Transformée en Ondelettes Continue

Introduction

adoncesc@laas.fr

La théorie des ondelettes

Elle se situe à la frontière entre :

1. Les mathématiques
2. Le calcul scientifique
3. Le traitement du signal

Historique

- 1971 Kenneth Wilson : décrit la renormalisation
- Décomposition atomique
- Fonction autosimilaires de Gabor
- 1975 Morlet s'inspire de l'analyse de Fourier à fenêtre de Gabor

Time Frequency Analysis

The Short Time Fourier Transform

$$STFT_x^{\omega}(t,f)=\int_t x(t)\omega^*(t-t')\,e^{-j2\pi ft}\,dt$$

x(t) is the signal
ω(t) is the window function
t is the time period

A short data window is used so that the full-analysed signal is partitioned into segments each of them will be analysed separately

To obtain a good localization in time we have chosen a short window

In STFT the window function chosen remained the same width over the entire calculation process

Critique de la STFT

- Imprécise sur le temps dans les hautes fréquences

- Elle ne procure aucune méthode de ***reconstruction*** du signal à partir de la transformée

A Wavelet Tour of Signal Processing

Stéphane Mallat, Academic Press 1999 (2nd edition)

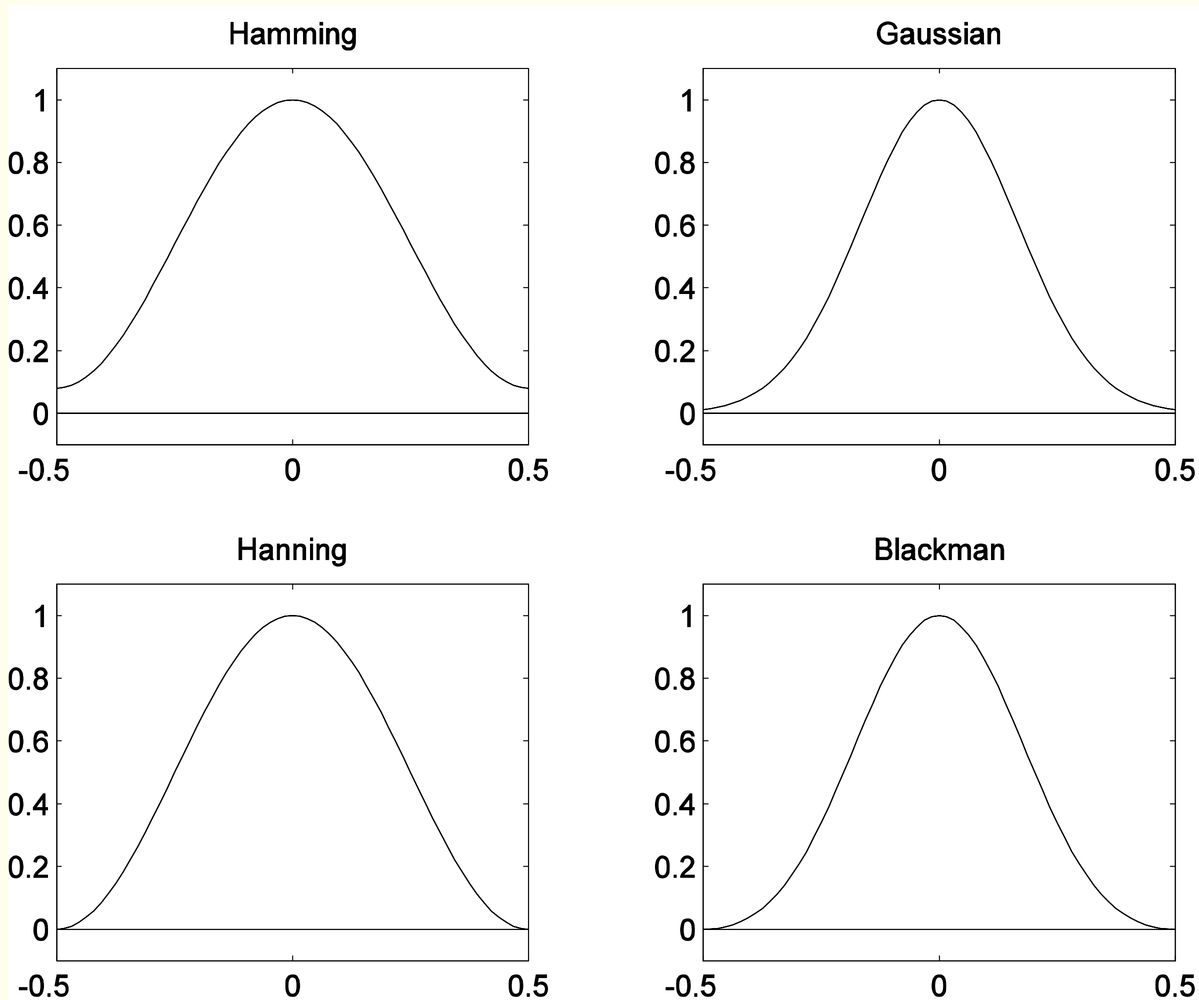
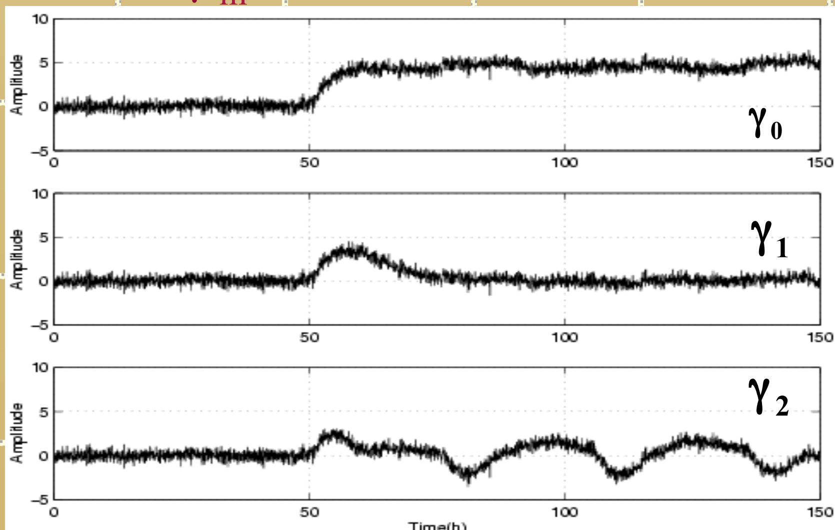


Figure 4.5: Graphs of four windows g whose support are $[-1/2, 1/2]$.

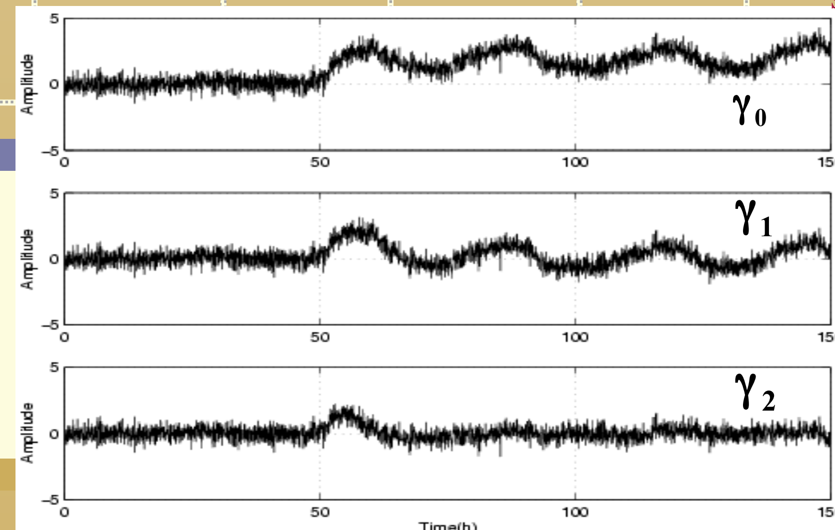
Noise Corrupted Residuals

Measurement White Noise (0, 0.2)

