Werk

Titel: Methodus cogitandi ex Euclide restituta

Autor: Hentschius, Joannes Jacobus

Verlag: Haered. Lankisianorum

Ort: Lipsiae

Jahr: 1756

Kollektion: mathematica

Signatur: 8 PHIL II, 288:1

Werk Id: PPN832902691

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN832902691|LOG_0010

OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=832902691

EUCLIDIS
ELEMENTORUM
LIBER PRIMUS.

DEFINITIONES.

1. *PUNCTUM eſt cujus pars nulla eſt.*
2. *LINEA eſt longitudo non lata.*
3. *Lineæ EXTREMA ſunt puncta.*
4. *RECTA LINEA eſt, quæ ex æquo ſua interjacet puncta.*
5. *SUPERFICIES eſt, quod longitudinem & latitudinem tantum habet.*
6. *Superficiei EXTREMA ſunt lineæ.*
7. *PLANA SUPERFICIES eſt, quæ ex æquo ſuas rectas interjacet.*
8. *PLANUS ANGULUS eſt duarum linearum in plano ſeſe tangentium & non in directum jacentium mutua inclinatio.*
9. *Quando lineæ angulum comprehendentes rectæ fuerint, angulus ipſe appellatur RECTILINEUS.*
10. *Cum recta linea ſuper rectam lineam inſiſtens angulos deinceps inter ſe æquales fecerit, RECTUS eſt uterque æqualium angulorum, &, quæ inſiſtit, recta linea PERPENDICULARIS vocatur ad eam, cui inſiſtit.*

11. *OBTUSUS angulus est, qui major est recto.*
12. *ACUTUS, qui est minor recto.*
13. *TERMINUS est, quod alicujus est extremum.*
14. *FIGURA est, quæ aliquo vel aliquibus terminis comprehenditur.*
15. *CIRCULUS est figura plana una linea comprehensa, quæ CIRCUMFERENTIA appellatur, ad quam ab uno puncto eorum, quæ intra figuram sunt posita, cadentes omnes rectæ lineæ inter se sunt æquales.*
16. *Hoc autem punctum CENTRUM circuli nuncupatur.*
17. *DIAMETER circuli est recta quædam linea per centrum ducta, & ex utraque parte circumferentia circuli terminata, quæ etiam circulum bifariam secat.*
18. *SEMICIRCULUS est figura comprehensa sub diametro & ea circuli circumferentia, quæ a diametro intercipitur.*
19. *SEGMENTUM CIRCULI est, quod recta linea & circuli circumferentia comprehenditur.*
20. *RECTILINEÆ FIGURÆ sunt, quæ rectis lineis comprehenduntur.*
21. *TRILATERÆ quidem, quæ tribus;*
22. *QUADRILATERÆ, quæ quatuor;*
23. *MULTILATERÆ verò, quæ pluribus quàm quatuor rectis lineis comprehenduntur.*
24. *è Trilateris figuris ÆQUILATERUM TRIANGULUM est, quod tria habet latera æqualia.*

25. *ISO-*

25. *ISOSCELES autem, quod duo tantum æqualia habet latera.*
26. *Scalenum verò, quod tria latera habet inæqualia.*
27. *Adhæc è trilateris figuris RECTANGULUM TRIANGULUM eſt, quod rectum angulum habet.*
28. *AMBLIGONIUM, quod angulum habet obtuſum.*
29. *OXIGONIUM, quod tres angulos habet acutos.*
30. *è Figuris quadrilateris QUADRATUM eſt, quod & æquilaterum eſt & rectangulum.*
31. *OBLONGUM, quod rectangulum quidem eſt, ſed non æquilaterum.*
32. *RHOMBUS, quod æquilaterum quidem eſt, ſed non rectangulum.*
33. *RHOMBOIDES, quod habet oppoſita & latera & angulos æqualia.*
34. *Reliqua autem quadrilatera præter hæc vocentur TRAPEZIA.*
35. *PARALLELÆ denique rectæ lineæ ſunt, quæ in eodem jacentes plano, atque ex utraque parte in infinitum productæ, in neutram ſibi coincidunt.*

POSTULATA:

1. *Poſtuletur à quovis puncto ad quodvis punctum rectam lineam ducere.*

2. *Item rectam lineam finitam continuè in directum producere.*
3. *Item quovis centro & intervallo circulum describere.*

COMMUNES NOTIONES five AXIOMATA:

1. *Quæ eidem æqualia sunt inter se sunt æqualia.*
2. *Si æqualibus æqualia addantur, tota sunt æqualia.*
3. *Si ab æqualibus æqualia auferantur, reliqua sunt æqualia.*
4. *Si inæqualibus æqualia addantur, tota sunt inæqualia.*
5. *Si ab inæqualibus æqualia auferantur, reliqua sunt inæqualia.*
6. *Quæ ejusdem sunt duplicia, inter se sunt æqualia.*
7. *Quæ ejusdem sunt dimidia, inter se sunt æqualia.*
8. *Quæ sibi mutuo congruunt, sunt æqualia.*
9. *Totum sua parte majus est.*
10. *Omnes anguli recti inter se sunt æquales.*
11. *Si in duas rectas lineas recta incidens angulos interiores & ad easdem partes duobus rectis minores fecerit; duæ illæ rectæ lineæ, in infinitum productæ, coincident inter se ex ea parte, ad quam sunt anguli duobus rectis minores.*
12. *Duæ rectæ lineæ spatium non comprehendunt.*

PRO-

PROPOSITIO I.

PROBLEMA.

Fig. 1.

Super datam rectam terminatam triangulum æquilaterum conſtituere.

Sit data recta linea terminata AB oportet vero ſuper hanc rectam AB triangulum æquilaterum conſtituere.

Conſtructio.

1. Centro quidem A, intervallo autem AB deſcribatur circulus BCD; & rurſus centro B, intervallo BA deſcribatur circulus ACE. (per 3. poſtul.)

2. A puncto C, in quo circuli ſeſe mutuo ſecant, ad puncta A, B ducantur rectæ CA, CB. (per I. poſt.)

Demonſtratio.

$$\left.\begin{array}{r}\text{Quoniam recta } AC = AB \\ \text{\& recta } BC = AB\end{array}\right\} \text{(per 15. definit.)}$$

Eſt igitur recta $\overline{AC = BC}$ (per I. axioma.)

Quare tres rectæ AB, AC, BC ſunt inter ſe æquales, & triangulum ABC, ſuper datam rectam AC conſtitutum, eſt æquilaterum (per 24. defin.)

Quod erat faciendum.

PROP. II. PROBL.

Fig. 2.

Ad datum punctum datæ rectæ æqualem rectam ponere.

Sit datum punctum A & data recta BC oportet quidem ad punctum A rectæ BC æqualem rectam ponere.

Constructio.

1. Ducatur ab A puncto ad punctum B recta AB (per 1. post.)

2. Super hanc rectam AB constituatur triangulum æquilaterum ABD (per 1. propos.)

3. Linea DA in directum producatur usque ad E, & linea DB itidem producatur usque ad F. (per 2 post.)

4. Deinde centro B. intervallo BC describatur circulus CGH; & rursus centro D intervallo DG describatur circulus GLK, (per 3 post.)

Demonstratio.

Quoniam punctum B est centrum circuli CHG,
erit recta BC=BG;
punctum vero D est centrum
circuli GLK, ideoque recta DL=DG } (per 15 def.)
porro recta AD=BD (per construct. & 24 def.)
Quodsi jam ab æqualibus, sc. DL=DG
auferantur æquales AD=BD
relinquentur æquales, sc. AL=BG (per 3 ax.)
atqui etiam recta BC=BG (per 15 defin.)
Ergo & AL=BC (per 1 ax.)

Ad

Ad datum igitur punctum A, datæ rectæ æqualis posita est recta AL.

Quod erat faciendum.

PROP. III. PROBL.

Fig. 3.

Datis duabus rectis inæqualibus, à majore auferre rectam æqualem minori.

Sint datæ rectæ inæquales AD & C, quarum major sit AD oportet à recta AD majore auferre rectam æqualem rectæ C minori.

Constructio.

1. Ad punctum A ponatur recta AB æqualis rectæ C (per 2 Prop.)
2. Centro A, intervallo AB, describatur circulus BEF (per 3 post.)

Demonstratio.

Quoniam A est centrum circuli BEF,
erit recta AE=AB (per 15 defin.);
est autem recta C=AB (per construct.)
Ergo etiam rectæ AE & C sunt inter se æquales (per 1 ax.)

Hoc est: à majore AD ablata est recta AE æqualis rectæ C.

Quod erat faciendum.

PROP. IV. THEOREMA.

Fig. 4.

Si duo triangula habuerint duo latera duobus lateribus æqualia, alterum alteri; & angulum æqualem angulo, qui ab æqualibus rectis comprehenditur: habebunt & baſin baſi æqualem, & triangulum erit triangulo æquale, & reliqui anguli reliquis angulis æquabuntur, alter alteri, quibus æqualia latera ſubtenduntur.

