

## Az elliptikus hengerre írt csavarvonalról

Erről viszonylag ritkán olvashatunk, ezért most erről lesz szó.

Az [ 1 ] munkában találtuk az alábbi részt – 1. ábra.

### 6. Felületek paramétervonalai és érintősíkjai

1. Határozzuk meg, hogy az alábbi parametrizált felületek paramétervonalai milyen parametrizált görbék!

(a)  $r(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)$ ,  $u, v \in \mathbb{R}$

(b)  $r(u, v) = (u + v, u - v, uv)$ ,  $u, v \in \mathbb{R}$

(c)  $r(u, v) = (\cos u \cosh v, \sin u \sinh v, u)$ ,  $u, v \in \mathbb{R}$

### Végeredmények:

1. (a) 1. paramétervonalak: egyenesek, 2. paramétervonalak: hengeres csavarvonalak – a felület csavarfelület; (b) 1. és 2. p.m.v.: egyenesek – a felület nyeregfelület; (c) 1. p.m.v.: cos-függvény, ha a második paraméter 0, egyébként elliptikus hengerre írt csavarvonal, 2. p.m.v.: hiperbola, ha az 1. paraméter nem  $k \cdot \frac{\pi}{2}$  alakú;  $(0, \pm \text{sh}t, u_0)$ , ha  $u_0 k \cdot \frac{\pi}{2}$  alakú és  $k$  páratlan;  $(\pm \text{cht}, 0, u_0)$ , ha  $u_0 k \cdot \frac{\pi}{2}$  alakú és  $k$  páros,  $k \in \mathbb{Z}$ .

### 1. ábra

Itt a (c) feladat és annak megoldása érdekes számunkra: ha a második paraméter pozitív állandó, akkor a vektor - függvény *egyfajta* elliptikus hengerre írt csavarvonalat ír le.

Ennek egyenletrendszere a saját jelöléseinkkel, ahol  $a$  és  $b$  az ellipszis féltengelyei:

$$x(\varphi) = a \cdot \cos \varphi, \quad (1 / 1)$$

$$y(\varphi) = b \cdot \sin \varphi, \quad (1 / 2)$$

$$z(\varphi) = k \cdot \varphi. \quad (1 / 3)$$

A mozgástani leírása ennek a térgörbének úgy adódik, hogy a mozgó pont  $xy$  síkra vett vetületi mozgása ellipszis menti, míg a  $z$  tengely menti mozgása egyenletes. Ugyanis egy állandó nagyságú és irányú  $\omega = \omega_z$  szögsebesség - vektorral és  $v = v_z$  sebességvektorral, valamint a

$$\varphi(t) = \omega \cdot t, \quad (2)$$

$$z(t) = v \cdot t \quad (3)$$

összefüggésekkel, továbbá (1), (2) és (3) - mal:

$$x(t) = a \cdot \cos(\omega \cdot t), \quad (4 / 1)$$

$$y(t) = b \cdot \sin(\omega \cdot t), \quad (4 / 2)$$

$$z(t) = k \cdot (\omega \cdot t). \quad (4 / 3)$$

Most (3) és (4 / 3) - mal:

$$v \cdot t = k \cdot \omega \cdot t \rightarrow k = \frac{v}{\omega}. \quad (5)$$

Ezek szerint adott  $a, b, v, \omega$  esetén a mozgás  $t$  idővel történő leírása így néz ki:

$$x(t) = a \cdot \cos(\omega \cdot t), \quad (6 / 1)$$

$$y(t) = b \cdot \sin(\omega \cdot t), \quad (6 / 2)$$

$$z(t) = v \cdot t . \quad (6/3)$$

Továbbá a mozgás  $\varphi$  elfordulási szöggel történő leírása így fest:

$$x(\varphi) = a \cdot \cos \varphi , \quad (7/1)$$

$$y(\varphi) = b \cdot \sin \varphi , \quad (7/2)$$

$$z(\varphi) = \frac{v}{\omega} \cdot \varphi . \quad (7/3)$$

Egy ilyen úton előállított térgörbe axonometrikus képét szemlélhetjük a 2. ábrán.

