Autour de pratiques algébriques de Poincaré : héritages de la réduction de Jordan

Frederic Brechenmacher

Autour de pratiques algébriques de Poincaré (1878-1885)

Par *

Résumé. Cet article propose un regard transversal sur les travaux menés par Poincaré entre 1878 et 1885.

L'étude est amorcée à partir de la courte note « Sur les nombres complexes » publiée en 1884. Cette note paraît isolée dans l'œuvre de Poincaré et permet pour cette raison de problématiser les cloisonnements disciplinaires rétrospectifs selon lesquels ont souvent été décrits les travaux de ce dernier. La note a en effet été présentée comme le point d'origine de la reconnaissance du rôle joué par l'algèbre des matrices dans les théories des algèbres associatives et de Lie, ouvrant ainsi la voie aux développements de relations entre ces deux théories et à de premiers résultats sur leurs structures. Nous montrons cependant que l'identité originelle de cette note n'était pas sous-tendue par une notion ou une théorie mais par une pratique algébrique de classification de groupes linéaires par réduction canonique (dite de Jordan) de leurs substitutions et qui s'avère jouer un rôle transversal dans les travaux de Poincaré.

Nous questionnons alors les innovations individuelles que manifeste une telle pratique au regard de différentes échelles collectives de circulations des textes. Nous montrons en particulier le rôle joué par l'appropriation par Poincaré des travaux de Jordan sur les groupes linéaires au prisme de l'héritage d'Hermite sur la réduction des formes algébriques. Cet héritage mêlé irrigue l'ensemble des travaux de Poincaré entre 1878 et 1885. Il est en particulier au cœur de travaux –jusqu'à présent très peu commentés- sur la théorie algébrique des formes ainsi que du développement de la célèbre théorie des fonctions fuchsiennes.

En amont des travaux de Poincaré, l'article étudie aussi le problème de la circulation du théorème de réduction canonique de Jordan dans les années 1870. En aval, nous questionnons le rôle des travaux de Poincaré pour la transmission d'un héritage jordano-hermitien dans les procédés du « calcul des Tableaux » tels que les développeront plus tard des mathématiciens comme Autonne ou Châtelet.

Introduction

Henri Poincaré est souvent présenté comme l'un des derniers grands mathématiciens universels. Sa figure contraste avec une dynamique de spécialisation et de morcellement des sciences mathématiques.[1] De fait, ce savant était contemporain de la montée en puissance de disciplines centrées sur des objets (groupes finis, groupes continus, algèbres associatives etc.) face aux « branches » en lesquelles se divisaient traditionnellement l'organisation des sciences mathématiques en France (Analyse, Géométrie, Mécanique, Physique mathématique etc.). Mais si les interventions de Poincaré dans des disciplines variées ont souvent été mises au crédit de capacités individuelles exceptionnelles, ces mêmes interventions peuvent aussi s'analyser comme témoignant d'organisations collectives antérieures aux découpages disciplinaires.

Cet article prend pour point de départ une courte note publiée par Poincaré en 1884 et intitulée « Sur les nombres complexes ». Du point de vue des disciplines et théories qu'elle sollicite (algèbres associatives et de Lie), cette note semble isolée dans l'œuvre du savant.[2] Pour cette raison, elle a souvent été prise en exemple de la capacité de Poincaré à saisir des éléments essentiels de théories diverses. Nous montrerons au contraire que la note de 1884 témoigne d'une pratique algébrique transversale aux travaux menés par Poincaré au début des années 1880.

L'arithmétique et l'algèbre figurent parmi les principaux points aveugles de l'historiographie de la première décennie de travaux de Poincaré. Toutes deux se prêtent d'ailleurs mal aux découpages disciplinaires par lesquels ont été organisées les *Œuvres complètes* du savant.[3] En effet, l'algèbre n'avait pas au XIX^{e} siècle en France un statut de discipline de recherche [Brechenmacher et Ehrhardt 2010]. D'un côté, elle renvoyait traditionnellement à une discipline scolaire (l' « algèbre élémentaire ») ou intermédiaire (l' « algèbre supérieure ») menant vers le point de vue plus élevé de l'Analyse enseignée à l'École polytechnique. D'un autre côté, l'algèbre était souvent considérée par

---

[1] Pour un regard d'ensemble sur les travaux de Poincaré et leur historiographie, voir [Nabonnand 2000].

[2] Poincaré ne s'est en effet pas intéressé à la théorie des algèbres associatives et ses principaux travaux sur les groupes continus sont plus tardifs et publiés après la mort de Lie en 1899 (comme le théorème dit de Poincaré-Birkhoff-Witt). Voir [Schmid 1982] et [Ton-That & Tran 1999].

[3] Ces classements par disciplines, loin d'être neutres, ont été largement basés sur l'analyse faite par Poincaré de ses propres travaux [Poincaré 1921], analyse elle même basée sur la forme institutionnelle des candidatures à l'Académie.

les savants comme un ensemble de procédés au service des différentes branches des sciences mathématiques. L'introduction du *Cours d'analyse de l'École polytechnique* de Camile Jordan présentait ainsi l'algèbre comme un « lien commun » entre ces branches [Jordan 1882, p.1]. L'identité « algébrique » de procédés opératoires était par conséquent intrinsèquement liée aux phénomènes collectifs de tels procédés entre différents domaines.

Questionner les pratiques algébriques de Poincaré donne donc l'occasion de porter un éclairage non disciplinaire et transversal sur la première décennie des travaux du géomètre. De fait, les mathématiques dont nous allons nous préoccuper dans cet article comme la *réduction canonique de Jordan* ou le *calcul des Tableaux* traversent *tous* les tomes des *Œuvres* de Poincaré. Nous retrouverons notamment le lien entre l'émergence de la célèbre théorie des fonctions fuchsiennes et des travaux sur les formes quadratiques et cubiques. Bien qu'il n'ait été que rarement commenté par l'historiographie, ce lien a joué un rôle clé dans l'attribution par Poincaré d'une place centrale à la notion de groupe à partir de 1881-1882.

La question principale que nous adresserons à ces pratiques algébriques est celle des articulations entre l'innovation individuelle et différentes échelles de dimensions collectives et temporelles. En bref : en quoi peut-on parler de pratiques algébriques *de* Poincaré ? Nous questionnerons notamment les rôles joués par les héritages des travaux de Charles Hermite et de Jordan. Les travaux du premier sur la réduction des formes algébriques s'inscrivaient dans le champ de recherche de l'analyse-algébrique-arithmétique qui s'était développé entre les années 1820 et 1850 [Goldstein 2007, p. 391-396]. Comme nous le verrons, c'est par la médiation de l' « idée de réduite » de cet héritage non disciplinaire que Poincaré s'appropriait les travaux du second sur les groupes linéaires. Une étude fine de la circulation de la pratique de réduction canonique de Jordan dans les années 1870 nous donnera aussi l'occasion de préciser l'héritage de ce dernier dans l'évolution de la théorie des groupes.

Afin de mener un tel programme, il s'avère avant tout nécessaire de nous affranchir des organisations disciplinaires qui nous sont contemporaines. Parmi celles-ci, l'algèbre linéaire est particulièrement problématique car non seulement elle n'existait pas en tant que discipline au XIX^e^ siècle, mais ses principaux objets n'avaient pas le caractère élémentaire qu'ils revêtent aujourd'hui. Dans l'objectif d'éviter les écueils des approches rétrospectives, la note « Sur les nombres complexes » nous servira de point d'ancrage à partir duquel nous construirons progressivement une problématique et les différents corpus pertinents pour l'étude de celle-ci.

Dans la première partie de cet article nous questionnons le rôle attribué à cette note par l'historiographie de l'algèbre. Nous montrerons que ce rôle fait écho à une lecture rétrospective de ce texte dans le cadre de la théorie des algèbres associatives et de Lie.[4] Nous verrons en revanche qu'au sein de l'œuvre de Poincaré elle même, l'identité de la note « Sur les nombres complexes » n'était pas portée par une théorie mais par une pratique algébrique permettant la classification de groupes linéaires par réduction canonique de leurs substitutions.

Nous reviendrons alors dans la seconde partie de cet article sur l'introduction par Jordan de la réduction canonique des substitutions linéaires dans le cadre de travaux sur les groupes résolubles dans les années 1860. Nous présenterons ensuite la circulation de la réduction de Jordan dans les années 1870, circulation complexe et transversale à différents cadres théoriques parmi lesquels l'intégration algébrique des équations différentielles linéaires et la théorie algébrique des formes.

Dans la troisième partie, nous verrons la médiation d'un héritage hermitien changer la nature de cette pratique de réduction canonique lors de son appropriation par Poincaré. Nous questionnerons alors plus avant l'apport individuel de Poincaré quant aux développements ultérieurs de la pratique de réduction des « Tableaux » ainsi qu'au regard d'autres cadres avec lesquels interférait Poincaré comme les matrices de James-Joseph Sylvester.

[4] Sur la notion historique de lecture d'un texte, voir [Goldstein 1995].

1. Regards rétrospectifs sur la note « Sur les nombres complexes »

Présentons tout d'abord rapidement en des termes actuels la note « Sur les nombres complexes » de 1884.[5] Ce texte se propose de « ramener » le problème de la classification des systèmes hypercomplexes, c'est à dire des algèbres associatives unitaires et de dimensions finies sur ℂ, à celui de la classification des groupes continus. Etant donné un système hypercomplexe de base $e_1, \ldots, e_n$ dont la table de multiplication est définie par les n^3 constantes de structures a_{ij}^k, telles que

$$e_i e_j = \sum_{k=1}^{n} a_{ij}^k e_k$$

on associe à un élément générique $u = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i$, la transformation linéaire $T_u: x \to y = xu$ (représentation régulière). Cette transformation est linéaire pour les variables x_i et y_k et pour les paramètres u_j tels que [6]

$$y_k = \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^k u_j \right] x_i$$

La loi de composition des transformations du « groupe » peut être associée à la multiplication du système hypercomplexe : $T_u T_v = T_{uv}$. Chaque élément de base e_i de H peut ainsi être représenté par une matrice E_i de $M_n(\mathbb{C})$ et le produit $e_i e_j$ par le produit matriciel $E_i E_j$. Une matrice correspondant à un élément générique $T_u = \sum_{i=1}^{n} u_i E_i$ est non singulière, l'ensemble des matrices non singulières formant un sous groupe de Lie à n paramètres de $Gl_n(\mathbb{C})$, groupe de Lie dont les « transformations infinitésimales » forment l'algèbre de Lie $M_n(\mathbb{C})$ (le crochet étant le commutateur).

Ce procédé de représentation régulière permet l'étude de la structure des algèbres associatives par l'étude des structures polynomiales d'invariants polynomiaux comme l'équation caractéristique $det(T_u - \omega I) = 0$. Jusqu'à la première décennie du XX^e siècle, la plupart des approches sur la classification des algèbres associatives ou des groupes continus allaient s'appuyer sur de tels procédés polynomiaux. Ces procédés n'en étaient pas moins variés.

Dans sa note de 1884, Poincaré aborde ces problèmes de classification par l'examen des « formes canoniques » dites de Jordan auxquelles peuvent être réduites les substitutions linéaires à coefficients complexes. De telles formes dépendent de la multiplicité des racines de l'équation caractéristique. Poincaré résout d'abord en quelques lignes le cas des groupes commutatif dont il donne une classification en en réduisant leurs substitutions aux types suivants de Tableaux canoniques: [7]

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 & 0 \\ c & b & a & 0 & 0 \\ d & c & b & a & 0 \\ e & d & c & b & a \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d & c \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e \end{vmatrix},$$

Le reste de la note est alors consacré au cas non commutatif. En s'appuyant sur des décompositions de Tableaux à leurs formes canoniques, Poincaré introduit une distinction entre deux types de systèmes de "nombres complexes", selon que ceux-ci contiennent ou non les quaternions. En termes

---

[5] Ce texte est disponible à l'adresse http://gallica2.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3055h.image.f740.langFR

[6] Dans les années 1890, Cartan allait désigner sous le nom de « groupes bilinéaires » les monoïdes formés de telles transformations à n variables et n paramètres indépendants dans les équations duquel les paramètres entrent linéairement.

[7] Ce résultat revient à dire que les matrices commutant avec toutes les matrices commutant avec une matrice donnée x s'expriment comme des polynômes scalaires de x. Voir [Wedderburn 1934, p. 106] pour une formulation matricielle.

actuels, ces deux systèmes prennent respectivement les formes $M_{n_1}(\mathbb{C}) + \cdots + M_{n_K}(\mathbb{C}) + N$ et $\mathbb{C}+\mathbb{C}...+\mathbb{C}+N$ où N est le radical de l'algèbre. Les premiers possèdent une série de composition d'idéaux bilatères de dimensions *1,2,…,n* et contiennent une sous algèbre isomorphe à l'algèbre des quaternions.

1.1 La note de Poincaré comme point d'origine

> Le problème des nombres complexes se ramène facilement au suivant : *Trouver tous les groupes continus de substitutions linéaires à* n *variables dont les coefficients sont des fonctions linéaires de* n *paramètres arbitraires.* [Poincaré 1884d, p 740].

Des travaux consacrés à l'histoire de l'algèbre linéaire ont attribué aux quelques lignes ci-dessus une origine des relations mathématiques entre groupes continus (de Lie) et systèmes hypercomplexes. A la suite de Thomas Hawkins [1972], Karen Parshall [1985] a qualifié de « tradition anglo-américaine » des travaux d'auteurs comme Arthur Cayley ou Benjamin Peirce qu'elle a caractérisés par la reconnaissance commune d'un acte fondateur, la « découverte » des quaternions par William Rowan Hamilton en 1843, ainsi que par une position épistémologique partagée consistant à « considérer [les] algèbres comme des objets mathématiques satisfaisant certaines propriétés ». D'un autre côté, le qualificatif de « tradition de la théorie de Lie » a été utilisé pour désigner des recherches effectuées sur le continent européen « dans le but d'une meilleure compréhension des groupes de transformations et non des entités algébriques étudiées pour elles mêmes ».

La note du 3 novembre 1884 viendrait alors jeter un pont entre deux théories identifiées à deux aires géographiques et culturelles. Plus encore, la rencontre initiée par Poincaré serait à l'origine d'une unification théorique permettant l'emploi des méthodes « intrinsèques » de la théorie des groupes (indépendantes du choix d'une base) pour les classifications des algèbres et ouvrirait la voie à « des découvertes significatives de la théorie de leur structure » :[8]

> By the late 1890s, as a result of the research efforts on both sides of the Atlantic, hypercomplex number systems came to define a distinct area of math investigation […]. Poincaré recognized that
> (1) the algebras analogous to the quaternions which Sylvester was studying were algebras of matrices,
> (2) each element in these algebras defined a linear transformation, and
> (3) the theory of continuous transformation groups developed by Lie could be applied to these linear transformations. [Parshall 1985, p.227 & 262].

Prenant place dans le cadre d'histoires de théories algébriques, ces commentaires sur la note de 1884 se sont attachés à en situer l'origine. Les premières lignes du texte ont été interprétées comme énonçant qu'à un élément u d'une algèbre A, il est possible d'associer une transformation, la translation à gauche par u, permettant de représenter A comme une sous algèbre de $Mn(\mathbb{C})$, elle même susceptible d'être munie d'une structure d'algèbre de Lie associée au groupe de Lie $Gln(\mathbb{C})$. L'origine de la note a alors été attribuée à la "reconnaissance" par Poincaré du rôle essentiel joué par l'algèbre des matrices à la fois dans la théorie des algèbres associatives et dans celle des algèbres de Lie. Plus encore, cette reconnaissance a été qualifiée de « préliminaire indispensable » aux développements ultérieurs des deux théories :

> It was undoubtly Sylvester's matrix representation of quaternions and nonions that prompted Poincaré's remark. In fact, the examples that Poincaré gave of "bilinear groups" (as we shall call them following E. Cartan) were presented in matrix form […]. Also of particular importance is the recognition of the special class of hypercomplex systems which we shall term complete matrix algebras. By this we mean systems whose elements can be expressed in the form
>
> $$\Sigma a_{ij}\, e_{ij}$$
>
> where the n^2 basis elements e_{ij} multiply according to the rule
>
> $$e_{ij}e_{kl} = \delta_{jk}e_{il}$$

[8] Au sujet des systèmes hypercomplexes au tournant des XIX^e^ et XX^e^ siècles, voir [Cartan et Study 1908]. Sur les groupes continus et transformations infinitésimales, voir [Burkhardt, Maurer, Vessiot 1916].

> Interest in complete matrix algebras and recognition that the (complex) quaternions are of this type was a necessary preliminary to, and instrumental in, the discovery of the important role they play in the general structure theory of hypercomplex systems. [Hawkins 1972, p. 249].

1.2 Structuration mathématique et structuration historique

L'attribution à la note de 1884 d'un rôle d'*origine* reflète ainsi une architecture mathématique dont nous sommes contemporains, présentant l'algèbre des matrices comme un *préliminaire* élémentaire à des développements plus complexes en algèbre linéaire. Plus encore, nous avons vu que cette architecture mathématique sous-tend une présentation de la note comme un pont entre deux aires géographiques et culturelles. La rencontre initiée par Poincaré serait non seulement à l'origine d'une unification théorique mais aussi, et en conséquence, à la base d'une sorte de culture commune.

Or, comme nous allons le voir par la suite, une attention à la technicité des pratiques mises en œuvre dans la note de 1884 amène à reconnaître que ce texte ne joue en fait pas de rôle particulier dans la rencontre de grands courants de recherches. De fait, en raison du rôle joué par l'algèbre linéaire dans l'architecture mathématique qui nous est contemporaine, l'anachronisme terminologique porté par des éléments de cette discipline comme les matrices implique rapidement des résonnances conceptuelles. Or celles-ci se doublent souvent d'un anachronisme sociologique convoquant des situations sociales inadéquates qui font obstacle à l'analyse des échanges scientifiques ou de la valorisation des résultats.[9] Afin d'éviter un tel écueil, il faut restituer les significations qu'un même texte a pu prendre au cours de l'histoire en questionnant les identités mathématiques qui lui ont été attachées dans différents contextes.

De fait, les significations données par Poincaré à son travail de 1884 ne sont pas les mêmes que celles pour lesquelles Georg Scheffers attribuera à cette note en 1890 une origine de ses résultats sur la structure des systèmes hypercomplexes. Elles diffèrent également du rôle d'origine qui sera prêté à cette même note par des mathématiciens qui, dans les années 1930, attribueront un statut universel à la notion de matrice. Il s'avère donc nécessaire d'historiciser de telles catégories d'origines en questionnant parallèlement celles de diffusions qui leurs sont souvent attachées. Comme nous allons le voir, le miroir, par lequel structurations historique et mathématique de théories algébriques semblent se refléter l'une et l'autre, a en particulier été poli par les mathématiciens qui ont conféré à la notion de matrice un caractère élémentaire au sein d'architectures mathématiques qui se sont mises en place, localement, à partir de 1890 mais n'ont fait l'objet d'une culture partagée qu'à partir des années trente du XX^e^ siècle [Brechenmacher 2010].[10]

Plus précisément, Scheffers avait attribué à la note de 1884 la distinction entre deux types d'algèbres associatives qui était à la base de sa propre approche. Sur le modèle des travaux de Sophus Lie, Scheffers avait en effet transposé la distinction entre groupe continu résoluble (intégrable) et non résoluble aux systèmes hypercomplexes de quaternions et de « non quaternions » [Scheffers 1891, p. 293]. La distinction de Scheffers permettait des premiers résultats sur les structures des algèbres associatives et allait jouer un rôle important sur des travaux ultérieurs comme ceux de Theodor Molien. Scheffers était pourtant parvenu à une telle distinction indépendamment de Poincaré et n'avait d'ailleurs attribué un rôle à ce dernier que rétrospectivement, sur insistance de Sophus Lie lui même.[11] Il avait en effet constaté de manière empirique sur des tables de multiplications de systèmes hypercomplexes que l'invariant polynomial donné par l'équation minimale du système se décompose en facteurs linéaires lorsque le système ne contient pas de copie des quaternions.

---

9 Il s'agit là d'un résultat de [Goldstein 2004, p 39] qui éclaire la position singulière de Fermat dans une configuration sociale de pratiques et de savoirs dont il domine le fonctionnement et les enjeux propres. Voir aussi [Goldstein 1999, p. 189].

10 L'écriture de l'histoire par des textes mathématiques a été étudiée à de nombreuses reprises. Voir, entre autres, [Cifoletti 1995], [Goldstein 1995], [Brechenmacher 2006b & 2007a].

11 Voir [Hawkins 1972 & 2000]. Avant Scheffers, Study avait déjà adressé en 1889 un courrier à Poincaré dans lequel il attribuait à la note de 1884 l'origine des relations entre systèmes hypercomplexes et groupes de Lie.

Dans le même temps qu'il attribuait à la note de Poincaré la première reconnaissance des relations entre algèbres associatives et de Lie, Scheffers conférait aux matrices un statut élémentaire se déclinant à deux niveaux. Ces dernières étaient en effet présentées à la fois comme exemple le plus simple d'algèbre associative ou de Lie et comme un cas particulier essentiel dans les premiers résultats de classification et de structure. La présentation historique donnée par Scheffers de sa propre théorie en reflétait l'organisation mathématique : elle était présentée comme unifiant des travaux continentaux de Carl Gauss, Hermann Grassmann, Georg Frobenius ou Lie et des travaux anglo-américains comme ceux de Cayley, Peirce, William Clifford etc. [12]

Plus tard, dans les années 1930, le traité intitulé *The theory of matrices* de Cyrus Colton Mac Duffee attribuait à Poincaré l'origine du résultat selon lequel toute algèbre associative unitaire simple sur $\mathbb{C}$ peut être représentée comme une sous algèbre d'une algèbre de matrices, version qui allait être reprise par [Hawkins, 1972] et [Parshall, 1985]. Ce théorème donnait une justification théorique de l'introduction de la notion de matrice et la référence à la note de Poincaré intervenait donc dès les premières pages du traité de Mac Duffee. Mais cet ouvrage développait aussi une histoire des matrices et allait d'ailleurs souvent être cité comme tel avant que ne soient publiés des travaux historiques à partir des années 1960-1970. Il proposait en effet systématiquement des notes visant à identifier les origines des mathématiques exposées par des références bibliographiques. Comme chez Scheffers, et comme dans la structuration historique mentionnée dans le premier paragraphe du présent article, cette référence apparaissait à la croisée de travaux continentaux et anglo-américains.

