ENAC

Cours de Systèmes Echantillonnés

Andrei Doncescu et Felix Mora-Camino

tél. 05 61 33 6941
email: andrei.doncescu@laas.fr

I.Cours de Mathématiques appliqués à l'Automatique

Sommaire du cours

Analyse de Fourier,
Mathématiques pour le signal discret

Généralités sur les systèmes asservis

Définitions

Automatique: science qui étudie les **automatismes**

Automatisme: dispositif technologique qui remplace l'opérateur humain dans la **conduite** d'une machine, d'un **processus**, d'une installation industrielle

Processus: (ou système)

C'est l'ensemble de l'installation que l'on doit piloter. Il est caractérisé par des **signaux** d'entrée et de sortie et les lois mathématiques reliant ces signaux.

Exemple de systèmes: four, robot, avion, usine chimique, colonne de distillation, etc.

Signal :

Grandeur physique générée par un appareil ou traduite par un capteur (température, débit etc.)

On distingue :

Signal d'entrée : indépendant du système, il se décompose en commandable et non commandable (perturbations)

Signal de sortie : dépendant du système et du signal d'entrée.

Conduite : (ou contrôle) On peut conduire un système de manière automatisée pour:

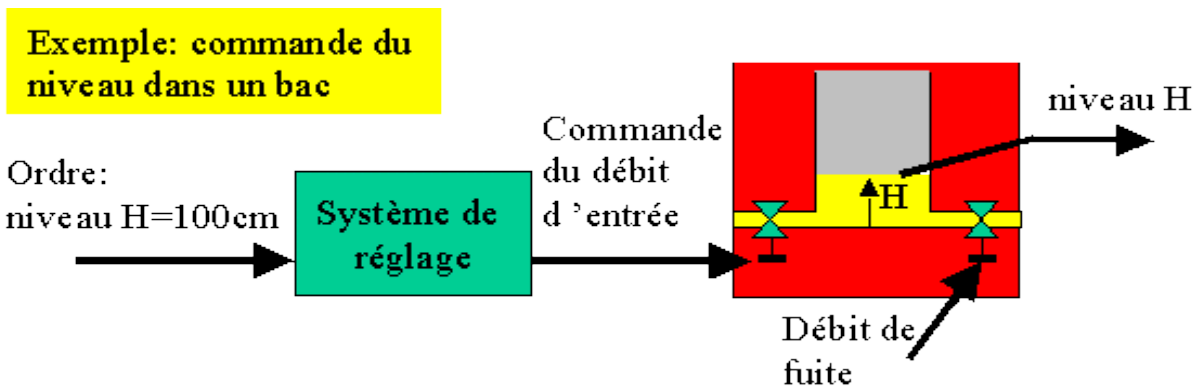
- maintenir une grandeur de sortie constante (**Régulation**)
- faire suivre à certaines sorties une séquence (**automatisme séquentiel**) ou une loi donnée (**asservissement**).

Note: Si on ajoute l'optimisation d'un critère (*de coût par exemple*) on parle alors de contrôle optimal.

Généralités sur les systèmes asservis

Structure d'un système asservi

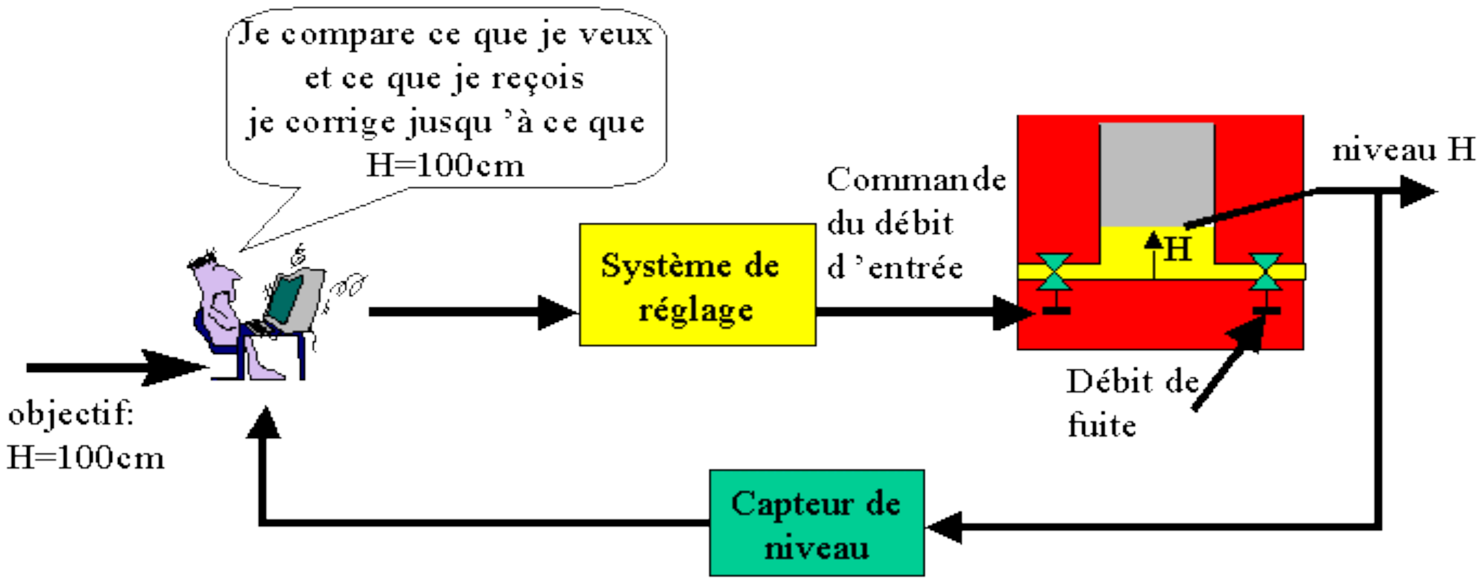
Commande en boucle ouverte:



Ceci est une commande en boucle ouverte qui ne **permet pas de régler précisément le niveau**
de sortie et corriger l'effet des perturbations
Commande en boucle fermée:

Généralités sur les systèmes asservis

Commande en boucle fermée:

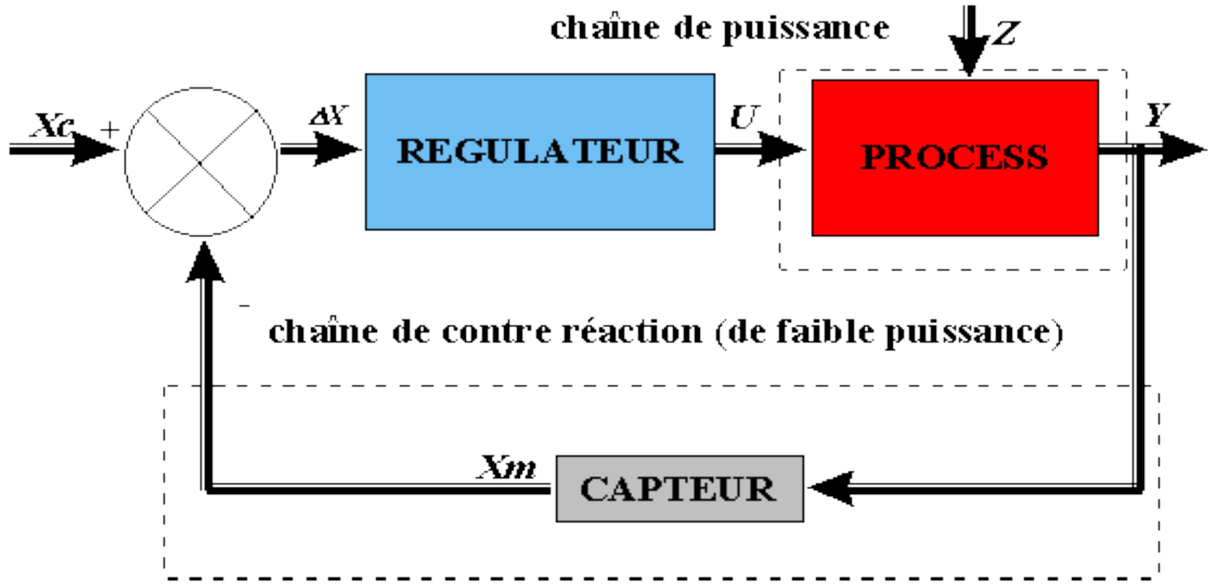


Pour régler le niveau je dois agir sur l'organe de réglage (*la vanne*) en fonction de l'écart
entre la valeur désirée et la valeur réelle.

Généralités sur les systèmes asservis

Structure générale

Un système asservi est un système à **boucle fermée** (*closed loop system*) que l'on peut décrire par le **schéma fonctionnel** suivant:



Xc : Consigne (set value),
ΔX : écart de régulation,
U : signal de commande,
Y : variable de sortie ou variable à régler ou mesure (mesured value)
Z : perturbation ***Xm*** : grandeur physique à la sortie du capteur

Généralités sur les systèmes asservis

Exemple 1 : **RÉGULATION DE TEMPÉRATURE**

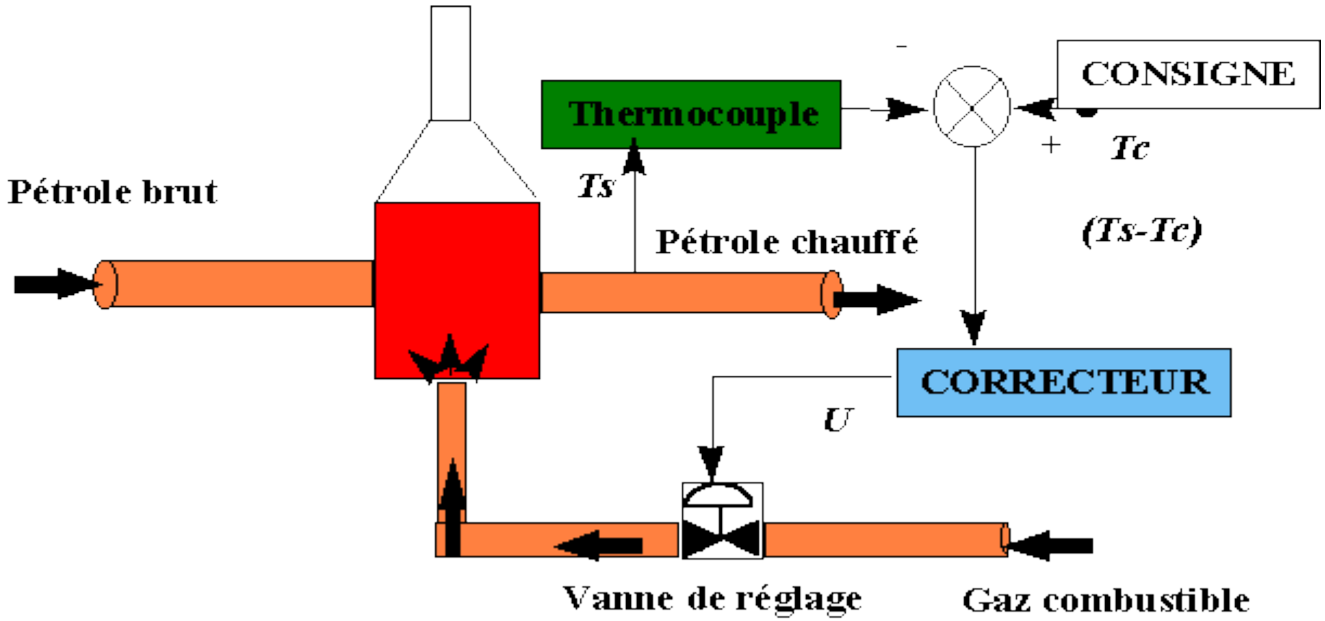
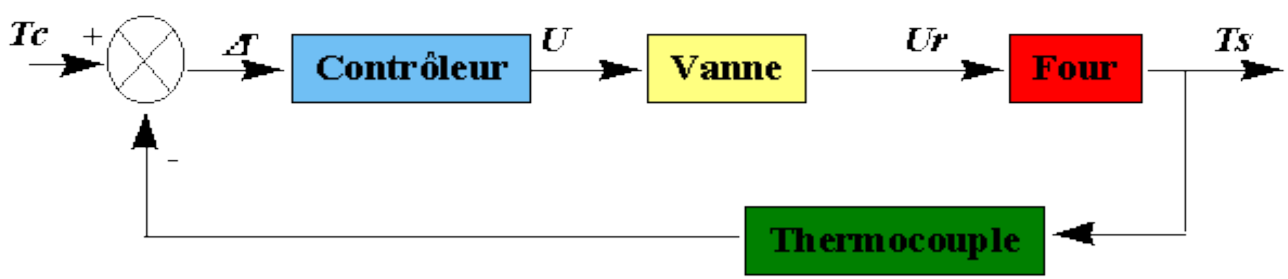


Schéma fonctionnel



Généralités sur les systèmes asservis

Concepts utiles à l'étude des systèmes asservis

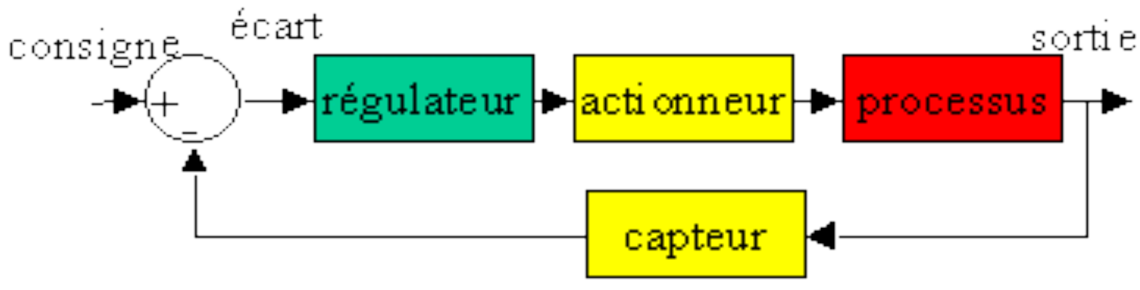
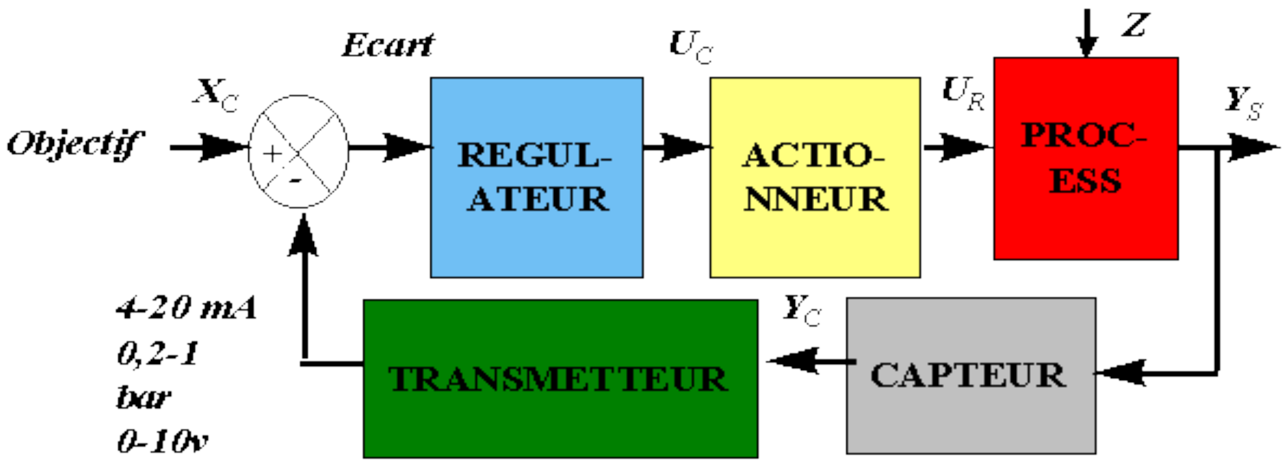


Schéma fonctionnel d'un système asservi

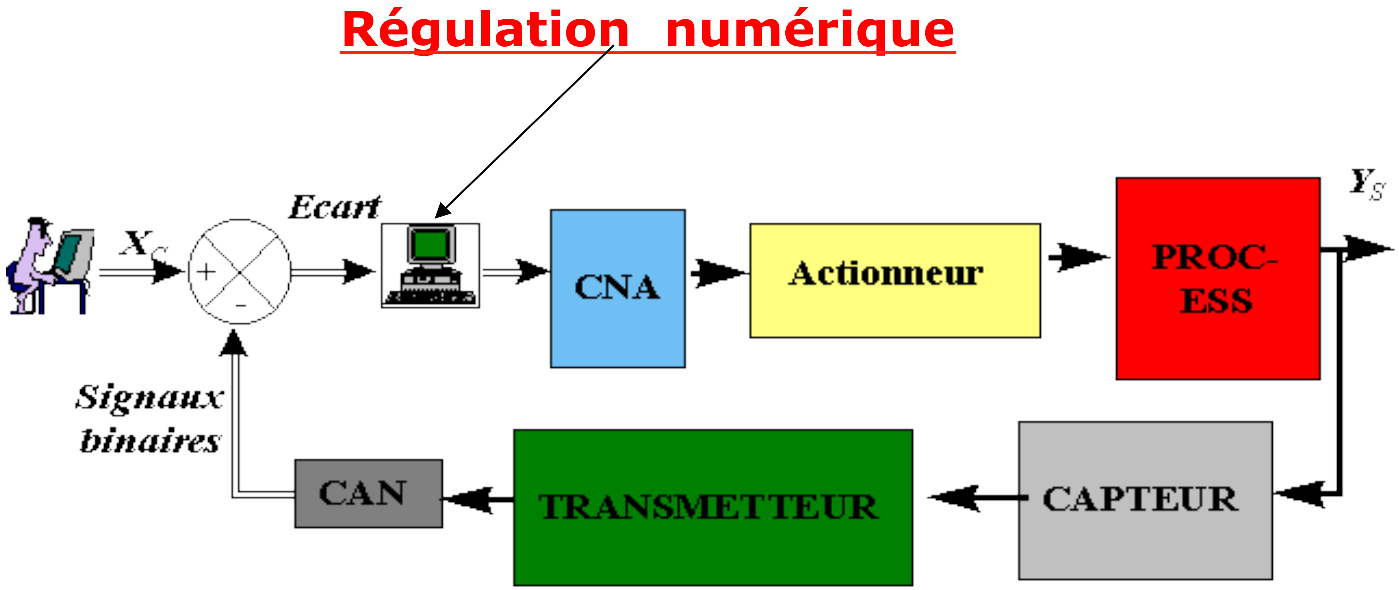
Les caractéristiques à étudier dans un système asservi sont précision statique et dynamique , rapidité, stabilité

Généralités sur les systèmes asservis

Régulation analogique



Généralités sur les systèmes asservis



CNA : convertisseur Numérique Analogique
CAN : convertisseur Analogique Numérique

Généralités sur les systèmes asservis

Classification des automatismes

On peut classer les automatismes selon la **nature des signaux** d'entrée et sortie

<table>
<tr><th colspan="2">signaux continus</th></tr>
<tr><td>systèmes linéaires</td><td>systèmes non-linéaires</td></tr>
<tr><td colspan="2">Régulations et asservissements
monovariables et multivariables
Méthodes:
équations différentielles, fonctions de transfert
étude harmonique
Matérialisation de la commande:
comparateurs,sommateurs,intégrateurs, réseaux correcteurs, régulateurs PID</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">signaux discontinus</th></tr>
<tr><td>binaires</td><td>plusieurs niveaux</td></tr>
<tr><td>systèmes logiques
combinatoires et séquentiels
Méthodes:
algèbre de Boole
GRAFCET
Matérialisation de la commande:
logique cablée
automates programmables</td><td>systèmes échantillonnés
commande numérique des systèmes continus
Méthodes:
équations de récurrence, transmittance en z
Matérialisation de la commande:
calculateurs, PID numériques</td></tr>
</table>

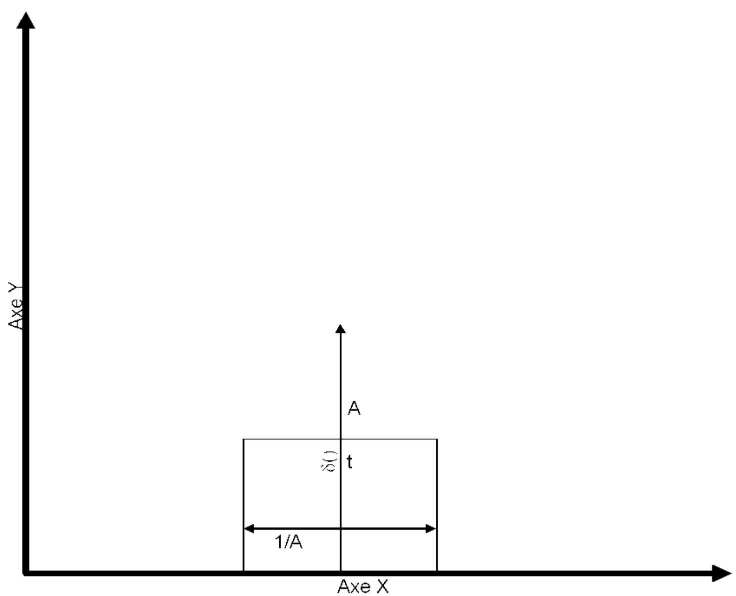
Systèmes linéaires

- *Les systèmes linéaires sont caractérisés complètement par leur réponse à une impulsion unité*

$$y(k)=L[\sum x(l)\delta(k-l)]=\sum x(l)L[\delta(k-l)]$$

La distribution de Dirac
δ(t)

- Le pic de Dirac sera défini comme ayant un poids ou une masse de 1 en x=0



$$\int_R \delta(t)dt = 1$$

Fonctions Généralisées

- La valeur de la fonction delta peut être vu dans le sens des fonctions généralisées :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\phi(t)dt = \phi(0)}$$

$\phi(t)$: Fonction Test

- Jamais parler de la valeur de $\delta(t)$.
- A la place : la valeur de l'intégrale contenant $\delta(t)$.

Application

Définition **: La réponse impulsionnelle d'un circuit est la réponse à une impulsion de Dirac.**

Conclusion :

1- Un système linéaire est entièrement décrit par sa réponse impulsionnelle *h(t).*

2- La réponse du système à une excitation est égale au produit de convolution entre l'excitation et la réponse impulsionnelle.

CLASSEMENT DES SIGNAUX

Signaux Analogiques

- **Les signaux périodiques** $x(t) = x(t+kT)$
  - Le signal sinusoidal est le plus représentatif de ces signaux périodiques:
    - $x(t) = A \sin(2\pi\, t/T + a) = A \sin(\omega\, t+a)$ ou $\omega = 2\pi /T = 2\pi f$

- **Les signaux à énergie finie**

  Les signaux à énergie finie sont ceux pour lesquels l'intégrale suivante est bornée :

  $\int | x(t) |^{2}\, dt < \infty$

    - Ces signaux sont nommés de carré intégrable (sommable), leur puissance moyenne est nulle.
- Les signaux à puissance moyenne finie non-nulle

- **Signaux de durée finie**
  - Signaux de durée limitée ou "support borné" : $x(t) = 0 \; t \notin T$

- **Signaux pairs et impairs**

Un signal est pair si $x(t) = x(-t)$ example : $\cos(\omega t)$

Un signal est impair si $x(t) = -x(-t)$ exemple : $\sin(\omega t)$

Remarque Tout signal réel peut être décomposé : une partie "paire" et une partie "impaire".

$$x(t) = xp(t) + xi(t)$$

- **Signaux causals :**
  - Un signal est dit causal s'il est nul pour toute valeur négative du temps $x(t) = 0$ $t< 0$. On peut le rendre causal si * $u(t)$

Outils mathématiques

Étude des signaux déterministes continus

Représentation fréquentielle

Transformée de Fourier

Signaux périodiques

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(2\pi n \nu_o t) + b_n \sin(2\pi n \nu_o t)\}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t).\cos(2\pi n \nu_o t).dt$$

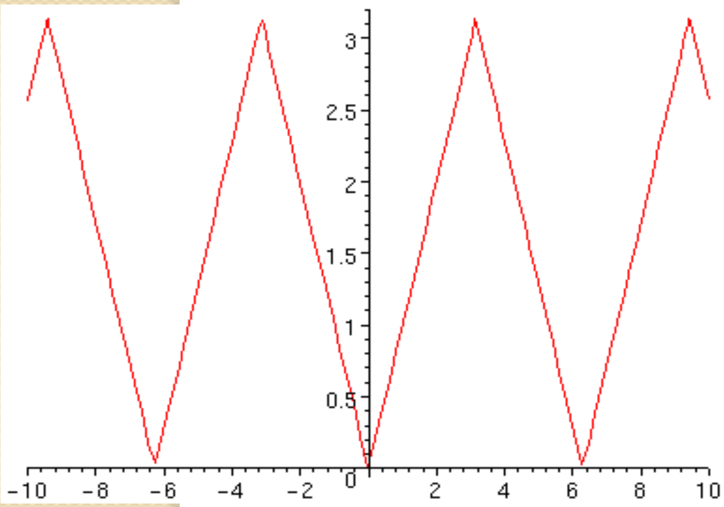
$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t).\sin(2\pi n \nu_o t).dt$$

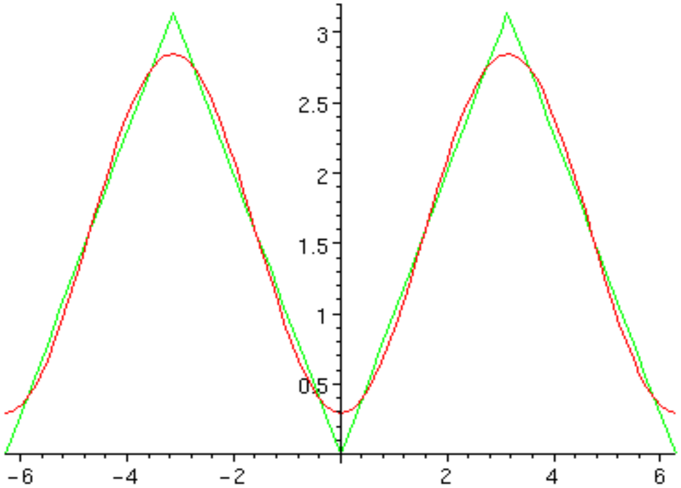
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi n \nu_o t}$$

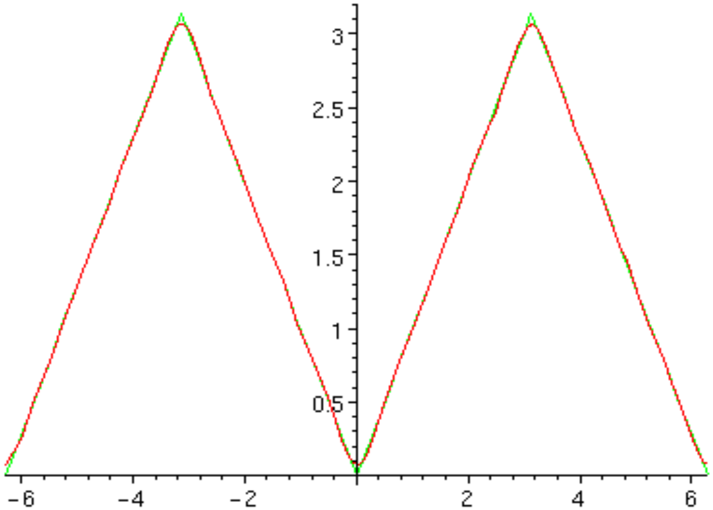
f_o=1/T est la fondamentale

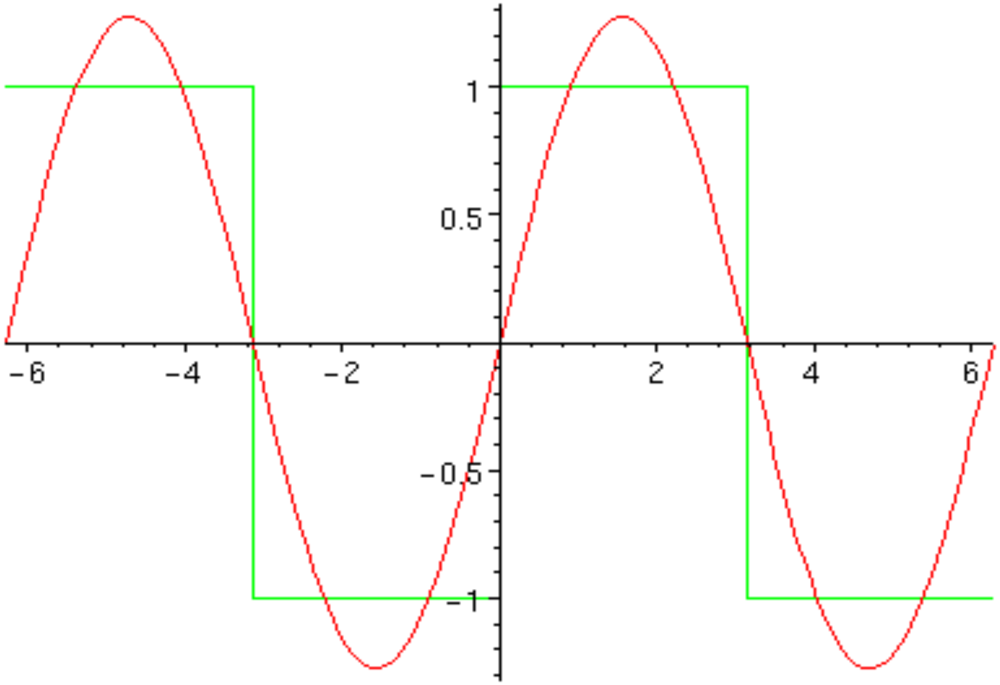
$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t).e^{-j2\pi n \nu_o t} dt$$

Synthèse d'un signal triangulaire à partir de sa série Fourier

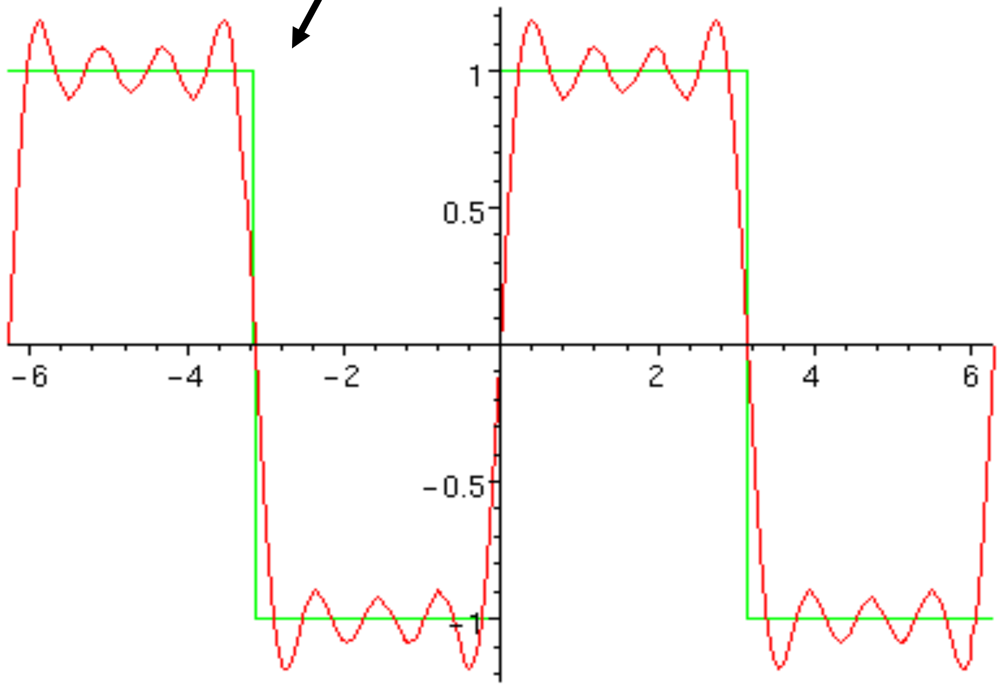


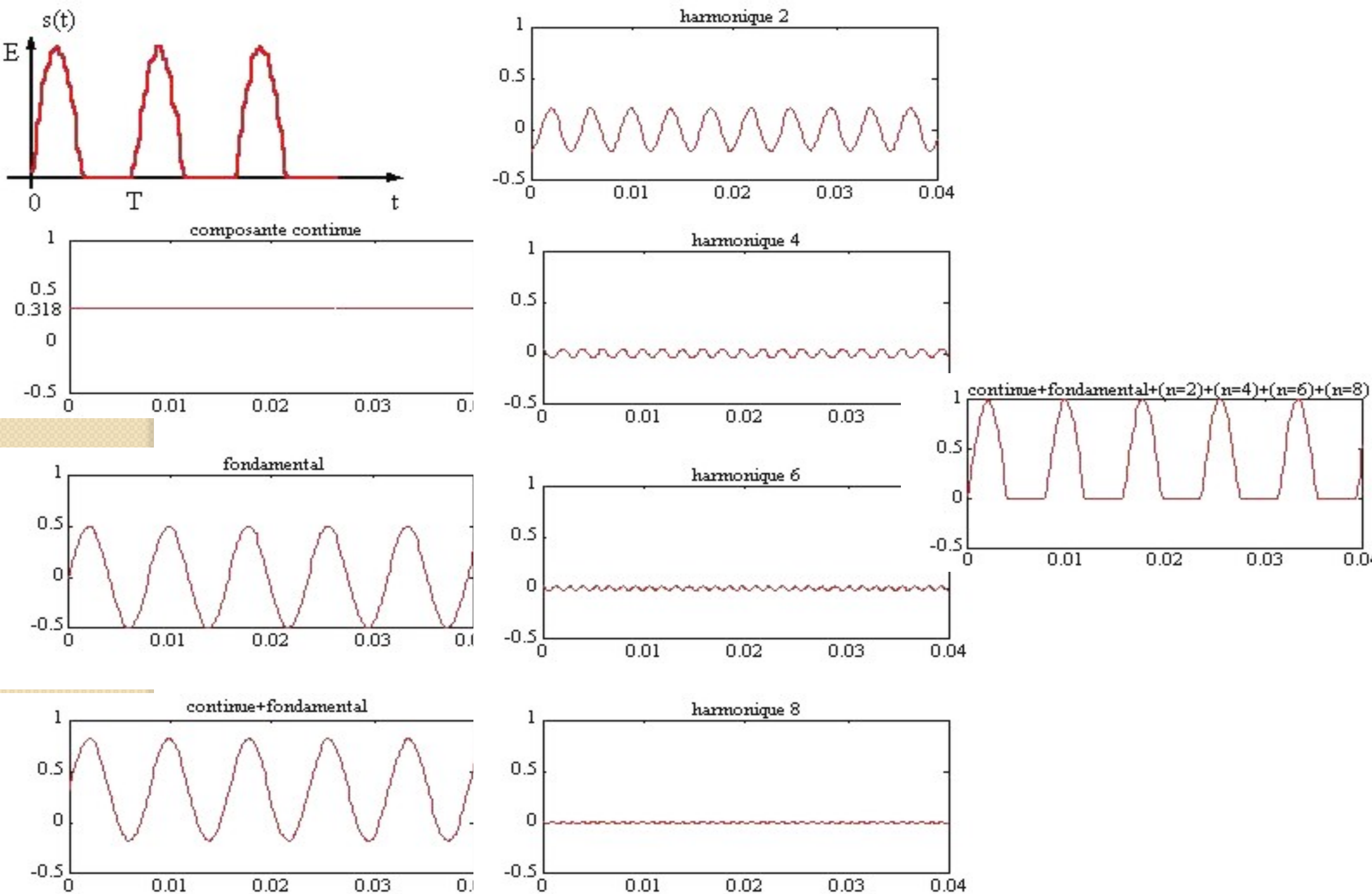






Effet Gibbs




s(t)
E
0
T
t
harmonique 2
composante continue
0.318
harmonique 4
continue+fondamental+(n=2)+(n=4)+(n=6)+(n=8)
fondamental
harmonique 6
continue+fondamental
harmonique 8
1
0.5
0
-0.5
0.01
0.02
0.03
0.04

TRANSFORMATION DE FOURIER

Définition

La transformation de Fourier permet de décrire dans l'espace des fréquences un signal dont on connaît l'histoire au cours du temps, et réciproquement.

$$F(\omega) = \int f(t) e^{-j\omega t} dt \qquad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

DUALITE TEMPS-FREQUENCES

y = f (t) <=> Y =F(f)

F(f) est appelée la transformée de Fourier de f(t) et sa représentation, le spectre en fréquences.