Sint duo triangula ABC, DEF, habentia duo latera AB, AC æqualia duobus lateribus DE, DF, alterum alteri; nempe latus AB æquale lateri DE, & latus AC lateri DF, & angulum BAC æqualem angulo EDF: Dico & baſin BC æquari baſi EF, & triangulum ABC æquari triangulo DEF, & reliquos angulos reliquis angulis æquari, alterum alteri, quibus latera æqualia ſubtenduntur; angulum nempe ABC angulo DEF & angulum ACB angulo DFE.

Demonſtratio.

Si punctum D, puncto A applicetur, & recta DE rectæ AB ſuperponatur, cadet punctum E in B, quia DE=AB, (per hypotheſin.)
item recta DF cadet in rectam AC, quia angulus A=ang. D.
Porro punctum F coincidet puncto C, quia recta AC=rectæ DF. (per hypoth.)

Ergo, rectæ BC, EF, quia eosdem habent terminos, ſibi mutuo congruent, ac proinde æquales erunt (per 8 ax.)

Quare

Quare totum triangulum BAC toti triangulo EDF congruet, eique erit æquale, & anguli B, E, item anguli C, F etiam congruent & æquabuntur.

Quod erat demonſtrandum.

PROP. V. THEOR.

Fig. 5.

Triangulorum Iſoſcelium anguli ad baſin ſunt inter ſe æquales: & productis æqualibus rectis, anguli ſub baſin erunt inter ſe æquales.

Sit triangulum Iſoſceles ABC habens latus AB æquale lateri AC, & producantur rectæ BD, CE, in directum rectis AB, AC (per 2 poſt.) Dico Imo angulum ABC æqualem eſſe angulo ACB; item IIdo angulum CBD æqualem eſſe angulo BCE.

Conſtructio.

Sumatur in recta BD punctum quodlibet F, & ab AE recta majore auferatur recta AG=rectæ AF (per 3 prop.) & ducantur rectæ FC, GB.

Demonſtratio.

1. Quoniam in duobus triangulis ACF, ABG duo latera ſunt æqualia,

& quidem latus AC=AB (per 25 defin.)
item latus AF=AG (per conſtruct.)

Porro angulus A, eſt utrique triangulo ACF, ABG communis;

Erit

Erit igitur angulus ABG = angulo ACF
& angulus AGB = angulo AFC (per 4 Prop.)
Basis etiam BG = Basi CF

Quod si jam ab æqualibus rectis AF, AG, auferantur æquales rectæ AB, AC, relinquentur æquales rectæ BF, CG (per 3 ax.)

Cum vero & rectæ BG, CF sunt æquales, & angulus AGB æqualis angulo AFC (sive quod idem est, angulus CGB æqualis angulo BFC) uti supra ostensum est:

Erit porro angulus BCF = angulo CBG (per 4 prop.)
Atqui totus angulus ACF = toti angulo ABG (ut supra)

Ergo angul. ACF — ang. BCF = ang. ABG — ang. CBG (per 3 ax.)

hoc est angulus ACB = angulo ABC

Quod Imo erat demonstrandum.

2. Quoniam duo triangula FCB, GBC, habent duo latera æqualia, nempe latus FC æquale lateri GB, & latus BF æquale lateri CG, habent vero etiam angulum BFC æqualem angulo CGB (uti supra ostens.)

Erunt igitur anguli CBF, BCG, vel quod idem est, anguli CBD & BCE inter se æquales (per 4 prop.)

Quod IIdo erat demonstrandum.

PROP. VI. THEOR.

Fig. 6.

Si trianguli duo anguli sint inter se æquales, latera æqualibus angulis subtensa inter se æqualia erunt.

Esto

Esto triangulum ABC, habens angulum ABC æqualem angulo BAC: Ajo latus AC æquale esse lateri BC.

Demonstratio.

Si latus AC est inæquale lateri BC, alterum eorum erit majus: sit vero (per antithesin) latus AC majus; ab hoc autem majore auferatur recta AD, æqualis lateri BC minori, si fieri potest (per 3 prop.); deinde ducatur recta DB (per 1 post.)

Quoniam nunc in duobus triangulis ABC, ABD, latus AD=BC (per antithesin.)

Latus vero BA est utrique triangulo ABC & ABD commune, & angulus ABC=angulo BAC (per hypoth.)

Basis igitur DB æquabitur basi AC & triangulum ABD æquabitur triangulo ABC, majus minori, sive pars toti, quod 9 axiomati repugnat.

Non est ideo latus AC inæquale lateri BC, est igitur æquale.

Quare duo trianguli latera duobus æqualibus angulis subtensa inter se sunt æqualia.

Quod erat demonstr.

PROP. VII. THEOR.

Fig. 7.

Super eandem rectam, duabus iisdem rectis duæ aliæ rectæ æquales altera alteri non constituentur, ad aliud atque aliud punctum in easdem partes,

partes, eosdem terminos habentes cum rectis initio ductis.

Sint ſuper eandem rectam AB, ductæ duæ rectæ AC, BC; Dico, quod non poſſint duæ aliæ rectæ duabus rectis AC, BC, æquales duci ab iisdem terminis A & B in easdem partes ad aliud punctum præterquam ad C.

Demonſtratio.

Ab iisdem terminis A & B, duæ aliæ rectæ uti AD, BD in easdem partes ad aliud quodlibet punctum D ducantur, junganturque CD.

Sit jam recta AC=rectæ AD (per antith.);
erit angulus ACD=ang.ADC (per 5 prop.)
Quare angulus ADC major erit ang. DCB
& angulus CDB multo major ang. DCB } (p. 9 ax.)
Rurſus quoniam recta BC=rectæ BD (per antitheſ.)
erit angulus CDB=ang. DCB (per 5 prop.)
Atqui ſupra oſtenſum eſt angulum CDB multo majorem eſſe eodem angulo DCB.

Fieri ergo nequit, ut ſuper eandem rectam duabus iisdem rectis duæ aliæ rectæ æquales conſtituantur ad aliud atque aliud punctum in easdem partes, eosdem terminos habentes cum rectis initio ductis.

Quod erat demonſtr.

PROP. VIII. THEOR.

Fig. 8

Si duo triangula habeant duo latera duobus lateribus æqualia, alterum alteri; habeant etiam

&

& basin basi æqualem: angulum quoque angulo æqualem habebunt ab æqualibus rectis comprehensum.

Sint duo triangula ABC, DEF habentia duo latera AB, AC duobus lateribus DE, DF æqualia alterum alteri, latus quidem AB lateri DE & latus AC lateri DF; habeant etiam & basin BC æqualem basi EF: Dico angulum BAC æqualem esse angulo EDF.

Demonstratio.

Si triangulum ABC applicetur triangulo DEF, & punctum B ponatur super punctum E, & recta BC super rectam EF, congruet punctum C puncto F; quia recta BC=EF (per hypoth.)

Rectâ verò BC congruente rectæ EF, etiam AB, AC, congruent rectis DE, DF; nam super iisdem, sive æqualibus rectis BC, EF, duæ aliæ rectæ æquales rectis AB, AC, constitui non possunt ad aliud punctum in easdem partes nisi ad A vel D (per 7 prop.

Cum igitur basis BC congruit basi EF, & latera AB, AC, lateribus DE, DF congruunt; angulus BAC etiam angulo EDF congruet, adeoque ei æqualis erit (per 8 ax.)

Quod erat demonstr.

PROP. IX. PROBL.

Fig. 9

Datum angulum rectilineum bifariam secare.

Sit

Sit datus angulus rectilineus BAC: oportet illum bifariam secare.

Constructio.

1. Sumatur in recta AB punctum quodlibet D, & à recta AC auferatur recta AE, æqualis rectæ AD (per 3 prop.)
2. Ducatur recta DE (per 1 post.)
3. Super rectam DE fiat triangulum æquilaterum DEF (per 1 prop.)
4. Ducatur recta AF (per 1 post.): Dico angulum BAC bifariam secari a recta AF.

Demonstratio.

Quoniam recta AD=AE (per Construct.)
Recta autem AF sit communis;
Duo igitur triangula ADF, AEF, habent duo latera æqualia; habent
Vero & basin basi æqualem, sc. DF=EF (per Constr.)
Ergo angulus BAF=angulo CAF (per 8 prop.)
Quare angulus BAC sectus est bifariam.

Quod erat faciendum.

PROP. X. PROBL.

Fig. 10

Datam rectam lineam terminatam bifariam secare.

Sit data recta terminata AB: oportet hanc bifariam secare.

Con-

Conſtructio.

1. Fiat ſuper datam rectam triangulum æquilaterum (per 1 prop.)
2. Angulus ACB bifariam ſecetur à recta CD (per 9 prop.): Dico rectam AB bifariam ſecari in puncto D.

Demonſtratio.

Quoniam recta AC=rectæ BC (per conſt.);
Recta autem CD eſt communis;
Duo igitur triangula ACD, BCD habent duo latera æqualia; habent vero & angulos inter hæc latera comprehenſos æquales, ſc. angulum ACD=angulo BCD (per conſtr.)
Ideoque erit baſis AD=baſi DB (per 4 prop.)
Quare recta AB biſariam in puncto D ſecta eſt.