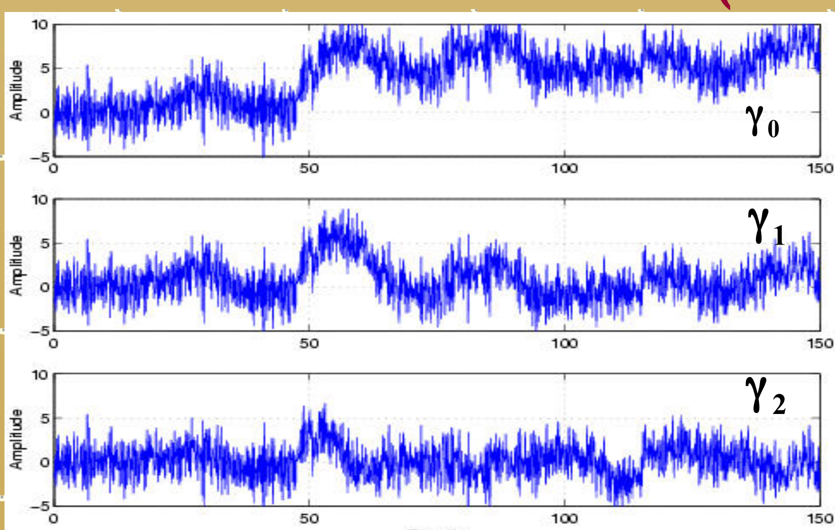
Fault in μ_m

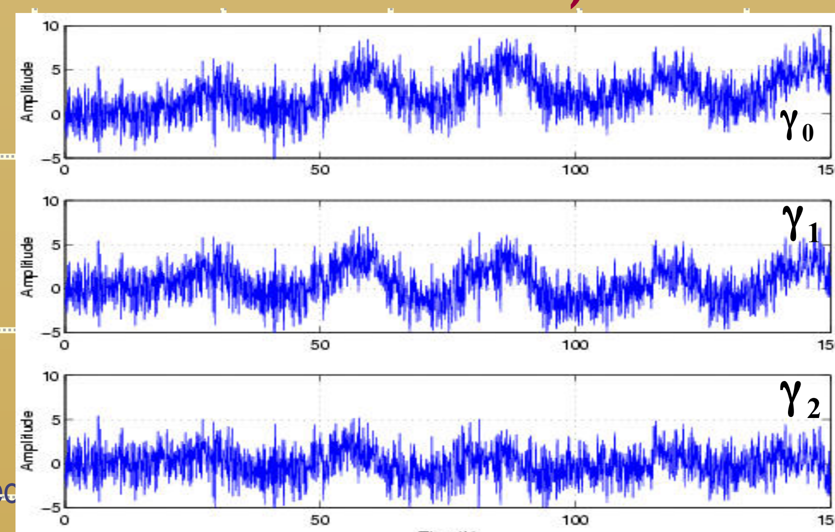


Fault in K_s



Coloured Noise (standard deviation = 1.6156)



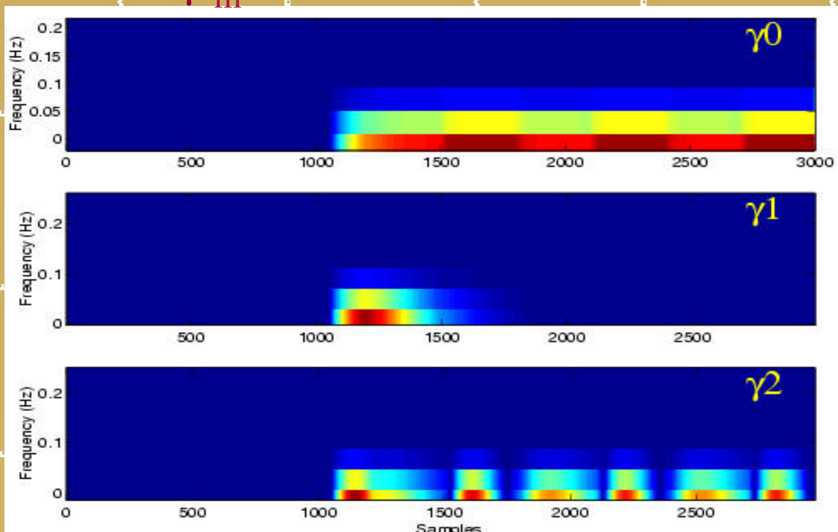


roche théc

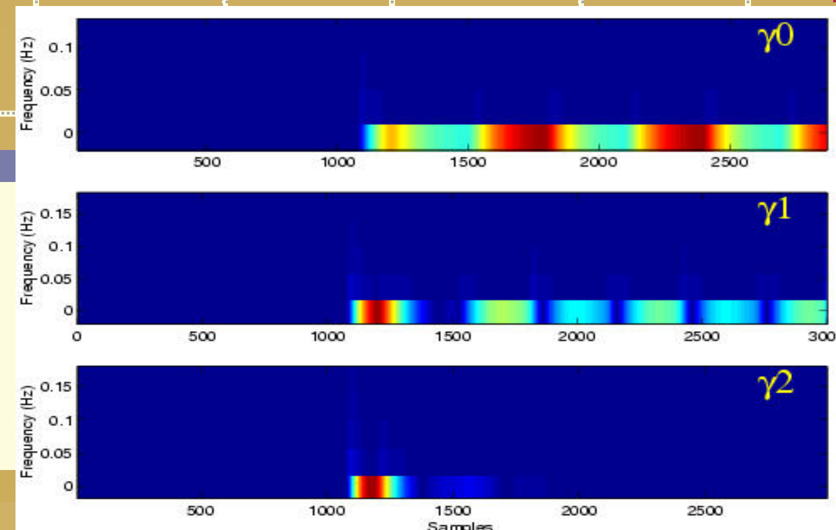
Residual Evaluation using TFA

Noise free case

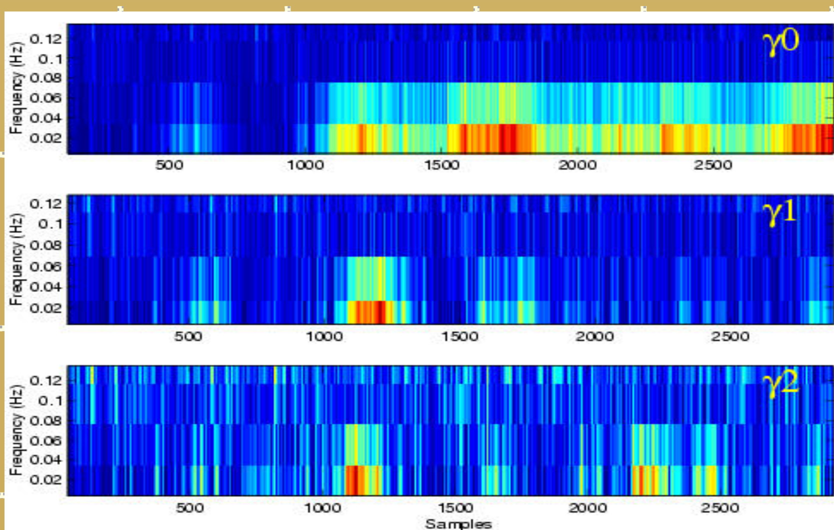
Fault in μ_m

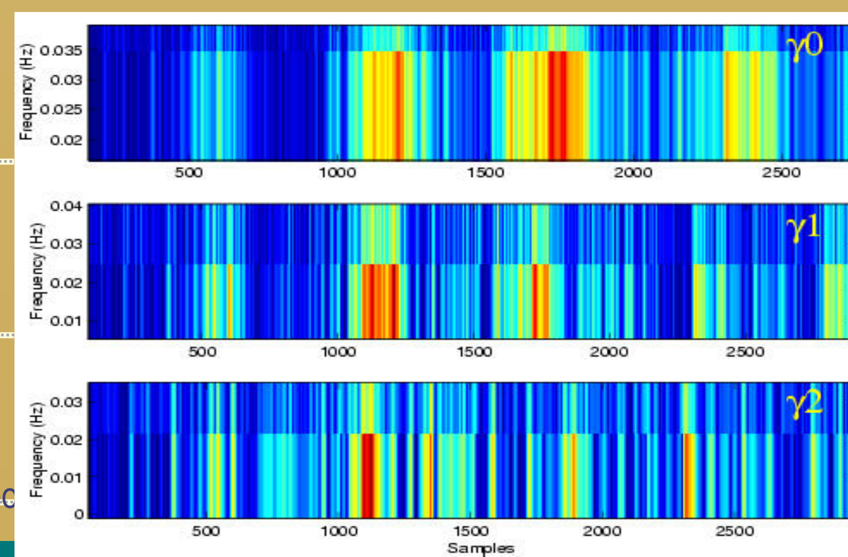


Fault in K_s



Coloured noise corrupted residuals



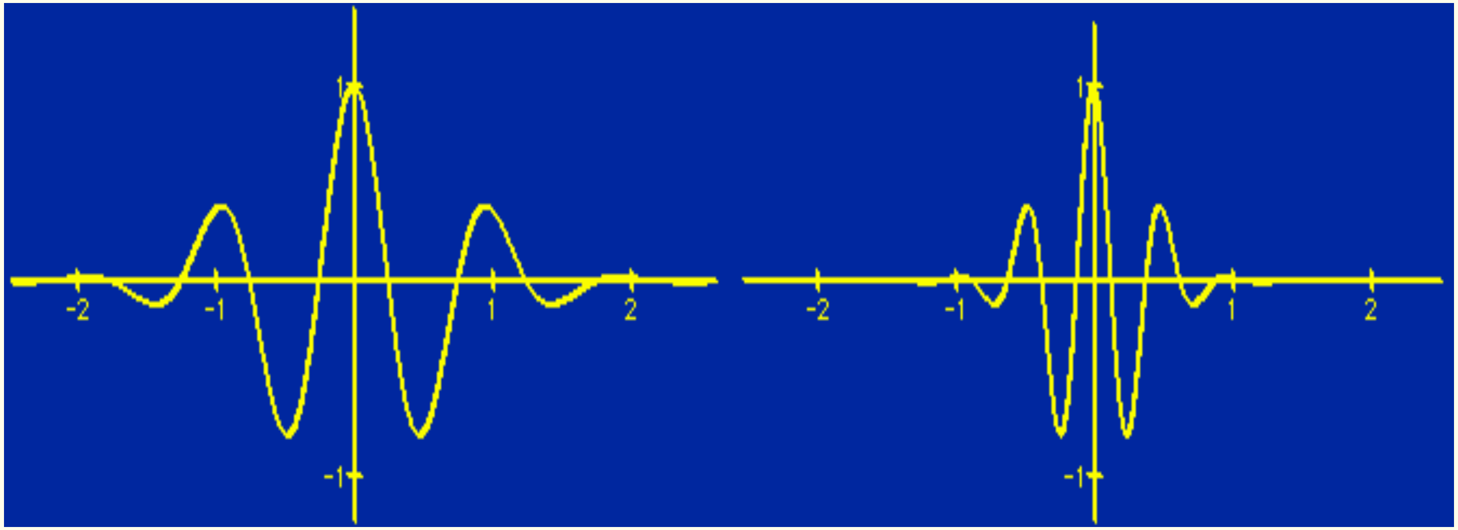


roche théc

Analyse temps-échelle

Analyse en ondelettes :

- fréquence analysée en fonction de la largeur de fenêtre



L’approche de Morlet

- Garder constant le nombre d’oscillations
- Varier la taille de la fenêtre: le principe de l’accordéon
- Nom : ondelettes de forme constante
- Reconstruction par une intégrale double

Les Ondelettes « temps-échelle » de Grossman-Morlet

- L'échelle signifie que le signal sera, à une échelle donnée, remplacé par l'approximation la plus adéquate que l'on puisse tracer à cette échelle

- C 'est une projection sur une « base » dite d 'ondelettes issues de la même ondelette mère.

