y destructiva

En la figura 35.2a se muestran dos fuentes idénticas de ondas monocromáticas, S_1 y S_2 . Ambas producen ondas de la misma amplitud y longitud de onda λ . Además, las dos fuentes están permanentemente en fase; vibran al unísono. Esas fuentes podrían ser dos agitadores sincronizados en un tanque de agua, dos altavoces alimentados por el mismo amplificador, dos antenas de radio energizadas por el mismo transmisor o dos agujeros pequeños o ranuras en una pantalla opaca, iluminada por la misma fuente de luz monocromática. Veremos que si no hubiera una relación de fase constante entre ambas fuentes, los fenómenos que vamos a estudiar no ocurrirían. Se dice que dos fuentes monocromáticas de la misma frecuencia y con una relación de fase constante definida (no necesariamente en fase) son coherentes. También se utiliza el término ondas coherentes (o, en el caso de las ondas luminosas, luz coherente) para hacer referencia a las ondas emitidas por dos fuentes de ese tipo.

35.2 a) Una “instantánea” de ondas sinusoidales que se propagan a partir de dos fuentes coherentes S_1 y S_2 . La interferencia constructiva ocurre en el punto a (equidistante a ambas fuentes) y b . c) En el punto c hay interferencia destructiva.

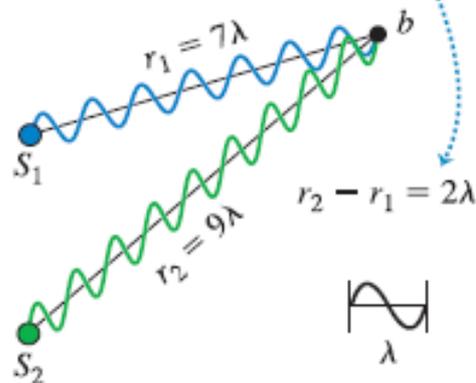
a) Dos fuentes de onda coherentes separadas por una distancia 4λ



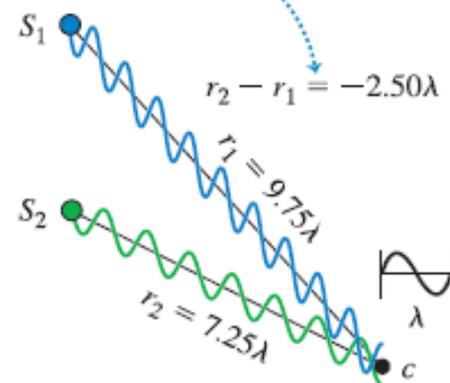
En la figura 35.2a colocamos las dos fuentes de igual a amplitud, igual longitud de onda y (si las sondas son transversales) la misma polarización a lo largo del eje y equidistantes con respecto al origen. Considere un punto a en el eje x . Por simetría, las dos distancias de S_1 a a y de S_2 a a son *iguales*, de manera que las ondas procedentes de las dos fuentes requieren tiempos iguales para viajar a a . Así, las ondas que salen en fase de S_1 y S_2 llegan en fase a a . Las dos ondas se suman y la amplitud total en a es el *doble* de la amplitud de cada onda individual. Esto se cumple para *cualquier* punto que se localice sobre el eje x .

De manera similar, la distancia de S_2 al punto b es exactamente dos longitudes de onda *mayor* que la distancia de S_1 a b . Una cresta de onda de S_1 llega a b exactamente dos ciclos antes que una cresta emitida al mismo tiempo en S_2 , y de nuevo las dos ondas arriban en fase. Igual que en el punto a , la amplitud total es la suma de las amplitudes de las ondas de S_1 y S_2 .

b) Condiciones para la interferencia constructiva: las ondas interfieren en forma constructiva si las longitudes de sus trayectorias difieren en un número entero de longitudes de onda:
 $r_2 - r_1 = m\lambda$.



c) Condiciones para la interferencia destructiva: las ondas interfieren en forma destructiva si las longitudes de sus trayectorias difieren en la mitad de un número entero de longitudes de onda: $r_2 - r_1 = (m + \frac{1}{2})\lambda$.



En general, cuando las ondas de dos o más fuentes llegan *en fase* a un punto, la amplitud de la onda resultante es la *suma* de las amplitudes de las ondas individuales; éstas se refuerzan una a la otra. Esto se llama **interferencia constructiva** (figura 35.2b). Sea r_1 la distancia que hay entre S_1 y cualquier punto P , y r_2 la distancia que hay entre S_2 y P . Para que en P ocurra la interferencia constructiva, la diferencia de las trayectorias $r_2 - r_1$ para las dos fuentes debe ser un múltiplo entero de la longitud de onda λ :

$$r_2 - r_1 = m\lambda \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots) \quad \begin{array}{l} \text{(interferencia} \\ \text{constructiva,} \\ \text{fuentes en fase)} \end{array} \quad (35.1)$$

En la figura 35.2a, los puntos a y b satisfacen la ecuación (35.1) con $m = 0$ y $m = \pm 2$, respectivamente.

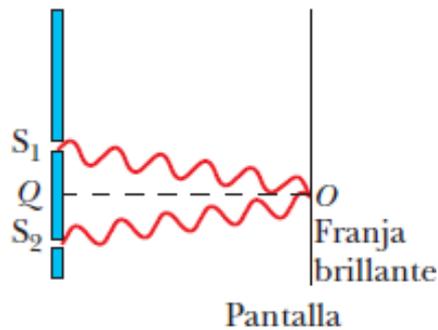
Algo diferente ocurre en el punto c en la figura 35.2a, donde la diferencia de trayectorias $r_2 - r_1 = -2.50 \lambda$, es *la mitad de un número entero* de longitudes de onda. Las ondas provenientes de las dos fuentes llegan al punto c exactamente medio ciclo fuera de fase. La cresta de una onda arriba al mismo tiempo que la cresta de una onda en sentido opuesto (un “valle”) de la otra onda (figura 35.2c). La amplitud resultante es la *diferencia* entre las dos amplitudes individuales. Si éstas son iguales, entonces la amplitud total ¡es igual a *cero*! Esta cancelación o anulación parcial de las ondas

individuales recibe el nombre de **interferencia destructiva**. La condición para que haya interferencia destructiva en la situación que se ilustra en la figura 35.2a es

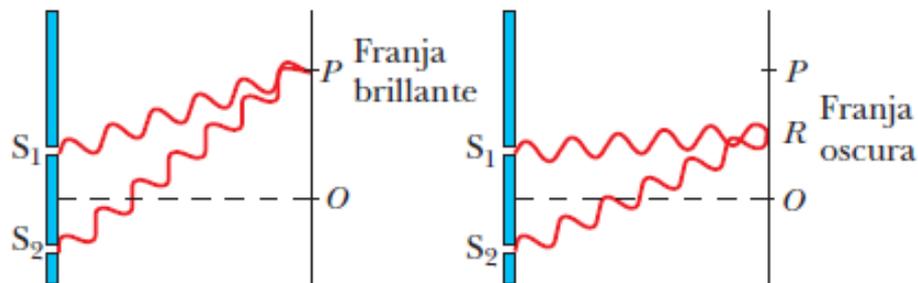
$$r_2 - r_1 = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots) \quad \begin{array}{l} \text{(interferencia} \\ \text{destructiva,} \\ \text{fuentes en fase)} \end{array} \quad (35.2)$$

La diferencia de trayectorias en c en la figura 35.2a satisface la ecuación (35.2) con $m = -3$.