A une échelle plus large, si les nombreux traités contemporains de celui de Mac Duffee étaient loin d'offrir des présentations théoriques et historiques unifiées des matrices, ils s'articulaient tous néanmoins autour d'une même structure générale. Selon cette dernière, à la reconnaissance d'une origine du « concept de matrice comme nombre hypercomplexe, due en essence à Hamilton mais plus directement à Cayley » [Mac Duffee 1933, p.4] succédaient des « redécouvertes multiples » de l'algèbre des matrices sur le continent, comme chez Edmond Laguerre (1867) ou Frobenius (1878). La note de Poincaré intervenait dans le cadre de cette seconde origine comme permettant de « percevoir les matrices dans leur généralité », préliminaire à une « diffusion » large de cette notion sur le continent.

1.3 Problématiques

Nous avons vu qu'une lecture de la note de Poincaré dans le cadre de l'architecture de la théorie des algèbres en a fait le point d'origine d'une des notions élémentaires de cette théorie. Cette lecture historique et mathématique est apparue localement dans les années 1890 et s'est perpétuée jusqu'à nos jours malgré tous les développements ultérieurs des mathématiques et de l'histoire des mathématiques. Elle nous est par conséquent contemporaine et peut donner l'illusion d'un caractère universel.

Pourtant, l'inscription de la note de 1884 dans la théorie des algèbres isole celle-ci dans l'œuvre de Poincaré. En outre, le caractère fondateur attribué à ce texte semble difficilement conciliable avec le fait que l'approche qu'il met en œuvre ne sera en réalité pas poursuivie par les mathématiciens développant la théorie des systèmes hypercomplexes avant Élie Cartan [1898].[13] Par ailleurs, en l'absence d'algèbre linéaire, la question de la notion de matrice s'avère délicate. En effet, si le terme « matrice » était bien employé par Poincaré dans sa note pour faire référence aux travaux de Sylvester, il n'était pas mobilisé de manière opératoire dans les démarches et résultats du savant. Nous verrons plus loin que ce terme n'était en réalité que très rarement employé par Poincaré et prenait une signification très différente de celles qui lui sont attachées aujourd'hui. Il nous faudra

[12] Le mémoire de Scheffers faisait notamment suite à des travaux de Dedekind, Kronecker et Study sur des systèmes commutatifs qui avaient été impulsés par des remarques de Weierstrass en 1884 sur l'arithmétique des entiers de Gauss.

[13] Sans pour autant que ce dernier ne fasse explicitement référence au texte de Poincaré. Voir à ce propos l'interprétation donnée par [Poincaré 1903] de la représentation des groupes de Frobenius dans le cadre de l'approche de Cartan des groupes continus et systèmes hypercomplexes.

donc questionner l'édifice mathématique qui nous est familier en ne prenant pas pour acquis le caractère élémentaire des matrices ou même le fait que cette terminologie identifie une notion ou une théorie.

Identifier les innovations que Poincaré introduisait dans sa note de 1884 nécessitera donc de développer des problématiques alternatives aux questionnements rétrospectifs en termes d'origines et diffusions de notions abstraites ou théories unificatrices. Il nous faudra en particulier être attentif aux significations prises par la note dans d'autres corpus que ceux correspondant au découpage disciplinaire rétrospectif de l'algèbre linéaire. Les enjeux de ces problématiques ne sont pas limités à des rectifications d'anachronismes ou à une quête d'érudition. En effet, ceux-ci sont intrinsèquement liés à des questions relatives à la manière dont les pratiques et savoirs circulent à différentes échelles collectives et temporelles. Pour prendre en compte de tels phénomènes de circulation, il s'avère alors nécessaire d'envisager une histoire culturelle complexe qui ne se réduise pas à des écoles ou courants de recherche identifiés à des aires géographiques ou à des institutions. De nombreux travaux ont notamment mis en évidence les rôles joués par des *réseaux de textes* dont les identités sont souvent problématiques mais qui s'avèrent néanmoins nécessaires à la mise en évidence d'innovations individuelles au regard de dynamiques collectives.[14]

2. Une pratique locale : réduction canonique et représentation analytique des substitutions

Comme nous allons le voir dans cette partie, une attention à la technicité des pratiques algébriques mises en œuvre dans la note de 1884 permet d'éclairer la place de ce texte dans l'œuvre de Poincaré.[15] Le terme « pratique algébrique », tel que nous l'employons ici, vise à questionner des identités algébriques sans dissocier *a priori* des procédés mathématiques et des aspects culturels propres aux groupes de textes dans lesquels de tels procédés circulent.[16] Comme nous le verrons par la suite, le recours de Poincaré à la réduction canonique des substitutions introduite par Jordan en 1868-1870 ne s'identifie pas à une méthode au sein d'un cadre théorique explicite. Mais il ne se limite pas non plus à un usage mécanique de procédés opératoires et manifeste au contraire des valeurs épistémiques de simplicité et de généralité.

2.1. La note de 1884 au sein de l'œuvre de Poincaré

Considérons tout d'abord les références explicites et implicites de la note de 1884. La première ligne contient l'unique référence explicite du texte : « les remarquables travaux de M. Sylvester sur les matrices ont attiré de nouveau l'attention dans ces derniers temps sur les nombres complexes analogues aux quaternions de Hamilton ». Plus précisément, Poincaré explicite la relation entre ses travaux et ceux de Sylvester de la manière suivante :

> Si l'on considère […] un groupe donnant naissance à des nombres complexes à multiplication non commutative, et une substitution quelconque S de ce groupe, si l'on forme l'équation aux multiplicateurs de cette substitution (équation aux racines latentes des matrices de M. Sylvester), cette équation aura toujours des racines multiples. [Poincaré 1884, p. 740]

La référence aux matrices ne vise donc pas à identifier une théorie unificatrice mais à mettre en relation des travaux récents de Sylvester avec le « problème » de la détermination de « types » de groupes à n paramètres auquel était consacré la note. En outre, le transfert de résultats sur les groupes aux nombres complexes procède de la reconnaissance d'une identité entre des procédés polynomiaux mobilisés pour ces deux types de questions et qui associent des problématiques de commutativité à des occurrences de racines multiples d'une équation spécifique. Poincaré s'appuie

[14] Voir notamment [Goldstein 1999, p. 204-212] et [Goldstein et Schappacher 2007b, p. 72-75].

[15] Un procédé similaire a été employé par [Goldstein 1993] pour l'étude sur le temps long des relations entre analyse diophantienne et descente infinie.

[16] Le sens spécifique pris ici par le terme « pratique algébrique » ne correspond donc pas à aux usages qui peuvent être faits du terme « pratique mathématique » en général pour distinguer les pratiques de travail de mathématiciens des formes finales données aux résultats mathématiques.

en effet sur l'efficacité de sa pratique de réduction canonique pour aborder des problématiques pour lesquelles Sylvester avait élaboré, comme nous le verrons plus loin, sa pratique des « équations aux racines latentes ».

Mais d'autres références sont implicitement portées par le vocabulaire employé. Ainsi, l'étude des groupes à paramètres (référence à Lie) manifeste l'ancrage de la note dans une série de textes publiée par Poincaré depuis 1881. Ces textes abordent des problèmes de classification des sous groupes finis du groupe linéaire à la suite des travaux de Jordan (termes « substitutions », « faisceaux » et « forme canonique ») et de Félix Klein (« substitution parabolique »).

Ce vocabulaire révèle donc des liens vers d'autres travaux de Poincaré contemporains de la note du 3 novembre 1884. Un examen de ces travaux révèle un investissement fréquent de la pratique de réduction canonique sur laquelle la note s'avère basée. Le 11 février de cette même année, Poincaré avait ainsi adressé à l'Académie une note intitulée « Sur les substitutions linéaires », qui venait répondre à des travaux récents d'Emile Picard [1882-1883], et dont l'objet était de généraliser aux substitutions à trois variables (sur $\mathbb{C}$), qui « conservent l'hypersphère » $x^2+y^2+z^2=1$, et de la forme :

$$(x, y, z\ ;\ \frac{ax+by+cz}{a''x+b''y+c''z}\ ,\ \frac{a'x+b'y+c'z}{a''x+b''y+c''z}),$$

une classification donnée en 1881 aux groupes fuchsiens de substitutions linéaires réelles qui n'altèrent pas le cercle fondamental :[17]

$$\frac{ax+by}{a'x+b'y}\ ,$$

Cette classification procédait d'une distinction entre substitutions loxodromiques, hyperboliques, elliptiques et paraboliques à la suite des travaux de [Jordan, 1868b] sur les groupes de mouvement puis des classifications données par [Klein, 1875] et [Jordan, 1876] aux sous groupes finis de $Gl_2(\mathbb{C})$.

La note du 11 février 1884 s'inscrivait donc dans une problématique de généralisation des groupes fuchsiens aux « groupes hyperfuchsiens », problématique que Poincaré développait en se fendant d'une nouvelle note dès le 25 février [Poincaré, 1884b]. Comme dans les travaux de [Jordan, 1878] qui étendaient aux sous groupes finis de $Gl_3(\mathbb{C})$ une classification donnée en 1876 aux sous groupes finis de $Gl_2(\mathbb{C})$, cette généralisation était d'abord supportée par la réduction canonique de la *représentation analytique des substitutions* en fonction de la multiplicité des racines caractéristiques α, β, γ :

> On peut, par un changement convenable de variables, amener cette substitution à l'une des formes suivantes, que l'on peut appeler *formes canoniques* :
>
> (A) $(x, y\ ;\ \alpha x, \beta y, \gamma z),\ \alpha \gtrless \beta \gtrless \gamma$,
> (B) $(x, y, z\ ;\ \alpha x, \beta y+z, \beta z),\ \alpha \gtrless \beta$,
> (C) $(x, y, z\ ;\ \alpha x, \beta y, \beta z),\ \alpha \gtrless \beta$,
> (D) $(x, y, z\ ;\ \alpha x+y, \alpha y+z, \alpha z)$,
> (E) $(x, y, z\ ;\ \alpha x, \alpha y+z, \alpha z)$,
>
> [Poincaré, 1884a, p.349]

Cette pratique allait être investie dans d'autres travaux de Poincaré afin de supporter des généralisations de résultats obtenus pour 2 variables à 3 ou même n variables. Ainsi, la première partie du mémoire « Sur les groupes des équations linéaires » publié en 1884 dans *Acta Mathematica*, était entièrement consacrée à l'exposé de la réduction canonique des substitutions linéaires de n variables [Poincaré, 1884e, p. 300-313]. Le recours à cette pratique dépassait d'ailleurs

[17] C'est-à-dire, l'étude des sous groupes discrets de $PSL_2(\mathbb{R})$ et de leur domaine fondamental dans le plan hyperbolique. Le cas des sous groupes de $PSL_2(\mathbb{C})$ et des polyèdres de l'espace hyperbolique était dénommé « groupes kleinéens ».

le cadre des groupes discontinus comme lors de la détermination des formes algébriques homogènes de *n* variables reproductibles par des groupes continus non commutatifs [Poincaré, 1883b].[18]

Envisagée du point de vue de la pratique de réduction canonique qui y est mise en œuvre, la note de 1884 sur les nombres complexes et les groupes continus est donc loin d'apparaître isolée au sein de l'œuvre de Poincaré. Elle s'insère au contraire au sein d'un corpus de textes dominé par des problématiques de classification des groupes associés aux équations différentielles linéaires.

Ce corpus lui-même s'insère dans un ensemble de travaux contemporains de ceux de Poincaré sur les thèmes des équations aux dérivées partielles et des équations différentielles linéaires et impliquant des auteurs comme Lazarus Fuchs, Frobenius, Wilhelm Thomé, Lie, Klein, Francesco Brioschi, Jules Tannery, Paul Appel, Georges Halphen, Gaston Floquet, Picard, Édouard Goursat, Felice Casorati etc. Jeremy Gray a bien mis en évidence la diversité d'approches des acteurs de l'époque : développement en séries, analyse complexe, invariants et covariants, groupes de substitutions ou de transformations etc. [Gray 2000]. Cette diversité reflète notamment une diversité de pratiques des substitutions ou des équations. Elle se manifeste aussi par une variété d'analogies avec l'étude des équations algébriques : groupes continus de Lie, notion d'équation irréductible de Frobenius, groupes de monodromie de Jordan, recours par Poincaré à la notion de résolvente de « Gallois » (sic.) telle que l'avait mobilisé Klein, revendication d'une théorie dite de Galois différentiel par Picard [Archibald 2011].

Dans un tel contexte, le recours par Poincaré à la réduction canonique des substitutions linéaires se présente comme une des spécificités des travaux de ce dernier. Cette pratique de réduction tranchait en effet par rapport aux approches par lesquelles d'autres auteurs abordaient les problèmes posés par l'occurrence de racine caractéristiques multiples. Lie, par exemple, s'appuyait sur une approche générique écartant le problème de la multiplicité des racines,[19] Frobenius ou Klein utilisaient des invariants polynômiaux, les diviseurs élémentaires introduits par Weierstrass en 1868, tandis que Brioschi, Fuchs ou Tannery recouraient à des trigonalisation des systèmes linéaires [Tannery 1875, p. 135-138].

Le problème posé par la place de la note de novembre 1884 dans l'œuvre de Poincaré nous conduit donc finalement à interroger la spécificité de la réduction canonique mise en œuvre par ce dernier. Or ce problème doit être envisagé à une échelle plus large que les travaux des années 1870-1880 sur les équations différentielles. En effet, la représentation analytique des substitutions avait été mise en avant au début du XIX^{e} siècle par Louis Poinsot puis Évariste Galois à la suite des travaux de Gauss sur les équations cyclotomiques.[20] Dans les travaux de Galois, elle s'était accompagnée de procédures de réductions (ou décomposition) des groupes qui s'articulaient, d'une part, aux substitutions fractionnaires linéaires de deux variables des équations modulaires et, d'autre part, aux substitutions linéaires de *n* variables associées à aux groupes primitifs résolubles. Or ces deux types de substitutions avaient par la suite sous-tendu deux formes distinctes d'héritages des travaux de Galois : le premier avait particulièrement été étudié par Hermite dans les années 1850 [Goldstein 2011], tandis que le second avaient été abondamment développé par Jordan dans les années 1860 [Brechenmacher 2011].

[18] Des considérations sur les groupes de Lie accompagnaient aussi les travaux sur les groupes fuchsiens. Par exemple, afin de montrer que certaines classes d'équation différentielles relèvent bien de l'étude de groupes linéaires discontinus, Poincaré pouvait supposer la présence d'un groupe continu de substitutions infinitésimales pour aboutir à une contradiction [Poincaré 1884c & 1885].

[19] L'approche générique de Lie a été discutée en détail par comparaison aux travaux indépendants menés à l'époque par Killing dans un cadre géométrique et qui s'appuyaient quant à eux sur les diviseurs élémentaires de Weierstrass [Hawkins 1972 & 2000]. Le remplacement des méthodes de Killing par la réduction canonique de Jordan fait l'objet de [Poincaré 1901, p. 216-252]

[20] Au sujet de la « théorie de l'ordre » de Poinsot, voir [Boucard 2011].

Comme nous allons le voir, la synthèse qui devait résulter de l'héritage mêlé des travaux d'Hermite et de Jordan allait constituer un apport crucial de Poincaré tant ces deux héritages relevaient de pratiques distinctes des substitutions linéaires.

2.2. La réduction des substitutions linéaires chez Jordan (1860-1870)

Comme nous allons le voir plus en détail dans cette section, la réduction canonique des substitutions linéaires sur des entiers *mod. p* avait d'abord été énoncée par Jordan en 1868 dans le cadre d'une étude des sous groupes résolubles de $Gl_2(F_p)$. Elle avait ensuite été présentée sous la forme d'un théorème dans le chapitre du *Traité des substitutions et des équations algébriques* consacré au groupe linéaire $Gl_n(F_p)$ [Jordan 1870, p.114].

Dès l'introduction de la thèse qu'il avait soutenue en 1860, Jordan avait attribué un caractère « essentiel » à une « méthode de réduction » qu'il avait rattaché au cadre de la « théorie de l'ordre » en revendiquant l'héritage de Poinsot. Cette théorie avait été présentée comme transversale à la théorie des nombres (cyclotomie, congruences), l'algèbre (équations, substitutions), l'analyse (groupes de monodromie et lacets d'intégration des équations différentielles linéaires), la géométrie/ topologie (cristallographie, symétries des polyèdres et des surfaces (y compris de Riemann)) et la mécanique (mouvements des solides), thèmes qui allaient représenter l'essentiel des préoccupations de Jordan jusqu'en 1867-1868.[21] En particulier, le procédé de réduction d'un groupe en sous groupes avait été envisagé comme une sorte de dévissage par analogie avec la décomposition du mouvement hélicoïdal d'un solide en mouvements de rotation et de translation. Cette analogie était notamment développée dans l'étude de 1868 sur les groupes de mouvement de solides polyédraux pour laquelle Jordan s'inspirait des travaux de cristallographie de Bravais.

Comme Jordan devait s'en apercevoir en concluant sa thèse, sa « méthode de réduction » généralisait un résultat déjà énoncé et partiellement démontré par Galois. Plus précisément, ce dernier s'était appuyé sur ce qu'il avait désigné comme la « méthode de décomposition de M. Gauss » des équations cyclotomiques [Neumann 2007], pour réduire le problème de la recherche des groupes résolubles transitifs (correspondant à des équations irréductibles) au cas des groupes primitifs.

Soit G un groupe transitif opérant sur un *ensemble* V. Un sous ensemble V_1 de V est appelé un bloc d'imprimitivité si $V_1 \neq \emptyset$ et si pour tout $g \in G$, soit $V_1^g = V_1$ ou $V_1^g \cap V_i = \emptyset$. Si V_1 est un tel bloc et $V_1, V_2, \ldots, V_m$ ses orbites distinctes V_1^g pour $g \in G$, alors $\{V_1, V_2, \ldots, V_m\}$ est une partition de V. G est dit primitif s'il n'existe aucun bloc non trivial d'imprimitivité. Soit à présent G un groupe résoluble, transitif et imprimitif. Une partition maximale en systèmes d'imprimitivités $\{V_1, V_2, \ldots, V_m\}$ peut être mise en correspondance avec une décomposition de G en sous groupes normaux $\Gamma, \Gamma', \Gamma''\ldots$ tels que :

- $\Gamma, \Gamma', \Gamma'', \ldots$ laissent respectivement stable chaque système V_i, ces groupes sont tous isomorphes à un groupe Γ.
- le groupe Δ, de permutation des ensembles V_i, est isomorphe au groupe quotient G/Γ^n.

Le choix d'une décomposition maximale garantit la primitivité des groupes Δ et Γ qui permettent de dévisser G c'est-à-dire de l'écrire comme le produit semi-direct de Δ *et* Γ^n

La généralisation du procédé d'indexation des racines cyclotomiques à l'aide d'une racine primitive de l'unité g – que Poinsot avait commenté en 1808 en termes d' « ordre » et de « groupes » [Boucard, 2011] – permet de répartir les racines d'une équation imprimitive en blocs d'imprimitivité correspondant à une décomposition des substitutions du groupe associé en deux formes de

[21] Cette articulation de différentes problématiques manifeste une dimension collective à une échelle européenne que nous désignons sous le nom du *champ de recherche* des *solides réguliers* dans [Brechenmacher 2012] afin de mettre en avant un motif commun à un ensemble de textes mêlant arithmétique, algèbre, analyse, géométrie-topologie et cinématique. Les interprétations de Schwarz et Klein sur les polyèdres et les surfaces de Riemann en lien avec les équations différentielles linéaires se rattachent notamment à des travaux de Jordan dans ce champ. L'unité de ce champ se disloque cependant progressivement dans les années 1880-1890 pour disparaître au tournant du siècle avec le développement de la théorie des groupes et de la topologie.

cycles selon que ceux-ci translatent les éléments d'un bloc, forme *(x x+1,)* ou opèrent par rotation sur les blocs eux-mêmes, forme *(x gx).*

Galois avait alors démontré qu'un groupe primitif permutant un nombre premier p de lettres est résoluble si et seulement si ses substitutions ont une « forme linéaire » (*x ax+b*). Galois comme Jordan utilisait en effet le terme « linéaire » pour ce que nous désignerions comme un sous groupe du groupe affine $AGl_2(F_p)$. Plus encore, il avait énoncé une généralisation de ce résultat au cas d'un groupe résoluble primitif permutant $q=p^n$ lettres, n quelconque. Un groupe résoluble primitif ne peut en effet permuter qu'une puissance d'un nombre premier de lettres : ce résultat avait été énoncé par Galois et Jordan devait tenter de le démontrer dans un supplément ajouté à sa thèse de 1860 [Jordan 1861].[22]

Dans sa thèse, Jordan s'appuyait sur le fait qu'un groupe primitif résoluble G a pour sous groupe normal A minimal l'ensemble des substitutions de la forme $(x, y, z, \ldots; x+\alpha, x+\beta, x+\gamma, \ldots)$, qui forment donc en termes actuels un produit direct de groupes cycliques correspondant au groupe multiplicatif du corps fini F_q. Jordan démontrait alors que les substitutions de G agissant sur A prennent une forme analytique linéaire :

$$\begin{vmatrix} x & ax+bx'+\ldots \\ x' & a'x+b'x'+\ldots \\ \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{vmatrix} \text{ ou } |x,x',\ldots\ ax+bx'+\ldots,a'x+b'x'+\ldots|$$

En termes actuels, un groupe primitif résoluble opère sur son groupe normal minimal comme un sous groupe de $Gl_m(F_q)$. Comme l'avait fait Galois pour son critère de résolubilité des équations primitives de degré premier, la démonstration de Jordan consistait à engendrer la forme analytique des substitutions linéaires par des compositions de transvections *(x x+1)* et dilatations *(x gx)*.

Plus tard, dans le *Traité* de 1870, la recherche de la représentation analytique du plus grand groupe ayant pour sous groupe normal un p-groupe abélien élémentaire allait être présentée comme suscitant l' « origine du groupe linéaire » [Jordan 1870, p. 91]. En termes actuels, le groupe linéaire était ainsi défini comme le normalisateur d'un p-groupe abélien élémentaire (lui même un espace vectoriel sur F_p). Si F est un sous groupe normal minimal d'un groupe fini résoluble G, alors F est un p-groupe abélien élémentaire et G agit sur F comme un groupe de transformations linéaires et peut donc être représenté par $Gl_n(F_p)$.[23]

La méthode de représentation linéaire employée par Jordan s'inscrivait dans une méthode plus générale dont ce dernier allait faire un usage fréquent dans les années 1870 et consistant à dévisser un groupe à partir de son socle. Si F est un sous groupe normal minimal de G, le centralisateur $C_G(F)$ est normal (il s'agit du socle de G) et $G/ C_G (F)$ est isomorphe à un sous groupe de $Aut(F)$ (dans le cas étudié par Jordan, F, abélien élémentaire, est son propre centralisateur ; il s'identifie donc avec le socle de G) [Dieudonné 1962].