Les ondelettes de Morlet

Construction d' une famille de fonction élémentaires :

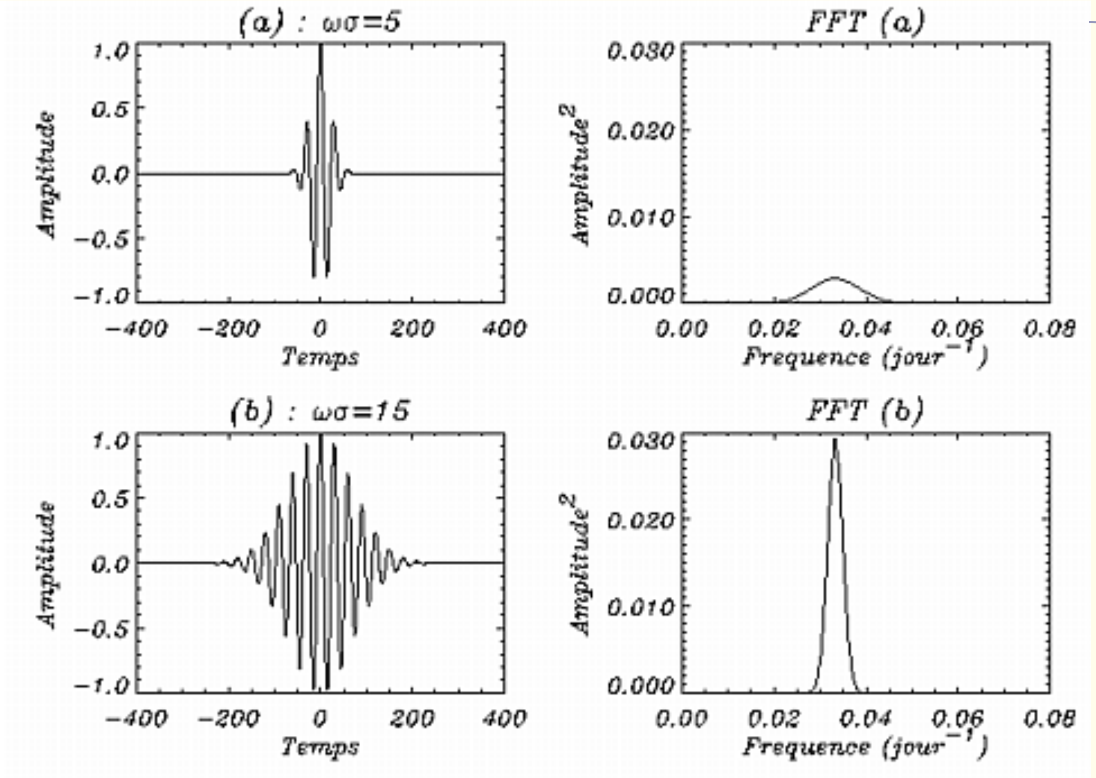
$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

Les coefficients du signal *f* sont alors les nombres :

$$C_f(a,b) = (f,\psi_{a,b}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{\psi}_{a,b}(t)dt$$

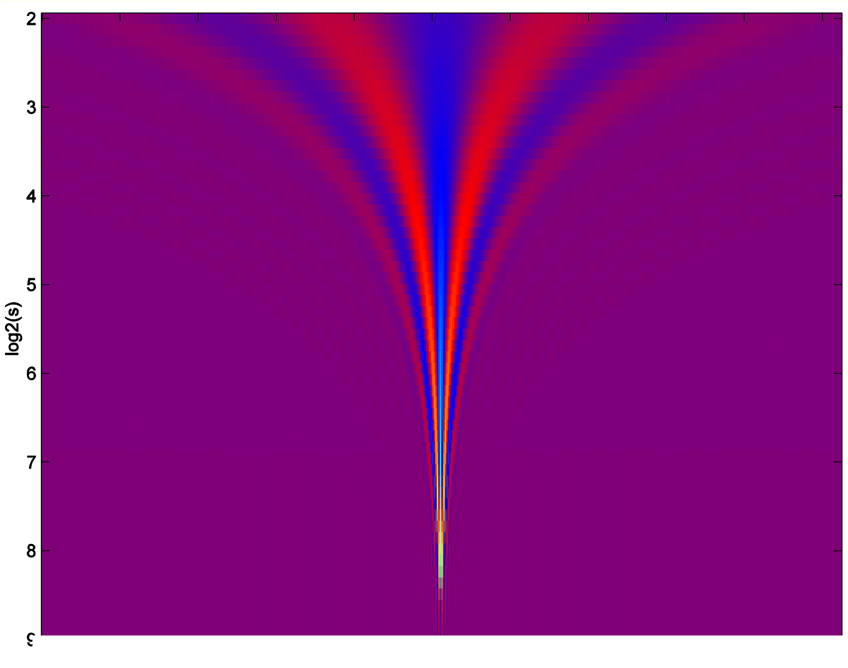
Les ondelettes de Morlet

$$\psi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} e^{j\omega\sigma t} \longrightarrow \psi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \cos(5t)$$