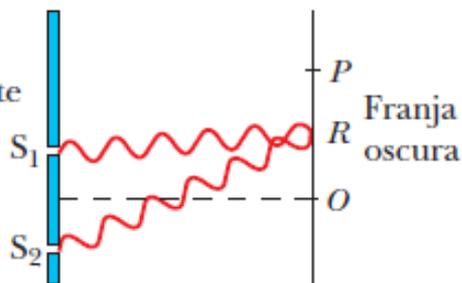
La figura 35.3 muestra la misma situación que la figura 35.2a, pero con curvas rojas que señalan todos los puntos en donde ocurre interferencia *constructiva*. En cada curva, la diferencia de trayectorias $r_2 - r_1$ es igual a la longitud de onda multiplicada por un entero m , como en la ecuación (35.1). Estas curvas se llaman **curvas antinodales**, y son la analogía directa de los *antinodos* de los patrones de ondas estacionarias descritos en los capítulos 15 y 16 y la sección 32.5. En una onda estacionaria formada por la interferencia entre ondas que se propagan en sentidos opuestos, los antinodos son puntos en los que la amplitud es máxima; del mismo modo, la amplitud de la onda en la situación ilustrada en la figura 35.3 es máxima a lo largo de las curvas antinodales. En esa figura no aparecen las **curvas nodales**, que son aquellas que denotan puntos en los que ocurre interferencia *destructiva*, de acuerdo con la ecuación (35.2); éstas son análogas a los *nodos* en un patrón de onda estacionaria. En la figura 35.3, entre dos curvas antinodales adyacentes se presenta una curva nodal; una de tales curvas, que corresponde a $r_2 - r_1 = -2.50\lambda$, pasa a través del punto c .



a)



b)

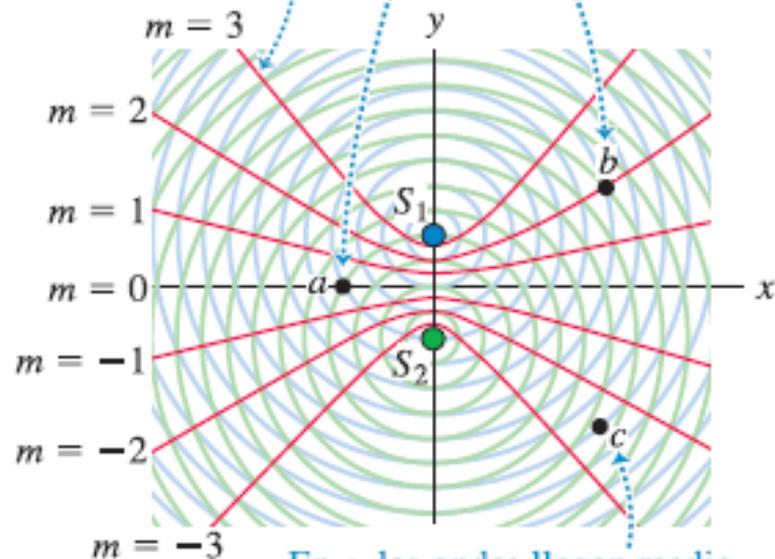


c)

35.3 Igual que la figura 35.2a, pero con curvas antinodales (curvas de amplitud máxima) en color rojo sobrepuestas. Todos los puntos en cada curva satisfacen la ecuación (35.1) con el valor de m que se indica. Las curvas nodales (no aparecen) se encuentran entre cada par adyacente de curvas antinodales.

Las curvas antinodales (en color rojo) marcan las posiciones donde las ondas procedentes de S_1 y S_2 interfieren constructivamente.

En a y b , las ondas llegan en fase e interfieren de manera constructiva.



En c , las ondas llegan medio ciclo fuera de fase e interfieren de manera destructiva.

m = número de longitudes de onda λ en que difieren las longitudes de las trayectorias a partir de S_1 y S_2 .

Para que se cumplan las ecuaciones (35.1) y (35.2), las dos fuentes deben tener la misma longitud de onda y *siempre* deben estar en fase. Estas condiciones son fáciles de satisfacer para las ondas sonoras (véase el ejemplo 16.15 en la sección 16.6). Pero con las ondas *luminosas* no hay forma práctica de lograr una relación de fase constante (coherencia) con dos fuentes independientes. Esto se debe al modo en que se emite la luz. En las fuentes de luz ordinaria, los átomos ganan exceso de energía por la agitación térmica o por el impacto con electrones acelerados. Un átomo “excitado” de ese modo comienza a irradiar energía y continúa así hasta que haya perdido toda la energía posible, por lo común en un tiempo del orden de 10^{-8} s. Los numerosos átomos en una fuente irradian, por lo general, en una relación de fase no sincronizada y aleatoria, y la luz que se emite desde *dos* de tales fuentes no tiene relación de fase definida.

Sin embargo, la luz procedente de una sola fuente se divide de manera que partes de ella emerjan de dos o más regiones del espacio para formar dos o más *fuentes secundarias*. Entonces, cualquier cambio de fase aleatorio en la fuente afecta a estas fuentes secundarias por igual y no cambia su fase *relativa*.

La característica distintiva de la luz de un *láser* es que la emisión de luz de muchos átomos está sincronizada en cuanto a frecuencia y fase. Como resultado, los cambios de fase aleatorios que mencionamos antes ocurren con frecuencia mucho menor. Las relaciones de fase definidas se preservan a lo largo de longitudes proporcionalmente mucho mayores del haz, y la luz láser es bastante más coherente que la luz ordinaria.

Interferencia de la luz procedente de dos fuentes

El patrón de interferencia producido por dos fuentes coherentes de ondas de *agua* de la misma longitud de onda se aprecia fácilmente en un tanque de olas con una capa de agua poco profunda (figura 35.4). Este patrón no resulta visible de manera directa cuando la interferencia ocurre entre ondas de *luz*, ya que no es posible ver la luz que viaja en un medio uniforme. (Un rayo de luz del atardecer que entra a una habitación se hace visible gracias a la dispersión que generan las partículas de polvo en el aire.)