Cette origine du groupe linéaire jouait en fait un rôle clé dans la pièce maitresse du *Traité*, à savoir le *Livre IV* consacré à la recherche des sous groupes résolubles maximaux du groupe symétrique. Dans ce cadre, la « méthode de réduction » de 1860 s'était muée en une « gigantesque récurrence sur le degré N de l'équation » [Dieudonné 1962, p. xxxix] qui procédait d'une réduction du genre du groupe du « général » au « simple » : groupes transitifs, primitifs, linéaires, symplectiques etc. Le rôle essentiel attribué au groupe linéaire tenait à ce que ce dernier s'avérait le premier maillon de la chaîne de réduction dont les substitutions disposaient d'une représentation analytique.

Dans les années 1860, les travaux de Jordan s'étaient focalisés sur l'étude des sous groupes résolubles de $Gl_n(F_p)$. Le mémoire « Sur la résolution algébrique des équations primitives de degré

[22] Voir à ce sujet [Neumann 2006].

[23] Dans les années 1890, ce théorème allait être reformulé comme énonçant que le groupe des automorphismes d'un p-groupe abélien élémentaire est un groupe linéaire. Voir [Brechenmacher 2011].

p^2 », publié en 1868 dans le *Journal de Liouville*, visait ainsi à donner la classification des sous groupes résolubles de $Gl_2(F_p)$, une problématique que l'auteur présentait comme dépassant les explorations menées par Galois dans son « Fragment d'un second mémoire » [Jordan 1868a, p. 113].

C'est dans ce contexte que Jordan avait d'abord introduit la forme canonique des substitutions linéaires pour deux variables. Il s'agissait de représenter des classes de groupes par la forme analytique de leurs substitutions en recherchant un « changement d'indices » tel que l'action de $S=|x\ y\ ,\ ax+by\ a'x+b'y|$ se réduise à multiplier $z=mx+ny$ « par un simple facteur constant » $Sz \equiv kz$ *mod.p*. Le problème amenait à considérer le système de deux équations linéaires $ma+na' \equiv km$ et $mb+nb' \equiv km$:

> [...] qui détermineront le rapport $\frac{m}{n}$ pourvu que l'on prenne pour k une racine de la congruence
>
> $$\begin{vmatrix} a-k & a' \\ b & b'-k \end{vmatrix} \equiv 0 \text{ (mod. } p).$$

Jordan avait alors distingué trois « formes » auxquelles ramener S selon que la « congruence caractéristique » admette deux racines réelles distinctes α, β, deux racines imaginaires distinctes $\alpha+\beta i, \alpha+\beta i^p$ (où $i^2 \equiv e[p]$) ou une racine double :

$$\begin{vmatrix} z & \alpha z \\ u & \beta u \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z & (\alpha+\beta i)z \\ u & (\alpha+\beta i^p)u \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z & \alpha z \\ u & \beta z+\gamma u \end{vmatrix}$$

Deux ans plus tard, la réduction canonique donnait corps à l'un des principaux théorèmes du chapitre clé du *Traité* consacré aux substitutions linéaires. Il s'agissait de ramener une substitution linéaire $A=|x,x',\ldots\ ax+bx'+\ldots,\ a'x+b'x'+\ldots,\ldots|$ de p^n indices « à une forme aussi simple que possible ». Comme dans le cas de la réduction des groupes imprimitifs opérée par Jordan dans sa thèse, cette forme était obtenue en articulant la décomposition polynomiale de la congruence caractéristique à une réduction de la forme analytique de la substitution en fonction de l'action de celle-ci sur des blocs des indices. En termes actuels, la démonstration de Jordan procédait d'une décomposition d'un espace vectoriel de dimension finie sur un corps fini sous l'action d'un opérateur linéaire (la notion sous-jacente d'espace vectoriel véhicule cependant une interprétation géométrique implicite absente de l'approche de Jordan en 1870).[24]

Le résultat mettait en évidence le rôle de modèle joué par la décomposition de la forme linéaire en deux formes de représentations analytiques de cycles dans la tradition des travaux de Gauss, Poinsot et Galois :

> Cette forme simple
>
> $$\begin{vmatrix} y_0, z_0, u_0, \ldots, y'_0, \ldots & K_0 y_0, K_0(z_0+y_0), K_0(u_0+z_0), \ldots, K_0 y'_0 \\ y_1, z_1, u_1, \ldots, y'_1, \ldots & K_1 y_1, K_1(z_1+y_{10}), K_1(u_1+z_1), \ldots, K_1 y'_1 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \upsilon_0 & K'_0 \upsilon_0, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{vmatrix}$$
>
> à laquelle on peut ramener la substitution *A* par un choix d'indice convenable, sera pour nous sa forme *canonique* [Jordan 1870, p. 127].

Le théorème avait alors été investi dans des questions de commutativité telles que la détermination de l'ensemble des substitutions commutant à une substitution donnée ou la caractérisation des sous groupes commutatifs du groupe linéaire [Jordan 1870, p. 126-154]. Ces applications de la réduction canonique concluaient la partie du *Traité* consacrée aux propriétés générales des groupes linéaires et précédaient l'étude de groupes linéaires spéciaux (orthogogaux et symplectiques notamment). Plus loin, elles intervenaient dans la classification des groupes résolubles poursuivie dans le *Livre IV* afin

[24] Pour un commentaire pas à pas de la démonstration de Jordan, voir [Brechenmacher 2006, p. 178-192].

de réduire la recherche des groupes résolubles linéaires à celle des groupes résolubles symplectiques.

2.3. La circulation de la réduction canonique de Jordan

Le théorème que Jordan avait énoncé dans le cadre de la théorie des substitutions allait donner lieu à une pratique de réduction canonique que ce dernier allait investir dans des cadres théoriques divers comme les équations différentielles linéaires à coefficients constants (1871-1872), les équations de Fuchs (1874 & 1876-1880), les formes quadratiques et bilinéaires (1873-1874), l'intégration algébriques des équations différentielles linéaires des deuxième, troisième et quatrième ordres (1876-1879), la « théorie algébrique » et la « théorie arithmétique » des formes d'ordre n et des formes quadratiques (1879-1882).

De ce fait, la circulation de cette pratique algébrique se présente comme un phénomène complexe qui ne se réduit pas à la diffusion d'un théorème en fonction de son efficacité ou de la capacité des contemporains à en saisir les enjeux.

Ces phénomène est illustré par la résolution que donnait Jordan en 1872 au problème mécanique des conditions de stabilité des petites oscillations. Depuis le XVIII^{e} siècle, ce problème avait été associé à l'interprétation mécanique selon laquelle les oscillations d'une corde chargée de n masses (ou des variations séculaires des planètes sur leurs orbites) peuvent être décomposées en oscillations de n cordes chargées d'une seule masse. En 1871, Jordan avait cependant démontré qu'un système linéaire non symétrique de n équations ne peut se réduire en général à n équations indépendantes. Néanmoins, avait-il insisté, l'intégration d'un tel système peut se résoudre « très simplement » par réduction canonique. En termes actuels, Jordan avait ainsi transféré son procédé de réduction canonique des substitutions linéaires de $Gl_n(F_p)$ à des substitutions de $M_n(\mathbb{C})$, non plus considérés comme formant des groupes mais des changements de variables de systèmes différentiels.

La résolution de Jordan, présentée à l'Académie des sciences en réponse à un problème posé aux géomètres par un membre de la section d'astronomie, substituait ainsi à une représentation mécanique traditionnelle de la décomposition des systèmes linéaires, une interprétation algébrique issue de la théorie des groupes. Mais cette solution impliquait aussi de substituer des valeurs de généralité et de simplicité aux besoins d'effectivité des astronomes : la réduction s'avérait en effet non effective pour des systèmes de cinq équations ou plus puisqu'elle nécessitait que soient extraites les racines d'une équation algébrique de degré égal au nombre d'équations du système.

Or, le cadre des équations différentielles linéaires allait aussi offrir à la réduction canonique une dimension publique nettement plus large que celui de la théorie des substitutions. En effet, c'est essentiellement dans ce cadre que le résultat allait être mobilisé durant les trois décennies à venir, le plus souvent implicitement comme chez Poincaré. Durant cette période, les rares références explicites à la réduction de Jordan, comme celle donné dans le cadre du problème de Fuchs par *A treatise on linear differential equations* [Craig 1889], se rapportaient à la version donnée dans le troisième volume des *Cours d'analyse* [Jordan 1887] et non au théorème du *Traité des substitutions.*

A contrario, la réduction de Jordan était non seulement absente des traités d'algèbre mais aussi des manuels d'analyse tournés vers l'enseignement comme ceux de [Serret 1886] ou de [Laurent 1890]. Dans ces deux cas, le problème de la multiplicité des racines était abordé par un raisonnement très classique consistant à rendre les racines inégales par ajout d'un paramètre et à faire ensuite tendre ce paramètre vers 0 [Laurent 1890, p. 151]. Dans le cas des équations caractéristiques des systèmes d'équations différentielles linéaires à coefficients constants, ce raisonnement avait été employé depuis le XVIII^{e} siècle par des savants comme Jean le Rond d'Alembert, Joseph-Louis Lagrange ou Augustin-Louis Cauchy. Dans le cas symétrique, qui se présente notamment pour le systèmes différentiels issus de la mécanique, ce raisonnement peut être rendu conforme aux critères actuels de rigueur en appliquant le théorème de Bolzano-Weierstrass à un passage à la limite sur l'ensemble des matrices orthogonales, fermé et borné dans $M_n(\mathbb{R})$. Il n'est cependant pas généralisable au cas des systèmes non symétriques car ceux-ci ne sont pas en général diagonalisables dans $\mathbb{C}$. A la fin du

XIX^{e} siècle, les traités qui proposaient des développements selon les cadres de rigueurs contemporains comme celui de [Darboux 1889, p. 405] ou de [Sauvage 1895] abordaient les cas d'occurrence de racines multiples en s'appuyant sur les diviseurs élémentaires de [Weierstrass 1868], éventuellement enrichis de leurs interprétations géométriques en termes d'intersections de surfaces quadratiques telles que développées dans la thèse de [Klein 1868].

Si le cadre des équations différentielles avait offert aux travaux de Jordan une dimension publique, le fait que ces travaux aient été discutés n'implique pas que les pratiques sous-jacentes aient été adoptées. Au contraire, la réduction canonique de Jordan avait été critiquée dans la sphère publique de l'Académie pour sa généralité et sa non effectivité. A l'occasion de sa tentative de candidature à la section de géométrie de l'Académie en 1875, Jordan s'était ainsi plaint des « bruits défavorables » qui couraient alors sur ses travaux qu'Hermite avait à cette occasion jugé inintelligibles.

La pratique de réduction de Jordan présentait des caractéristiques mettant en jeu le statut de l'algèbre, les rapports entre relations générales et objets particuliers, ainsi que des valeurs épistémiques de simplicité et de généralité. Elle s'accompagnait d'un idéal que Jordan avait mis en avant à plusieurs reprises depuis sa thèse et qui attribuait aux relations entre objets et classes d'objets un statut « essentiel », primant sur l'étude des objets eux mêmes. En tant que tel, cet idéal n'était pas limité à Jordan et avait été notamment formulé par de nombreux autres auteurs parmi lesquels Poinsot et Galois [Boucard 2011]. Chez Jordan, il impliquait une mise au premier plan de propriétés générales sur *n* variables obtenues par des « réductions » successives jusqu'à des expressions « les plus simples ».

Or, dans la sphère publique de l'Académie que Jordan avait touchée en donnant une solution au problème bien connu des petites oscillations, l'Algèbre désignait une science de résolutions des équations tandis que le qualificatif "algébrique" désignait le plus souvent des procédés de calculs symboliques utilisés dans divers domaines sans pour autant prétendre structurer, ou même lier, ces derniers. Par ailleurs, à la fin du XIX^{e} siècle, le reproche de généralité excessive était souvent adressé à des travaux algébriques que les autorités des mathématiques en France opposaient souvent à la richesse de l'Analyse. A la mort de Jordan en 1922, Picard concluait ainsi sa notice nécrologique pour l'Académie des sciences:

> [Jordan] se jouait au milieu des discussions les plus subtiles sur des concepts comme ceux de groupes ou de *substitutions*, se plaisant à aborder les questions dans toute leur généralité, comme s'il craignait que quelque particularité l'empêchât de voir les vraies raisons des choses. Jordan a été vraiment un grand algébriste ; les notions fondamentales qu'il a introduites en Analyse préserveront son nom de l'oubli [Picard 1922, p. 211].

C'est aussi sur la scène de l'Académie de Paris que Leopold Kronecker avait critiqué publiquement en 1874 l'usage qu'avait voulu faire Jordan de sa réduction canonique en théorie des formes. Ce dernier avait condamné le caractère faussement général des classes de substitutions de *n* variables étudiées par Jordan par opposition aux objets de la théorie des formes. Il avait surtout souligné le caractère « formel » car non effectif de la réduite présentée par Jordan comme « la plus simple » [Brechenmacher, 2007a]. Plus généralement, Kronecker s'était fermement opposé aux prétentions de Jordan de conférer à des approches algébriques une envergure théorique et avait mis en avant un idéal selon lequel le « travail algébrique […] est effectué au service d'autres disciplines mathématiques dont il reçoit ses fins et dont dépendent ses objectifs ». En l'occurrence, l'arithmétique et ses méthodes de calculs d'invariants comme les facteurs invariants des couples de formes bilinéaires que Kronecker introduisait à cette occasion afin de donner une formulation effective au théorème des diviseurs élémentaires de [Weierstrass, 1868].[25]

Quelques années plus tard, Frobenius publiait une synthèse unifiant les théories des substitutions

[25] Cette querelle opposait deux théorèmes que nous considèrerions aujourd'hui équivalents mais qui avaient été énoncés indépendamment et dans des théories différentes : diviseurs élémentaires de Weierstrass pour les couples de formes bilinéaires et réduction canonique de Jordan pour les substitutions linéaires sur des corps finis [Brechenmacher 2007a].

linéaires et des formes bilinéaires et quadratiques [Frobenius 1877-1879]. Cette synthèse allait s'imposer comme une théorie de référence à une échelle large jusque dans les années 1920. Or, non seulement cette théorie mettait en avant les notions arithmétiques de classe d'équivalence et d'invariants comme l'avait voulu Kronecker et par opposition au rôle central qu'avait voulu attribuer Jordan aux groupes de substitutions, mais elle s'organisait autour du théorème des diviseurs élémentaires dont la réduction canonique de Jordan n'était plus qu'un corollaire valable uniquement dans le « cas particulier » où serait permise l'utilisation de « nombres imaginaires de Galois » [Frobenius 1879, p. 544], c'est à dire l'extraction de racines d'équations algébriques mod. *p* (dans des corps finis, en termes actuels).

2.4 Réduction canonique et équations différentielles linéaires (1871-1878)

Comme le manifeste la note de Poincaré de 1884, la réduction canonique des substitutions n'était cependant pas restée confinée aux travaux de Jordan. Il s'agit à présent d'en suivre la circulation presque souterraine dans les années 1870.

C'était tout d'abord dans le cadre des équations différentielles que Meyer Hamburger avait, dès 1873, rapproché le théorème de Jordan du théorème des diviseurs élémentaires de Karl Weierstrass, donnant au premier un écho éphémère qui allait le condamner à devenir un corollaire du second. Plus précisément, Hamburger avait montré comment l'approche de Jordan sur les équations à coefficients constants pouvait être généralisée aux équations différentielles linéaires dites de Fuchs (à coefficients méromorphes sur une région simplement connexe de $\mathbb{C}$) :

$$\frac{d^m u}{dz^m} + f_1(z)\frac{d^{m-1}u}{dz^{m-1}} + \cdots + f_m(z)u = 0$$

Ces équations posaient notamment des problèmes de prolongements analytiques de solutions locales au voisinage de singularités. Dans la tradition des travaux menés depuis les années 1850 par des auteurs comme Cauchy, Puiseux, Hermite ou Riemann, de tels problèmes avaient été abordés en terme de ce que Jordan avait dénommé des « groupes de monodromie » dans son *Traité*.[26] Pour des valeurs initiales fixées, si l'on considère un système fondamental $u_i(z)$ de n solutions de l'équation différentielle dans le voisinage du point singulier a, et si la variable z décrit un lacet autour de a, les nouvelles valeurs obtenues pour $u_i(z)$ s'obtiennent à partir des valeurs initiales par une transformation linéaire A de déterminant non nul.[27]

En 1866, Fuchs avait montré que si l'équation caractéristique des substitutions linéaires associées à un point singulier n'a que des racines simples, les solutions prennent localement la forme $(x-a)^{\alpha}\Phi(x-a)$ avec Φ holomorphe au voisinage de a. En cas d'occurrence d'une racine caractéristique multiple d'ordre k, Fuchs avait exprimé le système d'intégrales associées sous la forme triangulaire suivante :

$$\begin{aligned}
&u_1=x^r\Phi_{11},\\
&u_2=x^r\Phi_{21}+x^r\Phi_{22}\log x\\
&\ldots\\
&u_k=x^r\Phi_{k1}+\ldots+x^r\Phi_{k2}\log x+\ldots+x^r\Phi_{kk}(\log x)^{k-1}
\end{aligned}$$

En 1873, Hamburger s'était appuyé à la fois sur la réduction canonique de Jordan et sur le théorème des diviseurs élémentaires de Weierstrass afin de caractériser plus finement les solutions en cas d'occurrence de racines multiples. D'un côté, ce dernier théorème avait permis à Hamburger de surmonter une difficulté qu'avait passé sous silence Jordan et consistant à distinguer entre l'ordre de

---

[26] [Gray, 2000] développe une histoire sur le temps long du XIX^e^ siècle de ces problématiques et met notamment en évidence le rôle de modèle joué par l'équation hypergéométrique pour l'objectif d'une compréhension globale des relations entre intégrales définies localement par des séries entières.

[27] Voir [Tannery 1875] pour une présentation détaillée et pour un énoncé de la réciproque du problème de Fuchs. Cette approche avait été développée par Puiseux en 1850 dans le cadre de l'analyse complexe de Cauchy et des travaux d'Hermite sur les fonctions abéliennes. Elle avait fait l'objet de la seconde thèse de Jordan. Ce dernier avait étudié dans les années 1860 les groupes de monodromie des équations différentielles associées aux fonctions elliptiques et abéliennes, notamment en relation avec les travaux d'Hermite sur l'équation modulaire d'ordre 5.

multiplicité μ d'une racine caractéristique et le nombre v de solutions indépendantes associées. Comme le formulait Hamburger, les μ fonctions associées à une racine ω se "répartissent en différents groupes et non pas toutes ensembles" [Hamburger 1873, p. 114].[28] D'un autre côté, la réduction de Jordan permettait d'exprimer les solutions associées à une racine multiple ω_1 en fonction de t^r (avec $r=log(\omega_1)/2\pi i$), de *logt* et de fonctions méromorphes M_i, N_i :[29]

$$y_o=t^rM_o$$
$$y_1=t^rM_1(logt+N_1)$$
$$\ldots$$
$$y_k=t^r(M_klog^kt+N_klog^{k-1}t+\ldots)$$

Comme nous l'avons déjà évoqué, le problème de l'intégration algébrique des équations différentielles linéaires que Fuchs avait mis en avant entre 1865 et 1868 allait prendre des dimensions collectives larges dans les années 1870. Dans ce contexte, les travaux développés par Jordan entre 1874 et 1880 présentaient une spécificité forte par le rôle que ceux-ci attribuaient aux groupes de substitutions.

Dès 1874, le « Mémoire sur une application de la théorie des substitutions à l'étude des équations différentielles linéaires » proclamait que le groupe G associé à une équation différentielle en faisant varier z « de toutes les manières possibles de manière à envelopper successivement les divers points singuliers », caractérise « dans ce qu'il a d'essentiel le type de l'équation différentielle qui lui donne naissance, et reflète ses principales propriétés » [Jordan 1874, p. 102]. Pour qu'une équation différentielle soit susceptible d'une intégration algébrique, c'est-à-dire, que toutes ses intégrales satisfassent à des équations algébriques ayant pour coefficient des fonctions holomorphes de z, le groupe linéaire associé doit être fini. Sur le modèle de l'articulation entre groupes finis et équations algébriques, Jordan en déduisait trois types de problèmes :

> On voit par ces exemples que dans la théorie des équations différentielles linéaires, comme dans celle des équations algébriques, on aura trois catégories de problèmes à résoudre :
> 1. L'équation étant donnée, déterminer son groupe. Cette question est du ressort du calcul intégral ;
> 2. Déterminer les conditions auxquelles le groupe doit satisfaire pour que l'équation donnée jouisse de telle ou telle propriété ;
> 3. Le groupe étant connu, vérifier s'il satisfait ou non aux conditions requises. Cette dernière question ne dépend plus que de la théorie des substitutions. [Jordan 1874, p. 103]

Des travaux de Frobenius [1873, 1875] s'étaient déjà appuyés sur une analogie avec les équations polynomiales en développant la notion d'équation différentielle « irréductible » [Gray 2000, p.56-61].[30] Poursuivant l'analogie de Frobenius, Jordan en modifiait cependant les termes pour prendre modèle sur la détermination des « réduites » des équations algébriques dont il avait étudié de nombreux exemples entre 1868 et 1870 (comme les équations modulaires ou l'équation des 27 droites sur une cubique). Le mémoire de 1874 visait alors à « reconnaître si l'équation différentielle linéaire qui a pour groupe G est satisfaite par les intégrales d'équations analogues d'un ordre inférieur à n, et déterminer les groupes de ces équations réduites ».

Dans le cadre du transfert analogique porté par des extensions de procédures opératoires, la réduction canonique n'était pas simplement appliquée à un nouveau contexte mais s'avérait elle même modifiée. Ainsi, davantage que les groupes de substitutions, les équations différentielles amenaient Jordan à mettre en avant ce que nous désignerions aujourd'hui comme la notion de sous

---

[28] Dans sa démonstration, Jordan ne donnait en effet aucune manière de déterminer la dimension v de chaque espace caractéristique. Au contraire, chez Weierstrass l'invariant v était un diviseur élémentaire bien déterminé qui permettait de distinguer entre le cas diagonalisable et non diagonalisable [Brechenmacher 2006a, p. 178-192].

[29] En effet, par un tour autour de a, t^r se transforme en $(te^{2i\pi})^r= \omega_1t^r$ et $\frac{1}{2\pi i}logt$ en $\frac{1}{2\pi i}logt$ +1. Voir [Jordan 1887, p. 180].