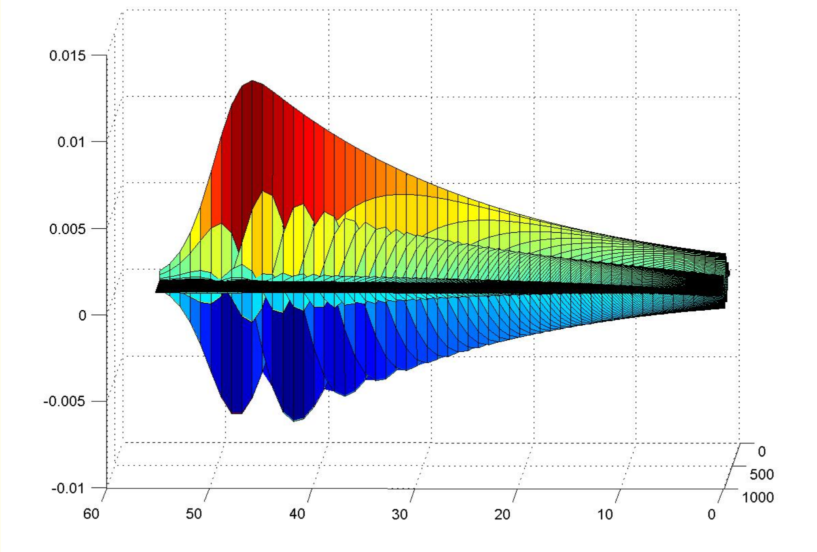
$$\frac{\Delta f}{f} = ct.$$

Analyse d’un Dirac



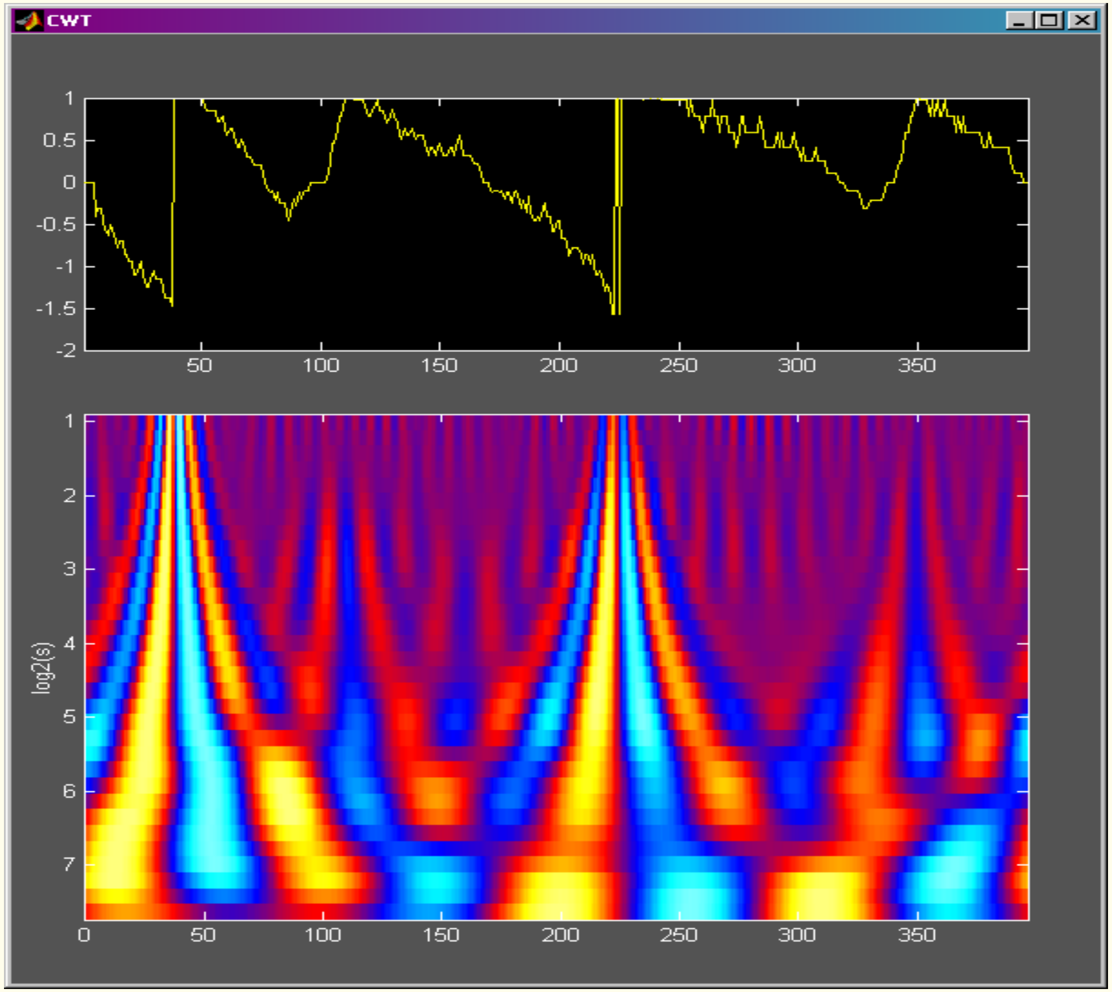
$$C(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-\frac{(b-b_0)}{2a^2}} e^{-j\omega_0 \frac{b_0 - b}{2a^2}}$$

Module



$$\varphi = \omega_0 \frac{b_0 - b}{a}$$

Résultats



CWT
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
50
100
150
200
250
300
350
log2(s)
1
2
3
4
5
6
7
0
50
100
150
200
250
300
350

La transformée en ondelettes continue unidimensionnelle

- La transformée continue s'écrit :

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\int f(x)\overline{\Psi}\left(\frac{x-b}{a}\right)dx$$

Pour un signal, une formulation équivalente de WT est donnée à partir des transformées de Fourier de f et Ψ, si on utilise l'identité de Parseval. :

$$2\pi WT_{f,\psi}(a,b)=<f,\hat{\Psi}>$$

$$\hat{\Psi}_{a,b}(\omega)=\sqrt{|a|}\exp(-iab)\hat{\Psi}(a\omega)$$

La transformée en ondelettes continue unidimensionnelle (x)

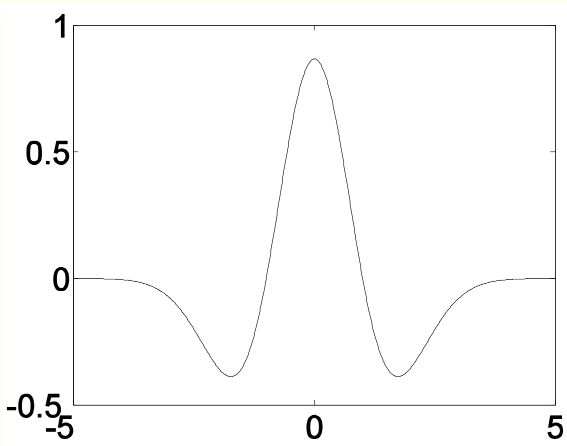
- D'après cette interprétation, nous pouvons représenter un signal monodimensionnel *f(x)* (ou une fonction) sous forme d'un champ à deux dimensions *WT(b,a);* en faisant varier *b* (homogène à un temps), et *a* (homogène à une échelle). Le résultat est une représentation temps-échelle de f(x).

- La famille des ondelettes construite par dilatation-translation à partir de l'ondelette mère est définie comme :

$$\Psi_{ab}=\frac{1}{\sqrt{a}}\Psi\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

avec $a \neq 0$ et $a,b \in R$, ainsi, toutes les ondelettes ont la même énergie.

$$\psi(t) = \frac{2}{\pi^{\frac{1}{4}}\sqrt{3\sigma}}\left(\frac{t^2}{\sigma^2} - 1\right)\exp\left(\frac{-t^2}{2\sigma^2}\right)$$



$$\hat{\psi}(\omega) = \frac{-\sqrt{8}\sigma^{\frac{5}{2}}\pi^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{3}}\omega^2 \exp\left(\frac{-\sigma^2\omega^2}{2}\right)$$

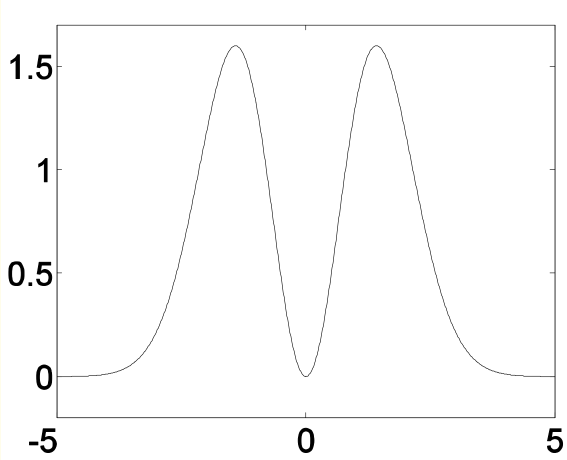
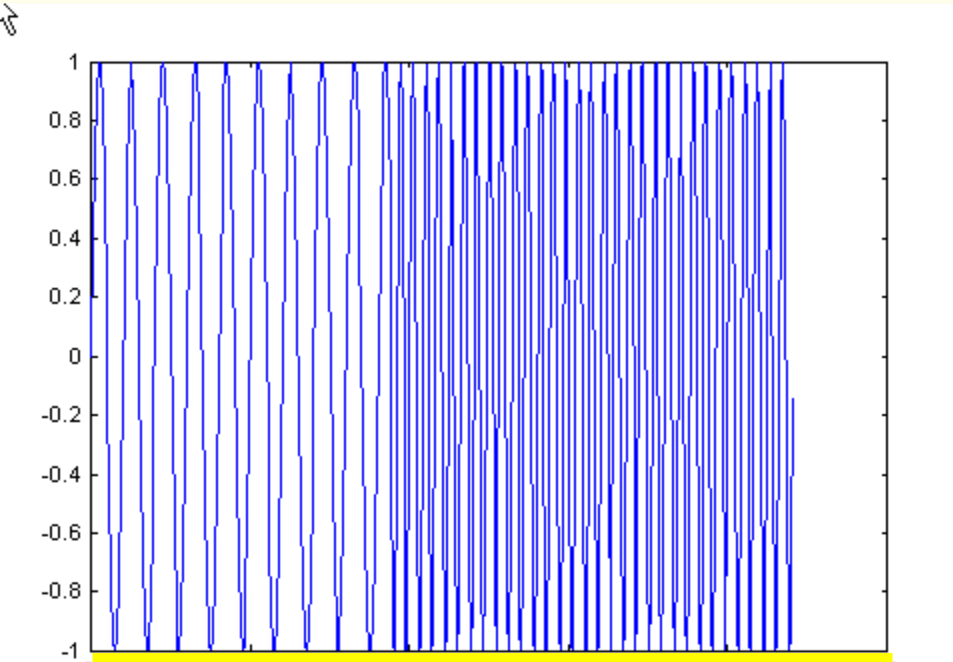
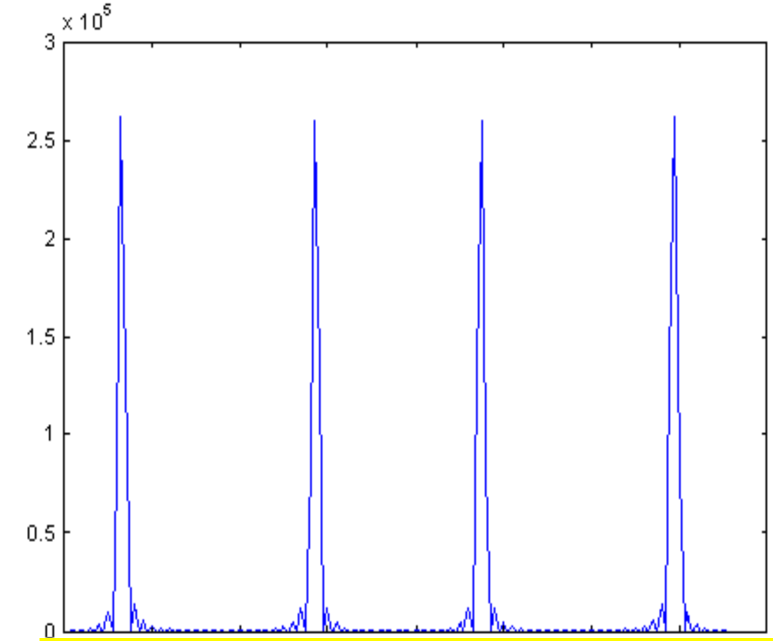


