## 6.4. Skaičiavimo jėgų metodu kontrolės

**Koeficientų ir laisvųjų narių kontrolės**

Paprastai, kai statinio neišsprendžiamumo laipsnis **k**, jėgų metodo kanoninės lygtys, skaičiuojant nuo išorinės apkrovos, bus:

$$\begin{cases} \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \cdots + \delta_{1k}x_k + u_{1f} = 0, \\ \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \cdots + \delta_{2k}x_k + u_{2f} = 0, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \delta_{k1}x_1 + \delta_{k2}x_2 + \cdots + \delta_{kk}x_k + u_{kf} = 0. \end{cases}$$

Jas išsprendus, randami pagrindiniai jėgų metodo nežinomieji – apibendrintosios jėgos $x_1$, $x_2$, ..., $x_k$. (pašalintųjų ryšių reakcijos). Suklydus, skaičiuojant bet kurį koeficientą ar laisvąjį narį, tolesnis skaičiavimas praranda bet kokią prasmę. Norėdami to išvengti, tikriname koeficientus ir laisvuosius narius.

Kanoninių lygčių koeficientams ir laisviesiems nariams skaičiuoti sudarėme momentų diagramas nuo vienetinių nežinomųjų – $\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$, ..., $\overline{M}_k$. Sudarome dar vieną – suminę momentų diagramą nuo visų kartu veikiančių vienetinių nežinomųjų

$$\overline{M}_\Sigma = \overline{M}_1 + \overline{M}_2 + \cdots + \overline{M}_k.$$

1

Kanoninių lygčių laisvieji nariai – pagrindinės sistemos poslinkiai pašalintųjų ryšių kryptimis nuo išorinės apkrovos yra apskaičiuojami:

$$u_{1f} = \sum \frac{1}{EI}\int_0^L \overline{M}_1 M_f\,ds, \quad u_{2f} = \sum \frac{1}{EI}\int_0^L \overline{M}_2 M_f\,ds, \ , \ \ldots, \quad u_{kf} = \sum \frac{1}{EI}\int_0^L \overline{M}_k M_f\,ds.$$

Pagrindinės sistemos suminis poslinkis nuo išorinės apkrovos bus apskaičiuojamas analogiškai

$$u_{\Sigma f} = \sum \frac{1}{EI}\int_0^L \overline{M}_\Sigma M_f\,ds.$$

Įrašome $\overline{M}_\Sigma = \overline{M}_1 + \overline{M}_2 + \cdots + \overline{M}_k$ ir turėsime

$$u_{\Sigma f} = \sum \frac{1}{EI}\int_0^L \left(\overline{M}_1 + \overline{M}_2 + \cdots + \overline{M}_k\right) M_f\,ds = \sum \frac{1}{EI}\int_0^L \left(\overline{M}_1 M_f + \overline{M}_2 M_f + \cdots + \overline{M}_k M_f\right) ds =$$

$$= \sum \frac{1}{EI}\int_0^L \overline{M}_1 M_f\,ds + \sum \frac{1}{EI}\int_0^L \overline{M}_2 M_f\,ds + \cdots + \sum \frac{1}{EI}\int_0^L \overline{M}_k M_f\,ds = u_{1f} + u_{2f} + \cdots + u_{kf}.$$

Taigi $\quad u_{\Sigma f} = u_{1f} + u_{2f} + \cdots + u_{kf}.$

2

$$u_{\Sigma f}=u_{1f}+u_{2f}+\cdots+u_{kf}.$$

Pagrindinės sistemos suminis poslinkis nuo išorinės apkrovos yra lygus kanoninių lygčių laisvųjų narių sumai.

Jeigu ši lygybė negalioja, suklydome skaičiuodami kurį nors laisvąjį narį $u_{1f}$, $u_{2f}$, …, $u_{kf}$. Klaida gali būti padaryta ir skaičiuojant suminį poslinkį $u_{\Sigma f}$.