Quod erat faciendum.

PROP. XI. PROBL.

Fig. 11

Datâ rectâ lineâ, à puncto in ipſa dato ad angulos rectos rectam lineam ducere.

Sit data recta AB, & punctum in ea datum C: oportet à puncto C ipſi rectæ AB ad rectos angulos lineam ducere.

Conſtructio.

1. Sumatur in recta AC punctum quodlibet D & ponatur CD æqualis rectæ CE (per 3 prop.)

2. Super rectam DE constituatur triangulum æquilaterum FDE (per 1 prop.)
3. Ducatur recta FC (per 1 post.):

Dico quod datæ rectæ AB ad datum in ea punctum C ad rectos angulos ducitur recta FC.

Demonstratio.

Quoniam duo triangula DFC, EFC habent duo latera æqualia, latus nempe DC=lateri EC, latus vero FC utrique commune, & basin DF= basi EF (per constr.); Angulus igitur DCF est æqualis angulo ECF (per 8 prop.)

Quare recta FC, super datam rectam AB insistens & angulos deinceps DCF, ECF, æquales faciens à dato puncto C ad angulos rectos ducta est (per 10 defin.)

Quod erat faciendum.

PROP. XII. PROBL.

Fig. 12

Super datam rectam lineam infinitam, à dato puncto, quod non est in eadem perpendicularem rectam lineam ducere.

Sit data recta infinita AB & datum punctum C, quod non est in eadem: oportet super datam rectam infinitam AB, à dato puncto C perpendicularem lineam rectam ducere.

Constructio.

1. Sumatur ex altera parte rectæ AB punctum quod-

quodlibet D & centro C, intervallo CD deſcribatur circulus EFG (per 3 poſt.)
2. Secetur recta EG biſariam (per 10 prop.);
3. Ducantur rectæ CG, CH, CE (per 1 poſt.):

Dico quod ſuper datam rectam infinitam AB, à dato puncto C, ducta eſt perpendicularis recta linea CH.

Demonſtratio.

Duo triangula HEC, HGC habent duo latera æqualia & baſin baſi æqualem, latus nempe EH=GH (per conſtr.); latus vero HC eſt utrique commune; baſis denique CG=baſi CE (per 15 defin.)

Eſt igitur angulus CHG=angulo CHE (per 8 prop.); atque hi anguli ſunt deinceps:

Cum autem recta CH ſuper rectam AB inſiſtens, angulos deinceps CHG, CHE, inter ſe æquales facit, perpendicularis ducta eſt ad eandem rectam AB (per 10 defin.)

Quod erat faciend.

PROP. XIII. THEOR.

Fig. 13

Si recta inſiſtens in rectam faciat angulos, vel duos rectos faciet, vel duobus rectis æquales.

Recta quælibet AB inſiſtens in rectam CD faciat angulos CBA, ABD: Dico quod anguli CBA, ABD, vel erunt recti, vel duobus rectis æquales.

Demonſtratio.

Si anguli CBA, ABD ſint æquales erunt recti (per 10 defin.)

Sin autem inæquales ſint, à puncto B ad angulos rectos ducatur linea BE (per 11 prop.); Sic duo anguli deinceps CBE, EBD erunt inter ſe æquales, ideoque recti (per 10 defin.);

Cum igitur anguli CBE † EBD æquales ſunt duobus angulis rectis angulus vero CBA † ang. ABD=ang. CBE†EBD (per 8 ax.):

Erunt etiam CBA†ABD=duobus ang. rectis (per 1 ax.)

Quælibet igitur recta inſiſtens in rectam, ſi angulos faciat, vel duos rectos faciet vel duobus rectis æquales.

Quod erat demonſtr.

PROP. XIV. THEOR.

Fig. 14

Si ad aliquam rectam lineam & ad punctum in ea duæ rectæ, non ad easdem partes poſitæ, faciant angulos deinceps duobus rectis æquales; ipſæ rectæ lineæ in directum ſibi invicem erunt.

Ad aliquam rectam lineam AB & ad punctum in ea B duæ rectæ BC, BD, non ad easdem partes poſitæ faciant angulos deinceps ABC, ABD, duobus rectis æquales: dico rectam BD eſſe in directum lineæ CB.

Demon-

Demonſtratio.

Si recta BD non ſit in directum rectæ CB, ſupponatur aliam quamcunque BE in directum rectæ CB duci poſſe (per 2 poſt.)

Quoniam vero rectæ CB, BE ſibi invicem in directum poſitæ ſint (per antith.) ideoque unam rectam ex æquo ſua puncta C, E, interjacentem conſtituant (per 4 def.)

Recta igitur AB inſiſtens in rectam CBE faciet angulos ABC † ABE = duobus rectis (per 13 prop.)
Sunt autem ang. ABC † ABD = duobus rectis (per hypoth.)

Quare anguli ABC † ABE = ABC † ABD (per 1 ax.)
Si jam auferatur communis ABC;

erit reliquus angulus ABE = ABD (per 3 ax.)
Sed angulus ABE eſt pars totius ABD;

Erit ergo pars ABE = ſuo toti ABD; (quod axiomati 9 repugnat.)

Recta igitur BE non poteſt eſſe in directum rectæ lineæ CB: eadem etiam ratione oſtendetur nec ullam aliam rectam, præter BD, in directum rectæ CB duci poſſe. Quare ipſæ rectæ CB, CD in directum ſibi invicem ſunt.

Quod erat demonſtr.

PROP. XV. THEOR.

Fig. 15

Si duæ rectæ ſeſe mutuo ſecent, angulos ad verticem facient inter ſe æquales.

Duæ rectæ AB, CD, ſeſe mutuo ſecent in puncto E: Dico angulum AEC æquari angulo DEB, & angulum CEB æquari angulo AED.

Demonſtratio.

Recta AE inſiſtens rectæ CD facit duos
ang. CEA + AED = duobus rectis
Porro Recta DE inſiſtens rectæ AB (per 13 prop.)
facit duos angul. AED + DEB =
duobus rectis

Ergo ang. CEA + AED = ang. AED + DEB (p. 1 ax.)
Hinc communis auferatur ang. AED;

erit reliquus ang. CEA = reliquo DEB (per 3 ax.)
Eodem modo demonſtrabitur angulos CEB, DEA eſſe æquales:

Si igitur duæ rectæ ſeſe mutuo ſecent, facient angulos ad verticem inter ſe æquales.

Quod erat demonſtr.

Corollarium.

Hinc manifeſtum eſt, quotcunque rectis ſe mutuo ſecantibus, angulos ad punctum ſectionis æquari quatuor rectis.

PROP. XVI. THEOR.

Fig. 16

Omnis trianguli uno latere producto, angulus exterior major eſt utrolibet interiorum & oppoſitorum.

Sit

Sit triangulum ABC, & producatur latus BC usque ad D: dico exteriorem angulum ACD majorem esse utrolibet interiorum & oppositorum CBA, BAC.

Constructio.

1. Secetur AC bifariam in E (per 10 prop.)
2. Ducta recta BE producatur ad F (per 1 & 2 post.)
3. Ponatur EF æqualis rectæ BE (per 3 prop.)
4. Ducatur recta FC (per 1 post.)
5. Producatur AC ad G (per 2 post.)

Demonstratio.

Quoniam duo triangula AEB, CEF habent duo latera æqualia & unum angulum uni angulo æqualem:

sc. latus AE=lateri EC } (per constr.)
latus BE=lateri EF }
& angulum AEB=angulo FEC (per 15 prop.)

habebunt igitur basin AB=basi FC } (p. 4 prop.)
& angulum BAE=angulo ECF }

Est autem angulus ECD major angulo ECF (per 9 ax.); proinde & angulus ECD major est angulo BAE, vel quod idem est angulus ACD major est angulo BAC: quia ang. ACD=ECD, & BAC=BAE (per 8 ax.)

Eodem modo si BC secetur bifariam, demonstrabitur angulum BCG majorem esse angulo ABC; quare angulus ACD etiam major erit angulo ABC, quia ACD=BCG (per 15 prop.)

Omnis igitur trianguli, uno latere producto, angulus exterior major est utrolibet interiorum & oppositorum.

Quod erat demonstr.

PROP. XVII. THEOR.

Fig. 17

Omnis trianguli duo anguli sunt minores duobus rectis, quomodocunque sumpti.

Sit triangulum ABC: dico duos angulos trianguli ABC, quomodocunque sumptos, minores esse duobus rectis.

Demonstratio.

Producatur BC ad D (per 2 post.);

Sic erit exterior angulus ACD major interno angulo ABC, (per 16 prop.)

addatur communis angulus ACB

Erunt anguli ACD † ACB majores angulis ABC † ACB (per 4 ax.)

Sed anguli ACD † ACB = duobus angulis rectis (per 13 prop.)

Ergo anguli ABC † ACB sunt minores duobus rectis.

Eodem modo demonstrabitur angulos BAC † ACB, itemque angulos CAB † ABC minores esse duobus rectis.