On appelle densité spectrale d' énergie $\frac{|F(\omega)|^2}{2\pi}$

Remarque : On utilise les lettres minuscules pour décrire l'histoire du signal au cours du temps et les lettres majuscules pour le décrire dans le domaine des fréquences ou domaine spectral.

L'Intégrale de Fourier

$$F(\omega)=\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-j\omega t)\,dt \quad (f \in L^1):$$

Mesure '' la quantité'' d'oscillations à la fréquence ω qui est présente en *f*.
Si $f \in L^1$ cette intégrale converge

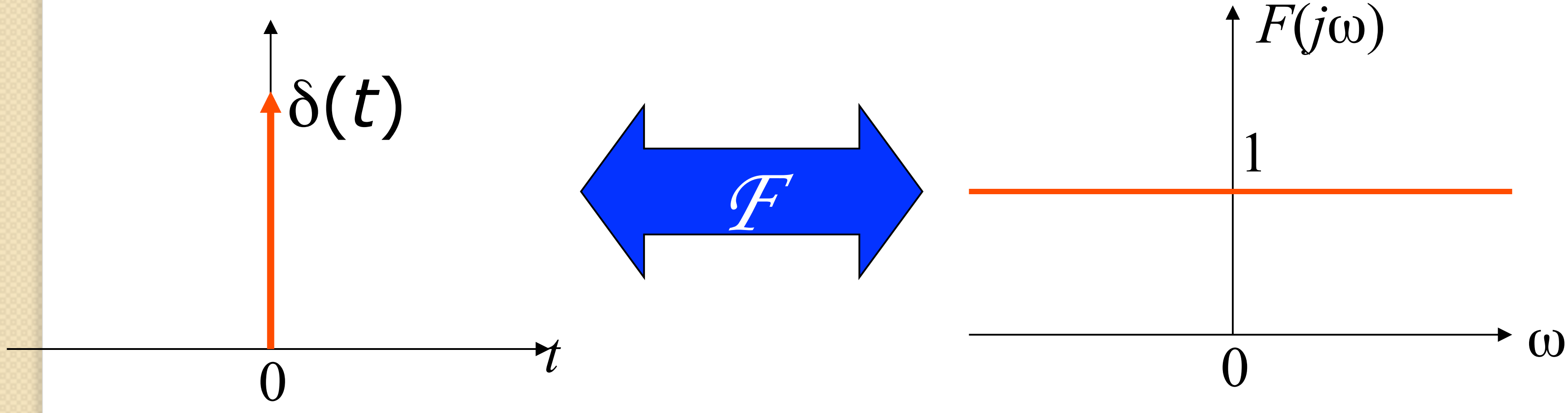
$$|\hat{f}(\omega)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt < \infty$$

Donc, la Transformée de Fourier est bornée et continue.

Transformée de Fourier de $\delta(t)$

$$\boxed{\delta(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 1}$$

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t}\Big|_{t=0} = 1$$



Transformée de $\delta(t)$

$$\boxed{\delta(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t}\, d\omega}$$

$$\delta(t) = \mathcal{F}^{-1}[1] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 1 e^{j\omega t}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t}\, d\omega$$

L'intégration $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t}\, d\omega$ converge vers $\delta(t)$

Notion de système

- Un système fait subir une transformation à un signal d'entrée x(t) et délivre un signal de sortie y(t).

Filtre

- On appelle filtre, *d'entrée x(t) et sortie y(t)*, un système défini par:

$$y(t)=\int_R x(u)h(t-u)du = \int_R x(t-u)h(u)du$$

- Réponse impulsionnelle h(t)

$$y(t)=x(t)*h(t)$$

- Réponse indicielle *u(t)*
- Réponse en fréquence

$$Y(f)=X(f)*H(f)$$

Propriétés

- Réciprocité

$$f(t) \rightarrow F(f) \quad F(f) \rightarrow f(t) \quad f(t) \Leftrightarrow F(f)$$

- Linéarité

$$\alpha\ f(t) + \beta\ g(t) \Leftrightarrow \alpha\ F(f\ ) + \beta\ G(f\ )$$

- Dérivation

$$\frac{d\ \ f(t)}{d\ t} \Leftrightarrow j2\pi f\, F(f)$$

- Intégration

$$\int f(t)dt \Leftrightarrow \frac{1}{j2\pi\, f} F(f\ )$$

- Décalage temporel

$$f(t-\tau) \Leftrightarrow e^{j2\pi f t} F(f\ )$$

- Décalage fréquentiel $F(f - f_0) \Leftrightarrow e^{j2\pi ft} F(f)$
- Conjugaison $f(t) \Leftrightarrow F(f)$ $f(-t) \Leftrightarrow F^*(f)$
- Symétrie $f(t) \Leftrightarrow F(\omega)$ $F(t) \Leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$

Fourier

La transformée de Fourier inverse ($\hat{f}$, $f \in L^1$):

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Parseval: $$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) h^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \hat{h}^*(\omega) d\omega$$

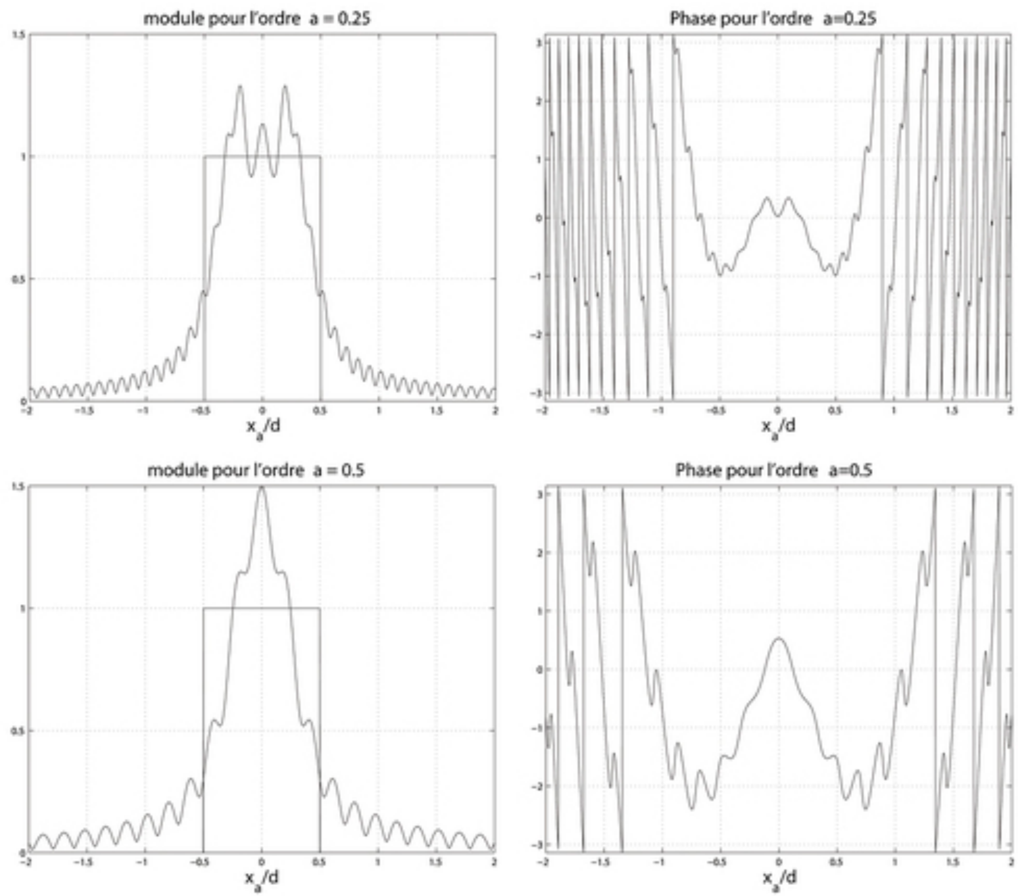
Plancherel: $$\int_{-\infty}^{\infty} | f(t) |^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} | \hat{f}(\omega) |^2 d\omega$$

Et, $$\lim_{\omega \to \pm\infty} \hat{f}(\omega) = 0$$

La Phase de la T.F.

- Dans une TF, l'information sur le temps est cachée dans les phases.

- Il est impossible de déterminer les phases avec assez de précision pour extraire les informations sur le temps.



Défauts de la TF

- La transformée de Fourier est une représentation globale du signal. Elle ne permet pas d'analyser son comportement fréquentiel local, ni sa régularité locale. La condition de convergence sur la transformée de Fourier n'indique que le **pire** ordre de singularité. Elle ignore les régularités locales.

- Le défaut de cette transformée est d’avoir une fenêtre indépendante de la fréquence que l’ on calcule.

Transformée de Laplace

- **Définition**

Un signal V(t) est une fonction réelle de la variable t qui décrit l'évolution d'une grandeur physique V, en général par rapport au temps t.
En mathématique, un signal est décrit par une application de ° dans ° ,t a V(t).
Pour la transformée de Laplace, on choisit l'origine du temps en sorte que

$$V(t) = 0, \forall\ t < 0.$$

Définition. Soit un signal V(t) défini et continu $\forall\ t \in [0, \infty[$.

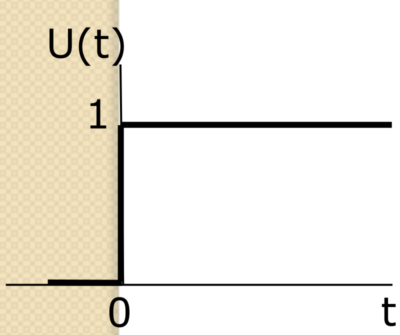
Sa transformée de Laplace $v_L(p)$ est définie par

$$v_L(p) = \int_0^{\infty} V(t)\, e^{-pt}\, dt,$$ où **p** est un nombre **complexe**

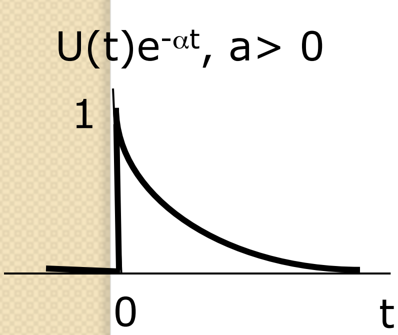
Note. La continuité sur tout l'intervalle $[0, \infty[$ n'est pas requise, le signal peut être continu par morceaux

Transformée de Laplace

- **Exemples**



Echelon unité



Exponentielle décroissante

	Signal	**TL**
Echelon unité	$U(t)$	$\frac{1}{p}$
Exponentielle décroissante	$U(t)e^{-at}, a > 0$	$\frac{1}{p+a}$
Exponentielle complexe	$U(t)e^{i\omega t}, \omega > 0$	$\frac{1}{p-i\omega}$

***Note**: la TL n'est pas définie pour tout p: la partie réelle de p doit être plus grande qu'une valeur, l'abscisse de convergence.*

Transformée de Laplace

- **Propriété de linéarité**

Théorème

Si $V_1(t)$ a pour TL : $v_1(p)$

et $V_2(t)$ a pour TL : $v_2(p)$

alors , $\forall\ \alpha$ et $\beta \in £$

$\alpha V_1(t) + \beta\, V_2(t)$ a pour TL :

$\alpha v_1(p) + \beta v_2(p)$.

Exercices. Calculer les TF de $U(t)\cos(\omega t)$ et $U(t)\sin(\omega t)$

	Signal	**TL**
Exponentielle complexe	$U(t)e^{i\omega t}, \omega > 0$	$\frac{1}{p-i\omega}$
Cosinus	$U(t)\cos(\omega t)$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
Sinus	$U(t)\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$

Transformée de Laplace

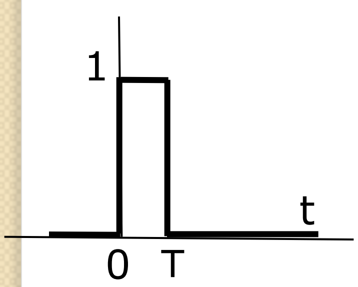
- **Propriété de linéarité**

Exercice. Retrouver les expressions des TL suivantes:

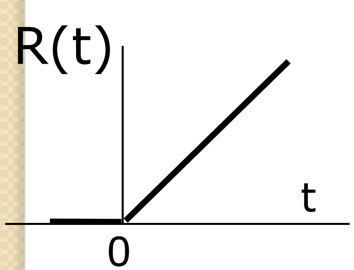
	Signal temporel	**TL**
Exponentielle complexe	$U(t)e^{(-\alpha+i\omega)t}, \omega > 0$	$\frac{1}{p+\alpha-i\omega}$
Cosinus	$U(t)e^{-\alpha t}\cos(\omega t), \alpha > 0$	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$
Sinus	$U(t)e^{-\alpha t}\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$

Transformée de Laplace

- **Propriétés**



Impulsion



Rampe

1. Théorème du retard

Si $V(t)$ a pour TL : $v(p)$,

alors $V(t - T)$ a pour TL : $e^{-pT}v(p), \forall\ T > 0$.

Exercice. Montrer que la TL de l'impulsion (*cf*. Fig.) est : $\dfrac{1 - e^{-pT}}{p}$.

2. Théorème de dérivation

Si $V(t)$ a pour TL : $v(p)$,

alors $\dfrac{dV(t)}{dt}$ a pour TL : $p.v(p)$.

Exercice. Vérifier que la TL de la rampe $R(t)$ (*cf*. Fig.) est : $\dfrac{1}{p^2}$.

Transformée de Laplace

- **Propriétés**

3. Théorème inverse de translation

Si $V(t)$ a pour TL : $v(p)$, **alors** $e^{-at}V(t)$ a pour TL : $v(p+a), \forall\, a > 0$.

Exercice. Retrouver les expressions des TL du tableau page précédente.

4. Théorème inverse de dérivation

Si $V(t)$ a pour TL : $v(p)$, **alors** $-t.V(t)$ a pour TL : $\frac{dv(p)}{dp}$.

Exercice. Calculer la TL du signal : $t.U(t).e^{-at}$.

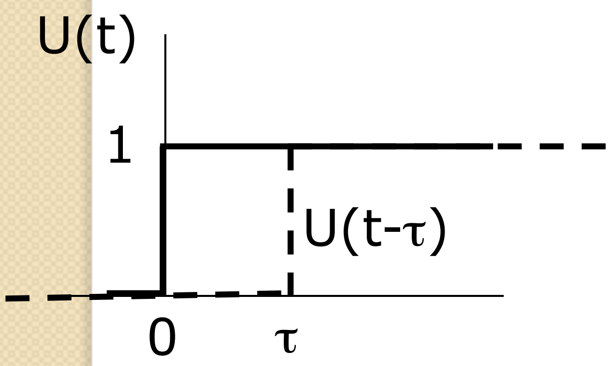
5. Théorème d'affinité - homothétie ou changement d'échelle de temps

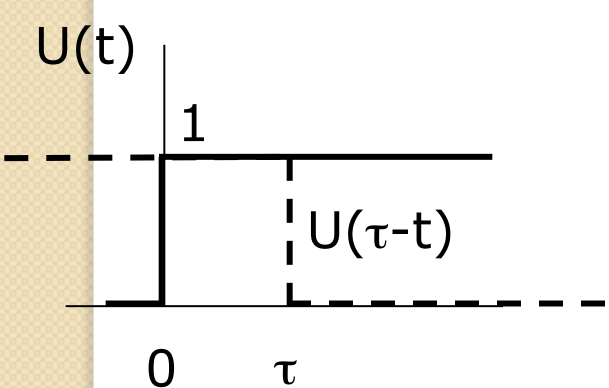
Si $V(t)$ a pour TL : $v(p)$, **alors** $V(kt)$ a pour TL : $\frac{1}{k}v(\frac{p}{k}), \forall\, k > 0$.

Exercice. Calculer la TL du signal : $U(t)\sin(3t)$

Transformée de Laplace

- **Convolution**





Théorème

Si X(t) a pour TL : x(p)

et Y(t) a pour TL : y(p),

alors le produit de convolution

$$\int_0^{\infty} X(t)Y(\tau - t)dt \quad \text{a pour TL:} \quad x(p).y(p)$$

ou, symboliquement :

$*$ a pour TL $\cdot$

Exercice. Montrer de deux manières différentes que $U(t) * U(t) = R(t)$

Transformée de Laplace

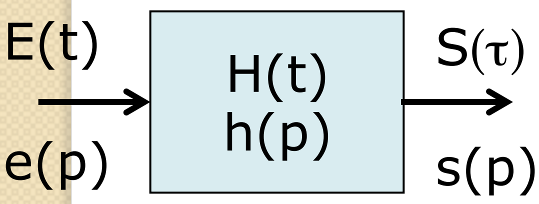
- **Opérateurs**

Opérateurs dans l'espace temps	**TL**
* (convolution entre signaux)	× (multiplication de leurs TL)
$\frac{d}{dt}$ (dérivation d'un signal)	×p (multiplication de sa TL par p)
T - périodisation	$\times \frac{1}{1-e^{-pT}}$

Exercice. Un signal à support temporel borné [O, T] est périodisé avec une période T. Retrouver l'expression de sa TF (cf. le tableau)

Transformée de Laplace

- **Systèmes linéaires stationnaires**



Théorème

Si $E(t)$, qui a pour TL : $e(p)$ est le signal d'entée

$H(t)$, la réponse percussionnelle du SLS et sa TL : $h(p)$, la fonction de transfert du SLS

alors le signal temporel de sortie est donné par le produit de convolution et sa TL par un produit :

$$S(\tau) = \int_0^{\infty} E(t)H(\tau - t)dt \quad \text{a pour TL} \quad s(p)=e(p).h(p)$$

Exercice. Calculer $S(\tau)$ pour $E(t) = U(t)e^{-\alpha t}\cos(\omega t)$ et $H(t) = U(t)$

Transformée de Laplace

- **Systèmes linéaires stationnaires**

E(t)
e(p) → [H(t) / h(p)] →

$$S(\tau)=(E(t)*H(t))_\tau = \int_0^\infty E(t)H(\tau - t)dt$$

$$s(p)=e(p).h(p)$$

	Dans l'espace temps	**Au niveau des TL**
Entrée	E(t)	e(p)
SLS	H(t) (rép. percussionnelle)	h(p) (fonction de transfert)
Sortie	S(t)=E(t)*H(t)	s(p)=e(p).h(p)

Transformée de Laplace

- **Déconvolution**

1. Décomposition en éléments simples de première espèce

$$\frac{1}{(p-a)^2(p-b)} = \frac{A}{(p-a)^2} + \frac{B}{(p-a)} + \frac{C}{(p-b)}$$

Pour calculer A (resp. C), on multiplie l'équation par $(p\text{-}a)^2$ (resp. p - b) et on fait p = a (resp. p = b). On trouve :

$$A = \left[\frac{1}{p-b}\right]_{p=a} = \frac{1}{a-b} \quad C = \left[\frac{1}{(p-a)^2}\right]_{p=b} = \frac{1}{(b-a)^2}$$

Pour calculer B, on multiplie l'équation par (p-a) et on fait tendre p vers l'infini. On trouve: B = - C. Les originaux des éléments simples peuvent alors être trouvés directement à partir des tables de TL usuelles.

Transformée de Laplace

- **Déconvolution**

2. Décomposition en éléments simples de deuxième espèce

C'est le cas où le dénominateur est un trinôme du second degré qui n'a pas de racines réelles. On décomposition en éléments simples de 2ème espèce :

$$ap^2+bp+c = a\left[\left(p+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}\right] = a\left(P^2 + A^2\right),$$

$$\text{avec } P = p + \frac{b}{2a} \text{ et } A = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$$

$$\frac{1}{ap^2+bp+c} = \frac{1}{a}\,\frac{1}{P^2+A^2} = \frac{1}{aA^2}\,\frac{1}{P^2/A^2+1}$$

Transformée de Laplace

- **Déconvolution**

Exercice: identification d'un système linéaire stationnaire

$$E(t)=U(t) \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} H(t)=\ ? \\ h(p)=\ ? \end{array}} \longrightarrow S(t)$$

On applique un échelon unité à l'entrée d'un système linéaire stationnaire inconnu. On mesure S(t) en sortie. Déterminer la réponse percussionnelle et la fonction de transfert du système.

Exercices. Calculer les fonctions du temps qui ont pour TL les expressions suivantes:

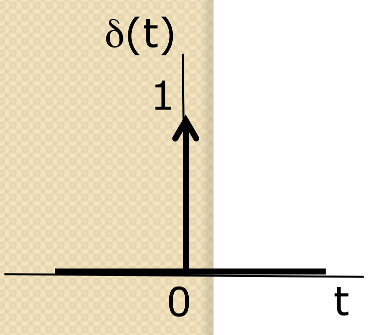
$$\frac{1}{p^3+3p^2+2p}\ ;\quad \frac{1}{p^3-1}\ ;\quad \frac{1}{p^3+p^2-p-1}$$

Transformée de Laplace

- **Calcul opérationnel**

Exercice. On définit la distribution de Dirac $\delta(t)$ de la manière suivante:

$\delta(t)$ a pour TL: 1.



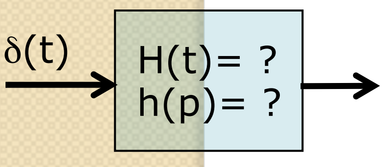
Distribution de Dirac

Résoudre l'équation différentielle: $\dfrac{d^2Y}{dt^2} + 2\alpha\omega_0 \dfrac{dY}{dt} + \omega_0^2 Y = \delta(t)$

(α et ω_0 sont réels et positifs et ne dépendent pas du temps).

Discuter brièvement la nature de la solution en fonction de α.

Note



La méthode présentée dans cet exercice permet de retrouver la réponse percussionnelle d'un système linéaire stationnaire lorsque l'on connait l'équation différentielle à laquelle il obéit.

Transformée de Laplace

- **Réponses**

Exercice: identification d'un système linéaire stationnaire

Réponse: H(t) est la dérivée de S(t)

Exercices. Eléments de réponse:

$$\frac{1}{p^3+3p^2+2p}=\frac{1}{p(p+2)(p+1)}\ ;\ \frac{1}{p^3-1}=\frac{1}{(p-1)\left(p^2+p+1\right)}$$

et $$\frac{1}{p^3+p^2-p-1}=\frac{1}{(p-1)(p+1)^2}$$

Signaux numériques

- Un signal numérique est un signal discret dont l' amplitude a été quantifiée

≠

<u>signaux à temps discret</u>

<u>Exemple</u>

$$x(t)=A \sin(\omega t+\phi)$$
$$X(k)=A \sin[2\pi/N\ (k+k_0)$$

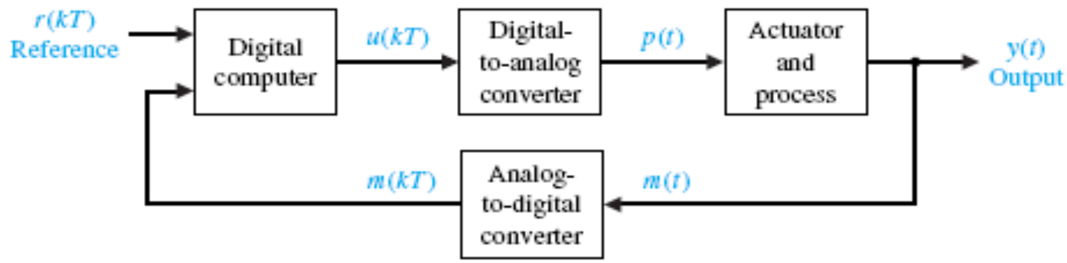
Du signal analogique au signal numérique

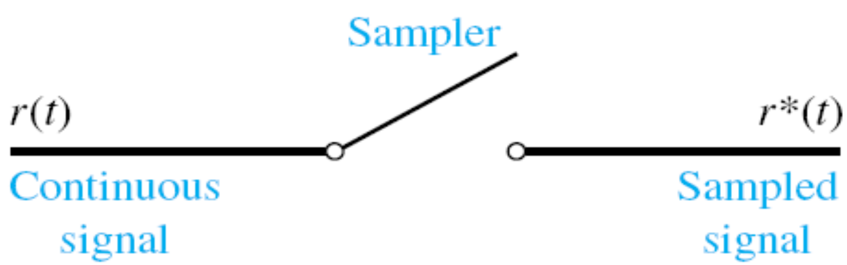
La Genèse du Signal Numérique

- ***De l'information cachée dans la représentation choisie***
  - Échantillonnage
  - Compression
  - Décomposition dans un espace orthogonal

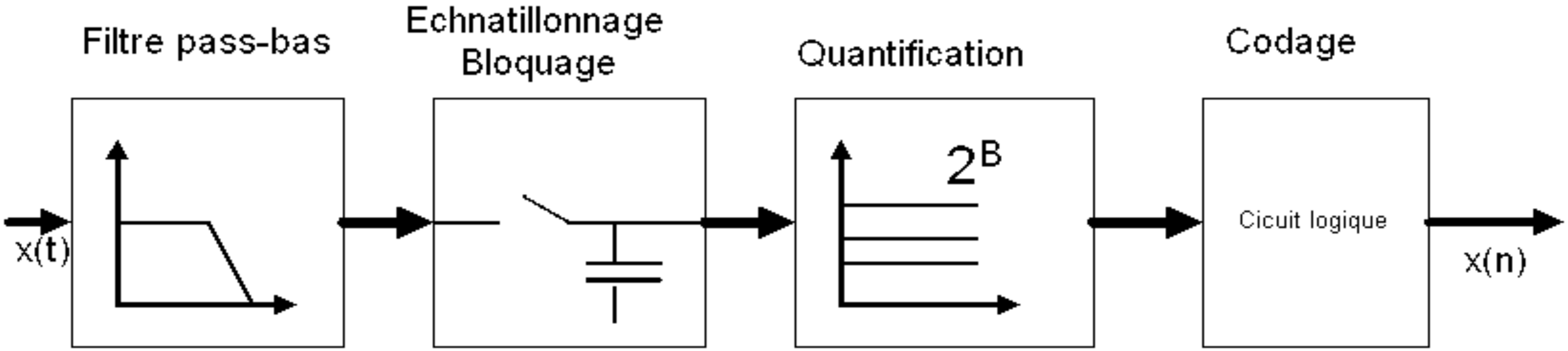
Les avances en moyen informatique (puissance de calcul) ont rendu possible le expression et traitement de signaux en forme numérique. Mais pour numériser, il faut d'abord échantillonner. Nous allons voir que la passage analogique – numérique implique nécessairement une perte d'information. Cette perte peut être minimiser par l'application des outils adaptés.

Systèmes Automatiques Échantillonnés



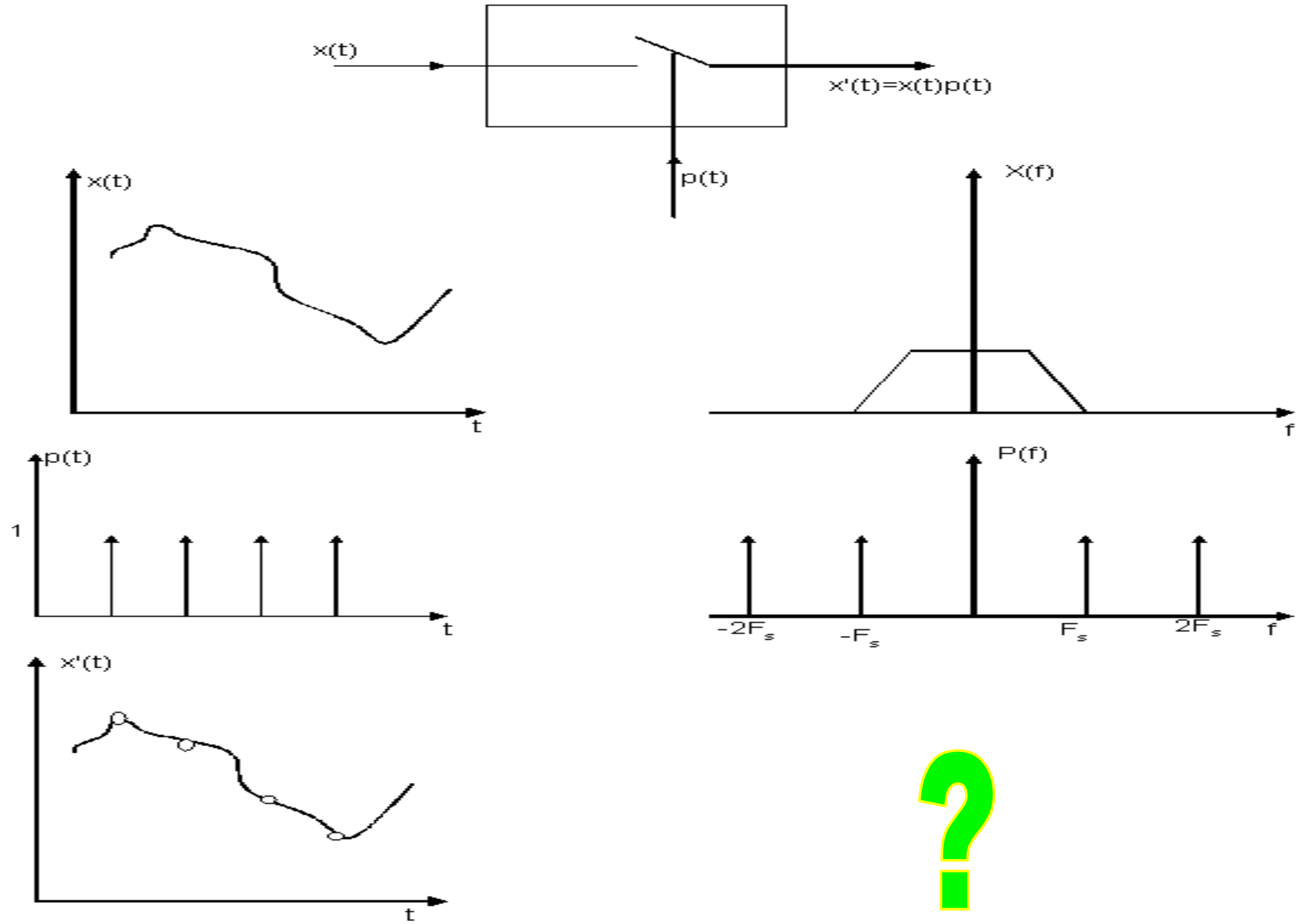


Échantillonnage

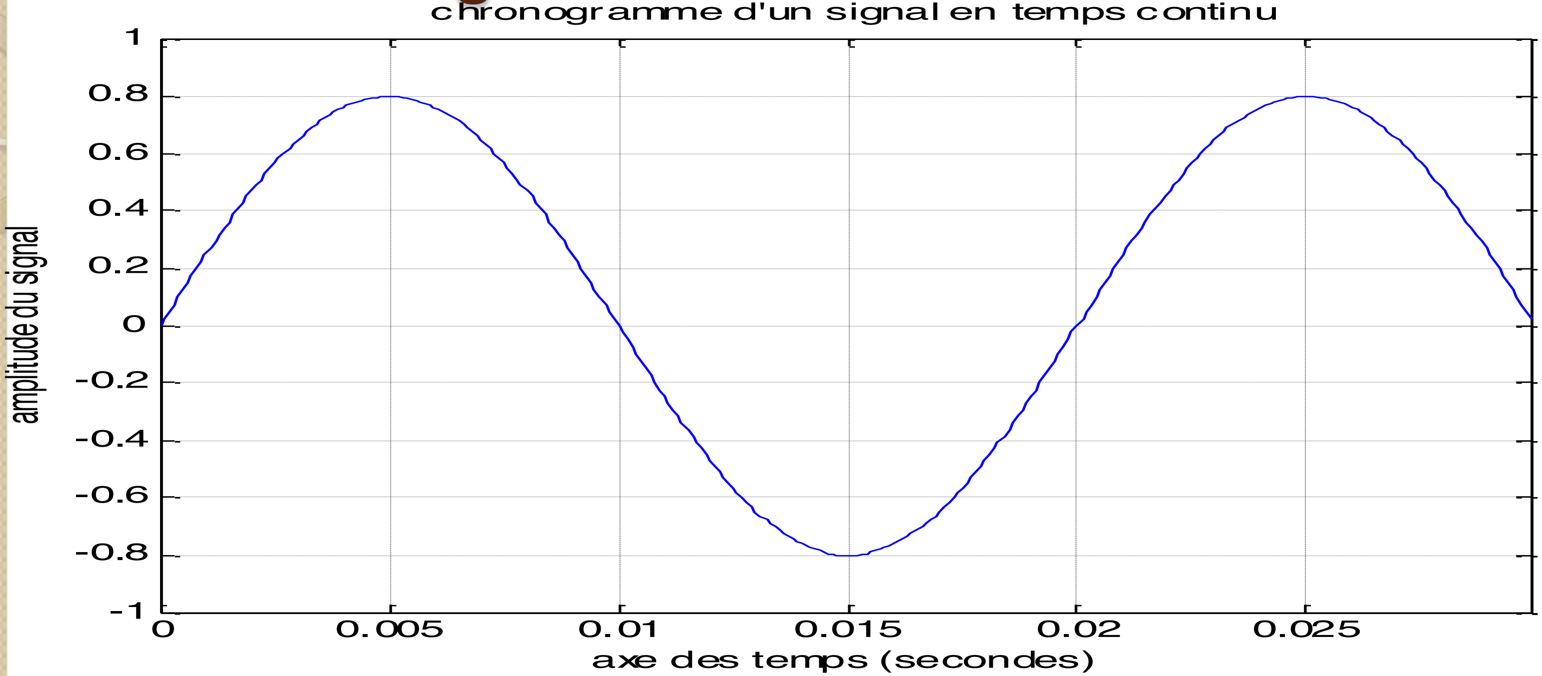


- Signal Analogique
- Signal discret en temps
- Signal numérique

Modèle mathématique de l'échantillonnage



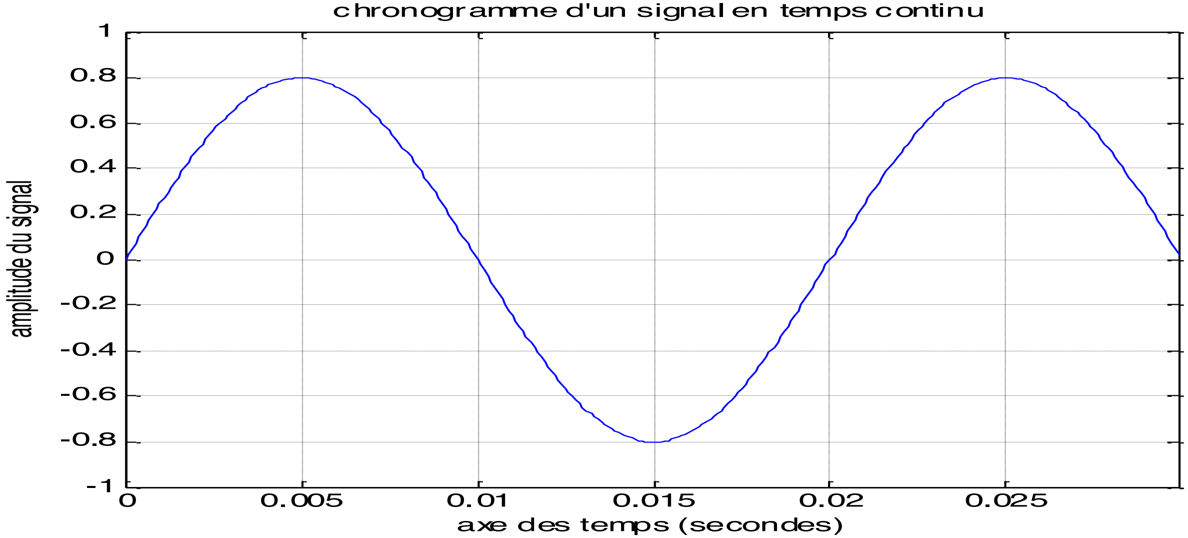
Extrait 3: signal sinusoïdal



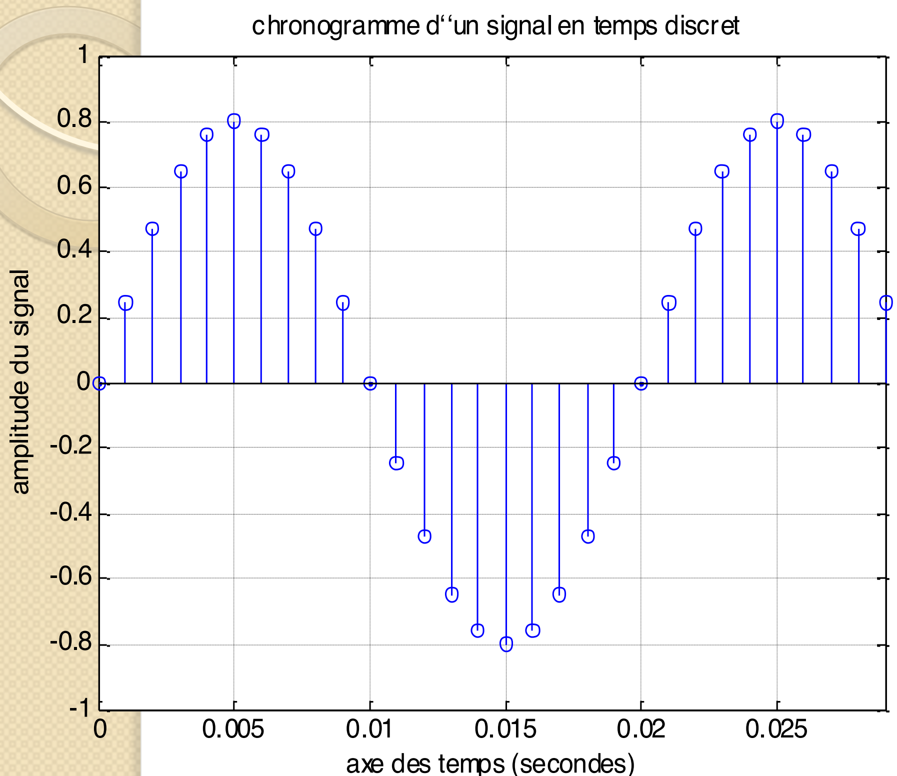
- Amplitude : 0.8
- Durée : 0.03 seconde
- Période : 0.02 seconde
- Fréquence : 1/0.02 = 50Hz
- Signal **analogique** et (en temps) **continu**
- Expression : s(t)= 0.8*sin(2*π*t/0.02)