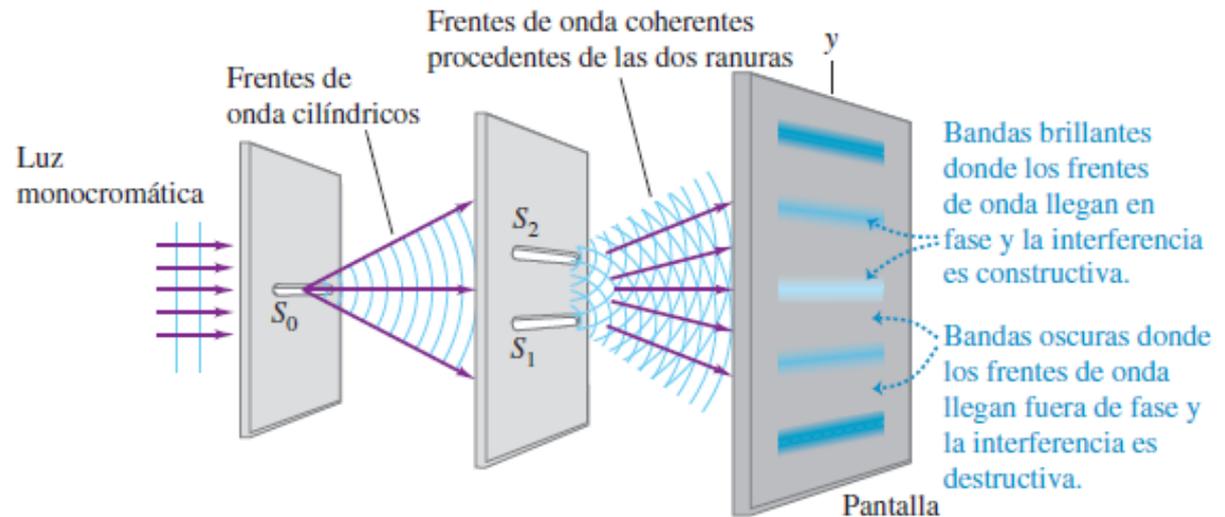
35.4 Los conceptos de interferencia constructiva y destructiva se aplican tanto a estas ondas en el agua como a las ondas luminosas y sonoras.



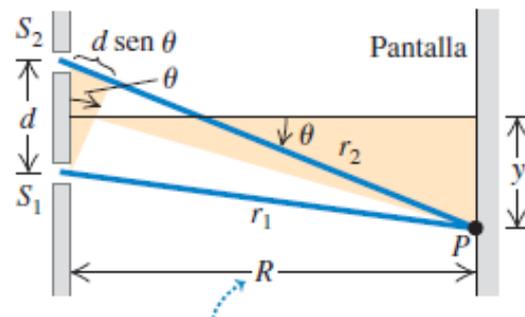
Uno de los primeros experimentos cuantitativos encaminados a poner de manifiesto la interferencia de la luz de dos fuentes estuvo a cargo del científico inglés Thomas Young en 1800. En este capítulo y otros posteriores haremos referencia varias veces a ese experimento, así que es importante entenderlo con detalle. En la figura 35.5a se muestra en perspectiva el aparato de Young. Una fuente (no se ilustra) emite luz monocromática; sin embargo, esta luz no es apropiada para usarla en un experimento de interferencia porque las emisiones de las diferentes partes de una fuente ordinaria no están sincronizadas. Para remediar esto, se dirige la luz a una pantalla con una ranura angosta S_0 , con ancho aproximado de $1 \mu\text{m}$. La luz que sale de la ranura proviene sólo de una pequeña región de la fuente luminosa, de manera que la ranura S_0 se comporta de manera muy parecida a la fuente idealizada que se ilustra en la figura 35.1. (En versiones modernas del experimento se utiliza un láser como fuente de luz coherente, por lo que no se necesita la ranura S_0 .) La luz que emana de S_0 ilumina una pantalla con otras dos ranuras S_1 y S_2 , cada una con ancho aproximado de $1 \mu\text{m}$ y separadas por una distancia de algunas decenas o centenas de micrómetros. A partir de S_0 se propagan frentes de onda cilíndricos que llegan a S_1 y S_2 *en fase* porque recorren distancias iguales desde S_0 . Por lo tanto, las ondas que *emergen* de las ranuras S_1 y S_2 siempre están en fase, por lo que S_1 y S_2 son fuentes *coherentes*. La interferencia de las ondas de S_1 y S_2 genera un patrón en el espacio como el que aparece a la derecha de las fuentes en las figuras 35.2a y 35.3.

35.5 a) Experimento de Young para demostrar la interferencia de la luz que pasa por dos ranuras. En la pantalla aparece un patrón de áreas brillantes y oscuras (véase la figura 35.6). **b)** Análisis geométrico del experimento de Young. Para el caso que se ilustra, $r_2 > r_1$ y tanto y como θ son positivos. Si el punto P está en el otro lado del centro de la pantalla, $r_2 < r_1$ y tanto y como θ son negativos. **c)** Geometría aproximada cuando la distancia R a la pantalla es mucho mayor que la distancia d entre las ranuras.

a) Interferencia de las ondas de luz que pasan a través de dos ranuras

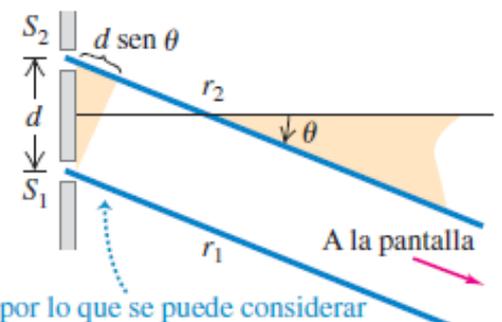


b) Geometría real (vista lateral)



En situaciones reales, la distancia R a la pantalla, por lo general, es mucho mayor que la distancia d entre las ranuras ...

c) Geometría aproximada



... por lo que se puede considerar que los rayos son paralelos; en tal caso, la diferencia en la longitud de sus trayectorias es simplemente $r_2 - r_1 = d \sin \theta$.