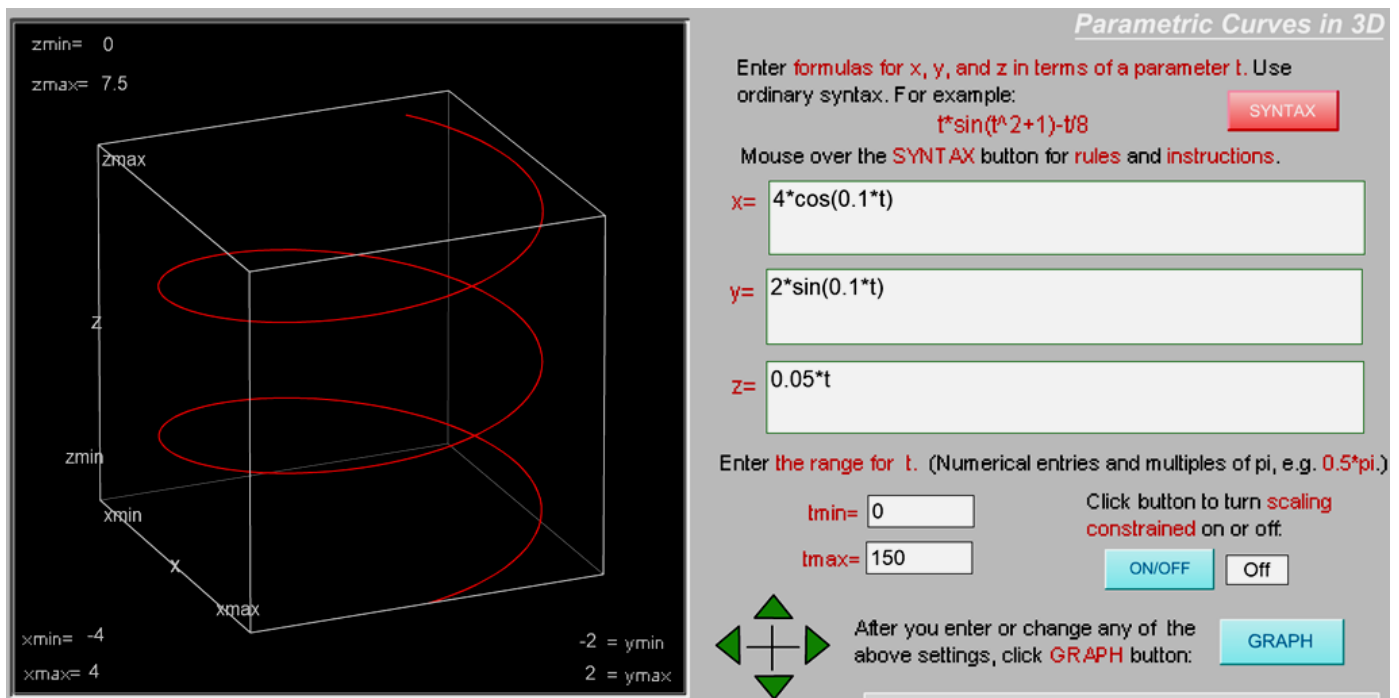
Adatok:  $a = 4 \text{ (m)}$ ,  $b = 2 \text{ (m)}$ ,  $\omega = 1/10 \text{ rad/s}$ ,  $v = 0,05 \text{ m/s}$ . (A)

Ekkor (6) és (A) szerint a térgörbe idő - paraméteres egyenletrendszere:

$$x(t) = 4 \cdot \cos(0,1 \cdot t) , \quad (8/1)$$

$$y(t) = 2 \cdot \sin(0,1 \cdot t) , \quad (8/2)$$

$$z(t) = 0,05 \cdot t . \quad (8/3)$$



2. ábra – forrása: [ 2 ]

A csavarmozgást végző pont sebességkomponensei (6) - ból:

$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -a \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t) , \quad (9/1)$$

$$v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt} = b \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t) , \quad (9/2)$$

$$v_z(t) = \frac{dz(t)}{dt} = v . \quad (9/3)$$

Az eredő sebesség időben változó nagysága:

$$V = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{a^2 \cdot \omega^2 \cdot \sin^2(\omega \cdot t) + b^2 \cdot \omega^2 \cdot \cos^2(\omega \cdot t) + v^2}, \text{ azaz:}$$

$$V(t) = \sqrt{a^2 \cdot \omega^2 \cdot \sin^2(\omega \cdot t) + b^2 \cdot \omega^2 \cdot \cos^2(\omega \cdot t) + v^2}. \quad (10)$$

A csavarvonal  $\alpha$  menetemelkedési szögére például:

$$\sin \alpha = \frac{v}{V}, \quad (11)$$

innen( 10 ) - zel is:

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{v}{V}\right) = \arcsin\left(\frac{v}{\sqrt{a^2 \cdot \omega^2 \cdot \sin^2(\omega \cdot t) + b^2 \cdot \omega^2 \cdot \cos^2(\omega \cdot t) + v^2}}\right) = \alpha(t), \quad (12)$$

vagyis a menetemelkedési szög sem állandó, hanem az idővel változó mennyiség.

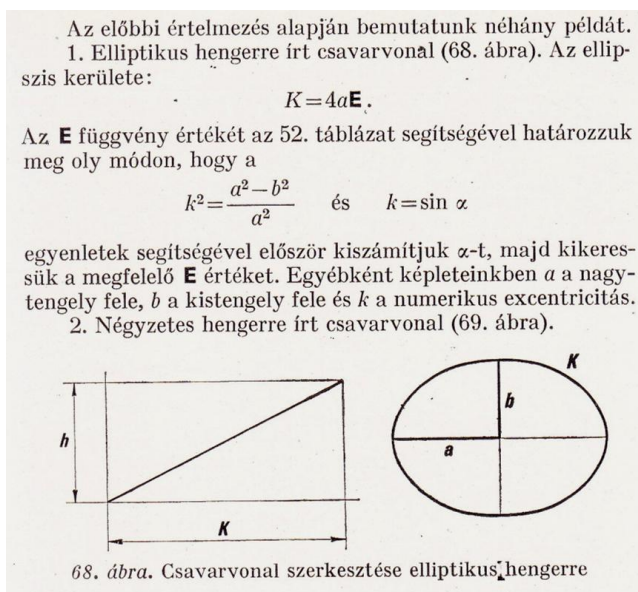
Ez azért van, mert ellipszis esetén  $a \neq b$ . Ha  $a = b = R$ , akkor az ellipszis körré fajul, és ( 10 ) és ( 11 ) így alakul:

$$V^*(t) = \sqrt{R^2 \cdot \omega^2 \cdot \sin^2(\omega \cdot t) + R^2 \cdot \omega^2 \cdot \cos^2(\omega \cdot t) + v^2} = \sqrt{R^2 \cdot \omega^2 + v^2} = \text{konst.}, \quad (13)$$

$$\alpha^*(t) = \arcsin\left(\frac{v}{\sqrt{R^2 \cdot \omega^2 \cdot \sin^2(\omega \cdot t) + R^2 \cdot \omega^2 \cdot \cos^2(\omega \cdot t) + v^2}}\right) = \arcsin\left(\frac{v}{\sqrt{R^2 \cdot \omega^2 + v^2}}\right) = \text{konst.} \quad (14)$$

Látjuk, hogy ugyanolyan mozgásparáméterek esetén a *közönséges csavarvonal* menti mozgás sebessége és menetemelkedési szöge is állandó marad, az egész mozgás során.

*Másfajta* elliptikus hengerre írt csavarvonalról olvashatunk [ 3 ] - ban – 3. ábra.



3. ábra – forrása: [ 3 ]

Itt az elliptikus henger ellipszis keresztmetszetét, valamint a ráírt csavarvonal kifejtett képét / egyenesét láthatjuk. Az ellipszis féltengelyei:  $a, b$ ; az ellipszis kerülete:  $K$ ; a csavarvonal menetmagassága:  $h$ , menetemelkedési szöge:  $\alpha$ .