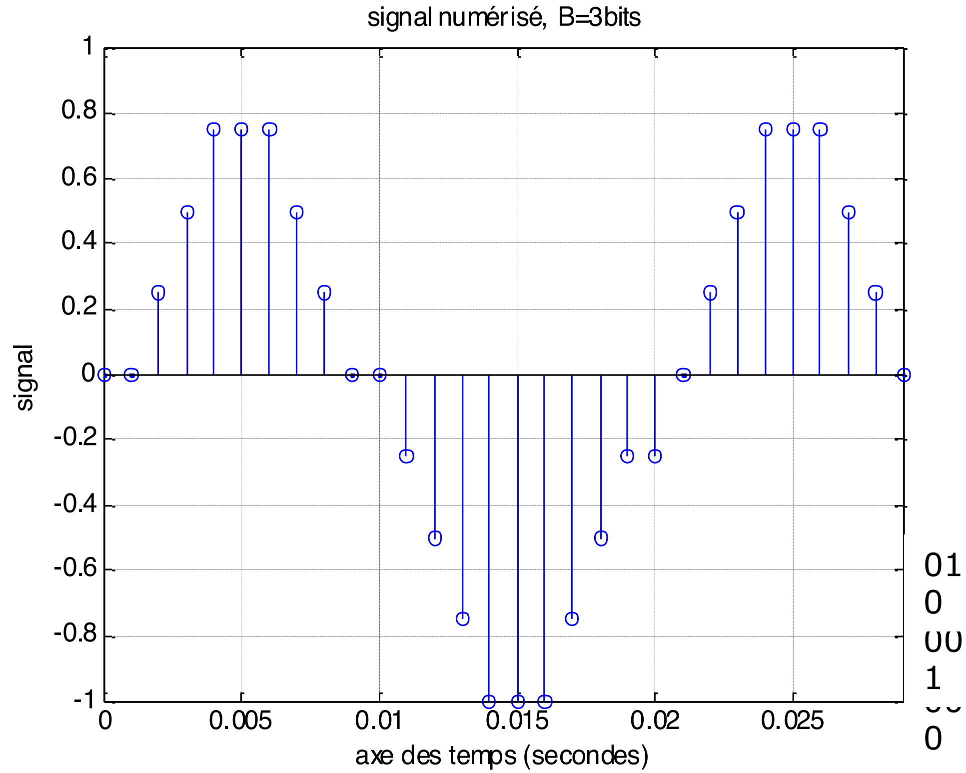
script Matlab

```
% créer et afficher le signal sinusoïdal précédent
freq= 50; % en Hertz (Hz)
ampl= 0.8; % ';' signifie ne pas afficher le résultat
temps= [0:1:299]/10000; % définir vecteur temps(secondes)
signal= ampl*sin(2*pi*freq*temps); % créer vecteur signal
plot(temps, signal) % trace la courbe signal(temps)
axis([0, temps(length(temps)), -1, 1]) % définir les axes
grid % tracer la grille
title('chronogramme d''un signal en temps continu')
xlabel('axe des temps (secondes)')
ylabel('amplitude du signal')
```



signal discret, signal numérique.

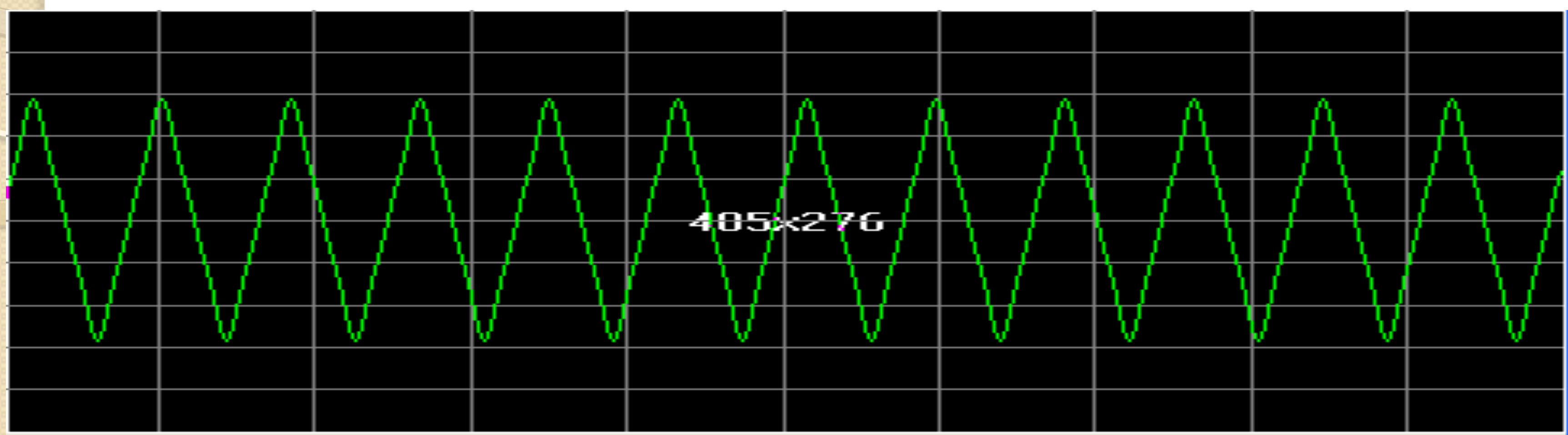




- période d'échantillonnage : *Te= 0.001s*
- fréquence d'échantillonnage *fe =1000Hz*
- *20 Te* par période
- Signal en temps **discret** et **analogique**

- nombre de bits par échantillon : *B* = 3
- 8 niveaux de quantification
- pas de quantification : *Q=0.25*
- erreur de quantification 0 < ε < 0.25
- Signal **numérique** et en temps **discret**

Composition fréquentielle.

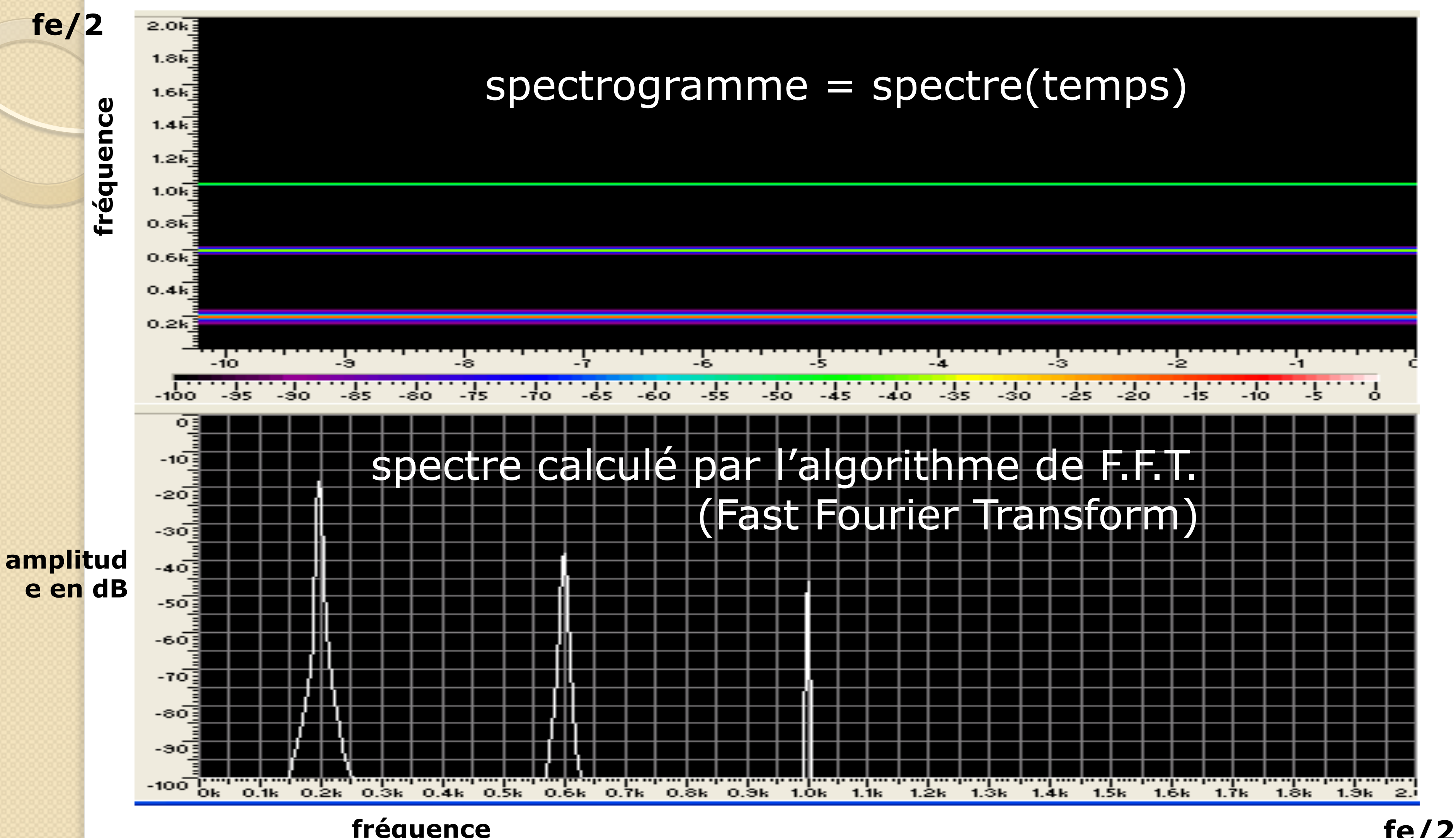


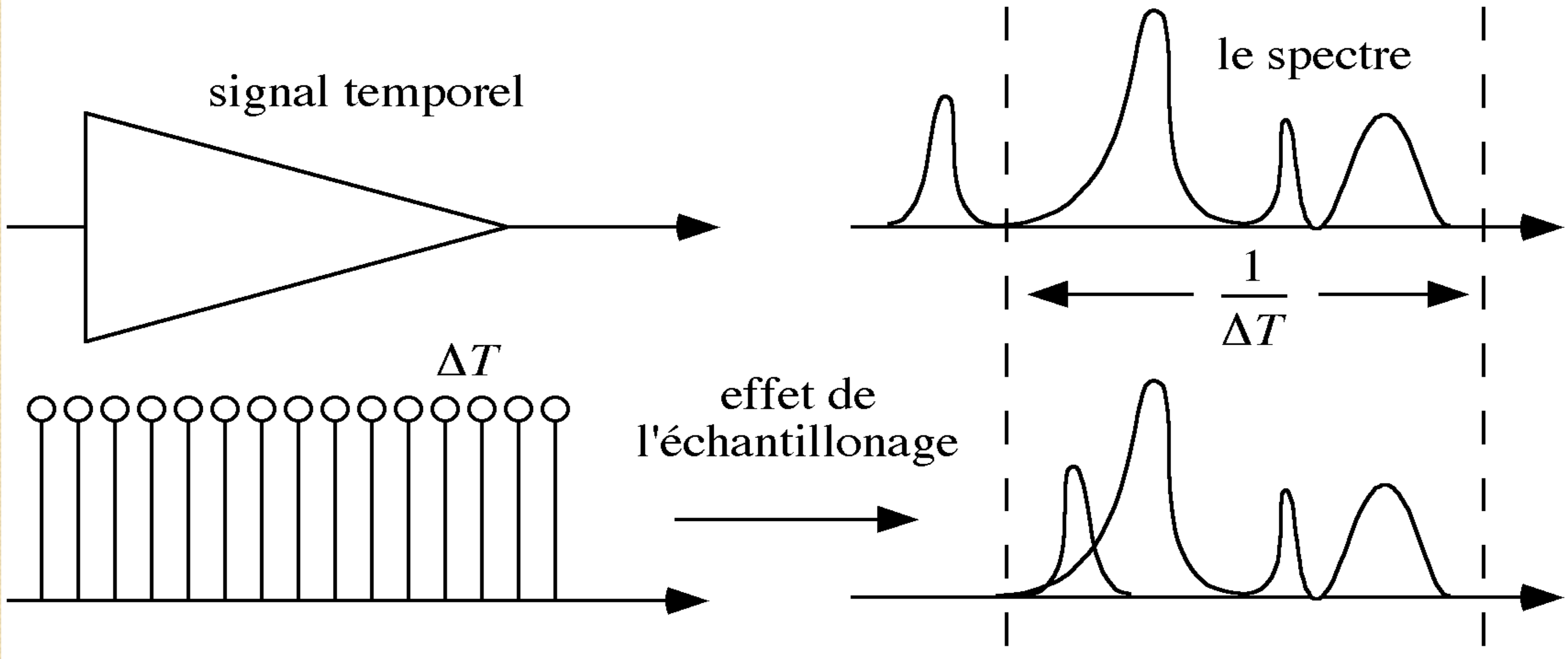
Le chronogramme ci-dessus a été tracé par Goldwave à partir de l'expression mathématique :

$$s(t) = \underbrace{\frac{\cos(400\pi t)}{2}}_{200Hz} + \underbrace{\frac{\cos(1200\pi t)}{18}}_{600Hz} + \underbrace{\frac{\cos(2000\pi t)}{50}}_{1000Hz}$$

Le signal s(t) est composé des trois fréquences *200, 600* et *1000Hz*

Extrait 7 : spectre et spectrogramme du signal s(t)




signal temporel
le spectre
1/ΔT
ΔT
effet de
l'échantillonage

Échantillonnage

- L'échantillonnage idéal prélève des échantillons à la cadence T_e de façon instantanée.

$$x_e = \sum_{n \in Z} x_a(nT_e)\delta(t - nT_e)$$

Spectre du signal échantillonné

$$x_e(t) = x_1(t)\sum_{n\in Z}\delta(t-nT_e)$$

$$\updownarrow$$

$$X_e(f) = TF[x_a(t)] * TF[\sum_{n\in Z}\delta(t-nT_e)]$$

$$\updownarrow$$

$$\hat{\delta}(\omega) = \int \delta(t)e^{-j\omega t}\,dt = 1$$

$$c(t) = \sum \delta(t-nT) \rightarrow \hat{c}(\omega) = \sum e^{-jnT\omega}$$

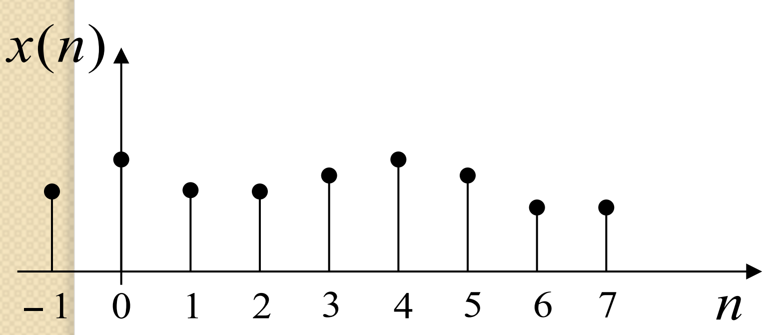
$$\hat{c}(\omega) = \frac{2\pi}{T}\sum_k \delta(\omega - \frac{2\pi k}{T})$$

$$X_e(f) = f_e X_a(f) * TF[\sum_{n\in Z}\delta(t-nT_e)] = f_e\sum_{n\in Z}X_a(f-nf_e)$$

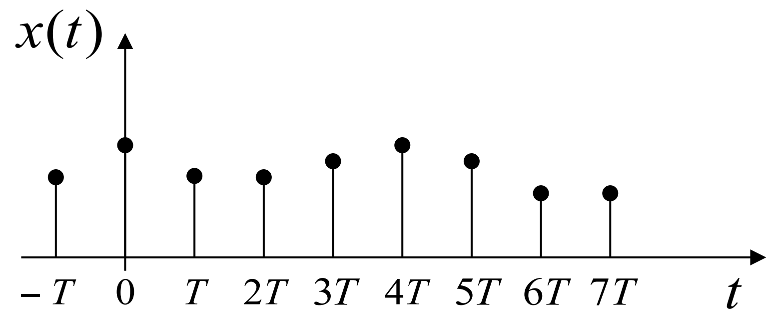
En utilisant la formule de Poisson

Échelle temps

Séquence

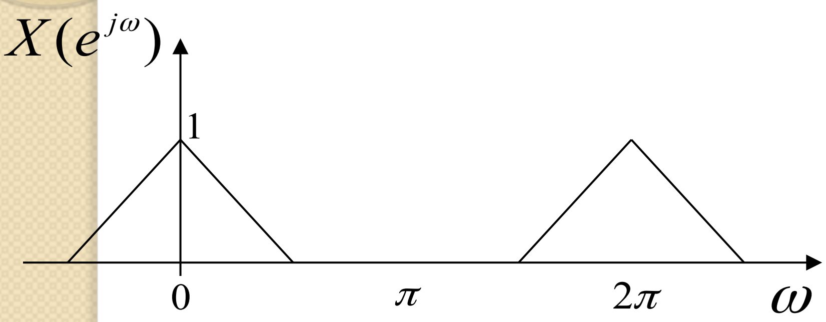


Temps physique

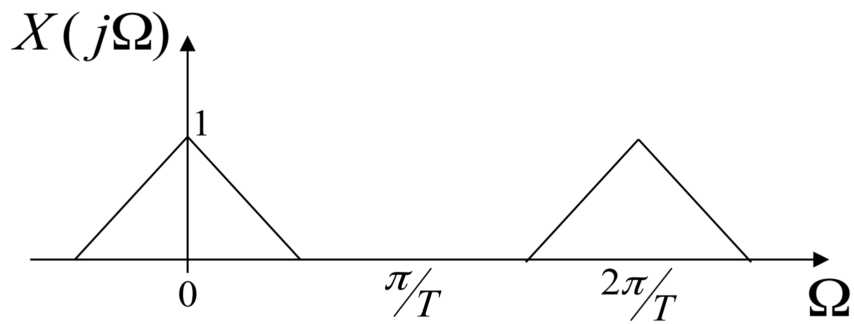


Échelle fréquence

Fréquence physique



Fréquence normalisée



✓ Échantillonnage et périodisation

- Échantillonnage idéal...

$$x_e(t) = x(t)\,\delta_T(t) = x(t)\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[kT]\delta(t-kT)$$

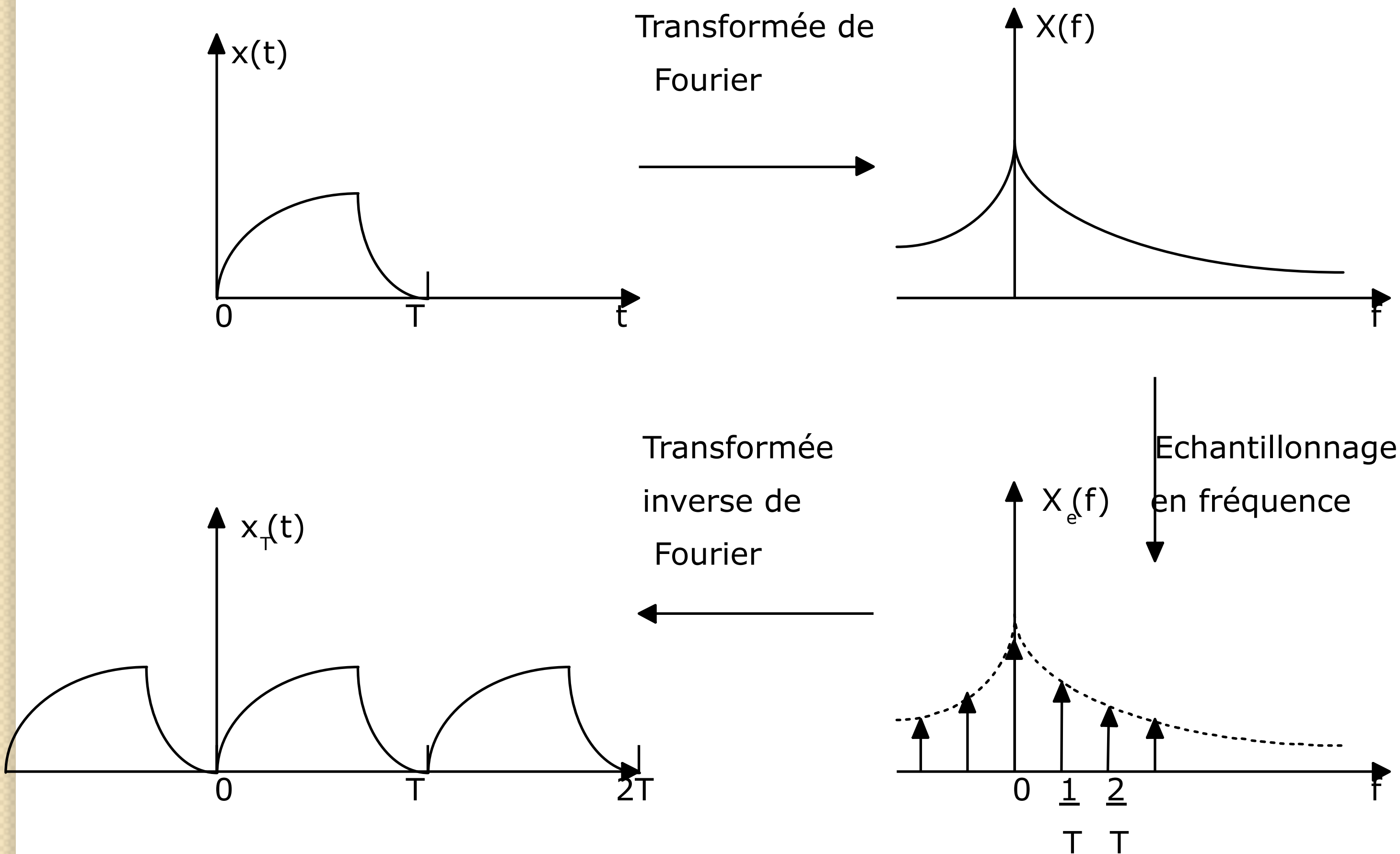
- ...Transformée de Fourier...

$$X_e(f) = \frac{1}{T}X(f) * \delta_{\frac{1}{T}}(f) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X(f-\frac{k}{T})$$

➩ ... *périodisation en fréquence*.

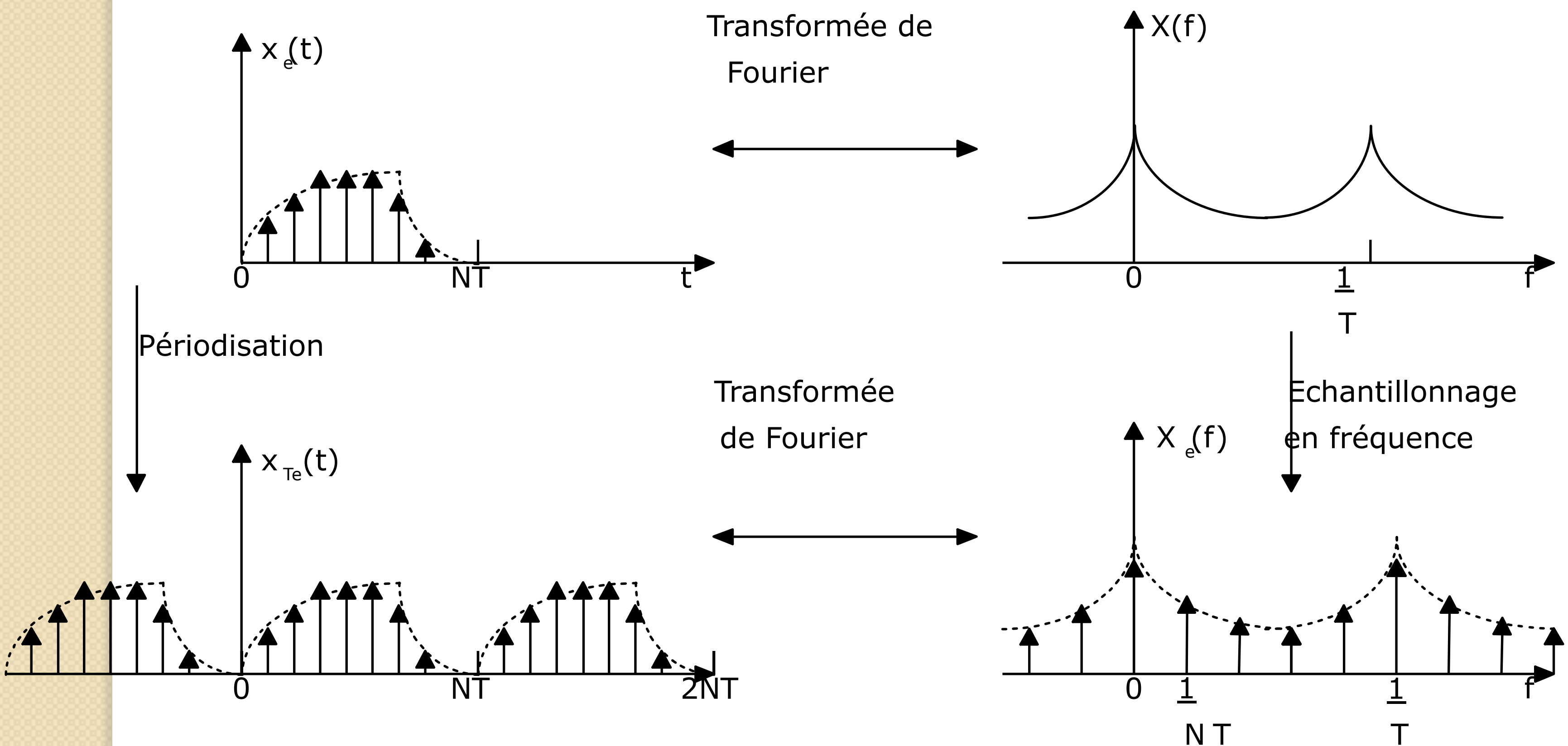
Échantillonnage temporel <=> périodisation en fréquence
Échantillonnage en fréquence <=> périodisation temporelle

✓ Signaux de durée finie et signaux périodiques



✓ Signaux échantillonnés de durée finie

$$x_e(t) = \sum_{0}^{N-1} x[k]\,\delta(t - kT)$$



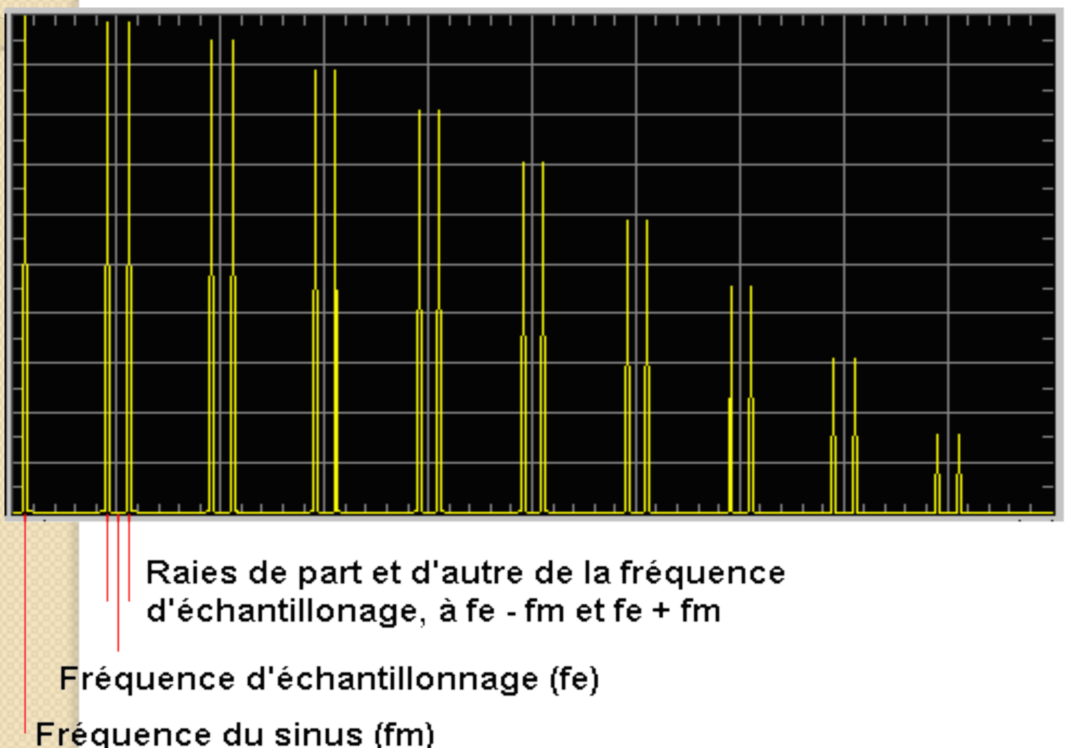
Théorème de Shannon

- Pour éviter une superposition des spectres élémentaires il est nécessaire d'imposer le théorème de Shannon

$$\boxed{Fe \geq 2f_{\max}}$$

Un signal de spectre borné ne peut pas être que de durée infinie. Il est donc erroné de considérer des signaux à la fois de durée et de spectre finis.

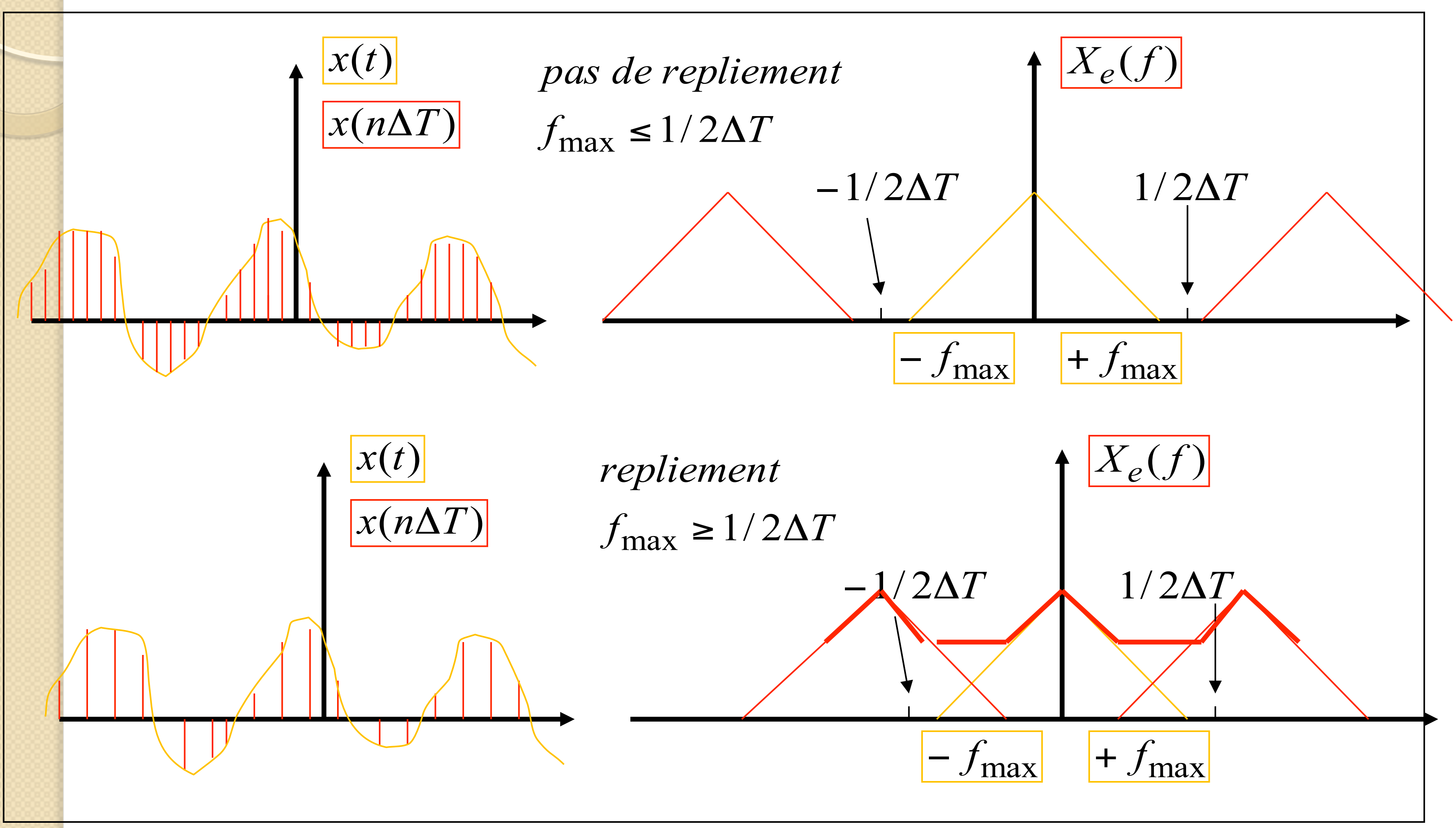
Spectre dans le cas sinusoïdal



Le spectre d'un signal échantillonné se compose d'une série de raies réparties de part et d'autre des multiples de la fréquence d'échantillonnage. Les raies intéressantes pour la démodulation sont celles qui se situent aux alentours de 0, puisque ce sont celles qui correspondent au signal original.

Transformée de Fourier Discrète

repliement de spectre dans le domaine fréquentiel



Quelques valeurs

- En téléphonie, on utilise une largeur de bande de 300 à 3400 Hz. Dans le cadre du réseau numérique à intégration de services (RNIS, ISDN pour les anglo-saxons), on utilise une fréquence d'échantillonnage de 8000 Hz (au lieu des 6800 théoriquement nécessaires).

- La musique se satisfait de 16, voire 20 kHz de largeur de bande. Un disque CD (Compact Disc) utilise une fréquence d'échantillonnage de 44 kHz.

- ***Remarque:*** Dans les deux cas, il est essentiel que l'on ait au préalable limité la largeur de bande du signal original : des fréquences inaudibles dans le signal original deviennent audibles par le phénomène de repliement !