Otra Ilustración

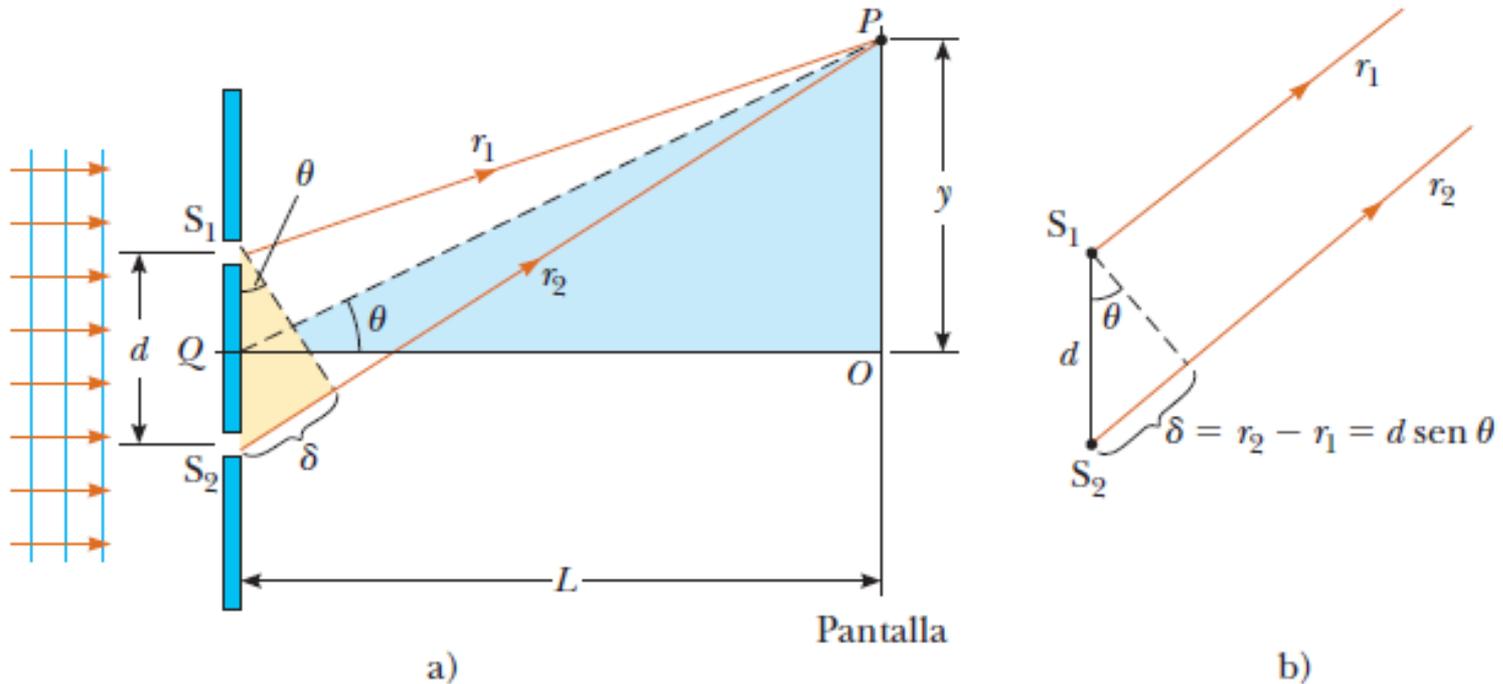


Figura 37.5 a) Construcción geométrica para describir el experimento de doble ranura de Young (que no está a escala). b) Cuando supone que r_1 es paralelo a r_2 , la diferencia de trayectoria entre los dos rayos es $r_2 - r_1 = d \sin \theta$. Para que esta aproximación sea válida, es esencial que $L \gg d$.

$$\tan \theta = \frac{y}{L} \longrightarrow y_{\text{brillante}} = L \left(\frac{m\lambda}{d} \right) \quad (\text{ángulos pequeños})$$

Para visualizar el patrón de interferencia, se coloca una pantalla de manera que la luz procedente de S_1 y S_2 incida sobre ella (figura 35.5b). La pantalla se iluminará con intensidad máxima en los puntos P en los que las ondas luminosas procedentes de las ranuras interfieren constructivamente, y será más oscura en los puntos donde la interferencia es destructiva.

Para simplificar el análisis del experimento de Young, suponemos que la distancia R de las ranuras a la pantalla es tan grande en comparación con la distancia d entre las ranuras, que las líneas de S_1 y S_2 a P son casi paralelas, como se aprecia en la figura 35.5c. Por lo general, éste es el caso para experimentos con luz; es común que la separación entre las ranuras sea de unos cuantos milímetros, mientras que la pantalla está a un metro o más. Entonces, la diferencia en la longitud de las trayectorias está dada por

$$r_2 - r_1 = d \sin \theta \quad (35.3)$$

donde θ es el ángulo entre una línea de las ranuras a la pantalla (en color azul, en la figura 35.5c) y la normal al plano de las ranuras (se ilustra con una línea delgada de color negro).

Interferencia constructiva y destructiva con dos ranuras

En la sección 35.1 vimos que la interferencia constructiva (refuerzo) ocurre en aquellos puntos donde la diferencia de las trayectorias es un número entero de longitudes de onda, $m\lambda$, donde $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$. Por lo tanto, las regiones brillantes en la pantalla de la figura 35.5 se presentan en ángulos θ en los que

$$d \sin \theta = m\lambda \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad \text{(interferencia constructiva, dos ranuras)} \quad (35.4)$$

De manera similar, ocurre la interferencia destructiva (cancelación) que forma las regiones oscuras en la pantalla en los puntos para los que la diferencia de las trayectorias es la mitad de un número entero de longitudes de onda, $(m + \frac{1}{2})\lambda$:

$$d \sin \theta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad \text{(interferencia destructiva, dos ranuras)} \quad (35.5)$$

Así, el patrón en la pantalla de las figuras 35.5a y 35.5b es una sucesión de bandas brillantes y oscuras, o **franjas de interferencia**, paralelas a las ranuras S_1 y S_2 . En la figura 35.6 se muestra una fotografía de ese patrón. El centro del patrón es una banda brillante que corresponde a $m = 0$ en la ecuación (35.4); este punto de la pantalla es equidistante a las dos ranuras.

Es posible obtener una expresión para las posiciones de los centros de las bandas brillantes en la pantalla. En la figura 35.5b, y está medida desde el centro del patrón y corresponde a la distancia desde el centro de la figura 35.6. Sea y_m la distancia entre el centro del patrón ($\theta = 0$) y el centro de la m -ésima banda brillante. Sea θ_m el valor correspondiente de θ ; por lo tanto,

$$y_m = R \tan \theta_m$$

En experimentos como éste, las distancias y_m a menudo son mucho más pequeñas que la distancia R entre las ranuras y la pantalla. Como θ_m es muy pequeño, $\tan \theta_m$ es casi igual a $\sin \theta_m$, y

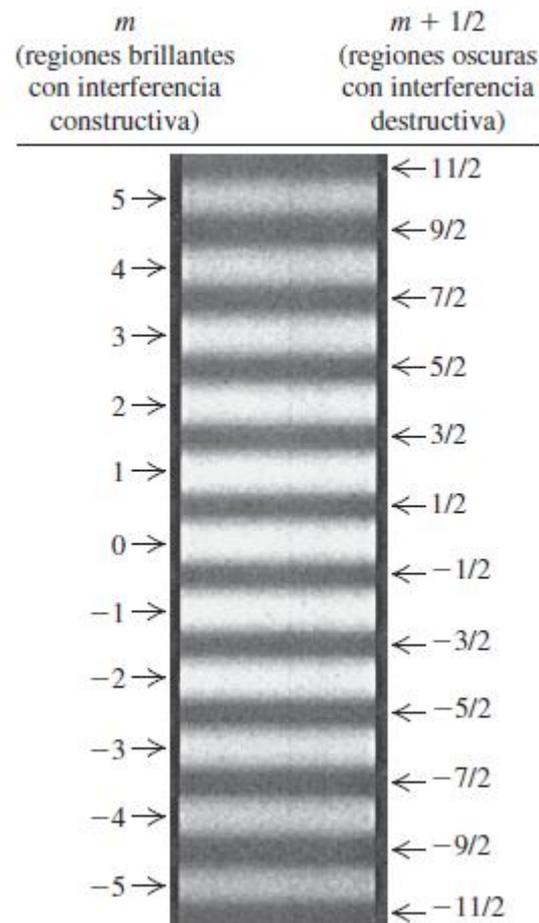
$$y_m = R \sin \theta_m$$

Al combinar esto con la ecuación (35.4) se encuentra que *solamente para ángulos pequeños*,

$$y_m = R \frac{m\lambda}{d} \quad (\text{interferencia constructiva en el experimento de Young}) \quad (35.6)$$

Es posible medir R y d , así como las posiciones y_m de las franjas brillantes, por lo que este experimento permite una medición directa de la longitud de onda λ . El experimento de Young fue, de hecho, la primera medición directa de las longitudes de onda de la luz.

35.6 Fotografía de las franjas de interferencia que se producen sobre la pantalla del experimento de Young de la doble ranura.