Az ellipszis ismert paraméteres egyenletrendszere:

$$x(\varphi) = a \cdot \cos \varphi, \quad y(\varphi) = b \cdot \sin \varphi. \quad (15)$$

Az ellipszis ív - differenciálja:

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \sqrt{a^2 \cdot \sin^2 \varphi + b^2 \cdot \cos^2 \varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} dt; \quad (16)$$

Az ellipszis ívhossza:

$$s(\psi) = \int ds = \int_{\varphi=0}^{\varphi=\psi} \sqrt{a^2 \cdot \sin^2 \varphi + b^2 \cdot \cos^2 \varphi} d\varphi, \quad (17)$$

ahol a jelölésekkel megkülönböztettük a változót annak felső határától.

Az ellipszis kerülete a szimmetria miatt:

$$K = 4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \cdot \sin^2 \varphi + b^2 \cdot \cos^2 \varphi} d\varphi. \quad (18)$$

Átalakításokkal:

$$\begin{aligned} a^2 \cdot \sin^2 \varphi + b^2 \cdot \cos^2 \varphi &= a^2 \cdot (1 - \cos^2 \varphi) + b^2 \cdot \cos^2 \varphi = a^2 - \cos^2 \varphi \cdot (a^2 - b^2) = \\ &= a^2 \cdot \left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cdot \cos^2 \varphi\right) = a^2 \cdot (1 - e^2 \cdot \cos^2 \varphi), \quad \text{tehát:} \end{aligned}$$

$$a^2 \cdot \sin^2 \varphi + b^2 \cdot \cos^2 \varphi = a^2 \cdot (1 - e^2 \cdot \cos^2 \varphi), \quad (19)$$

ahol:

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2} < 1, \quad (20)$$

az excentricitás négyzete. Most (18) és (19) - cel:

$$K = 4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \cdot (1 - e^2 \cdot \cos^2 \varphi)} d\varphi = 4 \cdot a \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2 \cdot \cos^2 \varphi} d\varphi. \quad (21)$$

A (21) integrál zárt alakban nem fejezhető ki képlettel, így vagy közelítő képlettel dolgozunk, vagy numerikus integrálást végzünk, illetve így előállított táblázatot használunk.

A 3. ábra – ahol nincs minden jelölésünk feltüntetve – egyenesé alapján:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{z}{s} = \frac{h}{K} \rightarrow z = \frac{h}{K} \cdot s, \quad (22)$$

ahol  $z$  a csavarvonal egy pontjának „magassági” koordinátája.

Az elliptikus hengerre írt csavarvonal paraméteres egyenletrendszere ezzel:

$$x(t) = a \cdot \cos \varphi(t) = a \cdot \cos(\omega \cdot t), \quad (23 / 1)$$

$$y(t) = b \cdot \sin \varphi(t) = b \cdot \sin(\omega \cdot t), \quad (23 / 2)$$

$$z(t) = \frac{h}{K} \cdot s(\omega \cdot t) = \frac{h}{K} \cdot \omega \cdot \int_0^t \sqrt{a^2 \cdot \sin^2(\omega \cdot \tau) + b^2 \cdot \cos^2(\omega \cdot \tau)} d\tau. \quad (23 / 3)$$

A közöséges csavarvonal egyenletrendszere ebből előáll, ha

$$a^* = b^* = R, \quad K^* = 2 \cdot R \cdot \pi, \quad s^*(\varphi) = R \cdot \varphi, \quad (24)$$

mert (23) és (24) - gyel:

$$x^*(\varphi) = R \cdot \cos \varphi, \quad (25 / 1)$$

$$y^*(\varphi) = R \cdot \sin \varphi, \quad (25 / 2)$$

$$z^*(\varphi) = \frac{h}{2 \cdot R \cdot \pi} \cdot R \cdot \varphi = \frac{h}{2 \cdot \pi} \cdot \varphi. \quad (25 / 3)$$

Fentiek magyarázzák, miért nem látunk pontos ábrázolást e másfajta elliptikus csavarvonalról; ehhez ugyanis szükség van az ellipszis  $s(\psi)$  ívhosszára és  $K = s(\psi = 2\pi)$  területére is, melyben a  $\psi$  paraméter a (17) integrál felső határa. Minthogy a szokásos térgörbe - ábrázoló programok zárt alakú képleteket kérnek, így azok most nem használhatók. Nyilván lehet programot írni e feladat megoldására is.