Dictionnaire

- Conversion Analogique Numérique(*lecture du processus analogique par l'ordinateur*).
  (Echantillonnage **SAMPLING**)
- Conversion Numérique Analogique (*récupérer le control numérique et l'introduire dans le système à contrôler*).
  (Reconstruction du Signal **SIGNAL RECONSTRUCTION**)

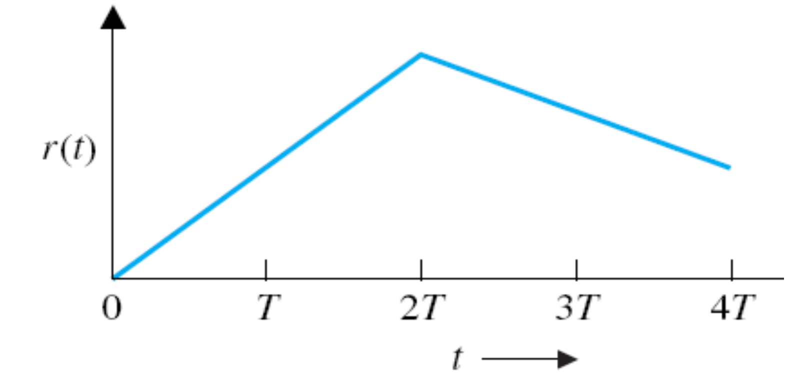
Pourquoi étudier le control numérique ?

L’approche le plus simple du control numérique est d’échantillonner rapidement et de faire quelques approximations raisonnables par rapport aux dérivées des données numériques. Par exemple, il est possible d’approximer les dérivées d’un signal analogique :

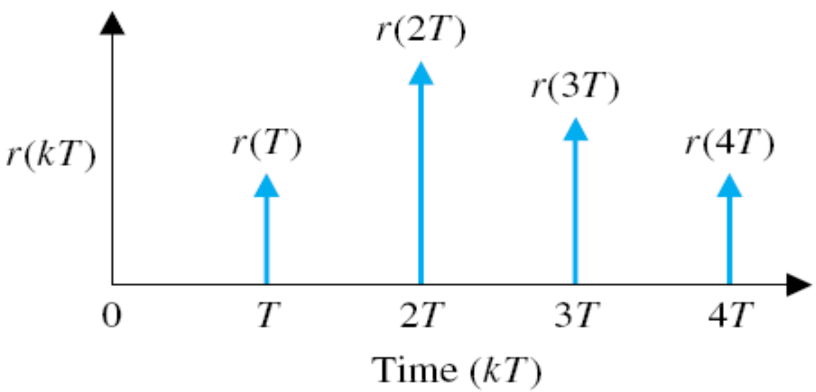
$$\frac{d}{dt}y(t) \approx \frac{y(t) - y(t-\Delta)}{\Delta}$$

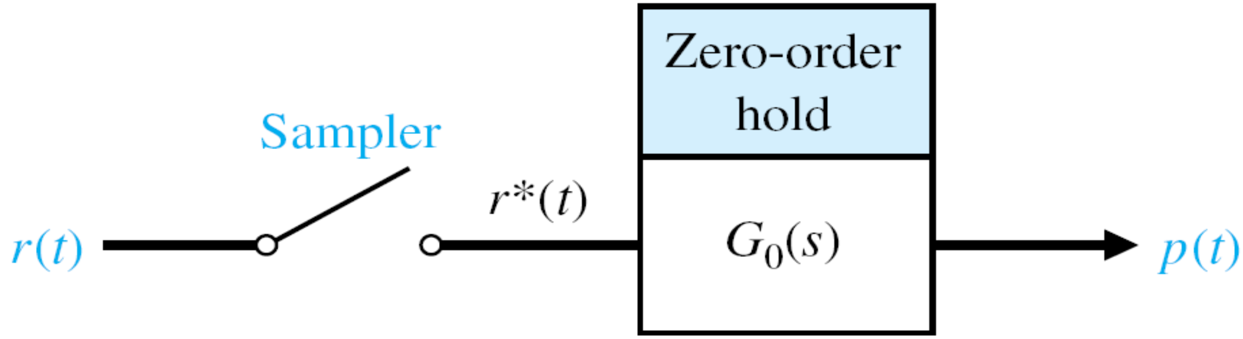
Où Δ est la période d’échantillonnage.

Le design par la suite est le même que dans le cas des signaux continue en temps et des systèmes à base d’un modèle continu.


r(t)
0
T
2T
3T
4T
t

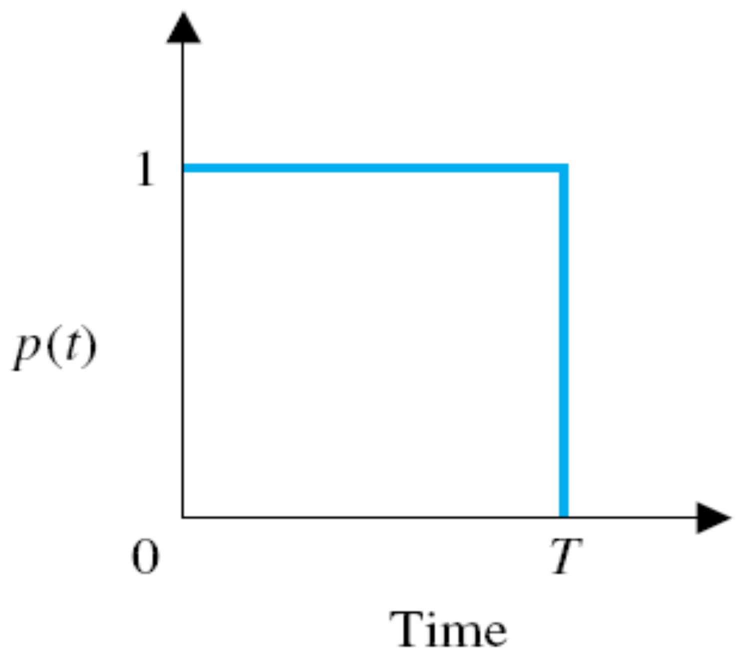
(a)

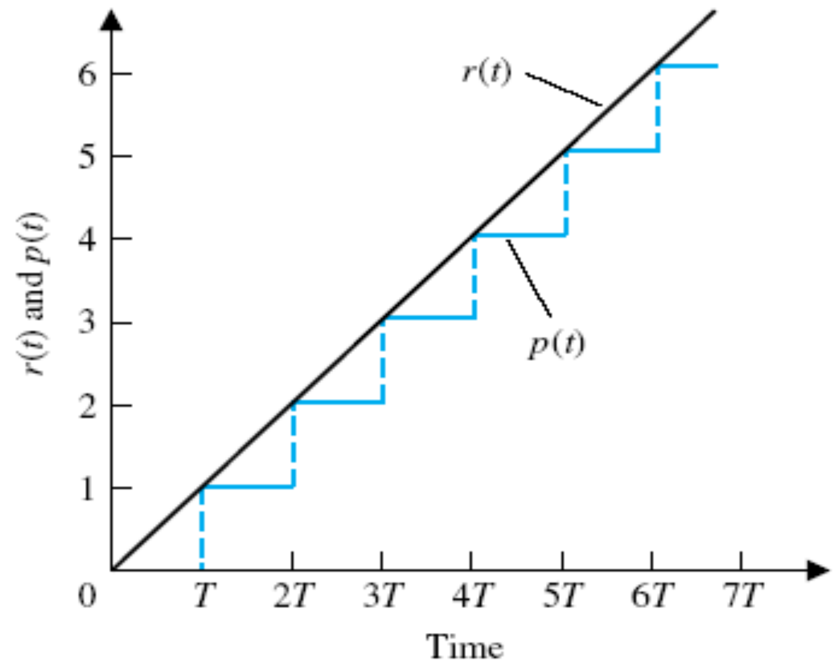

r(kT)
r(T)
r(2T)
r(3T)
r(4T)
0
T
2T
3T
4T
Time (kT)

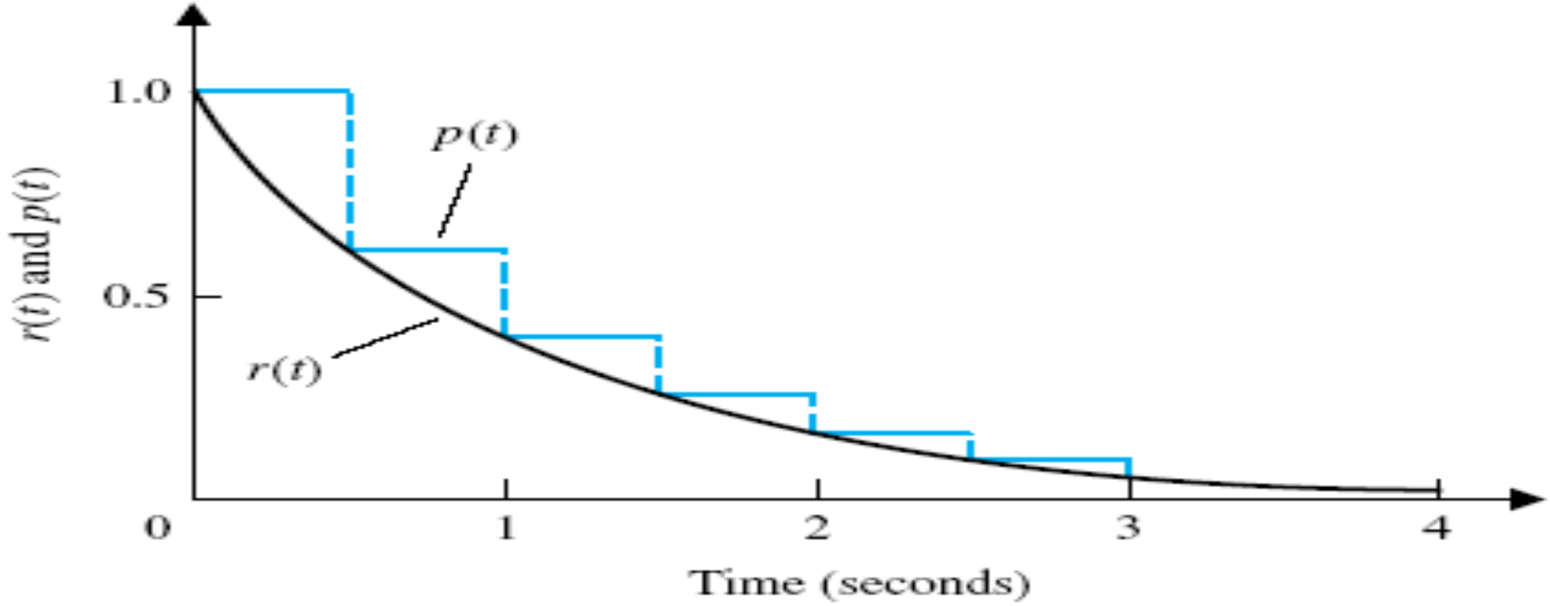

r(t)
Sampler
r*(t)
Zero-order hold
G0(s)
p(t)

La T.L. d'un bloqueur d'ordre 0

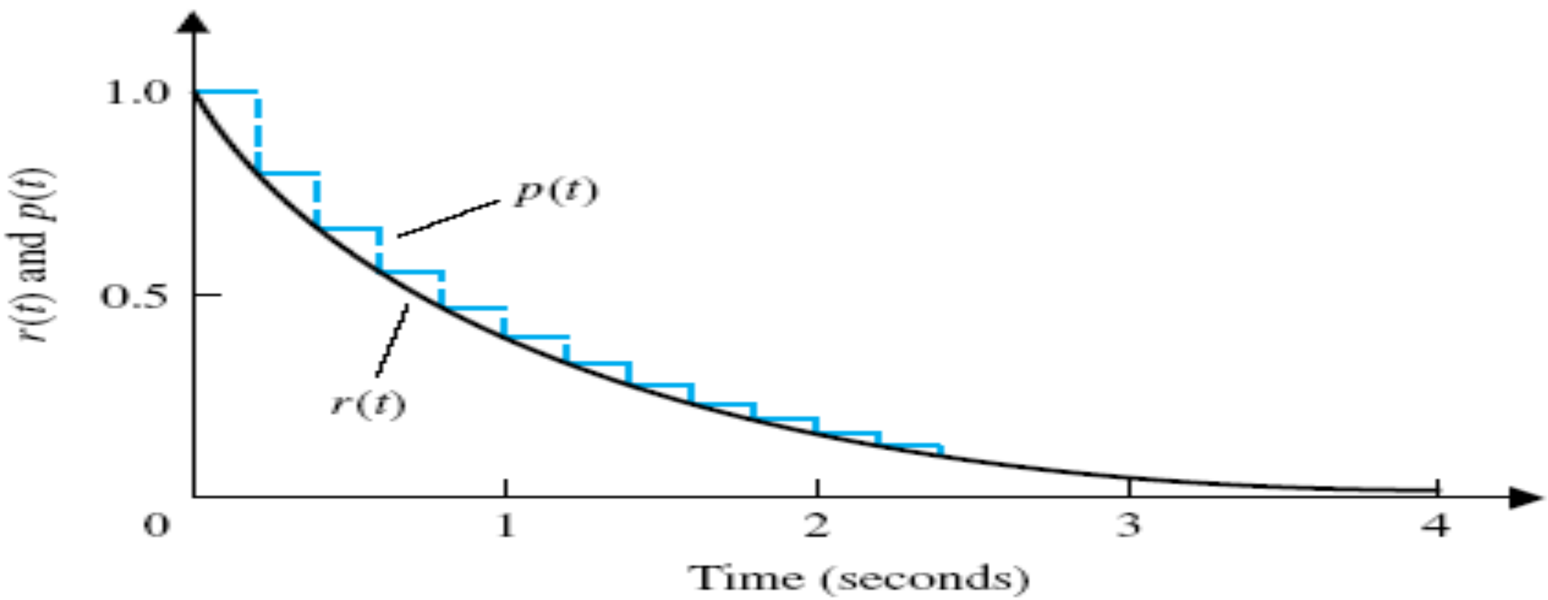
$$G_o(s) = 1/s - e^{sT}/s = (1 - e^{sT})/s$$







(a) $T = 0.5$ seconds

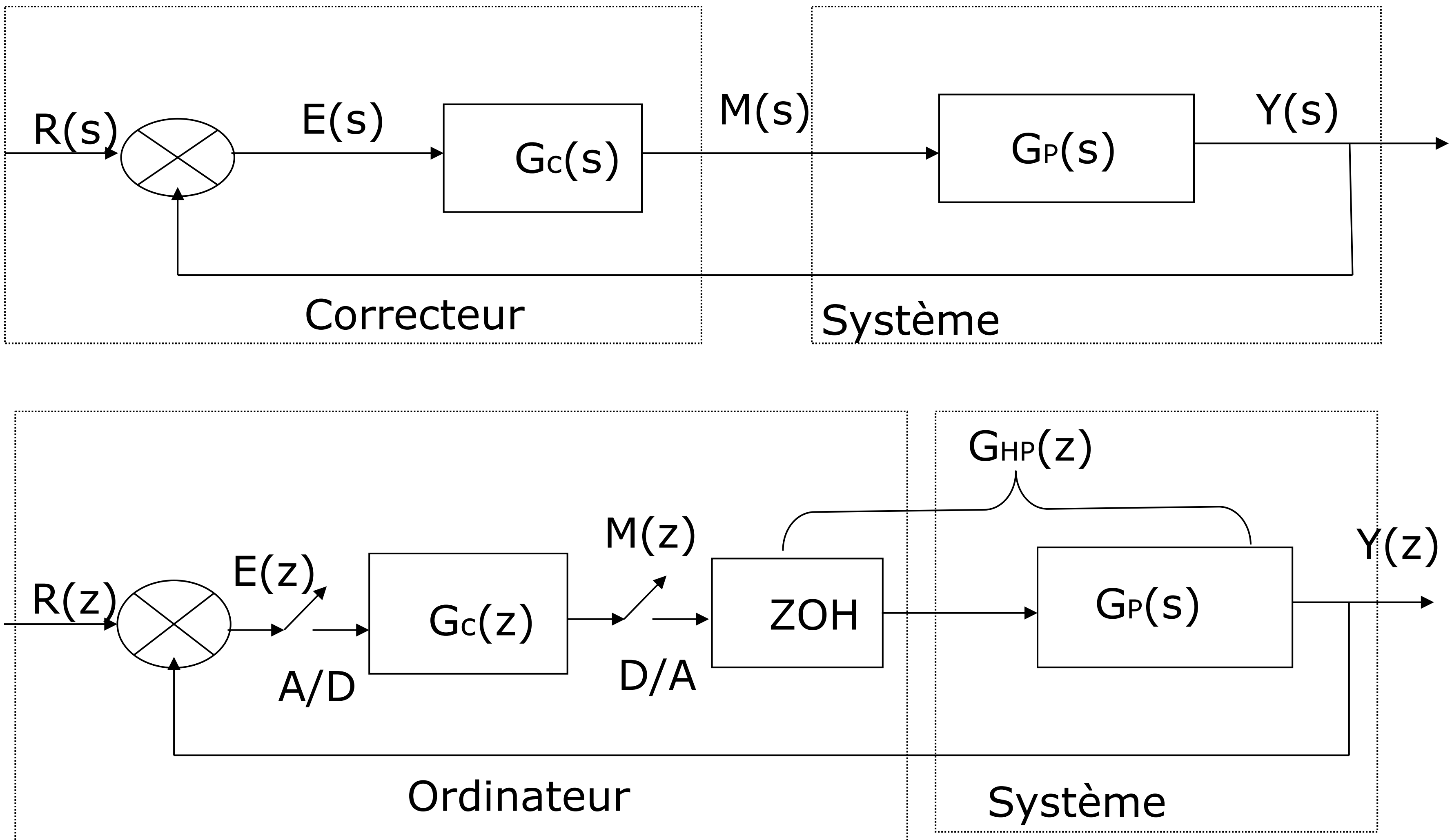


(b) $T = 0.2$ seconds

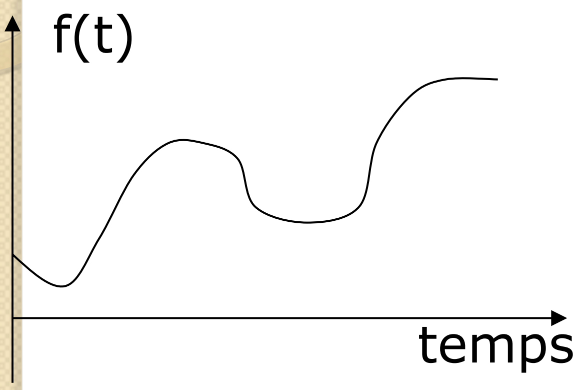
La Transformée Z

Contenu

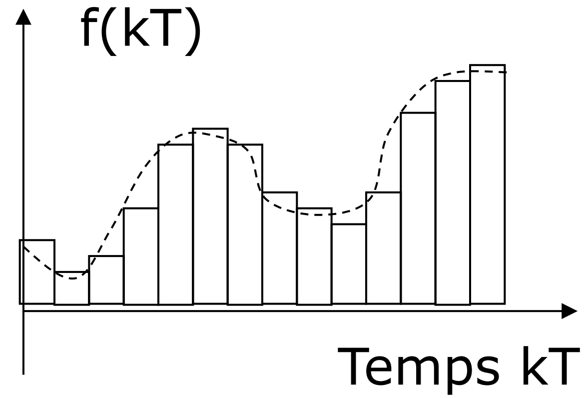
La Transformée en z

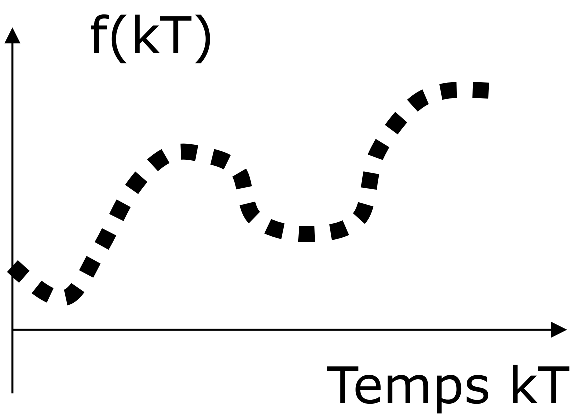


La Transformée en z

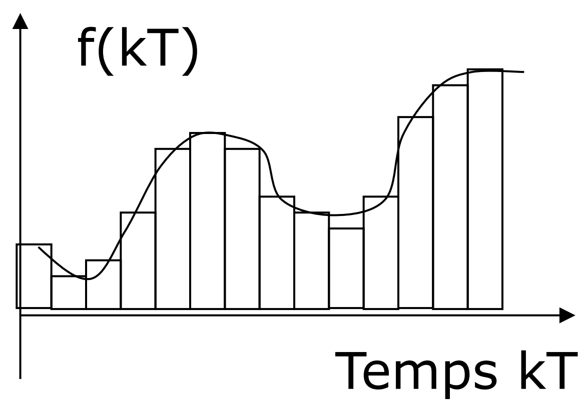


A/D⇒





D/A⇒



La Transformée en z

Comment il est possible de représenter mathématiquement un systèmes échantillonné ?

Pour les systèmes à temps continu l'outil mathématique est la Transformée de Laplace. Elle permet de définir les fonction de transfert, l'analyse de la stabilité et le design des correcteurs.

Pourquoi la Transformée en z?

- Généralisation de la Transformée de Fourier
- Pourquoi est-elle une généralisation ?
  - Problème de convergence de la T.F.
  - Utilisation de l'Analyse Complexe
  - Adaptée pour les signaux et systèmes discrets en temps

Définition

- La Transformée en Z d'une sequence $x(n)$ est :

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

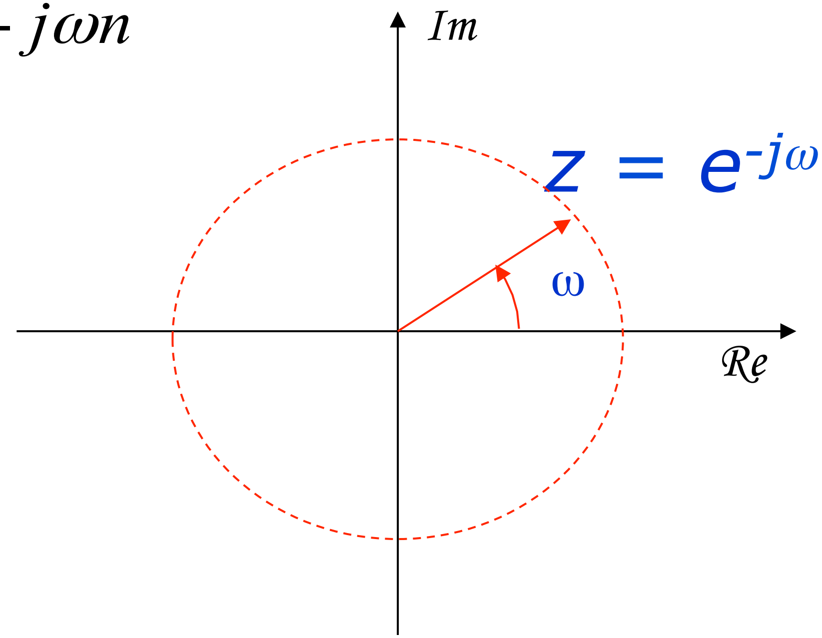
Transformée
de
Fourier

$z = e^{-j\omega}$.

$$\Rightarrow \quad X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

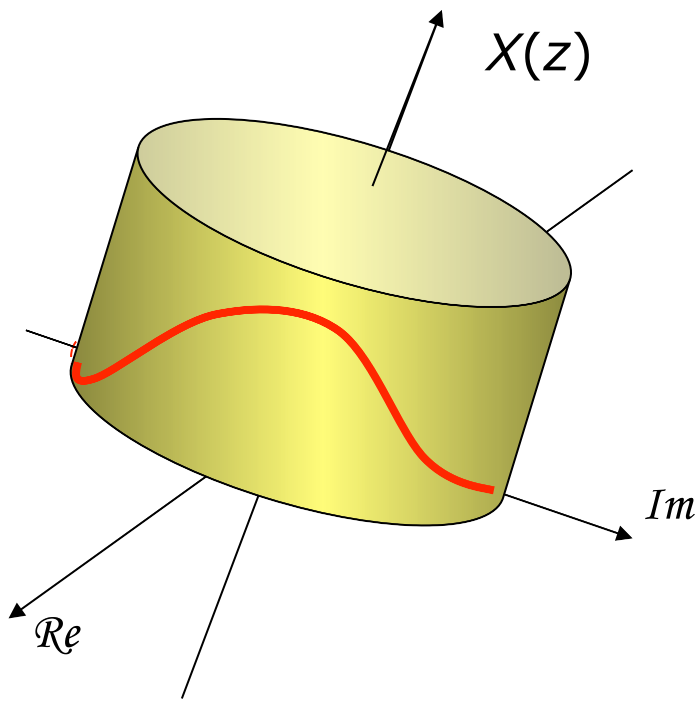
Le Plan z

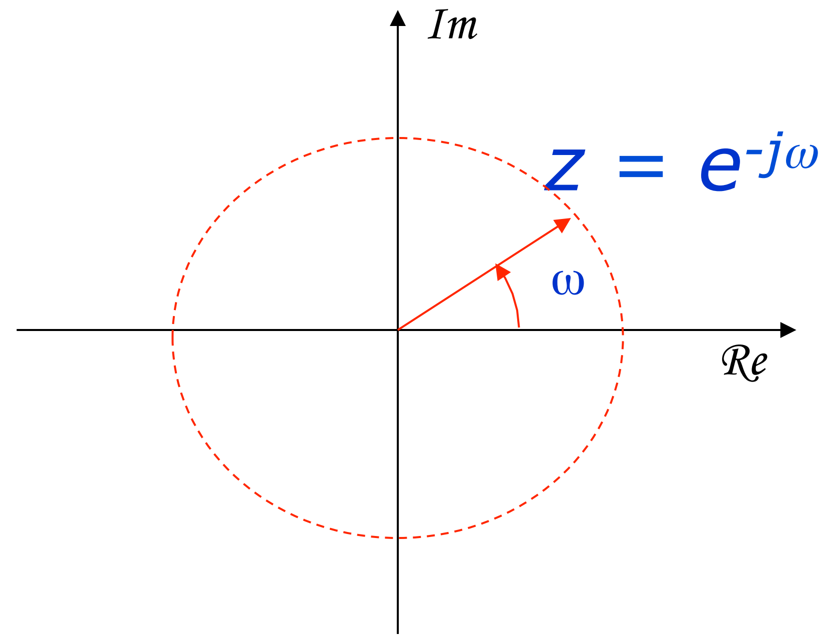
$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$



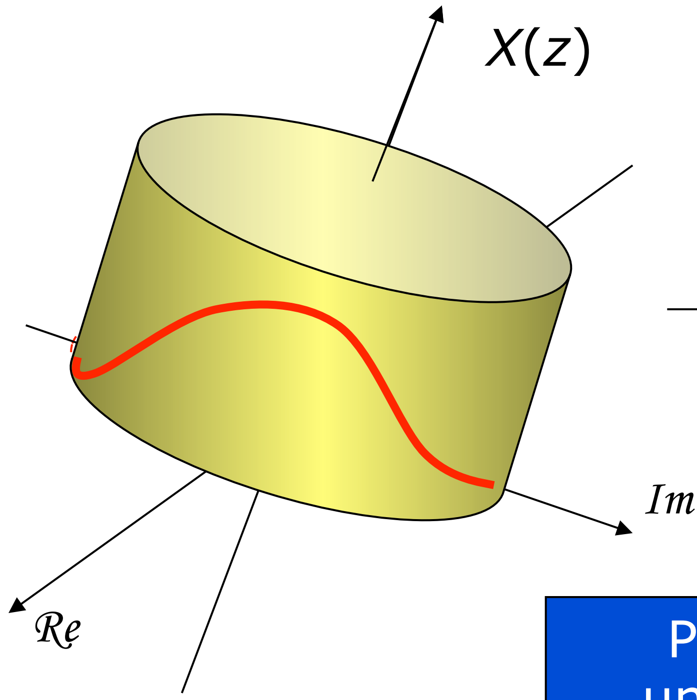
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

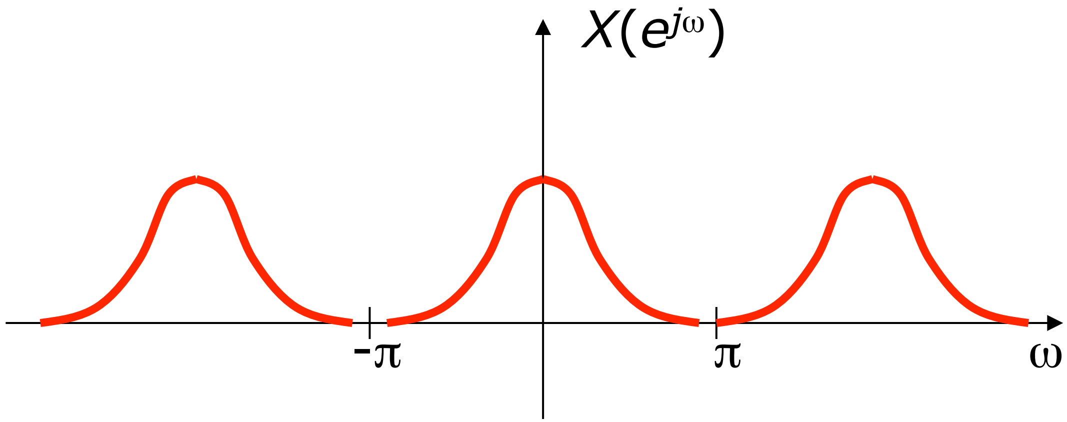
Plan-z





Périodicité de la TF





Pourquoi la Transformée de Fourier est une function périodique de periode 2π ?

La Transformée en z

Pour un signal continu f(t), ses échantillons s'écrivent :

$$f_s(t) = f(kT) = f(0) + f(T) + f(2T) + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)$$

La transformée en z de f(t) est :

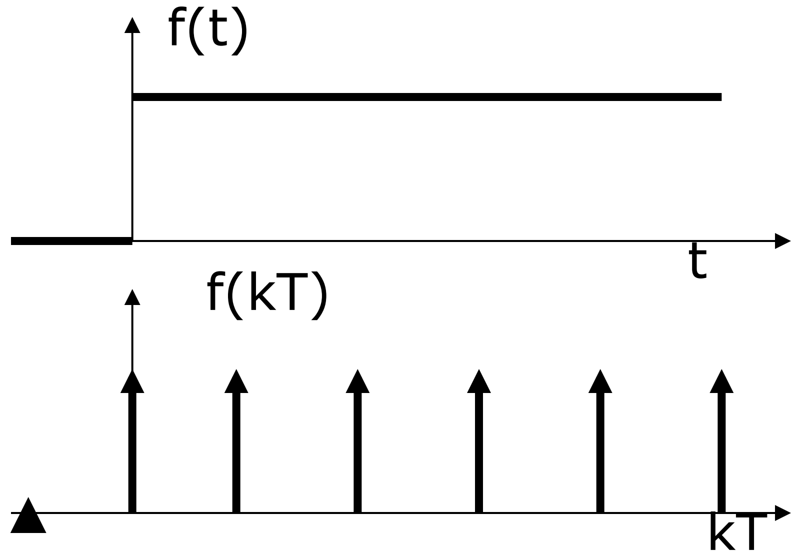
$$F(z) = Z[f(t)] = Z[f(nT)] = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) z^{-n}$$

$$= f(0) + f(T)z^{-1} + f(2T)z^{-2} + \cdots$$

où z^{-1} représente un retard d'une période d'échantillonnage dans le temps

Calcul de La Transformée en z

Calculer la Transformée en z
de la fonction échelon .



La Transformée en z

Application de la définition :

$$F(z) = Z[f(t)] = Z[f(kT)] = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k}$$

$$= 1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots$$

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots = \frac{a}{1-q}$$

$$F(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

La Transformée en z

Soit la méthode

$$F(z) = Z[f(t)] = Z[f(kT)] = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) z^{-k}$$

$$= 1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots$$

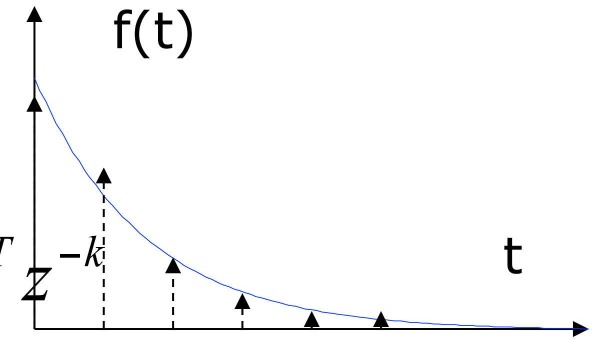
$$z^{-1}F(z) = z^{-1}(1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots) = z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} \cdots$$

$$F(z) - z^{-1}F(z) = 1 \Rightarrow F(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

La Transformée en z

Calculer la transformée en z de

$$f(kT) = e^{-akT}$$



Solution: $F(z) = Z[f(kT)] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT} z^{-k}$

$$= 1 + e^{-aT} z^{-1} + e^{-2aT} z^{-2} + \cdots$$

$$F(z) = \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}}$$

La Transformée en z

Calculer la transformée en z de la fonction cos.

Solution:

$$e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t; \quad e^{-j\omega t} = \cos\omega t - j\sin\omega t$$

$$\cos\omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}; \quad \sin\omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{j2}$$

La Transformée en z

$$F(z) = Z[\cos kT] = Z\left[\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}\right] = \frac{1}{2}(Z[e^{j\omega t}] + Z[e^{-j\omega t}])$$

$$Z[e^{-at}] = \frac{1}{1 - e^{-aT}z^{-1}}$$

$$F(z) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1 - e^{j\omega T}z^{-1}} + \frac{1}{1 - e^{-j\omega T}z^{-1}}\right] = \frac{1}{2}\frac{1 - e^{-j\omega T}z^{-1} + 1 - e^{j\omega T}z^{-1}}{(1 - e^{j\omega T}z^{-1})(1 - e^{-j\omega T}z^{-1})}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{2 - (e^{-j\omega T}z^{-1} + e^{j\omega T}z^{-1})}{1 - (e^{-j\omega T}z^{-1} + e^{j\omega T}z^{-1}) + z^{-2}} = \frac{2 - 2z^{-1}\cos\omega T}{2(1 - 2z^{-1}\cos\omega T + z^{-2})}$$

$$= \frac{1 - z^{-1}\cos\omega T}{1 - 2z^{-1}\cos\omega T + z^{-2}}$$

Transformée en z

Calculer la Transformée en z de la fonction cos "amorti"

$$f(t) = e^{-at} \cos \omega t$$

$$F(z) = \frac{1 - z^{-1} e^{-aT} \cos \omega T}{1 - 2z^{-1} e^{-aT} \cos \omega T + e^{-2aT} z^{-2}}$$

Transformée en z

Calculer la Transformée en z de la fonction $f(t) = 1 - e^{-at}$

Solution:

$$F(z) = Z[f(kT)] = Z\left[1 - e^{-at}\right] = Z[1] - Z[e^{-at}]$$

$$Z[1] = Z[step] = \frac{1}{1 - z^{-1}}; \quad Z[e^{-at}] = \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}}$$

$$F(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}} = \frac{(1 - e^{-aT}) z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - e^{-aT} z^{-1})}$$

Transformée en z

Exercice: Calculer la Transformée en z de :

$$f(t) = te^{-at}$$

$$F(z) = \frac{Tz^{-1}e^{-aT}}{(1 - z^{-1}e^{-aT})^2}$$

Définition

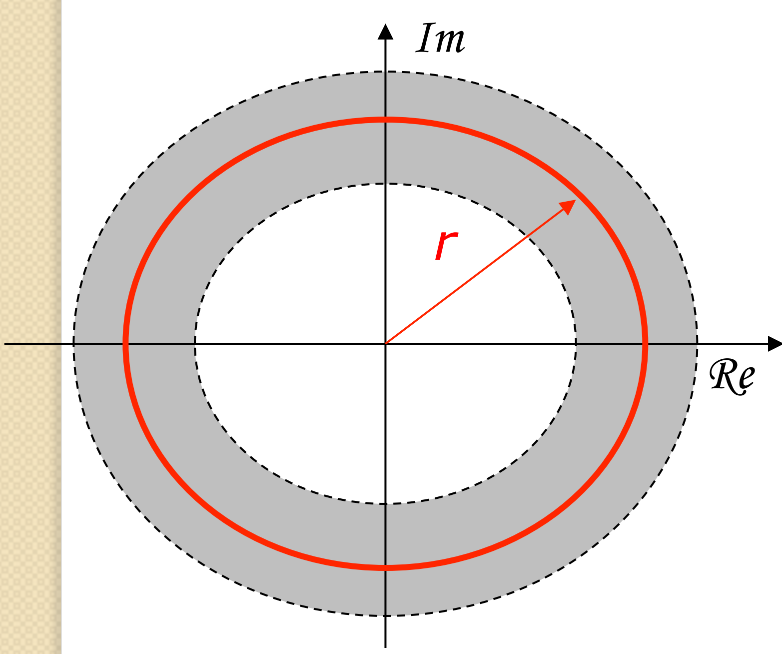
- L'ensemble de valeur de z, pour lesquelles la Transformée en z converge, i.e., $|X(z)|<\infty$, est appelé région de convergence.

$$|X(z)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| |z|^{-n} < \infty$$

ROC est centrée en origine et est constituée d'un ensemble d'anneaux.