La distancia entre bandas brillantes adyacentes en el patrón es *inversamente* proporcional a la distancia d entre las ranuras. Cuanto más cerca estén las ranuras, más disperso será el patrón. Cuando las ranuras están muy separadas, las bandas del patrón están más próximas unas de otras.

Aunque hemos descrito el experimento realizado por Young con luz visible, los resultados dados en las ecuaciones (35.4) y (35.5) son válidos para *cualquier* tipo de onda, siempre y cuando la onda resultante de las dos fuentes coherentes se detecte en un punto que esté muy alejado en comparación con la separación d .

Ejemplo 35.1 Interferencia con dos ranuras

En un experimento de interferencia con dos ranuras, éstas se encuentran separadas por una distancia de 0.200 mm, y la pantalla está a una distancia de 1.00 m. Se observa que la tercera franja brillante (sin contar la franja brillante central frente a las ranuras) está desplazada 9.49 mm de la franja central (figura 35.7). Calcule la longitud de onda de la luz utilizada.

SOLUCIÓN

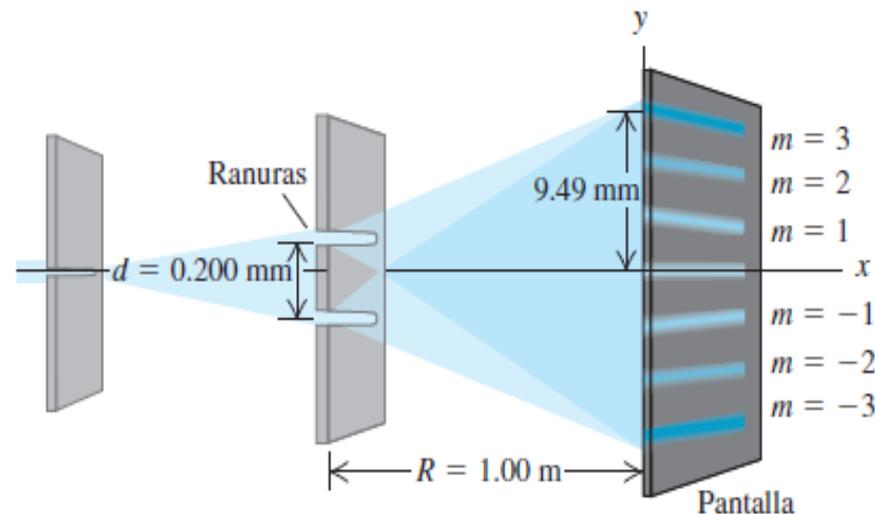
IDENTIFICAR: Este problema pide que se calcule la longitud de onda λ a partir de las dimensiones $d = 0.200$ mm (separación entre las ranuras), $R = 1.00$ m (distancia de las ranuras a la pantalla) y $y_m = 9.49$ mm (distancia de la tercera franja brillante a partir del centro del patrón).

PLANTEAR: La tercera franja brillante corresponde a $m = 3$ en las ecuaciones (35.4) y (35.6), así como a la franja brillante indicada con $m = 3$ en la figura 35.6. Para determinar el valor de la variable buscada λ , podemos utilizar la ecuación (35.6) puesto que $R = 1.00$ m es mucho mayor que $d = 0.200$ mm o $y_3 = 9.49$ mm.

EJECUTAR: Al despejar λ en la ecuación (35.6) se obtiene

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{y_m d}{mR} = \frac{(9.49 \times 10^{-3} \text{ m})(0.200 \times 10^{-3} \text{ m})}{(3)(1.00 \text{ m})} \\ &= 633 \times 10^{-9} \text{ m} = 633 \text{ nm}\end{aligned}$$

35.7 Medición de la longitud de onda de la luz a partir de un experimento con dos ranuras.



EVALUAR: Esta franja brillante también podría corresponder a $m = -3$. ¿Puede usted demostrar que esto da el mismo resultado para λ ?

La intensidad en los patrones de interferencia

Para calcular la intensidad supondremos que las dos funciones sinusoidales (correspondientes a ondas de las dos fuentes) tienen igual amplitud E y que los campos \vec{E} se encuentran a lo largo de la misma línea (tienen la misma polarización). Esto supone que las fuentes son idénticas e ignora la pequeña diferencia de amplitud causada por la diferencia de las longitudes de las trayectorias (la amplitud disminuye al aumentar la distancia desde la fuente). De acuerdo la ecuación (32.29), cada fuente por sí misma daría una intensidad $\frac{1}{2}\epsilon_0 c E^2$ en el punto P . Si las dos fuentes están en fase, entonces las ondas que llegan a P difieren en fase en una cantidad proporcional a la diferencia de las longitudes de sus trayectorias, $(r_2 - r_1)$. Si el ángulo de fase entre estas ondas que llegan es ϕ , entonces se utilizan las siguientes expresiones para los dos campos eléctricos superpuestos en P :

$$E_1(t) = E \cos(\omega t + \phi)$$

$$E_2(t) = E \cos \omega t$$

A continuación se describe el programa que efectuaremos. La superposición de los dos campos en P es una función sinusoidal con cierta amplitud E_p que depende de E y de la diferencia de fase ϕ . Primero trabajaremos en el cálculo de la amplitud E_p si E y ϕ son conocidos. Después encontraremos la intensidad I de la onda resultante, que es proporcional a E_p^2 . Por último, relacionaremos la diferencia de fase ϕ con la diferencia de trayectorias, que está determinada por la geometría de la situación.

Amplitud en la interferencia de dos fuentes

En la figura 35.9, E_1 es la componente horizontal del fasor que representa la onda proveniente de la fuente S_1 , y E_2 es la componente horizontal del fasor para la onda procedente de S_2 . Como se observa en el diagrama, ambos fasores tienen la misma magnitud E , pero E_1 está un ángulo ϕ adelante de E_2 en términos de fase. Los dos fasores giran en sentido antihorario con rapidez angular constante ω , y la suma de las proyecciones en el eje horizontal en cualquier momento da el valor instantáneo del campo E total en el punto P . Así, la amplitud E_p de la onda sinusoidal resultante en P es la magnitud del fasor rojo oscuro en el diagrama (indicado con E_p); éste es la *suma vectorial* de los otros dos fasores. Para encontrar E_p se utiliza la ley de los cosenos y la identidad trigonométrica $\cos(\pi - \phi) = -\cos \phi$.

$$\begin{aligned} E_p^2 &= E^2 + E^2 - 2E^2 \cos(\pi - \phi) \\ &= E^2 + E^2 + 2E^2 \cos \phi \end{aligned}$$

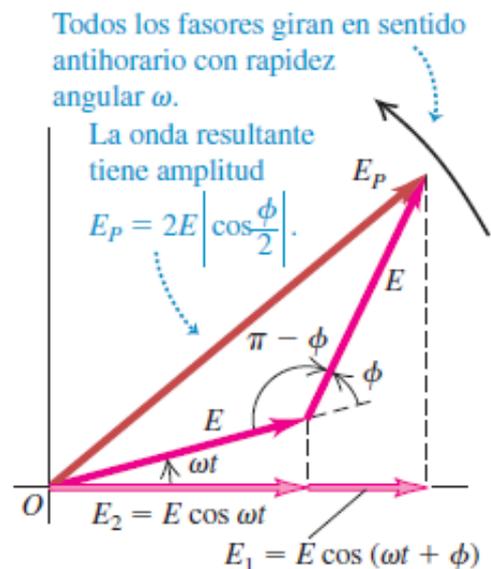
De esta forma, empleando la identidad $1 + \cos \phi = 2 \cos^2(\phi/2)$, se obtiene

$$E_p^2 = 2E^2(1 + \cos \phi) = 4E^2 \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right)$$

$$E_p = 2E \left| \cos \frac{\phi}{2} \right| \quad (\text{amplitud en la interferencia con dos fuentes}) \quad (35.7)$$

Este resultado también se puede obtener algebraicamente sin el empleo de fasores (véase el problema 35.48).