E másfajta csavarvonalon mozgó pont pálya menti sebességének nagyságára:

$$\begin{aligned} V(t) &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \\ &= \sqrt{a^2 \cdot \omega^2 \cdot \sin^2(\omega \cdot t) + b^2 \cdot \omega^2 \cdot \cos^2(\omega \cdot t) + \left(\frac{h}{K}\right)^2 \cdot \left(\frac{ds}{dt}\right)^2}; \end{aligned} \quad (26)$$

most (16) és (26) - tal:

$$V(t) = \sqrt{a^2 \cdot \omega^2 \cdot \sin^2(\omega \cdot t) + b^2 \cdot \omega^2 \cdot \cos^2(\omega \cdot t) + \left(\frac{h}{K}\right)^2 \cdot \omega^2 \cdot [a^2 \cdot \sin^2(\omega \cdot t) + b^2 \cdot \cos^2(\omega \cdot t)]},$$

$$V(t) = \omega \cdot \sqrt{\left[1 + \left(\frac{h}{K}\right)^2\right] \cdot [a^2 \cdot \sin^2(\omega \cdot t) + b^2 \cdot \cos^2(\omega \cdot t)]}. \quad (27)$$

Majd a menetemelkedési szögére:

$$\alpha(t) = \arcsin\left(\frac{v_z}{V}\right) = \arcsin\left\{\frac{\omega \cdot \frac{h}{K} \cdot \sqrt{a^2 \cdot \sin^2(\omega \cdot t) + b^2 \cdot \cos^2(\omega \cdot t)}}{\omega \cdot \sqrt{\left[1 + \left(\frac{h}{K}\right)^2\right] \cdot [a^2 \cdot \sin^2(\omega \cdot t) + b^2 \cdot \cos^2(\omega \cdot t)]}}\right\};$$

egyszerűsítve:

$$\alpha(t) = \arcsin \left\{ \frac{\frac{h}{K}}{\sqrt{1 + \left(\frac{h}{K}\right)^2}} \right\} = \text{Konst.}, \quad (28)$$

vagy a

$$\sin \alpha = \frac{\text{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \alpha}} \quad (29)$$

azonosság felhasználásával, (28) és (29) - cel:

$$\text{tg} \alpha = \frac{h}{K} \rightarrow \alpha = \text{arctg} \left( \frac{h}{K} \right) = \text{Konst.}, \quad (30)$$

egyezésben (22) - vel, ahogyan az a 3. ábráról is leolvasható.

Látjuk, hogy e másfajta elliptikus hengerre írt csavarvonalon mozgó pont pálya menti sebességének nagysága változó, ámde a menetemelkedési szög nagysága már állandó.

Megjegyzések:

**M1.** Ezen feladat kapcsán is beleszaladtunk néhány furcsaságba. Az egyik az ellipszis kerületét leíró, (21) szerinti képlet:

$$K = 4 \cdot a \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2 \cdot \cos^2 \varphi} \, d\varphi = 4 \cdot a \cdot \mathbf{E}; \quad (21 / 1)$$

az itteni  $\mathbf{E}$  jelű integrál neve: *másodfajú teljes elliptikus integrál* – [ 4 ].

Arra lettünk figyelmesek, hogy erőltetik a négyzetgyök jele alatt a szinusz - függvényt. Ennek érdekében eltérnek a szokásos  $a \geq b$  felvételtől, illetve a szögváltozót nem az  $x$ , hanem az  $y$  tengelytől mérik. Ez az ellipszis kerületén nem változtat, viszont kényelmetlen kinyomozni a nem igazán természetes felvételek okait. Azért mi megtettük.

$\mathbf{E}$  - re [ 4 ] - ben is találunk táblázatokat.