Exemple: Region de Convergence

$$|X(z)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| |z|^{-n} < \infty$$



RdC est un anneau centré en origine.

$$R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

$$RdC = \{ z = re^{j\omega} \mid R_{x-} < r < R_{x+} \}$$

Théorèmes et Propriétés

Linearité

$$\mathcal{Z}[x(n)] = X(z), \qquad z \in R_x$$

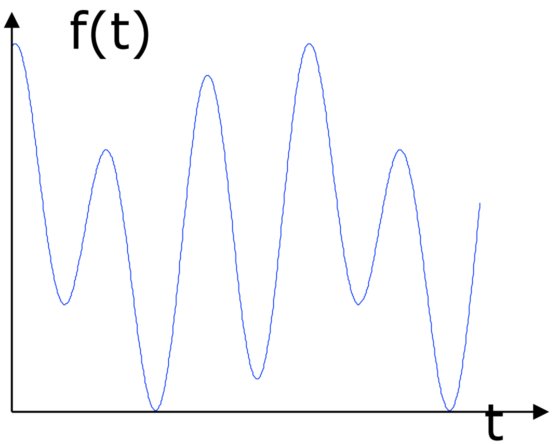
$$\mathcal{Z}[y(n)] = Y(z), \qquad z \in R_y$$

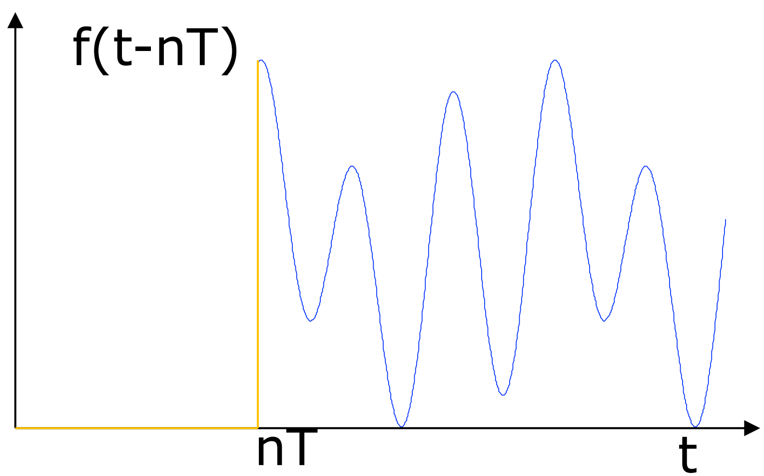
$$\mathcal{Z}[ax(n) + by(n)] = aX(z) + bY(z), \qquad \underbrace{z \in R_x \cap R_y}$$

La Transformée en z : théorèmes

Théorème du retard:

La transformée en z de f(t) est F(z), trouver la transformée en z de f(t-nT).





Retard

$$\mathcal{Z}[x(n)] = X(z), \qquad z \in R_x$$

$$\mathcal{Z}[x(n+n_0)] = z^{n_0} X(z) \qquad z \in R_x$$

La Transformée en z : théorèmes

Si f(t)=0 pour t<0 a la transformée-z F(z), alors

$$Z[f(t-nT)] = z^{-n}F(z) \quad \text{et}$$

$$Z[f(t+nT)] = z^{n}\left[F(z) - \sum_{k=0}^{n-1} f(kT)z^{-k}\right]$$

Démonstration:

$$Z[f(t-nT)] = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT-nT)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT-nT)z^{-k}z^{n-n}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} f(kT-nT)z^{-(k-n)}z^{-n} = z^{-n}\sum_{k=0}^{\infty} f(kT-nT)z^{-(k-n)}$$

La Transformée en z : théorèmes

Définissons m=k-n,

$$Z[f(t-nT)] = z^{-n}\sum_{k=0}^{\infty} f(kT-nT)z^{-(k-n)} = z^{-n}\sum_{m=-n}^{\infty} f(mT)z^{-m}$$

Comme f(mT)=0 pour m<0, alors :

$$Z[f(t-nT)] = z^{-n}\sum_{m=-n}^{\infty} f(mT)z^{-m} = z^{-n}\sum_{m=0}^{\infty} f(mT)z^{-m} = z^{-n}F(z)$$

Si une fonction est retardée de nT, sa transformée en z est multipliée par z^{-n}.

Théorème du Retard (Shifting Theorem).

Multiplication par une séquence Exponentielle

$$\mathcal{Z}[x(n)] = X(z), \qquad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

$$\mathcal{Z}[a^n x(n)] = X(a^{-1}z) \qquad z \in |a| \cdot R_x$$

Dérivée de X(z)

$$\mathcal{Z}[x(n)] = X(z), \qquad z \in R_x$$

$$\mathcal{Z}[nx(n)] = -z\,\frac{dX(z)}{dz} \qquad z \in R_x$$

Conjugué

$$\mathcal{Z}[x(n)] = X(z), \qquad z \in R_x$$

$$\mathcal{Z}[x^*(n)] = X^*(z^*) \qquad z \in R_x$$

Inversion

$$\mathcal{Z}[x(n)] = X(z), \qquad z \in R_x$$

$$\mathcal{Z}[x(-n)] = X(z^{-1}) \qquad z \in 1/R_x$$

Partie Réelle et Imaginaire

$$\mathcal{Z}[x(n)] = X(z), \qquad z \in R_x$$

$$\mathcal{Re}[x(n)] = \tfrac{1}{2}[X(z) + X^*(z^*)] \qquad z \in R_x$$

$$Im[x(n)] = \tfrac{1}{2j}[X(z) - X^*(z^*)] \qquad z \in R_x$$

Théorème de la Valeur Initiale

$$x(n) = 0, \qquad \text{for } n < 0$$

$$x(0) = \lim_{z \to \infty} X(z)$$

2.2 La Transformée en z : théorèmes

Théorème de la Valeur Finale:

Supposons que f(t), où f(t)=0 pour t<0, a la transformée en z F(z), alors la valeur finale est donnée par :

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{z \to 1} (1 - z^{-1}) F(z)$$

Convolution de Séquences

$$\mathcal{Z}[x(n)] = X(z), \qquad z \in R_x$$

$$\mathcal{Z}[y(n)] = Y(z), \qquad z \in R_y$$

$$\mathcal{Z}[x(n) * y(n)] = X(z)Y(z) \qquad z \in R_x \cap R_y$$

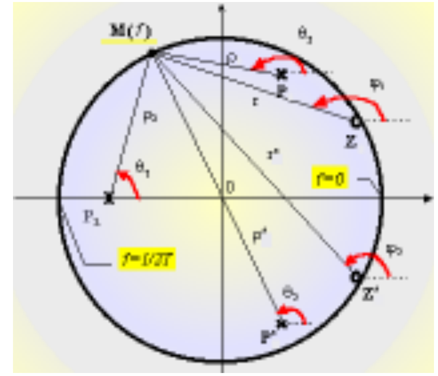
Convolution de Séquences

$$x(n) * y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\, y(n-k)$$

$$\mathcal{Z}[x(n) * y(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\, y(n-k) \right) z^{-n}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n-k) z^{-n} \quad = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) z^{-k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n) z^{-n}$$

$$= X(z) Y(z)$$



Les Transformée en z Importantes

Les Transformées en z

Sequence	Transformée-z	RdC
$\delta(n)$	1	Tous les z
$\delta(n-m)$	z^{-m}	Tous les z exception en 0 (si m>0) or ∞ (si m<0)
$u(n)$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$-u(-n-1)$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert < 1$
$a^n u(n)$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$-a^n u(-n-1)$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$

Transformée en z

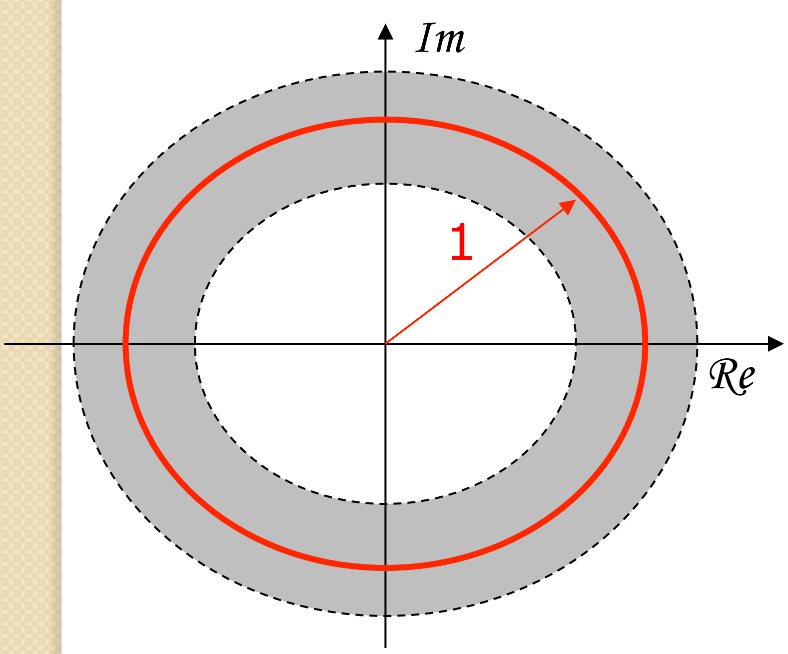
Sequence	Transformée en z	RdC
$[\cos \omega_0 n]u(n)$	$\dfrac{1-[\cos \omega_0]z^{-1}}{1-[2\cos \omega_0]z^{-1}+z^{-2}}$	$\lvert z \rvert > 1$
$[\sin \omega_0 n]u(n)$	$\dfrac{[\sin \omega_0]z^{-1}}{1-[2\cos \omega_0]z^{-1}+z^{-2}}$	$\lvert z \rvert > 1$
$[r^n \cos \omega_0 n]u(n)$	$\dfrac{1-[r\cos \omega_0]z^{-1}}{1-[2r\cos \omega_0]z^{-1}+r^2 z^{-2}}$	$\lvert z \rvert > r$
$[r^n \sin \omega_0 n]u(n)$	$\dfrac{[r\sin \omega_0]z^{-1}}{1-[2r\cos \omega_0]z^{-1}+r^2 z^{-2}}$	$\lvert z \rvert > r$
$\begin{cases} a^n & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$\dfrac{1-a^N z^{-N}}{1-az^{-1}}$	$\lvert z \rvert > 0$

Zéros and Pôles

Stabilité des Systèmes

- Un système stable demande d'avoir

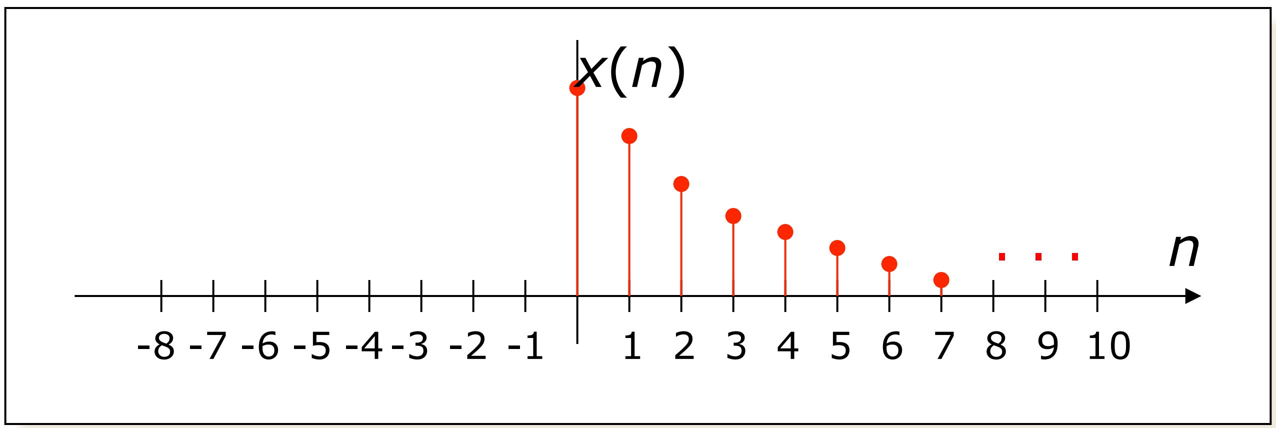
La Transformée de Fourier convergente uniformément.



- Un system stable nécessite que la RdC de la transformée-z contient le cercle unitaire.

Exemple:

$$x(n) = a^n u(n)$$



Exemple:

$$\boxed{x(n) = a^n u(n)}$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(n) z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n$$

Pour que $X(z)$ convergence, il faut imposer :

$$\sum_{n=0}^{\infty} | az^{-1} | < \infty \Rightarrow | az^{-1} | < 1$$

$$\Rightarrow | z | > | a |$$

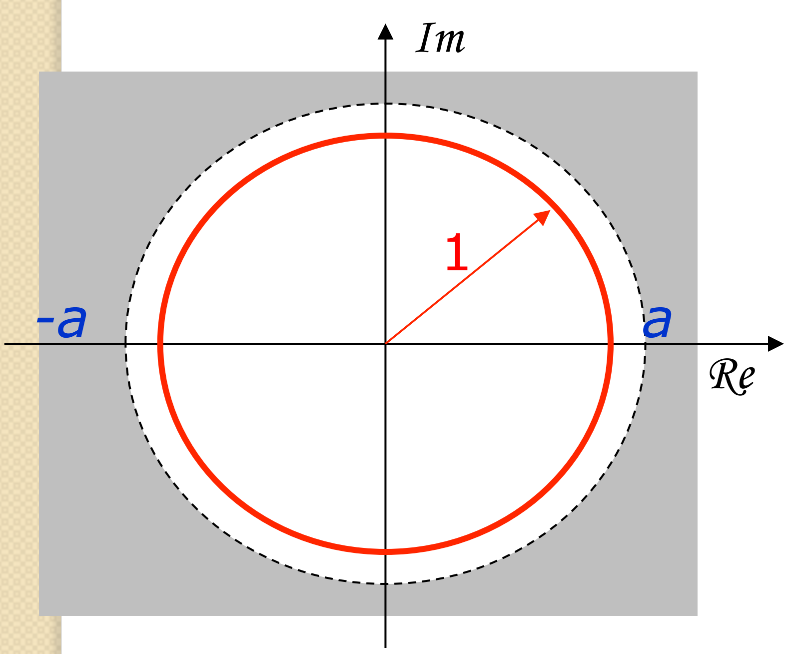
$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}$$

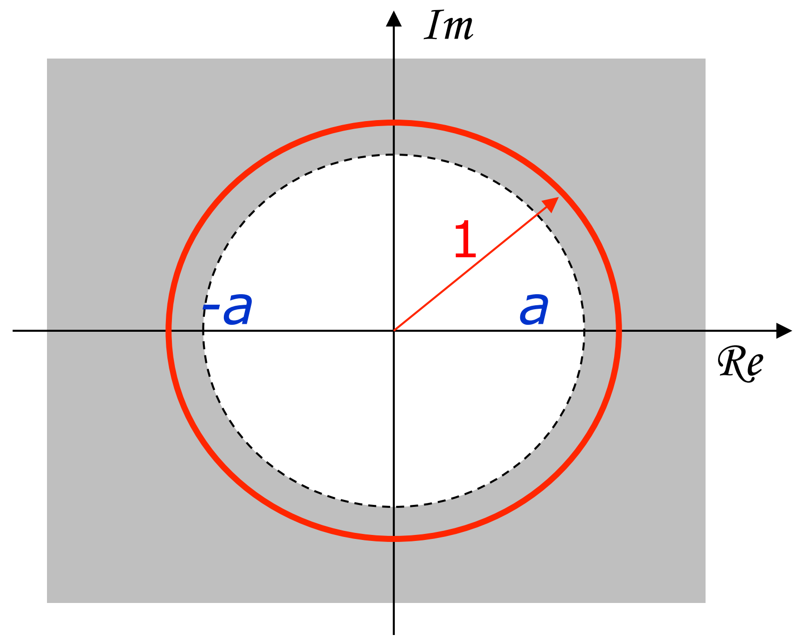
$$| z | > | a |$$

Exemple: RdC pour $x(n)=a^n u(n)$

$$X(z) = \frac{z}{z-a}, \qquad |z| > |a|$$

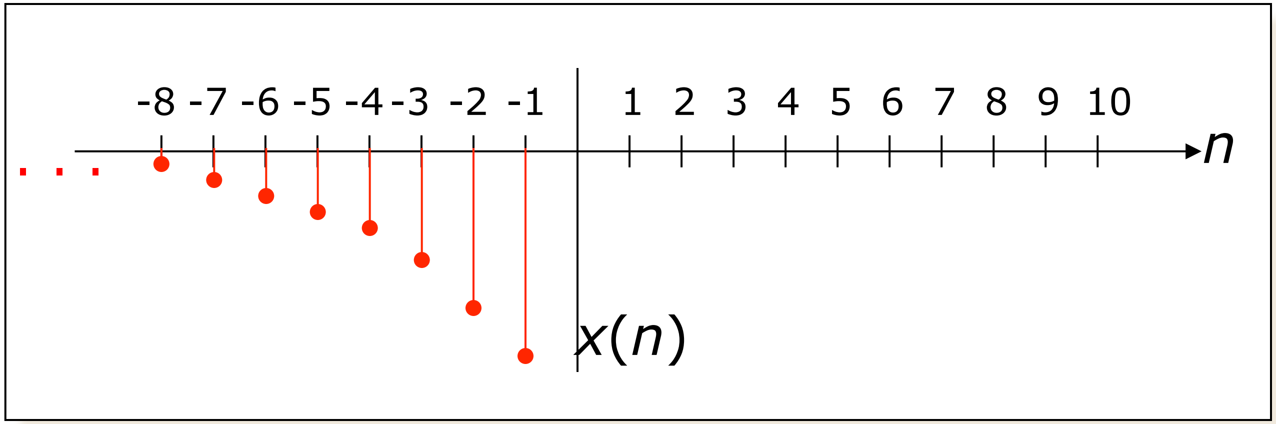
Laquelle est stable?





Exemple:

$$x(n) = -a^n u(-n-1)$$



Exemple:

$$\boxed{x(n) = -a^n u(-n-1)}$$

$$X(z) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(-n-1) z^{-n}$$

$$= -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n}$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} z^n$$

$$= 1 - \sum_{n=0}^{\infty} a^{-n} z^n$$

Pour la convergence de $X(z)$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a^{-1} z| < \infty \Rightarrow |a^{-1} z| < 1$$

$$\Rightarrow |z| < |a|$$

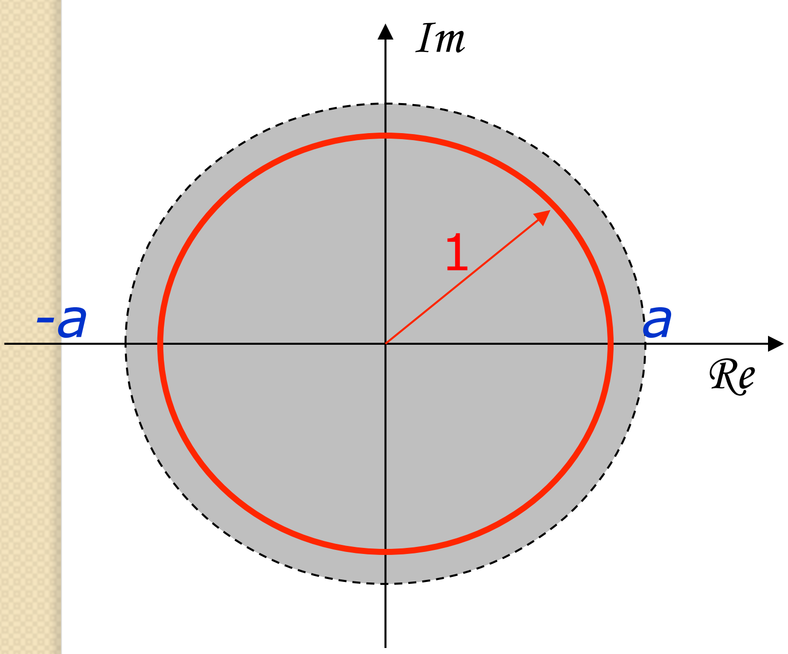
$$X(z) = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1} z)^n = 1 - \frac{1}{1 - a^{-1} z} = \frac{z}{z-a}$$

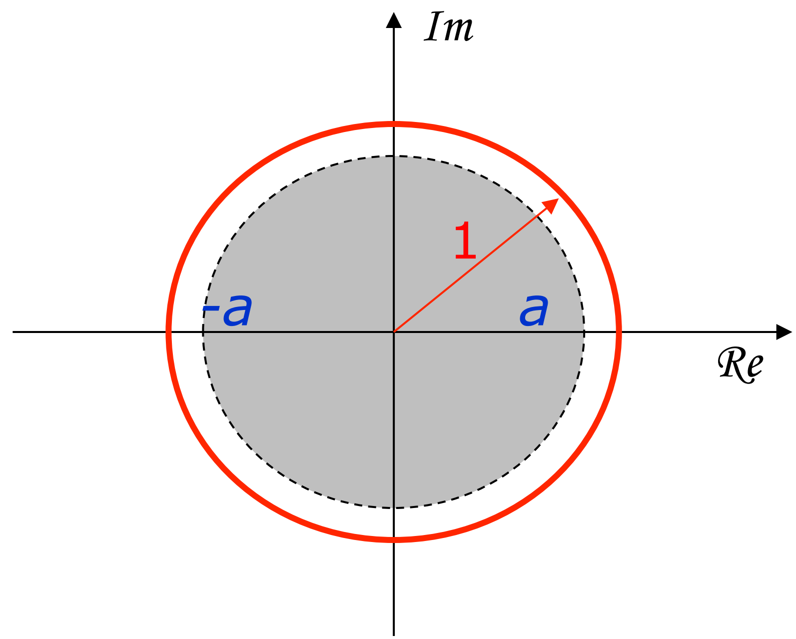
$$|z| < |a|$$

Exemple: RdC pour $x(n) = -a^n u(-n-1)$

$$X(z) = \frac{z}{z-a}, \qquad |z| < |a|$$

Laquelle est stable?

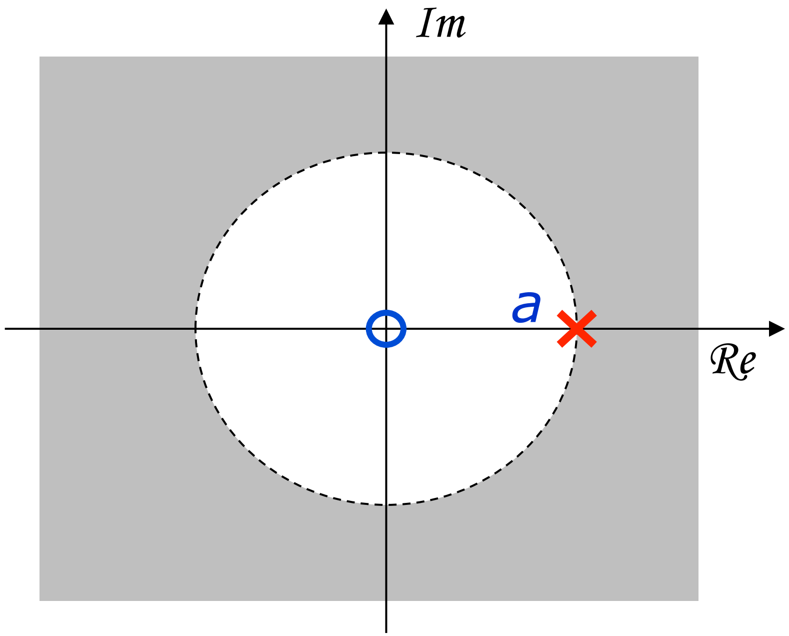




Région de Convergence

Exemple:

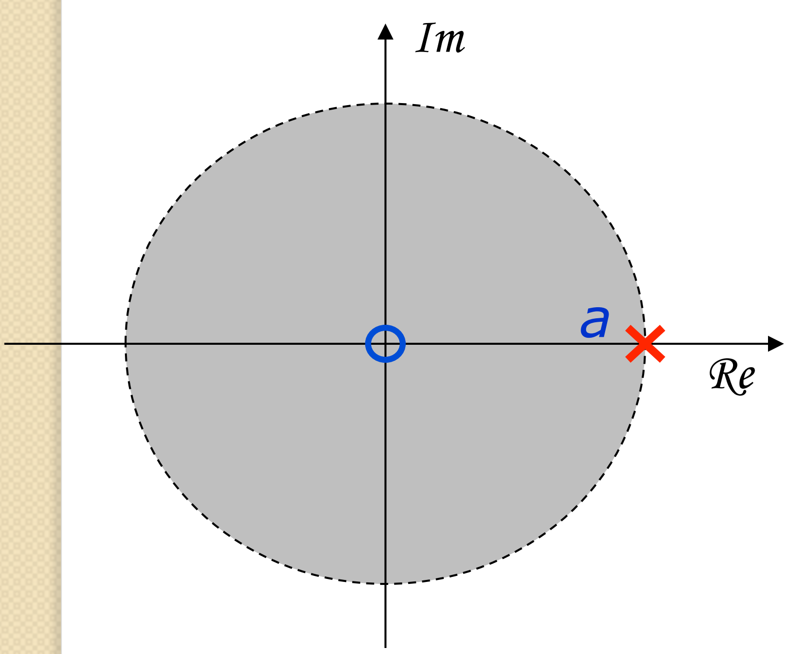
$$x(n) = a^n u(n) \Rightarrow X(z) = \frac{z}{z-a}, \qquad |z| > |a|$$



RdC est bornée par le pôle et elle extérieure au cercle.

Exemple:

$$x(n) = -a^n u(-n-1) \Rightarrow X(z) = \frac{z}{z-a}, \qquad |z| < |a|$$

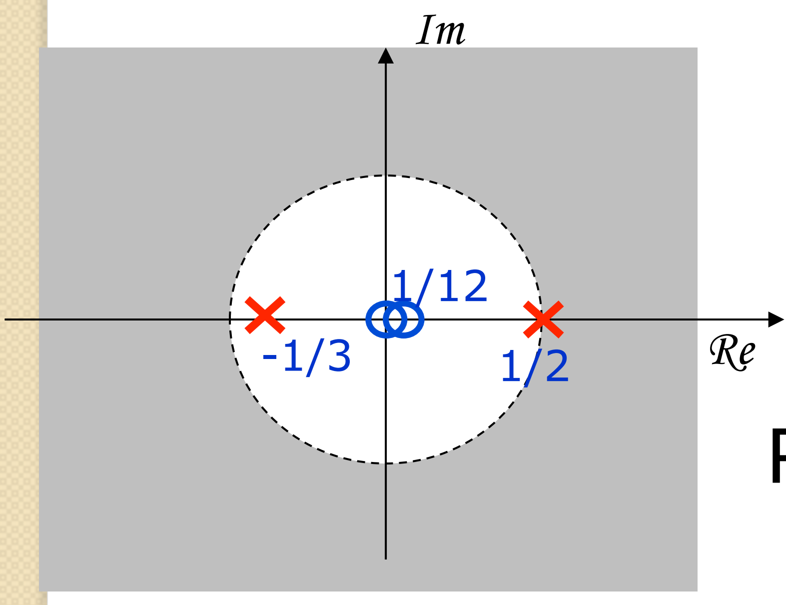


RdC est bornée par le pole et elle à L'intérieur du cercle.

Exemple:

$$x(n) = (\tfrac{1}{2})^n u(n) + (-\tfrac{1}{3})^n u(n)$$

$$X(z) = \frac{z}{z-\frac{1}{2}} + \frac{z}{z+\frac{1}{3}} = \frac{2z(z-\frac{1}{12})}{(z-\frac{1}{2})(z+\frac{1}{3})}$$



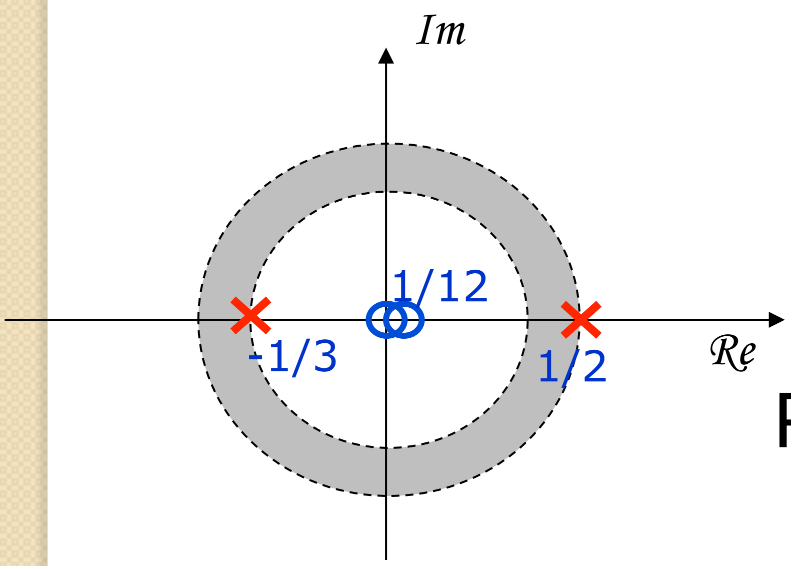
RdC est bornée par les pôles et elle est extérieure au cercle.

RdC ne contient aucun pôle.

Exemple:

$$x(n) = (-\tfrac{1}{3})^n u(n) - (\tfrac{1}{2})^n u(-n-1)$$

$$\Rightarrow \quad X(z) = \frac{z}{z+\frac{1}{3}} + \frac{z}{z-\frac{1}{2}} = \frac{2z(z-\frac{1}{12})}{(z+\frac{1}{3})(z-\frac{1}{2})}$$



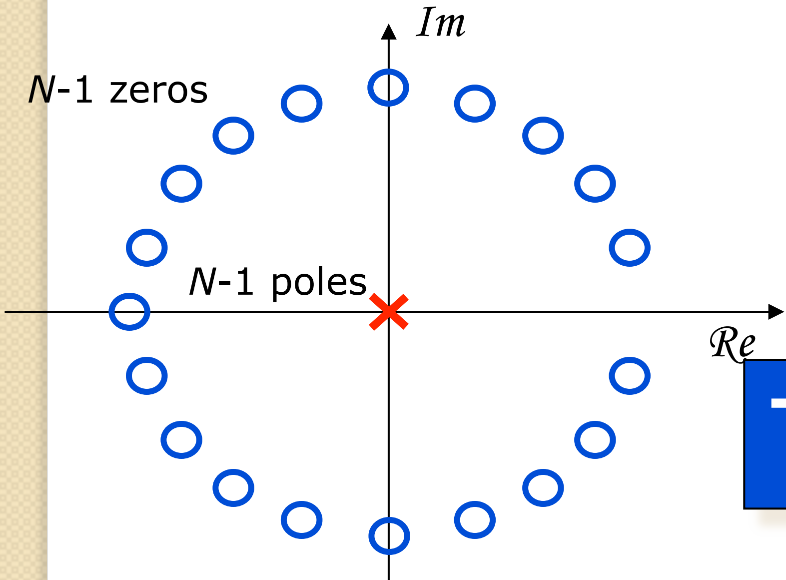
RdC est bornée par les poles et est un anneau.

RdC ne contient aucun pôle.

Exemple: Séquence Finie

$$x(n) = a^n, \qquad 0 \le n \le N-1$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} (az^{-1})^n = \frac{1-(az^{-1})^N}{1-az^{-1}} = \frac{1}{z^{N-1}} \frac{z^N - a^N}{z-a}$$



RdC: $0 < z < \infty$

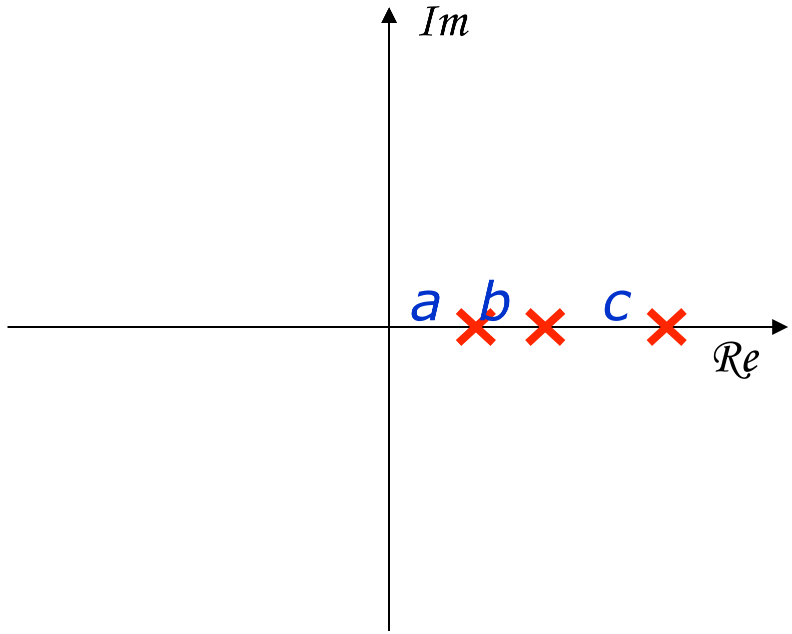
RdC ne contient aucun pôle.