35.9 Diagrama del fasor para la superposición en un punto P de dos ondas de igual amplitud E , con diferencia de fase ϕ .



Intensidad en la interferencia de dos fuentes

Para obtener la intensidad I en el punto P , recordemos de la sección 32.4 que I es igual a la magnitud media del vector de Poynting, S_{med} . En el caso de una onda sinusoidal con amplitud de campo eléctrico E_p , esta magnitud está dada por la ecuación (32.9) con E_p en vez de $E_{\text{máx}}$. Así, podemos expresar la intensidad en cualquiera de las formas equivalentes que siguen:

$$I = S_{\text{med}} = \frac{E_p^2}{2\mu_0 c} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_p^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_p^2 \quad (35.8)$$

El contenido esencial de estas expresiones es que I es proporcional a E_p^2 . Cuando se sustituye la ecuación (35.7) en la última expresión en la ecuación (35.8), se obtiene

$$I = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_p^2 = 2\epsilon_0 c E^2 \cos^2 \frac{\phi}{2} \quad (35.9)$$

En particular, la intensidad *máxima* I_0 , que se presenta en los puntos donde la diferencia de fase es igual a cero ($\phi = 0$), es

$$I_0 = 2\epsilon_0 c E^2$$

Advierta que la intensidad máxima I_0 es el *cuádruple* (no el doble) de la intensidad $\frac{1}{2}\epsilon_0 c E^2$ desde cada fuente individual.

Al sustituir la expresión de I_0 en la ecuación (35.9) se puede expresar la intensidad I en cualquier punto de manera muy simple en términos de la intensidad máxima I_0 :

$$I = I_0 \cos^2 \frac{\phi}{2} \quad (\text{intensidad en la interferencia de dos fuentes}) \quad (35.10)$$

Para algunos ángulos de fase ϕ , la intensidad es I_0 , que es cuatro veces más grande que para una fuente individual de onda, pero para otros ángulos de fase la intensidad es igual a cero. Si promediamos la ecuación (35.10) con respecto a todas las posibles diferencias de fase, el resultado es $I_0/2 = \epsilon_0 c E^2$ [el promedio de $\cos^2(\phi/2)$ es $\frac{1}{2}$]. Esto es el doble de la intensidad de cada fuente individual, como era de esperarse. La salida total de energía de las dos fuentes no se ve alterada por los efectos de la interferencia, pero la energía se redistribuye (como se dijo en la sección 35.1).

Diferencia de fase y diferencia de trayectoria

Nuestra siguiente tarea es determinar cómo se relaciona la diferencia de fase ϕ entre los dos campos en el punto P con la geometría de la situación. Sabemos que ϕ es proporcional a la diferencia de la longitud de la trayectoria desde las dos fuentes al punto P . Cuando la diferencia de trayectoria es de una longitud de onda, la diferencia de fase es de un ciclo, y $\phi = 2\pi \text{ rad} = 360^\circ$. Cuando la diferencia de fase es $\lambda/2$, $\phi = \pi \text{ rad} = 180^\circ$, y así sucesivamente. Es decir, la razón de la diferencia de fase ϕ con respecto a 2π es igual a la razón de la diferencia de trayectorias $r_2 - r_1$ con respecto a λ :

$$\frac{\phi}{2\pi} = \frac{r_2 - r_1}{\lambda}$$

Así, una diferencia de trayectoria ($r_2 - r_1$) ocasiona una diferencia de fase dada por

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) = k(r_2 - r_1) \quad \text{(diferencia de fase relacionada con la diferencia de trayectoria)} \quad (35.11)$$

donde $k = 2\pi/\lambda$ es el *número de onda* que presentamos en la sección 15.3.

Si el material en el espacio entre las fuentes y P es diferente de un vacío, en la ecuación (35.11) debemos usar la longitud de onda *en el material*. Si el material tiene el índice de refracción n , entonces

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n} \quad \text{y} \quad k = nk_0 \quad (35.12)$$

donde λ_0 y k_0 son la longitud de onda y el número de onda, respectivamente, en el vacío.

Por último, si el punto P está lejos de las fuentes en comparación con su separación d , la diferencia de trayectorias está dada por la ecuación (35.3):

$$r_2 - r_1 = d \operatorname{sen} \theta$$

Al combinar esto con la ecuación (35.11), se obtiene

$$\phi = k(r_2 - r_1) = kd \operatorname{sen} \theta = \frac{2\pi d}{\lambda} \operatorname{sen} \theta \quad (35.13)$$

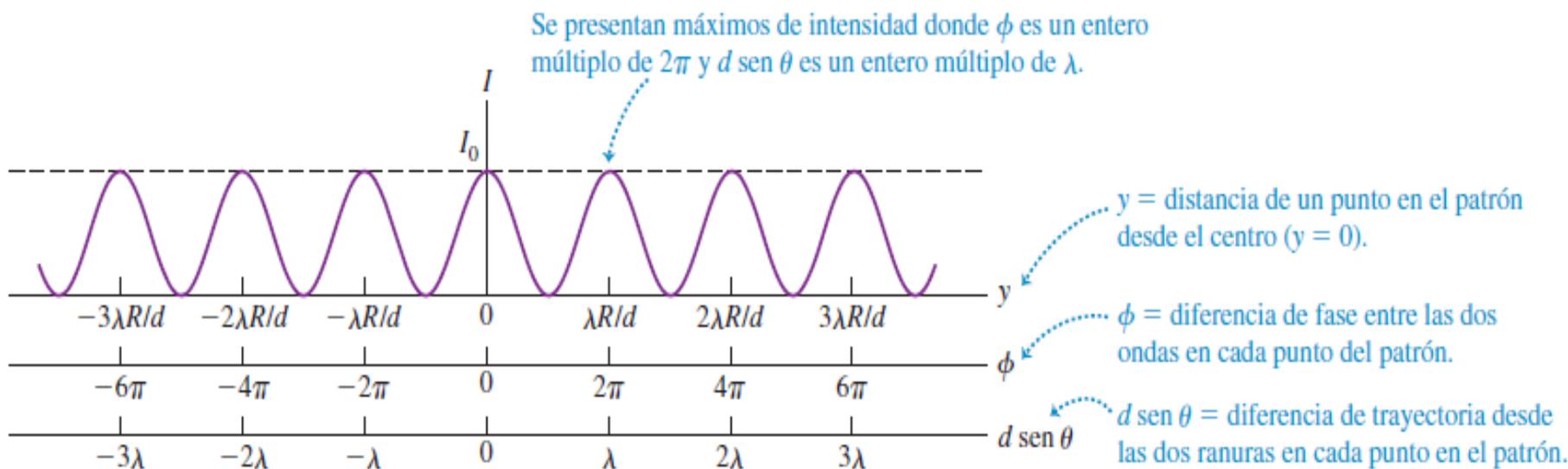
Cuando se sustituye esto en la ecuación (35.10), se obtiene

$$I = I_0 \cos^2 \left(\frac{1}{2} kd \operatorname{sen} \theta \right) = I_0 \cos^2 \left(\frac{\pi d}{\lambda} \operatorname{sen} \theta \right) \quad \text{(intensidad lejos de dos fuentes)} \quad (35.14)$$