Omnis igitur trianguli duo anguli sunt minores duobus rectis, quomodocunque sumpti.

Quod erat demonstr.

PROP.

PROP. XVIII. THEOR.

Fig. 18

Omnis trianguli majus latus majorem angulum ſubtendit.

Sit triangulum ABC habens latus AC, majus latere AB: dico angulum etiam ABC majorem eſſe angulo ACB.

Conſtructio.

1. A majore latere AC auferatur recta AD æqualis lateri minori (per 3 prop.); AB.
2. Ducatur recta BD (per 1 poſt.)

Demonſtratio.

Latus BA=AD (per conſtruct.), ideoque angulus ABD=angulo ADB (per 5 prop.);
Trianguli BDC angulus exterior ADB, major eſt inter. & oppoſito DCB (per 16 prop.)

Ergo & ang. ABD major eſt angulo DCB, ſive ACB;
Sed totus ang. ABC major eſt ang. ABD (per 9 ax.)

---

ideoque angulus ABC multo major eſt ang. ACB:
Omnis igitur trianguli majus latus majorem angulum ſubtendit.

Quod erat demonſtrandum.

PROP. XIX. THEOR.

Fig. 19

Omnis trianguli majori angulo majus latus ſubtenditur.

Sit triangulum ABC habens angulum ABC majorem angulo BCA; Dico latus AC majus esse latere AB.

Demonstratio.

Si latus AC non sit majus latere AB, vel est ei æquale vel eodem minus;

Sit jam primò latus AC=lateri AB (per antith.)

Sic angulus ABC=angulo BCA (per 5 prop.)
Atqui ang. ABC major est ang. BCA (per hypoth.)
Ergo latus AB non potest esse æquale lateri AC (per 18 prop.)

Sit autem 2do latus AC minus latere AB (per antith.);

Sic, quoniam angulus ABC est major angulo ACB, minus latus majorem angulum subtenderet, quod fieri nequit (per prop. 18.)

Cum vero jam ostensum est latus AC non posse esse lateri AB æquale, nec eodem minus: Erit igitur majus.

Quod erat demonstr.

PROP. XX. THEOR.

Fig. 20

Omnis trianguli duo latera sunt majora reliquo, quomodocunque sumpta.

Sit triangulum ABC: Dico trianguli ABC duo latera quomodocunque sumpta majora esse reliquo; nempe AB † BC majora esse latere AC; & BA † AC latere BC; & AC † CB latere BA.

 Con-

Conſtructio.

1. Producatur latus AB ad punctum D (per 1 poſt.);
2. Ponatur BD æqualis rectæ BC (per 3 prop.);
3. Ducatur recta DC (per 1 poſt.).

Demonſtratio.

Quoniam recta DB=rectæ BC (per Conſtr.);
erit ang. BDC=angulo BCD (per 5 prop.);
Eſt autem angulus ACD major ang. BCD (per 9 ax.);
Major igitur eſt angulus ACD angulo BDC, ſive angulo ADC; ideoque & latus AD, majori angulo ſubtenſum, majus eſt latere AC (per 19 prop.)
Eſt vero recta AD=duobus lateribus,
AD†BC; quia BD=BC (uti ſupra oſtenſ.) 1B

Ergo duo latera AB † BC majora ſunt latere AC.
Eodem modo oſtendetur latera AB † AC majora eſſe latere B; & latera AC † CB majora latere AB. Quare omnis trianguli duo latera, quomodocunque ſumpta, ſunt majora reliquo.

Quod erat demonſtr.

PROP. XXI. THEOR.

Fig. 21

Si à terminis unius lateris trianguli duæ rectæ intus conſtituantur: hæ reliquis duobus trianguli lateribus minores quidem erunt, majorem vero angulum comprehendent.

Sint

Sint à terminis B, C, unius lateris BC, trianguli ABC, duæ rectæ BD, DC constitutæ: Dico rectas BD, DC minores esse duobus reliquis trianguli lateribus BA, AC; angulum tamen comprehendere BDC majorem angulo BAC.

Demonstratio.

Producatur recta BD ad punctum E.
Imo Trianguli ABE duo latera AB † AE sunt majora latere BE (per 20 prop.)
communis addatur recta EC

Erunt igitur latera BA † AE † EC majora rectis BE † EC (per 4 ax.)
Porro trianguli CED, duo latera CE † ED sunt majora latere DC (per 20 prop.)
communis addatur recta DB

Erunt rectæ CE † ED † DB majores rectis DC † DB (per 4 ax.);

Sed latera BA † AE † EC (sive BA † AC) majora sunt rectis CE † ED † DB (sive rectis BE † EC, ut supra ostensum est.)

Ergo latera BA † AC multo majora sunt rectis DB † DC. *Quod Imo erat demonstr.*

IIdo Trianguli CDE exterior angulus BDC major est interno & opposito CED, & trianguli ABE exterior angulus CEB, sive CED, major est interno & opposito BAC (per 16 prop.)

Angulus igitur BDC multo major est angulo BAC.

Quod IIdo erat demonstr.

PROP.

PROP. XXII. PROBL.

Fig. 22

E tribus rectis, quæ tribus rectis datis æquales sunt, triangulum constituere; oportet autem duas utcunque sumptas majores esse reliqua.

Sint tres datæ rectæ, A, B, C, quarum duæ utcunque sumtæ sint majores reliqua, nempe A † B majores quam C; item A † C majores quam B; denique B † C majores quam A: oportet è rectis lineis, æqualibus ipsis A, B, C, triangulum constituere.

Constructio.

1. Ponatur recta linea DE finita quidem ad D, infinita vero versus E (per 1 & 3 post.)
2. Ponatur DF æqualis rectæ A, & recta FG æqualis rectæ B, recta autem GH æqualis rectæ C (per 3 prop.)
3. Centro F, intervallo FD describatur circulus DKL, & rursus Centro G, intervallo GH describatur circulus KLH (per 3 post.)
4. Ducantur rectæ KF, KG (per 1 post.);

Dico triangulum KFG fieri è tribus lineis rectis, æqualibus ipsis rectis A, B, C.

Demonstratio.

Recta FD=rectæ FK (per 15 def.)
Atqui FD=rectæ A (per construct.)

Ergo FK=A (per 1 ax.)

Rursus

Rursus recta GH=rectæ GK (per 15 Def.);
Est autem GH=rectæ C (per constr.)

Ergo GK=rectæ C (per 1 ax.)
Recta denique FG=rectæ B (per construct.);

Tres igitur rectæ FK, FG, GK, æquantur tribus rectis A, B, C; ideoque è tribus rectis, quæ tribus rectis datis sunt æquales, constitutum est triangulum KFG.

Quod erat faciendum.

PROP. XXIII. PROBL.

Fig. 23

Ad datam rectam, & ad datum in ea punctum, dato angulo rectilineo angulum rectilineum æqualem constituere.

Sit data recta linea AB, & in ea datum punctum A, datus autem angulus rectilineus sit DCE: oportet ad datam rectam AB, & ad datum in ea punctum A, dato angulo rectilineo DCE æqualem angulum rectilineum constituere.

Constructio.

1. Sumantur in utraque recta CD, CE puncta quælibet D, E & ducatur recta DE (per 1 post.)
2. E tribus rectis lineis, quæ æquales sint tribus CD, DE, CE, constituatur triangulum AFG, ita ut CD æquetur rectæ AF, recta autem CE rectæ AG, recta denique DE rectæ FG (per 22 prop.)

Demon-

Demonſtratio.

Quoniam in duobus triangulis CDE, AFG, duo latera ſunt æqualia, ſcil. latus CD=lateri AF; CE=AG; & denique baſis DE=baſi FG (per conſtr.); Erit itaque angulus DCE=angulo FAG (per 8 prop.)

Ad datam igitur rectam lineam AB, & ad datum in ea punctum A, dato angulo rectilineo DCE conſtitutus eſt æqualis angulus rectilineus.

Quod erat faciendum.

PROP. XXIV. THEOR.

Fig. 24

Si duo triangula habeant duo latera duobus lateribus æqualia, alterum alteri; angulum autem angulo majorem, qui ab æqualibus rectis comprehenditur: etiam baſin baſi majorem habebunt.

Sint duo triangula ABC, DEF, quæ duo latera AB, AC, duobus lateribus DE, DF habent æqualia, alterum alteri, latus nempe AB lateri DE, atque latus AC lateri DF; angulus autem BAC ſit major angulo EDF: Dico baſin BC majorem eſſe baſi EF.

Conſtructio.

1. Ad rectam DE, & ad punctum in ea D conſtituatur angulus EDG æqualis angulo BAC (per 23 prop.);
2. Ponatur DG æqualis alterutri rectarum AC, DF (per 3 prop.);
3. Ducantur GE, FC (per 1 poſt.)

Demon.

Demonstratio.

Recta AB=rectæ DE (per hypoth.); recta vero AC=rectæ DG, & angulus BAC=angulo EDG (per construct.) ideoque basis BC=basi EG (per 4 prop.);

Rursus recta DG=rectæ DF (per constr.); ergo angulus DFG=angulo DGF (per 5 prop.);

Est autem angulus DGF major angulo EGF (per 9 ax.); angulus igitur DFG etiam major est angulo EGF.