[30] Voir aussi [Frobenius 1875]. Pour un panorama des travaux de Thomé et Frobenius sur les intégrales régulières, voir [Floquet 1879].

espace vectoriel caractéristique pour l'action d'un opérateur.[31] Comme le formulait ce dernier, « la notion du faisceau dans la théorie des fonctions linéaires est analogue à celle du groupe dans la théorie des substitutions ». Le terme de faisceau, qui avait jusqu'à présent été utilisé pour désigner un sous groupe de permutations, était ainsi transféré à des systèmes de fonctions linéaires dont « toute combinaison linéaire fait elle-même partie de ce système » et qui contiennent donc « un certain nombre de fonctions linéairement distinctes, en fonction linéaire desquelles on pourra exprimer toutes les autres », en particulier dans le cas des sous espaces vectoriels stables sous l'action du groupe où « les substitutions de *G* transforment ces fonctions les unes dans les autres […] dérivé d'un certain nombre de fonctions distinctes, ne contenant chacune que les variables d'une seule classe » [associée à une seule racine caractéristique] [Jordan 1874, p. 106].

Jordan redéfinissait alors la notion d'équation différentielle irréductible en articulant « faisceaux » et « groupes » : si aucun autre faisceau ne peut être formé hormis celui correspondant à l'ensemble des combinaisons linéaires des intégrales indépendantes $y_1,\dots,y_n$, le « groupe G sera dit *primaire*, et l'équation différentielle correspondante sera *irréductible* ». Dans le cas contraire, à chacun des autres faisceaux, dérivés de fonctions distinctes $X_1, \dots, X_m$ en nombre inférieur à *n* « correspondra une équation différentielle *réduite*, dont le groupe sera formé par les altérations que les substitutions de *G* font subir à $X_1,\dots, X_m$ ».

Par la suite, les travaux de Jordan allaient s'orienter vers une classification des types d'équations intégrables algébriquement. Cette réorientation semble avoir été impulsée par de nouveaux travaux de Fuchs qui, en 1875, s'était appuyé sur les méthodes de la théorie des invariants et covariants des formes binaires afin d'étudier les équations algébriques liant deux intégrales indépendantes d'une équations différentielle linéaire du second ordre [Gray 2000, p. 77-81].[32] A cette époque, Jordan consacrait lui-même plusieurs travaux à la théorie des covariants dans le sillage du résultat de Gordan sur la possibilité d'exprimer les covariants d'un système de formes binaires en fonction entière d'un nombre limité de covariants indépendants. Mais il allait cependant proposer de traiter les questions abordées par Fuchs « par une méthode toute différente fondée sur la théorie des substitutions ». En effet, un groupe *G* étant associé à une équation différentielle *E*, la détermination d'une équation algébrique dont *G* est le groupe de Galois (c'est à dire ce que nous appellerions aujourd'hui le problème inverse de la théorie de Galois) donne une relation algébrique entre les intégrales de *E*, c'est à dire une intégration algébrique de cette dernière équation [Jordan 1876a, p.607]. Autrement dit :

> Il y a donc identité entre les deux questions suivantes :
> 1. Enumérer les divers types d'équations différentielles linéaires d'ordre *m* dont toutes les intégrales soient algébriques.
> 2. Construire les divers groupes d'ordre fini que contient le groupe linéaire à *m* variables. [Jordan 1878, p. 605].

Jordan s'était alors appuyé sur les théorèmes de Sylow pour établir une répartition en trois classes des sous groupes finis de $Gl_2(\mathbb{C})$. Ces classes étaient identifiées par la représentation analytique des formes canoniques de leurs substitutions génératrices [Jordan 1876a, p. 607].[33]

Le résultat avait suscité une réaction immédiate de Klein. Ce dernier avait en effet déjà donné la classification des sous groupes finis de $Gl_2(\mathbb{C})$ dans le cadre de ses travaux sur les transformations linéaires laissant invariante une forme binaire [Klein 1875].[34] Complétant les travaux de [Jordan

---

[31] L'année suivante, Jordan allait d'ailleurs publier un mémoire sur la géométrie euclidienne à *n* dimensions. Voir [Brechenmacher 2012].

[32] Voir le résumé en français donné par [Fuchs 1876c] dans le journal de *Liouville* sous la forme d'une lettre à Hermite.

[33] Dans sa première classification, Jordan ne mentionnait pas le sous groupe simple d'ordre 168 de $Sl_3(C)$. Plus tard, Valentiner devait mettre en évidence l'omission du groupe simple A_6 d'ordre 360 dans la classification donnée par Jordan des sous groupes finis de $Sl_3(C)$. Voir [Dieudonné 1962, p. XXV-XVIII].

[34] De telles problématiques étaient notamment inspirées de l'approche géométrique de Clebsch sur les formes binaires, mais aussi des travaux de [Schwarz 1872] sur les conditions auxquelles une série hypergéométrique de Gauss est une

1868] sur les groupes de mouvements des polyèdres, Klein s'était appuyé sur les covariants de Gordan pour proposer une classification en cinq classes correspondant aux groupes de symétries des polyèdres réguliers.

A la suite des objections de Klein, Jordan avait corrigé ses résultats [Jordan 1876b, p. 1035] tout en revendiquant l' « avantage » de sa « méthode nouvelle » de classification par réduction canonique de supporter non seulement une généralisation aux groupes linéaires finis de 3 variables [Jordan 1877a] et 4 variables [Jordan 1879], mais aussi l'énoncé d'un théorème de finitude de l'index d'un groupe linéaire fini de n variables par rapport à un sous groupe abélien normal [Jordan 1878].[35] Résultat central du mémoire se synthèse que Jordan publiait dans le *Journal de Crelle*, ce théorème s'accompagnait de la preuve que toute substitution « périodique » (d'ordre finie) est diagonalisable :

> [Si deux racines de l'équation caractéristique en s sont distinctes] $S = |u_1, u_2\ \alpha u_1+\beta u_2, \gamma u_1+\delta u_2|$ […] sera réduite à la forme canonique
>
> $$|x, y\ ax, by| \text{ où } a \neq b.$$
>
> Nous dirons dans ce cas que S est une substitution de *première espèce.*
> Si les deux racines de l'équation en s se confondent en une seule, a, soient x une fonction linéaire que S multiplie par a […] S prendra la forme
>
> $$|x, y\ ax, a(y+\lambda x)|.$$
>
> Nous dirons que S est de *seconde espèce* si $\lambda = 0$; de *troisième espèce*, si $\lambda \neq 0$.
> Soit maintenant G un groupe formé d'un nombre limité de substitutions linéaires. Il ne peut contenir aucune substitution S de troisième espèce. Car il contiendrait ses puissances, qui ont pour formule générale
>
> $$S^m = |\ x\ y\ a^m x, a^m(y+m\lambda x)|$$
>
> et sont évidemment en nombre illimité. Quant aux substitutions de première espèce, leurs puissances ont pour formule
>
> $$S^m = |x\ y\ a^m x, b^m y|$$
>
> et seront en nombre limité, lorsque a et b seront des racines de l'unité. [Jordan 1878, p.93-94].

Jordan en avait déduit une caractérisation des substitutions commutant l'une avec l'autre comme diagonalisables dans une même base afin de prouver le résultat de finitude suivant:

> Théorème. Si un groupe G est formé d'un nombre fini de substitutions linéaires à n variables, il contiendra un autre groupe H dont les substitutions seront de la forme simple
>
> $$|x_1, \ldots, x_n\ a_1 x_1, \ldots, a_n x_n|$$
>
> et permutable à toutes les substitutions de G. L'ordre g de G sera égal à kh, h étant l'ordre de H, et k un entier inférieur à une limite fixe, assignable *a priori* pour toute valeur de n.
> Ou en d'autres termes : Si une équation différentielle linéaire d'ordre n
>
> $$(\mathrm{E})\ f(z)u+f_1(z)u'+\ldots+f_{n-1}(z)u^{(n-1)}+u^{(n)}=0$$
>
> a ses intégrales algébriques, elle admettra n intégrales particulières $x_1, \ldots, x_n$ racines d'équations binômes, dont les seconds membres seront des fonctions rationnelles de z et d'une racine y d'une équation irréductible
>
> $$F(z, y)=0$$
>
> dont le degré k sera inférieur à une limite fixe.
> Ou bien encore, en empruntant le langage de M. Fuchs : Le degré des formes primitives construites avec les intégrales de l'équation (E) sera limité. [Jordan 1877, p. 1036]

Comme nous allons le voir plus loin en commentant les travaux de Poincaré, les travaux de Jordan des années 1879 et 1882 allaient concerner la théorie des formes dans le cadre de laquelle ce dernier

---

fonction algébrique. Ce dernier avait défini une application conforme d'un triangle dont les côtés sont des arcs de cercles dans le disque unité. A la suite des travaux de Klein et Poincaré, la "fonction de Schwarz" allait être considérée comme une fonction automorphe. A propos de la méthode de Schwarz et sur la manière dont ce dernier en déduisait une démonstration du théorème d'application conforme de Riemann et du problème de Dirichlet, voir [Tazzioli 1994].

[35] Il y a une infinité de sous groupes finis de $GL_n(\mathbb{C})$ mais il existe une fonction φ (n) telle que tout groupe fini G de matrices d'ordre n contient un sous groupe normal H qui est le conjugué d'un groupe de matrices diagonales et tel que l'index (G: H) soit inférieur à φ (n). Le groupe quotient G/H appartient donc à un système fini de groupes à isomorphisme près. Voir [Dieudonné 1962, p. xxiii-xxvii].

allait notamment énoncer un théorème de finitude de nombre de classes d'équivalence sur le modèle du résultats ci-dessus pour les groupes linéaires finis.

Mais malgré les références fréquentes dont le résultat de finitude des groupes linéaires finis allait faire l'objet jusque dans les années 1930 [Brechenmacher 2012], la pratique de réduction canonique sur laquelle Jordan [1878, p. 90-91] avait basé son approche n'allait être que rarement appropriée par les lecteurs du mémoire de 1878. Le rôle attribué par Jordan aux groupes de substitutions n'était en effet qu'une approche parmi d'autres des équations différentielles linéaires. Son principal impact immédiat avait été de rapprocher des travaux jusqu'à présent distincts, comme les équations de Fuchs et l'icosaèdre de Klein, rapprochement qui avait suscité des réponses d'auteurs comme Klein, Brioschi, Gordan et Richard Dedekind. En parallèle aux travaux de Jordan, Klein avait ainsi approfondi ses travaux antérieurs sur les formes binaires pour expliciter les équations algébriques vérifiées par les intégrales des cinq types d'équations différentielles du second ordre à intégrales algébriques [Klein 1877]. De son côté, [Gordan 1877] avait reformulé la classification donnée par [Klein 1875] aux groupes linéaires finis de deux variables en évacuant toute considération géométrique au profit d'un approche purement algébrique sur les covariants des formes binaires. Enfin, [Brioschi 1877] et [Dedekind 1877] avaient mis en avant les relations entre les travaux de Klein, de nouveaux travaux de [Fuchs 1877] et les deux approches d'Hermite et Kronecker des années 1850 sur la résolution de l'équation générale du cinquième degré par les fonctions elliptiques.

Ces problématiques étaient celles pour lesquelles Poincaré et Klein allaient, quelques années plus tard, introduire les fonctions fuchsiennes et modulaires, c'est à dire des fonctions complexes invariantes par certains groupes linéaires comme $PSl_2(\mathbb{R})$ ou $PSl_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. Les travaux sur les équations différentielles ou aux dérivées partielles du tournant des années 1870-1880 allaient en effet s'accompagner d'une évolution du statut de la notion de groupe au sein des mathématiques. Mais contrairement au rôle que leur a souvent attribué l'historiographie, les travaux de Jordan ne représentaient qu'une approche des groupes parmi d'autres. Ils n'avaient en particulier que très partiellement été appropriés par Klein et ne devaient jouer qu'un rôle limité dans une évolution qui doit s'envisager comme résultant de travaux variés menés sur le temps long du XIX^{e} siècle.

3. De Jordan à Poincaré *via* Hermite

Comme nous allons le voir à présent, l'appropriation des travaux de Jordan au prisme hermitien de la théorie des formes allait non seulement constituer une spécificité de Poincaré dans le paysage des équations différentielles linéaires mais aussi favoriser la circulation de l'approche de Jordan sur les groupes linéaires. En outre, l'héritage de la notion de forme réduite dans la tradition d'analyse algébrique arithmétique d'Hermite permet de jeter un nouvel éclairage sur l'émergence de la théorie des fonctions fuchsiennes dans les travaux menés par Poincaré en vue du Grand prix des sciences mathématiques de 1880 : « Perfectionner en quelque point important la théorie des équations différentielles linéaires à une seule variable indépendante ». Il nous faudra pour ce faire suivre la chronologie fine de ces travaux pour comprendre comment les publications de Poincaré s'articulent les unes aux autres.

3.1. Fonctions elliptiques, fonctions modulaires et classes d'équivalences arithmétiques

Rappelons tout d'abord que les fonctions fuchsiennes visaient à généraliser aux équations linéaires à coefficients algébriques le rôle joué par les fonctions elliptiques dans l'intégration de différentielles algébriques. Par exemple, la fonction elliptique de premier ordre de module k^2, est définie comme la fonction réciproque $\varphi(u,k)$ de l'intégrale :

$$u(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{(1\text{-}\mathrm{x}^2)(1\text{-}\mathrm{k}^2\mathrm{x}^2)}}\,.$$

Les fonctions elliptiques peuvent être étendues en des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$, périodiques sur un réseau tel que, dans l'exemple ci-dessus, le réseau de périodes $K=u(1,k)$ et $K'=u(1/k,k)$ (et de pôles $nK/4$). En tant que fonctions du module k^2, ces périodes vérifient elles-mêmes une équation différentielle linéaire, dite équation de Legendre, cas particulier d'équation hypergéométrique et donc d'équation de Fuchs :

$$(*)\ (1-k^2)\frac{d^2y}{d^2k}+\frac{1-3k^2}{k}\frac{dy}{dk}-y=0$$

Les tentatives de généralisation des fonctions elliptiques à des fonctions - dites abéliennes ou hyperelliptiques - obtenues par inversions d'intégrales d'équations différentielles plus générales s'étaient heurtées au caractère local de telles fonctions dont les problèmes de raccordements des valeurs multiples étaient au cœur des principaux développements d'analyse complexe.[36]

Sur les conseils d'Hermite, Fuchs avait considéré en 1877 le rapport $\omega=\frac{K}{K\prime}$ des périodes de la fonction elliptique de premier ordre comme une fonction analytique du module *k*.[37] La réciproque, *k= f(ω)*, était alors une fonction monodrome de *ω=x+iy* pour tout *x* positif (sur le plan supérieur) [Gray 2000, p. 101-104]. La monodromie était cependant perdue dans la situation analogue consistant à considérer les rapports des périodes *J* et *J'* d'intégrales elliptiques du second ordre :

$$J=\int_0^1\frac{k^2x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\ \text{et}\ J'=\int_0^{\frac{1}{k}}\frac{k^2x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

et satisfaisant à l'équation différentielle

$$(**)\ (1-k^2)\frac{d^2y}{d^2k}+\frac{1-k^2}{k}\frac{dy}{dk}+y=0$$

Mais comme l'avait montré Hermite, les fonctions des modules étaient dans les deux cas invariantes par des substitutions homographiques de déterminant 1 (dites unimodulaires).[38] Étant donné un système fondamental *K, K'* de solutions de (*) ou (**), le parcours de la variable *k* sur un lacet autour d'un point singulier donnait deux nouvelles solutions pouvant s'exprimer sous la forme a_1K+b_1K' et a_2K+b_2K', et à partir desquelles Fuchs formait le quotient $H=\frac{a_1K+b_1K\prime}{a_2K+b_2K\prime}$.

Des prolongements analytiques de $\frac{J}{J\prime}$ sont ainsi possibles par l'action des substitutions homographiques unimodulaires sur le demi plan supérieur. Si une telle approche allait être à la base des théories développées par Klein et Poincaré au début des années 1880, celle-ci peut se concevoir indépendamment de la notion de groupe qu'allaient mettre en avant ces deux mathématiciens.

Ainsi, la propriété d'invariance par les substitutions homographiques qu'avait suggérée Fuchs en 1877 avait été immédiatement liée par Dedekind à la dimension arithmétique des travaux d'Hermite et Kronecker des années 1850 sur la résolution de l'équation du cinquième degré par les équations modulaires des fonctions elliptiques.[39] En 1877, Dedekind reformulait ces questions dans le cadre de sa propre théorie des corps et des idéaux d'entiers complexes. Deux points du demi plan complexe supérieur peuvent en effet être considérés comme congruents si leurs affixes sont liées par une substitution unimodulaire. Le problème de Fuchs se présente alors comme celui de la définition d'une fonction monodrome sur des classes de congruences de nombres complexes, problème que Dedekind résolvait pour le cas des équations hypergéométriques.

Soit *F* le « domaine fondamental » des points $\omega\ \{-\frac{1}{2}<Re(\omega)<\frac{1}{2};\ N(\omega)>1\}$ du demi plan supérieur situés strictement entre les droites d'équation *Re(ω)=-1/2* et *Re(ω)=1/2* et strictement à l'extérieur du cercle unité, auquel on ajoute les points d'abscisse *Re(ω)=-1/2* à l'extérieur du cercle unité ainsi

[36] Voir [Briot et Bouquet 1875, p. 449].

[37] Cette approche avait déjà été suivie par Schwarz en 1871 pour le cas de l'équation hypergéométrique [Gray 2000, p. 70-77].

[38] La fonction modulaire est invariante par $Sl_2(\mathbb{Z})$ et l'équation modulaire peut ainsi être introduite par l'équation de transformation des intégrales elliptiques par de telles substitutions. Voir [Houzel 1878, 2007].

[39] Les travaux d'Hermite prenaient place dans le cadre d'une approche des nombres algébriques par les formes quadratiques et fractions continues [Goldstein, 2007 ; 2011] ; ceux de Kronecker visaient une représentation concrète des nombres idéaux introduits par Kummer et s'appuyaient sur la multiplication complexe des fonctions elliptiques [Petri et Schappacher 2004].

que les points sur ce cercle d'abscisse $-1/2\leq x<0$. Ce domaine fournit un système complet de représentants des classes de congruence : tout point du demi plan supérieur est congruent à un unique point du domaine fondamental.[40] La « fonction de valence » définie par Dedekind sur le domaine fondamental prend donc ses valeurs sur les classes de nombres complexes du demi plan supérieur. Dès 1878, l'approche de Dedekind allait être envisagée par Klein dans le cadre du pavage obtenu à partir du domaine F par l'action du groupe $PSL_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ [Gray 1982].[41]

Si les célèbres protestations de ce dernier quant au choix du nom des fonctions fuchsiennes ont mis en évidence la méconnaissance par Poincaré de l'approche de Dedekind [Gray, 2000, p. 184-188],[42] les travaux publiés par Poincaré entre 1879 et 1881 partageaient cependant avec l'approche arithmétique de Dedekind une référence commune aux travaux d'Hermite. La théorie de la réduction des formes de ce dernier donnait une alternative aux approches de Dedekind sur les nombres algébriques ou de Klein sur les groupes de transformations. Cette théorie avait d'ailleurs été développée par Hermite dans le cadre du programme de ce dernier visant à caractériser les nombres algébriques *via* la réduction des formes et les fractions continues [Goldstein 2007].

De fait, la notion de domaine fondamental avait été introduite par Gauss en 1827 pour une représentation géométrique des classes d'équivalence de formes quadratiques binaires. Elle permettait en effet de donner une représentation géométrique de la « forme réduite » représentant une classe de formes : soit ω une racine (de partie imaginaire positive) de l'équation algébrique $a\,\omega^2+2b\omega+c=0$ associée à la forme binaire (définie) $ax^2+2bxy+cy^2$, une telle forme est réduite si le point d'affixe ω est située dans le domaine fondamental.[43] Mais la représentation par le domaine fondamental pouvait aussi s'articuler à une autre représentation géométrique des classes formes introduite par Gauss en 1831 en terme de réseaux de parallélogramme du plan [Schwermer 2007, p. 490-492]. Chaque système de parallélogramme d'un réseau peut en effet s'interpréter comme un représentant de la classe de formes et la théorie de la réduction peut alors être présentée dans ce cadre ainsi que l'avaient montré Dirichlet et Hermite.

Comme nous allons le voir, c'est dans ce cadre hermitien de la théorie de réduction des formes que Poincaré allait d'abord aborder le problème de l'extension de définition de la fonction modulaire considérée par Fuchs. Étant donné un réseau de base (K, K') les deux périodes d'une fonction elliptique, le rapport des périodes ne dépend pas du choix de la base et la fonction réciproque considérée par Fuchs est donc définie modulo le réseau. Elle est en particulier invariante par les changements de base du réseau par l'action de substitutions unimodulaires. Mais dans le cadre de l'approche hermitienne consistant à introduire des variables continues dans la théorie des nombres et notamment la réduction continue des formes quadratiques, de telles substitutions pouvaient s'envisager avec des coefficients réels (ou complexes) et non seulement entiers comme chez Klein. C'est dans ce cadre que Poincaré allait progressivement s'approprier les travaux de Jordan sur les formes quadratiques invariantes par des groupes linéaires pour finalement envisager des fonctions invariantes par l'action du groupe $PSl_2(\mathbb{R})$, c'est à dire les fonctions fuchsiennes.

3.2. Formes algébriques, réseaux et fonctions fuchsiennes

Rappelons à présent la chronologie des publications de Poincaré dans l'intervalle séparant le 10 mars 1879, date de mise au concours du Grand prix de 1880, et le 1er juin 1880, date limite de réception des mémoires.

Poincaré avait tout d'abord consacré deux notes aux formes quadratiques (les 11 aout et 24 novembre 1879) [Poincaré 1879b,c] qui allaient donner lieu au mémoire « Sur un nouveau mode de représentation géométrique des formes quadratiques définies ou indéfinies », publié dans le *Journal*

[40] Dedekind ne mettait cependant pas le concept de groupe en avant, contrairement à Klein, qui, un an plus tard, devait également interpréter géométriquement l'action de $PSl_2(F_7)$.

[41] Dedekind introduisait également à cette occasion sa fonction η [Gray, 2000, p. 107-115]

[42] Tout comme des travaux antérieurs de [Schwarz 1872].

[43] Pour une présentation de la représentation géométrique des formes quadratiques, voir [Cahen et Vahlen 1908, p. 116-119]. Sur certains épisodes de l'histoire de la réduction des formes quadratiques, voir [Schwermer 2007, p. 488-498].

de l'École polytechnique [Poincaré 1880a]. La note « Sur les courbes définies par les équations différentielles » $\frac{dx}{X}=\frac{dy}{Y}$ (*X, Y* polynômes réels) [Poincaré 1880b],[44] publiée le 22 mars 1880, allait constituer la base d'un premier mémoire déposé à l'Académie mais finalement retiré ultérieurement. L'approche en était basée sur la thèse de Poincaré sur les équations aux dérivées partielles, ainsi que sur une publication de 1878 sur l'étude des propriétés des fonctions définies par des équations différentielles à coefficients méromorphes (dont les fonctions elliptiques sont un cas particulier) dans le sillage des travaux de Charles Briot et Claude Bouquet.

