Lager’s Law

I.

Sei $K(t)$ das Vermögen pro Kopf (genauer: pro Arbeitsstunde) zum Zeitpunkt t, σ die Sparquote, w der Lohnsatz und r die Ertragsrate des Vermögens, dann gilt *Lager’s Law*:

$$\frac{\mathrm{d}K(t)}{\mathrm{d}t} = \sigma\big(w + rK(t)\big).$$

Unter der Annahme, dass σ, w und r zeitunabhängig sind, ist das eine *lineare inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung*, die man mit der Methode der unbestimmten Koeffizienten lösen kann. Für ein gegebenes Anfangsvermögen $K(0) = K_0$ lautet die Lösung wie folgt:

$$K(t) = \left(K_0 + \frac{w}{r}\right)e^{\sigma rt} - \frac{w}{r}.$$

Langfristig (d.h. für große Werte von t) gilt:

$$\frac{dK(t)}{dt}\frac{1}{K(t)} \to \sigma r.$$

Das heißt, langfristig wird das Vermögenswachstum von der Ertragsrate (und der Sparquote) bestimmt.

II.

Dass σ und r zeitunabhängig sind, kann man akzeptieren. Aber w ist nicht konstant, sondern wächst ungefähr mit der Rate des Produktivitätswachstums g:

$$w(t) = w_0 e^{gt}.$$

In diesem Fall muss die Differentialgleichung mittels *Eulers Substitutionsmethode* gelöst werden. Die Lösung lautet, für $g \neq \sigma r$,

$$K(t) = \left(K_0 - \frac{\sigma w_0}{g - \sigma r}\right)e^{\sigma rt} + \frac{\sigma w_0}{g - \sigma r}e^{gt}.$$

Wir definieren:

$$v \equiv 1 - \frac{(g - \sigma r)}{\sigma w_0 K_0}.$$

Somit erhalten wir:

$$K(t) = vK_0 e^{\sigma rt} + (1 - v)K_0 e^{gt}.$$

Für die Wachstumsrate des Vermögens erhalten wir:

$$\frac{dK(t)}{dt}\frac{1}{K(t)} = \frac{\sigma r}{1 + \frac{1 - v}{v}e^{(g-\sigma r)t}} + \frac{g}{\frac{v}{1 - v}e^{(\sigma r - g)t} + 1}.$$

Man kann drei Fälle unterscheiden: (i) Normalfall $g > \sigma r$; (ii) Picketty-Szenario $g < \sigma r$; (iii) Knife-Edge-Szenario $g = \sigma r$. Im Normalfall gilt

$$\frac{dK(t)}{dt}\frac{1}{K(t)} \to g,$$

d.h. das Vermögenswachstum wird langfristig vom Lohnwachstum (Produktivitätswachstum) getrieben. Im Picketty-Fall gilt:

$$\frac{dK(t)}{dt}\frac{1}{K(t)} \to \sigma r,$$

d.h. das Vermögenswachstum wird langfristig von der Ertragsrate getrieben. Im dritten Fall gilt (trivialerweise):

$$\frac{dK(t)}{dt}\frac{1}{K(t)} \to \sigma r = g$$

III.

Eine plausible Kalibrierung wäre $\sigma = 0{,}2$, $g = 0{,}01$ und $r = 0{,}04$. In diesem Fall erhält man:

$$K(t) = (K_0 - 100w_0)e^{0{,}002t} + 100w_0e^{0{,}01t}.$$

Messen wir Vermögen in Arbeitsstunden zum Zeitpunkt 0, d.h. $w_0 = 1$, und gehen wir von einem Ausgangsvermögen von 1.000 Arbeitsstunden aus, d.h. $K_0 = 1.000$. Dann erhalten wir:

$$K(t) = 0{,}9e^{0{,}002t} + 0{,}1e^{0{,}01t}.$$

$$\frac{dK(t)}{dt}\frac{1}{K(t)} = \frac{0{,}008}{1 + 9e^{0{,}002t}} + \frac{0{,}01}{0.11e^{-0{,}002t} + 1}.$$

Hier wächst das Vermögen zunächst mit einer Rate zwischen 0,8 und 1 Prozent und nähert sich langsam dem Produktivitätswachstum von 1 Prozent an.