Porro angulus EFG major est angulo DFG (per 9 ax.); Ergo angulus EFG multo major est angulo EGF; ideoque latus EG, quod majori angulo EFG subtenditur, majus est latere EF (per 19 prop.)

Sed latus EG=lateri BC (per construct.); Ergo latus BC majus est latere EF, hoc est, trianguli BAC basis BC major est basi EF alterius trianguli DEF.

Quod erat demonstr.

PROP. XXV. THEOR.

Fig. 25

Si duo triangula habeant duo latera duobus lateribus æqualia, alterum alteri; basin autem habeant basi majorem; habebunt etiam angulum majorem angulo, qui ab æqualibus rectis comprehenditur.

Sint duo triangula ABC, DEF, quæ habent duo latera AB, AC, æqualia duobus lateribus DE, *DF*

DF, alterum alteri; latus quidem AB lateri DE, & latus AC lateri DF; basis autem EF sit major basi BC: Dico angulum EDF majorem esse angulo BAC.

Demonstratio.

Si angulus EDF non sit major angulo BAC, vel est ei æqualis, vel eodem minor.

Imo Sit angulus BAC=angulo EDF (per antith.); sic erit basis BC=basi EF (per 4 prop.);

Atqui basis BC non est æqualis basi FF (per hypothesin); ergo nec angulus BAC est æqualis angulo EDF (per 24 prop.);

IIdo Sit vero EDF minor angulo BAC (per antith.); erit basis EF minor basi BC (per 24 prop.);

Atqui basis EF non est minor basi BC (per hypoth.); Ergo nec angulus EDF minor est angulo BAC.

Cum autem ostensum est angulum EDF non esse æqualem angulo BAC, nec esse minorem; erit igitur major.

Quod erat demonstrand.

PROP. XXVI. THEOR.

Fig. 26

Si duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habeant, alterum alteri, unumque latus uni lateri æquale; vel quod æqualibus adjacet angulis, vel quod uni æqualium angulorum ſubtenditur: & reliqua laterā reliquis lateribus æqualia, alterum alteri, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt.

Sint duo triangula ABC, DEF, quæ duos angulos ABC, BCA duobus angulis DEF, EFD æquales habent; angulum ſc. ABC æqualem angulo DEF, angulum vero BCA æqualem angulo EFD; ſitque porro unum ex lateribus trianguli ABC æquale uni lateri alterius trianguli DEF: Dico etiam reliqua latera trianguli ABC eſſe æqualia reliquis lateribus trianguli DEF, alterum alteri, & reliquum denique angulum BAC eſſe æqualem reliquo angulo EDF.

Demonſtratio.

Imo Sit latus BC=lateri EF (per hypoth.): Dico eſſe latus BA=lateri ED, & AC=DF, item angulum BCA=angulo EFD;

Nam ſi è contrario ponatur BA inæquale eſſe lateri ED, eorum alterum erit majus; Sit jam AB majus (per antitheſin); fiatque latus BG=lateri ED (per 3 prop.), & ducatur recta GC (per 1 poſt.).

Quoniam vero nunc BG=lateri ED (per antith.), & BC=lateri EF, item angulus ABC=angulo DEF (per hypoth.); erit igitur ang. BCG=ang. EFD (per 4 prop.)

Atqui angul. BCA=ang. EFD (per hypoth.); Eſſet itaque angulus BCG=angulo BCA (per 1 ax.); quod tamen fieri nequit (per 9 axiom.).

Non

Non eſt igitur latus BA inæquale lateri ED; ergo eſt æquale.

IIdo Sit latus AB=lateri DE (per hypoth.): Dico eſſe latus BC=lateri EF, & latus AC=lateri DF, item angulum BAC=angulo EDF.

Nam ſi ponatur contrarium, latus nempe BC inæquale lateri EF, erit alterum eorum majus. Sit vero latus BC majus latere FF (per antith.); fiat deinde BH æquale lateri EF (per 3 prop.), & ducatur recta AH (per 1 poſt.);

Quoniam igitur latus BH=EF (per antith.); latus verò AB=lateri DE, & angulus ABC=angulo DEF (per hypoth.); Erit itaque ang. BHA=ang. EFD;

Atqui angulus BCA=ang. EFD (per hypoth.); ideoque eſſet tandem ang. BHA=ang. BCA (per 1 ax.); quod tamen fieri non poteſt (per 16 prop.)

Non eſt igitur latus BC inæquale lateri EF; Ergo eſt æquale.

Cum autem jam oſtenſum eſt trianguli BAC duo latera AB, BC æqualia eſſe duobus lateribus DE, EF alterius trianguli DEF; & denique angulus ABC eſt æqualis angulo DEF (per hypoth.); Erit porro reliquum latus AC æquale reliquo lateri DF, & reliquus angulus BAC=reliquo angulo EDF (per 4 prop.)

Quod erat demonſtr.

PROP. XXVII. THEOR.

Fig. 27

Si in duas rectas lineas recta linea incidens alternos angulos inter se æquales fecerit, parallelæ erunt rectæ lineæ.

In duas rectas lineas AB, CD, recta linea EF incidens alternos angulos AEF, EFD æquales inter se faciat: Dico rectam lineam AB, rectæ CD parallelam esse.

Demonstratio.

Si rectæ AB, CD, dicantur non esse parallelæ, productæ convenient vel ad partes BD, vel ad partes AC; Producantur ergo, conveniantque ad partes BD in puncto G; Sic trianguli EGF, exterior angulus AEF major esset interiore & opposito angulo GFE (per 16 prop.).

Est autem angulus AEF non major sed æqualis angulo GFE (per hypoth.);

Fieri ergo nequit, ut rectæ AB, CD, productæ ad partes BD, conveniant: Similiter demonstrabitur easdem rectas neque convenire ad partes AC; ideoque inter se sunt parallelæ (per 35 def.).

Quod erat demonstr.

PROP. XXVIII. THEOR.

Fig. 28

Si in duas rectas lineas recta linea incidens exteriorem angulum interiori & opposito ad

easdem

easdem partes æqualem fecerit; vel interiores & ad easdem partes duobus rectis æquales: rectæ lineæ erunt inter ſe parallelæ.

In duas enim rectas lineas AB, CD, recta linea EF incidens exteriorem angulum, EGB, interiori & oppoſito ad easdem partes GHD æqualem faciat; vel interiores & ad easdem partes BGH, GHD duobus rectis æquales: Dico rectam lineam AB rectæ CD parallelam eſſe.

Demonſtratio.

1. Angulus EGB=angulo GHD (per hypoth.); angulus AGH=angulo EGB (per 15 prop.); Ergo & angulus AGH=angulo GHD (per 1 ax.): Quoniam vero hi anguli AGH, GHD ſunt alterni & inter ſe æquales, erit recta AB parallela rectæ CD (per 27 prop.).

Quod Imo erat demonſtr.

2. Anguli BGH † GHD = duobus angulis rectis (per hypoth.); angulis vero BGH † AGH etiam æquales ſunt duobus rectis (per 13 prop.);

Ergo ang. BGH†GHD=BGH†AGH(per 1 ax.).
Communis auferatur angulus BGH

erit reliquus ang. GHD=ang. AGH (per 3 ax.).

Quoniam vero Anguli GHD, AGH, ſunt alterni & æquales, erunt rectæ AB, CD inter ſe parallelæ.

Quod iterum IIdo erat demonſtr.

PROP. XXIX. THEOR.

Fig. 29

In parallelas rectas lineas recta linea incidens & alternos angulos inter se æquales, & exteriorem interiori & opposito ad easdem partes æqualem, & interiores & ad easdem partes duobus rectis æquales efficit.

In parallelas rectas lineas AB, CD, incidat recta linea EF: Dico primò illam alternos angulos AGH, GHD, inter se æquales efficere; & secundò exteriorem EGB, interiori & opposito & ad easdem partes GHD, æqualem; & tertiò interiores & ad easdem partes BGH, GHD duobus rectis æquales.

Demonstratio.

Si angulus AGH inæqualis est angulo GHD, unus ipsorum major est;

Sit jam angulus AGH major angulo GHD (per antith.); Communis addatur BGH; sic erunt anguli AGH†BGH majores angulis GHD† BGH (per 4 ax.);

Sed anguli AGH†BGH=duobus rectis (per 13 prop.); Ergo ang. GHD†BGH sunt minores duobus rectis: Duæ igitur rectæ GB, HD, in infinitum productæ sibi mutuo coincident (per 11 ax.); Atqui non coincidunt, quia sunt parallelæ (per hypoth.): ideo ang. AGH non est inæqualis angulo GHD, sed ei æqualis.

Quod Imo erat demonstr.

Porro

Porro ang. AGH=angulo EGB (per 15 prop.)
Sed ang. AGH=angulo GHD (ut ſupra oſt.);

Ergo & ang. EGB=angulo GHD (per 1 ax.)
Quod IIdo erat demonſtr.