**Egy példa:**  $a = 4 \text{ ( m )}$ ,  $b = 2 \text{ ( m )}$ .

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{4^2 - 2^2}{4^2} = \frac{3}{4} \rightarrow e = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,8660; \quad \text{segédparaméterrel:} \quad (a)$$

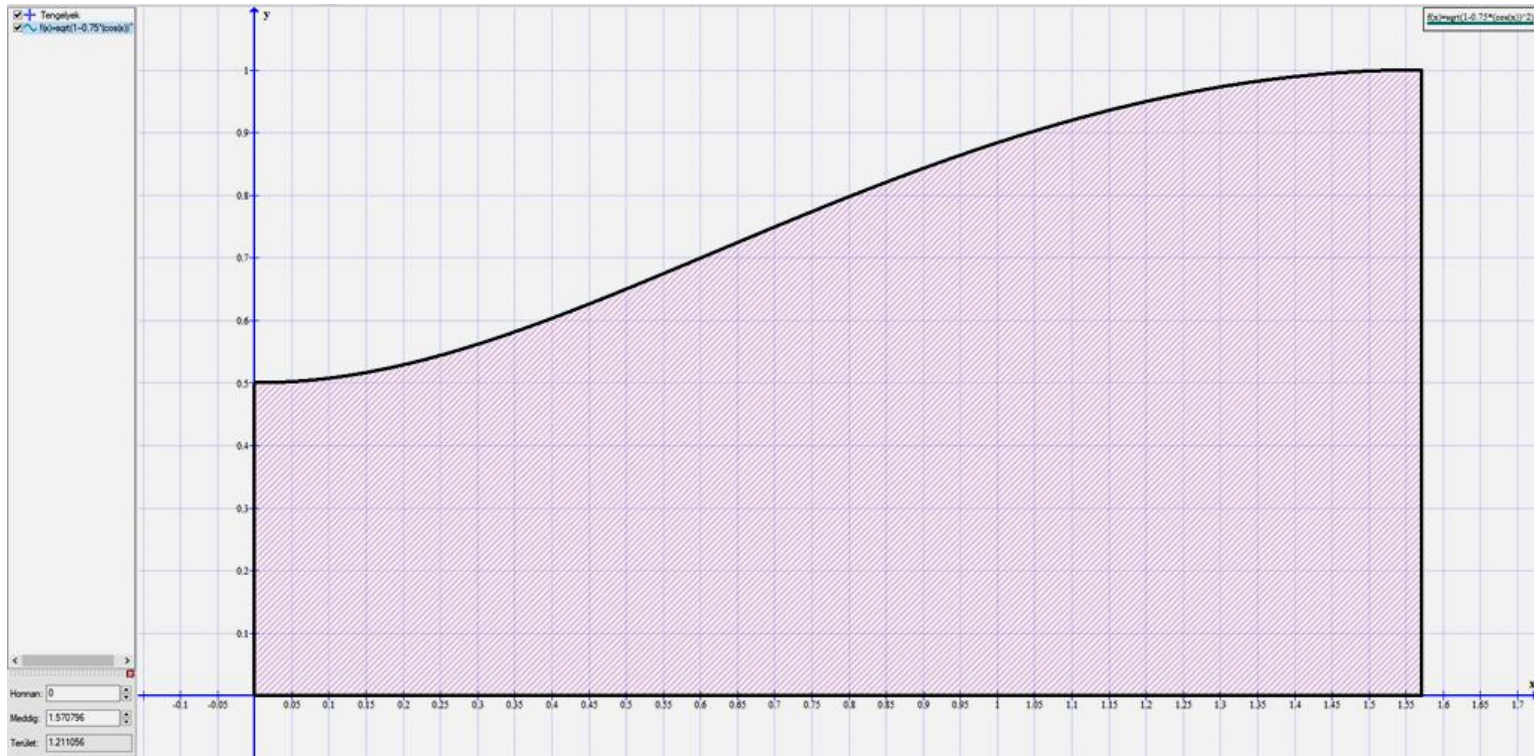
$$e = \sin u \rightarrow u = \arcsin e = \arcsin 0,8660 = 60^\circ; \quad \text{táblázatból:} \quad (b)$$

$$\mathbf{E}(60^\circ) = 1,2111; \quad (c)$$

$$K = 4 \cdot a \cdot \mathbf{E} = 4 \cdot 4 \text{ ( m )} \cdot 1,2111 = 19,3776 \text{ ( m )} \approx 19,4 \text{ ( m )}. \quad (d)$$