Un autre mémoire avait été déposé le 28 mai pour le Grand prix. Dès le 29 mai, Poincaré débutait une correspondance avec Fuchs à propos de travaux récemment publiés par ce dernier [Fuchs 1880] sur les fonctions réciproques de quotients de deux intégrales indépendantes [Gray 2000, p.174-177]. Trois suppléments allaient par la suite être adressés à l'Académie les 28 juin, 6 septembre et 20 décembre [Gray et Walter 1997].

Entre temps, et peu après le dépôt du 28 mai, le géomètre proposait le 7 juin une note (publiée le 14 juin) sur les formes cubiques ternaires [Poincaré 1880c]. Plus tard, le 22 novembre, il abordait le cas particulier des cubiques décomposables en une forme quadratique et une forme linéaire [Poincaré 1880d] (voir aussi [Poincaré 1886b]). La première partie d'un mémoire de synthèse sur la « théorie algébrique des formes » était publiée dans le *Journal de l'École polytechnique* en février 1881, soit à l'époque où paraissait la première note sur la théorie des fonctions fuchsiennes [Poincaré 1881b]. L'auteur précisait dans la foulée la place de sa nouvelle théorie par rapport aux travaux de Jordan sur l'intégration algébrique des équations différentielles [Poincaré 1881c]. Alors que Poincaré égrenait les notes consacrées aux fonctions fuchsiennes dans les *Comptes rendus* et faisait paraître ses premiers mémoires dans *Acta mathematica*, la seconde partie du mémoire sur la « théorie arithmétique des formes » était publiée en 1882 dans le *Journal de l'École polytechnique* à la suite d'un mémoire de Jordan sur le même sujet [Jordan 1882a].

Envisagé selon des angles disciplinaires, cet ensemble de préoccupations peut sembler hétéroclite. Le tout s'avère pourtant très cohérent avec le problème de l'extension des fonctions réciproques considérées par Fuchs. Il est bien connu que l'introduction des fonctions fuchsiennes allait être présentée par Poincaré comme une généralisation du pavage du plan complexe par le réseau des fonctions elliptiques pour lesquelles « la connaissance de la fonction à l'intérieur de l'un des parallélogrammes entraine sa connaissance dans tout le plan » [Poincaré 1921, p. 43]. Afin de prolonger les fonctions considérées par Fuchs à partir d'une certaine région, ou « polygone curviligne », Poincaré allait « construire les polygones voisins, puis les polygones voisins de ceux-ci, et ainsi de suite ». Il en résultait un pavage du disque unité – envisagé comme un modèle du plan hyperbolique – par l'action d'un sous groupe de $PSl_2(\mathbb{R})$ sur des polygones non euclidiens.[45] Ainsi, dans son premier mémoire de synthèse sur les « fonctions uniformes qui se reproduisent par des substitutions linéaires » paru dans *Mathematische Annalen* en 1882, le géomètre insistait sur les

> […] plus grandes analogies des fonctions fuchsiennes avec les fonctions elliptiques et modulaires qui n'en sont que des cas particuliers. […] Nous allons rechercher s'il existe une fonction uniforme $F(\zeta)$ qui ne change pas quand on applique à ζ l'une des substitutions linéaires en nombre infini
>
> $$S_i=\left(\frac{\alpha_i\zeta+\beta_i}{\gamma_i\zeta+\delta_i}\right)$$
>
> […] Il est clair que les substitutions S_i devront former un groupe et un groupe discontinu, c'est à dire que la portion du plan où la fonction F existe peut être divisée en une infinité de régions $R_0, R_1, \ldots, R_i, \ldots$ telles que quand ζ parcourt R_0, $\frac{\alpha_i\zeta+\beta_i}{\gamma_i\zeta+\delta_i}$ parcourt R_i. Ces diverses régions formeront, comme dans le cas

[44] [Gilain 1991, p. 240] donne une analyse détaillée du rôle joué par la géométrie dans la conception pluraliste de Poincaré sur la théorie qualitative des équations différentielles.

[45] La généralisation de ces résultats aux fonctions invariantes par des « groupes kleinéens », i.e. des sous groupes discrets de $PSL_2(\mathbb{C})$, allait nécessiter l'étude des polyèdres de l'espace hyperbolique et conduire à la classification des variétés fermées à trois dimensions.

> des fonctions elliptiques, une sorte de damier dont l'ensemble ne varie pas, mais dont les cases se permuteront quand on appliquera à ζ l'une des substitutions S_i [Poincaré 1882d, p. 553].

Or dès sa première note du 14 février 1881, Poincaré insistait sur la proximité entre les groupes de substitutions unimodulaires à coefficients réels laissant invariantes les fonctions fuchsiennes et les « groupes de substitutions à coefficients entiers reproduisant une forme quadratique ternaire indéfinie à coefficients entiers ». Selon lui, cette proximité faisait « ressortir les liens intimes qui unissent la théorie des nombres à la question analytique qui nous occupe » [Poincaré 1881a, p. 335]. Les liens entre les fonctions fuchsiennes et formes algébriques allaient d'ailleurs être développés en 1886 lorsque Poincaré allait en approfondir les « dimensions respectivement algébriques et arithmétiques » [Poincaré 1886b, p. 341] : au groupe de substitutions semblables (à coefficients entiers ou rationnels) d'une forme quadratiques ternaire était associé un groupe fuchsien « arithmétique » définissant des fonctions fuchsiennes vérifiant une propriété analogue au théorème d'addition des fonctions elliptiques [Poincaré 1886d & 1887].

Cette importance donnée aux substitutions laissant invariantes des formes algébriques résultait de ce que, jusqu'à l'été 1880, Poincaré avait mené ses travaux hors du cadre de la théorie des groupes. De fait, les substitutions employées dans le mémoire déposé pour le Grand prix ne désignaient encore de manière traditionnelle que des procédés de changements de variables et n'étaient pas envisagées comme formant des groupes à la manière de Jordan.[46] Comme en témoignent les trois suppléments à ce mémoire, le statut des substitutions allait basculer durant l'été 1880 en même temps que Poincaré commençait à s'appuyer sur la géométrie non euclidienne. Dans les deux cas, cette évolution était liée aux travaux menés sur la théorie des formes. Le deuxième supplément du 6 septembre 1880 envisageait ainsi un pavage du disque par des polygones non euclidiens transformés les uns en les autres par des classes d'équivalence de substitutions laissant invariante une forme quadratique donnée.

Les liens entre théorie des formes et fonctions fuchsiennes allaient d'ailleurs être explicités ultérieurement [Poincaré 1884f, 1886a,b,c]. Plus tard, lorsque Poincaré allait donner un compte rendu rétrospectif de son adoption de la géométrie non euclidienne [Poincaré 1908], il devait insister sur le rôle qu'avait joué le fait qu'une même représentation analytique des transformations homographiques soit impliquée dans la géométrie de Lobatchevski et les transformations des formes quadratiques ternaires indéfinies (et donc des fonctions modulaires de réseaux associés à de telles formes). Plus encore, il mettait en avant le rôle qu'avait jouées des considérations arithmétiques pour le « libérer » du cas particulier de l'équation hypergéométrique sur lequel il était resté bloqué jusqu'à la fin juillet 1880 [Poincaré 1908, p. 52-53].

Poincaré avait en effet d'abord suivi une approche arithmétique en envisageant le plan complexe sous l'angle des réseaux représentant les classes d'équivalences de formes quadratiques. Ainsi, les deux notes successives publiées en aout et novembre 1879 considéraient des systèmes de nombres complexes « existants » associés à des « nombres idéaux » par des classes d'équivalence de formes quadratiques binaires, le tout représenté par des réseaux du plan.[47] « Cette théorie », avait insisté Poincaré, « se rattache directement à celle des fonctions elliptiques, et la même méthode qui a permis de calculer les nombres corrélatifs par des intégrales définies permet d'exprimer, à l'aide d'une intégrale définie, les fonctions doublement périodiques » [Poincaré 1879b, p. 190].

Loin de toute considération en terme de groupes de substitutions, Poincaré interprétait ainsi initialement la similitude des mailles du réseau en termes de multiplication de nombres complexes ou de composition de formes quadratiques dont les classes d'équivalences étaient déterminées par des invariants. La généralisation des fonctions elliptiques doublement périodiques pouvait alors

---

[46] Sur le statut des substitutions au XIX^{e} siècle, voir [Brechenmacher, 2011].

[47] L'utilisation de réseaux pour représenter des formes quadratiques avait été développée par Gauss (1840) et Dirichlet (1850). Indépendamment de la théorie des formes, les réseaux du plan avaient aussi été étudiés par Jordan en relation avec la cristallographie et les symétries des polygones et polyèdres [Brechenmacher 2012]. Sur les liens entre fonctions elliptiques, réseaux, formes quadratiques et nombres idéaux, voir [Poincaré 1879b, p.897] et [Poincaré 1908b, p. 29].

s’envisager comme revenant à obtenir des fonctions admettant des « invariants arithmétiques » définies comme des séries sur un réseau [Poincaré 1879b, p. 194].[48] A la suite d’Hermite, Poincaré représentait notamment la réduction d’une forme quadratique à une « forme réduite » comme généralisant l’algorithme des fractions continues qu’il interprétait comme un déplacement dans les mailles du réseau donné par les points d’intersections de ce dernier avec une suite de « triangles ambigus » [Poincaré 1880c].[49]

3.3. Formes reproductibles et groupes de substitutions semblables

C’est seulement dans un second temps, et dans le cadre d’une théorie des formes fortement ancrée dans l’héritage hermitien, que Poincaré allait rencontrer les groupes de substitutions.

Comme nous l’avons déjà évoqué, Jordan avait publié le 5 mai 1879 une note sur les classes d’équivalences de formes algébriques. Ce travail concernait donc directement l’objectif que s’était fixé Poincaré dans sa note du 11 aout 1879 de « reconnaître si deux formes données sont équivalentes, et par quels moyens on peut passer de l’une à l’autre » [Poincaré 1879, p. 345]. Après que Poincaré ait adressé en janvier 1880 à Jordan un courrier à ce sujet, ce dernier avait conseillé à son jeune « camarade » de concentrer son attention sur les groupes de substitutions laissant une forme donnée invariante :

> Cette question est assez à l’ordre du jour en ce moment. M. Klein y a consacré de nombreux mémoires dans les *Mathematische Annalen*. Mais il se borne aux groupes d’un nombre fini de substitutions entre deux variables. Il trouve que ces groupes se réduisent à ceux qui superposent à lui-même une pyramide régulière, une double pyramide régulière, ou l’un des polyèdres réguliers. Quant aux formes binaires correspondantes, elles se réduisent (au moins pour les groupes des polyèdres réguliers) aux fonctions entières d’un petit nombre de variables indépendantes. De mon côté, j’ai réussi à former les groupes finis pour trois variables, dans le journal de Borchardt de l’année dernière [i.e. [Jordan 1878] sur l’intégration algébrique des équations différentielles] ; mais je ne sais rien sur les formes correspondantes, non plus que sur les groupes où le nombre de substitutions serait infinie [Jordan à Poincaré 27/1/1880].

Comme nous l’avons vu, Poincaré n’allait cependant pas adopter avant l’été 1880 une approche des équations différentielles en terme de groupes de substitutions. Dans l’intervalle, Jordan consacrait le 15 mars une note sur la réduction des substitutions linéaires associées aux classes d’équivalence des formes algébriques qu’il avait étudiées l’année précédente. Poincaré allait s’approprier cette problématique dans sa note sur les formes cubiques du 7 juin tandis que Jordan publiait une nouvelle note à ce sujet le 14 juin. Jusqu’à la parution de leurs deux mémoires de synthèse en 1882, les deux géomètres allaient alors se focaliser sur les cas des formes quadratiques et de la représentation des nombres par des formes ([Poincaré 1880d, 1881d] ; [Jordan 1881a,b,c]).[50]

Considérons à présent plus précisément les problèmes abordés par les travaux de Jordan et Poincaré sur les formes algébriques. En mai 1879, la première note de Jordan était basée sur la distinction introduite par Hermite entre classes d’équivalence « algébrique » (i.e. modulo $Sl_n(\mathbb{R})$) et « arithmétique » (modulo $Sl_n(\mathbb{Z})$ ou $Sl_n(\mathbb{Z}(i))$) des formes à coefficients entiers. L’auteur se proposait de généraliser aux formes à n variables et de degré m des travaux d’Hermite [Hermite 1850, 1851,

---

[48] Ces séries et invariants jouent un rôle analogue à ceux employés pour la représentation des fonctions *P* de Weierstrass.

[49] Voir [Goldstein 2007, p. 393] Comme l’exprimait Léon Charve dans sa thèse de 1880, le développement en fraction continue d’une racine a d’une équation quadratique est identique à la réduction d’une forme binaire, c’est à dire à la recherche des minimums successifs de la forme $f=(x-a)^2+D(x-b)^2$ où b est la deuxième racine de l’équation considérée et D une quantité croissant de zéro à l’infini. La périodicité du développement de l’irrationnelle du second degré se retrouvait alors sous la forme d’une périodicité des calculs à effectuer pour obtenir les réduites de f pour les diverses valeurs de D, ce qui amenait à chercher à caractériser les irrationnelles d’ordre supérieur par des considérations analogues sur les formes.
Au sujet des fractions continues, voir également [Poincaré 1884f & 1886a] ainsi que les commentaires de Châtelet sur l’édition de ce dernier mémoire dans les *Œuvres complètes* de Poincaré.

[50] Au sujet du problème de la représentation des nombres par les formes, envisagé dès 1879 en terme de recherche d’idéaux de norme donnée et de représentation des formes par des réseaux, voir les commentaires de Châtelet à [Poincaré 1886].

1854]. Il s'appuyait sur la théorie de la réduction développée par ce dernier et qui associait à une classe de formes (quadratiques, binaires ou décomposables en facteurs linéaires) une forme réduite dont les coefficients étaient définis par récurrence comme des minimums successifs de valeurs prises par les formes d'une même classe d'équivalence.[51] La borne donnée par Hermite pour de tels minimums avait été récemment affinée par Aleksandr Korkin et Egor Zolotarev [1873] pour les cas des formes ternaires et quaternaires. Cette borne des coefficients des formes réduites allait permettre à Jordan d'énoncer un résultat de finitude du nombre de classes d'équivalences de formes *n-aires* de discriminants non nul [Jordan 1880a, p. 1422] sur le modèle de son résultat de finitude des groupes linéaires finis. [52]

Plus précisément, Jordan associait à chaque classe d'équivalence *algébrique* de formes Φ à coefficients entiers (réels ou complexes) de degré m et de n variables (correspondant aux transformations $\Phi \rightarrow \Phi\ U$, avec U une substitution unimodulaire) une classe d'équivalence *arithmétique* de formes quadratiques (ou hermitiennes) $F= \Phi^*\Phi$ (modulo les transformations $F \rightarrow U^*FU$).[53] La substitution U transformant F en sa réduite G au sens de Korkin et Zolotarev était alors appelée « substitution réduite ». Cette notion transférait la notion de réduite des classes d'équivalences arithmétiques des formes quadratiques aux classes d'équivalences algébriques des formes de degré n [Jordan 1880b, p. 135], cas pour lequel l'auteur pouvait investir ses travaux sur les groupes linéaires.

Mais Jordan s'appuyait aussi sur les travaux d'Hermite sur les « substitutions semblables » laissant une forme quadratique invariante et menait une étude des substitutions transformant une réduite de degré n en elle-même ou en une autre réduite [Jordan 1880b, p. 140-150]. Dans le cas des classes d'équivalences algébriques, il avait alors recours à sa réduction canonique afin d'obtenir des décompositions multiplicatives de substitutions en produits de « substitutions infinitésimales ». Cette problématique manifestait l'assimilation par Jordan de principes d'effectivité d'Hermite. L'objectif affiché était en effet d'assurer la possibilité d'une réduction effective des formes: « on voit par là qu'on n'aura qu'un nombre limité d'essais à faire pour constater l'équivalence de deux formes réduites et trouver les transformations de l'une dans l'autre » [Jordan 1880b, p. 133].

Jordan s'intéressait pourtant davantage aux propriétés générales des groupes de substitutions qu'exprimaient les problèmes sur les substitutions semblables qu'aux objets hermitiens eux-mêmes. Les travaux de Poincaré allaient en revanche manifester une fidélité bien plus forte aux principes hermitiens en menant les calculs permettant des résultats explicites sur des objets spécifiques. Ainsi, tandis que Jordan énonçait un théorème pour des formes de degré m, Poincaré s'attelait au cas des formes quadratiques et cubiques de discriminant nul. Plus tard, le second cherchait à exprimer explicitement les équations différentielles linéaires à intégrales algébriques correspondant à la classification donnée par dont le premier aux sous groupes finis de $Gl_n(\mathbb{C})$ ($n \leq 4$).

---

[51] Sur la théorie de la réduction chez Hermite, voir [Goldstein 2007, p. 391-396].

[52] Comme Hermite, Korkin et Zolotarev introduisaient des réduites en maximisant ou minimisant les coefficients de formes sur des classes d'équivalence par des raisonnements analytiques. A la classe des matrices U^*FU Hermite avait associé deux invariants à partir desquels il mesurait la grandeur de la classe : le déterminant commun D et la plus petite valeur μ prise par la forme hermitienne correspondante aux points distinct de l'origine ayant des coordonnées entières. Hermite montrait alors qu'il existe une matrice de la classe, la « réduite », dont les éléments sont bornés en valeur absolue par D, μ et n. Voir [Jordan 1879, p. 907] et [Dieudonné 1962, p. XVI].

Plus tard, Hurwitz [1884] inscrivait les travaux de Jordan et Poincaré dans le cadre de l'approche de Kronecker sur la théorie des nombres de classes tandis que les travaux de [Minkowski 1885a,b] poursuivaient les questions de réduction des formes à la suite d'Hermite, Korkin, Zolotarev, Jordan et Poincaré. Au sujet du rôle joué par les travaux de Minkowski sur la représentation des formes par des réseaux dans la genèse de la géométrie des nombres, voir [Schwermer 2007, p. 490-492]. Sur le développement de la géométrie des nombres à partir du problème de l'estimation du minimum des formes quadratiques, voir plus généralement [Gauthier 2007 & 2009].

[53] En termes actuels, Jordan étudiait les classes de matrices inversibles complexes qui se déduisent les unes des autres par multiplication à droite par une matrice unimodulaire, c'est à dire $Gl_n(\mathbb{C})/Sl_n(\mathbb{Z}(i))$ [Dieudonné 1962, p. XV].

Dans ses premières interventions, Poincaré généralisait le théorème de finitude de Jordan aux formes quadratiques de discriminant nul et démontrait au contraire que les cubiques de discriminant nul présentent une infinité de classes d'équivalences. Comme Jordan, Poincaré associait à chaque cubique son groupe des substitutions semblables afin de ramener le problème de l'équivalence algébrique à celui de la classification des substitutions linéaires, classification basée sur la réduction canonique.

En même temps qu'il s'appropriait la pratique de réduction canonique, Poincaré adoptait le point de vue selon lequel « le fondement de mes recherches sur les fonctions fuchsiennes est l'étude des groupes discontinus contenus dans le groupe linéaire à une variable » [Poincaré 1882c, p. 840]. Le vocabulaire employé témoignait du rôle joué par les travaux sur l'intégration algébrique que Jordan avait signalé à Poincaré dans sa lettre de janvier 1880. En effet, Poincaré devait désigner comme « forme canonique » la seule forme diagonale comme Jordan l'avait fait en 1878 pour son étude des sous groupes finis de $Gl_3(\mathbb{C})$. Plus encore, le premier devait s'appuyer en 1883 et en 1884 sur l'argument développé par le second en 1878 pour montrer que les substitutions d'ordre fini sont diagonalisables. En 1883 par exemple, Poincaré prouvait qu'un groupe continu *G* contient toujours une infinité de sous groupes par le fait que si *G* contient une substitution admettant une certaine équation caractéristique, alors une telle substitution se trouvera dans tous les sous groupes de *G*. Dans son approche des groupes continus, Poincaré s'appuyait aussi sur les travaux de Jordan sur la réduction canonique des substitutions infinitésimales laissant invariante une forme algébrique. Le cas non commutatif donnait une importance particulière aux racines caractéristiques multiples. Comme nous l'avons vu, Poincaré allait montrer dans sa note « Sur les nombres complexes » de 1884 que toutes les équations caractéristiques des groupes continus non commutatifs ont des racines multiples.

A la différence des travaux de Jordan cependant, Poincaré articulait systématiquement ses considérations algébriques sur les groupes de substitutions à des problématiques arithmétiques de classes d'équivalences de formes ainsi qu'à des interprétations géométriques en termes de changements de coordonnées et de « plans reproductibles », c'est à dire de sous espaces stables pour une transformation donnée. Si x_1, x_2, x_3 sont les coordonnées d'un point du plan, la cubique $F=0$ représente une courbe *C* et une substitution *T* pour laquelle *F* est reproductible peut s'interpréter comme une homographie entre deux points de *C* :[54]

> Supposons que *T* soit de la première ou de la deuxième catégorie, c'est-à-dire que l'équation (3) ait quatre racines distinctes, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$,. Il y a alors quatre plans reproductibles par *T*. Imaginons que l'on fasse un changement de coordonnées Σ en prenant pour nouveau tétraèdre de référence le tétraèdre formé par ces quatre plans. Il est clair que la transformée de *T* par Σ est
>
> $$\Sigma^{-1}T\Sigma = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{vmatrix}$$
>
> […] Il suit de là que si *T* est de première ou deuxième catégorie, on peut choisir Σ de telle sorte que $\Sigma^{-1}T\Sigma$ soit par conséquent canonique ; nous l'écrirons parfois pour abréger $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$. Je dis qu'il en est de même si *T* est de troisième catégorie […]. Les transformations ternaires (canoniques) de la troisième catégorie se classent en deux types :
>
> $$\text{Type } A\ldots\ldots \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{vmatrix}, \text{ Type } B\ldots\ldots \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{vmatrix};$$
>
> […] La question qui se pose est de trouver les points, les droites et les plans reproductibles par la transformation *T* et de discuter complètement le problème […]. Passons maintenant aux transformations de la quatrième catégorie ; on ne peut pas les réduire à la forme canonique, mais on

[54] Voir en particulier l'importance de la représentation géométrique dans la généralisation par Poincaré du théorème de Jordan de finitude des classes [Poincaré 1882a].

peut choisir Σ de façon à ramener $\Sigma^{-1}T\Sigma$ à sa forme la plus simple. Ainsi, les transformations ternaires se divisent en deux types dont je donne ici les formes les plus simples :

$$\text{Type } A_1 \ldots\ldots \begin{vmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & \gamma & \alpha \end{vmatrix}, \text{ Type } B_1, \ldots\ldots \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ \gamma & \delta & \alpha \end{vmatrix},$$

Les transformations quaternaires se divisent en quatre types :

$$\text{Type } C_1 \ldots \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \delta & \gamma \end{vmatrix}, \text{ Type } D_1 \ldots\ldots \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \delta & \beta \end{vmatrix},$$

$$\text{Type } E_1 \ldots \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & \beta & 0 \\ 0 & \delta & \varepsilon & \beta \end{vmatrix}, \text{ Type } F_1 \ldots\ldots \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 & 0 \\ \gamma & \delta & \alpha & 0 \\ \varepsilon & \varsigma & \theta & \alpha \end{vmatrix}$$ [Poincaré 1882, p. 34-38].