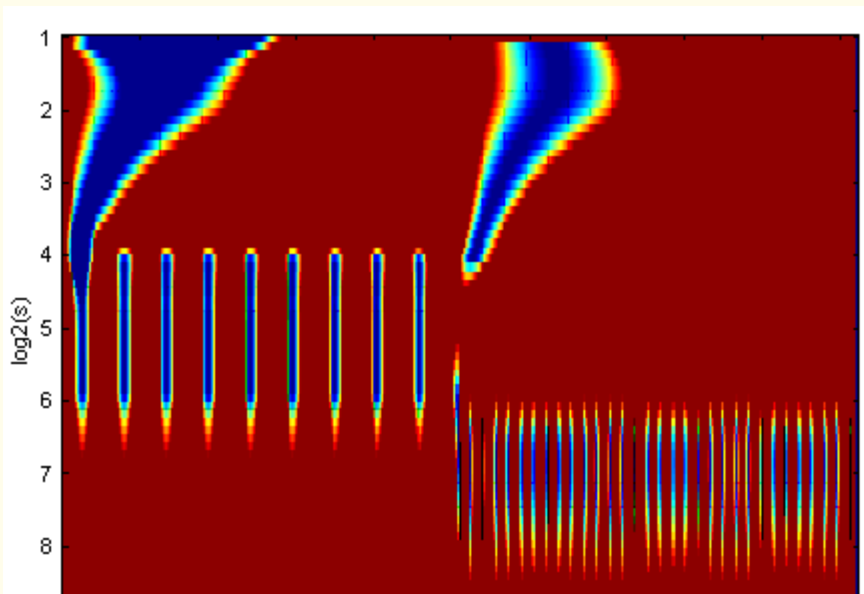
Figure 4.6: Mexican hat wavelet for $\sigma = 1$ and its Fourier transform



Deux sinus des fréquences différentes



Transformée de Fourier



Transformée en Ondelettes

La transformée en ondelettes continue

- Condition de régularité-moments nuls:

Ψ présente des moments nuls

$$\Rightarrow C(s,0)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, s^{1/2}\, \Psi\left[\frac{t}{s}\right] dt$$

Taylor …

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\underbrace{\frac{k_n}{s^{\,n-1/2}}}_{\text{décroissant}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} t^n\, \Psi\left[\frac{t}{s}\right] dt}_{\text{moment}} \right]$$

La transformée en ondelettes continue unidimensionnelle

- La transformée en ondelettes est définie comme le résultat d'un opérateur intégral qui transforme une fonction d'énergie finie $f(x) \in L^2(R)$ en utilisant un ensemble de fonction Ψ_{ab}.

$$WT(f, \Psi_{ab}) = \langle f \mid \Psi_{ab} \rangle$$

Où $\langle\ \rangle$ est le produit scalaire.

Cette transformation modifie l'espace $L^2(R)$ de fonctions complexes d'énergie finie à un espace à deux dimensions : l'espace des *coefficients d'ondelettes*.

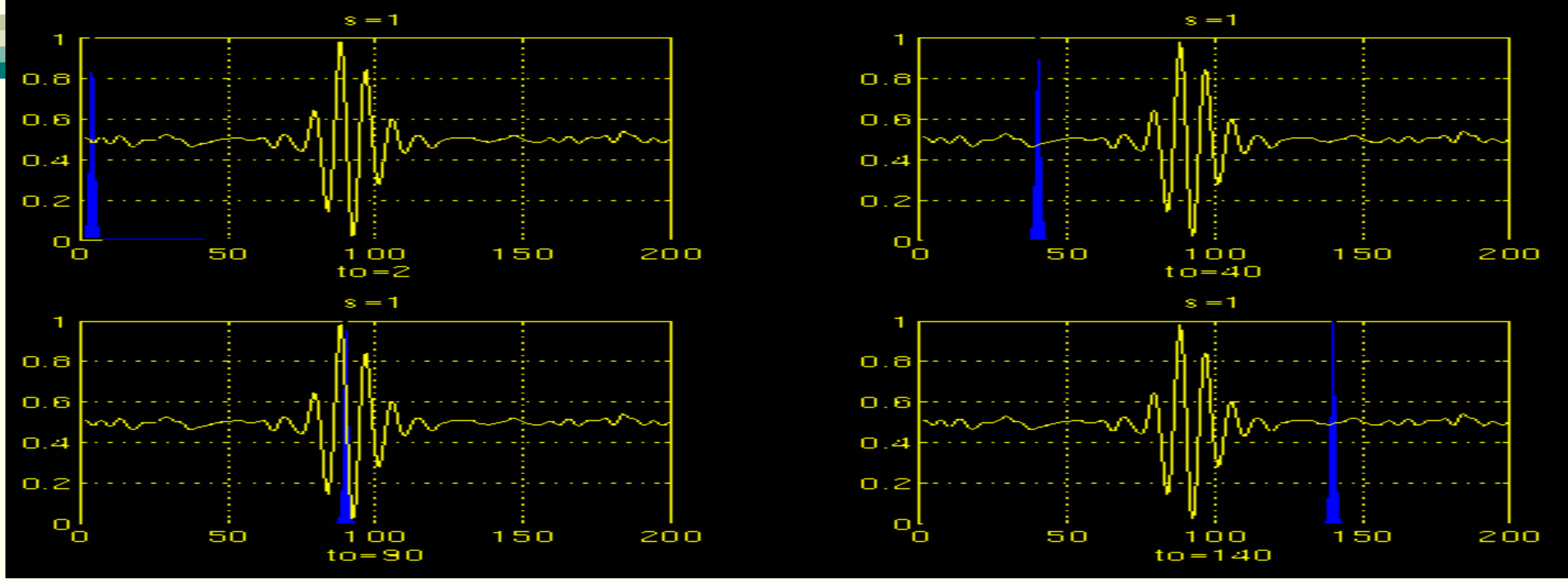
La transformée en ondelettes continue unidimensionnelle

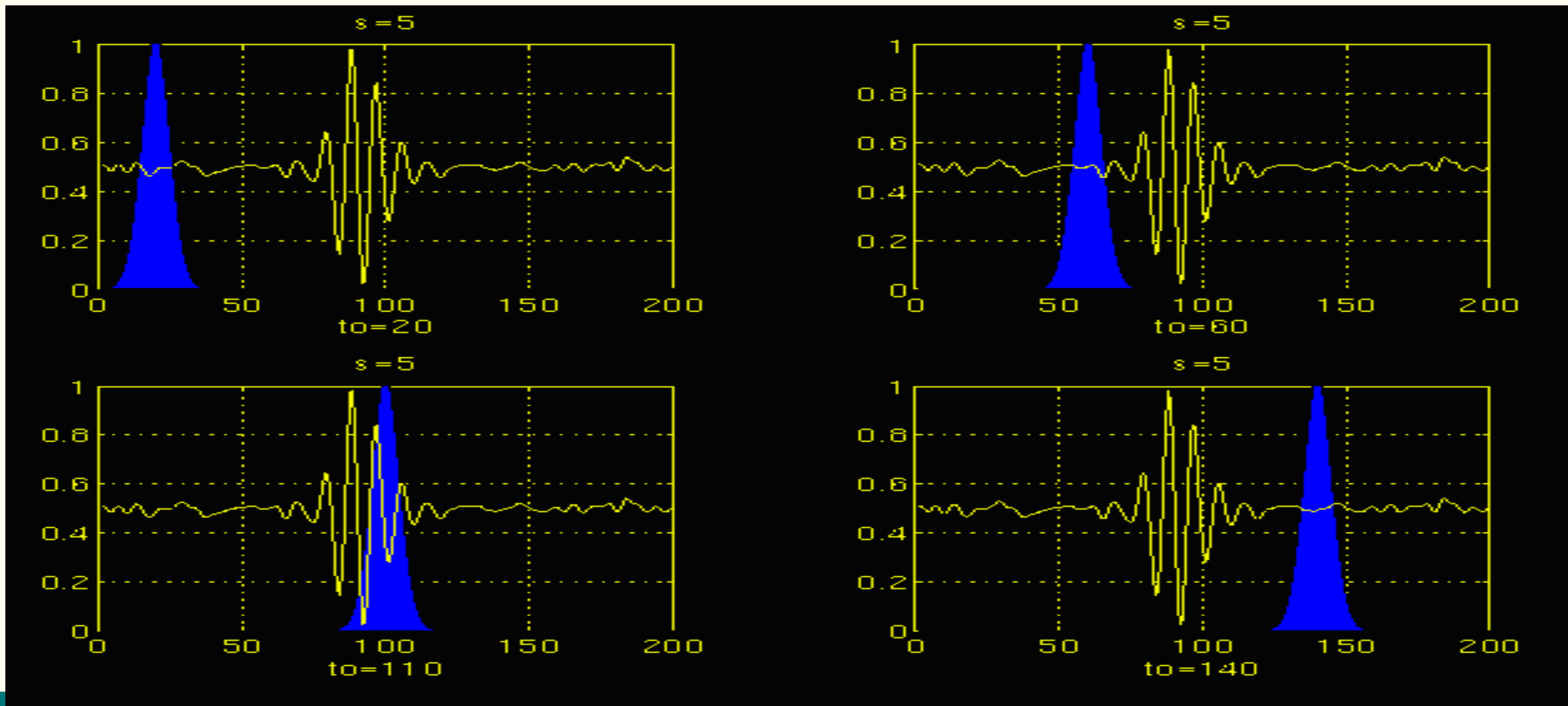
- D'après cette interprétation, nous pouvons représenter un signal temporel monodimensionnel *f(x)* (ou une fonction) sous forme d'un champ à deux dimensions *WT(b,a);* en faisant varier *b* (homogène à un temps), et *a* (homogène à une échelle). Le résultat est une représentation temps-échelle de f(x).