Las direcciones de *máxima* intensidad se presentan cuando el coseno tiene los valores ± 1 , es decir, cuando

$$\frac{\pi d}{\lambda} \operatorname{sen} \theta = m\pi \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

35.10 Distribución de la intensidad en el patrón de interferencia de dos ranuras idénticas.



o bien,

$$d \sin \theta = m\lambda$$

de acuerdo con la ecuación (35.4). Se deja como ejercicio para el lector la demostración de que también es posible obtener la ecuación (35.5) a partir de la (35.14) para las direcciones con intensidad igual a cero (véase el ejercicio 35.24).

Como se dijo en la sección 35.2, en experimentos con la luz se visualiza el patrón de interferencia debido a dos ranuras utilizando una pantalla colocada a una distancia R a partir de éstas. Las posiciones en la pantalla se describen con la coordenada y , y las de las franjas brillantes están dadas por la ecuación (35.6), donde lo común es que $y \ll R$. En este caso, $\sin \theta$ es aproximadamente igual a y/R , y se obtienen las siguientes expresiones para la intensidad en *cualquier* punto sobre la pantalla como función de y :

$$I = I_0 \cos^2\left(\frac{kdy}{2R}\right) = I_0 \cos^2\left(\frac{\pi dy}{\lambda R}\right) \quad \begin{array}{l} \text{(intensidad en la interferencia} \\ \text{de dos ranuras)} \end{array} \quad (35.15)$$

La figura 35.10 muestra la gráfica de la ecuación (35.15); esto se puede comparar con el patrón registrado por la fotografía de la figura 35.6. Todos los máximos en la figura 35.10 tienen la misma intensidad, mientras que los de la figura 35.6 se desvanecen conforme se alejan del centro. En el capítulo 36 exploraremos las razones para esta variación en la intensidad de los máximos.

Distribución de intensidad de la configuración de interferencia de doble ranura

Considérese las ondas a interferir dadas por:

$$E_1 = E_0 \text{sen } \omega t \quad \text{y} \quad E_2 = E_0 \text{sen}(\omega t + \phi)$$

Donde ϕ es la diferencia de fase

Aun cuando las ondas están en fase en las ranuras, *su diferencia de fase ϕ en P depende de la diferencia de trayectoria $\delta = r_2 - r_1 = d \text{sen } \theta$* . Una diferencia de trayectoria de λ (para interferencia constructiva) corresponde a una diferencia de fase de 2π rad. Una diferencia de trayectoria de δ es la misma fracción de λ que la diferencia de fase ϕ lo es de 2π . La expresión matemática es

$$\frac{\delta}{\lambda} = \frac{\phi}{2\pi}$$

que da

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \text{sen } \theta \quad (37.9)$$

Esta ecuación muestra cómo la diferencia de fase ϕ depende del ángulo θ en la figura 37.5.

Si usa el principio de superposición y ecuación 37.8, obtiene la siguiente expresión para magnitud del campo eléctrico resultante en el punto P :

$$E_P = E_1 + E_2 = E_0[\text{sen } \omega t + \text{sen}(\omega t + \phi)] \quad (37.10)$$

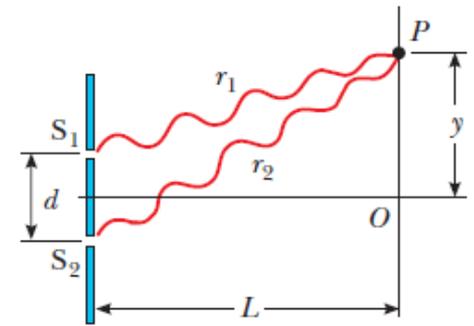


Figura 37.6 Construcción para analizar la configuración de interferencia de doble ranura. Una franja brillante, o intensidad máxima, se observa en O .

Para simplificar esta expresión, aplique la identidad trigonométrica

$$\text{sen } A + \text{sen } B = 2 \text{sen} \left(\frac{A + B}{2} \right) \cos \left(\frac{A - B}{2} \right)$$

Considerando $A = \omega t + \phi$ y $B = \omega t$, escriba la ecuación 37.10 en la forma

$$E_P = 2E_0 \cos \left(\frac{\phi}{2} \right) \text{sen} \left(\omega t + \frac{\phi}{2} \right) \quad (37.11)$$

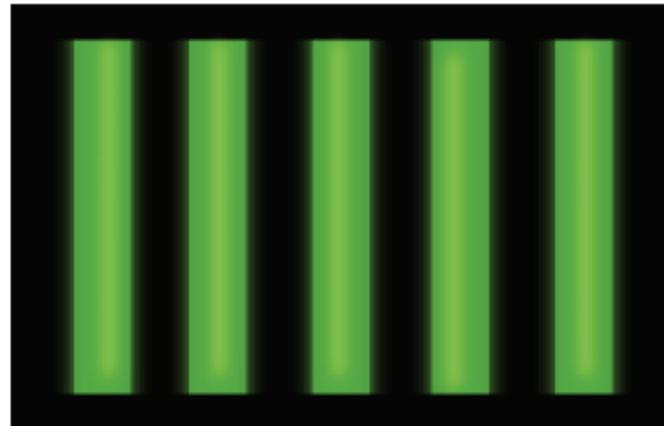
Este resultado indica que el campo eléctrico en el punto P tiene la misma frecuencia ω que la luz en las ranuras, pero que la amplitud del campo se multiplica por el factor $2 \cos(\phi/2)$. Para comprobar la consistencia de este resultado, observe que si $\phi = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$, la magnitud del campo eléctrico en el punto P es $2E_0$, lo que corresponde a la condición para una interferencia constructiva máxima. Estos valores de ϕ son consistentes con la ecuación 37.2 para la interferencia constructiva. Del mismo modo, si $\phi = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots$, la magnitud del campo eléctrico en el punto P es cero; consistente con la ecuación 37.3 para la interferencia destructiva total.