Hiſce demum ſi addatur communis BGH

Erunt anguli EGB†BGH=angulis GHD†BGH (per 2 ax.);

Sed anguli EGB†BGH = 2 Rectis (per 13 prop.) ergo & anguli GHD†BGH=duobus rectis (per 1 ax.).

Quod IIItio erat demonſtr.

PROP. XXX. THEOR.

Fig. 30

Quæ eidem rectæ lineæ ſunt parallelæ, & inter ſe ſunt Parallelæ.

Sit utraque ipſarum AB, EF, ipſi CD parallela: Dico & AB ipſi EF, parallelam eſſe.

Demonſtratio.

Angulus AIK=ang. alterno IKD
ang. ext. IKD=ang. int. & opp. GLF (p. 29 prop.);

Ergo ang. AIK=ang. GLF (per 1 ax.); ideoque Linea AB eſt parallela lineæ EF (per 27 Prop.).

Quod erat demonſtr.

PROP. XXXI. PROBL.

Fig. 31

Per datum punctum datæ rectæ lineæ parallelam rectam ducere.

Sit datum punctum A, data vero recta linea BC: oportet per A punctum, ipsi BC rectæ lineæ parallelam rectam ducere.

Constructio.

1. Sumatur in recta BC quodvis punctum F, & jungatur AF (per 1 post.);
2. Ad rectam lineam AF & ad datum in ea punctum A constituatur angulus FAD æqualis angulo AFC (per 23 prop.);
3. In directum ipsi DA recta linea AE producatur (per 2 post.) dico rectam DE esse parallelam rectæ BC.

Demonstratio.

Angulus AFC=angulo alterno FAD (per constr.); Ergo ducta recta DE est parallela rectæ BC (per 27 prop.)

Quod erat faciendum.

PROP. XXXII. THEOR.

Fig. 32

Omnis trianguli uno latere producto, exterior angulus duobus interioribus & oppositis est æqua-

æqualis; & trianguli tres interiores anguli duobus rectis ſunt æquales.

Sit triangulum ABC, & unum ipſius latus BC producatur in D: Dico primò angulum exteriorem ACD duobus interioribus & oppoſitis CAB, ABC, æqualem eſſe; & ſecundò trianguli tres interiores angulos ABC, BCA, CAB duobus rectis eſſe æquales.

Conſtructio.

1. Producatur recta BC in D (per 2 poſt.)
2. Ducatur per punctum C, ipſi AB rectæ parallela CE (per 31 prop.).

Demonſtratio.

Recta CE eſt parallela rectæ BA (per conſtr.), ideoque recta in ipſas incidens, AC, angulos alternos facit æquales, angulum nempe ACE=ang. CAB (per 29 prop.).

Porro Recta, BD, incidens in eaſdem etiam parallelas AB, EC, facit angulum exteriorem ECD = interiori & oppoſito ABC (per 29 prop.);

Ergo ang. ACE†ECD=ang. CAB†ABC (per 2 ax.);
Sed ang. ACE†ECD=ang. ACD (per 8 ax.);

Ideo & ang. ACD=angulis CAB†ABC (per 1 ax.)
Quod Imò erat demonſtr.

Communis jam addatur angulus BCA

Sic erunt ang. ACD†BCA=ang. CAB†ABC†BCA (per 2 ax.);

Sunt autem ang. ACD † BCA = duobus ang. rectis (per 13 prop.);

Ergo ang. CAB † ABC † BCA = duobus ang. rectis (per 1 ax.).

Quod IIdo erat demonstr.

PROP. XXXIII. THEOR.

Fig. 33

Quæ æquales & parallelas lineas ad easdem partes conjungunt rectæ lineæ, ipsæ etiam sunt æquales & parallelæ.

Sint æquales & parallelæ AB, CD, & ipsas conjungant ad easdem partes rectæ lineæ AC, BD: Dico Imo AC, BD æquales esse, & IIdo etiam inter se parallelas.

Demonstratio.

1. Quod si a puncto A ad punctum D ducatur recta AD (per 1 post.), erunt anguli alterni æquales, scil. angulus BAD = angulo CDA (per 29 prop.);

Est autem linea AB = lineæ CD (per hypoth.). & linea AD est communis utrique triangulo BAD, CDA;

Quare triangulum BAD habet duo latera AB, AD, æqualia duobus lateribus CD, AD, alterius trianguli CDA; ideoque basis AC est æqualis basi BD, & angul. CAD = angul. BDA (per 4 prop.).

Quod Imo erat demonstr.

2. Quo-

2. Quoniam autem iidem anguli CAD, BDA, quos recta AD incidens in duas rectas AC, BD, efficit, alterni ſunt & æquales; erunt igitur rectæ AC, BD, inter ſe parallelæ (per 27 prop.).

Quod IIdo erat demonſtr.

PROP. XXXIV. THEOR.

Fig. 34

Parallelogrammorum ſpatiorum tam latera oppoſita, quam anguli oppoſiti inter ſe æquantur, & illa diameter bifariam ſecat.

Sit parallelogrammum ACDB, ejus autem diameter AD: Dico Imo ACDB parallelogrammi latera oppoſita & angulos oppoſitos inter ſe æquari; & IIdo diametrum AD ipſum bifariam ſecare.

Demonſtratio.

Recta linea AD incidens in parallelas rectas AB, CD, itemque in parallelas AC, BD, efficit angulum BAD=angulo alterno CDA, & angulum BDA=alterno CAD (per 29 prop.); Duo igitur triangula BAD, CDA, quæ habent duos angulos BAD, BDA, duobus angulis CDA, CAD æquales, & præterea unum latus, quod æqualibus adjacet angulis, AD æquale ſive commune, habebunt etiam reliqua latera reliquis lateribus æqualia, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem: nempe latus AB=oppoſito lateri CD,

latus

latus AC=opposito lateri BD, & angulum ABD=opposito angulo ACD (per 26 prop.);

Porro quoniam ang.BAD=ang.CDA
& angul. CAD=ang. BDA (ut supr.ost.)

erunt etiam ang. BAD†CAD=ang. CDA†BDA (per 2 ax.);

Atqui totus angulus BAC=ang. BAD † CAD, & totus ang. BDC=ang. BDA † CDA (per 8 ax.) Ergo totus angulus BAC=toti angulo BDC (per 1 ax.);

Quare parallelogrammi ACDB latera opposita AB, CD, & AC, BD, uti & anguli oppositi BAC, CDB, atque ABD, ACD inter se æquantur. *Quod Imo erat demonstr.*

2. Recta AB=rectæ CD, recta AC=rectæ BD, & angulus B=angulo C (uti jam supra ostendebatur); duo igitur triangula ABD & ACD sunt æqualia (per 4 prop.);

Quare diameter AD, quæ parallelogrammum ACDB in duo æqualia triangula dividit, ipsum bifariam secat.

Quod IIdo erat demonstrand.

PROP. XXXV. THEOR.

Fig. 35

Parallelogramma, super eadem basi & in eisdem parallelis constituta, inter se sunt æqualia.

Sint parallelogramma ABCD, EBCF, super eadem basi BC & in eisdem parallelis AF, BC constituta: Dico *ABCD parallelogrammum esse æquale parallelogrammo EBCF,*

Demon-

Demonſtratio.

Parallelogrammi ABCD latus AD = oppoſito lateri BC, & parallelogrammi EBCF latus EF = eidem oppoſito lateri BC (per 34 prop.);
Ergo latus AD = lateri EF (per 1 ax.),
addatur recta communis DE

Erit AD + DE = EF + DE (per 2 ax.);

Porro latus AB = oppoſito lateri DC (per 34 prop.) & ang. exterior FDC = angulo interior. & oppoſ. DAB (per 29 prop.); Duo igitur triangula EAB, FDC, habent duo latera æqualia, alterum alteri, & angulum angulo æqualem, latus nempe AE = DF, latus AB = DC & angulum EAB = angulo FDC (ut jam ſupra oſtenſ.); ideoque baſis EB eſt æqualis baſi FC,
& triangulum EAB = triang. FDC (per 4 prop.),
commune auferatur triangulum EDG

relinquetur trapezium DABG = trapezio EGCF (per 3 ax.),
commune addatur triangulum GBC

Erit totum parallelogrammum ABCD = toti parallelogrammo EBCF (per 2 ax.)

Quod erat demonſtr.

PROP. XXXVI. THEOR.

Fig. 36

Parallelogramma ſuper æqualibus baſibus & in eisdem parallelis conſtituta inter ſe ſunt æqualia.

Sint parallelogramma ABCD, EFGH, ſuper æqualibus baſibus BC, FG, & in eisdem parallelis AH, *AH, BG conſtituta: Dico parallelogrammum ABCD eſſe æquale parallelogrammo EFGH.*

Demonſtratio.

Conjungantur parallelæ BC, EH, ductis rectis BE, CH, (per 1 poſt.);

Quoniam vero Baſis FG=baſi BC (per hypoth.);
Latus FG=lat. opp. EH (per 34 prop.);

Ergo BC=EH (per 1 ax.);

Cum autem rectæ BC, EH ſunt æquales & parallelæ, erunt quoque rectæ BE, CH æquales & parallelæ (per 33 prop.);

ideoque parallelogram. EBCH=parallelogr. ABCD
item parallelogram. EBCH= parallelogr. EFGH (p. 35 prop.)