- La famille des ondelettes construite par dilatation-translation à partir de l'ondelette mère est définie comme :

$$\Psi_{ab} = \frac{1}{\sqrt{a}} \Psi\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

avec $a \neq 0$ et $a,b \in R$, ainsi, toutes les ondelettes ont la même énergie.


s =1
to=2
s =1
to=40
s =1
to=90
s =1
to=140


s =5
to=20
s =5
to=60
s =5
to=110
s =5
to=140

Propriétés fondamentales

Ondelettes mère

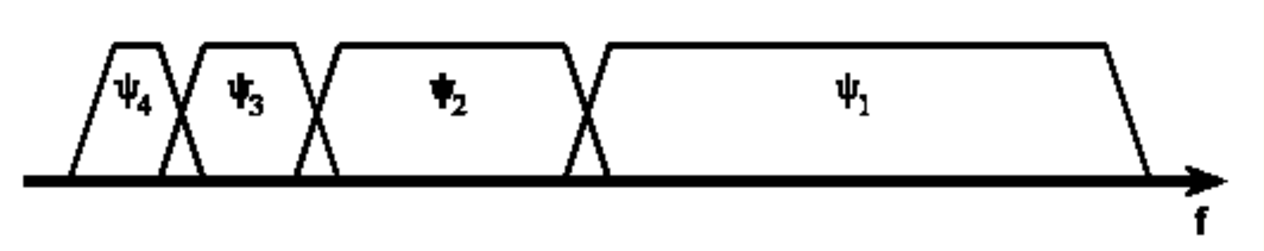
- dilatations et translations d' une fonction analysante

Filtre passe-bande

- condition d'admissibilité
- dilater dans le temps ≡ compresser en fréquence

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{|a|}\right)$$

- on veut recouvrir tout le spectre en changeant le facteur d'échelle



Ondelette

- L'ondelette mère doit vérifier les propriétés suivantes :
- *a)* **la continuité** *: être absolument intégrable et de carré intégrable (énergie finie),*
- *b)* *l'***analytique** *: sa transformée de Fourier doit être nulle pour* $\omega < 0$*,*
- *c)* **l'admissibilité** *: ce qui induit un comportement de filtre passe-bande.*

Linéarité, invariance par dilatation et translation

- La transformée en ondelettes est une application linéaire. Une des propriétés importantes est le principe de superposition qui est respecté.

- Si $WT_{f,\psi}(a,b)$ est la transformée en ondelettes de $f(x)$, alors $WT_{f,\psi}(a,b-x_0)$ est la transformée de $f(x-x_0)$ et $WT_{f,\psi}(a/\lambda,b/\lambda)$ est la transformée de $1/\sqrt{\lambda}\}f(x/\lambda)$.

- Cette propriété n'est pas valable dans le cas de la transformée en ondelettes discrète.

Conservation de l'énergie

L'information contenue dans le signal est conservée dans le passage de *f* à ses coefficients d'ondelettes.

$$\frac{1}{K}\iint_{R^2}\left|C_f(a,b)\right|^2\frac{da\,db}{a^2}=\int_R\left|f(t)\right|^2dt$$

La transformée inverse permet la reconstruction de la fonction f en sommant toutes les contributions de la transformée directe dans le plan *a x b*.

$$f(t)=\frac{1}{K}\iint_{R^2}\psi_{a,b}(t)\,C_f(a,b)\,\frac{da\,db}{a^2}$$

La transformée inverse

- Dans le troisième cas la relation est :

$$f(x)=\frac{1}{C_\psi}\int WT_{f,\psi}(a,b)\,\psi_{a,b}(x)\frac{da\,db}{a^2}$$

où

$$C_\psi=2\pi\int\left|\hat{\psi}(\omega)\right|^2\frac{d\omega}{|\omega|}$$

Définition

- Une fonction $\psi(t)$ *de* $L^2(R)$ *est une ondelette si :*

Le principe d’incertitude

Localisation temps-échelle

- La localisation d'ondelettes dans le temps et dans les fréquences permet de représenter la zone d'influence dans le demi-plan temps-échelle ***R x R*** d'un événement se produisant à l'instant *x* pour le signal f.

Définitions

$$\sigma_f^2 = \int_R x \left| f(x) \right|^2 dx$$

Dispersion d'énergie de *f, en temps*

$$\sigma_{\hat{f}}^2 = \int_R \omega \left| \hat{f}(\omega) \right|^2 d\omega$$

Dispersion d'énergie de *f, en fréquence*

$$E_f = \int_R \left| f(x) \right|^2 dx$$

Energie

Définition

- On appelle durée utile du signal f la quantité

$$\Delta t^2 = \frac{\sigma_f^2}{E_f}$$

- Et bande utile du signal la quantité

$$\Delta \lambda^2 = \frac{\sigma_{\hat{f}}^2}{E_f}$$

Le principe d'incertitude :

- Indique que l'on ne peut pas localiser finement et le signal et la fréquence

$$\Delta t \Delta \lambda \geq \frac{1}{4\pi}$$

Relation d'incertitude de Heisenberg

- **Le principe: Le produit de la variance de x pour $|f|^2$ et de la variance de x pour $|F|^2$ est supérieur ou égal à**

$$\frac{1}{16\pi^2}$$

- **La largeur du paquet d'énergie d'un signal dans le temps est inversement proportionnelle à sa largeur dans l'espace des fréquences. On ne peut pas connaître avec une égale précision la position dans le temps et en fréquences d'un signal.**

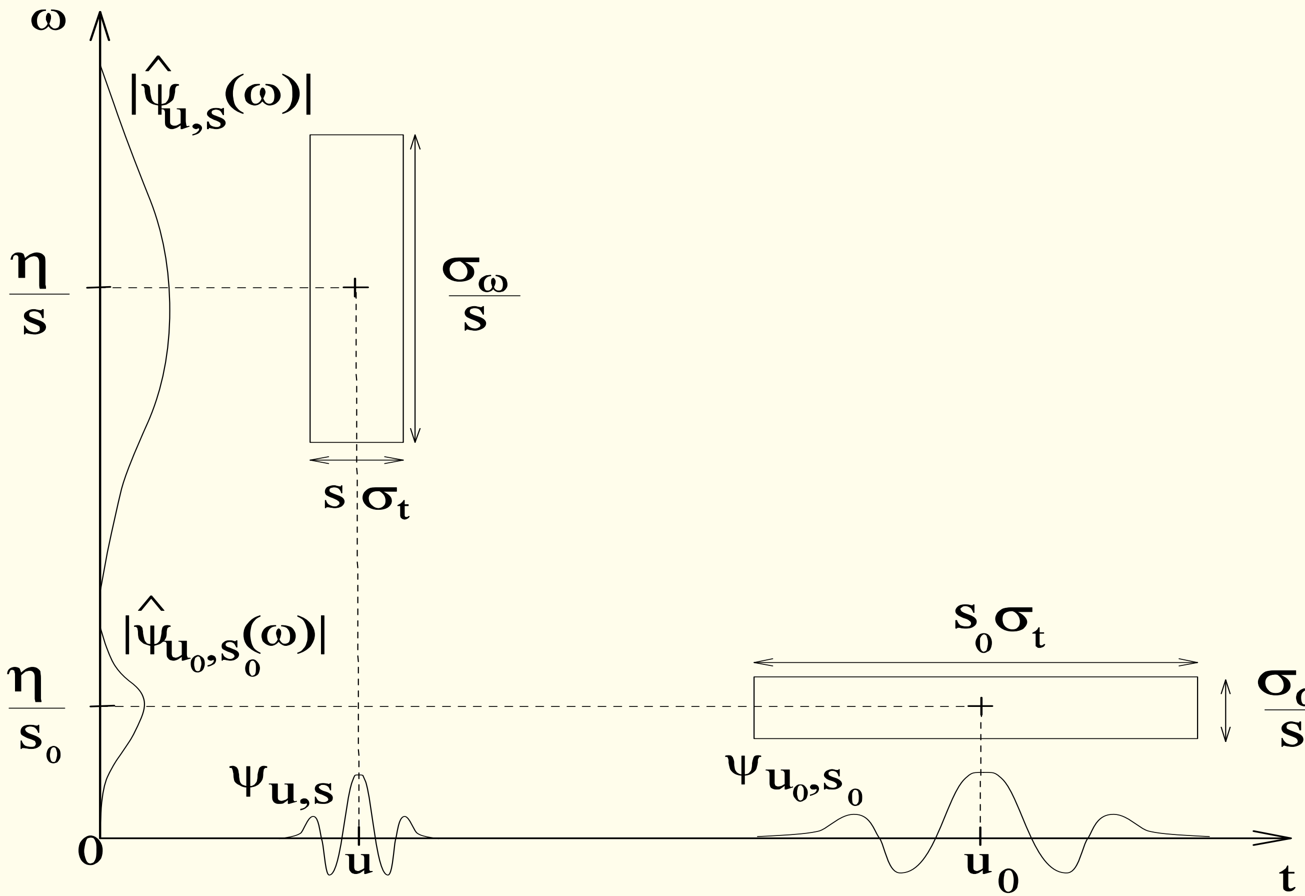
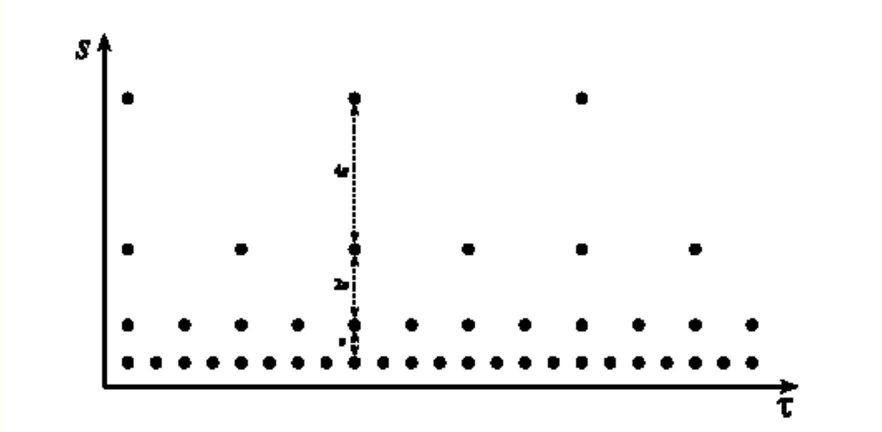