Toujours Stable

Transformée en z

Considerons le transformée en z
Avec les poles :

Trouver la possible RdC

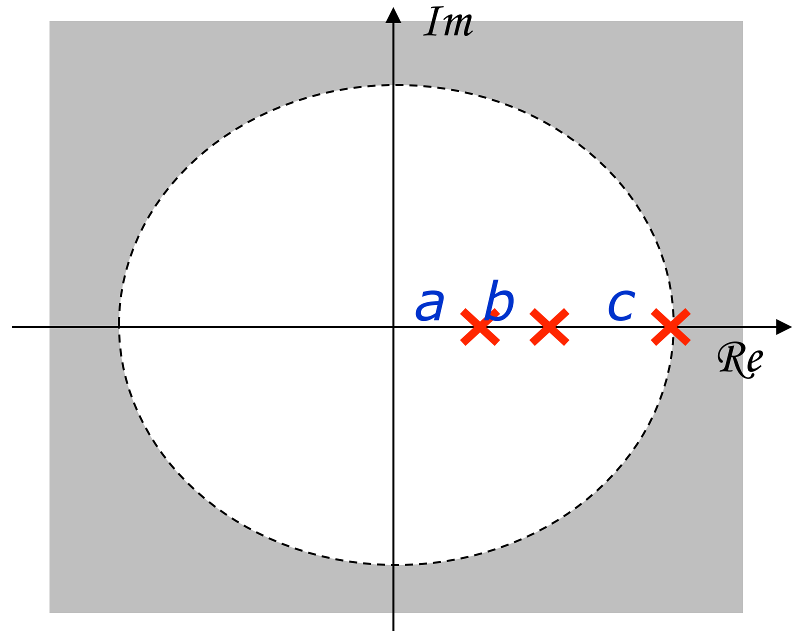


Transformée en z

Considerons le transformée en z

Avec les pôles :

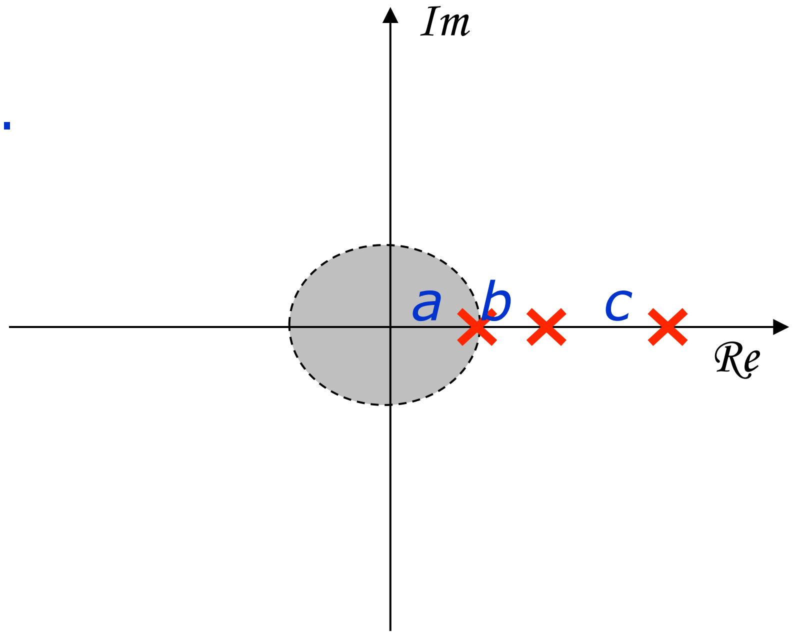
Cas 1: Séquence Droite .



Transformée en z

Considerons le transformée en z
Avec les poles :

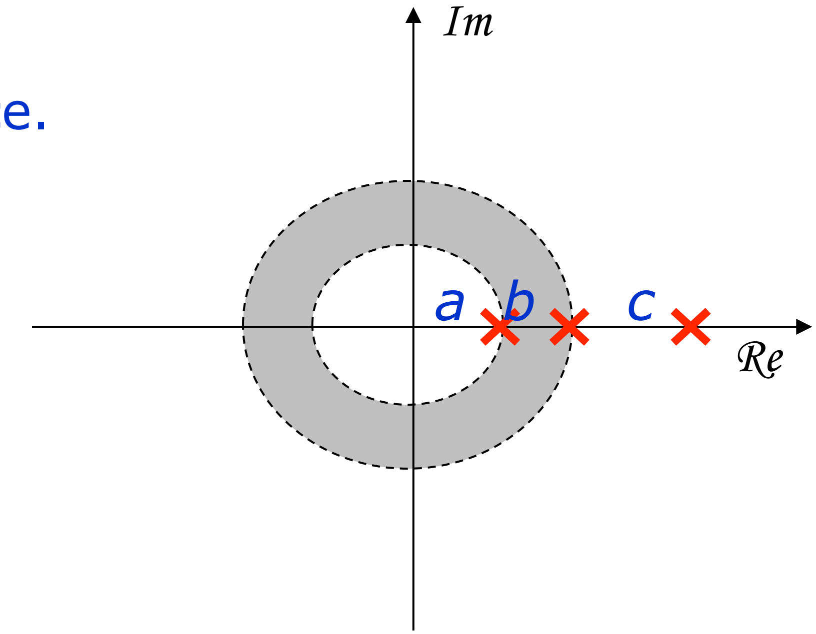
Case 2: Séquence Gauche .



Transformée en z

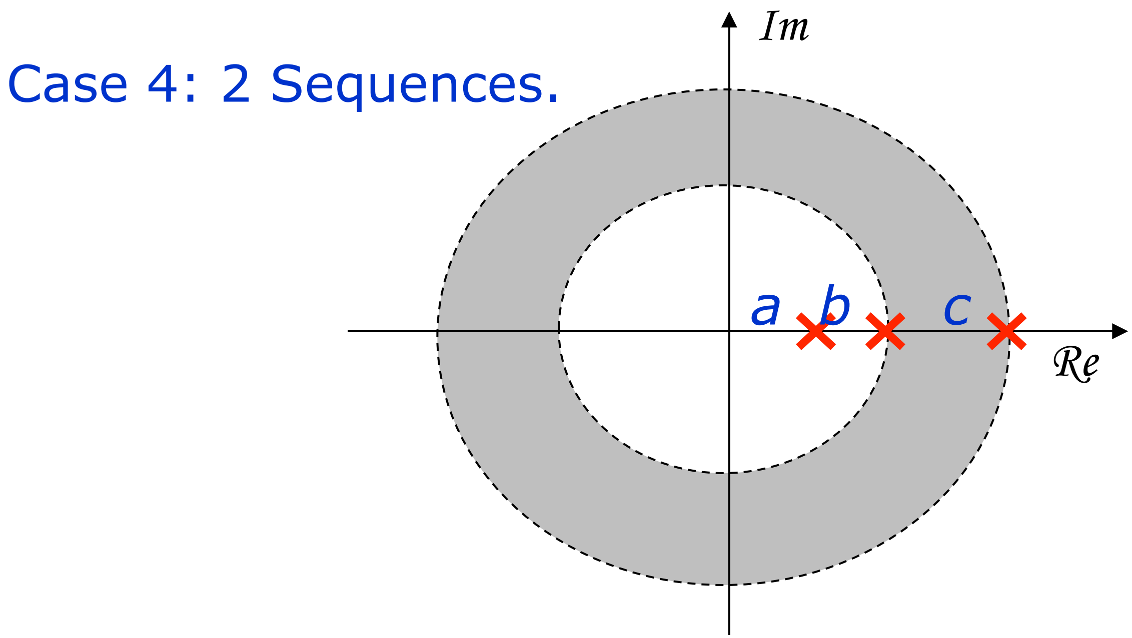
Considerons le transformée en z
Avec les poles :

Case 3: 2 Sequence.



Transformée en z

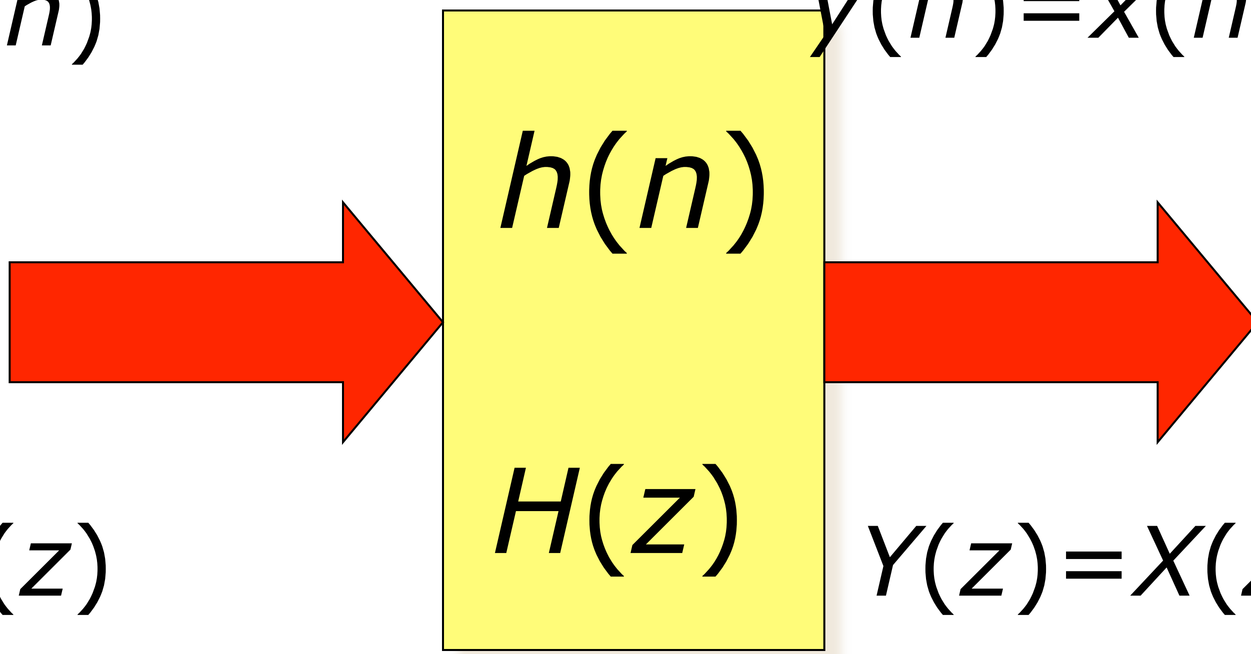
Considérons le transformée en z
Avec les pôles :



Système

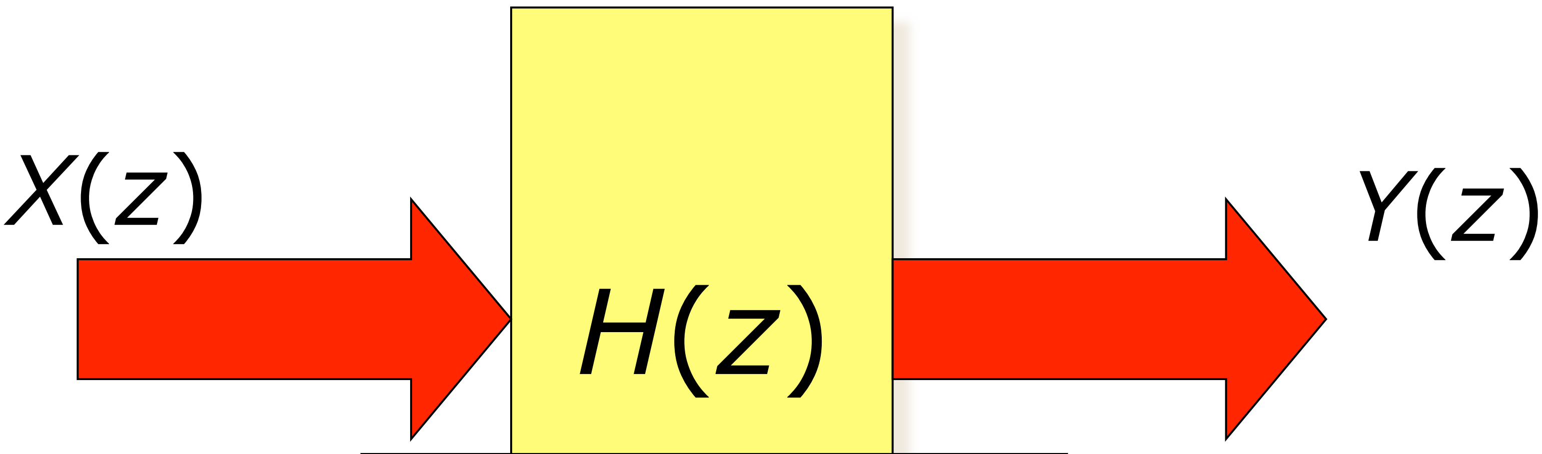
Système Invariant à la Translation

$x(n)$ $\quad y(n)=x(n)*h(n)$



$X(z)$ $\quad Y(z)=X(z)H(z)$

Système Invariant à la Translation



$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

Equation aux différences d'ordre N

$$\boxed{\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)}$$

$$\Rightarrow \quad Y(z)\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} = X(z)\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}$$

$$\boxed{H(z) = \sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r} \Big/ \sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

Représentation sous la forme Factorielle

Contribution des *pôles* en 0 et des *zéros* en c_r

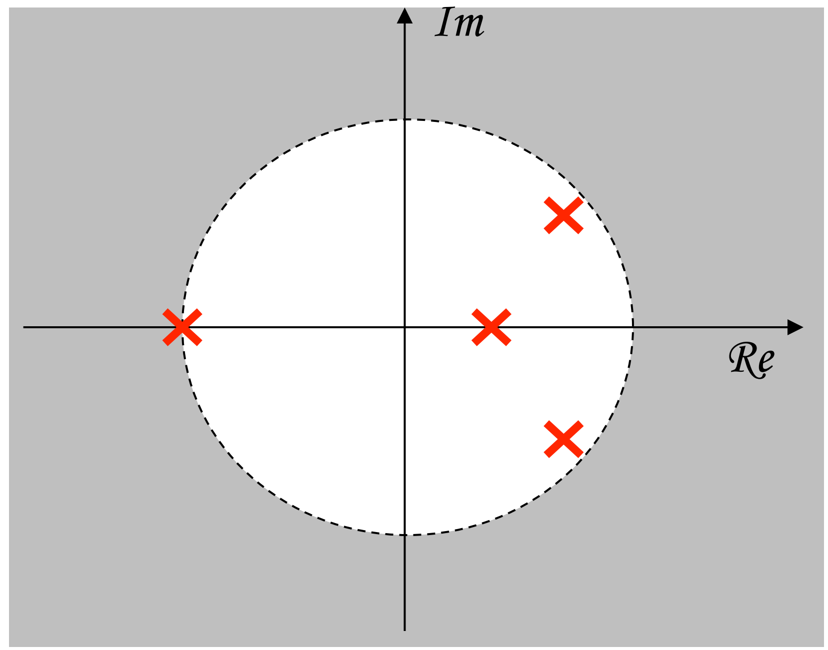
$$H(z) = \frac{A\prod_{r=1}^{M}(1 - c_r z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1 - d_r z^{-1})}$$

Contribution des *zéros* en 0 et *pôles* en d_r

Stabilité et Causalité

Systèmes Causaux:
RdC se trouve à l'extérieur du pôle le plus éloigné.

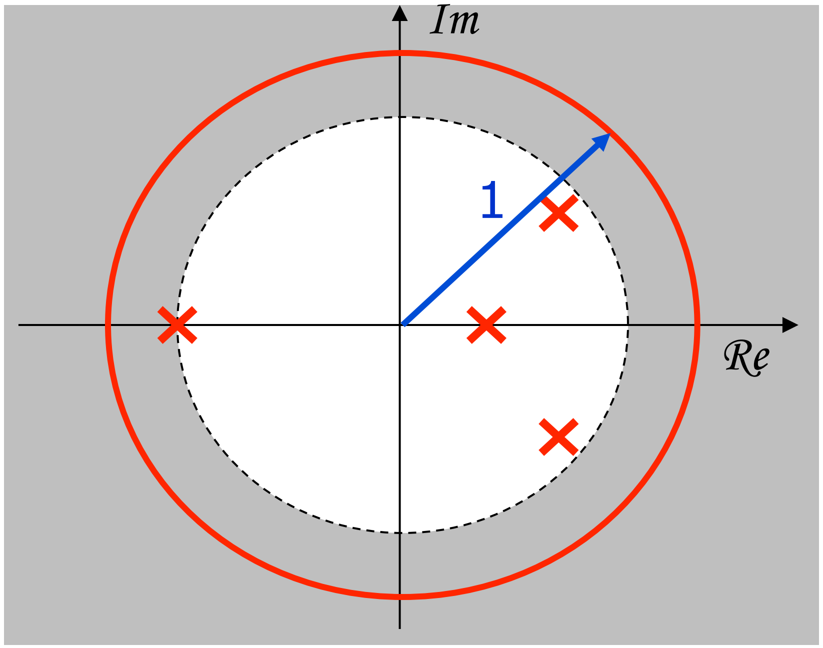
$$H(z) = \frac{A\prod_{r=1}^{M}(1-c_r z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1-d_r z^{-1})}$$



Stabilité et Causalité

Systèmes Stables : RdC contient le cercle unitaire .

$$H(z) = \frac{A\prod_{r=1}^{M}\left(1 - c_r z^{-1}\right)}{\prod_{k=1}^{N}\left(1 - d_r z^{-1}\right)}$$



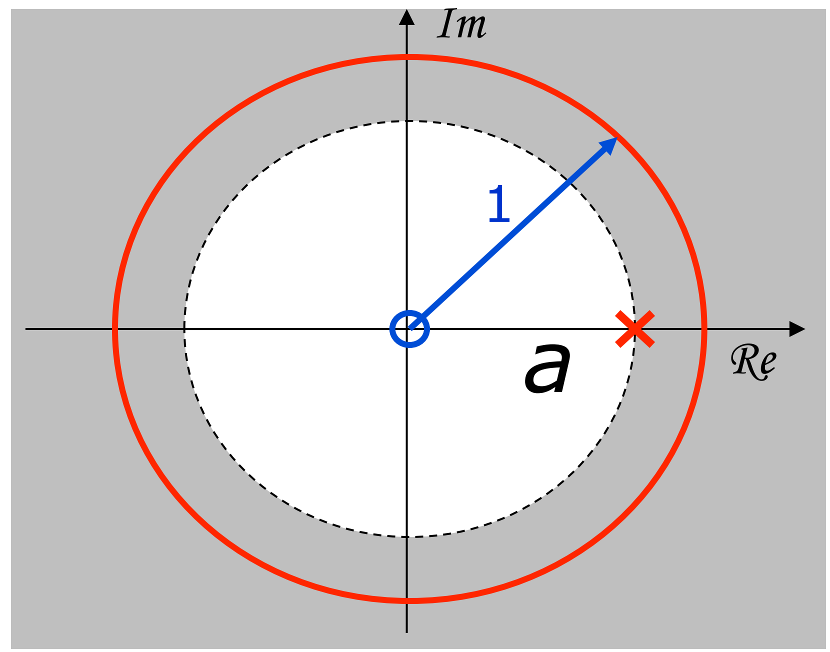
Exemple

Considérons le système causal caractérisé par :

$$y(n) = ay(n-1) + x(n)$$

$$\boxed{H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}}$$

$$h(n) = a^n u(n)$$



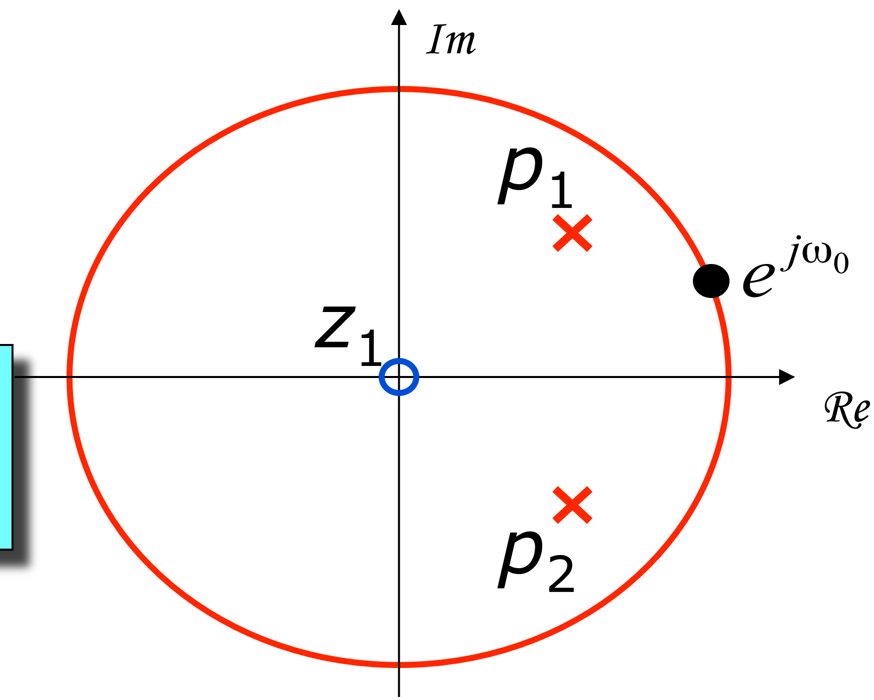
Détermination de la Réponse Fréquentielle à partir pôle-zéro

- Un système LIT est complètement caractérisé par ses pôle-zéro.

Exemple:

$$H(z) = \frac{z - z_1}{(z - p_1)(z - p_2)}$$

$$H(e^{j\omega_0}) = \frac{e^{j\omega_0} - z_1}{(e^{j\omega_0} - p_1)(e^{j\omega_0} - p_2)}$$



Détermination de la Réponse Fréquentielle à partir pôle-zéro

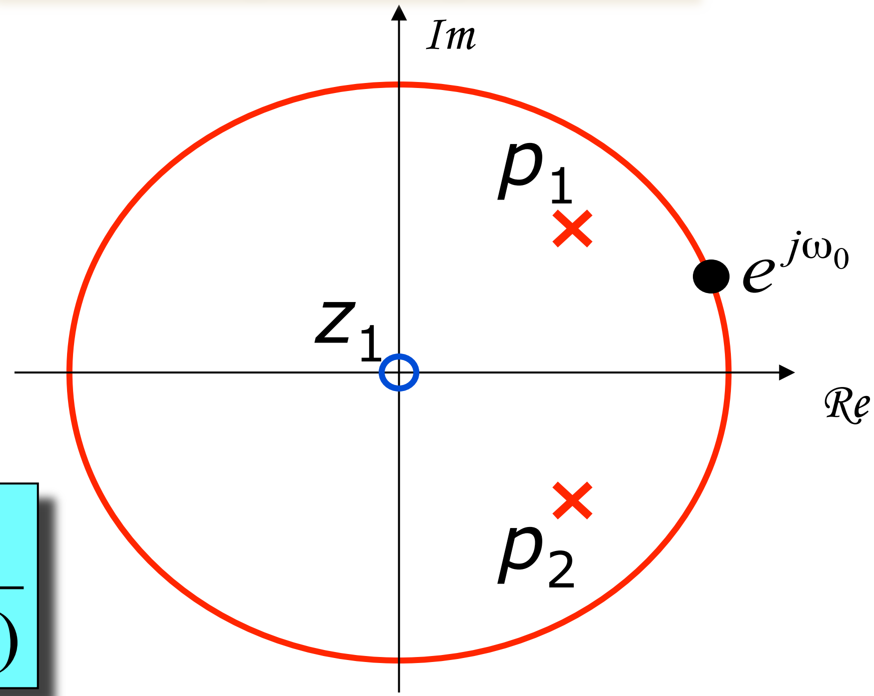
$$|H(e^{j\omega})| = ?$$

$$\angle H(e^{j\omega}) = ?$$

Exemple:

$$H(z) = \frac{z - z_1}{(z - p_1)(z - p_2)}$$

$$H(e^{j\omega_0}) = \frac{e^{j\omega_0} - z_1}{(e^{j\omega_0} - p_1)(e^{j\omega_0} - p_2)}$$



Détermination de la Réponse Fréquentielle à partir pôle-zéro

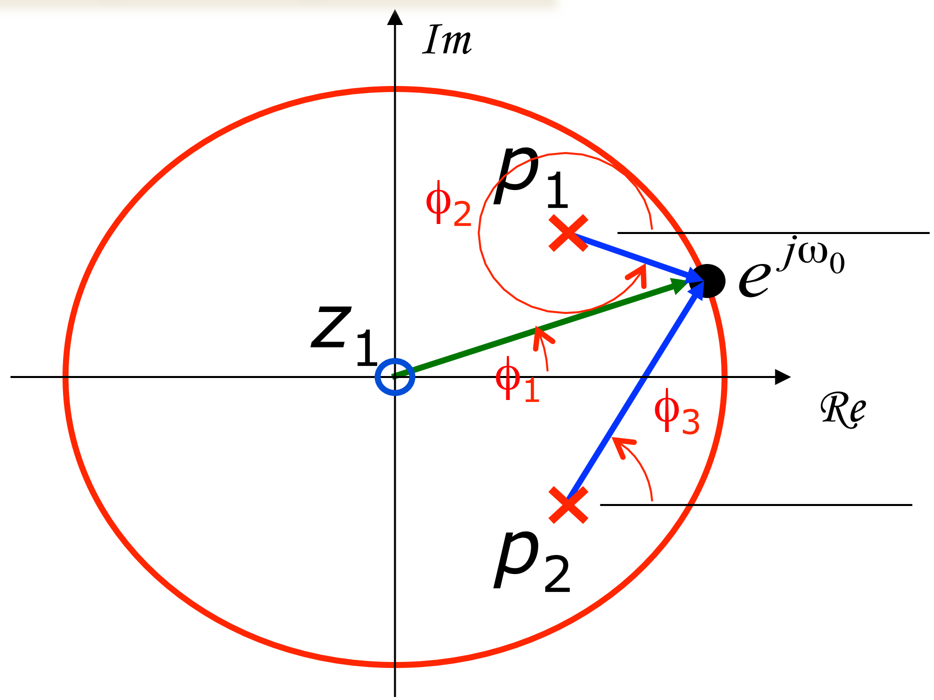
$|H(e^{j\omega})| = ?$

$\angle H(e^{j\omega}) = ?$

Example:

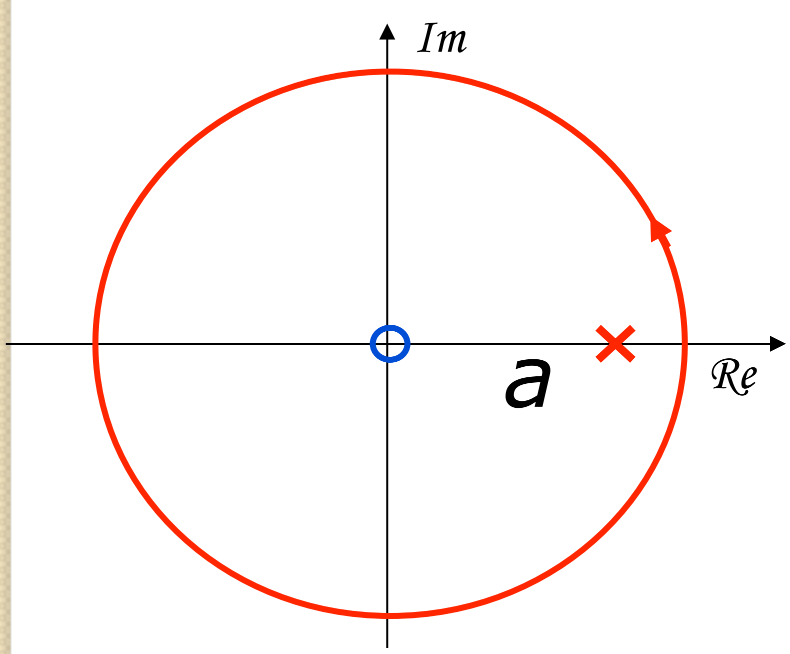
$$|H(e^{j\omega})| =$$

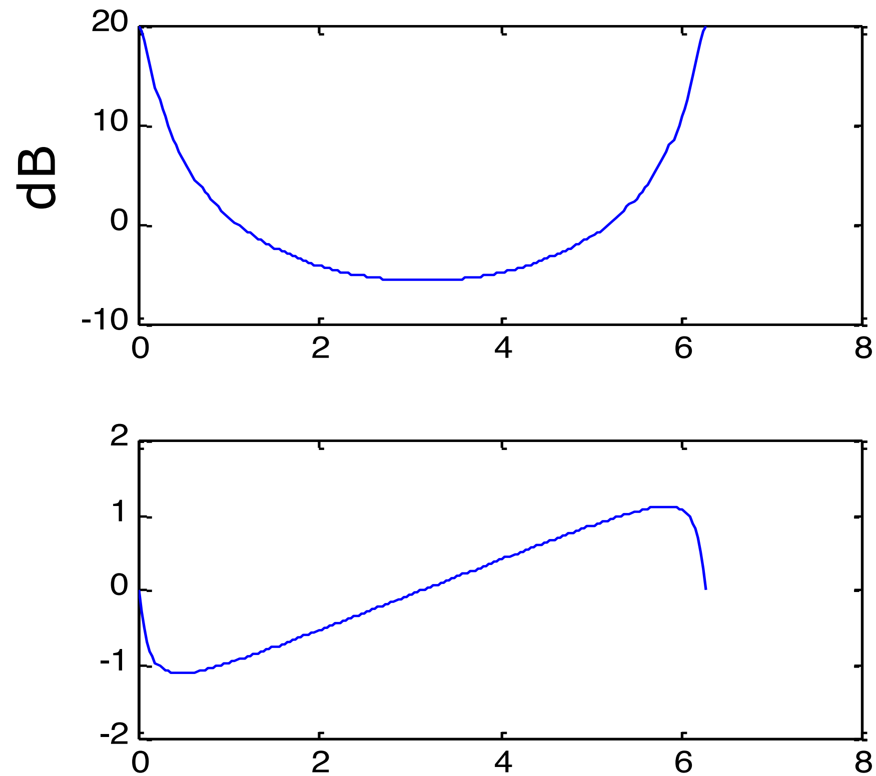
$$\angle H(e^{j\omega}) = \phi_1 - (\phi_2 + \phi_3)$$



Exemple

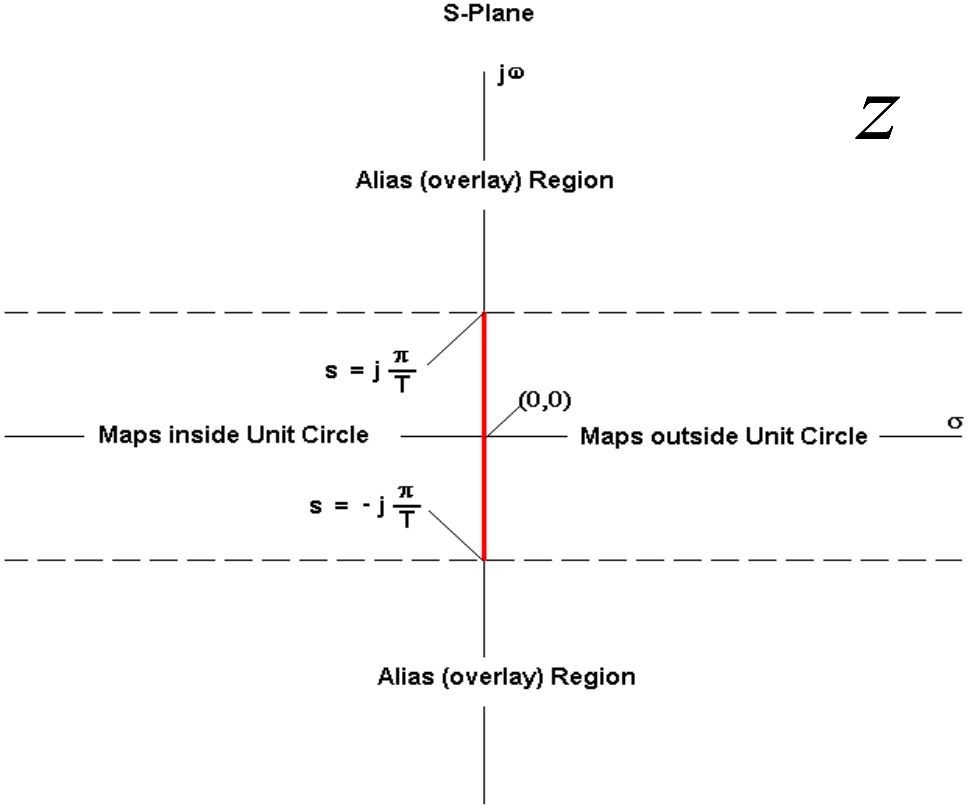
$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

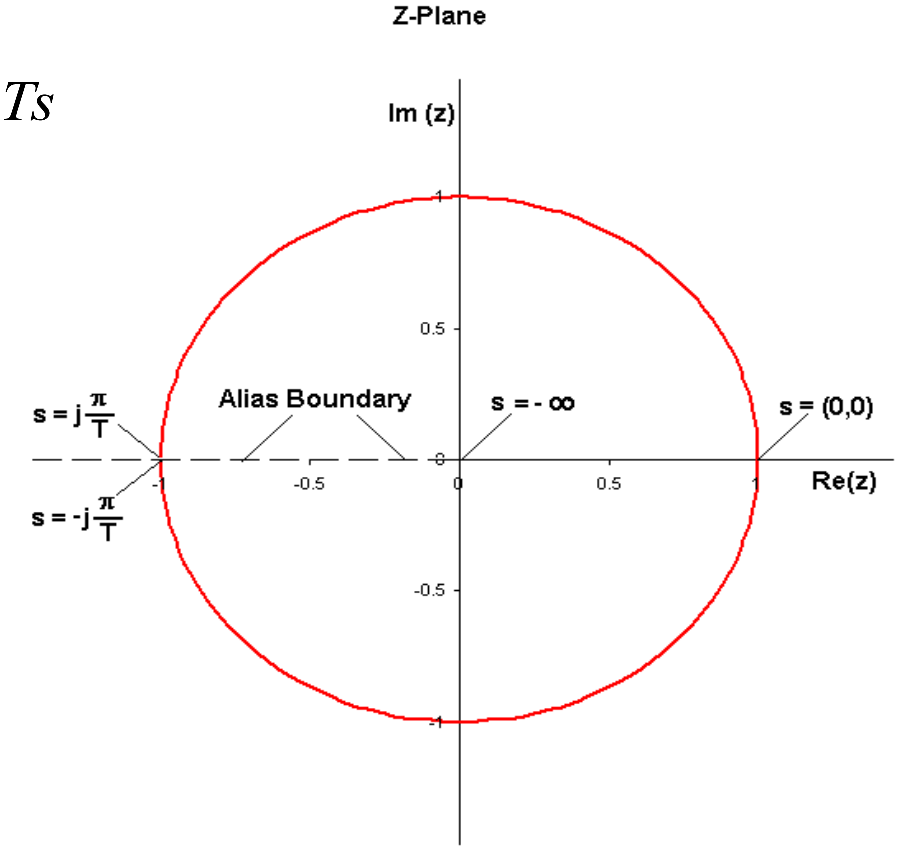




Du S/P-Plan au Plan z

$$z = e^{Ts}$$





“Mapping” Poles et Zeros

A un point du plan Z, $re^{j\theta}$ ont lui fait correspondre un point dans le plan S/P en utilisant les relations :

$$\mathrm{Re}\{s\} = \frac{\ln(r)}{T} \qquad \mathrm{Im}\{s\} = \frac{\theta}{T}$$

Les racines conjuguées vont générer un polynôme de la forme :

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$$

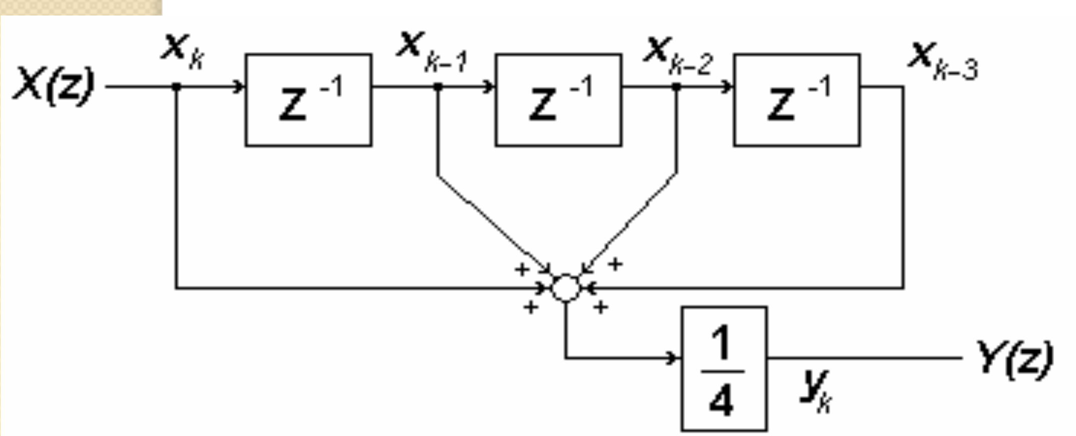
$$\omega_n = \frac{\theta}{T}\sqrt{1 + \left(\frac{\ln(r)}{\theta}\right)^2} \qquad \zeta = \frac{-\ln(r)}{\omega_n T}$$

Algorithme de Calcul de la Moyenne

$$y_k = \frac{x_k + x_{k-1} + x_{k-2} + x_{k-3}}{4}$$ (Non-Recursif)

$$Y(z) = X(z)\frac{1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}}{4} = X(z)\frac{z^3 + z^2 + z + 1}{4z^4}$$ Transformée en Z