Kanoninių lygčių koeficientai – pagrindinės sistemos poslinkiai atmestųjų ryšių kryptimis nuo vienetinių jėgų $F_1$, $F_2$, …, $F_k$ yra apskaičiuojami:

$$\delta_{11}=\sum\frac{1}{EI}\int_0^L\overline{M}_1\overline{M}_1 ds,\quad \delta_{12}=\sum\frac{1}{EI}\int_0^L\overline{M}_1\overline{M}_2 ds,\quad ,\ \ldots,\quad \delta_{kk}=\sum\frac{1}{EI}\int_0^L\overline{M}_k\overline{M}_k ds.$$

Pagrindinės sistemos suminis poslinkis nuo visų vienetinių jėgų, veikiančių vienu metu, bus apskaičiuojamas analogiškai

$$\delta_{\Sigma\Sigma}=\sum\frac{1}{EI}\int_0^L\overline{M}_\Sigma\overline{M}_\Sigma ds.$$

3

Į

$$\delta_{\Sigma\Sigma}=\sum\frac{1}{EI}\int_0^L\overline{M}_\Sigma\overline{M}_\Sigma ds$$

įrašome $\overline{M}_\Sigma=\overline{M}_1+\overline{M}_2+\cdots+\overline{M}_k$ ir turėsime

$$\delta_{\Sigma\Sigma}=\sum\frac{1}{EI}\int_0^L\left(\overline{M}_1+\overline{M}_2+\cdots+\overline{M}_k\right)\cdot\left(\overline{M}_1+\overline{M}_2+\cdots+\overline{M}_k\right)ds=$$

$$=\sum\frac{1}{EI}\int_0^L\left(\overline{M}_1\overline{M}_1+\overline{M}_1\overline{M}_2+\cdots+\overline{M}_k\overline{M}_k\right)ds=$$

$$=\sum\frac{1}{EI}\int_0^L\overline{M}_1\overline{M}_1 ds+\sum\frac{1}{EI}\int_0^L\overline{M}_1\overline{M}_2 ds+\cdots+\sum\frac{1}{EI}\int_0^L\overline{M}_k\overline{M}_k ds=\ \delta_{11}+\ \delta_{12}+\cdots+\delta_{kk}.$$

Taigi

$$\delta_{\Sigma\Sigma}=\delta_{11}+\delta_{12}+\cdots+\delta_{kk}.$$

Pagrindinės sistemos suminis poslinkis nuo visų vienetinių jėgų yra lygus kanoninių lygčių visų koeficientų sumai.

Jeigu ši lygybė negalioja, suklydome skaičiuodami kurį nors koeficientą $\delta_{11}$, $\delta_{22}$, …, $\delta_{kk}$. Klaida gali būti padaryta ir skaičiuojant suminį poslinkį $\delta_{\Sigma\Sigma}$.

4

## Kanoninių lygčių sprendimo kontrolė

Išsprendus kanonines lygtis

$$\begin{cases} \delta_{11}x_1+\delta_{12}x_2+\cdots+\delta_{1k}x_1+u_{1f}=0, \\ \delta_{21}x_1+\delta_{22}x_2+\cdots+\delta_{2k}x_2+u_{2f}=0, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \delta_{k1}x_1+\delta_{k2}x_2+\cdots+\delta_{kk}x_k+u_{kf}=0, \end{cases}$$

randami pagrindiniai jėgų metodo nežinomieji – apibendrintosios jėgos $x_1$, $x_2$, ..., $x_k$ (pašalintųjų ryšių reakcijos). Tam sprendžiama kanoninių lygčių sistema. Suklydus ją skaičiuojant, tolesnis skaičiavimas praranda bet kokią prasmę. Norint to išvengti, būtina patikrinti skaičiavimus: į visas lygtis (ar į suminę kontrolinę lygtį) įrašome apskaičiuotas $x_1$, $x_2$, ..., $x_k$ reikšmes.

Jeigu visos lygtys (ar suminė kontrolinė lygtis), įrašius į jas apskaičiuotas $x_1$, $x_2$, ..., $x_k$ reikšmes, negalioja, suklydome spręsdami kanonines lygtis (arba klaida atsirado atliekant kontrolę).

5

## Kinematinė kontrolė

Apskaičiavus tikrąsias statiškai neišsprendžiamos sistemos įrąžas (rėmui ar sijai – lenkimo momentus $M$), galima lengvai patikrinti, ar jos teisingos, remiantis kanoninėmis lygtimis:

$$\begin{cases} \delta_{11}x_1+\delta_{12}x_2+\cdots+\delta_{1k}x_k+u_{1f}=0, \\ \delta_{21}x_1+\delta_{22}x_2+\cdots+\delta_{2k}x_k+u_{2f}=0, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \delta_{k1}x_1+\delta_{k2}x_2+\cdots+\delta_{kk}x_k+u_{kf}=0. \end{cases}$$

Pagrindinės sistemos poslinkiai pašalintųjų ryšių kryptimis, kai ją veikia visos jėgos kartu (apkrova ir pagrindiniai nežinomieji $x_1$, $x_2$, ..., $x_k$), turi būti lygūs nuliui.

