群论 第五讲 **变换群、Cayley定理、轨道与迷向子群**

由一个非空集合到它自身的一一对应映射构成的群，称为变换群（或称为置换群、对称群）。

变换的乘积定义为从右到左依次操作。

非空集合X的**全体置换**构成的群，称为**X的完全对称群**，记为S_X。当X有n个元素时，X的完全对称群 S_X 被称为 n阶对称群 S_n，S_n有 n! 个元素。

X的完全对称群 S_X 的一个子群，也是X的一个变换群（或称为置换群、对称群）。

二阶循环群Z2，空间反演群{E, I}，定轴转动群的子群{C(0), C(π)}这三个变换群在数学上是同一个群。

凯莱（Cayley）定理：群G总是同构于G的完全对称群S_G的一个子群。特别地，当G是n阶有限群时，G同构于S_n的一个子群。

如果集合X中的一个元素x，可以通过变换群的某个变换变成另一个元素y，则称元素x和y是等价的，记为 x～y。等价具有对称性和传递性。

x点经群G变换后可以到达的所有点，即与x等价的所有点组成的集合称为**含x的G轨道**。

由于G是X的变换群，在群G变换下，X的元素自然不会跑到X外面去。如果存在X的子集，它在群G变换下也不会跑到它的外面去，则称这个子集为G不变子集。即G也是该子集的变换群。

已知G是X的变换群，即X是G不变的，那么对于X的任意子集，都可以找到G的一个子群H，使得该子集是H不变的，即H是该子集的变换群。H总是存在的，因为至少只含单位元的平庸子群{e}可以满足要求。

二维转动群SO(2)=U(1)是二维平面上所有点的变换群。二维转动群也是以原点为圆心的圆周上所有点的变换群。平面上任一点的G轨道是一个以原点为圆心、过该点的圆周。G不变子集是原点以及这些同心圆的任意并集。

正方形对称群D4={e,r,r^2,r^3,a,b,u,v}，其中r是绕z轴转90度，a、b分别是沿对角线反射，u、v分别是沿x、y轴反射。

对于正方形(□ABCD)的任意子集Y，可找到D4群的一个子群H，使得子集Y是H不变的。

设G是X的变换群，使X中某一点x保持不变的所有变换构成一个群，称为**G对x的迷向子群**（isotropy subgroup），记为G_x。也即是说，x是其迷向子群G_x的不动点。

定理：记G_x为G对x的迷向子群，**“G_x的左陪集”与“含x的G轨道的点”是一一对应的**。

推论：设G是n阶有限群，则 G_x的左陪集的数目 = 含x的G轨道的点的数目。设G_x的阶为 n(G_x)，则含x的G轨道的点的数目是 n/n(G_x)。

D3群是正三角形的对称群，也是该三角形的三个顶点的对称群。D3群对A点的迷向子群是G_A={e,a}。左陪集bG_A={b,f}将A点映射为C点。左陪集cG_A={c,d}将A点映射为B点。含A的D3群轨道有n(D3)/n(G_A)=6/2=3个点（即A、B、C）。

D4群是正方形的对称群，也是该正方形的四个顶点的对称群。D4群对A点的迷向子群是G_A={e,b}。左陪集aG_A={a,r^2}将A点映射为C点。左陪集uG_A={u,r}将A点映射为B点。左陪集vG_A={v,r^3}将A点映射为D点。含A的D4群轨道有n(D4)/n(G_A)=8/2=4个点（即A、B、C、D）。