Block Diagram



Function de Transfert

$$\frac{Y}{X}(z) = \frac{z^3 + z^2 + z + 1}{4z^4}$$

Remarque: Chaque [Z^{-1}] block peut être vu comme un élément mémoire qui mémorise la valeur précédemment utilisée

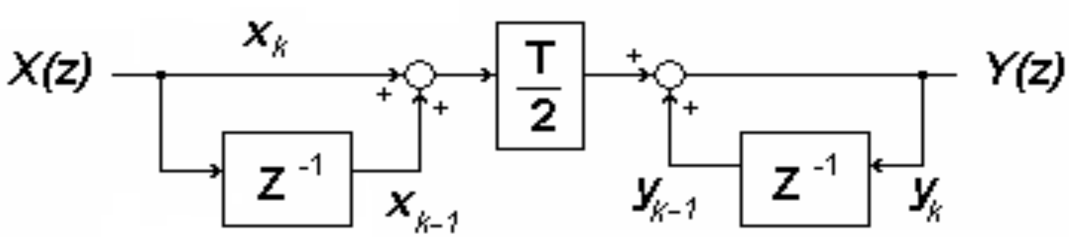
Intégrateur Trapézoïdal

$$y_k = y_{k-1} + \left[x_k + x_{k-1}\right]\frac{T}{2}$$ (R. Recursive)

$$Y(z) = z^{-1}Y(z) + \left[X(z) + z^{-1}X(z)\right]\frac{T}{2}$$ Transformée en z

$$Y(z) = X(z)\left[\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}\right]\frac{T}{2} = X(z)\left[\frac{z+1}{z-1}\right]\frac{T}{2}$$

Block

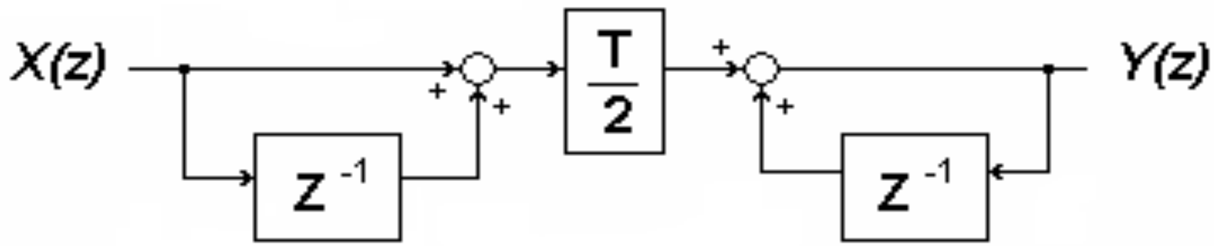


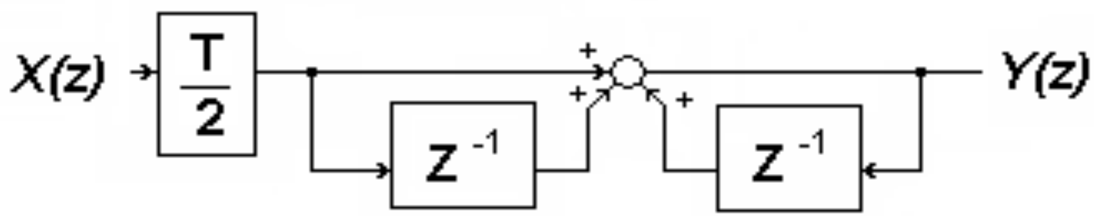
Fonction de Transfer

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{T}{2}\left[\frac{z+1}{z-1}\right]$$

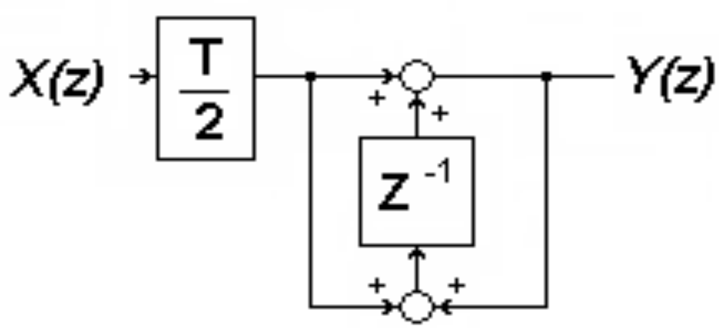
Manipulation des "Block Diagram"

Structure Intuitive



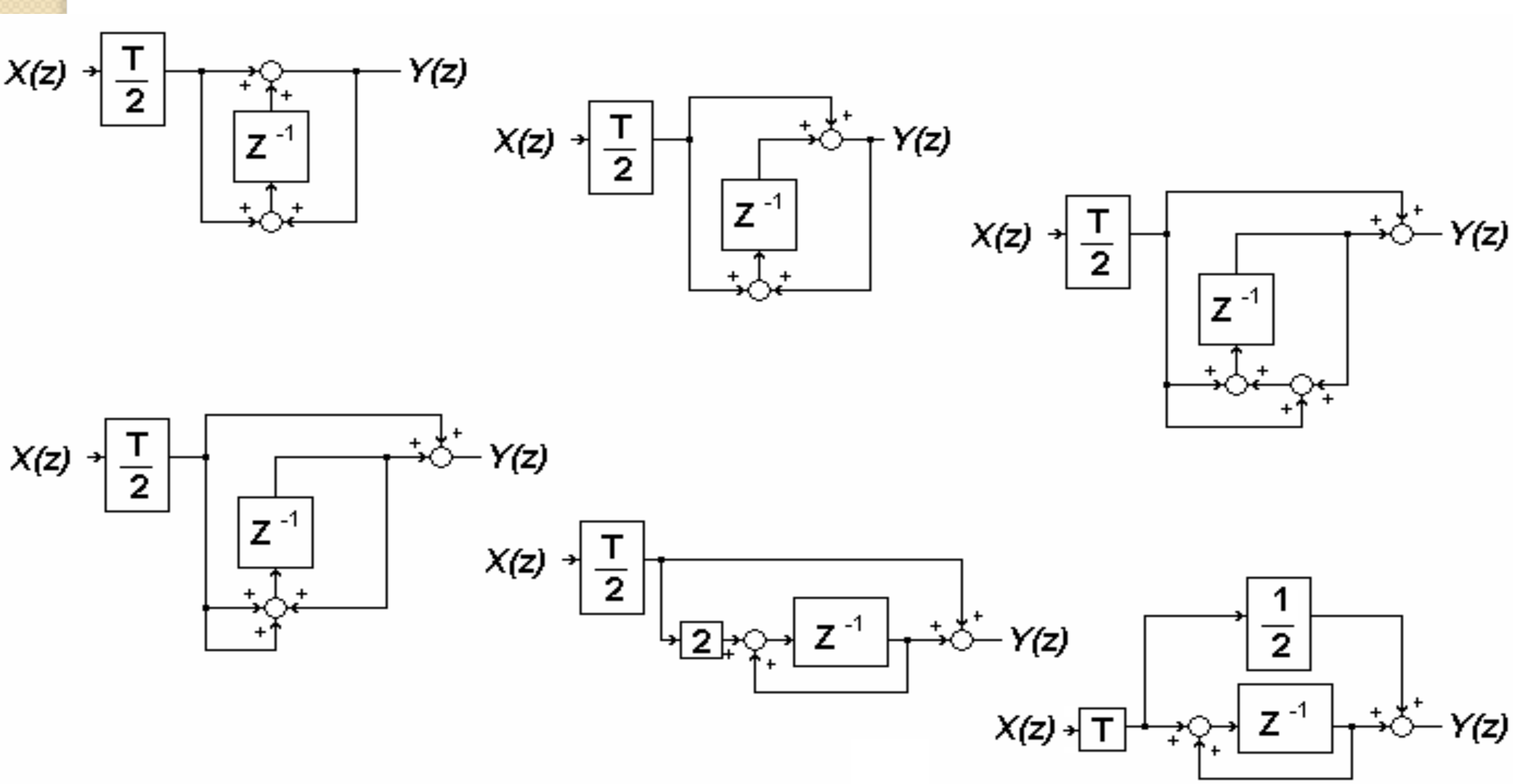


Structure Equivalente



La représentation explicite de x_{k-1} et y_{k-1} est perdu, mais il y a une réduction du nombre d'éléments mémoire

Manipulation de “Block Diagram”



$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{T}{2}\left[\frac{z+1}{z-1}\right]$$

La Transformée en z Inverse

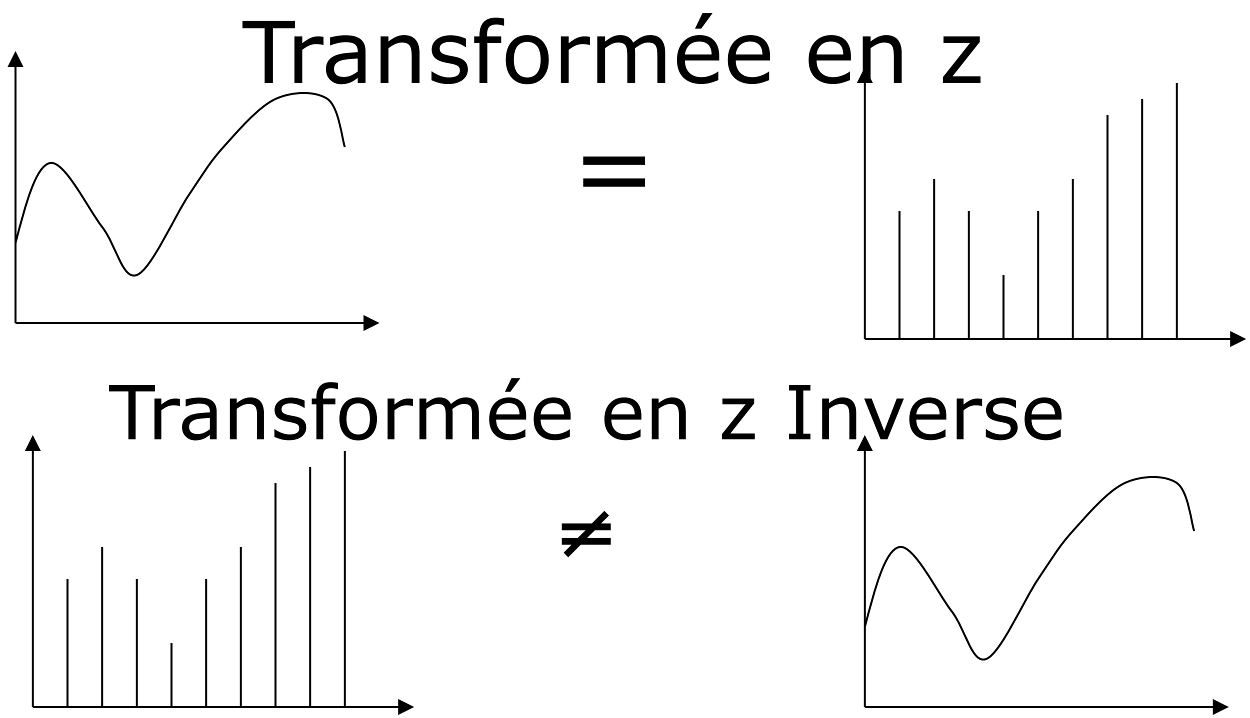
Transformée en z Inverse

La transformée en z Inverse: Z^{-1}.

$$F(z) = Z[f(kT)] = Z[f(t)] = \frac{b_o + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots b_m z^{-m}}{1 + a_o z^{-1} + a_1 z^{-2} + \cdots a_n z^{-n}}$$

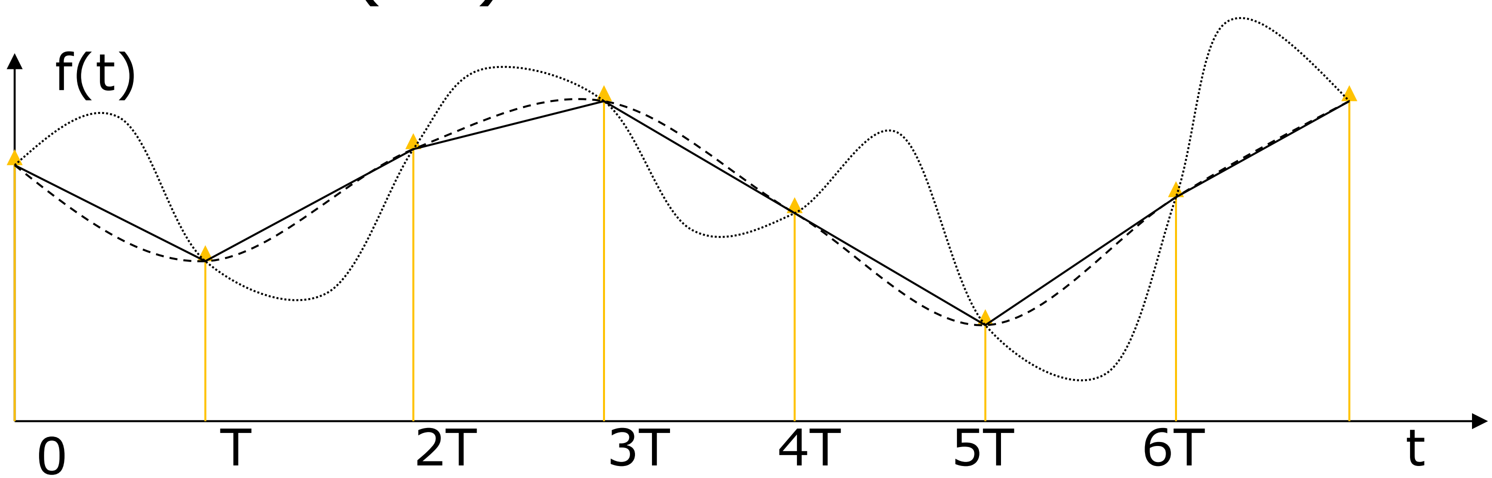
$$f(kT) = Z^{-1}[F(z)] = Z^{-1}\left[\frac{b_o + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots b_m z^{-m}}{1 + a_o z^{-1} + a_1 z^{-2} + \cdots a_n z^{-n}}\right]$$

Transformée en z Inverse

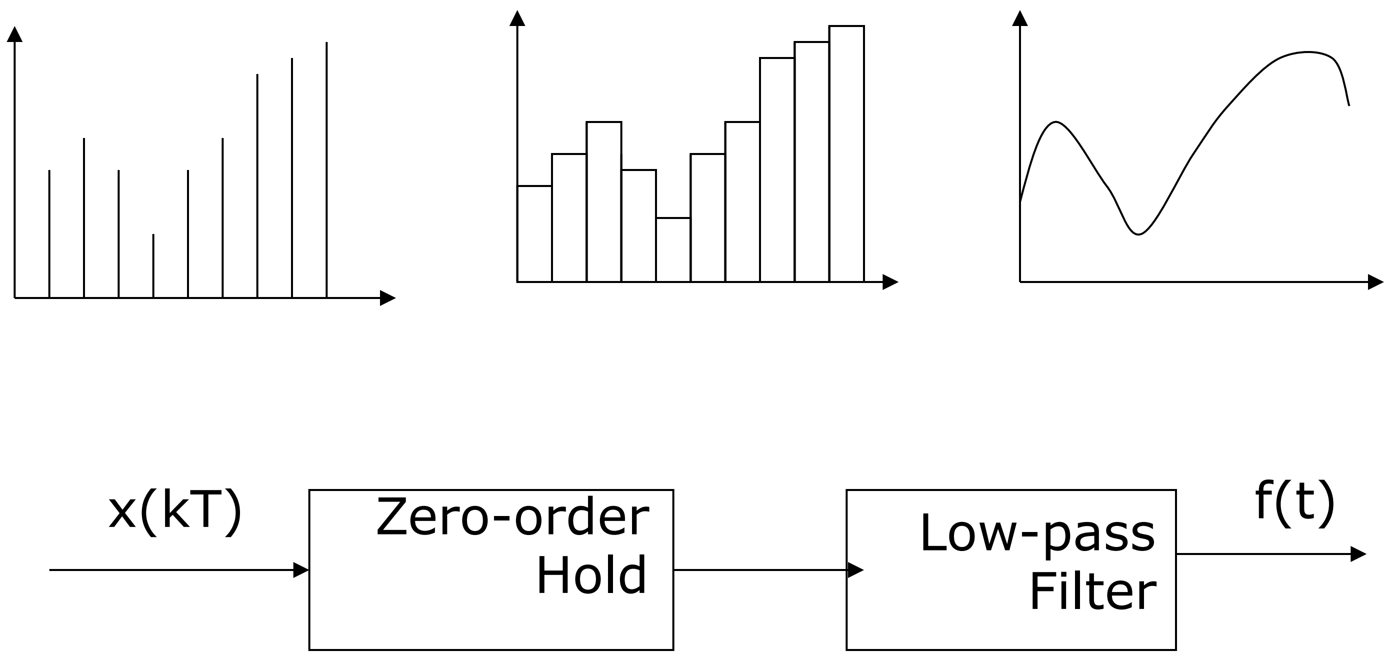


Transformée en z Inverse

La Transformée en z Inverse permet de retrouver la série temporelle f(kt) uniquement. Par contre ne permet pas de retrouver le signal d'origine. De nombreuses fonctions f(t) sont candidates pour une f(kT) donnée.



2.4 Transformée en z Inverse



Transformée en z : exemples

Supposon $f(k)=0$ for $k<0$, calculer la Transformée en z de :

$f(k)=9k(2^{k-1})-2^{k}+3$, $k=0,1,2\ldots.$

Transformée en z : exemples

$$F(z) = Z[9k(2^{k-1}) - 2^k + 3] = Z[9k(2^{k-1})] - Z[2^k] + Z[3]$$

$$Z[a^t f(t)] = F\left(\frac{z}{a}\right); \quad \mathrm{Z}[1] = \frac{1}{1 - \mathrm{z}^{-1}} = \frac{z}{z-1}; \quad \mathrm{Z}[\mathrm{t}] = \frac{\mathrm{Tz}^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} = \frac{Tz}{(z-1)^2}$$

$$Z[2^k] = Z[2^k \times 1] = \frac{z/2}{z/2 - 1} = \frac{1}{1 - 2z^{-1}}$$

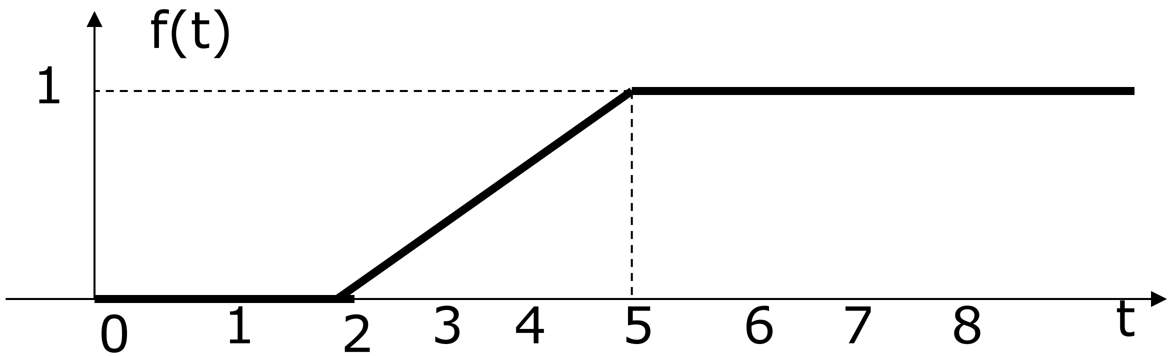
$$Z[9k(2^{k-1})] = Z[9k2^k2^{-1}] = \frac{9}{2}Z[k2^k] = \frac{9}{2}\frac{(z/2)}{(\mathrm{z/2} - 1)^2} = \frac{9z^{-1}}{(1 - 2z^{-1})^2}$$

$$F(z) = Z[9k(2^{k-1})] - Z[2^k] + Z[3] = \frac{9z^{-1}}{(1 - 2z^{-1})^2} - \frac{1}{1 - 2z^{-1}} + \frac{3}{1 - z^{-1}}$$

$$= \frac{2 + z^{-2}}{(1 - 2z^{-1})^2(1 - z^{-1})}$$

Transformée en z : examples

Calculer la Transformée en z de la courbe x(t) ci-dessous.



Transformée en z : examples

Solution: A partir de la figure, nous avons

K	0	1	2	3	4	5	6…
f(k)	0	0	0	1/3	2/3	1	1…

La définition de la Transformée en z :

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k} = 0 + 0 + 0 + \frac{z^{-3}}{3} + \frac{2z^{-4}}{3} + z^{-5} + z^{-6} + \cdots$$

$$= \frac{z^{-3} + 2z^{-4}}{3} + z^{-5}(1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots)$$

$$= \frac{z^{-3} + 2z^{-4}}{3} + \frac{z^{-5}}{1 - z^{-1}} = \frac{z^{-3} + z^{-4} + z^{-5}}{3(1 - z^{-1})}$$

Transformée en z : exemples

Calculer la Transformée en z de $F(s) = \dfrac{a^2}{s^2(s+a)}$

Solution: Décomposition en fractions élémentaires.

$$F(s) = \frac{a^2}{s^2(s+a)} = \frac{k_1}{s^2} + \frac{k_2}{s} + \frac{k_3}{s+a} = \frac{a}{s^2} + \frac{-1}{s} + \frac{1}{s+a}$$

$$F(z) = Z[F(s)] = Z[\frac{a}{s^2}] - Z[\frac{1}{s}] + Z[\frac{1}{s+a}]$$

$$= \frac{aTz^{-1}}{(1-z^{-1})^2} - \frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}$$

$$= \frac{[(aT - 1 + e^{-aT}) + (1 - e^{-aT} - aTe^{-aT})z^{-1}]z^{-1}}{(1-z^{-1})^2(1-e^{-aT}z^{-1})}$$

Méthodes pour le calcul Transformée en z Inverse

Exemple 1: $F(z)=1/(1-z^{-1})$, calculer $f(kT)$.

Tableau de Transformées en z

$F(z)=1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}+\ldots$

$f(kT)=Z^{-1}[F(z)]=1$, for $k=0, 1, 2, \ldots$

Transformée en z Inverse : exemples

Soit

$$F(z)=\frac{(1-e^{-aT})z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-e^{-aT}z^{-1})}$$

Trouver f(kT).

Solution: décomposition en fraction élémentaire

$$F(z)=\frac{(1-e^{-aT})z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-e^{-aT}z^{-1})}=\frac{k_1}{1-z^{-1}}+\frac{k_2}{1-e^{-aT}z^{-1}}$$

Détermination de k_1 et k_2

Transformée en z Inverse : exemples

$$F(z)=\frac{(1-e^{-aT})z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-e^{-aT}z^{-1})}=\frac{k_1}{1-z^{-1}}+\frac{k_2}{1-e^{-aT}z^{-1}}$$

Multiplie (1-z^{-1}) et remplacer z^{-1}=1, nous avons

$$(1-z^{-1})\frac{(1-e^{-aT})z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-e^{-aT}z^{-1})}=(1-z^{-1})\left(\frac{k_1}{1-z^{-1}}+\frac{k_2}{1-e^{-aT}z^{-1}}\right)$$

$$\frac{(1-e^{-aT})z^{-1}}{1-e^{-aT}z^{-1}}=k_1+\frac{(1-z^{-1})k_2}{1-e^{-aT}z^{-1}}\Rightarrow k_1=\left.\frac{(1-e^{-aT})z^{-1}}{1-e^{-aT}z^{-1}}\right|_{z^{-1}=1}=1$$

Transformée en z Inverse : exemples

Similaire multiplication par (1-e^{-aT}z^{-1} et z^{-1} =e^{aT}, alors :

$$(1-e^{-aT}z^{-1})\frac{(1-e^{-aT})z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-e^{-aT}z^{-1})} = (1-e^{-aT}z^{-1})\left(\frac{k_1}{1-z^{-1}} + \frac{k_2}{1-e^{-aT}z^{-1}}\right)$$

$$\frac{(1-e^{-aT})z^{-1}}{1-z^{-1}} = \frac{(1-e^{-aT}z^{-1})k_1}{1-z^{-1}} + k_2 \Rightarrow k_2 = \left.\frac{(1-e^{-aT})z^{-1}}{1-z^{-1}}\right|_{z^{-1}=e^{aT}} = -1$$

Finalement

$$F(z) = \frac{(1-e^{-aT})z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-e^{-aT}z^{-1})} = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}$$

$$f(kT) = 1-e^{-akT}, \quad \mathrm{k} = 0, 1, 2, \cdots$$

Transformée en z Inverse : exemples

Soit la transformée en z

$$F(z) = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})(1+1.3z^{-1}+0.4z^{-2})}$$

Determiner la valeur initiale et finale de f(kT),

.

Transformée en z Inverse : exemples

2) Methode de la division-directe :

Exemple 1: $F(z)=1/(1+z^{-1})$, trouver les $f(kT)$.

$$
\begin{array}{r|l}
1+z^{-1} & 1 \quad\quad \overline{1} \\
 & 1+z^{-1} \\
 & -z^{-1}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
1+z^{-1} & 1 \quad\quad \overline{1-z^{-1}} \\
 & 1+z^{-1} \\
 & -z^{-1} \\
 & -z^{-1}-z^{-2} \\
 & +z^{-2}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
1+z^{-1} & 1 \quad\quad \overline{1-z^{-1}+z^{-2}-\cdots} \\
 & 1+z^{-1} \\
 & -z^{-1} \\
 & -z^{-1}-z^{-2} \\
 & +z^{-2}
\end{array}
$$

Transformée en z Inverse : exemples

On obtient : $F(z)=1-z^{-1}+z^{-2}-z^{-3}+\dots$

K =	0	1	2	3	…
F(kT)=	1	-1	1	-1	

Exemple 2: Soit $$F(z)=\frac{1+2z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$,

Trouver f(kT).

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1+4z^{-1}+7z^{-2}+\cdots \\
\hline
1-2z^{-1}+z^{-2} & 1+2z^{-1} \\
 & 1-2z^{-1}+z^{-2} \\
 & \quad 4z^{-1}-z^{-2} \\
 & \quad 4z^{-1}-8z^{-2}+4z^{-3} \\
 & \qquad 7z^{-2}-4z^{-3} \\
 & \qquad 7z^{-2}-14z^{-3}+7z^{-4} \\
 & \qquad\quad 10z^{-3}-7z^{-4} \\
 & \qquad\quad 10z^{-3}-20z^{-4}+10z^{-5} \\
 & \qquad\qquad 13z^{-4}-10z^{-5} \\
 & \qquad\qquad \cdots
\end{array}
$$

Transformée en z Inverse : exemples

$$F(z)=1+4z^{-1}+7z^{-2}+10z^{-3}+\ldots$$

K =	0	1	2	3	…
F(kT)=	1	4	7	10…	

Exercice : ,

$$F(z)=\frac{0.3679z^{-1}+0.343z^{-2}-0.02221z^{-3}-0.05659z^{-4}}{1-1.3679z^{-1}+0.3679z^{-2}}$$

f(kT).

Ans. :k	0	1	2	3	4	5…
f(kT)	0	0.3679	0.8463	1	1	1…

Transformée en z Inverse : exemples

Matlab

Soit $F(z) = \dfrac{1+2z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$ calculer f(kT).

Solution: $F(z) = \dfrac{1+2z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} = \dfrac{z^2+2z}{(z-1)^2} = \dfrac{z^2+2z}{z^2-2z+1}$

num=[1 2 0]; den=[1 –2 1]

f(kT)=? pour k=0 à 30

u=[1 zeros(1,30)]; F=filter(num, den, u)

1 4 7 10 13 16 19 22 25 28 31…

2.5 Transformée en z Inverse : exemples

Soit $$F(z) = \frac{z^{-1}(0.5 - z^{-1})}{(1 - 0.5z^{-1})(1 - 0.8z^{-1})^2}$$

R : $x(k) = -8.3333(0.5)^k + 8.333(0.8)^k - 2k(0.8)^{k-1}$

$x(k) = 0; 0.5; 0.05; -0.615; -1.2035; -1.6257; -1.8778\ldots$

Exercice 4: Soit la Transformée-z

$$F(z) = \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 + 1.3z^{-1} + 0.4z^{-2})}$$

Determiner la valeur finale et initiale f(kT), et la transformée-z inverse de F(z).

Solution: Appliquer le theoreme de la v.f. et v.i.

$$f(0)=\lim_{z\to\infty}F(z)=\lim_{z\to\infty}\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})(1+1.3z^{-1}+0.4z^{-2})}=0$$

$$f(\infty)=\lim_{z\to 1}[(1-z^{-1})F(z)]=\lim_{z\to\infty}\frac{(1-z^{-1})z^{-1}}{(1-z^{-1})(1+1.3z^{-1}+0.4z^{-2})}=\frac{1}{2.7}$$

$$F(z)=\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})(1+1.3z^{-1}+0.4z^{-2})}=\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})(1+0.8z^{-1})(1+0.5z^{-1})}$$

$$=\frac{k_1}{1-z^{-1}}+\frac{k_2}{1+0.5z^{-1}}+\frac{k_3}{1+0.8z^{-1}}=\frac{0.37}{1-z^{-1}}+\frac{1.11}{1+0.5z^{-1}}-\frac{1.48}{1+0.8z^{-1}}$$

$$f(k)=\frac{1}{27}(1+3(-0.5)^k-4(-0.8)^k)$$

Exercice 5: Soit

$$F(z)=\frac{0.3679z^{-1}+0.343z^{-2}-0.02221z^{-3}-0.05659z^{-4}}{1-1.3679z^{-1}+0.3679z^{-2}}$$

Trouver f(kT) en utilisant la division "directe" .

Solution:

$$\begin{array}{r|l}
 & 0.3679z^{-1} \\
\hline
1-1.3679z^{-1}+0.3679z^{-2} & 0.3679z^{-1}+0.343z^{-2}-0.02221z^{-3}-0.0565z^{-4} \\
 & 0.3679z^{-1}-0.5033z^{-2}+0.1354z^{-3} \\
 & \qquad\qquad 0.8463z^{-2}-0.1576z^{-3}-0.0565z^{-4}
\end{array}$$

Continuous

$$
\begin{array}{r}
0.3679z^{-1} + 0.8463z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} \cdots \\
1-1.3679z^{-1}+0.3679z^{-2} \overline{\big) 0.3679z^{-1} + 0.343z^{-2} - 0.02221z^{-3} - 0.0565z^{-4}} \\
0.3679z^{-1} - 0.5033z^{-2} + 0.1354z^{-3} \\
0.8463z^{-2} - 0.1576z^{-3} - 0.0565z^{-4} \\
0.8463z^{-2} - 1.1576z^{-3} + 0.3114z^{-4} \\
z^{-3} - 0.3679z^{-4} \\
z^{-3} - 1.3679z^{-4} + 0.3679z^{-5} \\
z^{-4} - 0.3679z^{-5} \\
\cdots
\end{array}
$$

$$f(k) = 0.3679z^{-1} + 0.8463z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + \cdots$$

Exercice

Soit la Transformée en z

$$F(z) = \frac{z^{-1}(0.5 - z^{-1})}{(1 - 0.5z^{-1})(1 - 0.8z^{-1})^2}$$

Calculer la Transformée en z Inverse

Solution1: Développer F(z)/z sous forme de fractions partielles.

$$F(z)=\frac{z^{-1}(0.5-z^{-1})}{(1-0.5z^{-1})(1-0.8z^{-1})^2}=\frac{z(0.5z-1)}{(z-0.5)(z-0.8)^2}$$

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{0.5z-1}{(z-0.5)(z-0.8)^2}=\frac{k_1}{(z-0.5)}+\frac{k_2}{(z-0.8)^2}+\frac{k_3}{z-0.8}$$

$$(z-0.5)\frac{0.5z-1}{(z-0.5)(z-0.8)^2}=(z-0.5)\left(\frac{k_1}{(z-0.5)}+\frac{k_2}{(z-0.8)^2}+\frac{k_3}{z-0.8}\right)$$

$$\frac{0.5z-1}{(z-0.8)^2}=k_1+\frac{k_2(z-0.5)}{(z-0.8)^2}+\frac{k_3(z-0.5)}{z-0.8}$$

$$\text{let z}=0.5\Rightarrow k_1=\left.\frac{0.5z-1}{(z-0.8)^2}\right|_{z=0.5}=-8.333$$

$$(z-0.8)^2\frac{0.5z-1}{(z-0.5)(z-0.8)^2}=(z-0.8)^2\left(\frac{k_1}{(z-0.5)}+\frac{k_2}{(z-0.8)^2}+\frac{k_3}{z-0.8}\right)$$

$$\frac{0.5z-1}{z-0.5}=\frac{k_1(z-0.8)^2}{z-0.5}+k_2+\frac{k_3(z-0.8)}{z-0.5}\Rightarrow k_2=\left.\frac{0.5z-1}{(z-0.5)}\right|_{z=0.8}=-2$$

$$(z-0.8)^2 \frac{0.5z-1}{(z-0.5)(z-0.8)^2} = (z-0.8)^2 \left(\frac{k_1}{(z-0.5)} + \frac{k_2}{(z-0.8)^2} + \frac{k_3}{z-0.8} \right)$$

$$\frac{0.5z-1}{z-0.5} = \frac{k_1(z-0.8)^2}{z-0.5} + k_2 + \frac{k_3(z-0.8)}{z-0.5} \Rightarrow derivees$$

$$\left(\frac{0.5z-1}{z-0.5} \right)' = \left(\frac{k_1(z-0.8)^2}{z-0.5} \right)' + 0 + \frac{k_3(z-0.5) - k_3(z-0.8)}{(z-0.5)}; \quad \text{let } z = 0.8$$

$$k_3 = \left(\frac{0.5z-1}{z-0.5} \right)' \Bigg|_{z=0.8} = \frac{0.5(z-0.5) - (0.5z-1)}{(z-0.5)^2} \Bigg|_{z=0.8} = \frac{0.5 * 0.3 + 0.6}{0.3^2} = 8.333$$

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{0.5z-1}{(z-0.5)(z-0.8)^2} = -\frac{8.333}{(z-0.5)} - \frac{2}{(z-0.8)^2} + \frac{8.333}{z-0.8}$$

$$F(z) = -\frac{8.333}{(1-0.5z^{-1})} - \frac{2z^{-1}}{(1-0.8z^{-1})^2} + \frac{8.333}{1-0.8z^{-1}}$$

$$f(k) = -8.333(0.5)^k - 2(0.8)^{k-1} + 8.333(0.8)^k$$

Calcul de Transformée en z Inverse à partir de la décomposition en fractions partielles

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{b_0z^m+b_1z^{m-1}+\cdots b_{m-1}z+b_m}{z^n+a_0z^{n-1}+\cdots a_{n-1}z+a_n}=\frac{b_0z^m+b_1z^{m-1}+\cdots b_{m-1}z+b_m}{(z-p_1)(z-p_2)\cdots(z-p_n)}$$

$$=\frac{a_1}{z-p_1}+\frac{a_2}{z-p_2}+\cdots\frac{a_n}{z-p_n};\quad a_i=(z-p_i)\left.\frac{F(z)}{z}\right|_{z=p_i}$$

Si F(z)/z implique un pole multiple, eg. P_1, alors

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{b_0z^m+b_1z^{m-1}+\cdots b_{m-1}z+b_m}{(z-p_1)^2(z-p_3)\cdots(z-p_n)}=\frac{c_1}{(z-p_1)^2}+\frac{c_2}{z-p_1}+\frac{a_3}{z-p_3}+\cdots\frac{a_n}{z-p_n}$$

$$a_i=(z-p_i)\left.\frac{F(z)}{z}\right|_{z=p_i};c_1=(z-p_1)^2\left.\frac{F(z)}{z}\right|_{z=p_1};c_2=\frac{d}{dz}\left.\left[(z-p_1)^2\frac{F(z)}{z}\right]\right|_{z=p_1}$$

Exercice

Solution 2: Mettre F(z) sous forme polynomiale

$$F(z)=\frac{z^{-1}(0.5-z^{-1})}{(1-0.5z^{-1})(1-0.8z^{-1})^{2}}=\frac{0.5z^{-1}-z^{-2}}{1-2.1z^{-1}+1.44z^{-2}-0.32z^{-3}}$$

Num=[0 0.5 –1 0];

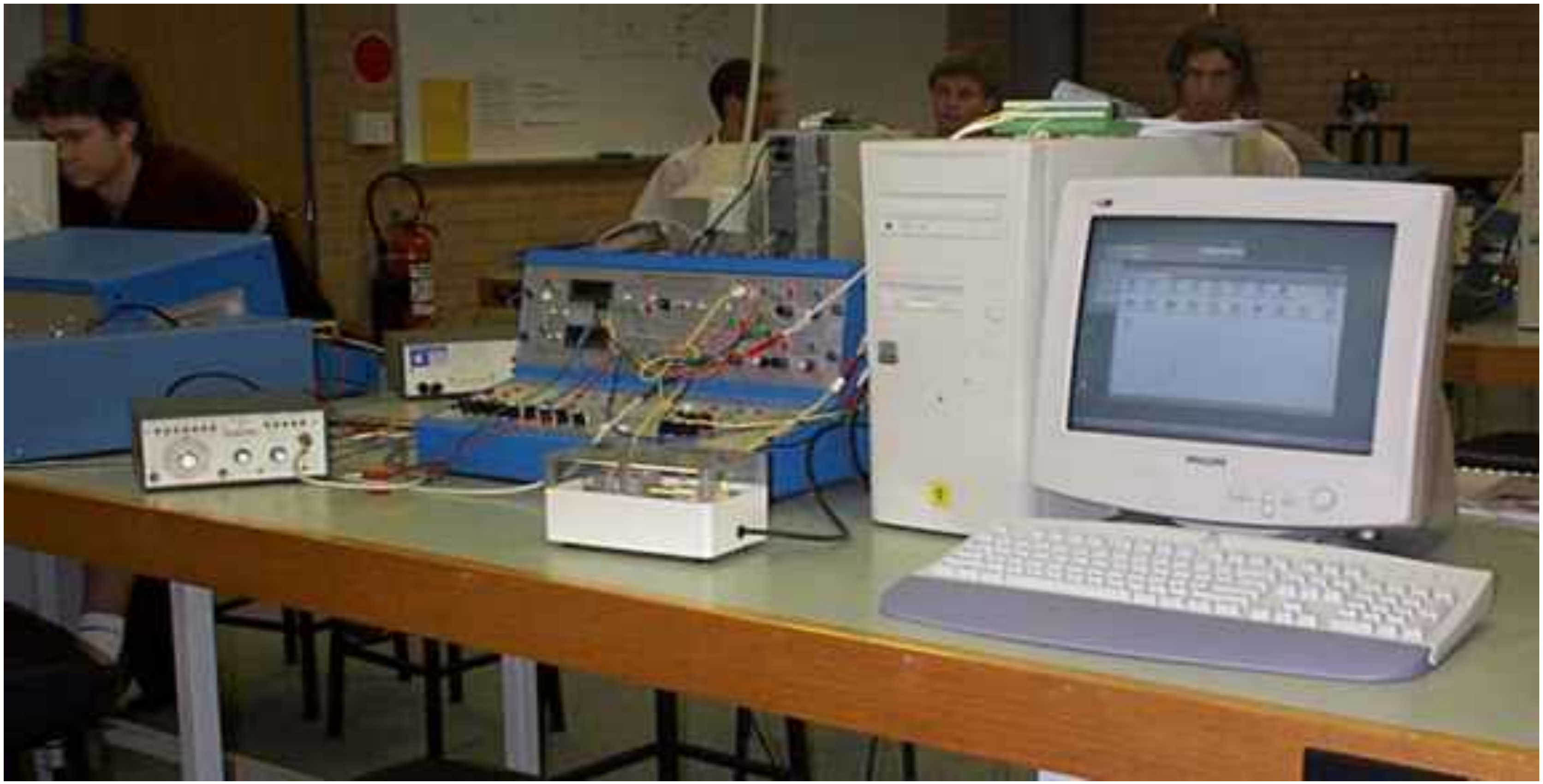
Den=[1 –2.1 1.44 –0.32];

U==[1 zeros(1,40)];

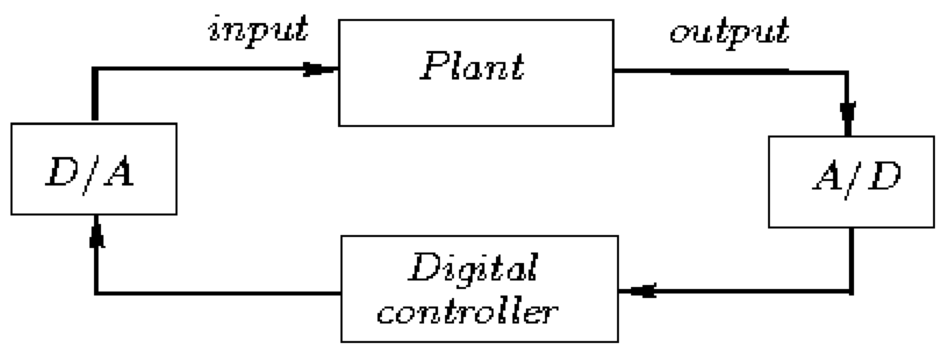
F=filter(Num, den,U)

0 0.5 0.05 -0.615-1.2035…

Control de la vitesse d’un moteur de courant continu



L' implémenation du control numérique de ce système est présentée d'une manière schématique :



L'objectif est de produire une vitesse de rotation en sortie, $y(t)$, qui suit le signal de consigne ou référence, $y^*(t)$.