Figure 4.9: Heisenberg boxes of two wavelets. Smaller scales decrease the time spread but increase the frequency support, which is shifted towards higher frequencies.

Les ondelettes discrètes

- Transformée en ondelettes continue
  - ⇒ (s,u) valeurs continues ⇒ redondance
- → ondelettes discrètes

$$\Psi_{j,k}(t) = \frac{1}{\sqrt{s_0^j}}\,\Psi\left(\frac{t-k\tau_0 s_0^j}{s_0^j}\right)$$



Algorithme séquentiel de la Transformée en Ondelettes

Paramètres:
a : facteur d'échelle [1,m]
b : facteur de temps [1,k]
t : facteur de discrétisation du signal [1,n]

Pour a =1,m
  Pour b=1,k
  Initialiser les coefficients de l'ondelettes
    Pour t=1,n
    Evaluer la transformée en ondelettes au point t
    i.e. wt[a][b]=wt[a][b]*f(t)+Psi((t-b)/a)
    Fin boucle t
  wt[a][b] =(wt[a][b])/sqrt(a)
  Fin boucle b
Fin boucle a

Discrétisation de la WT

- La grille dyadique

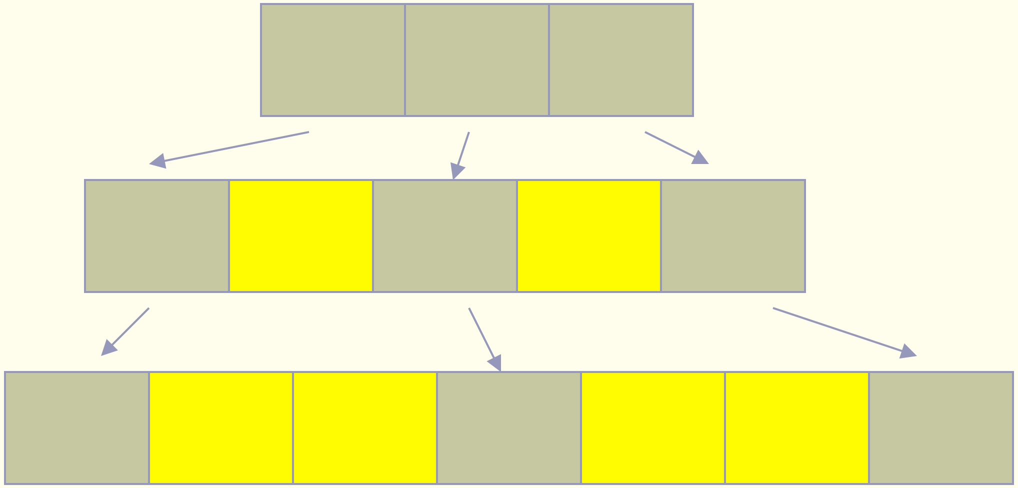
$a_m = 2^m$ $b_n = n2^m$

où $m \in Z^*$ et $n \in Z$.

- L' ondelettes s' écrit
  - $\psi_{m,n} = 2^{-m/2} \psi(2^{-m} x - n)$
- La transformée en ondelettes devient :
  - $$\mathbf{DWT}_{f,\psi}(x) = 2^{-m/2} \int f(x)\, \psi(2^{-m} x - n)\, dx$$

Théorie de l'algorithme à trous

- Utilisation d'une ondelette échantillonnée en un nombre fixé de points et l'opération de dilatation se fait en insérant des zéros entre chacune des valeurs de l'ondelette échantillonnée.