Les quatre catégories de formes canoniques de substitutions,[55] étaient mises en correspondance avec sept familles de cubiques, chacune représentée par une forme réduite ou « forme la plus simple du type considéré » [Poincaré 1881d, 31]. A chacune de ces formes canoniques était enfin associés invariants et covariants au sens des travaux de Sigfried Aronhold et d'Alfred Clebsch. Par exemple, les quatre premières familles correspondaient aux formes non décomposables. Poincaré y distinguait deux couples de deux familles selon que le discriminant de la forme soit nul ou non, ce dernier cas correspondant à l'absence de points doubles. Dans un second temps, chaque famille de formes était définie par une "forme canonique" comme, par exemple :

$F=[6xyz+\beta(x^3+y^3+z^3)].\Sigma$, Σ étant une substitution à coefficients réels,

Comme pour les substitutions, la réduction des cubiques s'appuyait sur des considérations géométriques, comme par exemple l'adoption comme nouveau repère des trois droites réelles sur lesquelles étaient distribués les neuf points d'inflexions de la cubique F définie ci-dessus.

La forme $6xyz+\beta(x^3+y^3+z^3)$ est reproductible par les transformations suivantes, qui appartiennent à la deuxième catégorie (nous n'écrivons que les transformations réelles) :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

toutes ces transformations se réduisent à des permutations entre les lettres x, y, z. C' est là un résultat qu'il était aisé de prévoir en effet, le système des trois droites $x=0$, $y=0$, $z=0$, est le seul système de trois droites réelles sur lesquelles se distribuent les neuf points d'inflexion. Toute transformation réelle qui reproduit la forme proposée doit donc reproduire le système des trois droites : elle doit donc se ramener à une permutation entre ces trois droites [Poincaré 1882a, p. 57].

L'articulation constante par Poincaré d'interprétations en termes de formes reproductibles à la considération de substitutions linéaires témoigne du rôle de creuset joué par l'héritage hermitien pour l'appropriation des groupes de substitutions de Jordan. Il s'agit donc en des termes qui nous sont contemporains de déterminer les sous groupes de $Gl_n(\mathbb{Z})$ laissant invariante à gauche une forme homogène de degré 3 à 3 ou 4 variables et, réciproquement, de déterminer toutes les formes laissées invariantes par un sous groupe G de $Gl_n(\mathbb{Z})$. Comme l'exprime le texte ci-dessous dans lequel Poincaré explicitait les objectifs généraux de ses travaux en théorie des formes, la « notion de

[55] C'est à dire selon que les racines caractéristiques soient toutes distinctes, distinctes sans que leurs "puissances semblables" le soient, non distinctes diagonalisables, non distinctes non diagonalisables.

réduite » qui englobait la réduction canonique de Jordan était avant tout envisagée comme un leg hermitien qu'il s'agissait d'étendre aux formes cubiques:

> Les divers problèmes qui se rattachent à la théorie des formes quadratiques binaires ont été résolus depuis longtemps, grâce à la notion de réduite […]. La notion de réduite s'étend sans peine aux formes quadratiques définies par un nombre quelconque de variables. […] Généraliser une idée aussi utile, trouver des formes jouant, dans le cas général, le même rôle que les réduites remplissent dans le cas des formes quadratiques définies, tel est le problème qui se pose naturellement et que M. Hermite a résolu de la façon la plus élégante dans divers Mémoires insérés dans les Tomes 44 et 47 du *Journal de Crelle*.
> M. Hermite s'est bornée à l'étude des formes quadratiques définies ou indéfinies et des formes décomposables en facteurs linéaires ; mais sa méthode peut s'étendre sans difficulté au cas le plus général. […]. Les résultats auxquels je suis arrivé s'appliquent à une forme quelconque; mais, ne voulant pas sacrifier la clarté à la généralité, je me suis restreint aux formes qui sont les plus simples parmi celles que M. Hermite avait laissé de côté. […] Les plus simples de toutes les formes, après les formes quadratiques et les formes décomposables en facteurs linéaires, sont les formes cubiques ternaires. [Poincaré 1881d, p. 28].

Mais contrairement aux définitions explicites que l'on trouvait, à la même époque, dans la théorie des formes bilinéaires de Frobenius, la notion de réduite de Poincaré ne s'appuyait sur aucune définition précise. Au contraire, qualifiée d' « idée » utile par laquelle aborder « divers problèmes », cette notion ne prenait de signification que par une norme de simplicité maximale relative au problème considéré:

> On choisira dans chaque type ou dans chaque sous type, pour le représenter, une des formes de ce type ou de ce sous-type que l'on appellera la *forme canonique H*. Le choix de la forme *H* est peu près arbitraire ; toutefois on sera conduit, dans la plupart des cas, à choisir de préférence la forme la plus simple du type considéré [Poincaré 1881a, p. 203].

En 1874, Jordan avait justifié l'investissement de sa réduction canonique dans la théorie des formes bilinéaires par une semblable norme de simplicité qu'il avait alors associée au caractère algébrique de la théorie des groupes de substitutions. Comme nous l'avons déjà évoqué, Kronecker avait alors reproché à Jordan la diversité de significations et de formes de ses réduites et avait accusé la simplicité mise en avant par ce dernier d'un caractère formel. Contrairement à Jordan cependant, Poincaré ne s'appuyait pas en 1881 sur un idéal attribuant un caractère essentiel à la notion de groupe. Comme Hermite, il associait la notion de réduite à la problématique des substitutions semblables des formes reproductibles en articulant arithmétique des classes d'équivalences des formes, discussions algébriques sur la multiplicité des racines caractéristiques, interprétations géométriques et raisonnements analytiques de majorations ou minorations.

Dans la lignée des idéaux d'Hermite sur l'unité des mathématiques [Goldstein 2007, p. 399-403], de telles articulations étaient explicitement valorisées par Poincaré. Ainsi, lorsque ce dernier avait envisagé les substitutions hyperfuchsiennes à trois variables mises en évidence par Picard dans des travaux sur des formes hermitiennes ternaires marqués eux aussi par l'héritage d'Hermite, il avait présenté sa propre contribution comme visant à montrer par la considération de formes semblables que d'autres « considérations, arithmétiques, algébriques ou géométriques, permettent d'obtenir une infinité de groupes discontinus » [Poincaré 1882c, p. 840]. Comme l'illustrent les notes « Sur les nombres complexes » ou « Sur les substitutions linéaires » qui accompagnaient en 1884 des travaux « Sur les groupes hyperfuchsiens » [Poincaré 1884b, p. 349-352], ces considérations mêlées étaient en outre systématiquement déployées par Poincaré lorsque ce dernier s'appuyait sur les procédés de Jordan pour des substitutions de plus de deux variables.

Mais ces articulations impliquaient aussi une distinction explicite entre les « questions purement algébriques » pour lesquelles Poincaré s'appuyait fortement sur les travaux de Jordan et l' « étude arithmétique » basée sur des méthodes d'Hermite comme la réduction continuelle. Plus précisément, l'approche algébrique – et en particulier la réduction canonique des substitutions - allait en fait être fréquemment présentée comme relevant de « systèmes de définitions qui seront nécessaires par la suite » [Poincaré 1881a, p. 203] : notation des substitutions linéaires par des tableaux, équations aux multiplicateurs, réduction canonique des substitutions et des formes, points doubles, formes reproductibles par des substitutions semblables etc.

De tels préliminaires algébriques allaient être fortement mobilisés dans les travaux de Poincaré jusqu'au tournant du siècle. Ils précédaient ainsi l'étude des formes [Poincaré 1882a, p. 34], des fonctions fuchsiennes [1882e, p. 108-110], des groupes continus et équations aux dérivées partielles [1883], des nombres complexes [1884d], de l'intégration algébrique [1884e, p. 300-305], de l'intégration par des séries [1886g p. 316], de l'arithmétique des fonctions fuchsiennes [1887, p. 463-505], des « exposants caractéristiques » du problème des trois corps [1890, p. 293 & 337-343], des homologies de l'*Analysis Situs* [1900, p. 342-345], ou encore les groupes continus [1901, p. 216-252].

4. Retours sur les liens entre la note de 1884 et les matrices

Nous avons vu que la note « Sur les nombres complexes » de 1884 est loin d'être isolée dans les travaux de Poincaré. Elle s'insère non seulement dans un ensemble de travaux autour des fonctions fuchsiennes mais témoigne aussi plus généralement de pratiques algébriques héritées d'Hermite et de Jordan. Nous allons à présent revenir sur la question de la référence de Poincaré aux "matrices de M. Sylvester". Cette question nécessite la considération de dimensions collectives plus larges que les groupes de textes construits autour la note de 1884 et sur lesquels notre analyse s'est jusqu'à présent focalisée. Il nous faut notamment revenir sur deux aspects qui ont généralement été occultés par l'historiographie en raison du statut élémentaire de la notion de matrice.

Le premier de ces deux aspects concerne ce que nous désignerons ici sous le nom de « Tableaux » à la suite de la terminologie employée par Poincaré dans son texte de 1884. Le calcul des Tableaux renvoie à des procédés qui ont circulé sur le temps long sans pour autant s'intégrer à un cadre théorique ou disciplinaire avant le début du XX^e siècle. Les analyses que nous avons développées dans cet article quant aux travaux d'Hermite, Jordan et Poincaré permettent de questionner les rôles joués par ces trois auteurs dans le développement du calcul des Tableaux en amont et en aval de la note de 1884. Nous présenterons à cette occasion quelques aspects des héritages des pratiques algébriques de Poincaré.

Le second aspect est un mode de circulation spécifique de pratiques algébriques qui a joué un rôle important pendant les deux premier tiers du XIX^e siècle et dont nous verrons qu'il sous-tendait l'allusion faite par Poincaré en 1884 aux matrices de Sylvester.

4.1. Le calcul des Tableaux

La notation des Tableaux avait été utilisée depuis le début du XIX^e siècle pour dénoter des formes quadratiques. Dans les années 1850, des auteurs comme Hermite, Sylvester et Cayley avaient développé l'usage qu'en avait fait [Cauchy 1829] afin de dénoter un représentant canonique par la présentation des invariants d'une classe d'équivalence comme les déterminants et leurs mineurs. Plus tard, les Tableaux avaient notamment circulé dans le cadre des héritages de la théorie des formes d'Hermite.[56]

Les Tableaux faisaient leur apparition au sein de l'œuvre de Jordan lors des premières publications de ce dernier dans le cadre hermitien de la réduction des formes à la fin des années 1870. A partir de cette époque, les Tableaux cohabitaient avec les deux autres notations que Jordan avait employées depuis sa thèse pour représenter les substitutions :

$$S = \left| \begin{array}{l} x_1 \; a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots \\ x_2 \; a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots \\ x_3 \; \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array} \right| = \left\{ \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{array} \right\} \text{[Jordan 1880b, 117].}$$

[56] Un mémoire de Gaston Darboux [1874] illustre bien le rôle joué par des procédés associés aux Tableaux dans la théorie algébrique des formes quadratiques réelles.

La notation par une lettre, *S,* était dotée d'une opérativité symbolique et permettait notamment de représenter la relation d'équivalence $S'=USV$. La représentation analytique en lignes permettait, quant à elle, de représenter simultanément des manipulations sur les variables x_i et les effets de ces manipulations sur l'action d'une substitution sur ces variables. Cette seconde notation était par conséquent un élément constitutif des procédés de réduction simultanée des variables en blocs et de la substitution en substitutions partielles laissant invariant chaque bloc:

$$\left| \begin{array}{ll} x_1, x_2, \ldots, x_\alpha & s_1(x_1 + x_2), s_1(x_2 + x_3), \ldots, s_1 x_\alpha \\ x_{\alpha+1}, \ldots, x_\beta & s_{\alpha+1}(x_{\alpha+1} + x_{\alpha+2}), \ldots, s_{\alpha+1} x_\beta \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right|$$

Quant à la notation des Tableaux, son adoption par Jordan avait entraîné son enrichissement par les caractères opératoires des deux autres formes de représentations. La multiplication symbolique par des substitutions unimodulaires s'articulait ainsi à des opérations arithmétiques sur les lignes et les colonnes [Jordan 1880c, p. 152].[57] Surtout, des multiplications de Tableaux entre eux permettaient de décomposer la notation tabulaire en sous Tableaux représentant les étapes successives du procédé de réduction canonique. Les Tableaux permettaient ainsi une représentation de la pratique qui consistait à réduire un problème général (représenté par le Tableau principal) en une chaîne de maillons les "plus simples" (les sous Tableaux ou "mineurs"), eux même dotés d'une opérativité algébrique [Jordan 1880b, p. 130].

Dans le cadre de ses interactions avec Jordan sur les formes algébriques, Poincaré développait une semblable pratique opératoire des Tableaux. En revanche, il ne recourait pas à la représentation de substitutions de *n* variables mais en écrivait la généralité sur des paradigmes de Tableaux canoniques engageant le plus petit nombre de variables pour une présentation exhaustive des cas possibles.[58] Dès le début des années 1880, la réduction des Tableaux était intégrée aux préliminaires algébriques de Poincaré. Elle allait par la suite jouer un rôle transversal à des thématiques très variées comme les groupes des équations linéaires [Poincaré 1884e, p. 301], les formes, nombres complexes idéaux et réseaux [1886b, p. 375 & 389-393] ou les systèmes de périodes des fonctions abéliennes [1884g, p. 334 ; 1886e; 1886f p. 319-330, 360-361].[59]

En tant qu'il s'inscrivait dans plusieurs domaines distincts, le calcul des Tableaux permettait des exploitations parallèles de domaines d'interprétations et de problèmes. Il supportait ainsi à plusieurs reprises des transferts réciproques d'un champ à un autre par des analogies portées par des procédés opératoires.[60] Un premier exemple en est donné par les transferts entre périodes des fonctions abéliennes et idéaux/formes binaires/réseaux, tous objets représentés par des formes réduites de Tableaux à coefficients entiers modulo des opérations par des Tableaux unimodulaires [Poincaré 1886a, p.406-431].[61] D'autres exemples de transferts incluent l'introduction des déterminants d'ordre infini [1886c, p.100-103], ou les longs développements consacrés à la réduction

[57] L'étude des procédés tabulaires arithmétiques développés par Smith (1861) et par Kronecker [1884-1891) permet, par contraste, de mettre en valeur l'originalité des procédés de Jordan et Poincaré. Voir [Brechenmacher 2006a].

[58] Au sujet du mode d'écriture de la généralité par paradigmes chez Poincaré, voir [Robadey 2004].

[59] Il est remarquable que Poincaré mentionnait (sporadiquement) aux travaux de Dedekind sur les idéaux dans ses travaux sur les unités complexes mais ne citait jamais les travaux antérieurs de Kronecker sur les systèmes de périodes.

[60] Au sujet des transferts analogiques portés par des procédés opératoires, voir [Durand-Richard 2008].

[61] Voir à ce sujet les notes de Châtelet à l'édition des *Œuvres complètes* de [Poincaré 1886a]. Étant donné une forme binaire $f(x,y)$ telle que $\varphi(x) = f(x,1)$ est un polynôme unitaire et soit α_1 un zéro de ce polynôme. L'anneau des entiers algébriques $x_0+\alpha_1 x_1+ a_1^2 x_2+\ldots.+a_1^{m-1} x_{m-1}$ (x_i entiers) est isomorphe à un anneau de matrices *A* à coefficients entiers qui représentent les tables de multiplication des entiers par les *m* premières puissances de α_1, i.e. par exemple $\| 1\ \alpha_1 \ldots \alpha_1^{m-1} \| \times \alpha_1 = \| 1\ \alpha_1 \ldots \alpha_1^{m-1} \| \times A$. Un sous module de l'anneau peut être défini par une base de *m* entiers, que l'on peut écrire $\| 1\ \alpha_1 \ldots \alpha_1^{m-1} \| \times S$, où *S* est une matrice à termes entiers définie modulo la multiplication à droite par une matrice unimodulaire. Pour que ce module soit un idéal, il est nécessaire et suffisant que $S^{-1} \times A \times S$ soit à termes entiers. L'étude des idéaux *premiers* se ramène alors à celle des formes de matrices *S*.

des Tableaux dans le mémoire *Les fonctions fuchsiennes et l'arithmétique* [1887, p. 485-499] et leur investissement ultérieur dans la définition des nombres de Betti de l'*Analysis situs* [1899, p. 310-328 ; 1900, p. 342-345].

La représentation par la décomposition canonique d'un Tableau de la pratique de classification basée sur la réduction d'un problème complexe à une suite de problèmes simples allait circuler entre 1880 et 1914 au sein d'un réseau de textes dont l'une des caractéristiques principales était la référence aux travaux d'Hermite et Jordan. Les textes de ce réseau étaient majoritairement le fait d'auteurs français - parmi lesquels Poincaré, Jordan, Léon Autonne, Jean-Armand de Séguier ou Albert Châtelet - sans pour autant se réduire à une tradition nationale comme l'illustre la présence de textes d'auteurs cultivant l'héritage d'Hermite, comme Hermann Minkowski, ou celui de Jordan, comme Leonard Dickson.

Cette circulation du calcul des Tableaux s'accompagnait du caractère polysémique attribué aux « réduites » comme les « formes les plus simples » en fonction du problème considéré. Bien qu'elles ne devaient pas bénéficier d'une définition formelle, ces pratiques ne restaient cependant pas pour autant au niveau de savoirs tacites. Autonne allait en particulier suivre le modèle de [Poincaré 1881a] en introduisant ses travaux sur les équations différentielles par des préliminaires sur la réduction des Tableaux et ses interprétations algébriques, géométriques et arithmétiques [Autonne 1885, 1886].[62] Plus tard, les nombreux traités sur la théorie des formes, les groupes, les équations différentielles et la géométrie algébrique qu'Autonne publiait à partir du tournant du siècle étaient systématiquement introduits par de tels préliminaires [Brechenmacher 2006a, p. 599-628]. Ces travaux, tout comme ceux de [Séguier 1908] dans le cadre algébrique des groupes finis ou ceux de [Châtelet 1911] en théorie des nombres, allaient jouer un rôle important dans le développement de la théorie des matrices canoniques des années 1920.

Le rôle de modèle joué par les préliminaires algébriques de Poincaré se manifeste aussi par l'adoption au sein du réseau du calcul des Tableaux de l'expression « forme canonique » pour désigner une forme diagonale. Au contraire, des travaux qui, comme [Cartan 1894, p. 639], ne s'appuyaient pas sur les Tableaux mais sur une référence directe aux premiers travaux de Jordan sur les groupes de substitutions faisaient un usage important de la « réduction canonique » au sens de ce dernier.

4.2. Les matrices de Sylvester

Nous avons vu que le caractère opératoire de la décomposition de la notation des Tableaux en sous Tableaux supportait une représentation dynamique des étapes successives d'une pratique de réduction. En revanche, cette pratique était très différente des méthodes de calculs d'invariants polynomiaux dont les résultats étaient représentés *a posteriori* par des formes canoniques statiques, méthodes qui circulaient avec la théorie des formes bilinéaires de Frobenius et que des auteurs comme Scheffers avaient investi dans l'étude des groupes continus et systèmes hypercomplexes. Là où une lecture contemporaine reconnaîtrait une même méthode de décomposition matricielle, il est alors nécessaire de distinguer des pratiques différentes dont les circulations manifestent des dynamiques collectives.

---

[62] En tant qu'« ancien » de l'*École polytechnique*, Poincaré avait d'ailleurs personnellement assuré l'encadrement des travaux de thèse qu'Autonne, alors « conscrit », avait mené sur les intégrales algébriques des équations différentielles linéaires entre janvier et septembre 1881. Il avait alors incité ce dernier à se plonger dans le *Traité* de Jordan [Autonne à Poincaré, 7 février 1881]. Prolongeant les travaux de Poincaré sur l'intégration algébrique, Autonne avait cherché à expliciter la forme des équations algébriques admettant pour racines les intégrales des types d'équations différentielles associées aux types de sous groupes finis de $Gl_3(\mathbb{C})$ classés par Jordan (à la même époque, Goursat consacrait ses premiers travaux à un problème semblable [Goursat 1883, 1885]). L'échange épistolaire entre Autonne et Poincaré s'était essentiellement consacré à des questions liées aux racines caractéristiques de substitutions telles que présentées dans les travaux de Jordan (en particulier [Jordan 1878, p. 200].

La référence de Poincaré aux « matrices de M. Sylvester » et aux « quaternions de Hamilton » illustre cependant que de telles pratiques n'évoluaient le plus souvent pas en autarcie. Comme nous allons le voir, cette référence donne un exemple de point de contact entre deux pratiques par l'intermédiaire de ce qui s'est longtemps présenté comme une culture algébrique commune à une échelle large au XIX^{e} siècle. De tels points de contacts éclairent d'un nouveau jour ce que nous percevons rétrospectivement comme des redécouvertes multiples.[63]

Lorsqu'il évoquait les matrices et nombres complexes en 1884, Poincaré se référait implicitement à la série de travaux publiée par Sylvester aux *Comptes rendus* depuis 1882. Comme les travaux contemporains de Poincaré, les deux premières notes de cette série avaient abordé des problèmes posés par l'occurrence de racines caractéristiques multiples lors de généralisations de résultats sur des substitutions homographiques $\varphi(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ au cas de *n* variables. Elle visaient en effet à caractériser les substitutions homographiques de « périodicité donnée » - $\varphi^{\mu}(x)=x$ - en exprimant les racines μ^{e} d'une telle substitution par des fonctions numériques de ses racines caractéristiques.