Por último, para obtener una expresión para la intensidad de luz en el punto P , recuerde de la sección 34.4 que *la intensidad de una onda es proporcional al cuadrado de la magnitud del campo eléctrico resultante en ese punto* (ecuación 34.24). Con la ecuación 37.11, por lo tanto, exprese la intensidad de luz en el punto P como

$$I \propto E_P^2 = 4E_0^2 \cos^2 \left(\frac{\phi}{2} \right) \text{sen}^2 \left(\omega t + \frac{\phi}{2} \right)$$

Casi todos los instrumentos que detectan luz miden la intensidad de luz promediada en el tiempo, y el valor promedio en el tiempo de $\sin^2(\omega t + \phi/2)$ en un ciclo es $\frac{1}{2}$. (Véase la figura 33.5.) Por lo tanto, el promedio de intensidad de luz en el punto P se escribe

$$I = I_{\text{máx}} \cos^2 \left(\frac{\phi}{2} \right) \quad (37.12)$$



M. Cagnet, M. Françon, J. C. Thierri,
Atlas of Optical Phenomena, Berlin,
Springer-Verlag, 1962.

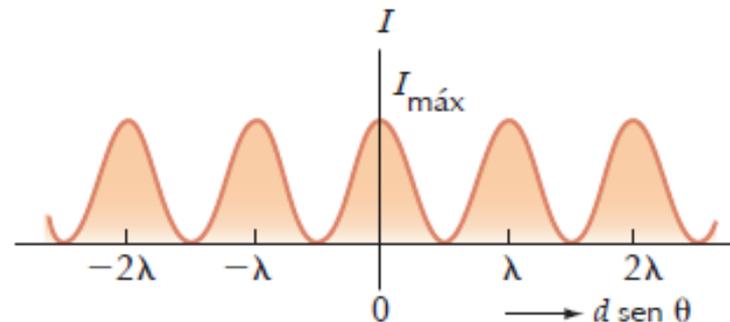


Figura 37.7 Intensidad de luz en función $d \sin \theta$ para una configuración de interferencia de doble ranura cuando la pantalla está lejos de las dos ranuras ($L \gg d$).

donde $I_{\text{máx}}$ es la intensidad máxima en la pantalla y la expresión representa el tiempo promedio. Al sustituir el valor de ϕ , conocido por la ecuación 37.9 en esta expresión, encuentre que

$$I = I_{\text{máx}} \cos^2 \left(\frac{\pi d \text{sen } \theta}{\lambda} \right) \quad (37.13)$$

Alternativamente, porque $\text{sen } \theta \approx y/L$ para pequeños valores de θ en la figura 37.5, puede escribir la ecuación 37.13 en la forma

$$I = I_{\text{máx}} \cos^2 \left(\frac{\pi d}{\lambda L} y \right) \quad (37.14)$$

La interferencia constructiva, que produce intensidad de luz máxima, se presenta cuando la cantidad $\pi dy/\lambda L$ es una integral múltiple de π , correspondiente a $y = (\lambda L/d) m$. Esto es consistente con la ecuación 37.7.

En la figura 37.7 se presenta una gráfica de intensidad de luz con $d \text{sen } \theta$. La configuración de interferencia está formada por franjas igualmente espaciadas de la misma intensidad. Sin embargo, recuerde, que este resultado es válido sólo si la distancia L de la ranura a la pantalla es mucho mayor que la separación de ranuras, y sólo para pequeños valores de θ .

La figura 37.8 muestra gráficas similares de intensidad luminosa con $d \sin \theta$ para luz que pasa a través de varias rendijas. Para más de dos rendijas, la configuración contiene máximos primario y secundario. Para tres rendijas, note que los máximos primarios son nueve veces más intensos que los máximos secundarios observados por la altura de la curva, porque la intensidad varía como E^2 . Para N rendijas, la intensidad de los máximos primarios es N^2 veces mayor que la debida a una sola rendija. Conforme el número de rendijas aumenta, los máximos primarios aumentan en intensidad y se vuelven más estrechos, mientras que los máximos secundarios disminuyen en intensidad en relación con los máximos primarios. La figura 37.8 también muestra que, conforme aumenta el número de rendijas, también aumenta el número de máximos secundarios. De hecho, el número de máximos secundarios siempre es $N - 2$, donde N es el número de rendijas. En la sección 38.4 se investigará la configuración para un número muy grande de rendijas, en un dispositivo llamado *rejilla de difracción*.

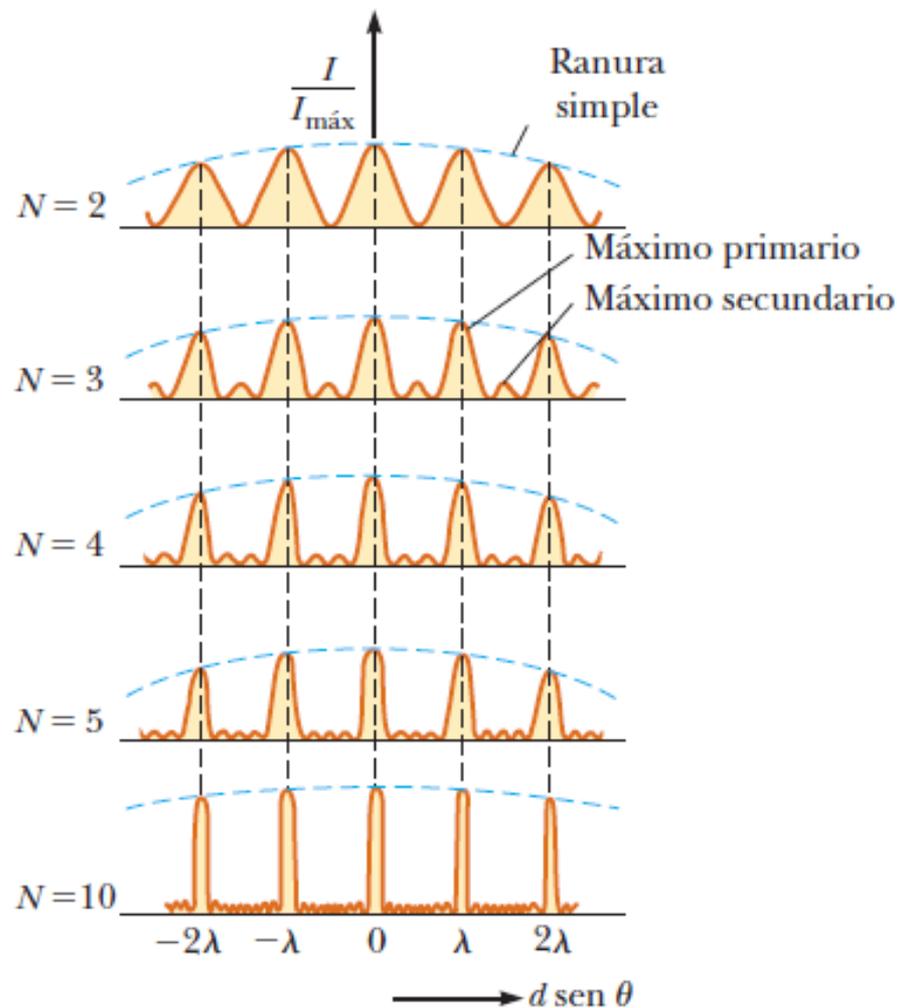


Figura 37.8 Configuraciones de interferencia de varias ranuras. Cuando aumenta N , el número de ranuras, los máximos primarios (los picos más altos de cada gráfica) se vuelven más angostos pero permanecen fijos en posición y aumenta el número de máximos secundarios. Para cualquier valor de N , la disminución en intensidad en máximos a la izquierda y derecha del máximo central, indicada por los arcos azules de líneas discontinuas, se debe a *patrones de difracción* de las ranuras individuales, que se estudian en el capítulo 38.