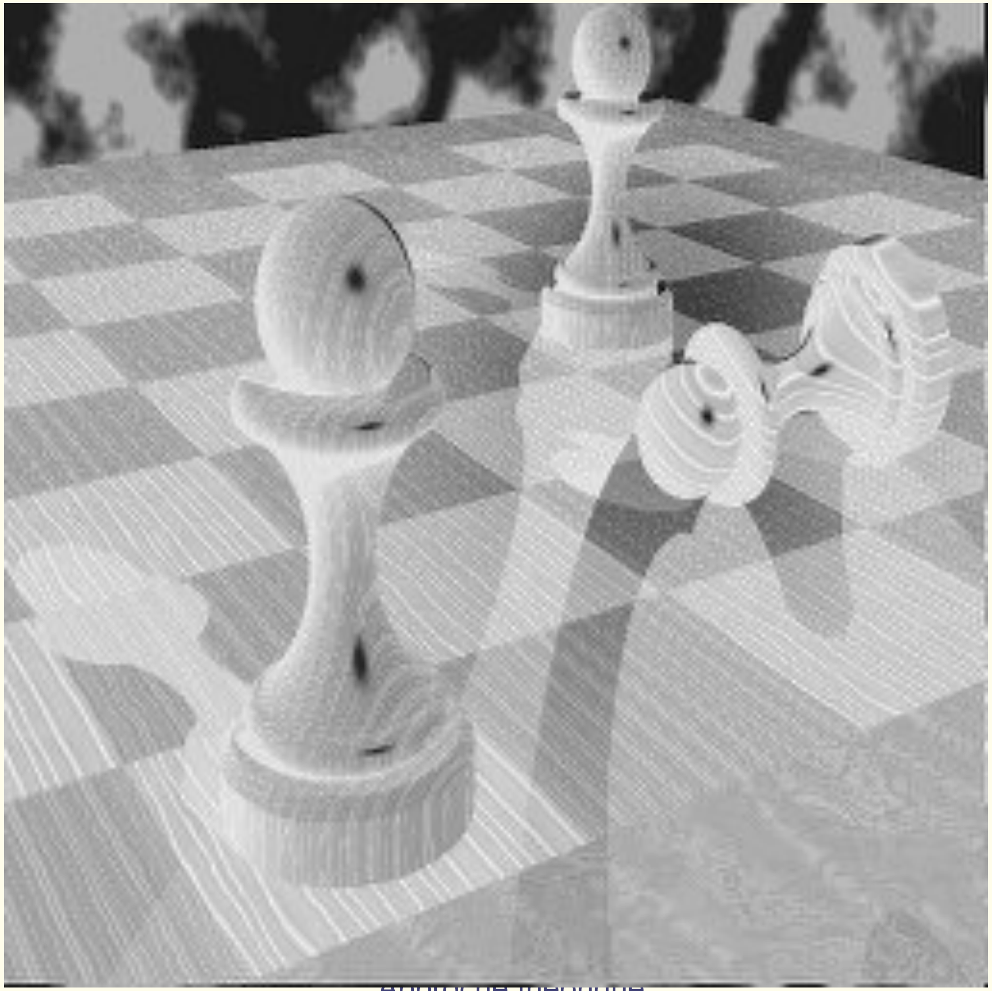


Transformée 2D

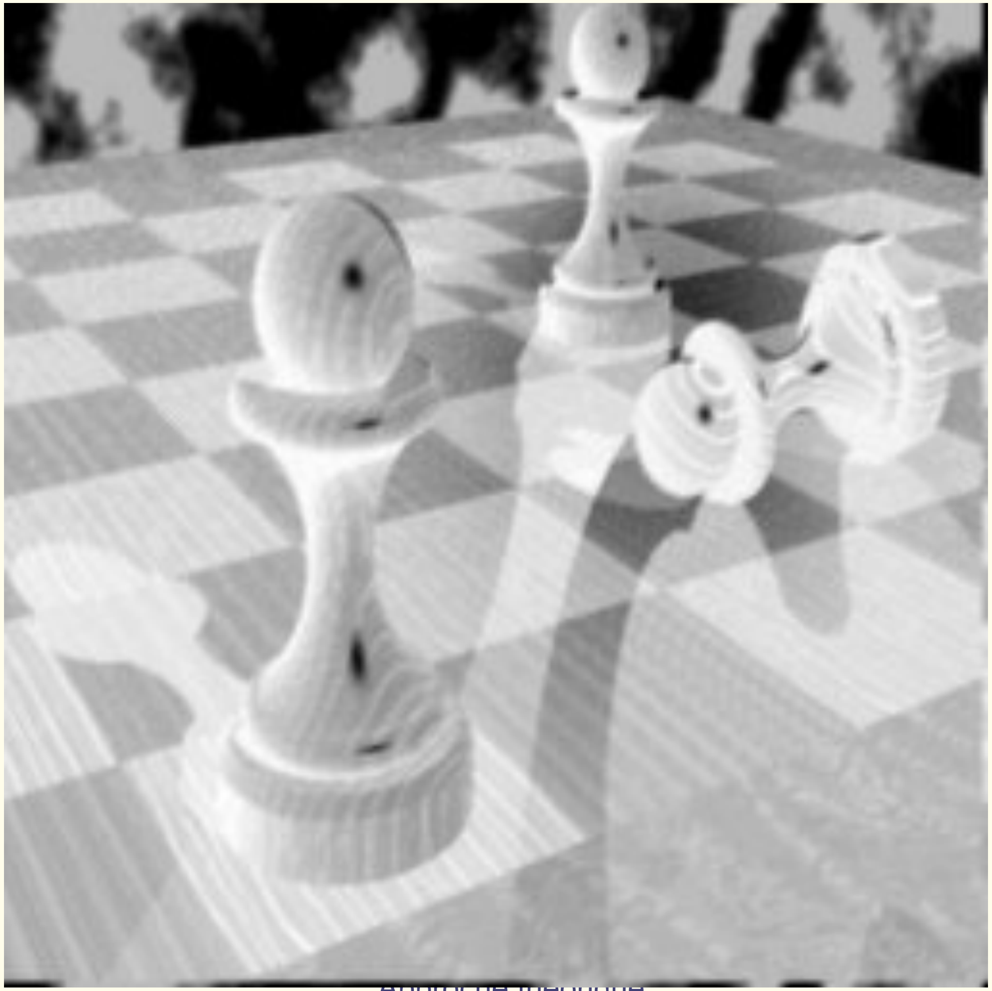
$$\psi_{a,b,\theta} = \frac{1}{a}\psi(a^{-1}R^{-1}(\vec{x}-\vec{b}))$$

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

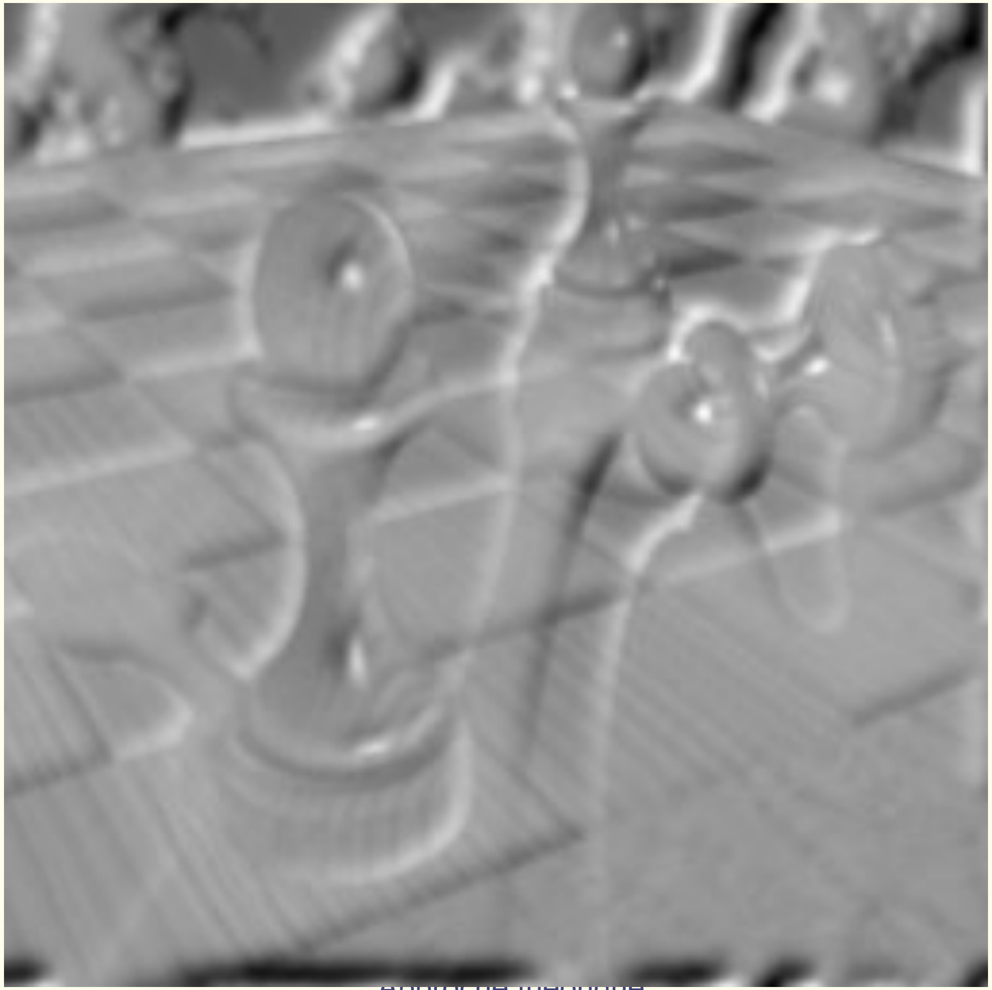
Exemple du pion-résol 0



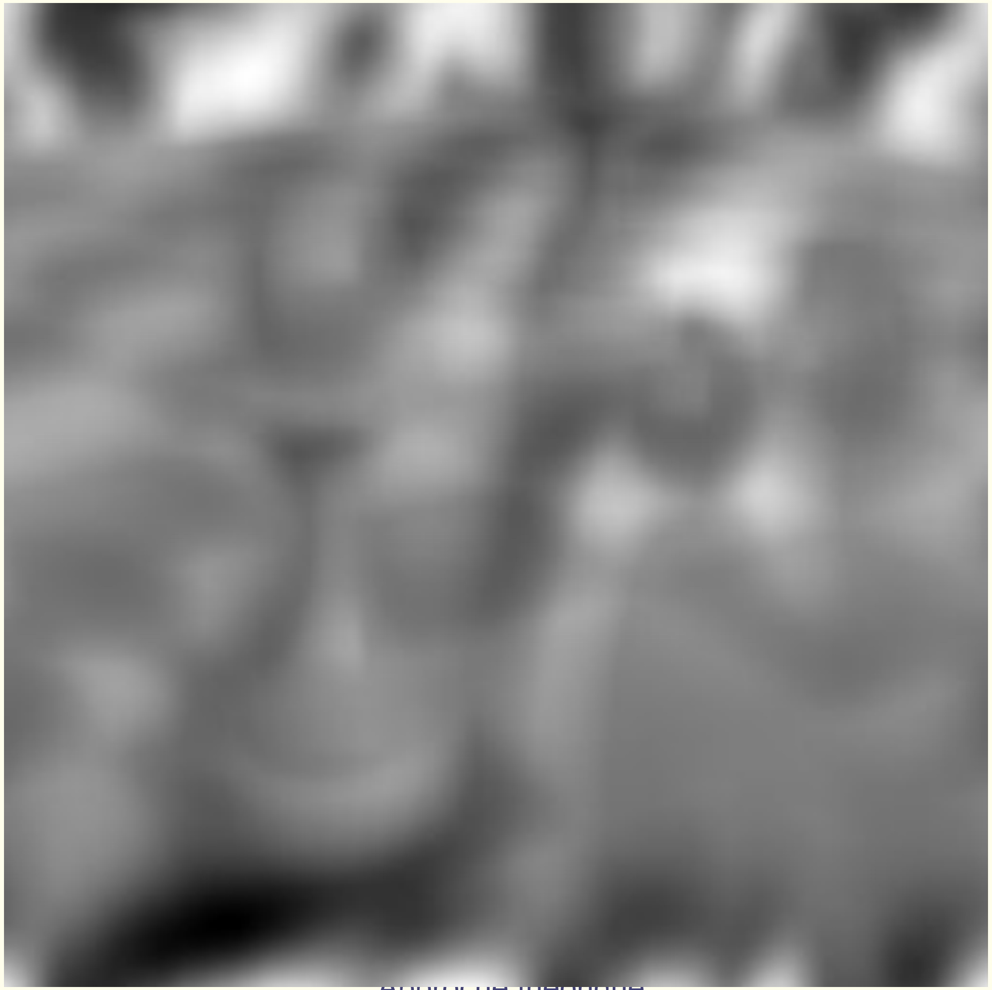
Exemple du pion-résol 4



Exemple du pion-résol 8



Exemple du pion-résol 12



Exemple du pion-résol 16