La première note publiée en janvier 1882 s'était avéré en contradiction avec un résultat que Cayley avait énoncé pour les homographies de trois variables dans son célèbre article de 1858 intitulé « A Memoir on The theory of Matrices ». La formule énoncée par Sylvester en janvier perdait en effet sa validité en cas d'occurrence de racines caractéristiques multiples.[64] La deuxième note, intitulée « Sur les racines des matrices unitaires » avait été l'occasion de la réapparition de la notion de matrice dans l'œuvre de Sylvester plus de trente années après son introduction. En 1851, cette notion avait précisément été introduite pour surmonter des difficultés posées par l'occurrence de racines caractéristiques multiples : à l'occasion d'une étude des types d'intersections de coniques, Sylvester avait examiné la décomposition polynomiale du déterminant caractéristique en relation avec la décomposition d'une « matrice» envisagée comme une « forme carrée » dont étaient extraits des « mineurs » comme « engendrés de l'utérus d'un parent commun » [Brechenmacher 2006b].

Entre les années 1850 et 1880, cette notion de matrice - mère des mineurs d'un déterminant avait bénéficié d'une circulation assez large, notamment en interaction avec les travaux d'Hermite en théorie des formes. Dans ce cadre, le terme matrice renvoyait à une pratique spécifique pour aborder les problèmes posés par l'occurrence de racines caractéristiques multiples. Les rares usages que faisait Poincaré du terme matrice étaient d'ailleurs bien représentatif de cette situation [Poincaré 1884g, p. 334 ; 1884f, p. 420]. Jusqu'aux travaux de Sylvester de 1882-1885, les matrices n'avaient au contraire pas présenté de lien privilégié avec les « nombres complexes » comme les quaternions. Poincaré, par exemple, se référait plutôt à la notion de clef algébrique de Cauchy lorsqu'il recourait un calcul symbolique des transformations sur des systèmes de vecteurs au sens de Grassmann [Poincaré 1886c, p. 101].[65]

En 1882, le problème de l'expression des fonctions rationnelles d'homographies avait cependant amené Sylvester à une nouvelle lecture de la notion de matrice qu'avait développé Cayley en 1858. L'objet initial de la théorie de ce dernier était en effet d'énoncer un « théorème remarquable » supportant une méthode d'expression des substitutions homographiques de périodicité donnée (le théorème dit de Cayley-Hamilton) [Brechenmacher 2006b].[66] L'expression de la racine carrée d'une

---

[63] Ainsi, bien que Poincaré ait mis en relation la pratique de réduction canonique et les matrices en 1884, la forme de Jordan n'allait être exprimée sous forme matricielle qu'entre 1901 et 1910 par Dickson, Autonne et de Séguier et n'allait prendre l'identité d'un théorème à un niveau international que dans les années 1930 [Brechenmacher 2006].

[64] Voir [Cartan et Study 1908, p. 438] à propos des « fonctions analytiques » dont les variables sont hypercomplexes (par exemple les exponentielles de matrices). Voir [Wedderburn 1934, p. 27] pour un emploi de la forme de Jordan en cas d'occurrence de valeurs propres multiples.

[65] Au sujet des clefs algébriques, voir [Laurent 1898].

[66] Ce problème, tout comme l'approche développée par Cayley pour le résoudre, se rattachaient au contexte de l'héritage des opérations symboliques de l'« école algébrique anglaise » à Cambridge [Durand-Richard 1996]. Des problématiques de calculs de racines de fonctions homographiques avaient en particulier été développées par Herschell et Babbage dans le

matrice par un polynôme de degré inférieur à celui de la matrice elle-même nécessitait l'introduction de lois d'opérations sur les matrices. La série de notes publiée par Sylvester de 1882 à 1884 élaborait alors une théorie des matrices -quantités complexes participant d'une « algèbre multiple » envisagée comme généralisant à la fois le problème de la périodicité des homographies et les quaternions d'Hamilton.

L'incorporation de la théorie des quaternions – et sa généralisation à des systèmes d'ordre 3, les nonions - dans celle des matrices impliquait la résolution d'équations matricielles du type *mn=-nm*. Or, après avoir initialement énoncé que si *mn=nm* alors, soit l'une des matrices est diagonale, soit il existe une relation fonctionnelle entre *m* et *n*, Sylvester avait reconnu que cet énoncé n'est pas valable en cas d'occurrence de racines multiples.[67]

Comme nous l'avons vu dans les parties précédentes, c'est précisément cette problématique du lien entre commutativité et racines multiples que Poincaré allait aborder à l'aide de la réduction canonique des Tableaux dans sa note « Sur les nombres complexes ».

Reprenons à présent la question de la mise en relation des nombres complexes et des groupes continus que Poincaré opérait en 1884. Nous avons déjà vu que cette mise en relation ne tenait pas à l'identification d'une notion unificatrice entre deux grandes théories. Elle passait en revanche par l'explicitation d'une identité en partie commune entre deux pratiques distinctes : la pratique des racines latentes des matrices de Sylvester et celle de réduction canonique. Or cette identité commune relevait d'une culture algébrique largement partagée dans la seconde partie du XIX^{e} siècle et qu'identifiait très précisément le titre du mémoire dans lequel Sylvester développait en 1883 la notion de racine latente d'une matrice : « On the equation to the secular inequalities in the planetary theory » et qui faisait à l'article publié en 1851 par le même auteur sur l' « équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires des planètes »

De telles références à l'équation séculaire ne manifestaient le plus souvent pas de préoccupations en mécanique céleste mais s'avéraient la manière dont des auteurs du XIX^{e} siècle identifiaient une pratique algébrique commune consistant à transformer des systèmes linéaires symétriques en relation avec les décompositions polynomiales de leurs équations caractéristiques [Brechenmacher 2007b].[68] Cette pratique circulait entre mécanique, systèmes différentiels, géométrie analytique, arithmétique des formes quadratiques et algèbre des invariants. C'était d'ailleurs dans ce cadre que des procédés de calculs des Tableaux avaient circulé de Cauchy à Hermite, Cayley ou Sylvester et que les notions de « matrices » et de « mineurs » avaient été introduites en 1851.

A partir des années 1850, la pratique algébrique qu'identifiait la référence à l' « équation etc. » avait été le plus souvent associée aux problèmes posés par l'occurrence de racines multiples dans la dite équation, problèmes qui mettaient en question la capacité de l'algèbre à donner lieu à des résolutions « générales », c'est-à-dire valables pour tous les cas singuliers, et non uniquement pour le cas générique des racines distinctes. Or cette problématique avait progressivement donné lieu à la prise en compte du cas de systèmes linéaires non symétriques par les développements d'approches distinctes dans divers cadres théoriques comme les matrices de Sylvester, les diviseurs élémentaires de Weierstrass ou forme canonique de Jordan.

Or jusque dans les années 1880, c'était toujours par l'intermédiaire de l'"équation etc." que ces lignes divergentes allaient se rencontrer épisodiquement. C'était notamment dans cette

---

contexte de l'importance qui avait été donnée à des problématiques sur la composition des opérateurs différentiels (puissances, racines, non commutativité) depuis l'introduction en Grande Bretagne du calcul différentiel.

[67] Ces travaux avaient conduit Sylvester à distinguer entre polynômes caractéristique et minimal d'une matrice.

[68] On interprèterait aujourd'hui cette pratique comme une méthode revenant à donner une expression polynomiale générale des vecteurs propres d'une matrice comme quotients de mineurs extraits du déterminant caractéristique $|A-\lambda I|$ et d'une factorisation de l'équation caractéristique par un terme linéaire : $|A-\lambda I|/(\lambda-\lambda_i)$ (où λ_i est une racine caractéristique de A). Une telle expression polynomiale s'identifie à un facteur près aux colonnes non nulles de la matrice des cofacteurs de $|A-\lambda I|$.

problématique que s'était inscrit Jordan lorsqu'il avait résolu en 1871-1872 le problème traditionnel des petites oscillations d'un système mécanique en cas de racines multiples. C'est aussi par l'intermédiaire de cette culture algébrique commune que la réduction canonique de Jordan était entrée en contact avec les diviseurs élémentaires de Weierstrass. C'était encore dans ce cadre que Poincaré avait réagi en 1884 aux difficultés posées par les racines multiples dans les travaux de Sylvester, sans pour autant s'intéresser aux problématiques sur les matrices-quantités complexes développées à cette époque par ce dernier.

Conclusion

Comme nous l'avons vu dans la première partie de cet article, le rôle de point d'origine qui a souvent été conféré à la note « Sur les nombres complexes » était basé sur l'attribution à Poincaré de la mise en relation des théories des systèmes hypercomplexes et des groupes continus par l'intermédiaire de la notion de matrice. En conséquence, cette note a été présentée comme une première rencontre entre deux grandes aires culturelles identifiées de manière géographique. Nous avons insisté sur le fait que ces commentaires rétrospectifs s'avéraient eux-mêmes indissociables du statut élémentaire attribué à la notion de matrice au sein d'organisations du savoir mathématique qui s'étaient mises en place localement à partir des années 1890 mais n'allaient faire l'objet d'une culture partagée qu'à partir des années 1930 avec la constitution de l'algèbre linéaire comme une discipline. L'universalité prêtée à cette époque à des notions élémentaires de cette organisation disciplinaire semble avoir conférée à celles-ci un caractère naturel, dénué d'histoire. Pourtant, malgré leurs similitudes visuelles, les procédés de décompositions de formes imagées comme les matrices de Sylvester et les Tableaux de Poincaré renvoyaient à des pratiques et des dynamiques collectives distinctes.

La note de 1884 n'avait en réalité joué aucun rôle crucial dans la rencontre de grands courants de recherches associés à des aires géographiques ou nationales. D'une part, les matrices-mère des mineurs circulaient déjà sur le continent depuis les années 1850, d'autre part l'implantation sur le continent des matrices-quantités complexes n'allait pas être amplifiée par la note de Poincaré et devait être davantage portée par des réponses d'autres auteurs aux travaux de Sylvester, comme Eduard Weyr qui incorporait en 1890 les matrices dans la théorie des formes bilinéaires.

A la différence des identités géographiques, nationales ou disciplinaires, une attention à la place de la note de 1884 dans l'œuvre de Poincaré nous a amené à reconnaître que ce texte n'était pas sous-tendu par une notion unificatrice mais par une pratique algébrique de classification des groupes linéaires par réduction canonique de leurs substitutions. La technicité de tels procédés était cependant indissociable d'aspects culturels propres aux espaces dans lesquels des textes circulaient et étaient lus à différents niveaux. Si l'articulation de tels réseaux de textes avec des espaces sociaux ou institutionnels est problématique, nous avons vu que ces réseaux éclairent tout à la fois sur des normes collectives et sur la position singulière d'auteurs comme Poincaré.

Premièrement, à des niveaux interpersonnels et sur des temps courts, Poincaré interagissait avec les travaux de Sylvester sans pour autant s'approprier les pratiques de ce dernier quant aux formes générales de l'algèbre universelle qui s'ancraient dans des traditions académiques britanniques et américaines. Il partageait également avec Klein une approche fortement géométrique inspirée des travaux de Clebsch sans pour autant adopter les calculs d'invariants qu'employaient ces derniers.

Deuxièmement, le calcul des Tableaux s'inscrivait au niveau local de l'héritage sur le temps moyen des travaux d'Hermite sur les formes algébriques. Nous avons vu le rôle essentiel joué par cet héritage pour la circulation de la réduction canonique des substitutions de Jordan à Poincaré.

Troisièmement, cette pratique de réduction canonique se rattachait sur le temps long du XIX^{e} siècle à l'échelle plus large de la culture algébrique commune portée par l' « équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires des planètes ». Les références de Sylvester à cette équation manifestaient ainsi une utilisation tardive d'un mode de circulation qui allait devenir marginal après que la pratique algébrique qu'identifiait cette référence ait acquis à la fin des années 1870 l'identité d'une méthode de calculs d'invariants au sein de la théorie des formes bilinéaires. C'est dans ce cadre que Scheffers allait dépouiller en 1890 la note de Poincaré de ses dimensions locales pour l'interpréter dans le cadre plus large de la théorie des formes bilinéaires telle qu'elle avait été investie depuis les années 1880 pour l'étude des groupes continus et systèmes hypercomplexes.

Pourtant, l'un des apports cruciaux de l'ensemble de travaux dans lequel s'insérait la note de 1884 était bien l'articulation entre les héritages de travaux de Jordan et d'Hermite. Comme nous l'avons vu, cet héritage mêlé d'approches qui avaient pu apparaître opposées par le passé se manifestait notamment dans le rôle essentiel qu'attribuaient les préliminaires algébriques de Poincaré aux groupes jordaniens de substitutions linéaires à *n* variables tout en en écrivant la généralité sur des exemples paradigmatiques permettant les calculs effectifs dictés par les principes hermitiens.

La pratique algébrique qui avait résulté de cet héritage mêlé avait indéniablement contribué à la capacité de Poincaré d'intervenir dans un spectre large allant de l'arithmétique aux équations différentielles en passant par les nombres complexes. Nous avons vu qu'elle avait également plus tard supporté des transferts d'analogies opératoires. Un exemple additionnel de tels transferts est donné par la manière dont Poincaré abordait le problème de la stabilité du problème des trois corps.[69] Ce dernier ajoutait aux solutions périodiques des petites variations permettant de linéariser les équations et, par là, de réduire celles-ci à une forme canonique permettant d'engager une discussion de la stabilité du système sur le modèle de la conception de la stabilité des systèmes différentielles linéaires à coefficients constants qui avait été traditionnellement liée à la multiplicité des racines caractéristiques de l' « équation à l'aide de laquelle etc. ».

La réévaluation des rôles et finalités de la note de 1884 que nous avons proposée dans cet article ouvre plus largement des questionnements relatifs à l'histoire de l'algèbre linéaire. Des difficultés similaires à celles illustrées sur la note de Poincaré se présentent en effet pour de nombreux autres travaux considérés comme fondateurs de notions algébriques tout en apparaissant isolés dans les œuvres de leurs auteurs.[70] Or nous avons vu qu'hors de ces cadres disciplinaires rétrospectifs, la note « Sur les nombres complexes » était loin d'être isolée et s'inscrivait au contraire dans des cadres collectifs variés qui nous ont permis de jeter un nouvel éclairage sur l'émergence de la théorie des fonctions fuchsiennes.

En outre, comme pour le cas du rôle attribué à Poincaré dans l'histoire des matrices, de nombreux travaux ont proposé une structuration en trois étapes de l'émergence de notions ou théories algébriques: à une première période caractérisée par la présence implicite de ces notions succède une étape d'explicitation d'objets étudiés pour eux-mêmes et de redécouvertes multiples puis une troisième période de théorisations rigoureuses. La note de 1884 nous invite pourtant à substituer différentes échelles de temporalités et des espaces non homogènes aux chronologies basées sur des découpages disciplinaires rétrospectifs.

[69] A propos de la conception de la stabilité chez Poincaré et de sa réception, voir [Roque 2011].

[70] Comme par exemple les travaux de [Weierstrass 1868] sur les diviseurs élémentaires ou ceux de Darboux (1875) sur une définition axiomatique des espaces vectoriels.

Bibliographie.

ARCHIBALD (Thomas)

[2011] Differential equations and algebraic transcendents: French efforts at the creation of a Galois theory of differential equations (1880-1910), *Revue d'histoire des mathématiques,* à paraître.

AUTONNE (Léon)

[1883] Recherches sur les intégrales algébriques des équations différentielles linéaires à coefficients rationnels, *Journal de l'École polytechnique*, 51 (1883), p. 93-177.

[1885a] Recherches sur les intégrales algébriques des équations différentielles linéaires à coefficients rationnels (second mémoire). *Journal de l'École polytechnique*, 54 (1885), p. 1-30.

[1885b] Recherches sur les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe Cremona. Premier mémoire. Généralités et groupes quadratiques, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 4e sér., t. 1 (1885), p. 431-454.

[1886] Recherches sur les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe Cremona. Deuxième mémoire. Groupes cubiques. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 4e sér., t. 2 (1886), p. 49-104.

[1905] *Sur les formes mixtes*, A. Rey: Lyon & Gauthier-Villars: Paris.

BOUCARD (Jenny)

[2011] Louis Poinsot et la théorie de l'ordre : un chaînon manquant entre Gauss et Galois ?, *Revue d'histoire des mathématiques*, 17, fasc. 1, 41-138.

BRECHENMACHER (Frédéric)

[2006a] *Histoire du théorème de Jordan de la décomposition matricielle (1870-1930),* Thèse de doctorat, Ecole des Hautes Etudes en Sciences sociales, Paris, 2006.

[2006b] *Les matrices : formes de représentations et pratiques opératoires (1850-1930)*, Paris : Site expert des Ecoles Normales Supérieures et du Ministère de l'Education Nationale, http://www.dma.ens.fr/culturemath/, 2006.

[2007a] La controverse de 1874 entre Camille Jordan et Leopold Kronecker, *Revue d'Histoire des Mathématiques*, tome 13, fasc.2, p. 187-257.

[2007b] L'identité algébrique d'une pratique portée par *la discussion sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires des planètes* (1766-1874). *Sciences et Techniques en Perspective*, IIe série, fasc. 1 (2007), p. 5-85.

[2010] Une histoire de l'universalité des matrices mathématiques, *Revue de Synthèse,* Vol 131, n°4 (2010), p. 569-603.

[2011] Self portraits with Évariste Galois (and the shadow of Camille Jordan), *Revue d'histoire des mathématiques,* à paraître

[2012] On Jordan's measurements, *à paraître.*

BRECHENMACHER (Frédéric), EHRHARDT (Caroline)

[2010] On the identities of algebra in the 19th century, *Oberwolfach Reports* n°12/2010, p. 24-31.

BRIOSCHI (Francesco)

[1877] La théorie des formes dans l'intégration des équations différentielles linéaires du second ordre, *Mathematische Annalen*, 11 (1877), p. 401-412.

BRIOT (Charles) et BOUQUET (Claude)

[1859] *Théorie des fonctions doublement périodiques et, en particulier, des fonctions elliptiques*, Paris, 1859; 2e éd., *Théorie des fonctions elliptiques*, Paris, 1875.

BURKHARDT (Heinrich), MAURER (L.), VESSIOT (Ernest),

[1916] Groupes de transformations continus*, Encyclopédie des sciences mathématiques,* t.2, vol. 4, p .161-240, Paris : Gauthier-Villars, 1916.

CAHEN (Eugène), VAHLEN (Karl Theodor)

[1908] Théorie arithmétique des formes, *Encyclopédie des sciences mathématiques,* t.1, vol. 3, p. 76-214, Paris : Gauthier-Villars, 1908.

CARTAN (Élie)

[1898] Les groupes bilinéaires et les systèmes de nombres complexes, *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse* 12 (2), p. 65-99.

CARTAN (Élie), STUDY (Eduard)

[1908] Nombres complexes, *Encyclopédie des sciences mathématiques,* t.1, vol. 1, p. 329-468. Paris : Gauthier-Villars, 1908.

CAYLEY (Arthur),

[1858] A Memoir on the Theory of Matrices, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London,* 148 (1858), p. 17-37.

CAUCHY (Augustin-Louis)

[1829] Sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires du mouvement des planètes, *Exercices de mathématiques* 4 (1829), in *Œuvres complètes d'Augustin Cauchy*, Paris : Gauthier-Villars et fils, 1882-1974, (2) 9, p. 174-195.

CHATELET (Albert)

[1911] Sur certains ensembles de tableaux et leur application à la théorie des nombres, *Annales de l'École normale supérieure,* 28 (1911), p. 105-202.

CIFOLETTI (Giovanna)

[1995] The creation of the History of Algebra in the Sixteenth Century, in [Goldstein, Gray, Ritter 1995, p. 123-144].

CLEBSCH (Alfred)

[1872] *Theorie der binären algebraischen Formen*, Leipzig : Teubner, 1872.

CORRESPONDANCE D'AUTONNE (Léon) A POINCARÉ (Henri)

[1881-1884] Collection privée 75017. Reproduite à l'adresse http://www.univ-nancy2.fr/poincare/chp/

[1881a] Lettre n° 420 ; [1881b] Lettre n° 421 ; [1881c] Lettre n° 425 (7/2/1881) ; [1881d] Lettre n° 431 (26/2/1881) ; [1881e] Lettre n° 439 (23/3/1881) ; [1881f] Lettre n° 447 (4/9/1881) ; [1881g] Lettre n° 494 (22/11/1881) ; [1881h] Lettre n° 495 (23/11/1881) ; [1881i] Lettre n° 496 (27/11/1881)

[1884] Lettre n° 610 (18/2/1884).

CORRESPONDANCE DE JORDAN (Camille) A POINCARÉ (Henri)

[1880] Lettre n° 391 (25/01/1880), Collection privée 75017. Reproduite à l'adresse http://www.univ-nancy2.fr/poincare/chp/

CRAIG (Thomas)

[1889] *A treatise on linear differential equations. Vol. I. Equations with uniform coefficients*, New-York : J. Wiley and Sons, 1889.

DARBOUX (Gaston)

[1874] Mémoire sur la théorie algébrique des formes quadratiques, *Journal de mathématiques pures et appliquées,* 2e sér., t. 19 (1874), p. 347-396.

[1889] *Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal*, Paris : Gauthier-Villars.

DEDEKIND (Richard),

[1877] Schreiben an Herrn Borchardt über die Theorie der elliptischen Modul-Functionen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik,* t. 83, p. 265-292.

DICKSON (Leonard E)

[1901] *Linear groups with an exposition of the Galois field theory,* Leipzig : Teubner, 1901.

DIEUDONNE (Jean)

[1962] Notes sur les travaux de Camille Jordan relatifs à l'algèbre linéaire et multilinéaire et la théorie des nombres, in [Jordan *Œuvres*, 3, p. V-XX].

[1978] *Abrégé d'histoire des mathématiques,* Paris : Hermann, 1978.

DOGSON (Charles)

[1867] *An elementary treatise on determinants*, London : Macmillan and Co, 1867.

DURAND-RICHARD (Marie-José)

[1996] L'École algébrique anglaise : les conditions conceptuelles et institutionnelles d'un calcul symbolique comme fondement de la connaissance, in [GOLDSTEIN, GRAY, RITTER 1996], p. 445-477.

[2008] *L'analogie dans la démarche scientifique*, Paris : l'Harmattan, 2008.

FLOQUET (Gaston),

[1879] Sur la théorie des équations différentielles linéaires, *Annales de l'École normale supérieure,* (2), t. 8 (1879), p. 3-132,

FROBENIUS (Georg),

[1873] Ueber den Begriff der Irreductibilität in der Theorie der linearen Differentialgleichungen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik,* t. 76 (1873), p. 236-271.

[1875] Ueber algebraisch integrirbare lineare Differentialgleichungen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik,* t. 80 (1875), p. 183-193.

[1877] Ueber linear Substitutionen und bilineare Formen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik,* t. 84 (1877), p. 1-63.