Quare parallelogram. ABCD æquale eſt parallelogr. EFGH (per 1 ax).

Quod erat demonſtr.

PROP. XXXVII. THEOR.

Fig. 37

Triangula ſuper eadem baſi & in eisdem parallelis conſtituta ſunt inter ſe æqualia.

Sint triangula ABC, DBC ſuper eadem baſi BC, & in eisdem parallelis AD, BC conſtituta: Dico triangulum ABC, triangulo DBC æquale eſſe.

Con-

Conſtructio.

1. Producatur AD ex utraque parte in puncta E, F, (per 2 poſt.).
2. Per punctum B ipſi CA parallela ducatur BE; per punctum C verò ipſi BD parallela ducatur CF (per 31 prop.);

Demonſtratio.

Parallelogrammum EBCA=parallelogrammo DBCF (per 35 prop.).

Cum vero triangulum ABC eſt dimidium parallelogrammi EBCA, & triangulum DBC eſt dimidium alterius parallelogrammi DBCF (per 34 prop.);

Erunt igitur triangula ABC, DBC, æqualium ſcilicet parallelogrammorum dimidia, inter ſe æqualia (per 7 ax.).

Quod erat demonſtr.

PROP. XXXVIII. THEOR.

Fig. 38

Triangula ſuper baſibus æqualibus & in eisdem parallelis conſtituta ſunt inter ſe æqualia.

Sint triangula ABC, DEF, *ſuper æqualibus baſibus* BC, EF, *& in eisdem parallelis* BF, AD, *conſtituta*: *Dico* ABC *triangulum eſſe æquale triangulo* DEF.

Con-

Conſtructio.

1. Producatur AD ex utraque parte in puncta G, H (per 2 poſt;).
2. Per punctum B, ducatur BG, ipſi AC parallela; per punctum verò F, ducatur FH, ipſi DE parallela (per 31 prop.).

Demonſtratio.

Parallelogrammum BCGA eſt æquale parallelogrammo DEFH (per 36 prop.);

Eſt autem triangulum ABC dimidium parallelogrammi BCGA, & triangulum DEF eſt dimidium parallelogrammi DEFH (per 34 prop.);

Quare triangula ABC, DEF, ſunt inter ſe æqualia (per 7 ax.)

Quod erat demonſtr.

PROP. XXXIX. THEOR.

Fig. 39

Triangula æqualia ſuper eadem baſi & ad easdem partes conſtituta, ſunt in eisdem parallelis.

Sint æqualia triangula ABC, DBC, *ſuper eadem baſi BC conſtituta & ad easdem partes:* Dico *lineam* AD *eſſe parallelam lineæ BC.*

Demonſtratio.

Si è contrario ponatur, lineam AD non eſſe parallelam lineæ BC, ſed aliam quandam, ex. gr. AE,

AE, per punctum A duci poſſe parallelam lineæ BC (per 31 prop.);
Sic erit triang. ABC=trianguloEBC (per 37 prop.);
Atqui triang. ABC=trianguloDBC (per hypoth.);

Erit ergo triang. EBC=triang. DBC (per 1 ax.);

Hoc eſt: totum DBC erit ſuæ parti EBC æquale (contra 9 ax.): Nulla igitur alia linea præter ipſam AD per punctum A duci poteſt parallela lineæ BC; Quare triangula ſuper eadem baſi & ad easdem partes conſtituta, ſunt in eisdem parallelis.

Quod erat demonſtr.

PROP. XL. THEOR.

Fig. 40

Triangula æqualia, ſuper baſibus æqualibus & ad easdem partes conſtituta, ſunt in eisdem parallelis.

Sint triangula æqualia ABC, DCE ſuper æqualibus baſibus BC, CE, & ad easdem partes conſtituta: Dico rectam AD ipſi BE parallelam eſſe.

Demonſtratio.

Si è contrario ponatur linea AD non eſſe lineæ BE parallela, ſed alia quævis, ex. gr. AF, ipſi BE parallela duci poſſe (per 31 prop.);
Sic erit triang. ABC=trianguloFCE (per 38 prop.);
Atqui id. triang. ABC=triang. DCE (per hypoth.)

Erit ergo triang. FCE=triang. DCE (per 1 ax.);

Hoc eſt: Totum DCE æquale erit ſuæ parti FCE, quod eſt abſurdum (per 9 ax.): Nulla igitur alia linea præter ipſam AD, per punctum A duci poteſt parallela lineæ BC; Quare triangula æqualia, ſuper baſibus æqualibus & ad easdem partes conſtituta, ſunt in eisdem parallelis.

Quod erat demonſtr.

PROP. XLI. THEOR.

Fig. 41

Si parallelogrammum & triangulum eandem habeant baſin, ſintque in eisdem parallelis, parallelogrammum ipſius trianguli duplum erit.

Sint parallelogrammum ABCD & triangulum EBC ſuper eadem baſi BC, ſintque in eisdem parallelis BC, AE: Dico parallelogrammum ABCD trianguli EBC duplum eſſe.

Demonſtratio.

Ducta diameter AC parallelogrammum ABCD biſariam ſecabit (per 34 prop.), ideoque triangulum ABC eſt dimidium parallelogrammi ABCD;

Sed idem triangulum ABC eſt æquale triangulo EBC (per 37 prop.);

Ergo etiam triang. EBC eſt dimidium parallelogrammi ABCD (per 37 prop.):

Totum igitur parallelogrammum ABC eſt duplum trianguli EBC.

Quod erat demonſtr.

PROP.

PROP. XLII. PROBL.

Fig. 42

Dato triangulo æquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.

Sit datum triangulum ABC, datus autem rectilineus angulus D: oportet itaque dato triangulo ABC æquale parallelogrammum constituere in angulo rectilineo ipsi D æquali.

Constructio.

1. Secetur recta BC bifariam in E (per 10 prop.);
2. Ducatur recta AE (per 1 post.).
3. Ad rectam EC & punctum in ea E constituatur angulus CEF æqualis ipsi D (per 23 prop.);
4. Per punctum A ducatur AG parallela ipsi BC; per C vero ipsi EF, parallela ducatur CG (per 31 prop.):

Dico FECG esse parallelogrammum desideratum.

Demonstratio.

Recta BE est æqualis rectæ EC (per construct.) ideoque triang. ABE = triang. AEC (per 38 prop.);

Et totum triang. ABC est duplum trianguli AEC
Sed paral. FECG etiam est duplum triangul.

AEC (per 41 prop.);

Ergo parallelogr. FECG = triang. ABC (per 6 ax.):

 Quo-

Quoniam vero angulus FEC æqualis eſt angulo D (per conſtr.); Dato igitur triangulo ABC æquale parallelogrammum FECG conſtitutum eſt in angulo CEF, qui angulo D æqualis eſt.

Quod erat faciendum.

PROP. XLIII. THEOR.

Fig. 43

In omni parallelogrammo complementa eorum, quæ circa diametrum ſunt, parallelogrammorum inter ſe ſunt æqualia.

Sit parallelogrammum ABCD, cujus diameter AC, & circa ipſam AC parallelogramma quidem ſint EH, FG; quæ vero dicuntur complementa, ſint BK, KD: Dico BK complementum complemento KD eſſe æquale.

Demonſtratio.

Quoniam diameter AC bifariam ſecat parallelogramma ABCD, AEKH & KGCF (per 34 prop.); erit triangulum ABC=triang. ADC; triang. AEK=triang. AHK, & denique triang. KGC=triang. KFC (per 5 ax.), ideoque triang. AEK † KGC=triang. AHK † KFC (per 2 ax.); Si jam ab æqualibus triang. ſcil. ABC=ADC auferantur æqualia ſcil. AEK†KGC=AHK † KFC

Relinquetur complem. BK=complemento KD (per 3 ax.).

Quod erat demonſtr.

PROP.

PROP. XLIV. PROBL.

Fig. 44

Ad datam rectam lineam dato triangulo æquale parallelogrammum applicare, in dato angulo rectilineo.

Sit data recta linea AB, datum vero triangulum C & datus angulus rectilineus D: oportet quidem ad datam rectam lineam AB dato triangulo C æquale parallelogrammum applicare in angulo ipsi D æquali.

Constructio.

1. Constituatur triangulo C æquale parallelogrammum BEFG in angulo EBG, qui est æqualis angulo D (per 42 prop.);
2. Ponatur AB in directum ipsi BE (per 2 prop.); & producatur FG, fiatque æqualis rectæ BA (per 3 prop.);
3. Per A alterutri ipsarum BG, EF, parallela ducatur AH (per 31 prop.);
4. Ducatur diagonalis sive diameter HB, & prolongetur usque dum protractæ EF occurrat in K;
5. Per K ducatur ipsi EA, vel etiam ipsi FH parallela KL, lineis GB, HA, protractis occurrens in M & L.

