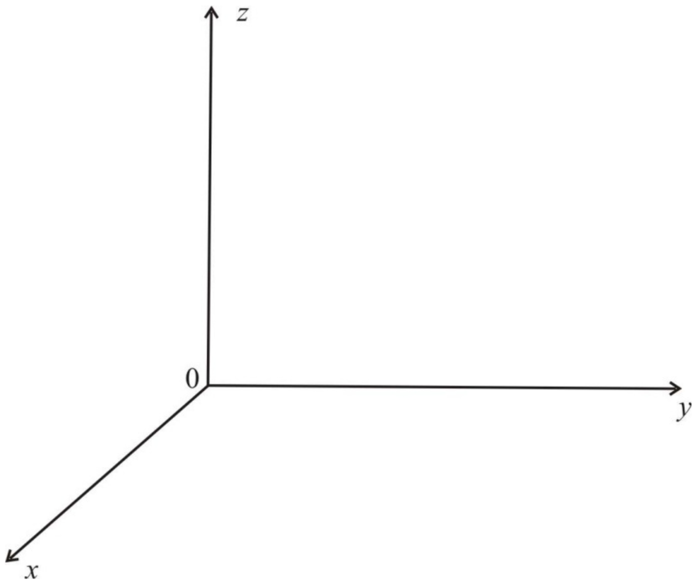
7.– Dvojný integrál – Aplikace (obsah úseku plochy)

Zadání

a) Vypočtěte obsah plochy $6x + 3y + 2z = 12$ ležící v I. oktantu ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$).
b) Vypočtěte obsah plochy $y^2 + z^2 = x^2$ vyťaté válcovou plochou $x^2 + y^2 = 1$.
c) Vypočtěte obsah plochy $z^2 = 4x$ vyťaté parabolickou válcovou plochou $y^2 = 4x$ a rovinou $x = 1$.
(Domácí cvičení $\left[\frac{16}{3}(\sqrt{8} - 1)\right]$)

Řešení:



Tahák

Povrch

Obsah části plochy $z = f(x, y)$ ležící nad oblastí Ω:

$$S = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, dxdy$$

Polární souřadnice

$$x = \rho cos\varphi$$

$$y = \rho sin\varphi$$

Jakobián transformace $J = \rho$

Tabulkové integrály

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = arcsinx$$

8.– Dvojný integrál – Aplikace (těžiště, momenty setrvačnosti)

Zadání

a) Vypočtěte souřadnice těžiště homogenní rovinné oblasti ohraničené křivkami $y = x$ a $y = x^2$, $(\sigma(x, y) = k)$.
b) Vypočtěte momenty setrvačnosti k osám soustavy souřadnic oblasti ze zadání a).
c) Vypočtěte souřadnice těžiště homogenní rovinné oblasti ohraničené křivkami $y = x^2$ a $x + y = 2$.
(Domácí cvičení $T = \left[-\frac{1}{2}, \frac{8}{5}\right]$).

Řešení:

Tahák

$\sigma(x, y)$ - hustota rovinné oblasti Ω

Hmotnost

$$m = \iint_{\Omega} \sigma(x, y)dxdy,$$

Statické momenty

$$M_x = \iint_{\Omega} y\sigma(x, y)dxdy$$

$$M_y = \iint_{\Omega} x\sigma(x, y)dxdy$$

Těžiště

$$T = [x_T, y_T]$$

$$x_T = \frac{M_y}{m}, \quad y_T = \frac{M_x}{m}$$

Momenty setrvačnosti

$$I_x = \iint_{\Omega} y^2\sigma(x, y)dxdy$$

$$I_y = \iint_{\Omega} x^2\sigma(x, y)dxdy$$

$$I_z = I_x + I_y = \iint_{\Omega} (x^2 + y^2)\sigma(x, y)dxdy$$