Apskaičiuojame pagrindinės sistemos poslinkį 1-ojo pašalintojo ryšio kryptimi:

$$u_1=\sum\frac{1}{EI}\int_0^L \overline{M}_1 M\,ds$$

(integruojame tikrąją lenkimo momentų $M$ diagramą su vienetine momentų diagrama $\overline{M}_1$).

Ir šis poslinkis turi būti lygus nuliui, t. y.

$$u_1=\sum\frac{1}{EI}\int_0^L \overline{M}_1 M\,ds=0.$$

6

Jeigu ši lygybė $u_1=\sum\frac{1}{EI}\int_0^L\overline{M}_1Mds=0$ negalioja, suklydome skaičiuodami tikruosius momentus $M=M_f+\overline{M}_1\cdot x_1+\overline{M}_2\cdot x_2+\ldots+\overline{M}_k\cdot x_k$ arba skaičiuodami bent vieną iš koeficientų $\delta_{11}$, $\delta_{12}$, …, $\delta_{1k}$ arba laisvąjį narį $u_{1f}$.

Analogiškai apskaičiuojame pagrindinės sistemos poslinkį 2-ojo pašalintojo ryšio kryptimi:

$$u_2=\sum\frac{1}{EI}\int_0^L\overline{M}_2Mds$$

(integruojame tikrąją lenkimo momentų $M$ diagramą su vienetine momentų diagrama $\overline{M}_2$).

Ir šis poslinkis turi būti lygus nuliui, t. y.

$$u_2=\sum\frac{1}{EI}\int_0^L\overline{M}_2Mds=0.$$

Jeigu ši lygybė $u_2=\sum\frac{1}{EI}\int_0^L\overline{M}_2Mds=0$ negalioja, suklydome skaičiuodami tikruosius momentus $M=M_f+\overline{M}_1\cdot x_1+\overline{M}_2\cdot x_2+\ldots+\overline{M}_k\cdot x_k$ arba skaičiuodami bent vieną iš koeficientų $\delta_{21}$, $\delta_{22}$, …, $\delta_{2k}$ arba laisvąjį narį $u_{2f}$.

Ir taip galima patikrinti visų $k$ pašalintųjų ryšių kryptimis.

7

Užuot tikrinę $k$ kartų, galime atlikti vieną, universalų patikrinimą. Pažymėję

$$u_\Sigma=u_1+u_2+\cdots+u_k=0$$

ir įvertinę, kad $u_1=\sum\frac{1}{EI}\int_0^L\overline{M}_1Mds$, $u_2=\sum\frac{1}{EI}\int_0^L\overline{M}_2Mds$ ir t. t., gauname

$$u_\Sigma=\sum\frac{1}{EI}\int_0^L\overline{M}_1Mds+\sum\frac{1}{EI}\int_0^L\overline{M}_2Mds+\cdots+\sum\frac{1}{EI}\int_0^L\overline{M}_kMds=$$

$$=\sum\frac{1}{EI}\int_0^L\left(\overline{M}_1+\overline{M}_2+\cdots+\overline{M}_k\right)Mds=\sum\frac{1}{EI}\int_0^L\overline{M}_\Sigma Mds=0.$$

T. y.

$$u_\Sigma=\sum\frac{1}{EI}\int_0^L\overline{M}_\Sigma Mds=0$$

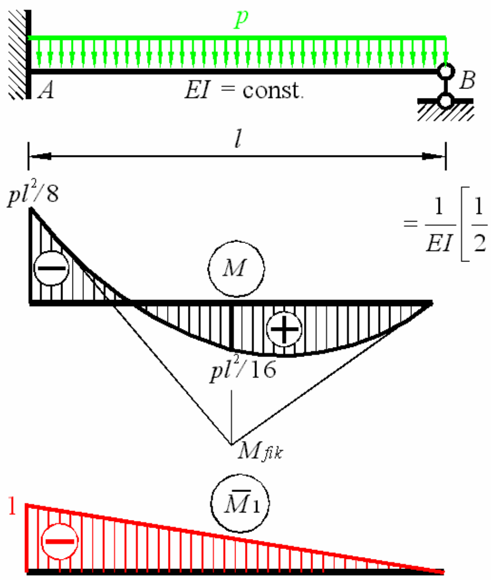
Šios statiškai neišsprendžiamos sistemos suminis poslinkis nuo išorinės apkrovos yra lygus nuliui.