Közelítő képlettel – [ 4 ] – :

$$K \approx 4 \cdot \frac{\pi \cdot a \cdot b + (a-b)^2}{a+b} = 4 \cdot \frac{\pi \cdot 4 \cdot 2 + (4-2)^2}{4+2} \text{ ( m )} = 19,4218 \text{ ( m )} \approx 19,4 \text{ ( m )}. \quad (e)$$



4. ábra

A 4. ábra szerint az integrálandó függvény görbe alatti területének numerikus meghatározásával:

$$\underline{\underline{\mathbf{E} = 1,211056}} . \quad (\text{f})$$

A példabeli ellipszis pontosabb kerülete:

$$\mathbf{K} = 4 \cdot a \cdot \mathbf{E} = 4 \cdot 4 \text{ (m)} \cdot 1,211056 \text{ (m)} = 19,376896 \text{ (m)}. \quad (\text{g})$$

Látjuk, hogy nagyobb pontossági igény esetén érdemes a „közelítő” táblázati adatok helyett a „pontos” numerikus integrálási eredményeket alkalmazni.

**M2.** Nagyobb pontosságra lehet szükség, ha az elkészítendő termék alapanyagai drágák, így beszerzésüknél fokozott alapossgal, a szokásosnál is gondosabban kell eljárni. Ha például aranyfonálból készül a második fajta csavarvonal, akkor ennek *egy menetének hossza* a 3. ábra derékszögű háromszöge alapján:

$$l = \sqrt{h^2 + K^2} = \frac{K}{\cos \alpha} . \quad (31)$$

Az ellipszis  $\mathbf{K}$  kerületénél elkövetett pontatlanság hatása kiterjed a csavarvonal  $\mathbf{L} = n\mathbf{l}$  hosszára, ezzel együtt pedig a hosszával arányos  $\mathbf{Á}$  árára is, hiszen:

$$\mathbf{Á} = \acute{a} \cdot \mathbf{L} = \acute{a} \cdot n \cdot l = \acute{a} \cdot n \cdot \sqrt{h^2 + K^2} = \acute{a} \cdot n \cdot \frac{K}{\cos \alpha} , \quad (32)$$

ahol  $\acute{a}$  az aranyfonál magas egységára,  $n$  a menetek száma.

**M3.** Az állandó menetemelkedésű csavarvonalak úgy is előállhatnak, hogy az adott keresztmetszetű egyenes hengerre felcsévélnek pl. papírból készült háromszöget, csíkot. Papírhengerek magjaként gyakran alkalmaznak keményebb papírhengert, melynek oldalán jól láthatóan kirajzolódik a közönséges csavarvonal – 4. ábra.



4. ábra – forrása: [ 5 ]

**M4.** A [ 3 ] műben többet is olvashatunk a szalagozott szerkezetek gyártása során előforduló, különféle vezérgörbájű egyenes hengerekre írt csavarvonalakról.

***Források:***

[ 1 ] – [http://math.unideb.hu/media/lovas-rezso/feladatsor\\_PJ.pdf](http://math.unideb.hu/media/lovas-rezso/feladatsor_PJ.pdf)

[ 2 ] – <http://www.math.uri.edu/~bkaskosz/flashmo/parcur/>

[ 3 ] – Szerk. **MKM - kollektíva:** Kábel - zsebkönyv, 1972, II. kötet

[ 4 ] – **I. N. Bronstejn ~ K. A. Szemengyajev:** Matematikai zsebkönyv  
2. kiadás, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1963.

[ 5 ] – [http://papircso.hu/wp-content/uploads/DSC\\_0587.jpg](http://papircso.hu/wp-content/uploads/DSC_0587.jpg)

Összeállította: **Galgóczi Gyula**  
mérnöktanár

Sződliget, 2018. október 21.