Modélisation

Sachant que le control se fait par ordinateur, il semble raisonnable d'abord de trouver un modèle permettant de trouver la relation entre les échantillons de sortie,

$\{y(k\Delta);\ k = 0,\ 1,\ \ldots\ \}$ et

les échantillons d'entrée générés par l'ordinateur, notés

$\{u(k\Delta),\ k = 0,\ 1,\ \ldots\ \}$.

(Δ est la période d'échantillonnage).

Le modèle (à temps *discret*) pour le moteur prend la forme :

$$y\left(\overline{k+1}\Delta\right)=\bar{a}_1 y\left(k\Delta\right)+\bar{a}_0 y\left(\overline{k-1}\Delta\right)+$$
$$+\bar{b}_1 u\left(k\Delta\right)+\bar{b}_0 u\left(\overline{k-1}\Delta\right).$$

Lois de Commande

Nous souhaitons que $y\left(\overline{k+1}\Delta\right)$ aille vers la valeur désirée y^*.

Nous pourrions considérer la partie droite égale y^*.

Dans ce cas $u(k\Delta)$ devient une fonction de $y(k\Delta)$

ainsi $y\left(\overline{k-1}\Delta\right)$

Et

$u\left(\overline{k-1}\Delta\right)$

Mais le calcul n'est pas possible ???

Il est possible de considérer la lois de commande $u(k\Delta)$ fonction de $y\left(\overline{k-1}\Delta\right)$

Développement de Modèle

Par substitution:

$$
\begin{aligned}
y\left(\overline{k+1\Delta}\right) &= \overline{a}_1 \left\{y(k\Delta)\right\} + \overline{a}_0\, y\left(\overline{k-1\Delta}\right) \\
&\quad + \overline{b}_1 u\left(k\Delta\right) + \overline{b}_0 u\left(\overline{k-1\Delta}\right) \\
&= \overline{a}_1 \left\{\overline{a}_1 y\left(\overline{k-1\Delta}\right) + \overline{a}_0\, y\left(\overline{k-2\Delta}\right)\right. \\
&\quad \left. + \overline{b}_1 u\left(\overline{k-1\Delta}\right) + \overline{b}_0 u\left(\overline{k-2\Delta}\right)\right\} \\
&\quad + \overline{a}_0\, y\left(\overline{k-1\Delta}\right) + \overline{b}_1 u\left(k\Delta\right) + \overline{b}_0 u\left(\overline{k-1\Delta}\right)
\end{aligned}
$$

Nous observons que $y\left(\overline{k+1\Delta}\right)$ prend la forme :

$$y\left(\overline{k+1\Delta}\right)=\alpha_1 y\left(\overline{k-1\Delta}\right)+\alpha_2 y\left(\overline{k-2\Delta}\right)$$
$$+\beta_1 u\left(\overline{k}\Delta\right)+\beta_2 u\left(\overline{k-1\Delta}\right)+\beta_3 u\left(\overline{k-2\Delta}\right)$$

où $\alpha_1=\overline{a}_1^{\,2}+\overline{a}_0$ etc.

En effet, $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3$, peuvent être estimés à partir du système physique. Cependant, pour le système présenté les valeurs sont (Δ = 0.05 seconds) :

$$\alpha_1 = 0.03554$$
$$\alpha_2 = 0.03077$$
$$\beta_1 = 1$$
$$\beta_2 = -1.648$$
$$\beta_3 = 0.6483$$

La Lois de Commande Modifié

Nous souhaitons que la sortie soit égale à y^*.

Rappelons le modèle:

$$y\left(\overline{k+1\Delta}\right)=\alpha_1 y\left(\overline{k-1\Delta}\right)+\alpha_2 y\left(\overline{k-2\Delta}\right)$$
$$+\beta_1 u\left(\overline{k}\Delta\right)+\beta_2 u\left(\overline{k-1\Delta}\right)+\beta_3 u\left(\overline{k-2\Delta}\right)$$

Et $\quad y\left(\overline{k+1\Delta}\right)$ égale à $\; y^*\left(\overline{k+1\Delta}\right)$

$$u\left(k\Delta\right)=\frac{y^*\left(\overline{k+1\Delta}\right)-\alpha_1 y\left(\overline{k-1\Delta}\right)-\alpha_2 y\left(\overline{k-2\Delta}\right)-\beta_2 u\left(\overline{k-\Delta}\right)-\beta_3 u\left(\overline{k-2\Delta}\right)}{\beta_1}$$

La lois de commande précédente exprime le control $u(k\Delta)$ comme une fonction de :

- La consigne,

$$y^*\left(\overline{k+1}\Delta\right)$$

- Mesures de sortie précédentes ,

$$y\left(\overline{k-1}\Delta\right), y\left(\overline{k-2}\Delta\right)$$

- Les signaux de commande précédents ,

$$u\left(\overline{k-1}\Delta\right), u\left(\overline{k-2}\Delta\right)$$

Il existe une période d'échantillonnage entre la mesure de

$$y\left(\overline{k-1}\Delta\right)$$

et le temps quand on applique $u(k\Delta)$;

i.e. nous avons assez de temps pour que le calcul de $u(\mathrm{k}\Delta)$

Soit réaliser après la mesure de :

$$y\left(\overline{k+1}\Delta\right)$$

Récapitulons

Nous avons obtenu une lois de commande numérique qui emmène la sortie du système

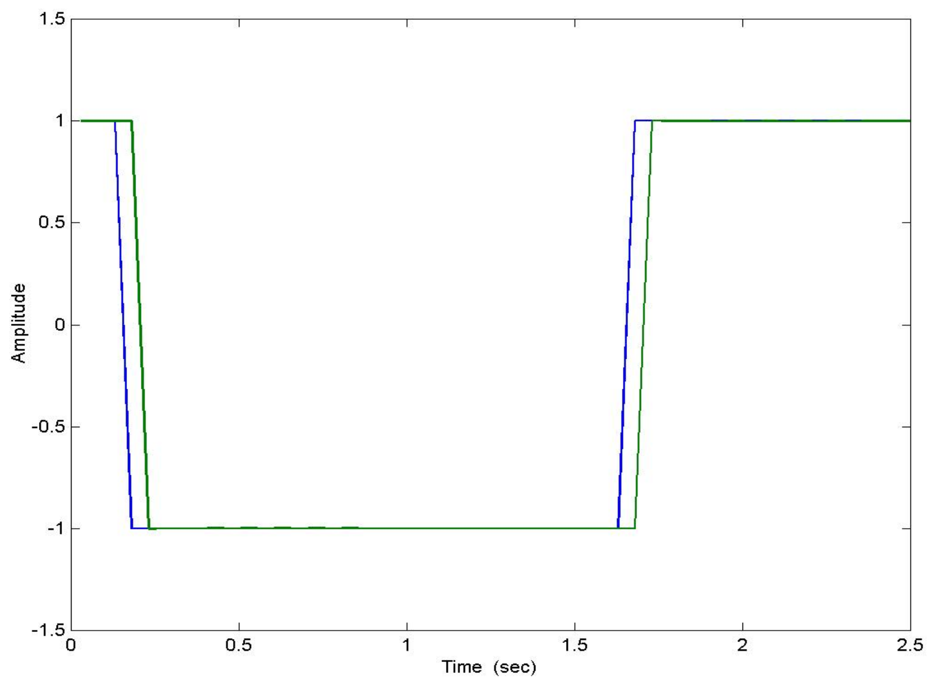
$$y\left(\overline{k+1}\Delta\right)$$

vers la valeur désirée

$$y^*\left(\overline{k+1}\Delta\right)$$

pendant une période d'échantillonnage

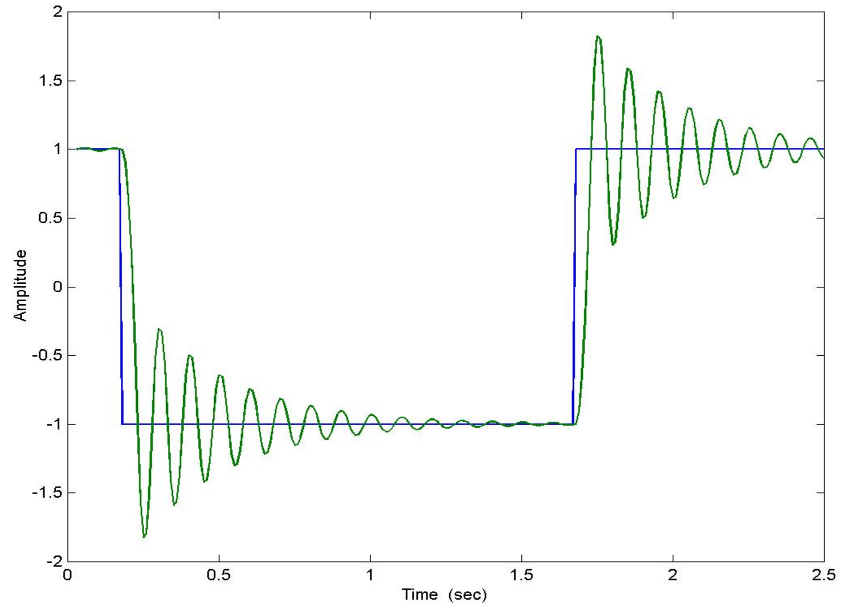
Résultats de Simulation avec la Période 0.05 secondes



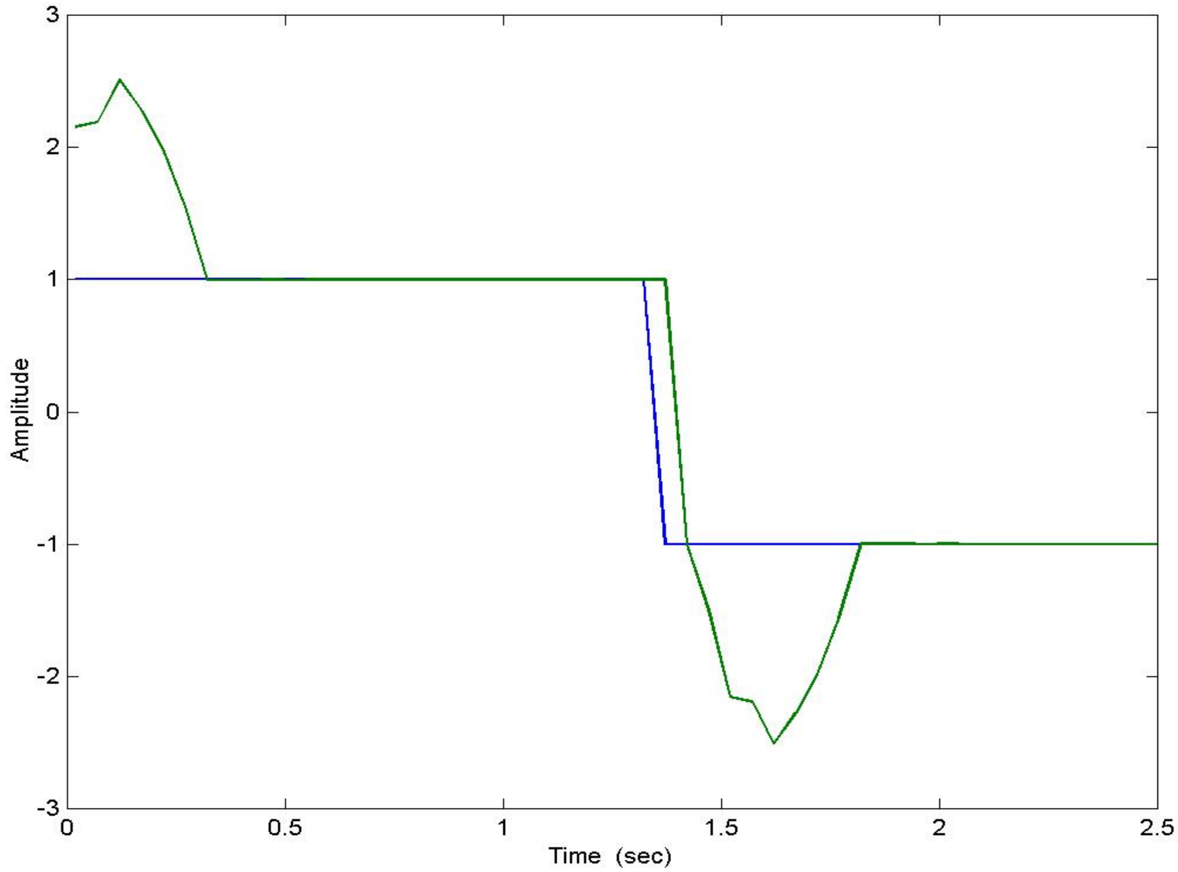
Causes d'une Réponse "Pauvre"

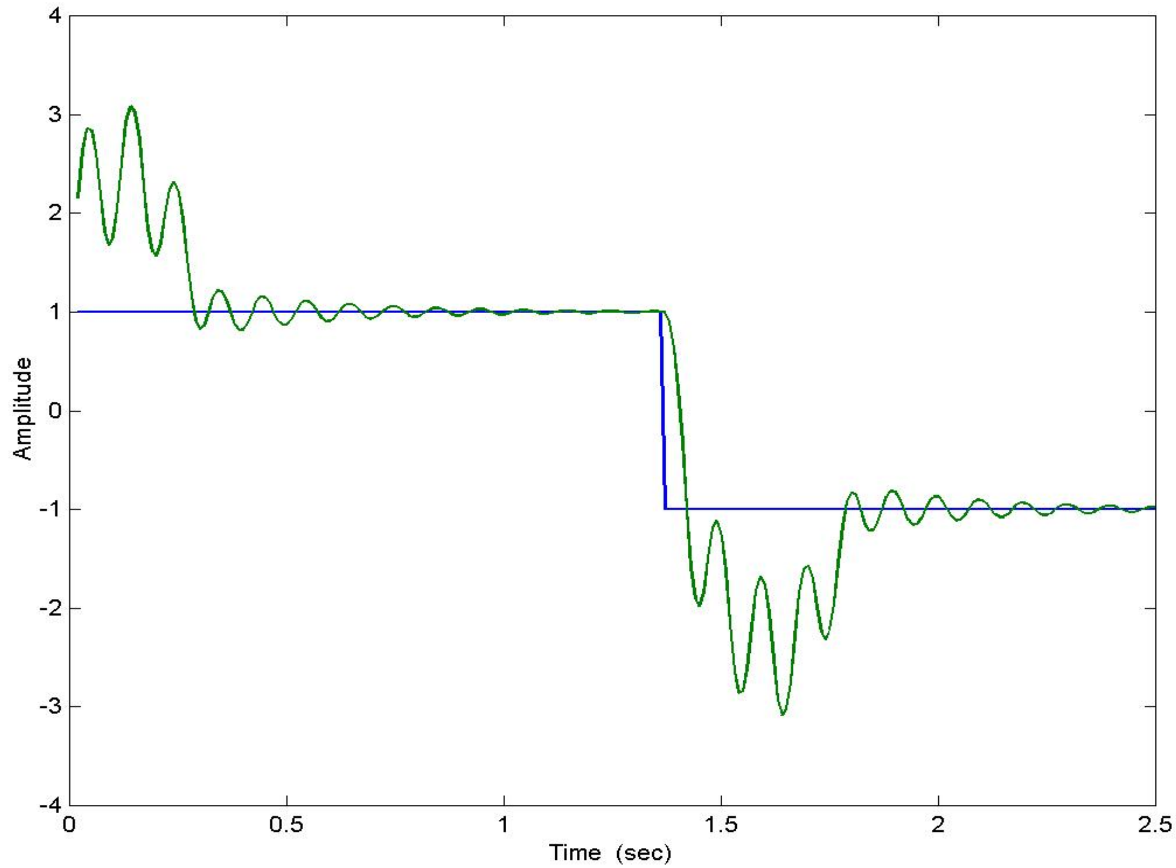
1. *Vitesse d'échantillonnage*
2. *Saturation de l'entrée*
3. *Bruit*
4. *Timing jitter*

Résultats en Simulation qui montre la Réponse continue

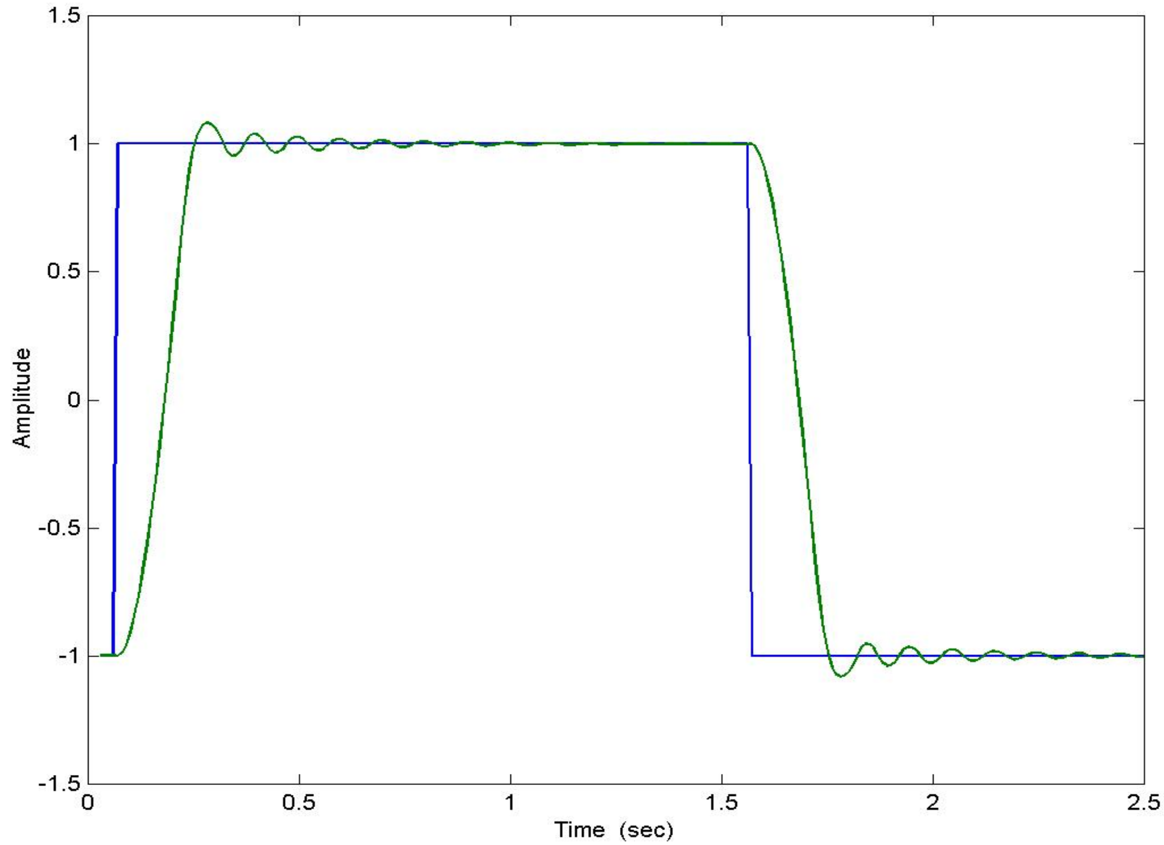


Saturation de l’Entrée

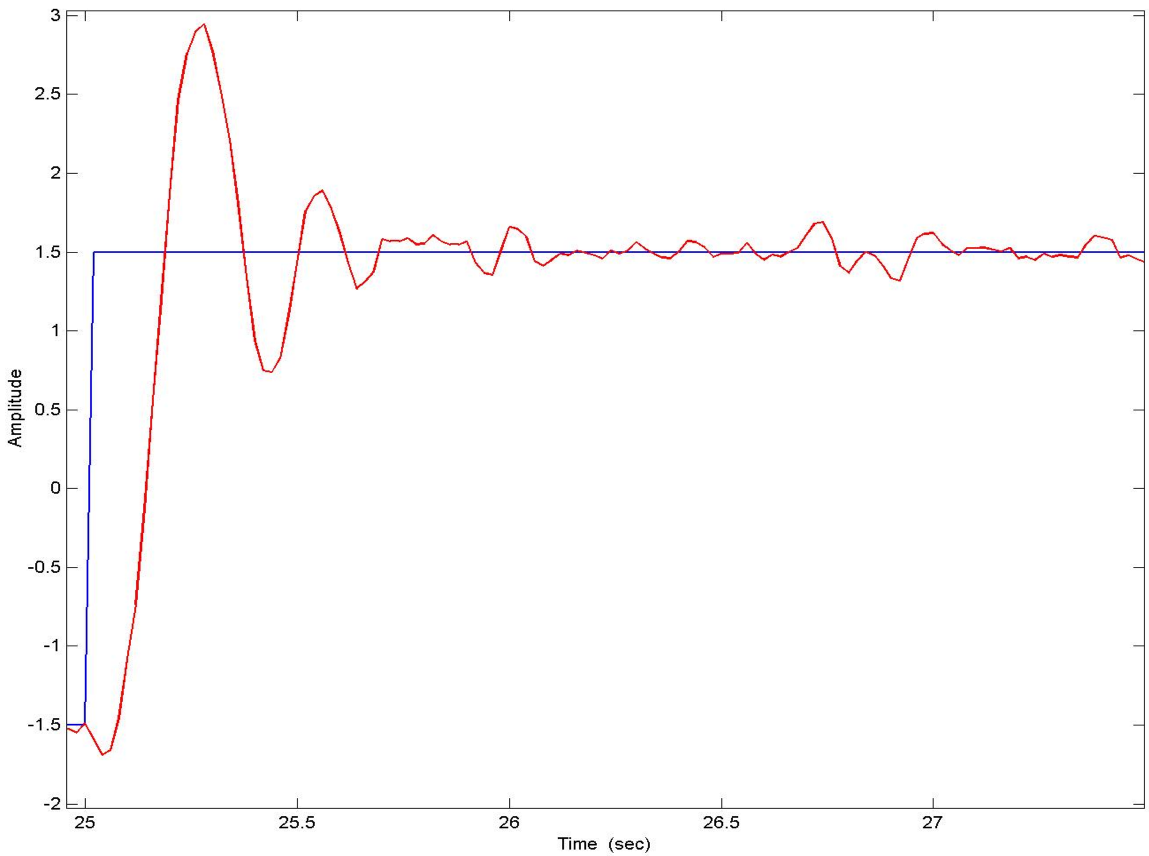




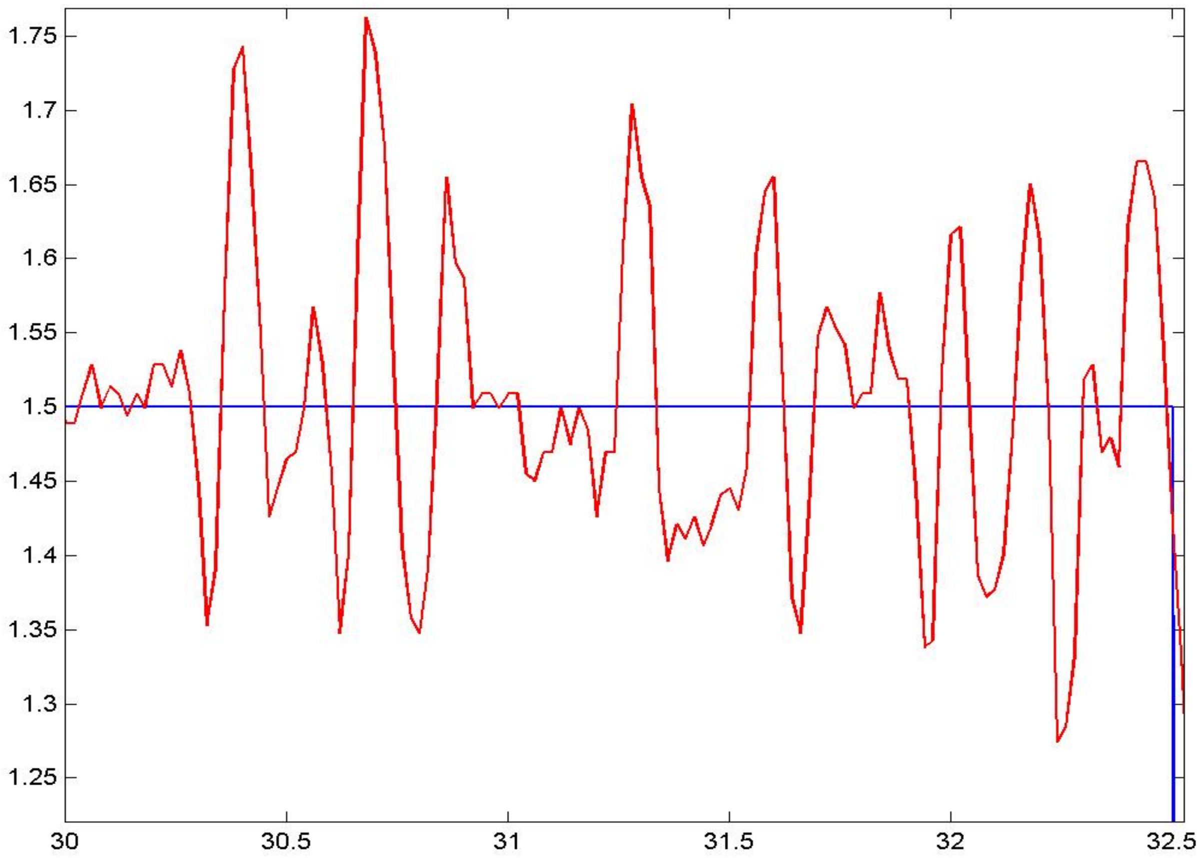
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
Amplitude
0
0.5
1
1.5
2
2.5
Time (sec)


1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
Amplitude
0
0.5
1
1.5
2
2.5
Time (sec)

Résultats Experimentaux



Le bruit



Types de Control Numérique

DCS (Distributed Control System)

Commande des Grands Systèmes (Complex/ Compliqué)

PLC (Programmable Logic Controller)

Commande numérique simple de type on-off .

PC (Personal Computer)

Cost minimal, flexibilité habitude

Theorem	Name
$F(z) = Z[f(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) z^{-k}$	Definition
$Z[k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t)] = k_1 F_1(z) + k_2 F_2(z)$	Linearity
$Z[e^{-at} f(t)] = F(ze^{aT})$	Multiply by e^{-at}
$Z[a^t f(t)] = F(\frac{z}{a})$	Multiply by a^t
$Z[f(t-kT)] = z^{-k} F(z)$	Time Shift 1
$Z[f(t+kT)] = z^k [F(z) - \sum_{k=0}^{n-1} f(kT) z^{-k}]$	Time Shift 2
$Z[f(t) - f(t-1)] = (1 - z^{-1}) F(z)$	Differentiation
$Z\left[\int_{0-}^{t} f(\tau) d\tau\right] = \frac{F(z)}{1 - z^{-1}}$	Integration
$f(\infty) = \lim_{z \to 1} (1 - z^{-1}) F(z)$	Final Value
$f(0) = \lim_{z \to \infty} F(z)$	Initial Value

$f(t)$	$F(s)$	$F(z)$
$\delta(t)$	1	1
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$
$\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{b-a}$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{b-a}\left(\frac{(e^{-aT}-e^{-bT})z^{-1}}{(1-e^{-aT}z^{-1})(1-e^{-bT}z^{-1})}\right)$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}$
$1-e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$	$\frac{(1-e^{-aT})z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-e^{-aT}z^{-1})}$
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\frac{z^{-1}\sin\omega T}{1-2z^{-1}\cos\omega T+z^{-2}}$
$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\frac{1-z^{-1}\cos\omega T}{1-2z^{-1}\cos\omega T+z^{-2}}$
$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$\frac{z^{-1}e^{-aT}\sin\omega T}{1-2z^{-1}e^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}z^{-2}}$
$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$\frac{1-z^{-1}e^{-aT}\cos\omega T}{1-2z^{-1}e^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}z^{-2}}$

Calcul de transformée en z

$$f(t) = e^{-at}\cos\omega t$$

Solution 1:

$$Z\left[\cos\omega t\right] = \frac{1 - z^{-1}\cos\omega T}{1 - 2z^{-1}\cos\omega T + z^{-2}} = F(z)$$

$$Z[f(t)] = F(z); \quad F[e^{-at}f(t)] = F(ze^{aT})$$

$$Z[e^{-at}\cos\omega t] = \left.\frac{1 - z^{-1}\cos\omega T}{1 - 2z^{-1}\cos\omega T + z^{-2}}\right|_{z=e^{aT}z}$$

$$= \frac{1 - e^{-aT}z^{-1}\cos\omega T}{1 - 2e^{-aT}z^{-1}\cos\omega T + e^{-2aT}z^{-2}}$$

Solution 2:

$$F(z) = Z[e^{-at}\cos\omega t] = Z\left[\frac{e^{-at+j\omega t} + e^{-at-j\omega t}}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}(Z[e^{-at+j\omega t}] + Z[e^{-at-j\omega t}])$$

$$Z[e^{-at}] = \frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}$$

$$F(z) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-e^{-aT+j\omega T}z^{-1}} + \frac{1}{1-e^{-aT-j\omega T}z^{-1}}\right]$$

$$= \frac{1-e^{-aT}z^{-1}\cos\omega T}{1-2e^{-aT}z^{-1}\cos\omega T + e^{-2aT}z^{-2}}$$

Calculer la Transformée en z de :

$$f(t) = te^{-at}$$

Solution:

$$Z[t] = \frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2} = F(z)$$

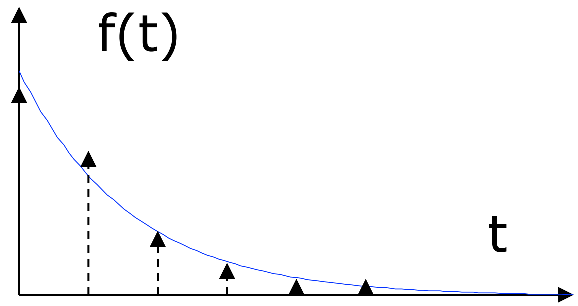
$$Z[f(t)] = F(z); \quad F[e^{-at} f(t)] = F(ze^{aT})$$

$$Z[te^{-at}] = \left. \frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2} \right|_{z=e^{aT}z}$$

$$= \frac{Te^{-aT} z^{-1}}{(1-e^{-aT} z^{-1})^2}$$

Exercice

Soit $f(t)=e^{-aT}$.



Exercice

$$F(z) = Z[f(t)] = Z[f(kT)] = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)$$

$$= 1 + e^{-aT}z^{-1} + e^{-2aT}z^{-2} + \cdots$$

$$e^{-aT}z^{-1}F(z) = e^{-aT}z^{-1}(1 + e^{-aT}z^{-1} + e^{-2aT}z^{-2} + \cdots)$$

$$= e^{-aT}z^{-1} + e^{-2aT}z^{-2} + e^{-3aT}z^{-3} \cdots$$

$$F(z) - e^{-aT}z^{-1}F(z) = 1 \Rightarrow F(z) = \frac{1}{1 - e^{-aT}z^{-1}}$$