[1879] Theorie der bilinearen Formen mit ganzen Coefficienten, *Journal für die reine und angewandte Mathematik,* t. 86 (1879), p. 147-208.

FUCHS (Lazarus),

[1866] Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficientenn *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 66 (1866), p. 121-160.

[1876a] Über die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche algebraische Integrale besitzen, und eine neue Anwendung der Invariantheorie, *Journal für die reine und angewandte Mathematik,* t. 81 (1876), p. 97-142.

[1876b] Sur les équations linéaires du second ordre, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences,* t. 82 (1876), p. 1494-1497 ; t. 83, p. 46-47.

[1876c] Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, (3), t. 2 (1876), p.158-160.

[1877] Sur quelques propriétés des intégrales des équations différentielles auxquelles satisfont les modules de périodicité des intégrales elliptiques des deux premières espèces, *Journal für die reine und angewandte Mathematik,* t. 83 (1877), p. 13-38.

[1878] Ueber die linearen Diferentialgleichungen zweiter Ordnung, welche algebraisch Integrale besitzen, *Mathematische Annalen*, t. 85 (1878), p. 1-26.

[1880] Ueber die Functionen, welche durch Umkehrung der Integrale von Lösungen der linearen Differentialgleichungen entstehen, Göttingen Nachrichten, 1880, p. 445-453, *Bulletin des sciences mathématiques*, (2), t. 4 (1880), p. 328-336.

GALOIS (Évariste)

[1846] Œuvres mathématiques, Journal *de mathématiques pures et appliquées,* 11 (1846), p. 381–444.

GAUSS (Carl Friedrich)

[1801] *Disquitiones* arithmeticae, Leipzig : Fleischer, 1801.

GAUTHIER (Sébastien)

[2007] *La géométrie des nombres comme discipline*. Thèse de doctorat. Université Pierre et Marie Curie : Paris, 2007.

[2009] La géométrie dans la géométrie des nombres : histoire de discipline ou histoire de pratiques à partir des exemples de Minkowski, Mordell et Davenport, *Revue d'histoire des mathématiques,* **15-2** (2009), p. 183-230.

GILAIN (Christian)

[1991] La théorie qualitative de Poincaré et le problème de l'intégration des équations différentielles, *in* [GISPERT 1991], p. 215-242.

GISPERT (Hélène),

[1991] *La France mathématique. La Société Mathématique de France (1870-1914*), Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences, Paris : Belin, 1991.

GOLDSTEIN (Catherine),

[1995] *Un théorème de Fermat et ses lecteurs*, Saint-Denis : PUV, 1995.

[1993] Preuves par descente infinie en analyse diophantienne : programmes, contextes, variations, *Cahier du Séminaire d'histoire des mathématiques de l'IHP*, 2/5 (1993), p. 25-49.

[1999] Sur la question des méthodes quantitatives en histoire des mathématiques : le cas de la théorie des nombres en France (1870- 1914), *Acta historiae rerum necnon technicarum*, nouv. sér., vol. 3 (1999), p. 187-214.

[2007] The Hermitian Form of Reading the *Disquisitiones in* [Goldstein, Schappacher, Schwermer, 2007], p. 377-410.
[2011] Hermite's strolls in Galois fields, *Revue d'histoire des mathématiques*, à paraître.
GOLDSTEIN (Catherine), GRAY, (Jeremy), RITTER (Jim) (eds.)
[1996] *L'Europe mathématique. Histoires, mythes, identités*, Paris: Éditions de la MSH, 1996.
GOLDSTEIN (Catherine), SCHAPPACHER (Norbert)
[2007a] A Book in Search of a Discipline (1801-1860) *in* [Goldstein, Schappacher, Schwermer, 2007], p. 3-66.
[2007b] Several Disciplines and a Book (1860–1901), *in* [Goldstein, Schappacher, Schwermer, 2007], p. 67-104.
GOLDSTEIN (Catherine), SCHAPPACHER (Norbert), SCHWERMER (Joaquim)(eds.)
[2007] *The Shaping of Arithmetics after C. F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae*, Berlin: Springer, 2007.
GORDAN (Paul)
[1877] Über endliche Gruppen linearer Transformationen einen Veranderlichen, *Mathematische Annalen,* 12 (1877), p. 23-46.
GOURSAT (Édouard)
[1882] Sur les intégrales algébriques des équations linéaires, *Bulletin des sciences mathématiques*, (2) 6 (1882), p. 120-124.
[1883] Sur l'intégration algébrique d'une classe d'équations linéaires, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences,* t. 96 (1883), p. 323-326.
[1885] Sur les intégrales algébriques des équations linéaires, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences,* t. 100 (1885), p. 1329-1332.
GRAY (Jeremy)
[1982] From the History of a Simple Group, *The Mathematical Intelligencer*, 4:2 (1982), p. 59–67
[2000] *Linear differential equations and group theory from Riemann to Poincaré,* 2de ed. Boston: Birkhäuser.
GRAY (Jeremy), WALTER (Scott) (éds.)
[1997] *Trois suppléments sur la découverte des fonctions fuchsiennes*, Paris/Berlin : Blanchard/Akademie Verlag, 1997.
HAMBURGER (Meyer)
[1873] Bemerkung über die Form der Integrale der linearen Differentialgleichungen mit veränderlicher Coefficienten, *Journal für die reine und angewandte Mathematik,* 76 (1873), p. 113-125.
HAWKINS (Thomas),
[1972] Hypercomplex numbers, Lie groups, and the creation of group representation theory, *Archive for History of Exact Sciences*, 8 (1972), p. 243–87.
[1977] Weierstrass and the Theory of Matrices, *Archive for History of Exact Sciences*, 17 (1977), p. 119-163.
[2000] *Emergence of the theory of Lie groups an essay in the history of mathematics, 1869-1926.* New York, Berlin, Barcelone : Springer, 2000.
HERMITE (Charles)
[1853] Sur la décomposition d'un nombre en quatre carrés, *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris,* 37 (1853), p. 133-134.
[1854] Sur la théorie des formes quadratiques, *Journal für die reine und angewandte Mathematik,* 47 (1854).
[1855] Remarque sur un théorème de M. Cauchy, *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris,* 41 (1855), p.181-183.
[1857] Sur l'invariabilité du nombre des carrés positifs et des carrés négatifs dans la transformation des polynômes homogènes du second degré, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 53 (1857), p. 271-274.
HOUZEL (Christian)
[1978] Fonctions elliptiques et intégrales abéliennes, in [Dieudonné, 1978], p. 1-113.

[2007] Elliptic Functions and Arithmetic, *in* [Goldstein, Schappacher, Schwermer 2007, p. 291-307].

HURWITZ (Adolf)

[1884] Ueber Relationen zwischen Klassenanzahlen binärer quadratischer Formen von negativer Determinante. *Mathematische Annalen,* 25 (1884), p. 157-196.

JORDAN (Camille),

[1860] *Sur le nombre des valeurs des fonctions*, Thèses présentées à la Faculté des sciences de Paris par Camille Jordan, 1re thèse, Paris : Mallet-Bachelier, 1860.

[1861] Mémoire sur le nombre des valeurs des fonctions, *Journal de l'École polytechnique*, t.22 (1861), p. 113-194.

[1868a] Sur la résolution algébrique des équations primitives de degré p^2, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 32 (2) (1868), p. 111-135.

[1868b] Mémoire sur les groupes des mouvements, *Annali di Matematica*, II (1868), p. 167-215, 322-345.

[1871] Sur la résolution des équations différentielles linéaires, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences,* t. 73 (1871), 787-791.Oeuvres IV, 313-318

[1872] Sur les oscillations infiniment petites des systèmes matériels, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences,* t. 74 (1872), p. 1395-1399.

[1874a] Sur une application de la théorie des substitutions aux équations différentielles linéaires, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences,* t. 78 (1874), p.614-617.

[1874b] Mémoire sur une application de la théorie des substitutions à l'étude des équations différentielles linéaires, *Bulletin de la société mathématique de France,* 2 (1874), p. 1000-1027.

[1876a] Sur les équations linéaires du second ordre dont les intégrales sont algébriques, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, t. 82 (1876), p. 605-607.

[1876b] Sur la détermination des groupes formés d'un nombre fini de substitutions linéaires, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, t. 83 (1876), p. 1035-1037.

[1877a] Détermination des groupes formés d'un nombre fini de substitutions linéaires, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, t. 84 (1877), p. 1446-1448.

[1877b] Sur une classe de groupes d ordre fini contenus dans les groupes linéaires, *Bulletin de la société mathématique de France,* 5 (1877), p.175-177;

[1878] Mémoire sur les équations différentielles linéaires à intégrale algébrique, *Journal für die reine und angewandte Mathematik,* t. 84 (1878), p. 89-215.

[1879a] Sur l'équivalence des formes algébriques, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, t. 88 (1879), p. 906-908.

[1879b] Sur la détermination des groupes d'ordre fini contenus dans le groupe linéaire, *Atti della Accademia di Napoli*, 8, n°11 (1879).

[1880a] Sur la réduction des substitutions linéaires, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, t 90 (1880), p. 598-601.

[1880b] Sur l'équivalence des formes, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, t 90 (1880), p. 1422-1423

[1880c] Mémoire sur l'équivalence des formes,s *Journal de l'École polytechnique,* 28 (1880), p. 111-150.

[1880d] Sur la réduction des substitutions linéaires, *Journal de l'École Polytechnique,* 29 (1880), p. 151-162.

[1881a] Sur la réduction des formes quadratiques, *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. 93 (1881), p. 113-117.

[1881b] Sur l'équivalence des formes quadratiques, *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. 93, p. 181-185.

[1881c] Sur la représentation d'un nombre ou d'une forme quadratique par une autre forme quadratique, *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, t. 93 (1881), p. 234-237.

[1882a] Sur la théorie arithmétique des formes quadratiques, *Journal de l'École Polytechnique*, 31 (1882), p. 1-43.

[1882b] *Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique*. Paris : Gauthier-Villars, 1882.

[1887] *Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique,* v.3, Paris : Gauthier-Villars, 1887.
[1961-1964] *Œuvres de Camille Jordan.* Publiées sous la direction de M. Gaston Julia, par M. Jean Dieudonné. Paris : Gauthier-Villars, 1961-1964.

KORKIN (Alexandr), ZOLOTAREV (Egor)
[1872] Sur les formes quadratiques positives quaternaires, *Mathematische Annalen*, 5 (1872), p. 581-583.
[1873] Sur les formes quadratiques, *Mathematische Annalen*, 6 (1873), p.366-389.

KLEIN (Felix)
[1868] *Ueber die Transformation der allgemeinen Gleichung des zweiten Frades zwischen Linien Coordinaten auf eine canonische Form*, Bonn. Réimpression *: Mathematische Annalen,* 23 (1884), p. 539-578.
[1875] Ueber binäre Formen mit linearen Transformationen in sich selbst, *Mathematische Annalen*, t. 9 (1875), p. 183-208.
[1877] Ueber lineare Differentialgleichungen, *Mathematische Annalen,* 11, p. 115-119 & 12, p. 167-180(1877).
[1884] *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade* , Leipzig, Teubner, 1884.

LAURENT (Hermann)
[1890] *Traité d'analyse. Tome V. Calcul intégral. Équations différentielles ordinaires,* Paris : Gauthier-Villars, 1890.
[1898] Exposé d'une théorie nouvelle des substitutions, *Journal de mathématiques pures et appliquées,* t. 4 (1898), p. 75-119.

MAC DUFFEE (Cyrus Colton).
[1933] *The Theory of Matrices*, New-York: Chelsea, 1933.
[1943] *Vectors and Matrices.* Wisconsin, Collegiate Press. 1943.

MINKOWSKI (Hermann)
[1882] Mémoire sur la théorie des formes quadratiques à coefficients entiers. Paris : Imprimerie nationale, 1887
[1883] Sur la réduction des formes quadratiques positives ternaires, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences,* t. 96 (1883), p. 1205-1210.
[1885] Untersuchungen über quadratische Formen. 1. Bestimmung der Anzahl verschiedener Formen, welche ein gegebenes Genus enthält, *Acta Mathematica*, 7 (1885), p. 201-258.
[1886] Ueber positive quadratische Formen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik,* t. 99 (1886), p. 1-9.

NEUMANN (Olaf)
[2007] The *Disquisitiones Arithmeticae* and the Theory of Equations, *in* [Goldstein, Schappacher, Schwermer, 2007], p. 107-128.

NEUMANN (Peter M.),
[2006] The concept of Primitivity in Group Theory and the Second Memoir of Galois, *Archive for History of Exact Sciences,* 60 (2006), p. 379-429.

PARSHALL (Karen H.),
[1985] J. H.M. Wedderburn and the Structure Theory of Algebras, *Archive for History of Exact Sciences*, 32 (1985), p. 223–349.

PETRI (Birgit), SCHAPPACHER (Norbert)
[2004] From Abel to Kronecker. Episodes from 19th Century Algebra, p. 227-266 in LAUDAL (Olav Arnfinn), PIENE (Ragni), *The Legacy of Niels Henrik Abel ; the Abel Bicentennial, Oslo 2002*, Springer Verlag, Berlin, 2004.

PICARD (Émile),
[1882a] Sur certaines fonctions uniformes de deux variables indépendantes et sur un groupe de substitutions linéaires, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, vol. 44 (1882), p. 579-582.
[1882b] Sur un groupe de substitutions linéaires, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, vol. 44 (1882) ; p. 837-840.

[1883a] Sur les groupes de transformation des équations différentielles linéaires », *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, vol. 46, 1883, p. 1131-1134.

[1883b] Sur les fonctions de deux variables indépendantes restant invariables par les substitutions d'un groupe discontinu, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, vol. 47 (1883), p. 1045-1048.

[1883c] Sur une classe de groupes discontinus de substitutions linéaires et sur les fonctions de deux variables indépendantes restant invariables par ces substitutions, *Acta Mathematica*, I, p. 297-321.

[1884] Sur certaines substitutions linéaires, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, vol. 48, 1883, p. 416-417.

POINCARE (Henri)

[1879a] Sur quelques propriétés des formes quadratiques, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences,* 89 (1879), p. 344-346.

[1879b] Sur les formes quadratiques, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences,* 89 (1879), p. 897-899.

[1880a] Sur un mode nouveau de représentation géométrique des formes quadratiques définies ou indéfinies, *Journal de l'École Polytechnique,* 47 (1880), p.177-245.

[1880b] Sur les courbes définies par les équations différentielles, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 90 (1880), p. 673-675.

[1880c] Sur les formes cubiques ternaires, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 90 (1880), p.1336-1339.

[1880d] Sur la réduction simultanée d'une forme quadratique et d'une forme linéaire, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences,* 91 (1880), p.844-846.

[1881a] Sur les formes cubiques ternaires et quaternaires. Première partie, *Journal de l'École Polytechnique,* 50 (1881), p. 199-253.

[1881b] Sur les fonctions fuchsiennes, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences,* 92 (1881), p. 333-335.

[1881c] Sur les équations différentielles linéaires à intégrales algébriques, *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences,* 92 (1881), p.698-701.

[1881d] Sur la représentation des nombres par les formes, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 92 (1881), p.333-335

[1881e] Sur les applications de la Géométrie non-euclidienne à la théorie des formes quadratiques, *Association française pour l'avancement des sciences,* X (1881), p. 132-138.

[1882a] Sur les formes cubiques ternaires et quaternaires. Deuxième partie, *Journal de l'École Polytechnique,* 51 (1882), p.45-91.

[1882b]. Sur une extension de la notion arithmétique de genre, *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences,* 94 (1882), p. 67-69, 124-127.

[1882c] Sur les groupes discontinus, *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences,* 94 (1882), p. 840-843.

[1882d] Sur les fonctions uniformes qui se reproduisent par des substitutions linéaires, *Mathematische Annalen*, 19 (1882), p. 553-564.

[1882e] Théorie des groupes fuchsiens, *Acta Mathematica,* 1 (1882), p.1-62.

[1883a] Sur les groupes des équations linéaires, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, t. 96 (1883), p. 691-694.

[1883b] Sur la reproduction des formes, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences,* t. 97 (1883), p. 949-951.

[1883c] Sur l'intégration algébrique des équations linéaires, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences,* t. 97 (1883), p. 984-985.

[1884a] Sur les substitutions linéaires, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences,* t. 98 (1884), p. 349-352.

[1884b] Sur les groupes hyperfuchsiens, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 98 (1884), p. 503-504.

[1884c] Sur un théorème de Fuchs, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, t. 99 (1884), p. 75-77.

[1884d] Sur les nombres complexes, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences,* 99 (1884), p. 740-42.
[1884e] Sur les groupes des équations linéaires, *Acta Mathematica*, 4 (1884), p. 202-311.
[1884f] Sur une généralisation des fractions continues, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences,* 99 (1884), p. 1014-1016.
[1884g] Sur la réduction des périodes des intégrales abéliennes, *Bulletin de la société mathématique de France*, t.12 (1884), p. 124-143
[1885] Sur un théorème de M. Fuchs, *Acta Mathematica*, 7 (1885), p. 1-32
[1886a] Sur la représentation des nombres par les formes. *Bulletin de la société mathématique de France*, 18 (1886), p. 162-194
[1886b] Réduction simultanée d'une forme quadratique et d'une forme linéaire, *Journal de l'École Polytechnique,* 56 (1886), p. 79-142.
[1886c] Sur les déterminants d'ordre infini, *Bulletin de la société Mathématique de France*, t. 14 (1886), p. 77-90.
[1886d] Sur les fonctions fuchsiennes et les formes quadratiques indéfinies, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences,* t. 102 (1886), p. 735-737.
[1886e] Sur la réduction des périodes des intégrales abéliennes, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences,* t. 102 (1886), p. 915-916.
[1886f] Sur les fonctions abéliennes, *American Journal of mathematics*, 8 (1886), p.283-342.
[1886g] Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires, *Acta Mathématica*, 8 (1886), p. 295-344.
[1887] Les fonctions fuchsiennes et l'arithmétique, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, (4), 3 (1887), p. 405-464.
[1890] Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique, *Acta Mathematica,* 13 (1890), p. 1-270.
[1899] Complément à l'analysis situs, *Rendiconti del circolo matematico del Palermo*, t. 13 (1899), p. 285-343.
[1900] Second complément à l'Analysis Situs, *Proceedings of the London Mathematical Society*, 32 (1900), p. 277-308.
[1901] Quelques remarques sur les groupes continus, *Rendiconti del circolo matematico del Palermo*, 15 (1901), p. 321-368.
[1903] Sur l'intégration algébrique des équations linéaires et les périodes des intégrales abéliennes, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, (5), 9 (1903), p. 139-212.
[1908a] L'invention mathématique, conférence fait à l'Institut général psychologique, *in Science et Méthode*, Flammarion : Paris, 1947, p. 43-63.
[1908b] L'avenir mathématique, *in Science et Méthode*, Flammarion : Paris, 1947, p. 19-42.
[1921] Analyse des travaux scientifiques de Henri Poincaré faite par lui-même, *Acta Mathematica*, 38 (1921), p. 1-135.
[1950] *Œuvres de Henri Poincaré publiée sous les auspices de l'Académie des sciences. Tome V, publié avec la collaboration de M. Albert Châtelet,* Paris : Gauthier-Villars, 1950.

ROBADEY (Anne)
[2004] Exploration d'un mode d'écriture de la généralité: l'article de Poincaré sur les lignes géodésiques des surfaces convexes (1905), *Revue d'histoire des mathématiques* 10-2 (2004), p. 257-318.

ROQUE (Tatiana)
[2011] Stability of trajectories from Poincaré to Birkhoff : approaching a qualitative definition, *Archive for History of Exact Sciences* (2011), p. 1-48.

SAUVAGE (Louis)
[1895] *Théorie générale des systèmes d'équations différentielles linéaires et homogènes,* Paris : Gauthier-Villars.

SCHEFFERS (Georg)
[1891] Zuruckführung complexer Zahlensysteme auf typische Formen, *Mathematische Annalen*, 39 (1891), p. 293-390.

SCHMID (Wilfried)

[1982] Poincaré and Lie groups, *Bulletin of the American Mathematical society,* 6-2 (1982), p. 175-186.

SCHWARZ (Hermann)

[1872] Ueber diejenigen Fälle, in welchen die Gaussische hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elementes darstellt, *Journal für die reine und angewandte Mathematik,* 75 (1873), p. 292-335.

SCHWERMER (Joaquim)

[2007] Reduction Theory of Quadratic Forms : Toward *Räumliche Anschauung* in Minkowski's Early Work, *in* [Golstein, Schappacher, Schwermer 2007], p. 483-505.

SÉGUIER (Jean-Armand de)

[1908] Sur la théorie des matrices, *Bulletin de la Société mathématique de France,* 36 (1908), p. 20-40

SERRET (Joseph Alfred)

[1886] *Cours de calcul différentiel et intégral,* 3e édition, Paris : Gauthier-Villars, 1886.

STUDY (Eduard)

[1889] Complexe Zahlen und Transformationsgruppen, *Berichte über die Verhandlungen der Kgl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig*, 1889, p. 177-227.

SYLVESTER (James Joseph)

[1851] Enumeration of the contacts of lines and surfaces of the second order, *Philosophical Magazine,* 4 (1851), p. 119-140.

[1852] Sur une propriété nouvelle de l'équation qui sert à déterminer les inégalités séculaires des planètes, *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1852), p. 438-440.

[1882a] Sur les puissances et les racines de substitutions linéaires, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences,* 94 (1882), p. 55-59.

[1882b] Sur les Racines des Matrices unitaires, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences,* 94 (1882), p. 396-99.

[1883] On the equation to the Secular Inequalities in the Planetary Theory, *Philosophical Magazine,*(16) 100 (1883), p. 267-269.

TANNERY (Jules)

[1875] Sur une équation différentielle linéaire du second ordre, *Annales scientifiques de l'École normale supérieure,* 2e série, tome 8, p. 169-194.

TAZZIOLI (Rossana)

[1994] Schwarz's critique and interpretation of the Riemann representation theorem, *Rendiconti del circolo matematico del Palermo*, (2) 34 (1994), 95-132.

TON-THAT (Tuing) et TRAN (Thai-Duong)

[1999] Poincaré's proof of the so-called Birkoff-Witt theorem, *Revue d'histoire des mathématiques,* 5-2 (1999), p.249-284.

WEDDERBURN (Joseph H. M.)

1934, *Lectures on Matrices,* New York :, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 17.

WEIERSTRASS (Karl)

[1868] Zur Theorie der quadratischen und bilinearen Formen, *Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin* (1868), p. 310-338,

WEYR (Eduard)

[1890] Zur Theorie der bilinearen Formen, *Monatshefte für Mathematik und Physik,* 1 (1890), p. 161-235.