Jeigu ši lygybė negalioja, suklydome skaičiuodami tikruosius momentus $M=M_f+\overline{M}_1\cdot x_1+\overline{M}_2\cdot x_2+\ldots+\overline{M}_k\cdot x_k$ arba skaičiuodami bent vieną iš koeficientų $\delta_{ij}$ arba laisvųjų narių $u_{if}$.

8

**Pavyzdys**

Esame sudarę pateiktos sijos $M$ diagramą. Reikia atlikti jos kinematinę kontrolę.




Tam ją integruojame su $\overline{M}_1$ diagrama.

$$u_1 = \sum \frac{1}{EI} \int_0^L \overline{M}_1 M ds =$$

$$= \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}\left(-\frac{pl^2}{8}\right)\cdot l \cdot \frac{2}{3}\cdot(-1) + \left(\frac{pl^3}{12}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot(-1)\right] = 0.$$

Gerai!

9

**Statinė kontrolė**

Išsprendę statiškai neišsprendžiamą strypinę sistemą, žinome jos tikrąsias įrąžas: lenkimo momentus, skersines ir ašines jėgas. Nagrinėdami šios strypinės sistemos atraminių mazgų pusiausvyrą, randame atramines reakcijas.

Parašę skaičiuojamos statiškai neišsprendžiamos strypinės sistemos statikos pusiaussvyros lygtis

$$\begin{cases} \sum F_x = 0, \\ \sum F_y = 0, \\ \sum M_i = 0, \end{cases}$$

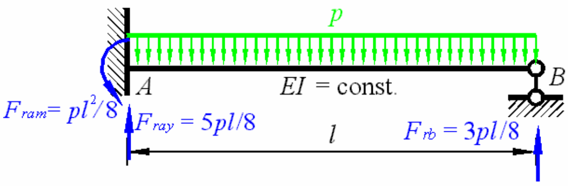
turėsime statinę kontrolę.

Jeigu statikos pusiausvyros lygtys negalioja, suklydome skaičiuodami arba skersines ar (ir) ašines jėgas, arba atramines reakcijas, arba klaidos reikia ieškoti pačiose statikos pusiausvyros lygtyse. Jei ten klaidos nėra – neteisingai apskaičiuoti pagrindinės sistemos momentai nuo išorinės apkrovos arba bent nuo vienos vienetinės jėgos.

10

**Pavyzdys**

Esame apskaičiavę pateiktos sijos atramines reakcijas. Reikia atlikti sijos statinę kontrolę.




Rašome šios sijos statikos pusiausvyros lygtis

$$\begin{cases} \sum F_x = 0, \\ \sum F_y = 0, \\ \sum M_i = 0. \end{cases}$$

Sijos neveikia jokia horizontalioji jėga. Taigi ir horizontalioji reakcija atramoje $A$ (schemoje nepažymėta) $F_{rax} = 0$.

$$\sum F_y = 0; \quad p \cdot l - \frac{5}{8} p \cdot l - \frac{3}{8} p \cdot l = 0; \quad \text{Gerai!}$$

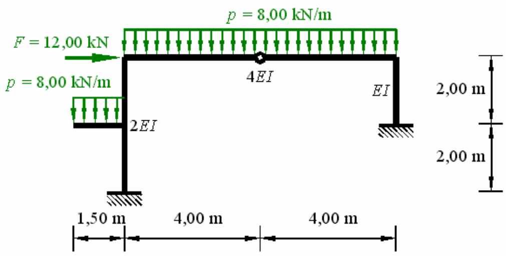
$$\sum M_a = 0; \quad \frac{p \cdot l^2}{8} - p \cdot l \cdot \frac{l}{2} + \frac{3}{8} p \cdot l \cdot l = 0. \quad \text{Gerai!}$$

11

## 6.5. Statiškai neišsprendžiamo rėmo skaičiavimo jėgų metodu pavyzdžiai

**1 pavyzdys**

Reikia sudaryti pateikto rėmo lenkimo momentų ($M$), skersinių ($V$) ir ašinių ($N$) jėgų diagramas bei apskaičiuoti šio rėmo rygelio horizontaliojo poslinkio reikšmę nuo pateiktos apkrovos.




Šis rėmas yra du kartus statiškai neišsprendžiamas:

**K=1, L=1, k = 3 x 1 – 1 = 2.**

Jėgų metodo kanoninės lygtys:

$$\begin{cases} \delta_{11} \cdot x_1 + \delta_{12} \cdot x_2 + u_{1f} = 0, \\ \delta_{21} \cdot x_1 + \delta_{22} \cdot x_2 + u_{2f} = 0. \end{cases}$$

1