Dico ABLM esse parallelogrammum quæsitum.

Demonſtratio.

ParallelogrammumBEFG=triang.C(p. conſt.); Idemque parallelogr. BEFG=parallelogr. ABLM (per 43 prop.);
Ergo parallelogr. ABLM=triangulo C. (per 1 ax.):

Porro angulus ABM eſt æqualis angulo GBE (per 15 prop.); angulus D eſt æqualis eidem angulo GBE (per conſtr.): Ergo angulus ABM eſt æqualis angulo D (per 1 ax.);

Ad datam igitur rectam lineam AB dato triangulo C æquale parallelogrammum ABLM conſtitutum eſt in angulo ABM, qui eſt æqualis angulo D.

Quod erat faciend.

PROP. XLV. PROBL.

Fig. 45

Rectilineo dato æquale parallelogrammum conſtituere, in dato angulo rectilineo.

Sit datum rectilineum ABCD, datus vero angulus rectilineus E: oportet rectilineo ABCD æquale parallelogrammum conſtituere.

Conſtructio.

1. Ducatur diagonalis ſive diameter DB (per 1 poſt.);

2. Con-

2. Constituatur triangulo ADB æquale parallelogrammum FI in angulo IHF, qui æqualis est angulo dato E (per 42 prop.);
3. Ad rectam lineam LI applicetur triangulo DCB æquale parallelogrammum LK in angulo LIK, qui angulo E est æqualis (per 44 prop.).

Demonstratio.

Triang. DAB=parallelogr. FHIL} (per const.).
& triang. DCB=parallelogr. LIKG}

Ergo DAB†DCB=FHIL†LIKG (per 2 ax.),

Hoc est: Toti rectilineo DABC æquale constitutum est parallelogrammum FHKG, habens angulum FHK, angulo E dato æqualem.

Quod erat faciendum.

PROP. XLVI. PROBL.

Fig. 46

A data recta linea quadratum describere.

Sit data recta linea AB: oportet ab ipsa AB quadratum describere.

Constructio.

1. E punctis A, B, ad angulos rectos ducantur AC, BD (per 11 prop.);
2. A recta AC auferatur AE æqualis datæ rectæ AB (per 3 prop.);
3. Per punctum E ducatur recta EF parallela ipsi AB (per 31 prop.). Dico quadrilaterum AEFB esse quadratum, quod quærebatur.

Demonſtratio.

Duo anguli interiores A & B ſunt recti (per conſtruct.), ideoque rectæ AE, BF, ſunt inter ſe parallelæ (per 28 prop.); recta vero EF eſt parallela rectæ AB (per conſtruct.). Quare AEFB eſt parallelogrammum.

Eſt autem in hoc parallelogrammo AEFB, latus AE=lateri AB (per conſtr.), & latus BF= lateri AE (per 34 prop.); ideoque idem latus BF eſt æquale lateri AB (per 1 ax.); latus denique EF eſt etiam æquale lateri AB (per 34 prop.); Quare quadrilaterum AEFB eſt æquilaterum.

Quoniam vero anguli A, B ſunt recti (per conſtr.), oppoſiti etiam anguli E, F, erunt recti (per 34 prop.), ideoque quadrilaterum AEFB eſt rectangulum.

Oſtenſum igitur eſt quadrilaterum AEFB, ſuper data recta AB deſcriptum, & æquilaterum eſſe & rectangulum; Ergo eſt quadratum (per 30 def.).

Quod erat faciendum.

PROP. XLVII. THEOR.

Fig. 47

In rectangulis triangulis, quadratum, quod à latere rectum angulum ſubtendente deſcribitur, æquale eſt quadratis quæ à lateribus rectum angulum comprehendentibus deſcribuntur.

Sit

Sit triangulum rectangulum ABC rectum habens BAC angulum: Dico quadratum descriptum à recta BC, æquale esse quadratis, quæ ab ipsis BA, AC describuntur.

Constructio.

1. A latere BC describatur quadratum BDEC; ab ipsis vero BA, AC lateribus describantur quadrata GB, HC, (per 46 prop.).
2. Per A alterutri ipsorum laterum BD, CE ducatur parallela AK (per 31 prop.); deinde ducantur rectæ AD, CF, itemque AE, BI (per 1 post.).

Demonstratio.

Angulus BAC est rectus (per hypoth.), angulus BAG etiam est rectus (per 30 def.), duæ igitur rectæ AC, AG sibi invicem in directum positæ sunt, h. e. unam rectam GC constituunt (per 14 prop.);

Porro anguli AGF, BFG sunt recti (per 30 def.); ideoque rectæ lineæ GC, FB sunt inter se parallelæ (per 28 prop.);

1. Conclus. Quare parallelogrammum sive quadratum BAGF est duplum ipsius trianguli BCF, super eadem basi BF & in eisdem parallelis GC, BF constituti (per 41 prop.).

   Rursus recta AK est parallela rectæ BD (per constr.);
2. Conclus. Ergo parallelogrammum BDLK est duplum ipsius trianguli BAD super eadem

baſi BD & in eisdem parallelis AK, BD conſtituti (per 41 prop.).

Cum autem latus BA ſit=lateri BF, & latus BC=lateri BD (per 30 def.),

ſitque præterea rectus ang. FBA=ang. recto DBC (per 10 ax.)

His vero angulis ſi communis addatur ang. ABC;

Erunt anguli FBA + ABC=angulis DBC+ABC (per 2 ax.)

h. e. totus angulus FBC æqualis erit toti ang. ABD (per 8 ax.).

3. Concluſ. Duo igitur triangula FBC, ABD habent duo latera BF, BC duobus lateribus BA, BD æqualia, alterum alteri: latus nempe BA= lateri BF, & latus BC=lateri BD; habent præterea angulum FBC æqualem angulo ABD; ideoque ſunt inter ſe æqualia (per 4 prop.).

Nunc itaque e tribus præcedentibus concluſionibus ita porro argumentari licet:

Quadratum BAFG eſt duplum trianguli BCF (per 1 Concl.);

Parallelogr. BDKL eſt duplum trianguli BDA (per 2 Concl.);

Atqui triangulum BCF=triangulo BDA (per 3 Concl.).

Ergo quadratum BAFG=parallelogr. BDKL (per 6 ax.);

Eodem modo demonſtrabitur quadratum ACIH =parallel. CEKL

Duo igitur quadrata BAFG + ACIH = duobus parallel. BDKL+CEKL (per 2 ax.).

Cum

Cum vero quadr. BDEC = duobus parallel. BDKL + CEKL (per 8 ax.).

Ultima Concl. Erunt itaque duo quadrata BAFG + ACIH = quadrato BDEC (per 1 ax.)

Hoc eſt, Quadratum BDEC, quod a latere BC, rectum trianguli angulum ſubtendente deſcriptum eſt, æquale eſt quadratis BAFG, ACIH, quæ à lateribus AB, AC, rectum angulum BAC comprehendentibus, deſcripta ſunt.

Quod erat demonſtrand.

PROP. XLVIII. THEOR.

Fig. 48

Si quadratum, quod deſcribitur ab uno laterum trianguli, æquale ſit quadratis, quæ à reliquis trianguli lateribus deſcribuntur: angulus à reliquis trianguli lateribus comprehenſus rectus erit.

Sit ABC triangulum, ſitque quadratum, quod ab uno trianguli latere BC deſcribitur, æquale quadratis, quæ à reliquis trianguli lateribus BA, AC, deſcribuntur: Dico angulum BAC rectum eſſe.

Conſtructio.

1. A puncto A ducatur recta AD, ipſi CA perpendicularis (per 11 prop.);
2. Ponatur AD ipſi BA æqualis (per 3 prop.).
3. Ducatur recta DC (per 1 poſt.).

Demon-

Demonſtratio.

Quoniam latus AB=lateri AD (per conſtr.), erit quadratum lateris AB=quadrato lateris AD (per 8 ax.),
Horum utrique addatur quadr. lateris commun. AC

Erunt quadrat. lateris AB+quadr. lat. AC=quadr. lat. AD+quadr. lat. AC (per 2 ax.);
Eſt autem quadratum lateris BC=quadr. AB+ quadr. AC (per hypoth.)
Porro quoniam ang. DAC eſt rectus (per conſtr.),
Erit quadratum lateris DC=quadr. AD+quadr. AC (per 47 prop.); Sed quadr. AD=quadr. AB (ut ſupra);

Ergo quadratum lateris BC=quadrato lateris DC (per 1 ax.).

Æqualium vero quadratorum æqualia ſunt latera, ideoque latus BC=lateri DC (per 8 ax.).

Duo igitur triangula BAC, DAC habent duo latera AB, AC duobus lateribus DA, AC æqualia habent vero & baſin, BC, baſi DC æqualem (uti jam ſupra oſtenſum eſt); Ideoque angulum BAC æqualem angulo DAC habebunt (per 8 prop.).

Rectus autem eſt angulus DAC (per conſtr.).

Ergo angulus BAC eſt recto æqualis, hoc eſt, ipſe angulus BAC eſt rectus.

Quod erat demonſtr.

PHILO-